# Ball balancer


**שובל בן שושן 203883830**

**נדב שולב 302280251**


1.) כאשר הנק' המטרה אליה אנו רוצים להגיע קבועה נקבל-

$$\frac{de(t)}{dt} = \frac{d(X_d - X)}{dt} = -\frac{dX}{dt}$$

היתרון הגדול של שיטה זו היא שלא נקבל קפיצה בנגזרת ברגע החלפת הנק' (שהרי ברגע זה הנגזרת של $X_d$ שואפת לאינסוף), ולמעשה נקבל פונקציה רציפה גם כאשר נשנה את נק' המטרה שלנו.

2.) נקבל-

$$\frac{X}{X_d} = ?$$

$$X = P_{bb}\theta$$

$$\theta = (X_d - X)k_p - Xk_d s$$

$$X = P_{bb}\left(X_d k_p - X(k_p + k_d s)\right)$$

$$X\left(1 + P_{bb}(k_p + k_d s)\right) = X_d(k_p P_{bb})$$

$$\frac{X}{X_d} = \frac{k_p P_{bb}}{1 + P_{bb}(k_p + k_d s)}$$

$$P_{bb} = \frac{K_{bb}}{s^2}$$

$$\frac{X}{X_d} = \frac{k_p k_{bb}}{s^2 + k_{bb}(k_p + sk_d)} = \frac{k_p k_{bb}}{s^2 + sk_d k_{bb} + k_p k_{bb}}$$

3.) נוסחאת מומנט התמד-

$$I \stackrel{\text{def}}{=} \int_m r^2\,dm = \int_V r^2(v)\,\rho(v)\,dv = \iiint_V r^2(x,y,z)\,\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

ולכן נקבל עבור כדור חלול עם קליפה דקה-

$$I = \frac{2}{3}mr^2$$

המשוואה המקורית-

$$\ddot{x} = \frac{m_b \cdot g \cdot r_b^2}{m_b r_b^2 + J_b}sin(\alpha)$$

נציב ונקבל-

$$\ddot{x} = \frac{m_b \cdot g \cdot r_b^2}{m_b r_b^2 + \frac{2}{3}m_b {r_b}^2}sin(\alpha) = \frac{m_b \cdot g \cdot r_b^2}{\frac{5}{3}m_b r_b^2}sin(\alpha) = \frac{3g}{5}sin(\alpha)$$

נשים לב כי אין תלות לא במשקל ולא ברדיוס הכדור. כלומר אין תלות בין המשקל והרדיוס לתאוצת הכדור. תוצאה זו הגיונית מאחר ולכל האיברים במשוואה מסה זהה.

4.)

$$\ddot{x}_{(t)} = \frac{2 \cdot m_b \cdot g \cdot r_b^2 \cdot r_{arm}}{L_{plate}(m_b \cdot r_b^2 + J_b)} \cdot \theta_{(t)}$$

| סימול | יחידות | ערך |
|---|---|---|
| $r_{arm}$ | [cm] | 2.54 |
| $L_{table}$ | [cm] | 27.5 |
| $r_b$ | [cm] | 2 |
| $m_b$ | [kg] | 0.003 |

בנוסף נשתמש ב- $g = 9.8[m/s^2]$
נציב ונקבל-

$$\ddot{x} = \frac{2m_b \cdot g \cdot r_b^2 \cdot r_{arm}}{L_{plate}(m_b r_b^2 + \mathrm{J_b})}\theta = \frac{2m_b \mathrm{r_b^2}(g \cdot r_{arm})}{m_b r_b^2\left(\frac{5}{2}L_{plate}\right)}\theta = \frac{4g \cdot r_{arm}}{5L_{plate}}\theta = 0.724 \cdot \theta$$

כלומר קיבלנו כי-

$$K_{bb} = 0.724$$

5.) התמסורת:

$$\frac{X}{X_d} = \frac{k_p k_{bb}}{s^2 + sk_d k_{bb} + k_p k_{bb}} = \frac{0.724k_p}{s^2 + 0.724sk_d + 0.724k_p}$$

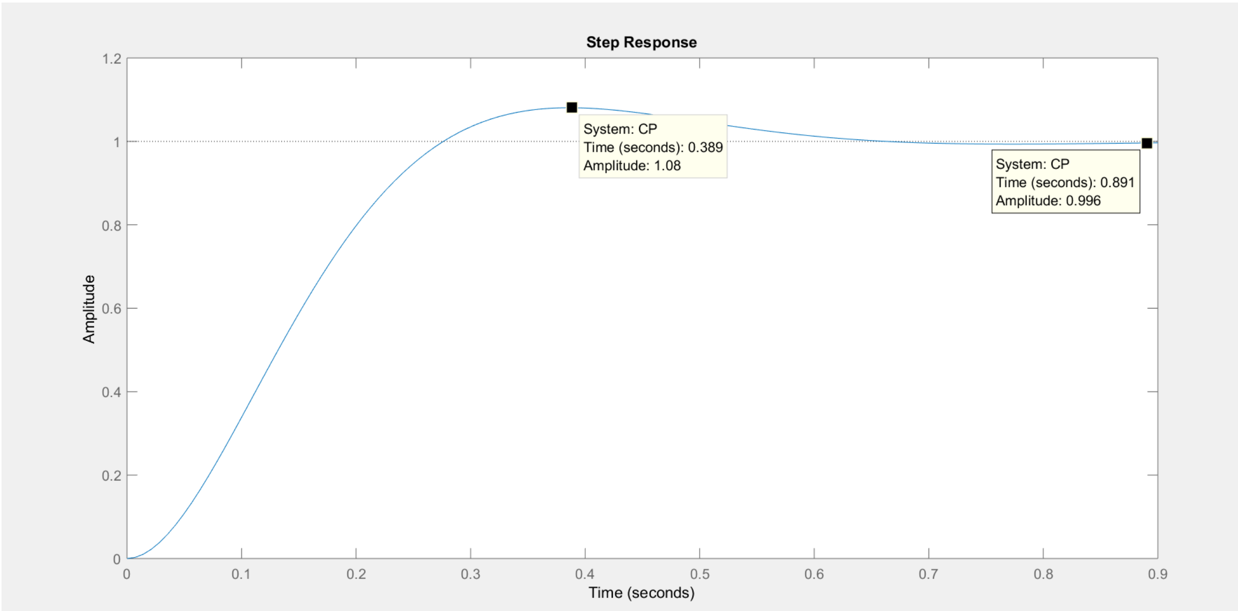
מאחר ואני רוצים זמן התייצבות קצר נסיק שאנו צריכים $k_p$ גדול. מנגד אנו צריכים לרסן את ה-OS בעזרת $k_d$.

לאחר בדיקה של מספר איטרציות ראינו שעבור-

$$k_p = 150$$

$$k_d = 18$$

נקבל-




ונראה כי אנו עומדים בדרישות-

$$t_s = 0.9[s] < 3[s]$$
$$OS = 8\% < 10\%$$
$$|e_{ss}| = 4[mm] < 5[mm]$$

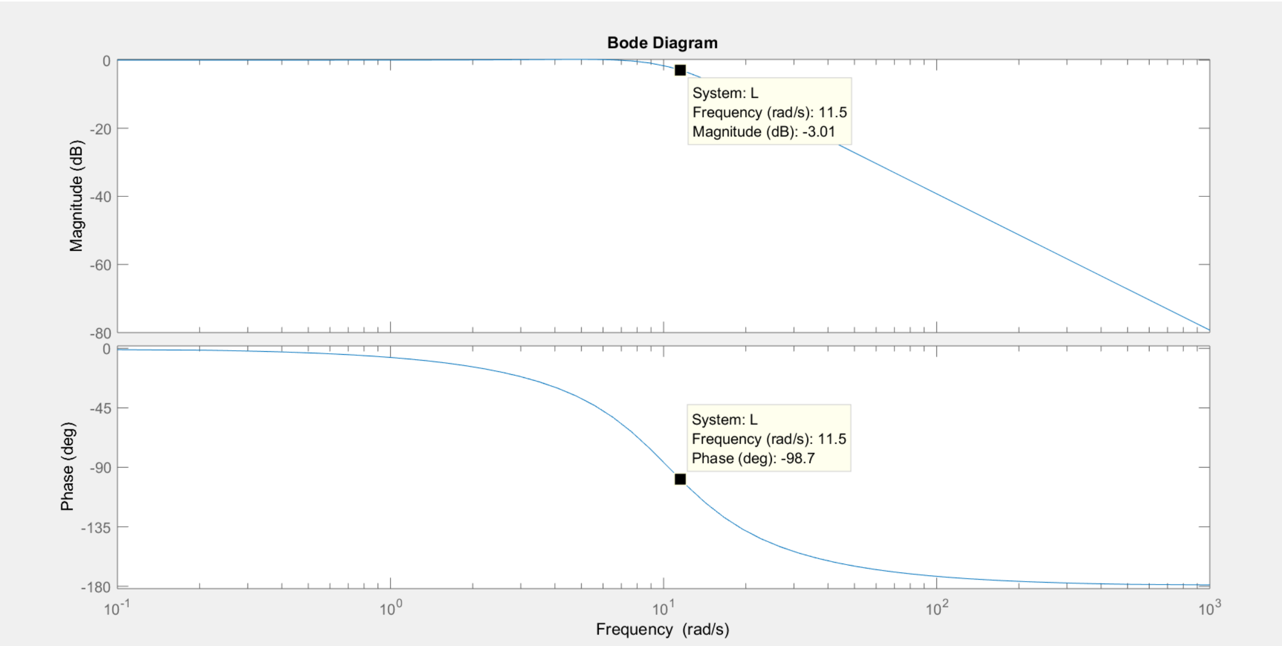
ניתן לציין כי הבחנו שהרגישות של $k_d$ גבוהה מאוד ביחס ל$k_p$.

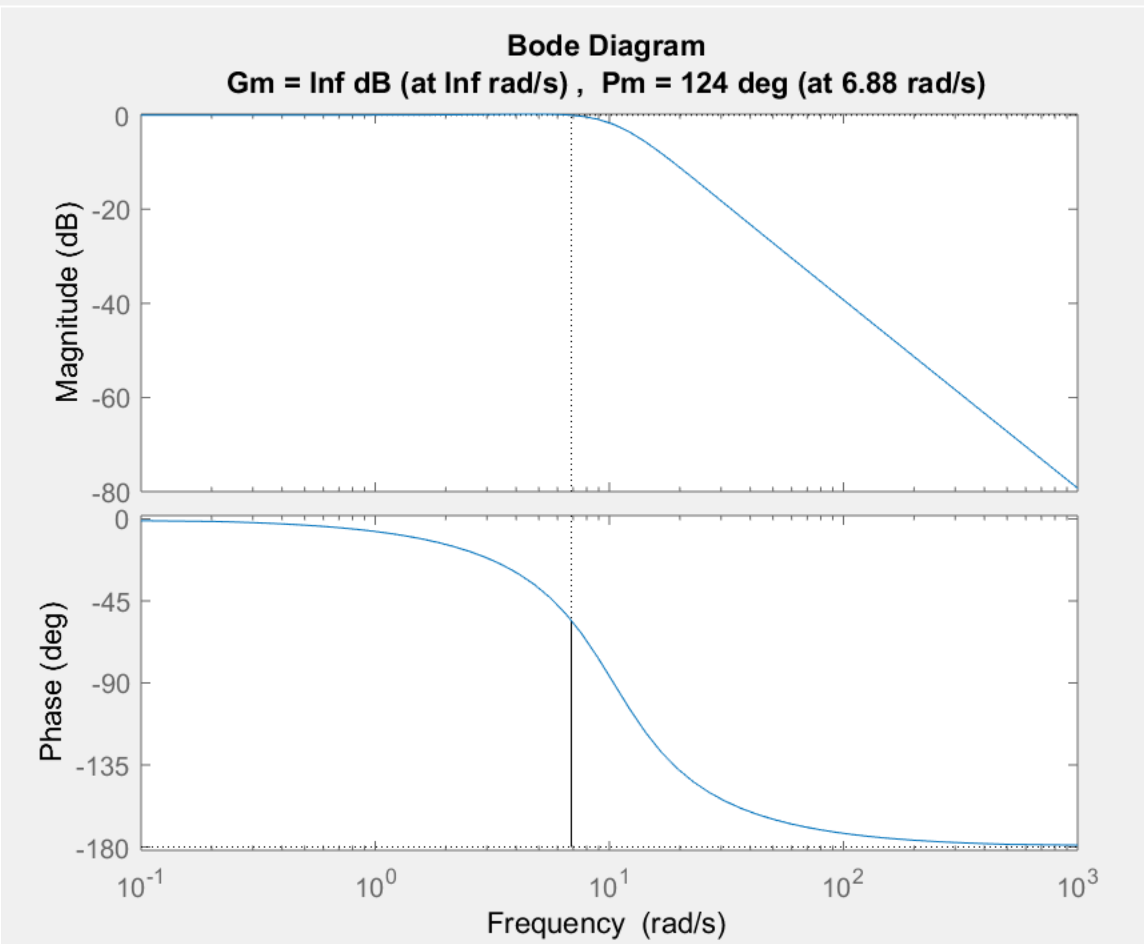
6.) קיבלנו את התמסורת של החוג הסגור-

```
L =

          108.6
  ---------------------
  s^2 + 13.03 s + 108.6
```

דיאגמרת בודה של התמסורת-


Bode Diagram
System: L
Frequency (rad/s): 11.5
Magnitude (dB): -3.01
System: L
Frequency (rad/s): 11.5
Phase (deg): -98.7
Magnitude (dB)
Phase (deg)
0
-20
-40
-60
-80
0
-45
-90
-135
-180
$10^{-1}$
$10^{0}$
$10^{1}$
$10^{2}$
$10^{3}$
Frequency (rad/s)


Bode Diagram
Gm = Inf dB (at Inf rad/s) , Pm = 124 deg (at 6.88 rad/s)
Magnitude (dB)
Phase (deg)
0
-20
-40
-60
-80
0
-45
-90
-135
-180
$10^{-1}$
$10^{0}$
$10^{1}$
$10^{2}$
$10^{3}$
Frequency (rad/s)

7.) ראשית נמצא את היחס שבין מספר הפיקסלים לגודל המשטח-

$$\frac{L_{tbl}}{res}$$

ולמעשה קיבלו יחס פיקסל/אורך.

כדי להזיז את ראשית הצירים למרכז הלוח נמיר-

$$p'_y = p_y - \frac{res}{2}$$
$$p'_x = p_x - \frac{res}{2}$$

כעת כדי למצוא את מיקום הכדור בציר X נכפיל את מיקום הכדור בפיקסלים-$p'_y$ (נשים לב שהפכנו בין הין הצירים כדי לקבל תוצאה אינטואיטיבית לצירים) ביחס שקיבלנו-

$$x = f\left(L_{tbl}, p_y, res\right) = \frac{L_{tbl}}{res} \cdot p'_y = \frac{L_{tbl}}{res} \cdot (p_y - \frac{res}{2})$$

ובצורה זהה עבור y-

$$y = f(L_{tbl}, p_x, res) = \frac{L_{tbl}}{res} \cdot (p_x - \frac{res}{2})$$

ניתן לראות כי התוצאה היא ביח' של סמ' כמו $L_{tbl}$.

הערה-

במידה ואין צורך להפוך את הצירים פשוט שומרים הפוך את $X$ ו-$Y$.

8.)

$$res = 400[pix]$$
$$L_{tbl} = 27.5[cm]$$

$\left(p_x, p_y\right) = (0,0)$:

$$x = f(27.5,0,400) = \frac{27.5}{400} \cdot (0 - 200) = -13.75[cm]$$
$$y = f(27.5,0,400) = \frac{27.5}{400} \cdot (0 - 200) = -13.75[cm]$$

כלומר סה"כ-

$$\left(p_x, p_y\right) = (0,0) \;\longrightarrow (x, y) = (-13.75, -13.75)$$

$\left(p_x, p_y\right) = (160,220)$:

$$y = f(27.5,160,400) = \frac{27.5}{400} \cdot (160 - 200) = -2.75[cm]$$
$$x = f(27.5,220,400) = \frac{27.5}{400} \cdot (220 - 200) = 1.375[cm]$$

וסה"כ-

$$\left(p_x, p_y\right) = (160,220) \;\longrightarrow (x, y) = (1.375, -2.75)$$

הערה:
נשים לב שהפכנו את הצירים בכוונה בשביל הנוחות של עבודה אינטואיטיבית. במידה ולא רוצים להפוך פשוט שומרים את $X$ ו$Y$ הפוך.