<u>נושאים נבחרים בעיבוד תמונה</u>

<u>פרויקט מסכם מספר 2</u>

Inpainting interpolation of an image with a large amount of missing data via energy cost function optimization and wavelet transform

<u>מרצה:</u>

ד״ר עופר לוי

<u>מגישים:</u>

יותם אילון 305407330

נדב לרר 302170378

ירדן זוהר 304972656

1. מבוא

בפרויקט זה נרצה לשחזר תמונה אשר 92.5% מהפיקסלים בה חסרים. שחזור זה היה יכול להתבצע במספר דרכים, בעבודה זו, נעשה זאת ע״י אופטימיזציה של פונקציית מחיר אשר המוטיבציה להגדרתה תובהר בפרק הבא. בפועל, נראה כי הגדרת פונקציית מחיר מתאימה ע״י ממוצע משוקלל של מקדמי האדוות, ושימוש בפתרון Conjugate Gradient אשר עבר מודיפיקציה קלה, יניב תוצאות מרשימות למדי.

2. פונקציית המחיר

נעסוק תחילה במונחי התמרות פורייה, זאת לשם קבלת אינטואיציה להגדרת פונקציית המחיר שנציג בהמשך.

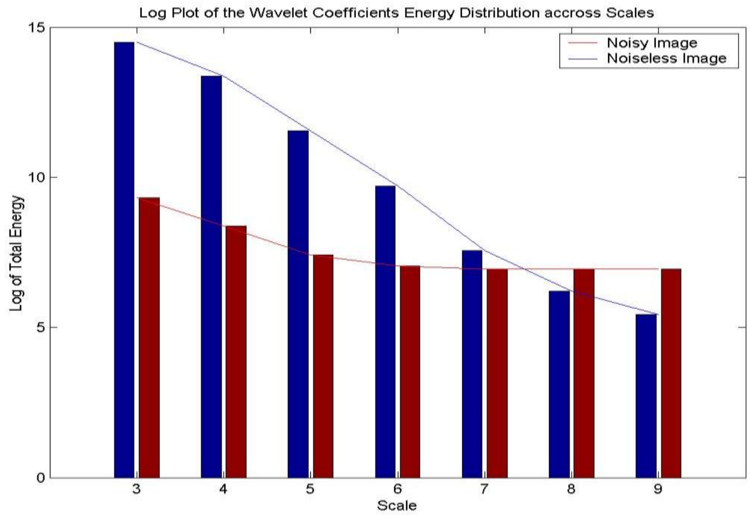
[1]ע״פ משפט פרסבאל (אותו למדנו בקורס), נורמת L_2 הינה אינוואריאנטית תחת התמרת פורייה. בעצם, זהו מעין משפט שימור אנרגיה אשר טוען כי כמות האנרגיה במערכת אינה משתנה במעבר בין הצגות בבסיסים שונים, כלומר:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(v)|^2 dv = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{x}(f)|^2 df$$

לרוב, בתמונות טבעיות ניתן לצפות כי צפיפות האנרגיה של אות (תמונה כאות דו-ממדי) תדעך בצורה אקספוננציאלית. כלומר ככל שהתדר עולה, נצפה לקבל צפיפות אנרגיה נמוכה יותר. זאת, מכיוון ותדרים גבוהים המאופיינים ע״י שינויים מהירים בערכי האות, אינם נפוצים בתמונה טבעית בה פיקסלים שכנים נוטים להיות בעלי ערך דומה\גרדיינט מתון יחסית. עם זאת, בתמונה רועשת (רעש גאוסי כפי שראינו בעבר למשל) נצפה לקבל שינויים מהירים בין ערכי הפיקסלים עקב הרעש, ולכן בפועל צפיפות האנרגיה אינה דועכת אקספוננציאלית אם כי מגיעה למעיין ישורת. טיפול הולם בתמונה רועשת יהיה באמצעות הפעלת פילטרים שונים במישור התדר (מסנן מעביר נמוכים מסוג Butterworth או מסנן גאוסי כפי שראינו בעבודה 2), עם זאת בתמונה בה חסרים מרבית הפיקסלים כמו במקרה שלנו, דרושה דרך מתוחכמת יותר ממניפולציה במישור התדר על-מנת לקבל תוצאות טובות.

מכיוון והרמות החיצוניות בהתמרת האדוות מייצגות את השינויים המהירים (נזכור כי שלושת הרביעים, פרט לזה שבקצה השמאלי העליון הם רכיבי HH,HL,LH), נוכל לקבל ייצוג דומה גם עבור התמרת האדוות, כפי הנראה באיור 2.1. (ככל שנעמיק ברמות נקבל כמובן את ה״פילטרים״ של קווי המתאר האופקיים/אלכסוניים/אנכיים הפועלים על הרביע השמאלי העליון אשר מייצג את הממוצע).

[1] רקע תיאורטי ודוגמאות בקישור הבא:
http://www.groupes.polymtl.ca/ele2700/docs/Chap12-CorinthBookDraft-final2.pdf



איור 2.2: צפיפות האנרגיה (בסקאלה חצי לוגריתמית ולכן נראה יחסית לינארי) עבור סקאלות שונות של התמרת אדוות לתמונה רועשת ורגילה

מסיבה זו, להגדרת פונקציית המחיר ומזעורה יש מוטיבציה ברורה, והיא מזעור סכום מקדמי האדוות המשוקלל, כאשר המשקולות גדלות אקספוננציאלית בהתאם לרמה של המקדמים. מזעור שכזה יבטיח דעיכה אקספוננציאלית של צפיפות האנרגיה. המטרה כאמור למצוא את:

$$\min_{w_j^s}\left[\sum_{s}\sum_{j_s} 2^{p\cdot s}\left|w_{j_s}^s\right|^2\right]$$
$$s.t.:\quad x(p_i)=b_i \qquad \forall p_i\in \boldsymbol{P_b}$$

ובהצגה מטריציונית בעזרת מטריצה אלכסונית D נוכל לכתוב את הביטוי כך:

$$\min_{w}\quad w^T D w$$
$$s.t.:\quad Px=b$$

מקורה של התמרת האדוות בהפעלת אופרטור לינארי A על התמונה x באופן $w=Ax$ ולכן נוכל לסמן:

$$\min_{w} x^T(A^T D A)x$$
$$s.t.:\quad Px=b$$

כאשר נגדיר $\tilde{A} \triangleq D^{\frac{1}{2}}A$ נוכל להמשיל את הבעיה לבעיית הריבועים הפחותים (ללא אילוץ הפיקסלים הקיימים, אשר נכניס לפתרון בצורה "מלאכותית"):

$$min \left\|\widetilde{A}\,x - b\right\|^2 \rightarrow \widetilde{A}^{\,T}\widetilde{A}\,x = \widetilde{A}^{\,T}b$$

בבעיה זו כאמור $b = 0$ ולכן נוכל לפתור את הבעיה

$$\widetilde{A}^{\,T}\widetilde{A}\,x = 0 \rightarrow A^T DAx = 0$$

ובכדי להימנע מהפתרון הטריוויאלי, נוכל לאלץ את הפיקסלים הקיימים בצורה "מלאכותית".

ניתן לשים לב כי המטריצה $A^T DA$ מוגדרת חיובית ולכן השימוש בפתרון הפועל באלגוריתם האיטרטיבי $(C.G)$ $Conjugate\ Gradient$ אידאלי.

3. מודיפיקציה לאלגוריתם $(C.G)$

כאמור, ניאלץ לבצע מודיפיקציה לפונקציה הקיימת אשר ניתנה לנו. תחילה נשים לב כי מכיוון ואופרטור ההתמרה בנוי בפועל ממטריצת ענק אורתוגונלית A, האופרטור A^T מייצג את ההתמרה ההופכית (מכיוון ו $AA^T = I$ מאורתוגונליות הבסיס), נוכל בפועל להשתמש בספרייה של *wavelab 850 – orthogonal* כאשר במקום שימוש במטריצה נוכל להפעיל את האופרטור בצורת הפונקציות $IWT2\_PO$, $FWT2\_PO$.

נציג להלן את הפונציה בה השתמשנו:

```
function [ xj,Counter,error ] = MyCGImageInterp( Im, MinS, Filter, P, tol, type )
```

פונקצייה זו תקבל את התמונה $(Im \in R^{n\times n},\ \ \log_2 n\ \in N)$ בה חסר המידע, את רמת התמרת האדוות המינימלית *MinS* אשר חסומה מלעיל ע"י מימדי התמונה בצורה הבאה:

$$0 \leq MinS \leq \log_2 n - 1$$

בנוסף תקבל הפונקצייה מחרוזת בכדי לתאר את סוג הבסיס בו נשתמש, לדוגמה $Filter = 'Daubechies'$, וכן את אורך ווקטור ה- qmf בו נבחר $(type)$ (עבור פילטר $Haar$ אין משמעות לקלט זה והוא זהה ל-$Daubechies$ עבור $type = 2$),

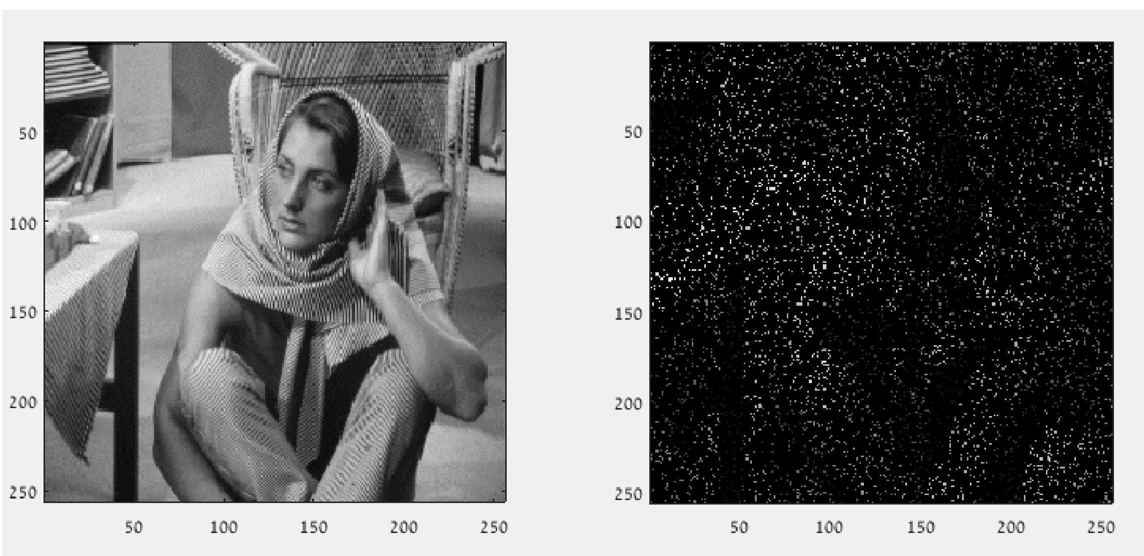
הפונקציה תקבל גם את פרמטר הקנס P אותו נבחן, וכן את הטולרנס tol אשר ייקבע את תנאי העצירה.

בפלט הפונקציה נקבל את התמונה המתוקנת x_j, את מספר האיטרציות עד הגעה לטולרנס - $Counter$.

המודיפיקציות אשר נעשו לפונקציה המקורית של CG ע"מ שנוכל לטפל בבעיה זו, מצוינות בהערות בפונקציית המטלב.

4. תוצאות

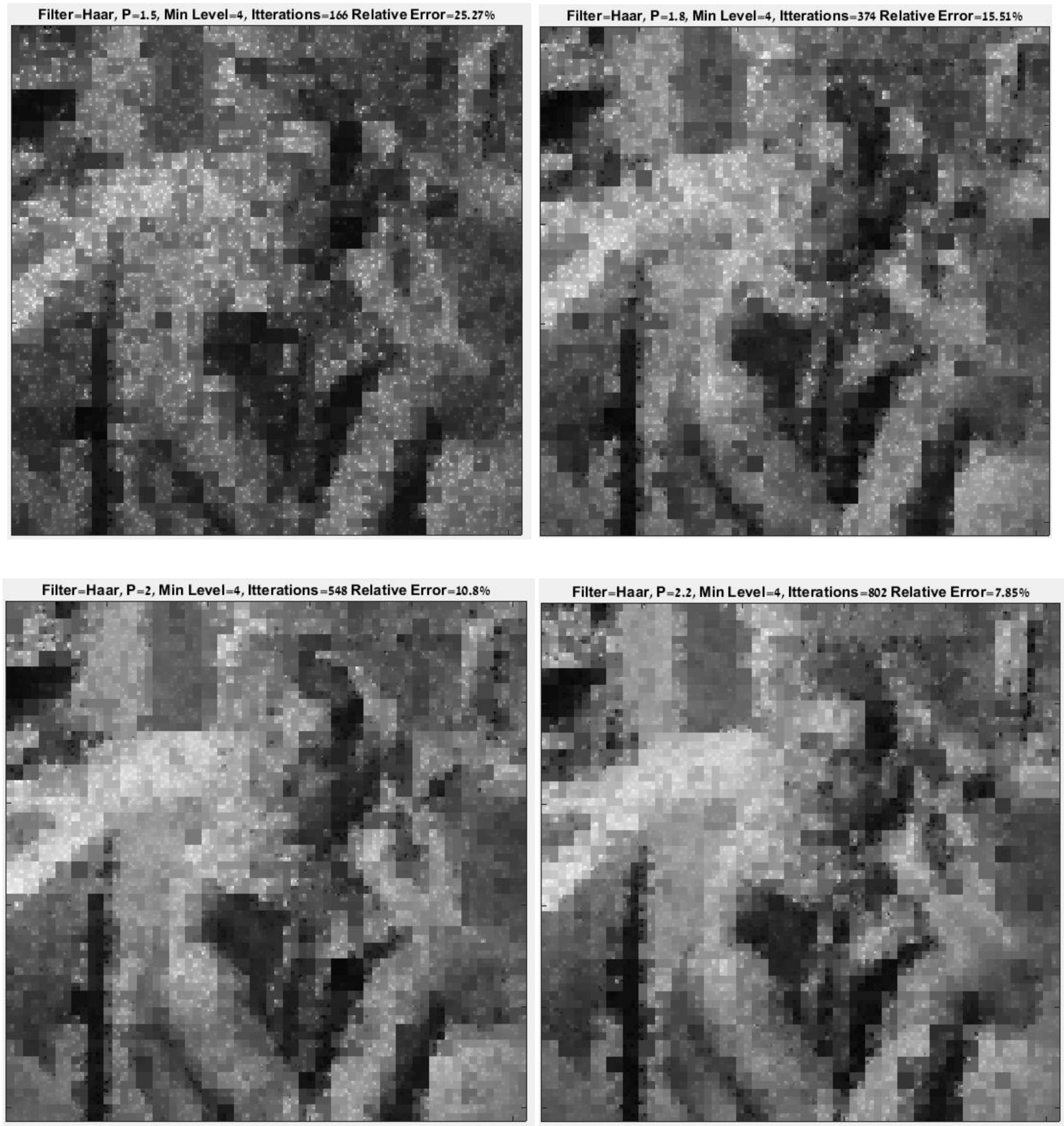
נציג להלן את תוצאות האינטרפולציה עבור בסיסים שונים ופרמטרי קנס שונים. לצורך האחידות וביצוע ההשוואה, נשתמש ב - $tol = 10^{-2}$ קבוע. באיור 4.1 ניתן לראות את התמונה המקורית והתמונה עם הפיקסלים החסרים.



איור 4.1: התמונה המקורית והתמונה המייצגת 7.5% מהמידע הקיים בתמונה המקורית

להלן ניתן לראות את ההרצות השונות של פונקציית השחזור עבור הבסיסים השונים, בשינוי פרמטר המחיר (P), ורמת מקדמי אדוות ($MinS$).

4.1. בסיס *Haar* –



איור 4.2: התוצאות עבור רמת מקדמי אדוות – 4, עבור המחירים השונים.

איור 4.3: התוצאות עבור רמת מקדמי אדוות – 3, עבור המחירים השונים.

איור 4.4: התוצאות עבור רמת מקדמי אדוות – 2, עבור המחירים השונים.

מתוך המקרים שנבחנו, ניתן לבחון את השפעת שינוי הפרמטרים השונים על איכות התמונה המתקבלת וכמות האיטרציות הדרושות (עבור $tol = 10^{-2}$).

- **השפעת שינוי המחיר (*P*)** – מהתבוננות בתוצאות ניתן לראות כי הגדלת המחיר מגדילה באופן משמעותי את כמות האיטרציות הדרושות עד לקיום תנאי ההתכנסות. עם זאת, הגדלת המחיר בטווח שנמדד הביאה לתוצאות חלקות יותר, ללא הופעת נקודות על גבי התמונה.
- **השפעת שינוי רמת אדוות (*MinS*)** – ניתן להבחין כי כניסה לעומק, כלומר מקדמי אדוות נמוכים יותר, מחליקים את התמונה ומבהירים אותה. השינוי בגוונים הוא פחות חד, אך במראה כולל התמונה נראית דומה יותר לתמונה המקורית.

טבלה 4.1: מספר האיטרציות הדרושות עבור *tol=10^-2*, עבור המחירים ורמת מקדמי אדוות השונים.

	P=1.5	***P=1.8***	***P=2***	***P=2.2***
MinS=2	130	350	596	1044
MinS=3	156	418	622	837
MinS=4	166	374	548	802

טבלה 4.2: השגיאה היחסית (%)[2] לתמונה המקורית עבור *tol=10^-2*, עבור המחירים ורמת מקדמי אדוות השונים.

	P=1.5	***P=1.8***	***P=2***	***P=2.2***
MinS=2	4.94%	1.75%	1.01%	0.42%
MinS=3	11.4%	4.65%	3.34%	1.35%
MinS=4	25.27%	15.51%	10.8%	7.85%

מתוך טבלאות 4.1 ו-4.2 ניתן לראות באופן גורף כי הגדלת המחיר בטווח הנבדק, מגדילה את כמות האיטרציות הדרושות להתכנסות אך משפרת את השגיאה היחסית לנורמת התמונה המקורית. נציין כי השגיאה היחסית כפי שחושבה, לא מציגה באופן מיטבי את טיב הקירוב של התמונה המשוחזרת לתמונה המקורית, אך היא מאפשרת לבצע השוואה יחסית בין המחירים השונים.

---

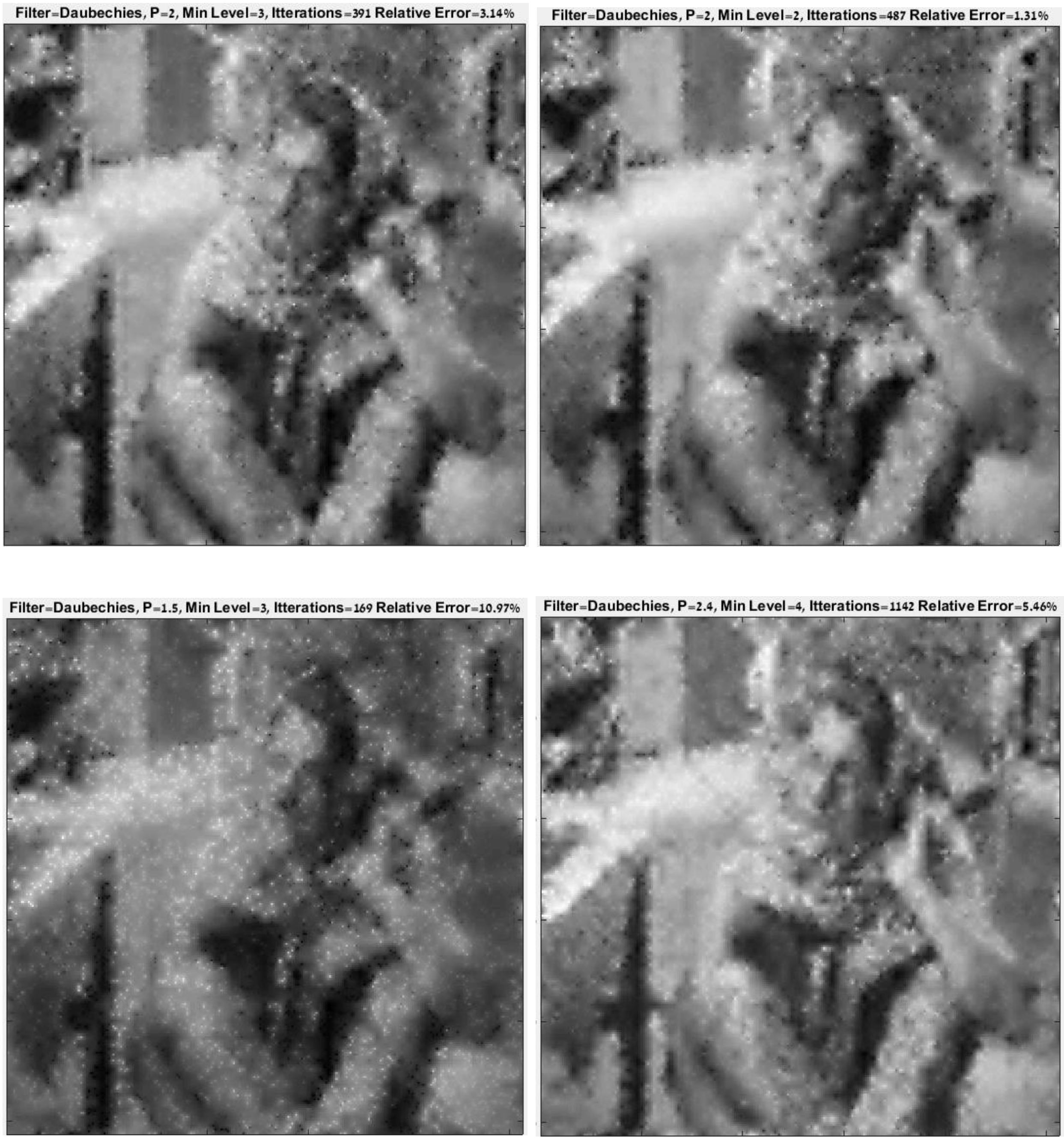
[2] חישוב השגיאה היחסית בוצע באופן הבא: $E_{rel} = \frac{\left| norm\left(\mathrm{Im}_{Original}\right) - norm\left(\mathrm{Im}_{New}\right) \right|}{norm\left(\mathrm{Im}_{Original}\right)} \cdot 100\%$

באיור 4.5 ניתן לראות ניסיון הרצה עבור $tol = 10^{-7}$, עבור הפרמטרים הבאים: $MinS = 3$, $P = 2$

איור 4.5: התוצאות עבור רמת מקדמי אדוות – 3, ומחיר 2.

בנוסף לאמור לעילי, ניתן לראות כי התוצאה המתקבלת מפוקסלת, יש לשער כי מקור תוצאה זו באופי הבסיס של *Haar* ובבסיס בעל רזולוציית *HP* עדינה יותר, נקבל תמונה חלקה יותר. נראה כעת את תוצאות האינטרפולציה לפי בסיס *Daubechies* ונבחן את ההשערה.

4.2. בסיס – *Daubechies* (6)



איור 4.6: התוצאות עבור בסיסי אדוות מסוג *Daubechies (6)*, עבור *tol=10^-2*.

כפי שניתן היה לצפות, השימוש בבסיס אדוות מסוג *Daubechies*, שיחזר תמונה חלקה יותר (לא מפוקסלת), במחיר של הופעת לכלוכים על גבי התמונה.

באיור 4.7 ניתן לראות ניסיון הרצה עבור $tol = 10^{-7}$, עבור הפרמטרים הבאים: $MinS = 2$, $P = 2.2$, בסיס אדוות – *Daubechies 8*.

איור 4.7: התוצאות עבור רמת מקדמי אדוות – 2, ומחיר 2.2, בסיס *Daubechies (8)*.