נושאים נבחרים בעיבוד תמונה -

תרגיל בית 1

מרצה:

ד״ר עופר לוי

מגישים:

יותם אילון 305407330

נדב לרר 302170378

ירדן זוהר 304972656

תאריך הגשה: **30/11/17**

1. בשאלה זו נדרשנו לטעון את תמונתה של ברברה ולשמור אותה בפורמטים שונים.

1.1. בסעיף זה נדרשנו לשמור את התמונה של ברברה בפורמטים **bmp** ו-**jpg** באמצעות פקודת **imwrite**. הגודל של קובץ ה- **bmp** הוא **66 [kb]** ושל קובץ ה-**jpg** הוא **13 [kb]**.

1.2. בסעיף זה נדרשנו לשמור את התמונה כקובץ **jpg** במספר איכויות שונות, לאחר מכן לקרוא את הקבצים השמורים לתוך ה-**Matlab**, להציג את התמונות ולשמור את ערכי המטריצות בקובץ **mat**. בטבלה 1 ניתן לראות את גדלי הקבצים כתלות באיכויות השונות.

<u>טבלה 1:</u> גדלי הקבצים כתלות באיכויות השונות.

q – **איכות התמונה**	**גודל בזיכרון** [kb]
1	2
5	3
15	5
25	6
100	50

באיור 1.1 ניתן לראות את התמונות שנשמרו בפורמטים **jpg** (מימין) ו-**bmp** (משמאל).

<u>איור 1.1:</u> תמונות של ברברה בפורמט jpg (מימין) ו-bmp.

באיורים 1.2 ו-1.3 ניתן לראות את התמונות שנשמרו באיכויות השונות בפורמט **jpg**.

<u>איור 1.2:</u> תמונתה של ברברה כאשר **q=1**, **q=5** ו-**q=15** (מימין לשמאל בהתאמה).

איור 1.3: תמונה של ברברה כאשר **q=25** ו-**q=100** (מימין לשמאל בהתאמה).

2. בשאלה זו נדרשנו לקחת חלק קטן מהתמונה המקורית ולבצע עליו זום באמצעות אינטרפולציה מסדר 0 ומסדר 1.

2.1. לצורך ביצוע אינטרפולציה מסדר 0, ביצענו השמה לערכי המטריצה הצמודים לערכים המקוריים, לפי הערך של האיבר הצמוד.

2.2. לצורך ביצוע אינטרפולציה מסדר 1, השתמשנו בפילטר שמבצע את הפעולה הרצויה. הערך של כל תא הוא ממוצע משוכלל של הערכים מסביבו. למימוש הפילטר הנבחר השתמשנו בפונקציית קונבולוציה.

באיור 2.1 ניתן לראות את התמונה לאחר ביצוע האינטרפולציות השונות.

איור 2.1: תמונה לאחר זום ואינטרפולציה מסדר אפס (מימין) ומסדר ראשון (משמאל).

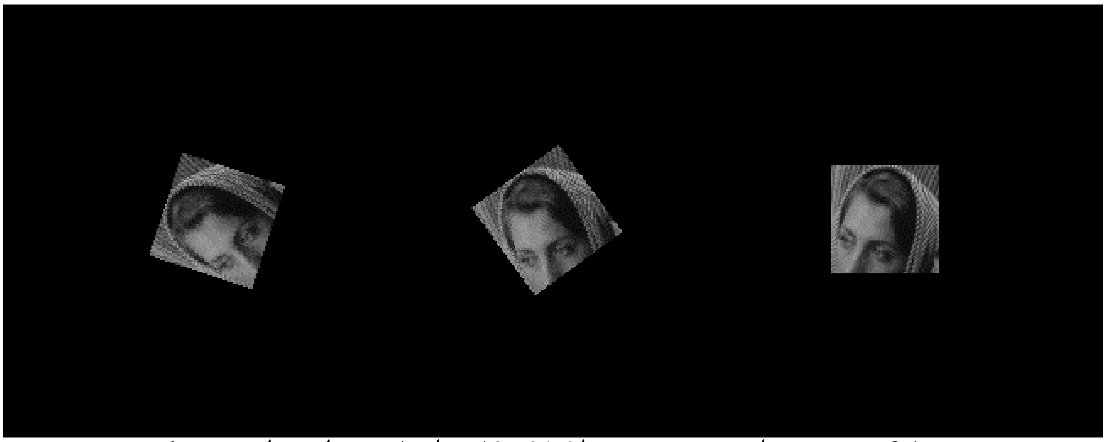
3. בשאלה זו נדרשנו לסובב את התמונה המוקטנת של ברברה ב-360 מעלות, ב-10 איטרציות. מימשנו את פעולת הסיבוב בשני אופנים שונים, כאשר בעבור שניהם האלגוריתם פועל תחילה באופן זהה. בשלב ראשון נשמרו מימדי התמונה המקורית והמוקטנת ונבנתה מטריצה בגודל המקורי אשר במרכזה נמצאת התמונה המוקטנת. לאחר מכן נשמרה נקודת מרכז התמונה ונבנתה מערכת צירים קרטזית לפי האינדקסים. מתוך מערכת הצירים נבנתה מערכת צירים חדשה בקואורדינטות פולריות. משלב זה רצה לולאה של **for** לצורך ביצוע 10 איטרציות של סיבוב. בכל סיבוב של הלולאה מתווספת הזווית הרצויה לסיבוב מהמצב ההתחלתי. את הפריסה הפולרית שמתקבלת המרנו חזרה לפריסה קרטזית ומחקנו ערכים לא אפשריים שהתקבלו בעקבות הסיבוב (ערכים שנמצאים מחוץ לתמונה המקורית). משלב זה הפתרון התחלק לשני חלקים:

דרך א' – שימוש בפונקציה **sub2ind** של מטלב על מנת שנוכל לשנות את האינדקסים של התמונה המקורית. נבנתה מטריצה חדשה **ImCPlot** אשר ביצענו את ההשמה של הפיקסלים לתוכה בהתאם לגריד החדש (המסובב).

דרך ב' – שימוש בשתי לולאות **for** לצורך ביצוע השמה לערכים של המטריצה בהתאם לאינדקסים.

לבסוף מתבצעת הדפסה למסך של התמונה לאחר הסיבוב והשהייה לשנייה. לצורך השוואה בין הדרכים השונות חישבנו את זמני הריצה באמצעות **tic** ו-**toc**, ונמצא שזמן הריצה של דרך א' הייתה מהירה ב-30% מדרך ב'.

באיור 3.1 ניתן לראות את התמונה עם סיבוב של 0, 36 ו-72 מעלות.



__איור 3.1:__ תמונתה של ברברה בסיבוב של 0, 36 ו-72 מעלות (מימין לשמאל בהתאמה).

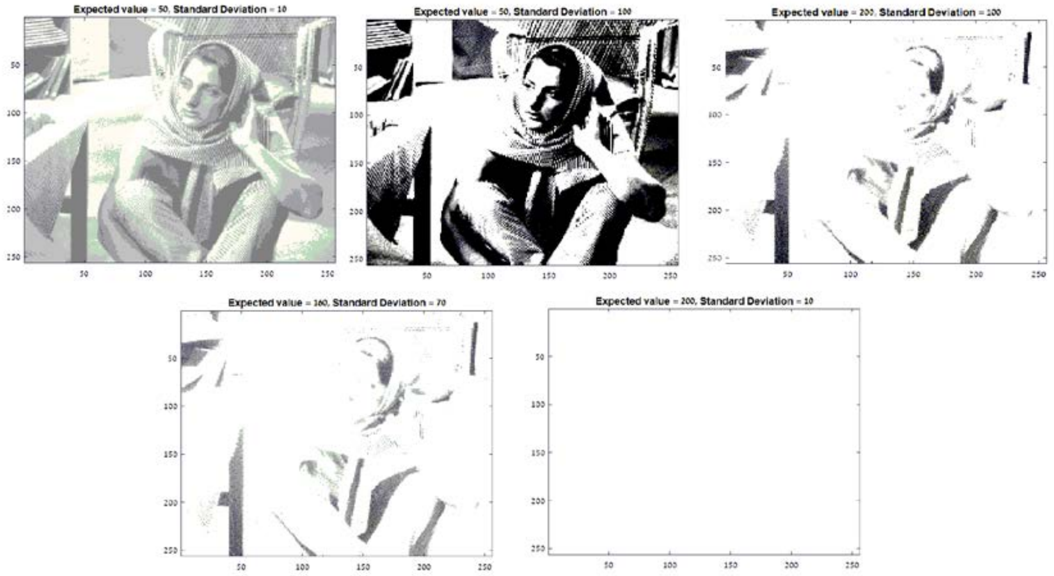
4. היסטוגרמה ומתיחה.

4.1. בסעיף זה חישבנו את סטיית התקן והתוחלת של ערכי הפיקסלים באמצעות הפונקציות הקיימות במטלב:

$$\sigma = 40.0495$$

$$\mu = 88.0645$$

4.2. בסעיף זה נדרשנו לבצע תקנון לערכי הפיקסלים של התמונה, על מנת לקבל התפלגויות עם תוחלת וסטיית תקן משתנה. באיור 4.1 ניתן לראות את התמונות השונות שהתקבלו.



__איור 4.1:__ תמונותיה של ברברה עבור ההתפלגויות השונות לאחר תקנון.

התקנון בוצע על ידי נרמול, הכפלה בסטיית התקן החדשה ותוספת של התוחלת החדשה, כדלקמן:

$$x_{new}(i,j) = \sigma_{new} \cdot \left(\frac{x(i,j) - \mu}{\sigma}\right) + \mu_{new}$$

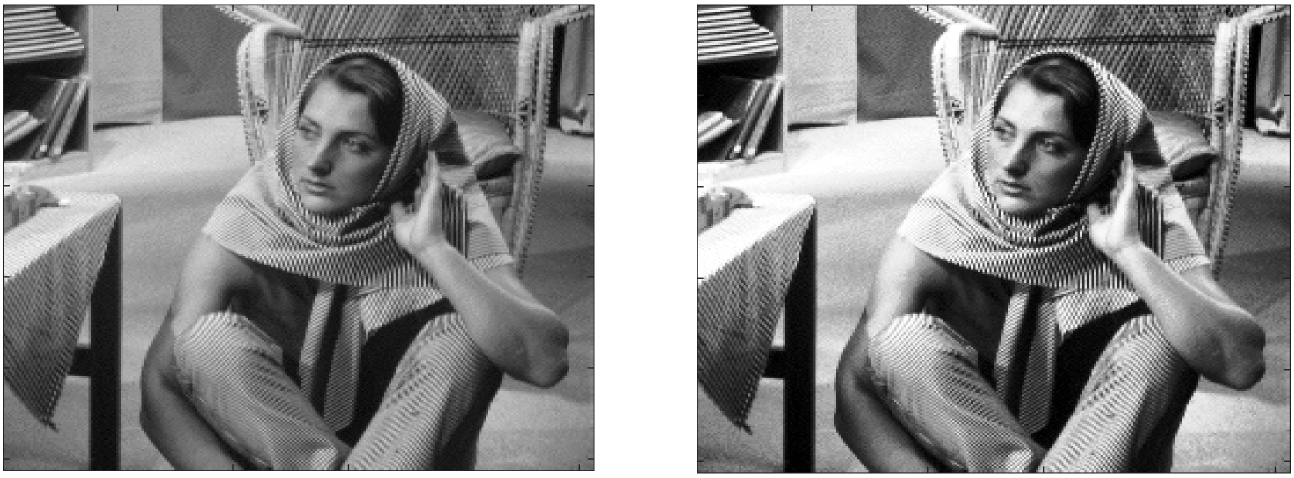
כאשר $\boldsymbol{x(i,j)}$, מסמל ערך פיקסל בתמונה המקורית ו $\boldsymbol{\mu, \sigma}$- הם סטיית התקן והתוחלת של ערכי הפיקסלים בתמונה המקורית, וחושבו בסעיף הקודם.

מהתבוננות בתמונות שהתקבלו, ניתן להבחין כי ככל שהגדלנו את התוחלת כך התמונה נהפכה לבהירה יותר (מה שהיינו מצפים לקבל מכיוון שערכי פיקסלים גבוהים הם בהירים). כמו כן בין שתי התמונות בעלות תוחלת של 50 וסטיית תקן שונה, ניתן לראות הבדלים משמעותיים בניגודיות התמונה (מה שהיינו מצפים לקבל מכיוון שסטיית תקן גבוהה משמעותה טווח רחב יותר של פיקסלים).

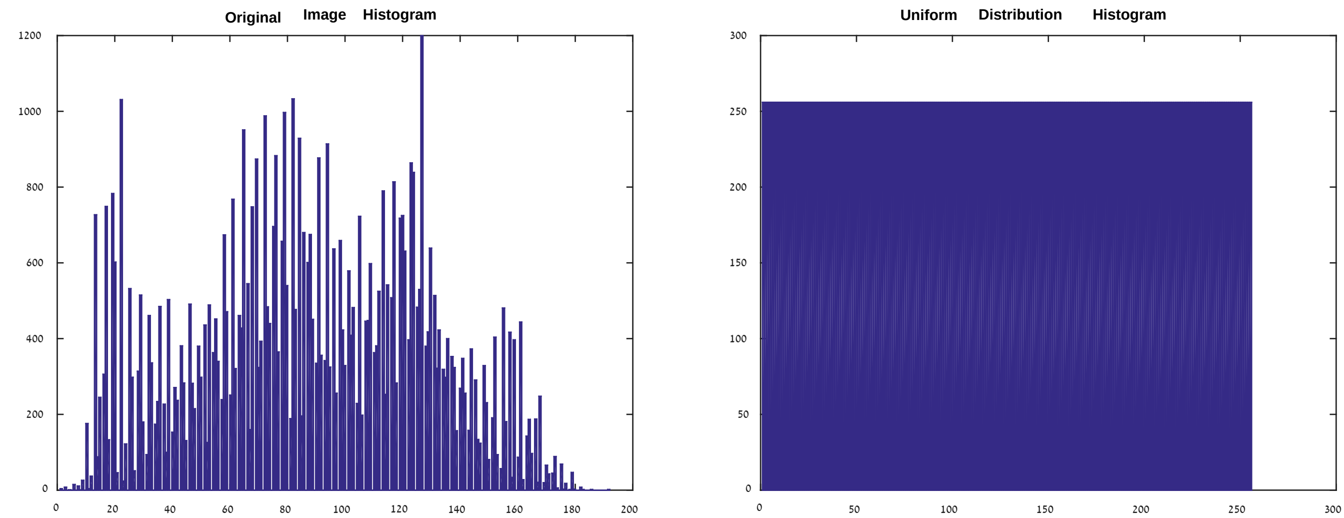
4.3. בסעיף זה נדרשנו לבצע מתיחה לתמונה כך שתתקבל התפלגות אחידה של ערכי הפיקסלים.
את סעיף זה פתרנו בשתי דרכים שונות. הפתרון הראשון הינו הפתרון דיסקרטי של השמת ערכי הפיקסלים בהתאם להתפלגות, והפתרון השני הינו אנליטי.

4.3.1. דרך א': השמת ערכי הפיקסלים בהתאם להתפלגות האחידה.

בנינו מטריצה בעלת שתי עמודות, כאשר בעמודה הראשונה מסודרים ערכים הפיקסלים בסדר עולה, ובעמודה השנייה מסודרים המיקומים שלהם בתמונה המקורית כאשר היא פרוסה לווקטור עמודה. בהתאם לסידור זה, ביצענו השמה ידנית לערכי הפיקסלים כך שיקיימו התנהגות של התפלגות אחידה. לאחר מכן ביצענו סידור מחדש של הפיקסלים בהתאם למיקומם המקורי בתמונה. באיורים 4.2 ו-4.3 ניתן לראות את התמונה שהתקבלה לאחר המתיחה ואת ההיסטוגרמה החדשה, בהשוואה לתמונה המקורית.



איור 4.2: תמונתה של ברברה לאחר מתיחה (מימין) ולפני המתיחה (משמאל).



איור 4.3: ההיסטוגרמה של התמונה לאחר מתיחה (מימין) ולפני המתיחה (משמאל).

4.3.2. דרך ב': פתרון אנליטי.

עבור משתנה מקרי **X** אשר מייצג ערך בהירות של פיקסל בתמונה המקורית, נוכל להציג היסטוגרמה מנורמלת (במספר הפיקסלים) אשר מייצגת את הצפיפות של מ"מ **X** היינו את פונקציית צפיפות ההסתברות. נרצה לבצע טרנספורמציה למ"מ חדש **Y** אשר לו פונקציית צפיפות הסתברות אחידה. משתנה **Y** יוגדר כדלקמן:

$$Y = T(X)$$

תחילה נראה מה התיאוריה בעזרתה נמצא את צפיפות ההסתברות של **Y**, ולאחר מכן נציע **T** כזה כך שזו תהיה אחידה, כלומר:

$$\mathrm{Y} \sim \mathrm{U}(0,255)$$

[1]**מוטיבציה:** יהי $\boldsymbol{X}$ מ"מ רציף מעל מרחב הסתברות $(\Omega, P, \sigma_{Borel})$ בעל צפיפות (הסתברות) $f_X(X)$. תהי $\mathrm{Y} = \mathrm{T}(X)$ העתקה מונוטונית עולה בעלת פונקציה הופכית $\mathrm{T}^{-1}(X)$.
צפיפות ההסתברות של מ"מ $\boldsymbol{Y}$, נתונה ע"י:

$$f_Y(y) = f_X\left(T^{-1}(y)\right) \cdot \left|\frac{dT^{-1}(y)}{dy}\right|$$

עבור **T** חד-חד-ערכית ועל, נוכל לכתוב $\mathrm{T}^{-1}(y) = x$ ולכן נקבל:

$$f_Y(y) = f_X(x) \cdot \left|\frac{dx}{dy}\right|$$

ההוכחה מתקבלת ישירות מהצבת **Y** בפונקציית הצפיפות **המצטברת** וגזירתה במשתנה $\boldsymbol{y}$ לכדי קבלת פונקציית **צפיפות** ההסתברות. **העתקה מתאימה** - נוכל להגדיר את ההעתקה **T** באופן הבא:

$$y = T(x) = 255\int_0^x f_X(v)dv$$

היינו רוצים כאמור למצוא את $\mathrm{T}^{-1}(y)$ ואז לגזור לפי משתנה y, אך נוכל לפעול בדרך הבאה: (כפי שראינו עד כה, לא נתעכב על דיוקים מתמטיים ויתכן כי אלו דרושים, אך אינם חשובים לעבודה זו).

[1] https://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/19770022806.pdf#page=29 המאמר המתאר את התהליך

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\left(255\int_0^x f_X(v)dv\right)}{dx} = 255 f_X(x)$$

כאשר השוויון האחרון נובע מחוק האינטגרציה של לייבניץ. על כן :

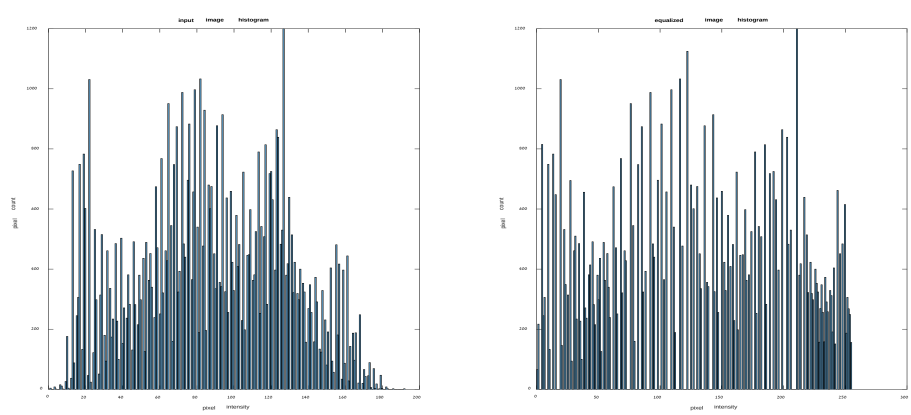
$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{255 f_X(x)}$$

ובהצבה לביטוי שלעיל׳ נקבל :

$$f_Y(y) = f_X(x) \cdot \left|\frac{dx}{dy}\right| = \frac{1}{255}$$

כלומר בידינו העתקה בעזרתה נקבל כל פיקסל בתמונה החדשה אשר בהירותו מיוצגת ע״י מ״מ Y . חשוב לציין כי נעבוד בערכים שלמים ולכן ניאלץ לעגל לכדי ערכים כאלו. בנוסף ניתן לראות כי ההעתקה שקיבלנו הינה הצפיפות המצטברת של מ״מ X, פונקציה אותה קל לחשב בהינתן וקטור הצפיפות (אשר גם אותו ניתן לחשב בקלות לדוגמא ע״י לולאת ספירה, אך אין זה נדרש בעבודה ונשתמש בפונקציית היסטוגרמה פשוטה וכן בפונקציית סכום קומולטיבי של וקטור ההיסטוגרמה).

__איור 4.4__ : בצד שמאל ניתן לראות את התמונה המקורית ומימין את התמונה לאחר איקווליזציה. ניתן לראות כי הניגודיות טובה הרבה יותר בתמונה הימנית, שכן היא עושה שימוש בטווח רחב יותר של בהירות.



__איור 4.5:__ בצד שמאל ניתן לראות את ההיסטוגרמה של התמונה המקורית, ובצד ימין של זו שעברה איקווליזציה. יש לציין כי אנו עובדים בטווח בדיד מ-0 ל – 255, ולכן שגיאות ההעגלה יגרמו לחורים ולסטייה מהתפלגות אחידה.

ניתן לראות כי הפיכת היסטוגרמה לאחידה מגדילה את הניגודיות בתמונה, זאת ע"י שימוש מלא בתחום הגוונים (0-255). בנוסף לכך ניתן לראות כי בעקבות מתיחת ההיסטוגרמה והעגלות שבוצעו בדרך, נקבל "חורים" בהיסטוגרמה, כלומר לא נקבל בתמונה החדשה שימוש רציף בתחום הגוונים.

4.4. בסעיף זה נדרשנו לבצע מתיחה לתמונה כך שתתקבל התפלגות נורמלית של ערכי הפיקסלים, עם שונות של 70 ותוחלת של 160. גם את סעיף זה פתרנו בשתי דרכים שונות. הפתרון הראשון הינו הפתרון דיסקרטי של השמת ערכי הפיקסלים בהתאם להתפלגות, והפתרון השני הינו אנליטי.

4.4.1. דרך א': השמת ערכי הפיקסלים בהתאם להתפלגות הנורמלית.

בנינו מטריצה בעלת שתי עמודות, כאשר בעמודה הראשונה מסודרים ערכים הפיקסלים בסדר עולה, ובעמודה השנייה מסודרים המיקומים שלהם בתמונה המקורית כאשר היא פרוסה לווקטור עמודה. בהתאם לסידור זה, ביצענו השמה ידנית לערכי הפיקסלים כך שיקיימו התנהגות של התפלגות אחידה. בגלל מגבלת ערכי הפיקסלים וממדי התמונה, מצאנו כי ניתן לבצע את ההשמה בצורה כמעט מושלמת עבור תוחלת של 128 ושונות של 44.337. לאחר מכן ביצענו סידור מחדש של הפיקסלים בהתאם למיקומם המקורי בתמונה. לבסוף, השתמשנו בפונקציה מסעיף 4.2 על מנת לשנות את ערכי השונות והתוחלת לערכים הדרושים בסעיף זה. באיורים 4.6 ו-4.7 ניתן לראות את התמונה שהתקבלה לאחר המתיחה ואת ההיסטוגרמה החדשה, בהשוואה לתמונה המקורית.

איור 4.6: תמונתה של ברברה לאחר מתיחה (מימין) ולפני המתיחה (משמאל).

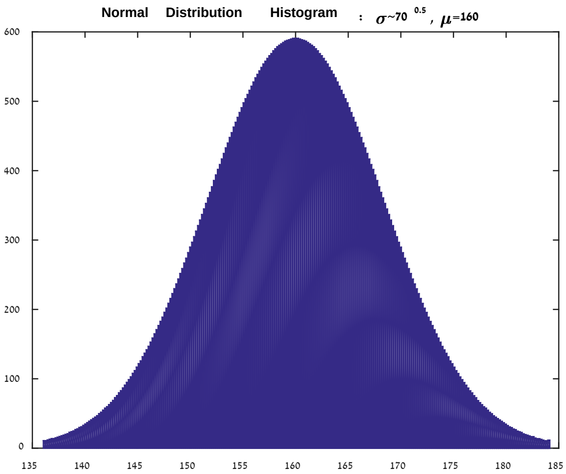
איור 4.7: ההיסטוגרמה של התמונה לאחר מתיחה (מימין) ולפני המתיחה (משמאל).

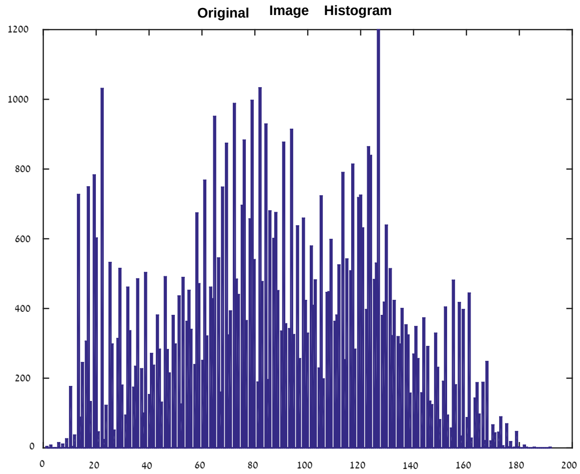
4.4.2. דרך ב': פתרון אנליטי.

כעת כאשר יש בידינו כלי להפוך כל היסטוגרמה לאחידה, נוכל לבצע "התאמת היסטוגרמה" (*histogram matching*). התאמת היסטוגרמה היא הפיכת כל היסטוגרמה נתונה להיסטוגרמה אחרת אשר נתונה לנו באופן חד משמעי ואשר נוכל לקבל את הפונקציה ההפוכה לפונקציית ההסתברות המצטברת שלה. כאמור, בהינתן תמונה בעלת התפלגות גוונים אחידה אשר מפולגת לפי:

$$Y \sim U(0,255)$$

כאשר שוב, Y הוא מ"מ המייצג חוזק\גוון (*intensity*) של פיקסל בתמונה. נוכל לטעון כי תמונה זו





התקבלה כתוצאה מטרנספורמציה כלשהי:

$$y = T(z) = 255 \int_0^z f_Z(v)dv$$

על מ"מ **Z**, המייצג גוון של פיקסל מתמונה בעלת התפלגות $f_Z(z)$. ולכן בהינתן הטרנספורמציה ההפוכה $z = T^{-1}(y)$ נוכל כעת למפות כל פיקסל מהתמונה המפולגת אחיד לתמונה המפולגת לפי $f_Z(z)$.

מנתוני השאלה נראה כי:

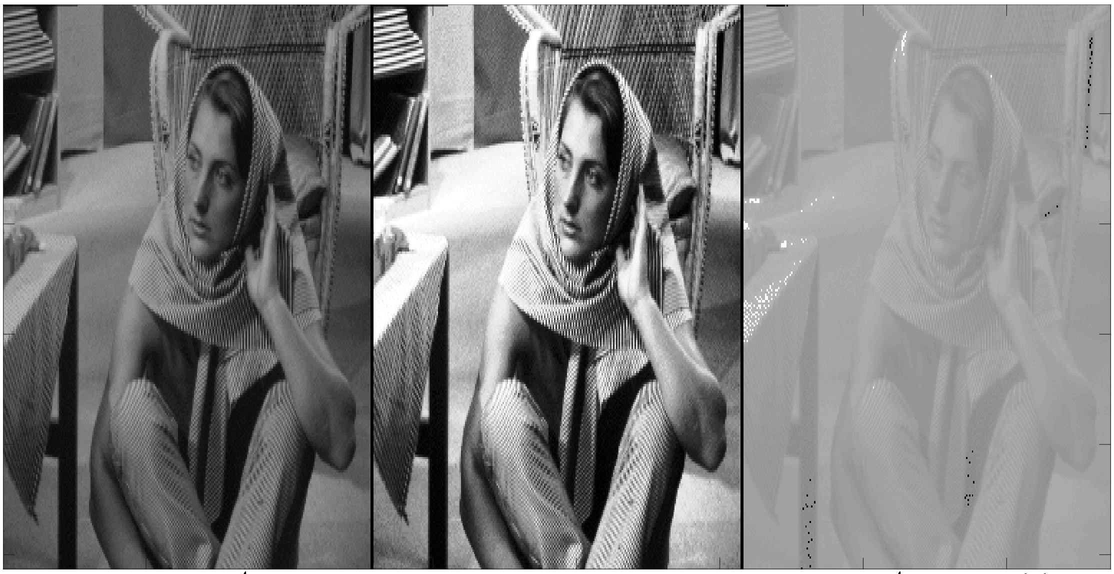
$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 70}} e^{-\frac{(z-160)^2}{2 \cdot 70^{0.5}}}$$

כלומר **Z** מפולג נורמלית עם תוחלת 160 ושונות 70 (יש לציין כי בהוראות העבודה כתוב **שונות** ולא סטיית תקן, אי לכך סטיית התקן קטנה, ולכן התמונה שתתקבל תהיה בעלת ניגודיות נמוכה). ומכיוון שנוכל לעשות שימוש בפונקציות של מטלב לחישוב פונקציית ההתפלגות המצטברת

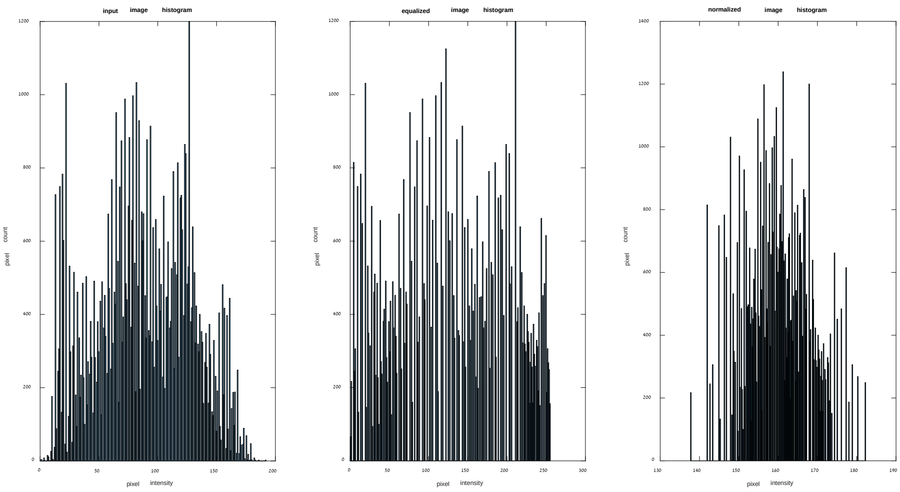
ההופכית של $\mathbf{Z}$, נוכל לבצע טרנספורמציה של כל פיקסל בתמונה המפולגת אחיד לזו המפולגת נורמלי.

$$z = F_Z^{-1}\left(\frac{y}{255}\right)$$

להלן התוצאות:



איור 4.4: בצד שמאל אנו רואים את התמונה המקורית, במרכז את זו מהסעיף הקודם בעלת ההיסטוגמה האחידה (כביכול) ובצד ימין את זו בעלת ההתפלגות הנורמלית. מכיוון והשונות הנתונה לביצוע קטנה מאוד ביחס לטווח הצבעים, נקבל ניגודיות נמוכה מאוד בתמונה החדשה (הימנית)



איור 4.5: ההיסטוגרמות המתאימות לתמונות שבאיור 4.4.

פעם נוספת אנו רואים כי שימוש בטווח בדיד עבור תיאוריה אשר פותחה עבור משתני אקראיים רציפים, תניב חורים עקב שגיאות העלה וכן סטייה מההתפלגות הנדרשת.

את הפונקציה ההופכית לפונקציית ההסתברות המצטברת הגאוסית, נוכל לקבל משימוש בטבלאות לאחר תיקנונים שונים, מחישוב נומרי, או משימוש בפונקציית מטלב ייעודית. מכיוון ועיקר העבודה אינו חישוב נומרי, השתמשנו בפונקציית המטלב.