תורת הקוונטים (1)

77318

תשע"ח 2017-2018

סיכומים מאת תמר מילכטייך לביא לפי שיעורים מפי פרופ' חגי אייזנברג

לתיקונים והצעות לשיפור: tamar.milchtaich@mail.huji.ac.il

תוכן עניינים

1 שיעור 1 – 18.3.18

1.1 מבוא

מהי תורת הקוונטים – תורת הקוונטים נכנסת תחת הכותרת של פיזיקה מודרנית. אפשר לדבר הרבה זמן על מה זה פיזיקה מודרנית ויש לזה כל מיני תשובות. שתי התשובות הפשוטות – כל מה שלפני המאה ה-20 זה קלאסית, כל מה שאחרי זה פיזיקה מודרנית (כל מה שנשען על מה שהתגלה אחרי).

תשובה שנייה היא יותר עדינה – פיזיקה מודרנית, בניגוד לקלאסית, זה פיזיקה שאין לנו אינטואיציה עליה. כלומר, אם אנחנו עוזבים את הגיר והוא נופל זה משהו שאנחנו רגילים אליו, רגילים שדברים נופלים, זה לא מפתיע אותנו ואנחנו רגילים מגיל צעיר לתופעה הפיזיקלית הזו. זה פיתח לנו תבניות בראש להבנה של תהליכים פיזיקליים. יש לנו אינטואיציה לדברים כמו תאוצה, כוחות. גם בחשמל יש אינטואיציות כאלה לתנועת אלקטרונים למשל, גם אם שם כבר מופיעים מושגים יותר מופשטים כמו שדות. אנחנו לא צריכים לעשות שם איזו קפיצה מחשבתית שלוקחת אותנו ממשהו שרחוק מהעולם היומיומי שלנו כמו פיזיקה מודרנית. זה לא בהכרח רלוונטי להכל, לדוגמא יחסות פרטית. אנחנו לא רגילים למהירויות באיזור של מהירויות האור, אבל אנחנו כן יכולים לתפוס את הקונספט של התארכות, מגבלת זמן וכו'. השינויים לא אינטואיטיביים, אבל הם כן נוגעים לגדלים שאנחנו מכירים.

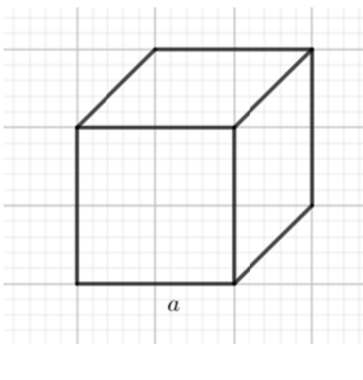
תורת הקוונטים לא מאפשרת לנו לחיות עם אינטואיציות ולקחת איתנו מה שלמדנו. צריך לפתח יכולות חדשות, ובעיקר בהתחלה הדברים ייראו לנו מאוד מתמטיים. ריצ'ארד פיינמן אמר "אי־אפשר להבין את תורת הקוונטים, אפשר רק להתרגל אליה". צריך לפתח את היכולת שהדברים יראו לנו טבעיים, גם אם הם לא מסתמכים על האינטואיציה המוכרת שלנו.

בקורס נתחיל עם בעיות פיזיקליות שהעסיקו את עולם המדע בסוף המאה ה-19 ותחילת המאה ה-20, אבל הן עדיין לא בעיות בקוונטים. נטפל בהן בכלים שטיפלו בהם אז, והקורס יוביל לפתרונות של תורת הקוונטים. מתוך זה נבין את ההקשר של עולם הקוונטים, מאיפה הוא הגיע. יותר מזה, נלמד דברים חדשים על אור וחומר, ונפתח הבנה אמפירית שתאפשר לנו להבין בצורה יותר טובה את תורת הקוונטים.

1.2 קרינת גוף שחור

גוף שחור זה שם של פיזיקאים לגוף שבולע כל קרינה אלקטרו־מגנטית שפוגעת בו במאה אחוז (בכל אורך גל). קרינת גוף שחור זה אומר שהגוף הזה נמצא בש"מ תרמי עם הסביבה שלו. כלומר, כל הסביבה שלו נמצאית בטמפרטורה סופית כלשהי וגם הגוף בטמפרטורה הזו, וזה אומר שכל דבר שהוא בולע הוא גם פולט. אנחנו רוצים לראות מה פולט הגוף השחור הזה, וללמוד על ההיסטוריה של הפתרון הזה.

נתחיל מלדמיין קופסאת מתכת ריבועית, חלולה, עם גודל צלע a:



בתוך החלל יכולים לחיות מודים אלקטרו־מגנטיים – גלים עומדים. הגלים האלה מגיעים לקצה והם יכולים לקרון החוצה. זה גוף שחור, אז מבחוץ הוא גם בולע את מה שמגיע אליו. הוא בש"מ, ולכן הוא גם ייפלוט משהו. אנחנו רוצים לחשב את שה"מ.

כל גל בפנים יהיה וקטור גל $\vec{k}$, שאותו נוכל לתאר עם שלושה מספרים, אחד לכל כיוון. נוכל לתאר את הוקטור הזה ככה:

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{2a}\left(n_x, n_y, n_z\right) = \frac{2\pi\nu}{c}\hat{n}$$

(ν – התדר של האור)

אם בוחרים כיוון מסויים n_i, עד התדר ν כמה תדרים קיימים? מהקשר הזה אפשר לכתוב:

$$n_i = \frac{2a\nu}{c}$$

כל תדר בתוך הקובייה יקיים את הקשר הבא – אם נקח את המשוואה הזאת בריבוע:

$$n^2 = n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = \frac{4a^2\nu^2}{c^2}$$

זה יהיה מספר התדרים שנכנסים עד התדר ν בכיוון מסויים.

אנחנו רוצים לדעת עכשיו כמה תדרים קיימים עד לתדר מסויים בלי תלות בכיוון שלו. מה שצריך לעשות זה לסכם את כל הנקודות שיש בסריג התלת־מימדי הזה עד לתדר ν, כש-ν מתווה כדור ו-$\nu \gg 1$ (יש הרבה תדרים גבוהים יחסים מהתדר הבסיסי). מספר האופנים עד התדר ν:

$$N(\nu) = 2\frac{1}{8}\frac{4\pi}{3}n^3 = \frac{8\pi a^3\nu^3}{3c^3}$$

(1/8 – כיוון במרחב, $\frac{4\pi}{3}n^3$ – נפח הכדור)

עד כאן לא הנחנו כלום בנוגע לשה"מ התרמי, רק דיברנו על מספר האפשרויות לגלים אלקטרו־מגנטיים בתוך הקובייה. אנחנו רוצים לראות מה הסיכוי לכל מצב. לכל זוג של תנע ומקום (p,q), משוייכת אנרגיה $E(p,q)$. בולצמן הראה שההסתברות למצב (p,q) היא:

$$\boxed{P(p,q) = \frac{1}{z}e^{-\frac{E(p,q)}{k_BT}}}$$

מצד ימין יש פונ' של p,q. הפונ' P היא פונקציה של צפיפות הסתברות. זו פונקציה שהיחידות שלה הם הסתברות פר יחידה, במקרה הזה הסתברות ליחידה של תנע ומקום. הנרמול שלנו יהיה לפי אינטגרל:

$$\int dqdpP(q,p) = 1$$

צפיפות הסתברות נותנת לנו את ההסתברות להיות לא ממש בערך, אלא בסביבה. (p,q) יגדירו לנו איזור מסויים במרחב הפאזה, ונדבר על הסיכוי להיות באיזור הזה (בתרגול 1 מעמיקים בנושא).

z נקרא קבוע הנרמול של הפונקציה, והוא נקרא פונקציית חלוקה, k_B הוא קבוע בולצמן (יחידות של ג'אול לקלווין) ו-T הטמפרטורה. נסמן $\beta = 1/k_BT$, ונקבל את הנוסחא בצורה:

$$P(p,q) = \frac{1}{z}e^{-\beta E(p,q)}$$

נחשב מתוך אלה את האנרגיה הממוצעת של המערכת שנמצאת בש"מ תרמי:

$$\langle E\rangle = \frac{1}{z}\int dqdpE(q,p)e^{-\beta E(p,q)} \overset{*}{=} -\frac{1}{z}\frac{\partial}{\partial\beta}\int dqdp\, e^{-\beta E(p,q)} \overset{\#}{=} \frac{1}{z}\frac{\partial}{\partial\beta}z = -\frac{\partial}{\partial\beta}\ln z$$

* - שמנו לב ש-$E(q,p)e^{-\beta E(p,q)}$ זה כמו נגזרת של $e^{-\beta E(p,q)}$ לפי β, אז עשינו את ההחלפה והוצאנו את הנגזרת החוצה.
# - לפי הנרמול.

יש לנו אוסילטור הרמוני בש"מ תרמי, ואנחנו רוצים לדעת את האנרגיה ממוצעת שלו. אם נחשב את z נוכל ישר לדעת את זה. נעזר באנרגיה של מתנד הרמוני, ונמצא את פונקציית החלוקה של מתנד בש"מ תרמי:

$$z = \int dqdpe^{-\beta\left(\frac{p^2}{2m}+\frac{mv^2}{2}q^2\right)} = \sqrt{\frac{2\pi m}{\beta}}\sqrt{\frac{2\pi}{m\omega^2\beta}} = \frac{2\pi}{\omega\beta}$$

לכן, האנרגיה הממוצעת:

$$\langle E\rangle_{\text{מתנד}} = \frac{\partial}{\partial\beta}\left(-ln\,\left(\frac{2\pi}{\omega}\right)+\ln\beta\right) = k_BT$$

נשים לב שהיא לינארית עם הטמפרטורה של הסביבה.

מסתבר שאופן תנודה של השדה האלקטרו־מגנטי הוא אנלוג למתנד מכני. לכן, גם לאופן תנודה של שדה א"מ, זו האנרגיה הממוצעת (לא נסביר למה). כלומר, האנרגיה עד התדר ν:

$$U(\nu) = N(\nu)k_BT$$

במקום לדבר על אנרגיה נדבר על צפיפות אנרגיה, כי אנחנו רוצים לנרמל, לא רוצים שהאנרגיה תהיה תלויה בגוף מסויים. בשביל זה נחלק בנפח של הגוף (נפח של תיבה) ונסתכל על תחום קטן, ונקבל את צפיפות האנרגיה עד התדר ν:

$$u(\nu) = \frac{1}{U}\frac{\partial U}{\partial\nu} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}k_BT$$

לסיום, נרצה לדעת מה שטף הקרינה שיוצאת מהגוף הזה. שטף הוא ליחידת שטח, לכן צריך לעשות כאן איזושהי אינטגרציה על כל השפה. שטף גם נמדד ביחידת זמן (אנרגיה ליח' זמן ליח' שטח). בשביל זה נקח את צפיפות האנרגיה. אם נכפיל אותה במהירות נקבל אותה ליחידת זמן, ונעשה אינטגרל על כל הכיוונים (במידה וההתפלגות היא כדור כמו שהנחנו, כלומר הם מפולגים לכל הכיוונים במידה שווה, נקבל פקטור של 4π). נקבל את שטף האנרגיה ליחידת שטח ותדר:

$$R(\nu) = \frac{c}{4\pi}u(\nu) = \frac{2\nu^2}{c^2}k_BT$$

זה נקרא יחס ריילי-ג'ונס. היחס הזה התאים לתצפיות, אבל אז שמו לב שככל שהולכים לתדרים יותר ויותר גבוהים ההתאמה הולכת ונהיית פחות טובה. יותר מזה, הייתה בעיה יותר גדולה –הדבר הזה נראה כמו פרבולה ביחס לתדר, לכן אם עושים אינטגרל על הכל (בשביל לסכום את האנרגיה שהגוף פולט) מקבלים אנרגיה אינסופית (שטח אינסופי מתחת לפרבולה). ניתן לזה השם "קטסטרופה באולטרה־סגול" – מבחינת התצפיות ראו שגוף שחור בפועל לא פלט תדרים כל כך גבוהים, אבל לפי הנוסחא הזאת הוא צריך לפלוט יותר בתחום האולטרה־סגול ונקבל אנרגיה אינסופית.

פלאנק ניסה לפתור את הבעיה הזאת ושיחק עם הנוסחא של ריילי-ג'ונס. הוא שיחק עם פונקצית החלוקה – עם ההנחה של האוסילטור ההרמוני שנמצא בש"מ. הוא הציב במקום האוסילטור כל מיני פונקציות, עד שמצא פונקציה שהתאימה לתוצאות הניסיוניות. ברגע שמצא פונקציה מתאימה שאל מה הנחת העבודה על z צריכה להיות, ועוד צעד אחורה – מה צריך להיות מבנה האנרגיה המתאים כדי לקבל את פונקציה החלוקה הזאת. הוא קיבל משהו שהדהים אותו – לא כל ערך של p,q מותרים, אלא יש ערכים בדידים שמותרים. זה בא לידי ביטוי במשוואה:

$$\boxed{E_n(\nu) = nh\nu}$$

כלומר, אפשר לקבל ערכי אנרגיה שהם כפולות שלמות של $h\nu$ (הקבוע h הוא קבוע פלאנק, היחידות הן של $J \cdot s$).

זה לא נראה היה הגיוני, כי שדה א"מ הוא שדה חשמלי, שיכול לקבל כל אנרגיה. מה שהנוסחא הזאת אומרת לנו הוא שעבור תדר מסויים לא כל ערך של אנרגיה אפשרי, יש סט סופי של ערכים שאפשר לקבל. פונקצית החלוקה שתתקבל מזה תהיה:

$$z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta n h\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{-\beta h\nu}\right)^n \overset{\text{טור הנדסי}}{=} \frac{1}{1 - e^{-\beta h\nu}}$$

נגיד שוב –פונקציית החלוקה השתנתה מעצם זה שהנחנו שהשדה המגנטי יכול לקבל רק ערכי אנרגיה מסויימים. נקבל:

$$\langle E \rangle = -\frac{\partial}{\partial\beta} \ln z = \frac{\partial}{\partial\beta} \ln\left(1 - e^{-\beta h\nu}\right) = \frac{h\nu e^{-\beta h\nu}}{1 - e^{-\beta h\nu}} = \frac{h\nu}{e^{\beta h\nu} - 1}$$

זו האנרגיה החדשה של מתנד. נשים לב למשהו שבהמשך יהיה חשוב – אם $h \to 0$ אז אנחנו מאבדים שוב את הקוונטיזציה.

שטף האנרגיה –

$$\boxed{R(\nu) = \frac{2}{c^2} \frac{h\nu^3}{e^{\frac{n\nu}{k_B T}} - 1}}$$

זו הנוסחא של פלאנק לשטף האנרגיה, והיא הנוסחא שמתאימה לתוצאות הנסיוניות. סך ההספק (נראה את הפיתוח בתרגול ובתרגיל):

$$P_{\text{הספק}} = CT^4$$

זה חוק סטפן-בולצמן. אורך הגל המקסימלי ניתן ע"י חוק ההעתקה של וין:

$$\lambda_{peqk} = \frac{2.9 \cdot 10^{-3}}{T}$$

כמו שאמרנו, פלאנק הראה שהאנרגיה שיכולה להיות למערכת סט בדיד של אנרגיות, עם מרחק קבוע בין איבר לאיבר. המנות האלה בין האנרגיות נקראות בלעז קוונטות, ומכאן שם הקורס. יש לציין שפלאנק לא האמין לתוצאה הזאת, ולקח זמן עד שהאמינו לה.

2 שיעור 2 – 20.3.18

2.1 מבוא

בשיעור שעבר דיברנו על הקרינה של גוף שחור, והלקח העיקרי היה שאי־אפשר להסביר אותו ללא התייחסות לאנרגיה של השדה האלקטרומגנטי כבאה במנות, בקפיצות קבועות, שגודלן $h\nu$.

היום נמשיך לראות עוד שלוש תופעות שהיו לא מוסברות, שגרמו לקשיים בהבנה במעבר בין המאה ה-19 למאה ה-20.

2.2 האפקט הפוטואלקטרי

זו תופעה שצפו בה בשנת 1902, ולא מצאו לה הסבר בזמנו. אם לקחו מתכות אלקליות והאירו עליהן, לפעמים ראו שאלקטרונים נפלטים ולפעמים לא. חיפשו חוקיות, ולא הצליחו למצוא הסבר פיזיקלי לתצפיות.

העניין היה כזה – לאורכי גל מסויימים זה נפלט, בעיקר קצרים, אולטרה־סגולים. אם אורך הגל היה ארוך יותר מסך מסויים, הפליטה הייתה מפסיקה. לא הבינו את ההבדל הזה בין אורכי גל ארוכים וקצרים. תופעה נוספת שצפו בה היא שהאנרגיה של האלקטרונים שנפלטים לא תלויה בהספק של האור שמאיר על המתח. אם לוקחים מקור אור עם וואט או שני וואט באותו אורך גל, נפלטים יותר אלקטרונים אמנם, אבל לא באנרגיה יותר גבוהה.

ב-1905 איינשטיין פרסם הסבר לתופעה, שהוא ברוח של גוף שחור. הוא אמר שהאור מורכב מחלקיקים (מילה יותר מדוייקת – מנות), והחלקיקים האלה כ"א מהם נושא אנרגיה, כשהאנרגיה של חלקיק לפי איינשטיין היא:

$$\boxed{E = h\nu}$$

איינשטיין לא ידע שהקבוע הזה הוא h (כלומר הוא פשוט אמר שזה תדר כפול קבוע). לחלקיק הזה היום אנחנו קוראים פוטון, וזו האנרגיה שהם נושאים. כאשר האור הזה, שמורכב מחלקיקים, פוגע במתכת, חלקיק אחד יכול למסור את האנרגיה שלו לאלקטרון אחד, ולשחרר אותו מתוך הפוטנציאל שמחזיק אותו בתוך המתחת. את הפוטנציאל הזה נסמן ב-w וקוראים לו פונקציית העבודה (זו העבודה שצריך לבצע כדי להוציא אלקטרון מתוך המתכת). האנרגיה של האלקטרון המשתחרר היא סה"כ האנרגיה של הפוטון פחות האנרגיה שצריך להשקיע בשביל לשחרר:

$$\boxed{\frac{1}{2}mv^2 = h\nu - w}$$

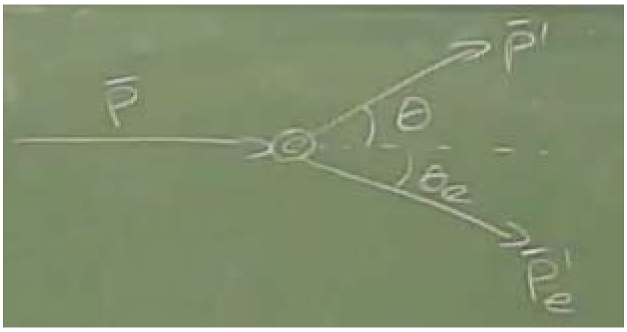
זה מסביר את כל התופעה – ככל שאורך הגל יותר קצר התדר יותר גבוה, לכן האנרגיה של הפוטון יותר גבוהה. אם האנרגיה של הפוטון קטנה מאנרגיית העבודה, האלקטרון לא משתחרר. זה מסביר למה אם התדר של האור שבו מאירים לא מספיק גבוה אז לא ישתחררו אלקטרונים, לא משנה כמה חזק האור (כלומר לא משנה באיזה מתח נאיר).

2.3 אפקט קומפטון

ההסבר הגיע ב-1923. האפקט הוא שלוקחים קרינה אלקטרומגנטית ומפזרים אותה על ענן של אלקטרונים חופשי או כמעט חופשי (כלומר לא קשורים לאטום, לדוגמא אלקטרונים במתכת הם יחסית חופשיים וחלקם לא לכודים יחסית מסביב לגרעיניים), ומאירים עליהם עם אורך גל מאוד קצר. האפקט, שמכונה אפקט קומפטון, הוא שחלק מהאור שמגיע מתפזר לזוויות אחרות, ואורך הגל של מה שמתפזר הוא יותר ארוך מאורך הגל של מה שהארנו, כאשר ישנה תלות בשינוי באורך הגל רק בזווית (כלומר רק זווית הפיזור ביחס לכיוון המקורי היא מה שקובע את ההפרש, לא אורך הגל של מה שהארנו). לא הצליחו להסביר את זה עם שום מודל, עד המודל של קומפטון שהסביר למה אור מתפזר ולמה התלות היא רק בזווית.

המחשבה שהובילה להסבר היא המשך של המחשבה של איינשטיין. אם אינשטיין הראה לנו שאפשר להתייחס לאור בתור חלקיקים, פוטונים, וכל מה שדיברנו עד עכשיו זה האנרגיה של החלקיקים, מה שמאפיין חלקיקים זה ארבע וקטור שהאנרגיה היא רק אחד הרכיבים שלו, יש גם רכיבים של תנע. אנחנו רגילים שתנע מופיע בגופים בעלי מסה, וקומפטון ניסה לשייך לאותו פוטון לא רק אנרגיה אלא גם תנע ולפתור בעיה רגילה של פיזור.

המערכת שלנו היא כזאת: פוטון מגיע עם תנע ופוגע באלקטרון. הוא מתפזר ממנו, ומשימור תנע האלקטרון מתפזר גם הוא:



האנרגיה של פוטון היא $E = h\nu$. אם אנחנו מחליטים שיש לו גם תנע אנחנו יכולים לכתוב את האנרגיה היחסותית שלו. באנרגיה הזאת יש איבר של מסה, שלא קיים פה, אבל יש גם איבר של תנע: $E = h\nu = pc$. זה נותן קשר בין התדר של פוטון מסויים לבין התנע שלו:

$$p = \frac{h\nu}{c} \Rightarrow \boxed{p = \frac{h}{\lambda}}$$

נכתוב את משוואות שימור האנרגיה והתנע של הפיזור. שימור תנע לפני ואחרי ההתנגשות:

$$\vec{p}_e' = \vec{p} - \vec{p}'$$

זו משוואה וקטורית. מתוכה נחלץ את הגדלים (משפט הקוסינוסים):

$${p_e'}^2 = p^2 + {p'}^2 - 2pp' \cos\theta$$

שימור אנרגיה – האנרגיה לפני מורכבת מאנרגיית המנוחה של האלקטרון $m_e c^2$ והאנרגיה של הפוטון. האנרגיה אחרי תהיה מורכבת מהאנרגיה היחסותית של האלקטרון בתוספת האיבר הקינטי, ובנוסף יש את האיבר של האנרגיה של האלקטרון אחרי הפיזור:

$$m_e c^2 + pc = \sqrt{m_e^2 c^4 - {p_e'}^2 c^2} + p'c$$

נעביר אגף ונעלה בריבוע:

$$[m_e c^2 + (p - p')c]^2 = m_e^2 c^4 - {p_e'}^2 c^2$$

נפתח את הריבוע ונציב את p_e' מהנוסחא של שימור התנע:

$$m_e^2 c^4 - 2m_e c^3 (p - p') + p^2 c^2 + {p'}^2 c^2 - 2pp'c^2 = m_e^2 c^4 + \left(p^2 + {p'}^2 - 2pp' \cos\theta\right) c^2$$

$$m_e c(p - p') = pp'(1 - \cos\theta)$$

הטענה של קומפטון הייתה על הפרשי אורכי הגל, אז אנחנו רוצים לכתוב במקום p את התנע באמצעות אורך הגל:

$$\frac{p - p'}{pp'} = \frac{\frac{h}{\lambda} - \frac{h}{\lambda'}}{\frac{h^2}{\lambda\lambda'}} = \frac{1}{h}(\lambda' - \lambda) = \frac{1}{m_e c} 2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

(המעבר האחרון – הצבה של הצד השני של הנוסחא, ושימוש בזהות טריגונומטרית)

כלומר, אפשר להביע את ההפרש באורך הגל כך:

$$\boxed{\Delta\lambda = \frac{2h}{m_e c}\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

אנחנו רואים איך ההנחה שלפוטון יש תנע נותנת פתרון שמסביר ניסוי כך שזווית הפיזור תלויה רק בשינוי באורך הגל ולהפך (השינוי באורך הגל מתאים רק לזווית הפיזור). זה נתן התאמה מלאה לתוצאות הניסיוניות. זה נותן אישוש לטענה שלאור יש גם תנע.

הערות –

- ל-$\frac{h}{m_e c}$ יש יחידות של אורך, והוא נקרא אורך הגל של קומפטון. הוא מיוחס לאורך הגל של אלקטרון במנוחה.
- בזמן ההסבר, כל מה שראו זה אור נכנס ואור יוצא, אבל הטיעון הזה שראינו אומר שהאלקטרון מקבל תנע ונפלט בזווית. בזמן שקומפטון הסביר את זה לא מדדו עדיין את זווית הפיזור של האלקטרון (שגם אותה אפשר למצוא) והסתבר שהיא מתאימה לגמרי לתיאור.
- יכולים לטעון שאולי האור לא מעביר את התנע שלו בבת־אחת אלא לאט לאט, והסיבה שאנחנו רואים התנהגות חלקיקית זה שהאלקטרונים אולי מקבלים את התנע שלהם רק במנות, ואז לא היה להם מספיק זמן.
  הטיעון הזה הופרך: אפשר לגזור את הקשר בין אורך הגל וזווית הפיזור כאשר מסירת האנרגיה היא מתמשכת, וכשעושים את זה רואים שבנוסחא שמתקבלת יש תלות בין השינוי באורך הגל לאורך הגל המקורי, וזה לא נצפה בניסוי.

2.4 מבנה האטום

הרעיון של אטום זה רעיון יווני בן מעל 2000 שנה, כשהרעיון הוא חלקיק בלתי־ניתן לחלוקה. איך בנוי אותו אלמנט של חומר זה מסע שנמשך מאות שנים. אנחנו קופצים לרגע אחד לפני סופו – ב-1911 רתלפורד ביזר חלקיקי אלפא מאטומים של זהב, והסיק מסקנה מהדינמיקה של הפיזור: באטום יש מרכז טעון חיובית, ועננה מסביב טעונה שלילית. כבר הכירו אלקטרונים בשלב הזה, לכן הוא הסיק שהעננה השלילית בנוייה מאלקטרונים.

התוצאה הזאת יצרה המון בעיות לפיזיקאים. בתור התחלה, למה המטען החיובי של הגרעין לא מושך את המטען השלילי של העננה? אפשר להגיד שאנחנו מכירים מערכות שיש בהן משיכה, כמו לדוגמא ירח שמסתובב סביב כוכב. הבעיה היא שמערכות כאלה דורשות סיבוב. אם האלקטרונים נעים במעגלים, יהיה איזון בין התאוצה הצנטרופיטלית לבין הכח האלקטרוסטטי, ונקבל מערכת יציבה.

זה נכון במכניקה, בחשמל יש עוד נקודה – מטען שמאיץ פולט כל הזמן קרינה אלקטרומגנטית. זה אומר שהאלקטרונים צריכים כל הזמן לפלוט קרינה. אם הם פולטים קרינה הם צריכים לאבד אנרגיה ולהאט, ואז הם אמורים בסופו של דבר להתנגש. גם אם הם נעים בתנועה מעגלית, לפי חוקי האלקטרו־מגנטיות שהיו ידועים – גם אז האטום לא היה יציב, ויותר מזה גם אף אחד לא ראה את הקרינה הזאת מאטומים.

נניח יותר מזה שיש איזה קסם שמחזיק אותם במסלול מעגלי, משהו שלא נותן להם לפול – לדוגמא קליפת פלסטיק שקופה. זה עדיין לא מספיק, כי אנחנו מכירים ניסויים בשהם אפשר לקחת אטום ולתת אנרגיה לאלקטרונים שלו – לדוגמא לשגר קרן אחרת של אלקטרונים שיתנגשו באטום וייתנו לו עוד אנרגיה. אנחנו יכולים לתת לאלקטרון אנרגיה ככה שהוא ייתרחק מהגרעין. המצב הזה לא יהיה יציב והוא יצטרך לרדת חזרה לקליפה, ואז היינו מקבלים פליטה מהאטום. כשעושים כאלה ניסויים באמת מקבלים פליטה מהאטום, אבל לא כמו שציפינו.

מה שנצפה זה שהאלקטרון יילך ויתקרב לאטום תוך כדי סיבוב סביבו עד שיגיע לנקודה היציבה, הרדיוס בסיבוב הזה הולך וקטן, כלומר תאוצה הולכת וגדלה, ונצפה שהאנרגיה של האור שנפלט תלך ותגדל. בפועל, זה לא מה שרואים – כשנותנים לאלקטרון אנרגיה אמנם הוא חוזר למצב היציב שלו ופולט אנרגיה, אבל אם מסתכלים על הספקטרום של האור מקבלים שהעצמה מופיעה רק בנקודות מסויימות, רק באורכי גם מסויימים, שתלויים בסוג האטום. את הקווים מכנים קווי פליטה.

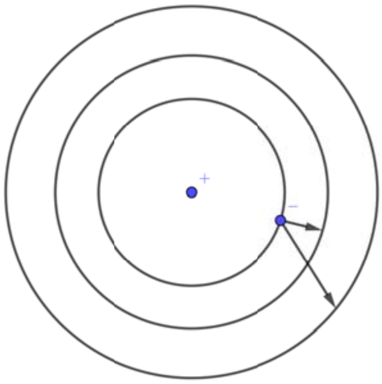
(ספקטרום פליטה של מימן בתחום האור הנראה)

בשנת 1885 מצא יוהן בלמר נוסחא של קווי פליטה רק עבור מימן:

$$\boxed{\nu = R\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right)}$$

יש כאן תעלומה – למה האטומים יציבים? וכשהם פולטים אור, למה הם פולטים רק בקווי הפליטה ולא יציבים?

ההסבר הראשוני שאנחנו דנים בו ניתן ע"י בוהר ב-1913. בוהר אמר שהסיבה מאחורי ההתנהגות הזאת היא כזו – אין קליפת פלסטיק שקופה, אבל האלקטרונים באטום יכולים משום מה לקבל רק סט סופי של אנרגיות. האטומים יכולים להיות רק בסט בדיד של מרחקים מהגרעין (מכונה רמות או קליפות). כשעוזבים את האטום לנפשו, האלקטרונים שלו נמצאים במסלול הכי נמוך, הכי קרוב לגרעין. אגב, לא רק בפליטה רואים ערכי גל מסויימים, אלא גם רק אורכי גל מסויימים נבלעים, אלא שמתאימים לפליטה.



(מעבר של אלקטרון בין רמות אנרגיה)

בוהר אמר – האלקטרון יושב ברמה הכי נמוכה. אם אנחנו רוצים למסור לו פוטון אנחנו יכולים לעשות את זה רק אם הפוטון מוסר בדיוק את האנרגיה שמבדילה בין הרמות, כלומר:

$$h\nu = E_j - E_i$$

זה מה שקורה כאשר אטום בולע, הוא יכול לבלוע רק כאשר קולעים לו אטום רק בדיוק בתדר המתאים. אם באים עם פוטון בתדר אחר, כזה שמתאים לא בדיוק למעבר בין שתי רמות אלא מספיק רק לערך באמצע בין רמות, זה מעבר אסור, ולכן האטום לא בולע. אחרי שהעלנו את האלקטרון לרמה גבוהה, באופן ספונטני האלקטרון יגיע לרמה הכי תחתונה (לא נדבר עכשיו איך). האלקטרון יידלג בין הרמות ויגיע לרמה הכי נמוכה, והוא יכול לפלוט רק פוטונים שמתאימים למעברים בין רמות האנרגיה. זה מסביר למה הפליטה היא בספקטרום מאוד מסויים.

בשביל קונסיסטנטיות עם הנוסחא של בלמר, בוהר אמר:

$$\boxed{E_n = -\frac{hR}{n^2}}$$

כש-n^2 זה מספר שלם.

(נעיר שזה מסביר גם למה האלקטרון לא קורס לתוך האטום – יש רק רמות מסויימות שמותר לאלקטרון להיות בהן. כמו שאסור לו להיות בין שתי רמות, כך אסור לו להיות מתחת לרמה הראשונה)

בשיעור הבא נראה מה הוביל את בוהר לדבר על רמות בדידות של אנרגיה ולכתוב את הנוסחא הזאת. הלוגיקה של בוהר תעסיק אותנו גם בהמשך הקורס.

ניתן עכשיו הסבר לרמות האלה שהופיע עשר שנים אחרי בוהר, ב-1923, ע"י דה-ברולי. דה-ברולי הוסיף לדיון עוד כלי, עוד הבנה, שיחד עם כל ההבנות שצברנו עד כה נוכל לבנות את תורת הקוונטים מתוך אוסף הדרישות האלה, שתהיה קונסיסטנטית עם הניסויים שאנחנו רואים.

הוא אמר את הדבר הבא – אור היה סוג של תופעה גלית, ואלקטרונים (או חומר) היו סוג של תופעה חלקיקית. הוא גילה שלתופעות הגליות יש אספקט חלקיקי, ע"י זה שלתופעה הכי גלית שאנחנו מכירים, אור, נתנו תכונות כמו תנע. זה מוביל לשאלה הפילוסופית האם גם לחלקיקים יש גם תכונות גליות. נשאל האם אפשר לדבר על אורך גל של האלקטרון, והאם זה רלוונטי.

אם לאלקטרון יש אורך גל זה יכתיב איזשהו אילוץ – כדי שיהיה קיום לגל של האלקטרון יש עכשיו תנאי שפה שמתבקש, והוא שמספר אורכי הגל על ההיקף יהיה מספר שלם. אחרת, אם אורך הגל של האלקטרון לא מתחבר בדיוק מבחינת פאזה כשהוא מסביר הקפה, תהיה התאבכות הורסת. יש כאן תנאי שפה שדורש שייכנס מספר שלם של אורכי גל בהקפה. אורך הגל הזה, שאנחנו קוראים לו היום אורך הגל של דה-ברולי, יסתבר כטיעון מספיק כדי להוכיח את מה שדיברנו עליו.

נסתכל על התנע של הפוטון:

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{2\pi}\frac{2\pi}{\lambda} = \hbar k$$

(כשהגדרנו $\hbar = h/2\pi$)

אורך הגל של חלקיק, שקרוי אורך הגל של דה-ברולי:

$$\boxed{\lambda = \frac{h}{p}}$$

עבור האלקטרון, תנאיי השפה ייתנו:

$$2\pi r = n\lambda = n\frac{2\pi}{k}$$

$$r = \frac{h}{k}\ \left(k = \frac{mv}{\hbar}\right)$$

נקבל:

$$L = mvr = n\hbar$$

זה התנע הזוויתי. אנחנו מקבלים שלאלקטרון בתוך האטום, התנע הזוויתי בא במנות. קיבלנו שהמסלולים המותרים הם רק מסלולים שהתנע בא בהן במנות, ואותו קבוע הוא הקבוע $\hbar$.

המסה שאנחנו כותבים היא לכאורה מסת האלקטרון, למעשה צריך להשתמש במסה מצומצמת של האלקטרון והגרעין (אבל האלקטרון כבד הרבה פחות מהגרעין, אז אפשר לקרב עם מסת הגרעין).

נכתוב את משוואת הכוחות. הכח הצנטרפיטלי הוא mv^2/r, והוא שווה לכח האלקטרוסטטי:

$$\frac{mv^2}{r} = k_e\frac{e^2}{r^2}$$

(k_e הקבוע האלקטרוסטטי, e מטען האלקטרון)

המהירויות המותרות כתלות ברדיוס:

$$v = \frac{n\hbar}{mr}$$

נציב את זה במשוואת הכוחות כדי למצוא את רדיוסי המסלולים המתאימים:

$$\frac{m}{r}\left(\frac{n\hbar}{mr}\right)^2 = k_e \frac{e^2}{r^2}$$

$$r = \frac{1}{k_e e^2}\frac{n^2\hbar^2}{m^2} \equiv n^2 a_0$$

הרדיוסים המותרים תלויים ב-n בצורה של $n^2 \propto$. a_0 הוא הרדיוס של המסלול הכי פחות אנרגטי, והוא נקרא רדיוס בוהר.

המהירויות הולכות כך:

$$v = \frac{n\hbar}{m}\frac{k_e e^2 m}{n^2\hbar^2} = \frac{k_e e^2}{n\hbar}$$

מה שבאמת מעניין זה מהם ערכי האנרגיה, משם התחלנו. האנרגיה הכוללת של החלקיק היא הקינטית + האלקטרוסטטית:

$$E = \frac{mv^2}{2} - k_e \frac{e^2}{r} = -\frac{mv^2}{2} = -\frac{m}{2}\,\frac{k_e^2 e^4}{n^2\hbar^2} = -\frac{1}{n^2}\frac{mk_e^2 e^4}{2\hbar^2} = -\frac{1}{n^2}\,E_I$$

(המעבר האחרון – בגלל המשפט הויראלי)

קיבלנו חזרה את התוצאה התצפיתית של בלמר עם ההסבר של בוהר של רמות אנרגיה, אבל קיבלנו הסבר למה זה קרה – בגלל ההנחה שהאלקטרון חוץ מתנע יש לו גם אורך גל, ולכן המסלולים צריכים לקיים את התנאי הזה.

E_I זו אנרגיית היינון, האנרגיה שצריך לתת לאלקטרון כדי לנתק אותו מהרמה האחרונה.

3 שיעור 3 – 25.3.18

3.1 הקדמה

בשיעורים שעברו דנו בכמה תופעות: גוף שחור – למדנו שהאנרגיה של קרינה א"מ מגיעה כנראה במנות; האפקט הפוטואלקטרי – דיברנו על המנות האלה בתור חלקיקים נושאי אנרגיה; אפקט קומפטון – דיברנו על זה שהחלקיקים האלה גם נושאים תנע; במודל האטום נתנו לחלקיקים תכונה של גל, וייחסנו לו תכונות של גלים.

כשבוהר גילה את מבנה האטום הוא עוד לא חשב על החלקיקים כגלים, דה-ברולי חשב על זה. זה יתקשר למשהו שנקרא עקרון ההתאמה, ובעקבותיו תורת הקוונטים הישנה.

3.2 עקרון ההתאמה

עקרון ההתאמה ממלא תפקיד שאנחנו צריכים לחפש בכל תורה חדשה – כל תורה פיזיקלית חדשה צריכה להתייחס קודם כל לכל מה שקדם לה, ששימש אותנו בנאמנות עד שמצאנו תורה חדשה.

עקרון ההתאמה אומר – אם תהיה תורת קוונטית נכונה והתורה תבטא מנות של איזהו גודל (יהיה מספר קוונטי שסופר את הרמות, ברמות של האטום זה יהיה המספר של הרמה), במספרים גבוהים התורה הקלאסית תתלכד עם התורה הקוונטית. כלומר, כשיהיו לנו הרבה מנות (ובד"כ מדובר על מצב שיש הרבה אנרגיה במערכת) אנחנו מצפים שהתורה הקלאסית תתלכד עם הקוונטית.

איך ננסח את העקרון הזה – נקח את $\frac{dH}{dn}$, כש-H הוא ההמילטוניאן של המערכת ו-n זה המספר הקוונטי שלנו, ונכתוב:

$$\frac{dH}{dn}\xrightarrow{n\to\infty} h\nu_{cl}(E)$$

עקרון ההתאמה מדבר על כל מערכת שיש לה תנועה מחזורית. זה אומר שהצפיפות של הרמות, המרחק בין רמה לרמה, הוא $h\nu$ (ν_{cl} זה התדר הקלאסי).

נעביר אגפים, ונעשה אינטגרציה על הביטוי עד האנרגיה שמעניינת אותנו:

$$\int_{E_{min}}^{E}\frac{dH}{d\nu_{cl}(E)} = nh + C$$

באינטגרציה הנחנו שיש איזושהי אנרגיה מינימלית. זו תנועה מעגלית, אז יש לזה זמן מחזור, כלומר אפשר לכתוב:

$$\int_{E_{min}}^{E}\frac{dH}{d\nu_{cl}(E)} = \int_{E_{min}}^{E} T(E)\,dH = \int_{E_{min}}^{E} dH\oint\frac{dq}{\dot{q}} = \int_{E_{min}}^{E} dH\oint\frac{dq}{\partial H/\partial p} = \int_{E_{min}}^{E} dH\oint dq\,\frac{\partial p}{\partial E}$$
$$= \int_{E_{min}}^{E} dH\,\frac{\partial}{\partial E}\oint p\,dq = \oint_{H(q,p)=E} p\,dq = \int_{H(p,q)\le E} dq\,dp = A = nh + C$$

(הסבר למעברים – המעבר השני הוא פשוט החלפה של זמן המחזור באינטגרציה של דרך חלקי המהירות; בשלישי השתמשנו במש' המילטון יעקובי; ברביעי החלפנו את H ב-E כי הוא קלאסי, יש לו כאן משמעות של אנרגיה)

האינטגרל $\oint_{H(q,p)=E} p\,dq$ שקיבלנו זה אינטגרל על מסלול במרחב הפאזה, כשמה שמגדיר את המסלול הסגור הוא העקומה $H = E$ (שעליו יש ערכים שונים של p, q, ואנחנו מטיילים על הערכים על פני העקומה הזאת). מה שקיבלנו זו הפעולה של התנועה המחזורית, השטח שהפעולה במרחב הפאזה תוחמת.

תורת הקוונטים הישנה, שלא מדברת בהכרח על מודל האטום של בוהר אלא על כל תנועה מחזורית, אומרת שהתנועה המחזורית יכולה לקבל ערכים עד כדי כפולות שלמות של קבוע פלאנק, עד כדי האנרגיה המינימלית (שנראה שזה מה שמבדיל הרבה פעמים בין תורת הקוונטים הישנה והחדשה).

<u>הערות</u> –

- מה קורה אם למערכת יש יותר מדרגת חופש אחת? עדיין יהיו לה מסלולים סגורים במרחב הפאזה, שלהם תהיה פעולה שמשוייכת לכ"א מהפרמטרים, ונצטרך לכתוב:
$$\oint_{H(q,p)=E} p_i \, dq = n_i h$$
כלומר, נקבל לכל דרגת חופש מספרים קוונטים. לא יהיה מספר אחד שיאפיין את האנרגיות, אלא יותר ממספר אחד, בהתאם לדרגות החופש.

- אם נקח את התנאי של תורת הקוונטים הישנה וכנתוב את הקשר $p = \hbar k$ נקבל את הפתרון של השיעור שעבר של מודל האטום של בוהר. עכשיו קיבלנו משהו יותר כולל, שנכון לכל תנועה מחזורית ולא רק תחת כח מרכזי.

- נעיר שעקרון ההתאמה לוקח את ההמילטוניאן באיזור הקוונטי ומשאיף את n לאינסוף, וטוען שהצפיפות של ההמילטוניאן ב-nים גבוהים תראה כמו התדר. זה תמיד נכון. הצעד שבוהר עשה היה לבוא ולבדוק את הכיוון השני. בכיוון השני מתקבלת תורת הקוונטים הישנה. הכיוון הזה לא בהכרח נכון, אבל לפעמים הוא נכון, לפעמים מאוד קרוב ולפעמים נותן אינטואיציה – הוא לא נכון באופן כללי. במקרה של אטום המימן רמות האנרגיה שמתקבלות נכונות, אבל זה לא תמיד כך.

3.3 אור ומפצל קרן תלוי־קיטוב

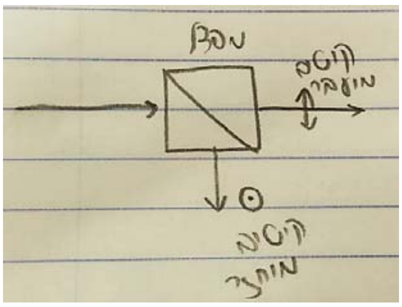
זה הניסוי האחרון שנדון בו לפני שנעבור לפורמליזם המתמטי של תורת הקוונטים. ההבדל בין מה שדיברנו עליו עד עכשיו זה שהוא לא ניסוי היסטורי שהוביל לתורת הקוונטים. הדיון במקרה הזה יאסוף את כל ההבנות של מה שהיה לנו עד עכשיו, ויאגד את החוקים שלפיהם ננסח את תורת הקוונטים.

נעיר כאן שהמתמטיקה של תורת הקוונטים לגמרי תלושה מאינטואיציה. מצד שני, זה יתאים לארבעת הניסויים שעברנו עליהם, ומכאן תהיה לנו קצת אינטואיציה.

מה זה מקטב – השדה הא"מ זה שדה חשמלי שמתנדנד בזמן שהוא מתקדם. כיוון הנדנוד שלו נקרא הקיטוב שלו. אם נסתכל על גל שמתקדם בכיוון $\hat{z}$:
$$\vec{E} = E_0 e^{i(kz-\omega t)} \hat{e}_i$$

וקטור היחידה $\hat{e}_i$ הוא כיוון הנדנוד, כלומר כיוון הקיטוב.

מפצל קרן תלוי־קיטוב זה מקטב, כלומר מכשיר שמאפשר רק לקיטוב אחד לעבור, והקיטוב שלא עובר במפצל מוחזר ממנו.



נבדוק שלושה קיטובים – אם נכניס אור שכולו במישור ההתקדמות כולו יעבור, אם כולו ניצב כולו יוחזר. עכשיו נכנס קיטוב לינארי:

$$\hat{e}_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{e}_x + \hat{e}_y\right)$$

קלאסית, אנחנו יודעים בדיוק מה יקרה – חצי מהאור ימשיך (זה שבכיוון האופקי) וחצי מהאור יוחזר (זה שבכיוון האנכי), יש תיאור קלאסי מלא של התופעה. אבל בשיעורים האחרונים ראינו שהאור הזה בא במנות, שנושאות תנע ואנרגיה. אין חצאי מנות. מה ייקרה אם נקח את אותו האור ונתחיל להנמיך את האנרגיה שלו, לדוגמא ע"י פילטרים לפני המקטב שיבלעו את האור? בסופו של דבר נגיע לרמה כזאת שבכל זמן שהגלאים יכולים למדוד עובר במערכת רק פוטון אחד.

בניסוי שבו האנרגיה הייתה גבוהה שני הגלאים גילו אור. אבל עכשיו הפוטון האחד הזה לא יכול להגיע לשני הגלאים, כי הוא רק פוטון יחיד. יותר מזה, משהו צריך לקרות – מצד אחד הפוטון לא יכול להתפצל לשניים, ומצד שני הוא לא יכול להעלם. לא משנה איך נענה על זה, אנחנו רוצים שהיא תתאים לעקרון ההתאמה. כלומר, איזו תשובה שלא נענה, אם נתחיל להוסיף חזרה פוטונים עד שנגיע ל-$n \gg 1$ צריך לחזור לתורה הקלאסית.

אם ניתן איזשהו עקרון לפיו איזשהו גלאי יגלה את האלקטרון, נשבור איזושהי סימטריה. לדוגמא, אם נגיד שפעם גלאי אחד מגלה ובפעם השנייה הגלאי השני, נשבור סימטריה של זמן (כי לדוגמא איך החלטנו מי הראשון?). הדרך היחידה להמלט מהמלכודות האלה זה להגיד שהגלאי שייגלה את הפוטון הוא אקראי.

אבל זה לא מספיק – אנחנו צריכים להעלות את מספר הפוטונים ולקבל את התוצאה הקלאסית. נקבע שהאקראיות היא בסיכוי של חצי, וכך אם נחזור על הניסוי הרבה פעמים נקבל שחצי מהפוטונים יתקבלו בגלאי האופקי X וחצי בגלאי שמתחת למפצל Y.

מה הבעיה – אנחנו מנסים לבנות תורה פיזיקלית, ואנחנו רגילים שהתורות הפיזיקליות הן דטרמיניסטיות. כלומר, אנחנו רגילים שאם יש לנו ידע על המערכת ברגע מסויים אנחנו יכולים לקדם את המערכת לפי החוקים שאנחנו מכירים ולחזות את המצב של המערכת. כאן, כשהפוטון נמצא לפני המפצל אי־אפשר לחזות מי מהגלאים יגלה את הגלאי.

נסתכל עכשיו על קיטוב כללי:

$$\hat{e}_p = \hat{e}_x \cos\theta + \hat{e}_y \sin\theta \, e^{i\varphi}$$

אפשר להכניס לניסוי הזה פוטון כלשהו ולשאול מה ייקרה עכשיו. בניסוי הקלאסי $\cos^2\theta$ ייפגע בגלאי X ו-$\sin^2\theta$ ייפגע בגלאי Y. לכן, בפוטון בודד אנחנו רוצים שהסיכוי יתאים למקר הקלאסי עבור הרבה חלקיקים, לכן הסיכוי שלו להקלט ב-X יהיה $P_x = |\cos^2\theta|$ ו-$P_y = \left|\sin\theta\, e^{i\varphi}\right|^2$ (נשים לב ש-θ משפיע ו-φ לא).

3.3.1 מסקנות מהניסוי – עשר התובנות

<u>המסקנות</u>:

1. השדה החשמלי של אור משמש ברמת הפוטון הבודד (כלומר באיזור הקוונטי) הבודד לתיאור הסתברותי של תוצאות הניסוי.
2. כפי שהשדה החשמלי מקיים את משוואות מקסוול הלינאריות, כך גם התיאור ההסתברותי יקיים עקרון זה.
3. איננו יכולים לצפות את התוצאה של ניסוי בודד, וכן הוא אינו יכול ללמד אותנו את טבעו של הפוטון. הדטרמיניזם הרומנטי והקלאסי צריך להיזנח.
4. כדי לצפות בתיאור ההסתברותי של הפוטון, יש לחזור על הניסוי מספר רב של פעמים, כאשר תהליך ההכנה של המערכת צריך להיות זהה כל פעם.
5. בשונה מהמקרה הקלאסי, שבו יש רצף של תוצאות אפשריות כתלות בזווית הרציפה θ, עבור הפוטון הבודד ישנן (בניסוי הזה) רק שתי אפשרויות למדידה בודדת. נקרא לתוצאות האלה התוצאות העצמיות ולערכיהן הערכים העצמיים של המדידה.

6. למצבים שנותנים תוצאה וודאית מתוך התוצאות העצמיות נקרא המצבים העצמיים של המדידה.
7. מצב כללי ייכתב ע"י צירוף לינארי של מצבים עצמיים של המדידה ע"פ עקרון הסופרפוזיציה. ההסתברות לתוצאה עצמית ניתנת ע"י הערך המוחלט של גודל האמפליטודה בריבוע של המצב העצמי המתאים לה.
8. המצבים העצמיים משוייכים למכשיר המדידה ולאופן השימוש בו.

(שני האחרונים בשיעור הבא)

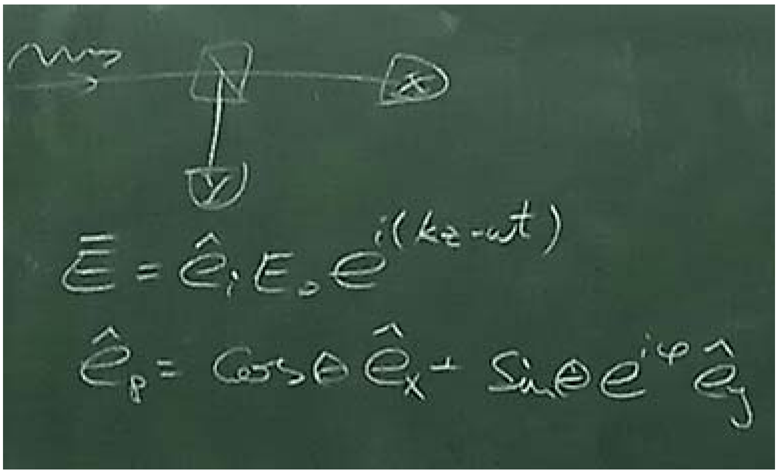
<u>הסברים</u>:

1. ראינו שמהשדה החשמלי, שמהמקרה שלו כשכותבים אותו בעזרת הרכיבים, אפשר לתת תחזיות הסתברותיות על תוצאות הניסוי של פוטון בודד.
2. שדות חשמליים מקיימים סופרפוזיציה. כלומר, אם ידוע שדה חשמלי אחד וידוע שדה חשמלי שני, גם הסכום שלהם הוא שדה חשמלי שמקיים את משוואות מקסוול. זה נובע מהעניין של משוואות מקסוול. מאחר והשדה החשמלי הוא זה שמוביל לתיאור ההסתברותי, נסיק שגם התיאור ההסתברותי הזה יקיים לינאריות – אם יהיה תיאור הסתברותי אחד ותיאור הסתברותי אחר, הסכום שלהם גם יהיה תיאור הסתברותי.
3. מצד אחד יש ניסויים שאנחנו לא יכולים לחזות את התוצאה שלהם, מצד שני כשאנחנו כבר מודדים משהו אנחנו לא יודעים שום דבר על הפוטון שהגיע למערכת, מניסוי אחד אנחנו לא יודעים על המערכת. רואים את זה בכך שלשני ניסויים שונים יכולה להיות אותה תוצאה (שני קיטובים שונים יכולים להוביל לקליק באותו הגלאי), לכן התוצאה לא מלמדת אותנו מספיק על המצב. כל מה שאנחנו יכולים להגיד אם היה קליק בכיוון x זה שהפוטון לא היה מקוטב כולו בכיוון y, זה הדבר היחידי שלמדנו.
4. אם אנחנו רוצים לשחזר את ההסתברויות של הפוטון, אירוע אחד לא מספיק. בשביל זה אנחנו צריכים לחזור על הניסוי שוב ושוב, תו"כ זה שאנחנו מקפידים שהכנו את הפוטון באותה הדרך.
5. בניסוי הקלאסי יש המון אפשרויות לתוצאה של הניסוי – חלק כזה הלך ל-x והשאר הלך ל-y, וזה יכול להיות כל חלק שהוא כתלות בזווית. כאן, בניסוי בודד יש רק שתי אפשרויות – קליק בגלאי x או קליק בגלאי y. זה חלק מהקוונטיזציה – למערכת יש מספר מאוד מסויים של תוצאות אפשריות שהוא לא בהכרח זהה למספר האפשרויות בניסוי הקלאסי.
   בנוגע למשפט השני – אם גלאי x עשה קליק קוראים לתוצאה התוצאה העצמית של המדידה. מה הערך שמדדנו – במקרה הספציפי הזה זו זווית ההסטה של הפוטון. כשהגלאי x עשה קליק הפוטון לא סטה ממסלולו ואז אנחנו אומרים שהערך העצמי של המדידה הוא אפס, כשגלאי y עושה קליק אומרים שהערך העצמי הוא $90°$.
6. בהמשך נראה איך כ"א מהתובנות תעזור לנו בפיתוח של הפורמליזם המתמטי.
7. למעשה מה שכתבנו כאן במקרה של פוטון זה $P_{x,y}$.
8. אם נקח את המערכת ונסובב אותה ב-$45°$, המצבים העצמיים הם $\hat{e}_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{e}_x \pm \hat{e}_y\right)$, וצריך לכתוב כל קיטוב אחר ע"י סופרפוזיציה שלהם כדי לדעת את ההסתברויות.

4 שיעור 4 – 27.3.18

4.1 אור ומפצל קרן תלוי־קיטוב

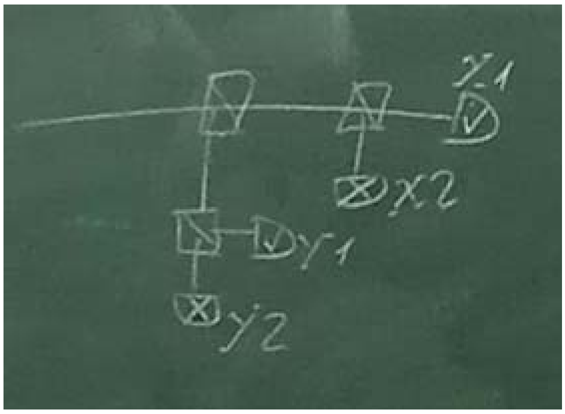
4.1.1 מסקנות מהניסוי – עשר התובנות – המשך



9. לאחר מעבר הפוטון או ההחזרה שלו את המפצל, הצבת מפצל נוסף תוביל תמיד לתוצאה וודאית, גם אם היה הפוטון תחילה בצירוף לינארי של מצבים עצמיים.

10. מאחר וראינו הקבלה מלאה בין פוטון בתור חלקיק וחלקיקים קוונטיים אחרים (כלומר לקחנו את הפוטון, האור, ונתנו לו תכונות של מסה ותנע כמו של חלקיק, ואז לקחנו את האלקטרון ונתנו לו אורך גל), אנחנו מצפים שהתובנות האחרות יעבדו גם על שאר החלקיקים, לא רק פוטונים, ולכולם נקרא חלקיקים קוונטיים.

הסבר ל-9: נסתכל נניח על המערכת הזאת:



תובנה 9 אומרת כך – אם הפוטון עבר את המקטב הראשון, הוא בהכרח גם יעבור את השני. הפוטון יגיע לאחד הגלאים, ולכן לא לשני (לפי ה-X וה-V בתמונה), למרות שלפני הגלאי הראשון הוא היה עשוי להיות בכל אחד מהקיטובים.

זה אומר שהמדידה עצמה שינתה את המצב. ההשתנות המיידית הזאת היא אחת התעלומות הכי גדולות של מכניקת הקוונטים, וקוראים לה קריסה (collapse).

4.2 מרחב המצבים ו-ווקטור המצבים

נעבור עכשיו להקדמה מתמטית, נראה איך האלגברה מתארת את העולם הקוונטי. במכניקה אנליטית היה לנו תיאור מתמטי לכל מערכת – הסתכלנו על דרגות החופש המוכללות של כל מערכת, וקיבלנו וקטור ארוך של q_i ו-ווקטור ארוך שמתאים להם p_i. הוקטור המוכלל של q ו-p נותן תמונה מלאה של המערכת באותו הרגע.

בנוסף לזה, אפשר גם לחזות את העתיד – נקח את המצב הנוכחי ונקדם אותו בזמן באמצעות משוואות, ונקבל מה יהיה המערכת בזמן עתידי. לדבר הזה קוראים תיאור פיזיקלי מלא.

אנחנו מחפשים משהו שייקח מערכת קוונטית וייתן לנו תיאור פיזיקלי כמה שיותר מלא. לתיאור הזה נשתמש בפורמליזם מתמטי שלקחו מאלגברה לינארית. מדוע? קודם כל כי זה עובד, זה חוזה תוצאות של ניסויים.

הנחות העבודה שנעבוד איתן –

<u>הנחה 1א'</u>: ניתן לתאר את המצב של מערכת קוונטית ברגע מסויים ע"י וקטור במרחב הילברט מרוכב. למרחב נקרא "מרחב המצבים", ולווקטור "וקטור המצבים".

<u>הסבר</u>: מערכת קוונטית זה מה שבתובנה העשירית, כל המערכת שנענית לחוקי המערכת הקווטית שדיברנו עליהם. בהנתן מערכת כזאת, אפשר לתאר את המצב הרגעי שלו בעזרת וקטור במרחב הילברט מרוכב.

למתמטיקאים יש סדרה של תנאים שמגדירים מה זה מרחב לינארי, וקטורי, מרחב הילברט. נחשוב על מרחב וקטור בתור אוסף אבסטרקטי של אלמנטים שנקרא להם וקטורים (ונתנתק לרגע מהמחשבה על וקטורים כסדרות של מספרים), ונדרשים לעמוד בתכונות כלשהן (לדוגמא: קיום של איבר אפס). ספציפית, מרחב הילברט – שהוא המרחב שמעניין אותנו – הוא מרחב וקטורי שמוגדרת לו מכפלה פנימית (פעולה על שני וקטורים שמחזירה סקלר), דרישה שלא מעניינת אותנו כפיזיקאים שהמרחב מכיל את השפה שלו ודרישה שמכפלה פנימית של איבר עם עצמו תהיה סקלר ממשי וחיובי. למה צריך שהמרחב יהיה מרוכב? התשובה בדומה לקודם – אם נגביל את עצמינו למרחב ממשי לא נוכל לתאר את מה שנרצה באמצעותו.

<u>סימונים</u>:

- נסמן את המרחב באות H. המרחב יכול להיות ממימד סופי (2 ומעלה) וממימד אין־סופי. נתקל בקורס בשתי הצורות, אבל בהקדמה הקרובה נגביל את עצמינו למרחבים סופיים, אם כי כל מה שנגיד יהיה תקף גם למרחבים אינסופיים.
- נסמן וקטור מהמרחב ב-ψ.
- נסמן את המכפלה הפנימית ב-(ψ',ψ).
- $\sqrt{(\psi,\psi)}$ הוא הגודל של הוקטור.
- $(\varphi,\psi)=0$ אומר שהווקטורים ניצבים (אורתוגונליים). אנחנו מכירים את ההגדרה של ניצבות מהמרחב התלת־מימדי, אז נשים לב שהרעיון הזה של גודל וניצבות מורחב מהמרחב התלת־מימדי הממשי למרחבים באופן כללי.

לדוגמא, נקח מרחב שבו הוקטורים הם זוגות של מספרים $\psi=\begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix}$. המכפלה הפנימית שלו תוגדר כך:

$$(\psi',\psi)=\sum_i c_i'^{*}c_i$$

מספר תכונות שנובעות ממכפלה פנימית כפי שהוגדרה עבור המרחב הזה:

- $(\varphi,\psi)=(\psi,\varphi)^*$
- לינאריות באיבר הימני – $(\varphi,c_1\psi_1+c_2\psi_2)=c_1(\varphi,\psi_1)+c_2(\varphi,\psi_2)$
- אנטי־לינאריות באיבר השמאלי – $(c_1\varphi_1+c_2\varphi_2,\psi)=c_1^*(\varphi_1,\psi)+c_2^*(\varphi_2,\psi)$

- נציג עכשיו סימון חדש לוקטורים, שהוא הכי נפוץ בתורת הקוונטים – הסימון של דיראק. מעכשיו כל וקטור יצויין באופן הבא: שתי תגיות, שבניהן השם של הוקטור (זה רק השם, שעוזר להבדיל בין הוקטורים):
$$|\psi\rangle$$
זהנקרא נקרא קֶט ket.
לדוגמא –
$$|\psi_1\rangle = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, |\psi_2\rangle = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$
$$|\psi\rangle = c_1|\psi_1\rangle + c_2|\psi_2\rangle$$

אם נחשוב על וקטור כתיאור של מצב פיזיקלי מסויים, אם המרחב הוא דו־מימדי אפשר לתאר אותו בתור סכום של שני וקטורים. יש אינסוף וקטורים שאפשר לבחור לצורך זה (בדוגמא שלנו – כל שני וקטורים שהם בסיס במרחב הדו־מימדי). הבחירה לא תשנה את המצב הפיזיקלי, לכן ההצגה הזאת יותר טובה מהצגה של צמד של מספרים, כי היא כללית.

- פונקציונל לינארי χ – זו פעולה על וקטור שמחזירה סקלאר. נסמן את ההפעלה ב- $\chi(|\psi\rangle)$.
משמעות הדרישה של הלינאריות:
$$\chi(c_1|\psi_1\rangle + c_2|\psi_2\rangle) = c_1\chi(|\psi_1\rangle) + c_2\chi(|\psi_2\rangle)$$

- מסתבר שאוסף כל הפונקציונלים הלינאריים שעובדים על מרחב הילברט מהווים בעצמם מרחב הילברט. נסמן את מרחב ההילברט של הפונקציונליים ב-H^* ונקרא לו מרחב הילברט הדואלי.
נשים לב שזה לא מרחב של מצבים פיזיקליים, זה מרחב של פונקציונליים. כל חבר במרחב הזה הוא פונקציונל. במקום לסמן אותו באות, נסמן אותו בסימון הבא:
$$\langle\chi|$$
זה נקרא בְרָה bra.

- מעכשיו בכתיב של דיראק, פונקציונל χ שעובד על וקטור ψ יסומן כך:
$$\langle\chi|\psi\rangle$$
(bra+ket=bracket, משם השם)

- יש לנו את מרחב הילברט של הווקטורים שמתארים מצבים פיזקליים, ויש לנו את המרחב הדואלי של מרחב הילברט שהוא של פונקציונליים. המרחבים הם באותו המימד, מה שאומר שאפשר לעשות מיפוי חד־ערכי בין כל איבר במרחב H לאיבר במרחב H^*.
אנחנו נסתכל על מיפוי כזה: אם נקח את האיבר χ במרחב הדואלי ונשאל איזה איבר מתאים לו במרחב הילברט, הוא זה שהמכפלה הפנימית שלו עם הוקטור תיתן את הפונקציונל, כלומר:
$$\langle\chi|\psi\rangle = (|\chi\rangle, |\psi\rangle)$$
במילים אחרות – השיוך בין איבר מסויים מהמרחב הדואלי למרחב הרגיל יהיה כזה שהאיבר שנבחר במרחב הרגיל הוא זה שהמכפלה הפנימית שלו עם הפונקציונל נותנת את ההפעלה של הפונקציונל עליו.

- תוצאה: אם נקח וקטור שהוא סופרפוזיציה ונשאל מה האיבר המתאים לו במרחב הפונקציונלים, אנחנו יודעים מה האיבר המתאים ל-ψ_1, ψ_2 בנפרד, והאיבר המתאים לסופרפוזיציה (לפי האנטי לינאריות) הוא:
$$c_1|\psi_1\rangle + c_2|\psi_1\rangle \Rightarrow c_1^*\langle\psi_1| + c_2^*\langle\psi_2|$$
(נשים לב שמצד שמאל של החץ יש לנו וקטור, ומצד ימין יש לנו פונקציונל)

- לכל וקטור ניתן למצוא פונקציונל, אז האם גם להפך? במרחבים סופיים כן, באינסופיים לא.

<u>הנחה 1ב'</u>: כאשר וקטור מצב שגודלו יחידה הוא סופרפוזיציה לינארית של מספר מצבים אורתוגונליים, הסיכוי למצוא את המערכת בכל אחד מהמצבים הוא גודל הערך המוחלט בריבוע של המקדם של המצב.

- נשים לב שאנחנו מגבילים את הדיון לוקטורים באורך יחידה, כלומר $\langle\psi|\psi\rangle = 1$. אם אנחנו נמצאים במצב:
$$|\psi\rangle = c_1|\psi_1\rangle + c_2|\psi_2\rangle$$
אז הסיכוי להמצא בכל אחד מהמצבים:
$$P(\psi_1) = |c_1|^2$$
$$P(\psi_2) = |c_2|^2$$

- אפשר להבין למה אנחנו מגבילים את עצמינו לוקטור יחידה. נסתכל על הגדרת המכפלה הפנימית שראינו קודם כדוגמא:
$$\langle\psi|\psi\rangle = \sum_i c_i^* c_i = \sum_i P(\psi_i) = 1$$
כדי שלהסתברות תהיה משמעות, סכום כל ההסתברויות צריך להיות 1.

- נשים לב שאם c_2 מכיל איזושהיא פאזה (זה מספר מרוכב, אפשר לרשום אותו כ-$\rho e^{i\varphi_2}$), הפאזה לא תשפיע על ההסתברות למצב (רק ρ).

- אם נתון ψ, הסיכוי להמצא במצב ψ_i הוא:
$$P(\psi_i) = |\langle\psi_i|\psi\rangle|^2 = |\langle\psi_i|c_1\psi_1 + c_2\psi_2\rangle|^2 = |c_1\langle\psi_i|\psi_1\rangle + c_2\langle\psi_i|\psi_2\rangle|^2 = |c_i|^2$$
הסבר – פרקנו את ψ ל-ψ_1, ψ_2, ואז יש מכפלה פנימית אחת בין שני וקטורים אורתוגונליים זה לזה (ψ_1 ו-ψ_2) ואחת של ψ_1 עם עצמו, ונשאר רק עם ריבוע המקדם של ψ_1.

- אם אנחנו מסתכלים על מצב אחר, עם מקדמים אחרים:
$$|\varphi\rangle = c_1'|\psi_1\rangle + c_2'|\psi_2\rangle$$
אם יהיה לנו מכשיר מדידה אחר, שלא יישאל אם אנחנו נמצאים במצב ψ_1 או ψ_2 אלא אם אנחנו נמצאים ב-φ או במצבים אחרים, עדיין מתקיים שהסיכוי להמצא במצב φ הוא:
$$P(\varphi) = |\langle\varphi|\psi\rangle|^2$$
(את ההוכחה אפשר לבנות עם מעבר בסיס – בוחרים בסיס אחר של הצגה ש-φ הוא חבר בו, ואז נקבל חזרה את התשובה הזאת. מכיוון שאחת התכונות של מרחבי מכפלה פנימית היא שהחלפות בסיס לא משנות בה מכפלות פנימיות, כלומר סיבובים לא משנים את המכפלות הפנימיות, זו תהיה אותה תוצאה ואז נחזור לעניין הזה של המצבים האורתוגונליים.)

- נשים לב שבמקרה הראשון (שהוא $|\psi\rangle = c_1|\psi_1\rangle + c_2|\psi_2\rangle$) אמרנו שהפאזות לא ישפיעו, במקרה השני (שהוא $|\varphi\rangle = c_1'|\psi_1\rangle + c_2'|\psi_2\rangle$) הפאזות הפנימיות בין c_1' ו-c_2' כן ישפיעו (אם נכתוב באופן מלא את המכפלה הפנימית נראה את זה), אבל מה שלא ישפיע על התוצאה זה אם נקח את φ ונוסיף לו פאזה ($e^{i\theta}|\varphi\rangle$). זה קבוע שאנחנו מכפילים בו את הווקטור, ובמכפלה הפנימית זה ייפול בגלל הערך המוחלט (יוצא החוצה מהמכפלה הפנימית ואז הערך המוחלט יפיל אותו). זה אומר שנקבל את אותם סיכויים להמצא ב-φ בלי קשר לפאזה הכוללת שלו. זה מלמד אותנו עוד דבר על אילו מצבים מעניינים אותנו במרחב הילברט:
  - כאמור, מעניין אותנו תת־המרחב של המצבים שהאורך שלהם הוא 1 (אם רוצים את ההקבלה ל-$\mathbb{R}^3$, זו מעטפת של כדור תלת־מימדי. כמובן שלא עבור כל מרחב אפשר לדמיין את זה).
  - כל המצבים שמוכפלים בפאזה כללית על המסך ייתנו אותן תוצאות של נסיון, הסיכוי להמצא בהן הוא אותו הדבר. ז"א שכולם למעשה מייצגים את אותו המצב הפיזיקלי. זו הורדה של עוד דרגת חופש, מה שאומר שיש לנו שתי דרגות חופש שלא מעניינות אותנו במרחבי הילברט – אורך הווקטור (לא נסתכל עליו) ופאזות (שקילות בין מצבים).

5 <u>שיעור 5 – 10.4.18</u>

5.1 אופרטורים לינאריים

<u>הנחה 2</u>: לכל גודל פיזיקלי בר־מדידה משוייך אופרטור לינארי הרמיטי.

כדי שנוכל לענות על השאלה של מה המשמעות של גודל פיזיקלי בעולם הקוונטי ומה המשמעות של מדידה שלו (תהיה בהמשך גם הגדרה אלגברית לבר־מדידה) נצטרך להגדיר כמה הגדרות:

- <u>אופרטור</u> – פעולה על ווקטור שמחזירה ווקטור. בכל מה שנגיד בקורס הזה, אנחנו נדבר על אופרטורים שעובדים על וקטורים ממרחב הילברט, וספציפית שמחזירים וקטורים מאותו המרחב של הוקטורים שהם עבדו עליהם. נסמן אופרטורים באות גדולה, ובכתיב דיראק:
$$A|\psi\rangle = |\psi'\rangle$$
- <u>לינאריות של אופרטור</u> – המשמעות היא כרגיל:
$$A(c_1|\psi_1\rangle + c_2|\psi_2\rangle) = c_1 A|\psi_1\rangle + c_2 A|\psi_2\rangle$$

(נזכיר שאנחנו רוצים לחשוב על וקטורים בתור עצמים מופשטים שחיים במרחב, ולא בתור רצף של מספרים. על האופרטורים נחשוב בתור מטריצות, שיהיו ריבועיות בגלל שהוקטור המוחזר הוא באותו מימד).

- <u>מכפלה של אופרטורים</u> – המשמעות מתגלה רק כשעובדים על וקטורים. המשמעות היא הפעלה סדרתית של האופרטורים, כלומר:
$$(AB)|\psi\rangle = A(B|\psi\rangle)$$

באופן הכי כללי, סדר הפעולה של החלפה של אופרטורים משנה (לעיתים יהיו מקרים פרטיים שזה יתקיים). המשמעות של כפל של אופרטורים הוא כפל של מטריצות.

- $|\psi\rangle\langle\varphi|$ – כדי לפרש את העצם הזה נפעיל אותו על וקטור ונשאל אם אנחנו מבינים את התוצאה (אנחנו כבר יודעים שאם זה היה בסדר הפוך, $\langle\varphi|\psi\rangle$, המשמעות היא סקלר שהוא התוצאה של המכפלה הפנימית ביניהם):
$$|\psi\rangle\langle\varphi||\chi\rangle = |\psi\rangle\langle\varphi|\chi\rangle = \langle\varphi|\chi\rangle|\psi\rangle$$
(יכולנו לחליף את הסדר כי $\langle\varphi|\chi\rangle$ הוא סקאלר) קיבלנו וקטור, כלומר $|\psi\rangle\langle\varphi|$ הוא אופרטור בכתיבה דיראק.

  - נסתכל על אופרטור כזה שאנחנו יכולים להבין. נראה מה המשמעות של האופרטור $P_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|$ (עם ווקטור ψ מנורמל) על וקטור אחר:
$$P_\psi|\varphi\rangle = |\psi\rangle\langle\psi|\varphi\rangle = \langle\psi|\varphi\rangle|\psi\rangle$$
זה וקטור בכיוון ψ (שהוא, כזכור, מנורמל) שאורכו המכפלה הפנימית בין ψ ו-φ. זה למעשה הטלה של הווקטור φ בכיוון של ψ, ולכן נכנה את האופרטור הזה **אופרטור הטלה בכיוון של ψ**.

  - מה ייקרה אם נקח פעמיים את האופרטור הזה:
$$P_\psi^2 = P_\psi P_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|\psi\rangle\langle\psi| = |\psi\rangle\langle\psi| = P_\psi$$
קיבלנו את האופרטור עצמו.
(זה הגיוני ביחס למשמעות שייחסנו לו – אם הטלנו משהו בכיוון כלשהו ואז אנחנו מנסים להטיל אותו שוב באותו הכיוון, להטלה השנייה לא תהיה משמעות, זה כמו להטיל פעם אחת)

- <u>איבר המטריצה</u> – נסתכל על הסקאלר הבא:
$$\langle\varphi|(A|\psi\rangle)$$

(כלומר לוקחים ווקטור ומפעילים עליו אופרטור לינארי, ואז על התוצאה מפעילים את הפונקציונל φ)
לסקלאר הזה נקרא **איבר המטריצה של A בין $\langle\psi|$ ל-$|\varphi\rangle$**.
מאחר וגם האופרטור וגם הפונקציונל לינאריים, המשמעות של לקחת את הוקטור ולהפעיל עליו משהו ועוד משהו כדי לקבל סקלאר היא פונקציונל. לכן, יהיה פונקציונל בודד שיתאר את ההפעלה הסדרתית של אופרטור ואחריו פונקציונל. נסמן את הפונקציונל הזה ב-$\langle\varphi|A = \langle\varphi'|$, ונגדיר שהפונקציונל הזה אותו פונקציונל שנתן לנו את ההפעלה אחד אחרי השני, כלומר:

$$\langle\varphi|(A|\psi\rangle) = \langle\varphi'|\psi\rangle = (\langle\varphi|A)|\psi\rangle$$

נשים לב שאין משמעות למיקום של הסוגריים, לכן פשוט נזרוק אותן:

$$\langle\varphi|A|\psi\rangle$$

זה הסימון להפעלה סדרתית של ψ ואז A, או לחילופין הפעלה של הפונקציונל φ'.

- <u>הצמדה הרמיטית</u> – התחלנו עם $A|\psi\rangle = |\psi'\rangle$. בעת, כמו שיש לנו אופרטור A שמעביר את הוקטור ψ ל-ψ', יהיה לנו גם משהו שמעביר את $\langle\psi|$ ל-$\langle\psi'|$. אלה שני וקטורים במרחב הדואלי, לכן יש אופרטור שמשייך גם ביניהם. את האופרטור הזה אפשר לסיים גם ב-A, אבל נשים לב שזה A אחר – הוא משייך בין עצמים במרחב הדואלי לעצמים אחרים במרחב הדואלי. כדי להבחין ביניהם, נסמן אותו ב- $A^\dagger$ (dagger):

$$\langle\psi|A^\dagger = \langle\psi'|$$

  - בשיעור הקודם ראינו התאמה בין ווקטורים במרחב הילברט לווקטורים במרחב הדואלי. הפעולה ההיא נקראית **הצמדה הרמיטית**. לכן, גם הפעולה של התאמת אופרטור במרחב הילברט לאופרטור במרחב הדואלי תקרא הצמדה הרמיטית.
  שוב, מה זה אומר הצמדה הרמיטית – לקחת את הוקטור $|\psi\rangle$ ולמצוא את ה-$\langle\psi|$ שמתאים לו, או לקחת את A ולמצוא את $A^\dagger$ שמתאים לו.

- <u>תכונות של הצמדה הרמיטית</u> – בשיעור הקודם ראינו:

$$\langle\psi'|\varphi\rangle = \langle\varphi|\psi'\rangle^*$$

נציב עכשיו בתור ψ' את ψ אחרי שעבד עליו האופרטור A. נקבל:

$$\langle\psi|A^\dagger|\varphi\rangle = \langle\varphi|A|\psi\rangle^*$$

קיבלנו כלל של הצמדה הרמיטית. כמה תוצאות –
  - הצמדה של הצמדה תיתן את אותו האופרטור:

$$A^{\dagger\dagger} = A$$

  - אם נקח אופרטור שבנוי מסקלאר כפול אופרטור:

$$(cA)^\dagger = c^*A^\dagger$$

  - הצמדה של סכום היא סכום ההצמדות:

$$(A+B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger$$

  - הצמדת אופרטור שנבנה ממכפלת אופרטורים:
  נסתכל על $AB|\psi\rangle$ ונסמן:

$$|\chi\rangle = B|\psi\rangle, \qquad |\varphi\rangle = A|\chi\rangle$$

  נסמן ב-φ את התוצאה של הפעלת האופרטור הכפול $|\varphi\rangle = AB|\psi\rangle$.
  נשאל את עצמינו איך ייראה $\langle\varphi|$. קודם כל, $|\varphi\rangle = A|\chi\rangle$, לכן נשתמש באופרטור הצמוד הרמיטית ל-A:

$$\langle\varphi| = \langle\chi|A^\dagger$$

  באותו אופן אפשר להציב את $|\chi\rangle$ באמצעות הצמדה הרמיטית של B:

$$\langle\varphi| = \langle\chi|A^\dagger = \langle\psi|B^\dagger A^\dagger$$

כלומר:

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$$

- נבדוק איך נראית הצמדה של אופרטור שנכתב בכתיבת דיראק, כלומר נרצה למצוא את $(|\psi\rangle\langle\varphi|)^\dagger$.
נכפיל אותו מימין ומשמאל בשני ווקטורי עזר, כלומר נשאל למעשה מה איבר המטריצה של האופרטור הזה בין שני הווקטורים:

$$\langle\varphi'|(|\psi\rangle\langle\varphi|)^\dagger|\psi'\rangle$$

קיבלנו איבר מטריצה, שהוא סקאלר. נתחיל להפעיל עליו פעולות שאנחנו מכירים:

- o נתחיל עם התכונה שאומרת למה שווה איבר מטריצה שהאופרטור שלו מוצמד ($\left\langle\psi\middle|A^\dagger\middle|\varphi\right\rangle = \langle\varphi|A|\psi\rangle^*$):

$$\langle\varphi'|(|\psi\rangle\langle\varphi|)^\dagger|\psi'\rangle = (\langle\psi'|\psi\rangle\langle\varphi|\varphi'\rangle)^* =$$

- o יש שתי מכפלות פנימיות מוכפלות אחת בשנייה ואז צמודות קומפלקסית, לכן כ"א מהן צמודה קומפלקסית:

$$= \langle\psi'|\psi\rangle^*\langle\varphi|\varphi'\rangle^* =$$

- o נשתמש באנטי־לינאריות ברכיב השמאלי:

$$= \langle\varphi|\varphi'\rangle\langle\psi'|\psi\rangle =$$

- o נשתמש שוב ב"נאיביות" של כתיבת דיראק (שמאחוריה יש הרבה מתמטיקה) ונכתוב חזרה את שתי המכפלות הפנימיות האלה בתור ווקטור-אופרטור-ווקטור:

$$= \langle\varphi'|(|\varphi\rangle\langle\psi|)|\psi'\rangle$$

קיבלנו סה"כ:

$$\langle\varphi'|(|\psi\rangle\langle\varphi|)^\dagger|\psi'\rangle = \langle\varphi'|(|\varphi\rangle\langle\psi|)|\psi'\rangle$$

כלומר, איבר המטריצה של $|\psi\rangle\langle\varphi|$ הצמוד הרמטית שווה לאיבר המטריצה של $|\varphi\rangle\langle\psi|$. אם זה אופרטור, התוצאה של זה היא:

$$(|\psi\rangle\langle\varphi|)^\dagger = |\varphi\rangle\langle\psi|$$

- <u>אופרטור הרמיטי</u> – אופרטור שמקיים:

$$A^\dagger = A$$

מה המשמעות של זה, אם כל אחד מהם פועל על מרחב שונה? המשמעות היא:

$$\langle\psi|A|\varphi\rangle = \langle\varphi|A|\psi\rangle^*$$

(הסבר: אנחנו יודעים שתמיד מתקיים $\langle\psi|A|\varphi\rangle = \left\langle\varphi\middle|A^\dagger\middle|\psi\right\rangle^*$. אם השיוויון הזה נכון גם כשאין דאגר באיבר הימני, אז האופרטור הוא הרמיטי)

- אופרטור ההטלה הוא אופרטור הרמיטי, כי מתקיים:

$$P_\psi^\dagger = (|\psi\rangle\langle\psi|)^\dagger = |\psi\rangle\langle\psi| = P_\psi$$

5.2 הצגות של מרחב המצבים

עד עכשיו הקפדנו להעיר שאנחנו חושבים על הווקטורים כאובייקטים במרחב הילברט, והתנתקנו מהמחשבה על וקטורים בעמודות של מספרים כמו שאנחנו רגילים מאלגברה. כעת נבין למה.

נתחיל מלגדיר הצגה – הצגה היא בחירה של בסיס אורתונורמלי שלם במרחב הילברט $\{|u_i\rangle\}$. יש אינסוף בחירות כאלה – יש אינסוף בחירות של בסיסים אורתונורמליים שלמים, לכן לכל מרחב יהיו אינסוף הצגות.

מה המשמעות של מרחב אורתונורמלי שלם:

- אורתונורמלי: $\langle u_i|u_j\rangle = \delta_{ij}$.
- שלם: לכל וקטור יש פריסה באמצעות הבסיס, שהיא יחידה $|\psi\rangle = \sum_i c_i|u_i\rangle$ (ו- $\{c_i\}$ יחיד).

איך נקבל את הסט השלם, בהנתן שהוא קיים – נטיל את ψ על u_j:

$$\langle u_j|\psi\rangle = \sum_i c_i\langle u_j|u_i\rangle = \sum_i c_i\delta_{ij} = c_j$$

כלומר, כדי לקבל את המקדמים צריך לעשות מכפלה פנימית בין האיבר שאנחנו רוצים להציג לבין איברי הבסיס.

נכתוב את תנאי השלמות בדרך אחרת באמצעות החלפה של המקדמים במכפלה הפנימית המתאימה:

$$|\psi\rangle = \sum_i c_i|u_i\rangle = \sum_i \langle u_i|\psi\rangle|u_i\rangle = \sum_i |u_i\rangle\langle u_i|\psi\rangle = \left(\sum_i |u_i\rangle\langle u_i|\right)|\psi\rangle$$

כל מה שבסוגריים זה אופרטור (כסכום של אופרטורים בכתיב דיראק). הוא לא עושה כלום לוקטור, לכן זה אופרטור יחידה.

את האופרטור הזה קיבלנו משני התנאים (אורתונורמלי+שלם), לכן אפשר לאחד את שני התנאים האלה לתנאי אחד, שמתקיים רק עבור מרחב אורתונורמלי שלם:

$$\sum_i |u_i\rangle\langle u_i| = \mathbb{1}$$

5.3 הסבר מפורט על הצגת וקטורים בסדרות

מאחר שראינו שבבחירה של הצגה ווקטור מתואר ע"י קבוצה של מספרים (שהם המקדמים $c_i = \langle u_i|\psi\rangle$), את המספרים האלה אפשר להציב על עמודה, ואפשר לקבל מה שנקרא **הצגה של הווקטור במרחב הסדרות**:

$$|\psi\rangle \overset{\text{מיוצג ע"י}}{=} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_i \\ \dots \\ \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle u_1|\psi\rangle \\ \langle u_2|\psi\rangle \\ \dots \\ \langle u_i|\psi\rangle \\ \dots \\ \dots \end{bmatrix}$$

ז"א, כשיש עמודה של מספרים ואומרים לנו שזה וקטור במרחב הילברט צריך לשאול תחת איזו הצגה. כל הצגה תיתן עמודה אחרת של מספרים. המצב עצמו לא יישתנה, הוא אותו הווקטור, אבל ההצגה של תשתנה. אפשר להגיד שההצגה היא מערכת צירים – בוחרים מערכת אורתונורמלית, מציבים אותה במרחב ובודקים את ההיטלים של הוקטור על כ"א מהצירים. בדומה ל-$\mathbb{R}^3$ ששם קל לנו לדמיין את זה, בחירות שונות של מערכות צירים ייתנו שלשות מספרים שונות, אבל הווקטור נשאר אותו הווקטור.

נניח שנתון וקטור $|\varphi\rangle$ בהצגה מסויימת, עם מקדמי הפרישה שלו $\{b_i\}$ על $\{u_i\}$. נרצה למצוא את הווקטור המתאים לו במרחב הדואלי.

נעשה זאת באמצעות טריק שנשתמש בו הרבה בקורס, והוא לקחת וקטור או אופרטור ולהפעיל עליו את אופרטור היחידה. במקרה שלנו, זה יאפשר לנו להחליף את האופרטור ביחס השלמות:

$$\langle\varphi| = \langle\varphi|\mathbb{1} = \langle\varphi|\sum_i |u_i\rangle\langle u_i| = \sum_i \langle\varphi|u_i\rangle\langle u_i| = \sum_i \langle u_i|\varphi\rangle^*\langle u_i| = \sum_i b_i^*\langle u_i|$$

כלומר, אם אנחנו יודעים הצגה של וקטור, ההצגה של וקטור במרחב הדואלי תהיה בעזרת אותו סט של מספרים אבל צמודים קומפלקסית.

בשביל לראות איך נראית מכפלה פנימית, נעשה מכפלה פנימית בין שני וקטורים ואז נפעיל את אופרטור היחידה על אחד מהם:

$$\langle\varphi|\psi\rangle = \langle\varphi|\mathbb{1}|\psi\rangle = \sum_i \langle\varphi|u_i\rangle\langle u_i|\psi\rangle = \sum_i b_i^* c_i$$

כלומר, אפשר לחשב את המכפלה הפנימית באמצעות ההצגות של φ (עם $\{b_i\}$) ושל ψ (עם $\{c_i\}$), כאשר את כל המקדמים b מצמידים ואת מקדמי c לא.

אנחנו רואים עכשיו שהסכום הזה הוא לא ההגדרה של מכפלה פנימית, אלא תוצאה של מכפלה פנימית במרחב הילברט, שנראית כך כשאנחנו משתמשים בהצגה.

אנחנו יודעים מה נותן את התוצאה הזאת – מכפלה של שני וקטורים אם נקח את הווקטור c בתור וקטור עמודה ואת הווקטור b בתור וקטור שורה. כלומר, אם φ יהיה וקטור שורה ו-ψ יהיה וקטור עמודה שנסדר בהם את המקדמים שלהם בהצגה, המכפלה שלהם תיתן בדיוק את הסכום הזה. זה מלמד אותנו שאם את וקטור ה-ket הצגנו בתור עמודה של מספרים, כדי להיות עקביים עם אלגברה של מרחב הסדרות נציג את וקטור ה-bra בתור שורה של מספרים.

יותר מזה – ההצמדה ההרמיטית בווקטורים עכשיו תהיה שחלוף של הווקטור בהצמדה קומפלקסית. שחלוף – הפיכת וקטור עמודה לשורה ולהפך, הצמדה קומפלקסית של הערכים – המשמעות של לקחת וקטור בהצגה מסויימת ממרחב הילברט ולחפש את הווקטור הצמוד לו במרחב הדואלי. זו המשמעות כשאנחנו מציגים אותו במרחב הסדרות.

בהנתן הצגה, כל אופרטור שעובד במרחב הילברט ניתן לכתיבה בצורה הבאה (לא נוכיח):

$$A = \sum_{k,\ell} a_{k,\ell}|u_k\rangle\langle u_\ell|$$

נראה מהם איברי המטריצה של A בין שני איברים של ההצגה:

$$\langle u_i|A|u_j\rangle = \sum_{k,\ell} a_{k,\ell}\langle u_i|u_k\rangle\langle u_\ell|u_j\rangle = \sum_{k,\ell} a_{k,\ell}\delta_{ik}\delta_{\ell j} = a_{ij}$$

במילים אחרות, מה שקראנו לו איבר המטריצה הוא למעשה לקבל את המקדמים $a_{k,\ell}$ להצגה היחידה.

נראה עכשיו איך פועל האופרטור A על וקטור כלשהו ψ:

$$|\psi'\rangle = A|\psi\rangle$$

זה אומר שיש סט של מקדמים, הצגה ל-ψ', שאפשר לקבל אותם באופן הבא: $c_i' = \langle u_i|\psi'\rangle$. נרשום:

$$c_i' = \langle u_i|\psi'\rangle = \langle u_i|A|\psi\rangle = \langle u_i|A\mathbb{1}|\psi\rangle = \sum_j \langle u_i|A|u_j\rangle\langle u_j|\psi\rangle = \sum_j a_{ij}\, c_j$$

כלומר, אם יש הצגה של הווקטור והפעלנו עליו אופרטור, את ההצגה החדשה שאפשר לקבל באמצעות הסכום הזה. מה שכתוב כאן זה ההגדרה מאלגברה של מכפלה של מטריצה בווקטור. לכן, באופן טבעי נקח את המקדמים a_{ij} ונסדר

אותם במטריצה כך ש-i מציין את השורות ו-j את העמודות נקבל הצגה של האופרטור במרחב הסדרות באמצעות מטריצה.

$$A \overset{\text{מיוצג ע"י}}{=} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots & & \\ \dots & & & & \\ a_{i1} & & \dots & & \\ \dots & & & & \end{bmatrix}$$

נקבל שהפעלה של מטריצה על ווקטור בהפעלה במרחב הסדרות שקולה להכפלה של מטריצה שבנויה מאיברי המטריצה בין u_j-ו u_i (עכשיו אנחנו מבינים למה זה נקרא איבר המטריצה, כי זה מה שהוא באמת במרחב הסדרות).

בצורה דומה, נראה שההפעלה על ווקטור *bra* של אופרטור $\langle\varphi|A$ היא שקולה להכפלה של מטריצה שמאלה לווקטור שורה (לא נוכיח, אבל אפשר להראות את זה באותו האופן).

נראה איך נייצג מכפלה של אופרטורים לינאריים. נכתוב את איבר המטריצה המתאים:

$$\langle u_i|AB|u_j\rangle = \langle u_i|A\mathbb{1}B|u_j\rangle = \sum_k \langle u_i|A|u_k\rangle\langle u_k|B|u_j\rangle = \sum_k a_{ik}b_{kj}$$

זו ההגדרה מאלגברה לינארית של כפל של שתי מטריצות. כלומר, אם אנחנו יודעים בבסיס מסויים את ההצגה של שני אופרטורים, ההצגה של אופרטור המכפלה תהיה לכפול את המטריצות אחת בשנייה.

מה המשמעות של האופרטור $|\varphi\rangle\langle\psi|$? את ψ אנחנו מייצגים עם ווקטור עמודה ואת ψ עם ווקטור שורה. הכפלה של ווקטור עמודה משמאל בווקטור שורה מימין נותנת מטריצה, ואפשר להראות שהמטריצה הזו היא בדיוק זו שמייצגת את האופרטור $|\varphi\rangle\langle\psi|$.

לבסוף, נסמן את איברי ההצגה של A ב-a_{ij} ושל $A^\dagger$ ב-a'_{ij}, ונרצה למצוא את הקשר ביניהם. מתקיים:

$$a'_{ij} = \langle u_i|A^\dagger|u_j\rangle = \langle u_j|A|u_i\rangle^* = a^*_{ji}$$

כלומר, אם ידועה ההצגה של A, ההצגה של $A^\dagger$ תתקבל ע"י שחלוף והצמדה קומפלקסית.

בהתאם, באופרטור הרמיטי $a_{ij} = a^*_{ji}$. כלומר, בהצגה של אופרטור הרמיטי תמיד האלכסון יהיה ממשי, ואיברי המראה משני צידי האלכסון יהיו צמודים קומפלקסית אחד לשני.

6 שיעור 6 – 15.4.18

6.1 מטריצת מעבר

בינתיים, חוץ מדרישות אלגבריות על אופרטורים, לא ראינו אותם אף פעם בכתיבה של דיראק. הקשר לפיזיקה לא נעשה בשיעור שעבר, חוץ מזה שאמרנו שגודל פיזיקלי בר־מדידה יהיה מיוצג (עם דגש על המילה מיוצג) ע"י אופרטור לינארי הרמיטי.

יש לנו שני סטים של בסיסים אורתונורמליים שלמים $\{u_i\},\{u_i'\}$, ואנחנו יודעים את הייצוג של וקטור מסויים בשניהם $c_i = \langle u_i|\psi\rangle$, $c_i' = \langle u_i'|\psi\rangle$. נסתכל על:

$$c_i = \langle u_i|\psi\rangle = \langle u_i|\mathbb{1}|\psi\rangle = \sum_j \langle u_i|u_j'\rangle\langle u_j'|\psi\rangle = \sum_j t_{ij}c_j'$$

עבור $t_{ij} = \langle u_i|u_j'\rangle$. נשים לב שאם אנחנו מציגים את ה-c_j' בתור וקטורי עמודה, t_{ij} הם איברים של מטריצה שכופלת את וקטור העמודה ונותנת לנו את ה-c_iים. כלומר, המטריצה עם האיברים t_{ij}, שאפשר לחשוב עליה בתור אופרטור T, מעבירים אותנו מבסיס אחד לבסיס אחר.

בשביל לקבל את המעבר ההפוך (מ-c_i' ל-c_i) אפשר פשוט להחליף בין i ל-j. כלומר:

- מעבר $c' \to c$: $t_{ij} = \langle u_i|u_j'\rangle$
- מעבר $c \to c'$: $t_{ji} = t_{ij}^{-1} = \langle u_i'|u_j\rangle$ (ה-1- כאן הוא רק סימון)

מתקיים:

$$t_{ij}^{-1} = \langle u_i'|u_j\rangle = \langle u_j|u_i'\rangle^* = t_{ji}^*$$

כלומר, t_{ji}^* הם איברי המטריצה שמייצגת אופרטור צמוד הרמיטית לאופרטור T (זה ש-t_{ij} הם האיברים שלה), כלומר t_{ji}^* הם איברים של $T^\dagger$. אבל t_{ij}^{-1} הם איברי המטריצה T^{-1} (הפעם זו באמת הפעולה ולא רק סימון), לכן:

$$TT^\dagger = T^\dagger T = \mathbb{1}$$

וזו ההגדרה של מטריצה אוניטרית (נדבר על זה בהמשך). כלומר, אופרטור המעבר הוא אופרטור אוניטרי.

6.2 תוצאות המדידה

נחזור להנחות שלנו, שנועדו כדי שנוכל לייצר מודל מתמטי שמתאים למציאות (גם לניסויים שראינו וגם פשוט מודל שעובד).

<u>הנחה 3</u>: הערכים האפשריים עבור תוצאה של מדידת ערך פיזיקאלי המתוארת ע"י אופרטור הרמיטי הם הערכים העצמיים שלו בלבד.

זה מתכתב עם תובנה מספר 5, שם כבר קראנו לערכי המדידה הערכים העצמיים של המדידה. עכשיו אנחנו יודעים שהערכים העצמיים של מדידה יכולים להיות רק ערכים עצמיים של אופרטור. איזה אופרטור? אותו אחד מההנחה הקודמת ששייכנו למדידה (נלמד איך למצוא אותם בהמשך).

בשונה ממדידה קלאסית שבה יש הרבה פעמים אינסוף תוצאות רציפות, במדידה קוונטית יש אוסף ערכים מאוד מסויימים (יכול להיות אינסופי אם המרחב אינסופי) – הערכים העצמיים של האופרטור ההרמיטי שבחרנו לייצג את המדידה איתו.

<u>הנחה 4</u>: לאחר המדידה משתנה מצב המערכת. היא עוברת (קורסת) למצב העצמי המשויך לערך העצמי שנמדד.

ההנחה הזאת מתחבאת בתובנה 9. זה אומר שאם נתונה לנו מערכת, דיברנו על זה שאנחנו לא יודעים לחזות בהכרח תוצאות של מדידה, שיכולה להיות אקראית. ומה קורה לאחר המדידה? מסתבר שהמדידה עצמה משנה את המצב של המערכת, משנה את מצב המערכת, משנה את הווקטור במרחב הילברט. הווקטור שמתאר את מצב המדידה לפני המערכת ואחריה עשוי להיות שונה.

ההנחה מסבירה לנו מה הוא יהיה אחרי המדידה. קיבלנו תוצאת מדידה מסויימת שהיא לפי 3 ע"ע של האופרטור. כל ע"ע משוייך למצב עצמי. הנחה 4 אומרת שאחרי המדידה אם מדדנו את הע"ע λ_i בהכרח המערכת עוברת למצב בשם ψ_i שזה הו"ע שלו. למעבר הזה קוראים קריסה, ואיך המערכת עוברת אליו זה סוג של תעלומה, אולי התעלומה הכי גדולה בפרשנות קופנהגן – למה מדידה של מערכת גורמת למערכת להשתנות, באיזה זמן זה קורה – אין לנו שום משוואות דינאמיות שמתארות את המעבר הזה.

למעשה, הנחה 1ב' מסתמכת על הנחות 3 ו-4. ההנחה אמרה שהסיכוי למצוא מערכת שנמצאית בתיאור ע"י סכום של מצבים אורתונורמליים הוא ערך מוחלט של המקדמים בריבוע. מה הכוונה להמצא במצב הזה? הכוונה היא להמדד במצב הזה, ועכשיו כשאנחנו יודעים שהמצב הזה הוא מצב עצמי של המערכת, הסיכוי להמדד בע"ע מסויים מחושב מהדרך שבה נפרוש את המצב באמצעות המצבים העצמיים (שם המקדמים יבטאו את הסיכוי).

6.2.1 ע"ע ו-ו"ע

נתחיל בהנחה 3, וניתן רקע אלגברי.

בהנתן אופרטור A, הווקטורים העצמיים שלו $|\psi_i\rangle$ והע"ע המתאימים λ_i יהיו כאלה שיקיימו את המשוואה:

$$A|\psi_i\rangle = \lambda_i|\psi_i\rangle$$

כלומר, הו"ע של אופרטור מסויים הם כאלה שהפעלה של האופרטור על הווקטור העצמי תיתן לנו ווקטור חדש באותו הכיוון, כך ששורש אורכו של הווקטור ישתנה פי הערך העצמי.

נשים לב שאם נקח ו"ע ונכפיל אותו בסקלאר נקבל ו"ע עם ע"ע אחר. זה אומר שיש לנו חופש לבחור כל ו"ע עד כדי המכפלה בסקלאר. לכן, לכל אופרטור נוכל לבחור את ה-ו"ע שלו כך שגודלם אחד וזה יהיה לנו נח.

באופן כללי, לאופרטור שפועל במרחב d יהיו d ע"ע (ומכיוון שאנחנו מדברים עכשיו על אופרטורים לא מנוונים, יהיו d ע"ע שונים).

דוגמא – נקח את אופרטור ההטלה $P_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|$. הדרישה ש-$\varphi$ יהיה ו"ע של האופרטור עם ע"ע λ:

$$P_\psi|\varphi\rangle = |\psi\rangle\langle\psi|\psi\rangle = \lambda|\varphi\rangle$$

השיוויון הזה יתקיים באחד משני מקרים:

1. $|\psi\rangle = |\varphi\rangle$ – כלומר ψ הוא ו"ע של P_ψ. במקרה כזה $\lambda = \langle\psi|\psi\rangle = 1$.
2. $|\psi\rangle \perp |\varphi\rangle$ – אם הם ניצבים אז $\lambda = 0$.

במילים אחרות, אופרטור ההטלה מייצג מדידה כלשהי. ההפעלה שלו על ווקטור היא לא מדידה, ההפעלה שלו על ווקטור מסויים היא הטלה, אבל הוא מייצג מדידה. המדידה שהוא מייצג היא המדידה ששואלת את השאלה – האם המערכת נמצאית במצב ψ. התשובה היא בוליאנית – אם הוא נמצא במצב הזה היא 1, בכל מקרה אחר 0.

נרצה להזכר איך מוצאים ו"ע ו-ע"ע של אופרטור. כמו שאפשר היה להבין מהכתיבה של דיראק, הו"ע וה-ע"ע לא תלויים בבחירה של הצגה כזו או אחרת, אבל בשביל למצוא אותם נשתמש בהצגה.

נבחר הצגה $\{|u_i\rangle\}$. נסתכל על המשוואה של הו"ע $A|\psi_k\rangle$, נכפול אותה משמאל באחד מווקטורי הבסיס ואז נוסיף את יחס השלמות:

$$\langle u_i|A|\psi_k\rangle = \sum_j \langle u_i|A|u_j\rangle\langle u_j|\psi_k\rangle = \lambda_k\langle u_i|\psi_k\rangle$$

$$\Rightarrow \sum_k a_{ij}c_j = \lambda_k c_i$$

נעביר שמאלה את המספר באגף ימין:

$$\sum_k \left(a_{ij}c_j - \lambda_k\delta_{ik}c_j\right) = \sum_k \left(a_{ij} - \lambda_k\delta_{ik}c_j\right) c_j = 0$$

נעבור עכשיו לכתיב מטריציוני/וקטורי, כלומר האופרטורים שלנו הם מטריצות:

$$(A-\lambda_k\mathbb{I})\vec{c} = 0$$

עבור $\mathbb{I}$ מטריצת היחידה ו-$\vec{c}$ וקטור שאיבריו c. זה סט של d משוואות לינאריות. כדי שיהיה לו פתרון לא טריוויאלי צריך שהדטרמיננטה של המטריצה הזאת תהיה אפס:

$$|A-\lambda_k\mathbb{I}| = 0$$

A היא מטריצה $d\times d$, לכן באופן הכי כללי ייתקבל פולינום ממעלה d שנקרא הפולינום האופייני. אם נפתור את הפולינום נקבל את הסט של הע"ע $\{\lambda_i\}$, שנקרא הספקטרום של A.

אם נבחר ע"ע כלשהו ונציב אותו, נקבל d משוואות תלויות, ואם נוריד אחת יהיו $d-1$ משוואות לא תלויות, כלומר יהיה סט לא טריוויאלי של פתרונות עבור המקדמים c, רק חסרה משוואה אחת. העניין הוא שהנרמול של הווקטור לא משנה למשוואת הע"ע, אז אפשר לקבע איבר אחר ולפתור את שאר המשוואות. במקרה הלא מנוון נקבל את כל הו"ע והע"ע (ונוכל לנרמל אותם כדי לקבל מצבים פיזיקליים).

6.2.2 המצב לאחר המדידה

נזכיר שהאופרטורים שלנו לא מנוונים, לכן הע"ע מייצג חח"ע את המצב. הסיכוי למדוד λ_i (ובהתאם להמצא במצב $|\psi_i\rangle$) הוא:

$$P(\lambda_i) = |\langle\psi_i|\psi\rangle|^2$$

ואם נכתוב את המצב בעזרת סט של מצבים אורתנונורמליים ש-ψ_i אחד מהם מה שכתוב כאן זה ריבוע המקדם של ψ_i בפריסה של ψ.

מה המשמעות של להפעיל את אופרטור ההטלה? המשמעות היא להטיל. לכן אפשר לחשוב על זה כאילו בזמן מדידה מופעל אופרטור ההטלה, כי אחרי המדידה יש קריסה ומופעל אופרטור הטלה על מצב עצמו כלשהו. אנחנו אומרים שהמדידה עשתה משהו, שינתה את המצב, כלומר יש אופרטור שעושה את זה $P_i = |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$. הנקודה היא שאנחנו לא יודעים מראש איזה אופרטור הופעל, יש סטטיסטיקה. בדיעבד נוכל להגיע שעבד אופרטור P_i:

$$|\psi'\rangle = P_i|\psi\rangle = |\psi_i\rangle\langle\psi_i|\psi\rangle = c_i|\psi_i\rangle$$

מה קורה אם מדדנו מצב, קיבלנו ע"ע ואנחנו מודדים שוב? נקבל את אותה התוצאה. אם מדידה היא הטלה ואחרי ההטלה קיבלנו ו"ע של אופרטור שמייצג, אם נעשה שוב הטלה נקבל את אותו הו"ע שוב.

6.2.3 תכונות של ו"ע של אופרטורים הרמיטיים

א. <u>הע"ע של אופרטור הרמיטי הם ממשיים</u>:

נקח את משוואת הע"ע ונכפיל אותה משמאל ב-$\langle\psi_i|$ (כלומר נטיל אותה על $|\psi_i\rangle$), ונשתמש בזה שהוא הרמיטי:

$$\langle\psi_i|A|\psi_i\rangle = \langle\psi_i|A^\dagger|\psi_i\rangle$$

התחלנו מזה שגדלים פיזיקליים מיוצרים עם אופרטורים הרמיטיים, כלומר זה שווה לצמוד:

$$\langle\psi_i|A|\psi_i\rangle = \langle\psi_i|A^\dagger|\psi_i\rangle = \langle\psi_i|A|\psi_i\rangle^* = \lambda_i\langle\psi_i|\psi_i\rangle$$

קיבלנו שיש שיוויון בין λ_i לבין גודל שמקיים שהוא שווה לגודל הצמוד קומפלקסי שלו. בשביל שמשהו יהיה שווה לצמוד המרוכב שלו צריך שהוא יהיה ממשי, כלומר: λ_i ממשי, הע"ע של אופרטור הרמיטי הם ממשיים.

ב. <u>הע"ע ו-ו"ע של האופרטור כאשר הוא מופעל שמאלה הם אותם ערכים</u>:

נקח שוב את משוואת הע"ע ונצמיד אותה הרמיטית לקבלת $\langle\psi_i|A^\dagger$. מההרמיטיות של A מתקיים:

$$\langle\psi_i|A^\dagger = \langle\psi_i|A \overset{*}{=} |\psi_i\rangle\lambda_i^* \overset{**}{=} |\psi_i\rangle\lambda_i$$

* - זו משוואת הע"ע, ** - כי ראינו שהוא ממשי.

מהשיוויון $\langle\psi_i|A = |\psi_i\rangle\lambda_i$ אנחנו לומדים שכמו שה-ψ_i, λ_i הם הו"ע של האופרטור A כשהוא מופעל ימינה, אם נשתמש בהגדרה שאומרת מה המשמעות של האופרטור כאשר הוא מופעל שמאלה נקבל את אותם ע"ע עם ו"ע (שזה לא טריוויאלי).

ג. <u>הו"ע של אופרטור הרמיטי לא מנוון ניצבים אחד לשני + אופרטור בר תצפית</u>:

נכתוב את משוואות הע"ע עבור שני ע"ע שונים:

$$A|\psi_i\rangle = \lambda_i|\psi_i\rangle$$
$$A|\psi_j\rangle = \lambda_i|\psi_j\rangle$$

נטיל את המשוואה הראשונה על הווקטור ψ_j ואת השנייה על ψ_i:

$$\langle\psi_j|A|\psi_i\rangle = \lambda_i\langle\psi_j|\psi_i\rangle$$
$$\langle\psi_i|A|\psi_j\rangle = \lambda_j\langle\psi_i|\psi_j\rangle$$

את המשוואה השנייה נצמיד הרמיטית (ונשים לב ש-A הרמיטי, לכן $A^\dagger = A$, וש-λ_j ממשי):

$$\langle\psi_j|A|\psi_i\rangle = \lambda_j\langle\psi_j|\psi_i\rangle$$

נפחית את המשוואה הזאת מהמשוואה הראשונה:

$$0 = (\lambda_i - \lambda_j)\langle\psi_j|\psi_i\rangle$$

מאחר והע"ע שונים מתקיים $\lambda_i - \lambda_j \neq 0$ מתקיים בהכרח $\langle\psi_j|\psi_i\rangle = 0$, כלומר $\psi_j \perp \psi_i$. כלומר, הו"ע של אופרטור הרמיטי לא מנוון כולם ניצבים אחד לשני. אפשר לנרמל אותם, ולכן כולם אורתונורמלים אחד לשני.

כאשר $|\psi_i\rangle$ הם בסיס אורתונורמלי שלם, האופרטור ייקרא **אופרטור בר־תצפית** (*observable*).

6.3 אופרטורים ברי־תצפית מתחלפים

שני אופרטורים ברי־תצפית ייקראו **אופרטורים מתחלפים** אם סדר ההפעלה שלהם לא משנה, כלומר הפעלת האופרטור $AB - BA$ היא כמו מכפלה ב-0. נסמן את זה כך:

$$[A, B] = 0$$

הסוגריים המרובעים האלה נקראים **יחס החילוף** (*commutator*).

<u>משפט</u> – אם קיים ל-A, B בסיס אורתונורמלי שלם משותף של ו"ע, האופרטורים מתחלפים.

<u>הוכחה</u>: נתון שקיים בסיס אורתונורמלי $\{|\psi_i\rangle\}$ של ו"ע גם של A וגם של B. נסמן את הע"ע של A ב-λ_i ושל B ב-μ_i (עם אותם ו"ע).

יחס החילוף הוא בעצמו אופרטור – נפעיל אותו על $|\psi\rangle$:

$$[A, B]|\psi\rangle = (AB - BA)\sum_i c_i|\psi_i\rangle =$$

נכנס את האופרטור לתוך הסכום, ונפעיל את האופרטורים הראשונים מימין. כשנפעיל כל אחד מהם נקבל תוצאה שמתאימה למשוואה של הע"ע, ואז נפעיל את האופרטורים שנותרו. כלומר:

$$= \sum_i c_i(\mu_i A - \lambda_i B)|\psi_i\rangle = \sum_i c_i(\mu_i\lambda_i - \lambda_i\mu_i)|\psi_i\rangle = 0$$

$$\Rightarrow [A, B]|\psi\rangle = 0$$

כלומר, אם קיים סט שלם של מצבים אורתונורמליים של ו"ע משותפים לשני האופרטורים, שני האופרטורים מתחלפים.

<u>משפט (הכיוון ההפוך)</u> – אם שני אופרטורים מתחלפים, קיים סט של מצבים עצמיים משותפים.

<u>הוכחה</u>: כדי להראות אותו נקח שתי משוואות ו"ע של A:

$$A|\psi_i\rangle = \lambda_i|\psi_i\rangle$$
$$A|\psi_j\rangle = \lambda_i|\psi_j\rangle$$

עכשיו נפעיל על שתי המשוואות גם את B, ואז נטיל את הראשונה על ψ_j ואת השנייה על ψ_i (בדומה למה שעשינו קודם, רק שעכשיו אנחנו גם מפעילים את B קודם):

$$\langle\psi_j|BA|\psi_i\rangle = \lambda_i\langle\psi_j|B|\psi_i\rangle$$
$$\langle\psi_i|BA|\psi_j\rangle = \lambda_j\langle\psi_i|B|\psi_j\rangle$$

נצמיד הרמיטית את המשוואה הראשונה (נזכור ש-A ו-B הרמיטיים, לכן ההצמדה ההרמיטית רק מחליפה את הסדר):

$$\langle\psi_i|AB|\psi_j\rangle = \lambda_i\langle\psi_i|B|\psi_j\rangle$$

נפחית מזה את המשוואה השנייה, לקבלת:

$$\langle\psi_i|AB - BA|\psi_j\rangle = (\lambda_i - \lambda_j)\langle\psi_i|B|\psi_j\rangle$$

הנחנו שהאופרטורים מתחלפים, לכן אגף שמאל מתאפס. בנוסף, הנחת העבודה שלנו היום כללה את זה שהאופרטורים לא מנוונים, כלומר $\lambda_i \neq \lambda_j$.

כלומר, כאשר $i \neq j$ מתקיים $\langle\psi_i|B|\psi_j\rangle = 0$. נסמן את הערך של זה כש-$i = j$ (שאותו אנחנו לא יודעים) ב-μ_i, כלומר מתקיים:

$$\langle\psi_i|B|\psi_j\rangle = \delta_{ij}\mu_i$$

לכן, B בהצגת הבסיס האורתונומלי $\{|\psi_k\rangle\}$ הוא מטריצה אלכסונית. המשמעות היא ש-B מלוכסן ע"י אותו סט מצבים שמלכסן את A. לכן, זה סט המצבים המשותף שמתאים לשניהם, וזה מה שרצינו להוכיח.

(בשביל להראות את עניין הלכסון, נקח את השיוויון שקיבלנו ונכפיל את שני הצדדים בווקטור כלשהו (שנבחר לפי זה שהוא יעזור לנו להוכיח את מה שאנחנו רוצים):

$$\sum_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|B|\psi_j\rangle = \sum_i |\psi_i\rangle\, \delta_{ij}\mu_i$$

קיבלנו את יחס השלמות שעובד על B. מכיוון שזה סט אורתונורמלי שלם (כי B הוא בר־תצפית) אנחנו פשוט מקבלים:

$$B|\psi_j\rangle = \mu_j|\psi_j\rangle$$

הוכחנו שסט הו"ע של B הוא אותו סט $\{|\psi_k\rangle\}$ כמו של A עם הע"ע μ_j, כש-μ_j הם הע"ע על האלכסון, אלה שלא התאפסו.

6.3.1 משמעות פיזיקלית של אופרטורים ברי־תצפית מתחלפים

מבחינה פיזיקלית, נקרא לצמד אופרטורים A, B כאלה **אופרטורים מתואמים** (*compatible*).

המשמעות – אם אנחנו מודדים גודל שמשויך לאחד אנחנו יודעים מה תהיה התוצאה של המדידה שמיוצגת ע"י השני. זאת מכיוון שאחרי המדידה עברנו לו"ע של A, ומכיוון ש-A ו-B חולקים ו"ע זה גם מגלה לנו מה המצב של B. במילים אחרות, אפשר להגיד שהמדידה של האופרטור השני לא מוסיפה לנו עוד מידע.

סדר המדידה לא משנה – אם נמדוד את B ואז את A נקבל את אותו הדבר כמו אם נמדוד בסדר הפוך.

7 שיעור 7 – 23.4.18

7.1 ערך התצפית

אמרנו שתוצאה של מדידה אחת לא מספרת לנו כמעט כלום על המצב. אם אנחנו רוצים ללמוד משהו יותר אינפורמטיבי על המצב צריך לצור סט גדול של מצבים שהוכנו באותה צורה, אנחנו יודעים שכל פוטון מתואר ע"י אותו ווקטור, כלומר נקבל סט גדול של מערכות שמתוארות ע"י אותו ווקטור. דיברנו על זה שמדידות חוזרות ישחזרו לנו דרך ההסתברויות שלהן ערך מוחלט בריבוע של איזושהי הצגה.

אם המצב ההתחלתי היא $|\psi\rangle$ ונבצע N מדידות, עבור ע"ע λ_i נקבל n_i מדידות, כך ש:

$$\sum_i n_i = N_i$$

כאשר מספר המדידות שלנו יהיה מאוד גדול $N \to \infty$ אז ההסתברות לקלוט את הערך העצמי λ_i:

$$P_i(\lambda_i) \xrightarrow{N\to\infty} \frac{n_i}{N}$$

אנחנו יודעים שזה גם שווה באופן כללי להטלה:

$$P(\lambda_i) = |\langle\psi_i|\psi\rangle|^2$$

נדבר על משהו שטבעי לדבר כשיש מדידה הסתברותית – על התוחלת, הממוצע.
התוחלת של הגודל המוגדר ע"י A במצב ψ היא:

$$\langle A\rangle_\psi = \sum_i \lambda_i P(\lambda_i)$$

ברור שהערך הממוצע תלוי לא רק בגודל שאנחנו מודדים אלא גם במצב – במצב אחר יהיו הסתברויות אחרות. הסיפור הזה הוא קלאסי לחלוטין.

נראה דרך פשוטה לחשב את הממוצע הזה – נציב את P_i מלמעלה:

$$\langle A\rangle_\psi = \sum_i \lambda_i |\langle\psi_i|\psi\rangle|^2 = \sum_i \lambda_i \langle\psi|\psi_i\rangle\langle\psi_i|\psi\rangle =$$

נשתמש עכשיו בעובדה שה-λ-ות הם הע"ע של ψ_i:

$$= \sum_i \langle\psi|A|\psi_i\rangle\langle\psi_i|\psi\rangle =$$

(למה עשינו את זה – הסכום נראה כמו משהו שיש בו את יחס השלמות, אבל זה לא ממש יחס השלמות, כי יש את ה-λות שאי אפשר להוציא אותן החוצה. עכשיו כשאנחנו כותבים את זה ככה יש אותו אופרטור שפועל על יחס השלמות, אז אפשר להוציא אותו החוצה)

$$= \langle\psi|A\mathbb{1}|\psi\rangle = \langle\psi|A|\psi\rangle$$

$$\Rightarrow \langle A\rangle_\psi = \langle\psi|A|\psi\rangle$$

לתוחלת הזאת נקרא ערך התצפית. מה שהשיווין אומר שערך התצפית עבור הגודל שמיוצג ע"י A למצב ψ הוא איבר המטריצה של A בין ψ ל-ψ.

כמו שציפינו, הגודל הזה אכן תלוי ב-A וב-ψ. הגודל הזה ממשי (אם נצמיד אותו נקבל אותו הדבר, כי כתוב אותו הדבר משני הצדדים של A ו-A הרמיטי), מה שבאמת היינו מצפים לקבל מממוצע של ערכים ממשיים (כאמור, הע"ע של אופרטור הרמיטי הם ממשיים). לרוב מסמנים את הערך הזה כך $\langle A\rangle$, אבל צריך לזכור שאין גודל תצפית בלי מצב מסוים.

7.2 סטיית תקן ועקרון אי־הוודאות (עקרון הייזנברג)

אנחנו ממשיכים לדון בתוצאות סטטיסטיות של המדידה. עד כה דיברנו על רק על הממוצע, ועכשיו נדבר על סטיית התקן.

נסתכל על שני אופרטורים ברי־תצפית שאינם מתחלפים $[A,B]\neq 0$. יחס חילוף היא הרי פעולה של סכום והפרש על אופרטורים, לכן הוא בעצמו אופרטור. הטענה היא שאם A,B הרמיטים אז האופרטור שניתן ע"י יחס החילוף שלהם הוא אנטי־הרמיטי. נסתכל עליו:

$$[A,B]^\dagger=(AB-BA)^\dagger=BA-AB=-[A,B]$$

כמו שלאופרטור הרמיטי הע"ע כולם ממשיים טהורים, לאופרטור אנטי־הרמיטי הע"ע כולם מדומים טהורים. למרות זאת, אנחנו עדיין יכולים להגדיר לאופרטורים כאלה ערך תצפית, שיוגדר באותה צורה (גם אם המשמעות שלו לא תהיה במקרה הזה תוצאה של מדידה). נסמן את ערך התצפית של האופרטור הזה ב-$\langle[A,B]\rangle=i\gamma$ (מדומה טהור גם הוא כממוצע של מדומים).

עבור המצב $|\psi\rangle$ נגדיר את הדברים הבאים:

- אופרטור הסטייה (אופרטור) –
$$\Delta A=A-\langle A\rangle$$
עבור מצב נתון הפחתנו מהאופרטור שלו את הגודל הממוצע. אלגברית, ניתן לראות שכל ערכי התצפית זזים, והזזנו את הממוצע של ערכי התצפית להיות אפס.
  - יחס החילוף של אופרטורי הסטייה שווה ליחס החילוף של האופרטורים:
$$[\Delta A,\Delta B]=[A,B]$$
- סטיית תקן (גודל) – נגדיר אותה בתור ערך התצפית של אופרטור הסטייה:
$$\sigma_A^2=\langle\Delta A\rangle$$

ההגדרות האלה די עקביות עם הסתברות קלאסית.

נגדיר עכשיו וקטור:

$$|\varphi\rangle=(\Delta A+i\alpha\Delta B)|\psi\rangle$$

בסוגריים יש אופרטור לינארי בצ"ל של אופרטורים לינאריים. אין כאן משמעות פיזיקלית מיוחדת (לתוצאה בן תהיה), מה שמעניין אותנו כאן זה שהתחלנו מווקטור ידוע וקיבלנו וקטור ידוע, ושלווקטור הזה יש גודל אי־שלילי ($\langle\varphi|\varphi\rangle$).

נרצה לראות מה הגודל:

$$\begin{aligned}\langle\varphi|\varphi\rangle=\langle\psi|(\Delta A-i\alpha\Delta B)(\Delta A+i\alpha\Delta B)|\psi\rangle&=\langle\psi|\Delta A^2|\psi\rangle+\langle\psi|i\alpha(\Delta A\Delta B-\Delta B\Delta A)|\psi\rangle+\langle\psi|\alpha^2\Delta B^2|\psi\rangle\\&=\langle\Delta A^2\rangle+i\alpha\langle[\Delta A,\Delta B]\rangle+\alpha^2\langle\Delta B^2\rangle\\&=\sigma_A^2-\alpha\gamma+\alpha^2\sigma_B^2\end{aligned}$$

זה גודל של וקטור במרחב הילברט, לכן:

$$\sigma_A^2-\alpha\gamma+\alpha^2\sigma_B^2\geq 0$$

יכולנו עקרונית לבנות את האופרטור שבנינו עם כל אופרטור ממשי, אבל מה שאנחנו רואים זה שקיבלנו כאן תנאי על α – לא כל α תיתן גודל של וקטור לא שלילי. יש כאן פרבולה ב-α ואנחנו רוצים שהפרבולה תהיה תמיד מעל הצירים (או תגע בהם לכל היותר). בשביל זה צריך שהדסקרימיננטה תהיה תמיד אי־חיובית (שיהיה לכל היותר שורש אחד):

$$\gamma^2-4\sigma_A^2\sigma_B^2\leq 0$$

אפשר להעביר אגף ולהוציא שורשים:

$$\boxed{\sigma_A\sigma_B \geq \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2}|\langle[A,B]\rangle|}$$

אם נתונים מסויימים במידה מפוזרים, הרוחב של הפיזור הוא בעצם סטיית התקן. לכן, אפשר לקרוא לסטיית התקן $\sigma_A\sigma_B$ אי־הוודאות במדידה. ככל שהערך של σ_A יותר גדול, הערכים יהיו מפוזרים על מרחב יותר גדול. או בבניסוח אחר, מראש – לפני שמדדנו – אי־הוודאות תהיה יותר גדולה. לדוגמא, אם במדידה מסויימת תמיד נקבל את אותו הע"ע, אי־הוודאות תהיה מאוד קטנה, אנחנו נדע מראש מה תוצאות המדידה. המקרה ההפוך הוא כשהמצב נפרש ע"י כמה שיותר מצבים עצמיים של הבעיה. במקרה כזה מראש אנחנו נדע מעט מאוד מה תהיה תוצאת המדידה ואז נקבל סטיית תקן גדולה.

עקרון אי־הוודאות אומרת שאם מעניינות אותנו שתי מדידות וסטיות התקן של שתי המדידות, המכפלה של שתי המדידות האלה חסומה מלמטה ע"י ערך שמוגדר ע"י ערך התצפית של יחס החילוף של האופרטורים. ז"א שאם יש שני גדלים לא מתחלפים ונרצה לצור מצב עם וודאות יותר ויותר טובה עבור הגודל A, ככל שאנחנו נצור וודאות יותר גדולה עבור A נקבל אי־וודאות יותר ויותר גדולה לגבי B (ולהפך).

נזכור את המקרה ההפוך, מה שאפשר אפילו לקרוא לו משפט הוודאות – אם שני אופרטורים מתחלפים, מדידה של אחד אומרת בוודאות מה התוצאה של השני. במקרה הזה החסם הוא אפס והם לא חסומים במובן הזה. אבל אם לא מתחלפים, וככל שיחס החילוף שלהם ייתן ערך יותר גדול, המשמעות היא שככל שננסה למדוד ערך אחד בדיוק יותר גדול נדע את הערך השני פחות. נראה לדוגמא שמקום ותנע מיוצגים ע"י שני אופרטורים שלא מתחלפים בצורה מקסימלית.

למעשה, אחרי מדידה מצב של מערכת הופך להיות המצב העצמי של האופרטור. מצב עצמי הוא מצב עם וודאות מקסימלית – אנחנו יודעים מה תהיה התוצאה של המדידה החוזרת, נקבל את אותו הגודל. כלומר, אחרי מדידה של A אנחנו נהיה במצב המקסימלי האפשרי של אי־וודאות עבור B, כי זה יהיה מצב עצמי של A, מצב עם וודאות מקסימלית של A. המצב העצמי של A יהיה מצב עם חפיפה מינימלית למצבים העצמים של B. מה זה מצב עם וודאות מינימלית – כלומר מצב שנפרש בצורה רחבה ע"י ו"ע של B.

7.3 אופרטורים מנוונים

אופרטורים לא מנוונים הם אופרטורים שכל הע"ע שלהם שונים אחד מהשני. אולם, הרבה פעמים כשכותבים את הפולינום האופייני מקבלים ניוון כלשהו. לחילופין, נחפש ווקטורים עצמיים ונמצא כמה ו"ע בלתי תלויים שנותנים את אותו הע"ע.

אם הע"ע λ_i מופיע g_i פעמים, נאמר שהאופרטור ש-λ_i הוא הערך העצמי שלו מנוון בדרגה מסדר g_i על הע"ע λ_i (כלומר יש g_i ו"ע ב"ת).

במקרה כזה:

$$A|\psi_i\rangle = A\sum_{k=1}^{g_i} c_k\left|\psi_i^k\right\rangle = \lambda_i \sum_{k=1}^{g_i} c_k\left|\psi_i^k\right\rangle$$

יש לנו g_i ווקטורים כשאנחנו סופרים לפי k שכולם ו"ע עם ע"ע λ_i, לכן כל סכום לינארי שלהם הוא גם ו"ע עם ע"ע λ_i. למעשה יש אינסוף בחירות של ו"ע בתוך תת־המרחב ששייך ל-λ_i, וה-ψ_i^k הם בחירה אחת. הניוון אומר שאפשר לבחור בתוך תת־המרחב ששייך לווקטור המנוון אינסוף בחירות של בסיס אורתונורמלי, והבסיס האורתונורמלי הזה – כל ווקטור שייפרס על ידיו עדיין יהיה ו"ע עם ע"ע λ_i.

בתוך תת־המרחב הזה יכולים להיות ווקטורים לא אורתונורמליים והם עדיין יהיו ו"ע. אולם, ניתן לבחור אותם אורתונורמליים. עבור שני ע"ע i, i' אפשר לכתוב:

$$\left\langle \psi_i^k \middle| \psi_{i'}^{k'} \right\rangle = \delta_{ii'}\delta_{kk'}$$

כלומר, כל בחירה של i או של k שונים ייתנו לנו ווקטורים ניצבים, אלא אם נבחור את אותו i ואת אותו ווקטור k בתוך הניוון, ויחס השלמות גם יתוקן עכשיו וייכתב:

$$\sum_{i,k} \left|\psi_i^k\right\rangle\left\langle\psi_i^k\right| = \mathbb{1}$$

פשוט צריכים לעבור על כל הווקטורים שפורשים, ואם הם בסיס אורתונורמלי שלם נקבל את יחס השלמות.

מה המשמעות של מדידה? אמרנו שבמדידה מתקבל ע"ע של האופרטור, ושהמשמעות היא שהמערכת הוטלה למצב העצמי המתאים. עכשיו נניח שהתקבל ע"ע מנוון. המשמעות תהיה שהמערכת מוטלת לתת־המרחב העצמי של הע"ע λ_i. כלומר, אם מדדנו ערך λ_i, המשמעות היא שכאילו הפעלנו את אופרטור ההטלה:

$$P_i = \sum_{k=1}^{g_i} \left|\psi_i^k\right\rangle\left\langle\psi_i^k\right|$$

כל אחד מהאופרטורים בסכום הוא אופרטור הטלה לווקטור אחד מתוך תת־המרחב המנוון. הסכום של כולם הוא גם אופרטור הטלה, אופרטור הטלה לתוך תת־מרחב שנפרש על ידם (שהוא זה שנפרש ע"י הע"ע λ_i).

זה אומר שכל מצב התחלתי שיש לנו, אם קיבלנו λ_i אנחנו יודעים לאיזה מצב המערכת תעבור – למצב המוטל על תת־המרחב (זה למעשה הכללה של המקרה שאין ניוון).

דיברנו על זה שהמשמעות של אופרטור הטלה היא שזה מה שקורה אחרי מדידה שנתנה את המצב $|\psi\rangle$. נשתמש עכשיו באותו הדבר ונשאל מה קורה אחרי מדידה. המצב שייתקבל:

$$P_i|\psi\rangle = \left(\sum_{k=1}^{g_i} \left|\psi_i^k\right\rangle\left\langle\psi_i^k\right|\right)|\psi\rangle \overset{*}{=} \sum_{k=1}^{g_i} \left|\psi_i^k\right\rangle\left\langle\psi_i^k\right| \sum_{j,\ell} c_j^\ell \left|\psi_j^\ell\right\rangle = \sum_{k=1}^{g_i}\sum_{j,\ell} c_j^\ell \left\langle\psi_i^k\middle|\psi_j^\ell\right\rangle\left|\psi_i^k\right\rangle \overset{**}{=} \sum_{k=1}^{g_i}\sum_{j,\ell} c_j^\ell \delta_{ij}\delta_{k\ell}\left|\psi_i^k\right\rangle$$
$$= \sum_{k=1}^{g_i} c_i^k \left|\psi_i^k\right\rangle$$

(*: כתיבה של $|\psi\rangle$ ע"י פריסה, **: הגדרת האורתונורמליות)

במילים אחרות, אם כתבנו את ψ בעזרת פריסה של מצבים עצמיים של האופרטור, אחרי ההטלה נקבל רק את האיברים ששייכים לע"ע i. זו המשמעות של הטלה – מחקנו את כל האיברים בפריסה שלא שייכים לתת־המרחב i. כמו שהיה לנו במקרה הלא־מנוון, אורך הווקטור לא היה 1, אלא האורך שלו היה c_i (ההסתברות להמצא במצב). אותו הדבר גם כאן – הווקטור $|\psi\rangle$ היה מנורמל, אבל בחרנו ממנו חלק מהערכים (רק את אלה ש-$j = i$), לכן האורך של הווקטור הזה הוא לא אחד.

האורך שלו הוא ההסתברות למדוד λ_i:

$$|P_i|\psi\rangle|^2 = \left\langle\psi\middle|P_i^\dagger P_i\middle|\psi\right\rangle \overset{*}{=} \left\langle\psi\middle|P_i^2\middle|\psi\right\rangle \overset{**}{=} \langle\psi|P_i|\psi\rangle = \langle P_i\rangle_\psi = \sum_{k=1}^{g_i}\left|c_i^k\right|^2$$

(* - אופרטור ההטלה הרמיטי, ** - ריבוע אופרטור ההטלה נותן שוב את האופרטור עצמו)

אנחנו רואים כאן קשר בין ערך התצפית של אופרטור הטלה להטלה שהוא מציין עבור איזשהו אופרטור. אם הוא מטיל על תת־מרחב ששייך לתוצאה אפשרית של מדידה, האורך של הווקטור אחרי ההטלה שווה לערך התצפית של אופרטור ההטלה שווה לסיכוי למדוד את הערך הרלוונטי. כל הגדלים האלה הם אותו הדבר (זה נכון גם כשאין ניוון).

7.4 סט שלם של אופרטורים מתחלפים ברי־תצפית

נחזור למשפט של אופרטורים ברי־תצפית מתחלפים. אמרנו שבמקרה כזה יש בסיס מסויים של ו"ע. אם שני אופרטורים הם מתחלפים, איך מצדיקים את זה שקיים בסיס משותף? אם יש ניוון באחד האופרטורים יש אינסוף בסיסים, איזה נבחר? איך מוצאים את הבסיס המשותף?

עבור ערכים שונים, קיבלנו $\langle\psi_i|B|\psi_j\rangle = \delta_{ij}\mu_j$. זה קרה רק כאשר $\lambda_i \neq \lambda_j$. עכשיו זה לאו דווקא נכון, אלא עכשיו: $\langle\psi_i^k|B|\psi_i^\ell\rangle$. שני ה-$\psi_i$ הם ו"ע עם אותו ע"ע, ולכן כבר מה שכפל בחוץ הוא אפס, לכן אנחנו לא יודעים אם הערכים האלה הם אפס. זה אומר שהמטריצה B היא כזו שעבור כל ע"ע מנוון נקבל בלוק (היא מטריצת בלוקים אלכסונית), והבלוקים הם בגודל של g_i.

איך נמצא את הסט המשותף – נזכור ש-ψ_i הם ו"ע של A. אם הם לא היו מנוונים עבור A הם היו מלכסנים גם את B. מאחר והם כן מנוונים ב-A, הלכסון של B לא יהיה מושלם, ויישארו תת־מטריצות במימד g_i. יש שני דברים שאפשר לעשות –

1. נניח שיש רק ע"ע מנוון. עבור כל שאר הע"ע אנחנו יודעים מה הו"ע, אבל עבור הערך הזה לא. אפשר את תת־המטריצה הקטנה. הע"ע שלה יהיו הע"ע של B, והו"ע שלהם יהיו גם ו"ע של A (אפשר להראות את זה).
2. כשמלכסנים את תת־המטריצה הקטנה, מטריצת המעבר (המטריצה המלכסנת) היא המטריצה שצריך להפעיל על ה-ψ_i כדי לקבל את הווקטורים המשותפים.

כשליכסנו את A קיבלנו λ_i שחלקם מנוונים וחלקם לא. עכשיו באנו ל-B (שמתחלפת איתה) ומצאנו μ_j. הבעיה היא שו"ע לא יוגדר טוב ע"י ה-λ_i אם הם מנוונים, לכן אם אנחנו רוצים לתאר ו"ע אנחנו צריכים לתאר אותם באמצעות שני מספרים – ע"ע של A ו-ע"ע של B. יש כמה מצבים:

- אם הע"ע של B מגדירים חח"ע ווקטורים כי ב-B אין ניוון, עכשיו הווקטורים מוגדרים לחלוטין ע"י ה-μים. אלה מספרים קוונטים טובים (*good quantum numbers*), ערכים שמתארים את מצב המערכת בשלמות.
- B היה מנוון על חלק מהווקטורים ש-A לא היה מנוון בהם. עכשיו הקבוצה המשותפת של λ_i ו-μ_j רק היא ביחד מגדירה בוודאות את הווקטור, כי כ"א מסיר את הניוון בתת־מרחב שהשני מנוון בו. אם זה המצב נאמר ש-A ו-B הם סט שלם של אופרטורים מתחלפים ברי־תצפית.
- נניח שעדיין ב-B נשאר ניוון. נקח אופרטור שלישי, C, שמתחלף עם A ו-B ונחפש סט אורתונורמלי שלם של שלושתם, בתקווה שהע"ע κ_ℓ יסירו את הניוון. כלומר, אנחנו שואפים באמצעות שלושת המספרים האלה להגדיר חח"ע. ברגע שנעשה את זה באמצעות הסט המינימלי של אופרטורים, הסט הזה ייקרא סט שלם של אופרטורים מתחלפים.

מה החשיבות של סט שלם – נקח מערכת ונשאל מה סט המדידות המינימלי שייספר את מצב המערכת בוודאות. התשובה היא סט שלם של אופרטורים מתחלפים ברי־תצפית.

8 שיעור 8 – 24.4.18

8.1 אופרטורם אוניטריים

כבר ראינו אופרטור אוניטרי פעם אחת כשדיברנו על מטריצות מעבר. היום נבין את זה יותר לעומק.

אופרטור אוניטרי – אופרטור שהצמוד ההרמיטי שלו שווה להופכי:

$$UU^\dagger = U^\dagger U = \mathbb{1}$$

8.1.1 שימור אורכים וזוויות

נבחן שני מצבים שונים שמפעילים עליהם את אותו אופרטור אוניטרי:

$$|\psi_1'\rangle = U|\psi_1\rangle$$
$$|\psi_2'\rangle = U|\psi_2\rangle$$

נקח את המכפלה הפנימית שלהם:

$$\langle\psi_1'|\psi_2{}'\rangle = \langle\psi_1|U^\dagger U|\psi_2\rangle = \langle\psi_1|\psi_2\rangle$$

כלומר, אופרטור אוניטרי משמר מכפלות פנימיות. אם אנחנו מתייחסים לאופרטור אוניטרי בתור העתקה של מרחב הילברט, ראינו שתוך כדי ההעתקה של וקטור במרחב לווקטור אחר במרחב הוא לא משנה מכפלות פנימיות.

בפרט, אם נקח $\psi_1 = \psi_2$ נקבל שהוא משמר את האורך, כלומר אופרטור אוניטרי משמר אורכים.

הערה: התכונה הזאת של שימור המכפלה הפנימית מספיק בשביל להגדיר אופרטור אוניטרי אם אנחנו במימד סופי.

עכשיו אפשר להבין את העניין של מטריצות המעבר. אם הוא משמר מכפלות פנימיות, בפרט הוא משמר ניצבות. ז"א שאם נקח בסיס אורתונורמלי שלם ונפעיל על כל איבריו אופרטור אוניטרי נקבל בסיס אורתונורמלי שלם חדש, וזה בדיוק מה שעשתה מטריצת המעבר. כלומר, אם נתחיל מבסיס אורתונורמלי שלם $\{|v_i\rangle\}$, גם $\{U|v_i\rangle\}$ בסיס אורתונורמלי שלם.

8.1.2 מכפלה של אונטריים

כזכור, מכפלה של אופרטורים הרמיטיים היא לא בהכרח הרמיטית:

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger = BA$$

וזה לא בהכרח שווה ל-AB (זה כן רק אם הם חילופיים).

נסתכל מה קורה בתכונת האוניטריות:

$$(UV)^\dagger(UV) = V^\dagger U^\dagger UV = V^\dagger V = \mathbb{1}$$

כלומר, מכפלה של אופרטורים אוניטרים היא אוניטרית. במימד סופי זה לא מפתיע, כי אם אופרטור משמר זוויות, להפעיל ברצף שני אופרטורים שמשמרים זוויות משמר את הזווית, ואז במימד סופי הוא גם אוניטרי.

8.1.3 איברי ההצגות של אופרטורים אוניטריים

נרצה עכשיו לדבר על איברים של האופרטור הזה בהצגה מסויימת. נבחר הצגה כלשהי $\{|v_i\rangle\}$. נסתכל על מכפלה פנימית ונכניס בפנים אופרטור יחידה, שאותו נביע בתור אופרטור אוניטרי בתור הצמוד ההרמיטי שלו, ואז נכניס עוד אופרטור יחידה שאותו נכתוב בתור יחס השלמות:

$$\delta_{ij} = \langle v_i|v_j\rangle = \langle v_i|U^\dagger U|v_j\rangle = \sum_k \langle v_i|U^\dagger|v_k\rangle\langle v_k|U|v_j\rangle = \sum_k \langle v_k|U|v_i\rangle^* \langle v_k|U|v_j\rangle = \sum_k u_{ki}^* u_{kj}$$

$$\delta_{ij} = \langle v_i|v_j\rangle = \langle v_i|UU^\dagger|v_j\rangle = \sum_k \langle v_i|U|v_k\rangle\langle v_k|U^\dagger|v_j\rangle = \sum_k \langle v_k|U|v_i\rangle^* \langle v_k|U|v_j\rangle = \sum_k u_{ik} u_{jk}^*$$

ננסה להבין מה קיבלנו – בשוויון הראשון k זה מספר השורה, וקיבלנו מכפלה פנימית של העמודה ה-i והעמודה ה-j של האופרטור U בהצגה הנ"ל. בשוויון השני זה אותו הדבר רק עם שורה.

קיבלנו גם ששני השיוויונות שווים ל-δ_{ij}, כלומר לאופרטור אוניטרי כל השורות ובנפרד כל הטורים מהווים סט אורתונורמלי שלם, כי כולם ניצבים והם מהממד של המרחב.

8.1.4 הו"ע והע"ע של אופרטורים אוניטריים

נסמן את הו"ע של U ב-$|\psi_i\rangle$ ואת הע"ע ב-λ_i. הגודל של ו"ע:

$$\langle\psi_i|\psi_i\rangle = \langle\psi_i|U^\dagger U|\psi_i\rangle =$$

נפעיל את U ימינה ואת $U^\dagger$ שמאלה:

$$= \langle\psi_i|\lambda_i^*\lambda_i|\psi_i\rangle = |\lambda_i|^2\langle\psi_i|\psi_i\rangle$$
$$\Rightarrow \langle\psi_i|\psi_i\rangle = |\lambda_i|^2\langle\psi_i|\psi_i\rangle$$

זה אומר שבהכרח $|\lambda_i|^2 = 1$. כלומר, כל הע"ע של אופרטורים אוניטריים ניתנים לכתיבה בתור $\lambda_i = e_i^{i\theta_i}$, כולם ערכים מדומים עם גודל 1. זה אומר גם שאפשר לתאר אותם בעזרת זווית בלבד.

נכפיל שני ו"ע שונים:

$$\langle\psi_i|\psi_j\rangle = \langle\psi_i|U^\dagger U|\psi_j\rangle = \langle\psi_i|\lambda_i^*\lambda_j|\psi_j\rangle = \lambda_i^*\lambda_j\langle\psi_i|\psi_j\rangle = e^{i(\theta_i-\theta_j)}\langle\psi_i|\psi_j\rangle$$

אם הו"ע הם בעלי ע"ע שונים, האקספוננט הוא לא 1. לכן, בשביל שיהיה שיווין המכפלה הפנימיתצריכה להיות אפס במקרה הזה: $\theta_i \neq \theta_j \rightarrow \langle\psi_i|\psi_j\rangle = 0$. אם האופרטור לא מנוון, זה אומר שהסט של הו"ע שלו הוא סט אורתונורמלי שלם (אם הוא מנוון יכולים להיות לנו שני ו"ע שונים עם ע"ע שווים ולא נוכל להסיק את המסקנה הזאת שהם ניצבים).

8.1.5 סיבוב והצגה של אופרטור

סיבוב זו טרנספורמציה ששומרת על זוויות ואורכים, לכן אפשר לכתוב על אופרטור אוניטרי כעל אופרטור סיבוב (ויכול גם לשקף).

נבחר אופרטור אוניטרי שנסמן ב-T (כמו שסימנו את מטריצת המעבר), שמעביר מהבסיס $\{|v_i\rangle\} \rightarrow \{|v_i'\rangle\}$. אם נתון אופרטור A שיש לו הצגה בבסיס v, נגדיר שאופרטור A' מוצג בבסיס v' אם מתקיים:

$$\langle v_i'|A'|v_j'\rangle = \langle v_i|A|v_j\rangle$$

במקרה כזה נקרא לאופרטור A' האופרטור A בבסיס v'.

נכתוב את צד ימין ונכניס משמאל ומימין ל-A את אופרטור היחידה בצורה של מכפלה של אוניטריות:

$$\langle v_i|A|v_j\rangle = \langle v_i|T^\dagger TAT^\dagger T|v_j\rangle$$

נפעיל את $T^\dagger$ שמאלה ואת T ימינה:

$$\langle v_i|A|v_j\rangle = \langle v_i|T^\dagger TAT^\dagger T|v_j\rangle = \langle v_i'|TAT^\dagger|v_j'\rangle$$

מהדרישה שזה יהיה שווה לאגף שמאל של השיוויון הראשון שלנו נקבל:

$$A' = TAT^\dagger$$

ואם נכפיל מימין ב-$T^\dagger$ ומשמאל ב-T נקבל :

$$A = T^\dagger A'T$$

קיבלנו דרך לעבור בין ההצגות של האופרטור באמצעות אופרטור המעבר T.

נרצה לראות עכשיו מה ייקרה לו"ע ולע"ע של האופרטור המסובב. הו"ע של A' הוא $|\psi'\rangle$, שאותו אנחנו לא יודעים. כדי לגלות אותו נכתוב:

$$A'|\psi'\rangle = TAT^\dagger T|\psi_i\rangle = TA|\psi_i\rangle = \lambda_i T|\psi_i\rangle = \lambda_i|\psi_i'\rangle$$

(מעבר ראשון – שימוש בטרנספורמציה שראינו קודם, שני – ψ_i ו"ע של A, שלישי – $T|\psi_i\rangle = |\psi_i'\rangle$)

קיבלנו שהע"ע של האורטור המסובב הם אותם ערכים כמו לפני הסיבוב. זה אומר שגם ע"ע לא משתנים תחת טרנספורמציות אוניטריות, והו"ע החדשים הם אותם ו"ע מסובבים תחת הטרנספורמציה.

8.1.6 משפט שימושי על אופרטורים אוניטריים

נקח אופרטור לינארי כלשהו A, שנתון לנו שהוא משמר אורכים. נבחר ווקטור שרירותי שהוא סכום של ווקטורים אחרים ונפעיל עליו את A:

$$A(\alpha|u\rangle + \beta|v\rangle)$$

האורך של הווקטור הזה:

$$(\alpha^*|u\rangle + \beta^*|v\rangle)A^\dagger A(\alpha|u\rangle + \beta|v\rangle)$$

משימור אורכים זה שווה לאורך לפני ההפעלה של A:

$$(\alpha^*|u\rangle + \beta^*|v\rangle)A^\dagger A(\alpha|u\rangle + \beta|v\rangle) = (\alpha^*|u\rangle + \beta^*|v\rangle)(\alpha|u\rangle + \beta|v\rangle)$$

$$\alpha^*\alpha\langle u|A^\dagger A|u\rangle + \beta\beta^*\langle v|A^\dagger A|v\rangle + \alpha^*\beta\langle u|A^\dagger A|v\rangle + \beta^*\alpha\langle v|A^\dagger A|u\rangle$$
$$= \alpha^*\alpha\langle u|u\rangle + \beta\beta^*\langle v|v\rangle + \alpha^*\beta\langle u|v\rangle + \beta^*\alpha\langle v|u\rangle$$

משימור אורכים, $\alpha^*\alpha\langle u|A^\dagger A|u\rangle = \alpha^*\alpha\langle u|u\rangle$ ו-$\beta\beta^*\langle v|A^\dagger A|v\rangle = \beta\beta^*\langle v|v\rangle$. נותרנו עם:

$$\alpha^*\beta\langle u|A^\dagger A|v\rangle + \beta^*\alpha\langle v|A^\dagger A|u\rangle = \alpha^*\beta\langle u|v\rangle + \beta^*\alpha\langle v|u\rangle$$

α ו-β הם סתם מספרים כלליים. נבחר עכשיו מספרים ספציפיים:

$$\alpha = 1, \beta = 1$$
$$\langle u|A^\dagger A|v\rangle + \langle v|A^\dagger A|u\rangle = \langle u|v\rangle + \langle v|u\rangle$$

$$\alpha = 1, \beta = i$$
$$i\langle u|A^\dagger A|v\rangle - i\langle v|A^\dagger A|u\rangle = -\langle u|v\rangle + i\langle v|u\rangle$$

נקח את המשוואה השנייה, נחלק אותה ב-i ונוסיף אותה למשוואה הראשונה:

$$\langle u|A^\dagger A|v\rangle = \langle u|v\rangle$$

קיבלנו ש-A משמר זוויות, כלומר מי שמשמר אורכים משמר זוויות.

מסקנה מזה היא שבמרחבים סופיים אם העתקה משמרת אורכים ⇐ משמרת זוויות ⇐ אוניטרית.

8.2 פעולות על אופרטורים

8.2.1 פונקציות של אופרטורים

פונקציות של אופרטורים לא זרות לנו, למשל האופרטור ההופכי של אופרטור כלשהו A^{-1}, או A^n שהוא הפעלה סדרתית של האופרטור n פעמים (ראינו לדוגמא בהקשר של אופרטור ההטלה בריבוע).

נרצה להגדיר באופן כללי משמעות של $f(A)$. נניח בתור התחלה ש-f גזירה בכל נקודה שמעניינת אותנו, ולכן ניתן לפתח אותה לטור טיילור באיזושהי סביבה:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$$

נגדיר את פעולת הפונקציה על האופרטור בתור:

$$f(A)=\sum_{n=0}^{\infty}f_nA^n$$

נשאל מהם הו"ע והע"ע של האופרטור החדש $f(A)$. בשביל לבחון את זה, נפעיל אותו על הו"ע של A:

$$f(A)|\psi_i\rangle=\sum_{n=0}^{\infty}f_nA^n|\psi_i\rangle=\sum_{n=0}^{\infty}f_n\lambda_i^n|\psi_i\rangle=\left(\sum_{n=0}^{\infty}f_n\lambda_i^n\right)|\psi_i\rangle=f(\lambda_i)|\psi_i\rangle$$

קיבלנו משוואת ע"ע עבור האופרטור $f(A)$, שאומרת ש-$|\psi_i\rangle$ הם גם ו"ע של $f(A)$, והע"ע הם אותם ע"ע רק שהופעלה עליהם הפונקציה.

מה קורה אם f לא מוגדרת יפה? אפשר לעקוף את העניין הזה ע"י הגדרה אחרת של פונקציה של אופרטור, שמתחברת עם ההגדרה הזאת במקומות שבהם f כן מוגדרת כמו שצריך. עד כאן לא השתמשנו בהצגה, אז כדי לסדר את העניין נבחר הצגה שבה A מלוכסן (איברי האלכסון יהיו איברי הע"ע של A). בהצגה הזאת האופרטור יהיה מיוצג ע"י אופרטור אלכסוני, שעל ערכי האלכסון שלו הפעלנו את A:

$$A=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0&0\\0&\lambda_2&0&0\\0&0&\dots&0\\0&0&0&\lambda_n\end{pmatrix}\xrightarrow{f}f(A)\equiv\begin{pmatrix}f(\lambda_1)&0&0&0\\0&f(\lambda_2)&0&0\\0&0&\dots&0\\0&0&0&f(\lambda_n)\end{pmatrix}$$

מאחר ו-$(A^n)^\dagger=\left(A^\dagger\right)^n$ (אפשר להרואת את זה בעזרת רקורסיה) אז אם f ממשית:

$$f(A)^\dagger=f\left(A^\dagger\right)$$

כלומר, אם A אופרטור הרמיטי + f ממשית $\Leftarrow$ $f(A)$ הרמיטי.

נסתכל על אופרטור מסויים:

$$e^{iA}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iA)^n}{n!}=\mathbb{1}+iA-\frac{1}{2}A^2-\frac{i}{6}A^4+\cdots$$

נבדוק מה קורה אם A הרמיטית:

$$\left(e^{iA}\right)^\dagger=e^{-iA^\dagger}=e^{-iA}=\left(e^{iA}\right)^{-1}$$

כלומר, האופרטור הזה כשהוא צמוד הרמיטית שווה להופכי של עצמו $\Leftarrow$ e^{iA} הוא אוניטרי עם ע"ע $e^{i\lambda_i}$. זה מסתדר עם מה שאמרנו קודם עם ע"ע של אופרטור אוניטרי.

מסתבר שכל אופרטור אוניטרי ניתן לכתיבה בצורה של e^{iA} (לא נוכיח).

עוד תכונה שימושית –

$$[A,f(A)]=0$$

למה זה אפס: אפשר לראות את זה אם מסתעלים על זה כטור של אופרטורים שנכתבים באמצעות A.

8.2.2 נגזרות של אופרטורים

נניח שאופרטור מסויים משתנה בזמן, לדוגמא אופרטור שמתאר מערכת ניסוי שמשתנה בזמן. נגדיר את הנגזרת שלה בזמן כמו שאנחנו מגדירים נגזרות של פונקציות:

$$\frac{dA(t)}{dt} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{A(t+\Delta t) - A(t)}{\Delta t}$$

בלי הצגה ספציפית, הנגזרת של אופרטור היא בעצמה אופרטור.

באופן ספציפי, אם נסתכל על הצגה מסויימת התלות תהיה יותר פשוטה – נקבל שאנחנו צריכים לגזור את ההצגה של כל איבר בזמן:

$$a_{ij} \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \frac{da_{ij}}{dt}$$

מתי אופרטור ייתחלף עם אופרטור הנגזרת שלו – בשביל שזה ייקרה צריך שבין כל שני זמנים שהאופרטור ייתחלף (לא נוכיח): $[A(t_1), A(t_2)] = 0 \Leftarrow \left[A(t), \frac{dA}{dt}\right] = 0$.

8.3 התפתחות מערכת בזמן

קיבלנו תיאור למערכות בזמן מסויים, אבל מה שחסר לנו זה דינמיקה. כשהשוונו למשוואות המילטון-יעקבי אמרנו ש-p, q מתארות את המערכת בכל רגע נתון, ומשוואות המילטון-יעקבי מתארות את הדינמיקה – בהנתן p, q ברגע מסויים אפשר לקדם את המשוואות בזמן.

מה שחסר לנו כאן זה אותו אלמנט – נתונה מערכת שמתאורת ע"י מרחב הילברט ברגע מסויים, ונרצה לתת תיאור של איך היא מתפתחת בזמן. כדי להיות יותר ספציפיים צריך לדבר על מערכת סגורה, כלומר המערכת שאנחנו דנים בה היא סך כל המערכות שיש להם השפעה על המערכת (אין עוד השפעות חיצוניות).

תהיה לנו דרישה בסיסית – הזמן לוקח מצבים במרחב הילברט ומעביר אותם למצבים אחרים במצב הילברט. אם כך, לקדם בזמן מערכת משמעותו להפעיל עליה אופרטור כך שאם הווקטור ההתחלתי יהיה מערכת פיזיקלית גם הווקטור הסופי ייתאר מערכת פיזיקלית. אחת הדרישות הבסיסיות זה שהווקטור ייתאר הסתברויות, וכדי שזה ייקרה צריך שיהיה משמעות להסתברויות, ולכן דרשנו שהאורך שלו יהיה יחידה (ואז למקדמים יהיה משמעות של הסתברות). כלומר, אנחנו כבר יכולים להבין שאופרטור שיקדם מערכות בזמן יהיה אופרטור משמר אורכים, כלומר אוניטרי.

<u>הנחה 5</u>: ההתפתחות בזמן של מערכת קוונטית סגורה נתונה ע"י אופרטור אוניטרי שמלוכסן בהצגת האנרגיה.

בשיעור הבא נדבר על מצבים שמתקבלים אחרי מדידת אנרגיה. הם יתוארו ע"י אופרטור שייצג את המדידה של האנרגיה, לו נקרא ההמילטוניאן הקוונטי. אותו אופרטור שיקדם בזמן צריך להיות אופרטור שייתחלף עם האופרטור שהמצבים שלו הם מצבי האנרגיה, כלומר שמייצג את מדידת האנרגיה. לכן, בשביל שייתחלף איתו, גם הוא יהיה מלוכסן בהצגת האנרגיה. נראה גם שהוא ייתחלף איתו כי הוא יהיה פונקציה שלו.

9 שיעור 9 – 29.4.18

9.1 התפתחות מערכת בזמן

נזכר בהנחה האחרונה שהייתה לנו –

הנחה 5: ההתפתחות בזמן של מערכת קוונטית סגורה נתונה ע"י אופרטור אוניטרי שמלוכסן בהצגת האנרגיה.

מהי מערכת קוונטית סגורה: כללנו בשיקולים שלנו את כל הגורמים שמשפיעים על המערכת, אין עוד משהו חיצוני שיכול לעשות שינויים. ההתפתחות בזמן נתונה ע"י אופרטור אוניטרי: ראינו שהדרך היחידה במרחבים סופיים לשמר אורך של וקטור היא אם האופרטור הוא אוניטרי. לכן, נצפה שמה שייקדם מערכת בזמן יהיה אופרטור אוניטרי.

עכשיו נתחיל לדבר על הצגת האנרגיה. אנחנו רוצים לדבר על אופרטור שמייצג מדידה של אנרגיה כוללת של מערכת. האנרגיהי היא ערך פיזיקלי ממשי ומדיד, אז אין סיבה שלא נצליח לנסח אופרטור. את האופרטור של האנרגיה נסמן ב-H, ונקרא לו ההמילטוניאן הקוונטי. יהיו לו הרבה קשרים להמליטוניאן הקלאסי, אבל נשים לב שהוא אופרטור, לעומת האופרטור הקלאסי שהוא פונקציה.

כמו כל אופרטור בר מדידה, יהיה לו סט של מצבים עצמיים, והם יוגדרו ע"י משוואת ע"ע, שיסומנו כך:

$$\boxed{H|E_i\rangle = E_i|E_i\rangle}$$

משוואת הע"ע הזאת נכונה בכל רגע נתון. אם ההמילטוניאן יהיה תלוי בזמן נקבל שגם הע"ע וגם המ"ע יהיו תלויים בזמן, אבל היא נכונה גם אם הוא לא משתנה בזמן. למשוואת הערכים הזאת נקרא **משוואת שרדינגר הבלתי תלוייה בזמן**.

אם ההמילטואניאן לא תלוי בזמן, נאמר שהמערכת משמרת. נצטרך להרחיב את המובן של שימור אנרגיה למערכות קוונטיות בשביל להבין את זה.

נזכר בשני דברים שלמדנו מהשיעורים הראשונים של הקורס: החלטנו שתורת הקוונטים תייצג את הדואליות של גל-חלקיק – מערכות שמוצגות כחלקיקים גם צריכות להתנהג כגלים. באופן הכי כללי, תלות כל גל בזמן היא $e^{-i\omega t}$. הדבר השני שלמדנו מהנסיונות שהובילו לתורת הקוונטים זה התלות של התדר באנרגיה של המערכת $\omega = \frac{E}{\hbar}$. זו הייתה תלות של מערכות מסויימות שראינו, ואנחנו מנסים עכשיו לנסח תורה כללית. בשביל זה ננסה לעמוד בשני הדברים האלה – בתורה שלנו מערכות חלקיקיות יתנהגו כמו גל בזמן (ייצברו פאזה כתלות בזמן) ושיהיה קשר בין קצב צבירת הפאזה (התדר) לבין האנרגיה.

נסתכל על אופרטור $T(\Delta t)$ שייקדם מערכת בזמן ($\Delta t = t - t_0$). האופרטור הזה ייקח מצב במרחב הילברט וייקדם אותם בזמן, לכן הוא יהיה אופרטור אוניטרי. אם למצב ידוע אנרגיה אז ידוע לו גם התדר, ואז נעשה שהמצב ייתקדם בצורה $e^{-i\omega t}$. כלומר:

$$T(\Delta t)|E_i\rangle = e^{-i\frac{E_i}{\hbar}\Delta t}|E_i\rangle$$

אפשר לראות שמצבי האנרגיה בצורת הכתיבה הזאת הם מצבים עצמיים של האופרטור הקידום בזמן עם ע"ע $e^{-i\frac{E}{\hbar}\Delta t}$.

אנחנו מכירים כבר אופרטור שאלה הע"ע שלו:

$$T(\Delta t) = e^{-\frac{i}{\hbar}H\Delta t}$$

כלומר זו פונקציה של אופרטור ההמילטוניאן שהמצבים העצמיים שלה הם מצבי האנרגיה, והע"ע שלה הם פונקציה של הע"ע של ההמילטוניאן (ראינו בשיעור שעבר).

נקח מצב התחלתי של E_i ונכתוב מה התלות שלו בזמן:

$$|\psi(t)\rangle = T(\Delta t)|E_i\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}|E_i\rangle = e^{-i\frac{E_i}{\hbar}(t-t_0)}|E_i\rangle$$

עכשיו אנחנו מבינים מה זה אומר מלוכסן בהצגת האנרגיה – זה אומר מתחלף עם ההמילטוניאן. כמו שהראנו בשיעור שעבר, אם אופרטורים מתחלפים אז גם הפונקציות שלהן מתחלפות, ולכן ברור שמה שרשום כאן מתחלף עם ההמילטוניאן.

מה ההתפתחות של מצב כללי בזמן? נכתוב את המצב הזה באמצעות סופרפוזיציה של מצבים של אנרגיה:

$$|\psi(t)\rangle = T|\psi(t_0)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}\sum_i c_i(t_0)\,|E_i\rangle = \sum_i c_i(t_0)\,e^{-\frac{i}{\hbar}E_i(t-t_0)}|E_i\rangle$$

ההמילטוניאן עבד על כל אחד ממצבי האנרגיה, והוציא ממנו פאזה שתלוייה באותו המצב. אם מקדמי הפריסה היו $c_i(t_0)$, המקדמים מתקדמים בזמן ע"י הכפלה בפאזה. הגודל של הפריסה לא משתנה:

$$c_i(t) = c_i(t_0)e^{-\frac{i}{\hbar}E_i(t-t_0)}$$

אבל המצב עצמו משתנה (כל איבר צובר פאזה אחרת). כיוון שהגודל של האיברים לא משתנה, ההסתברות של אופרטור להמצא במצב מסויים:

$$\Pr(e_i) = |c_i(t)|^2 = |c_i(t_0)|^2$$

זה אומר שההסתברות להמצא בכל מצב אנרגיה לא משתנה עם הזמן, מה שאומר שערך התצפית לא משתנה.

עכשיו אנחנו מבינים מה נשמר כאן – ערך התצפית, הממוצע על האנרגיה, לא משתנה.

מאחר ו-T אוניטרי הוא הפיך. מה זה אומר – במערכות קוונטיות, כל התפתחות בזמן היא הפיכה. אם ניתן מערכת בזמן t_0 ונשאל מה היא הייתה ב-t_1 נדע את זה עם האופרטור הרגיל, ובנוסף אם אנחנו יודעים ישר מה היה ב-t_1 אפשר להגיד מה קרה ב-t_0. נרשום את האופרטור ההופכי:

$$T^{-1}(t_0,t) = e^{\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)} = e^{-\frac{i}{\hbar}H(t_0-t)} = T(t,t_0)$$

במערכות קוונטיות אפשר "להפוך את הגלגל" ולצור המילטוניאן שייקדם מערכת אחורה בזמן. נשים לב שהדבר הזה איננו נכון לגבי מדידות – מדידה לא מתוארת ע"י אופרטור אוניטרי, לכן היא לא הפיכה בזמן, והיא מאבדת את המידע של מה שקרה קודם. כאן אנחנו מדברים רק על התפתחות של מערכות בלי שמודדים אותן.

נקח את משוואת ההתפתחות של פתרון כללי, ונגזור אותה בזמן כדי לקבל את קצב השינוי של וקטור במרחב הילברט שמתקדם בהתאם לאיך שכתבנו:

$$\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = \frac{d}{dt}\left[e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}|\psi(t_0)\rangle\right] = -\frac{i}{\hbar}H\,\underbrace{e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}|\psi(t_0)\rangle}_{|\psi(t)\rangle} = -\frac{i}{\hbar}H|\psi(t)\rangle$$

$$\Rightarrow \boxed{i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = H|\psi(t)\rangle}$$

קיבלנו מד"ר מסדר ראשון בזמן למצב $\psi(t)$, אם נדע לפתור אותה נקבל אותו בכל זמן. זוהי **משוואת שרדינגר התלויה בזמן**. היא אומרת לנו שקצב השינוי של $\psi(t)$ פורפורציונלי להפעלה של ההמילטוניאן על $\psi(t)$. נעיר שאנחנו מקבלים כאן משמעות למה אומרת הפעלה של אופרטור: להפעיל את אופרטור ההמילטוניאן על מצב זה כמו לגזור אותו בזמן, עד כדי קבוע.

אנחנו יודעים שעבור מד"ר אם ידוע המצב ההתחלתי אפשר לפתור את המשוואה הזאת בכל זמן. מאחר והמשוואה מדברת על זמנים מאוד קצרים (הנגזרת מדברת על השינוי בפרק זמן אינפיטיסימלי), אז היא תהיה נכונה גם עבור $H = H(t)$.

אנחנו מנסחים עכשיו תורה שבכיבול היא דטרמיניסטית, והאקראיות נכנסת רק בנקודה אחת – המדידה. אם ניתן למערכת סגורה להתקדם אין בה אקראיות, רק כשמודדים.

מאחר וההמילטוניאן הוא אופרטור בר תצפית שמייצג מדידה של גודל פיזיקלי אמיתי, האנרגיה, זה אומר שסט המצבים העצמיים שלו הוא סט אורתונורמלי שלם. זה אומר שכל מצב התחלתי שהוא ניתן לכתיבה בתור פריסה של מצבים עצמיים של ההמילטוניאן (כמו שעשינו קודם). אם כך, זה אומר שהפתרון:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_i c_i(t_0)\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_i(t-t_0)}|E_i\rangle$$

הוא פתרון כללי של משוואת שרדינגר התלוייה בזמן.

אמרנו שהמשוואה התלויה בזמן נתונה גם כשההמילטוניאן משתנה בזמן. כשמדובר על שינוי קטן בזמן, אפשר לעשות קירוב לסדר ראשון:

$$\Delta t \to 0: \;\; T(t, t+\Delta t) = \mathbb{1} - \frac{i}{\hbar}H(t)\Delta t$$

9.2 שימור גלובלי של הסתברות

נסתכל על הגודל של וקטור שמציין את המערכת, ונשאל מה קצב השינוי שלו בזמן:

$$\frac{d}{dt}\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle = \left(\frac{d}{dt}\langle\psi(t)|\right)|\psi(t)\rangle + \langle\psi(t)|\left(\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle\right) =$$

נציב את משוואת שרדינגר התלוייה בזמן (נשים לב שבשביל האיבר הראשון אנחנו צריכים להצמיד את משוואת שרדינגר):

$$= \frac{i}{\hbar}\left(\langle\psi(t)|H^\dagger|\psi(t)\rangle\right) - \langle\psi(t)|\left(\frac{i}{\hbar}H|\psi(t)\rangle\right)$$

זה אופרטור הרמיטי (הוא בר תצפית), לכן $H = H^\dagger$:

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle = 0$$

אנחנו נקרא להתהנהגות הזאת **שימור גלובלי של הסתברות**, כי הוא משמר את ההסתברות בכל מקום.

9.3 דינמיקה של ערכי תצפית

נקח אופרטור שמייצג גודל פיזיקלי שאינו האנרגיה ונקרא לו A. נשאל קודם כל מה ערך התצפית שלו:

$$\langle A\rangle = \langle\psi(t)|A(t)|\psi(t)\rangle$$

אנחנו רואים שגם ערך התצפית תלוי בזמן, וכדי לגלות את הדינמיקה שלו בזמן נגזור אותו:

$$\frac{d\langle A\rangle}{dt} = \left(\frac{d}{dt}\langle\psi(t)|\right)A(t)|\psi(t)\rangle + \langle\psi(t)|A(t)\frac{d}{dt}\left(|\psi(t)\rangle\right) + \langle\psi(t)|\frac{dA}{dt}|\psi(t)\rangle =$$

נציב את משוואת שרדינגר, פעם הרגילה ופעם הצמודה:

$$= \frac{1}{i\hbar}\langle\psi(t)|[AH - HA]|\psi(t)\rangle + \langle\psi(t)|\frac{dA}{dt}|\psi(t)\rangle$$

$$\Rightarrow \frac{d\langle A\rangle}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\langle[A,H]\rangle + \langle\frac{dA}{dt}\rangle$$

קיבלנו משוואה דיפרנציאלית על ערך התצפית של A, ואם נפתור אותה נקבל את הדינמיקה של ערך התצפית הזה. נשים לב שגם כאן המשוואה נכונה גם כש-H תלוי בזמן.

מתי זה ייתאפס, כלומר מתי ערך התצפית לא יהיה תלוי בזמן? קודם כל, נשים לב שהאופרטור צריך להיות לא תלוי בזמן. זה לא מספיק, והדרישה היותר מעניינת היא שהוא יתחלף עם H. במקרה כזה, יש ל-A, H בסיס משותף של מצבים עצמיים. כלומר, מצבים שמגדירים את האנרגיה יהיו גם מצבים עצמיים שמגדירים את A. זה אומר שערך התצפית של A נכתב ע"י סכום של ע"ע של ההמילטוניאן, ואז כמו שערך התצפית של ההמילטוניאן נשמר (הוא קבוע של התנועה) נקרא גם ל-A קבוע של התנועה.

אם מדדנו את A וקיבלנו איזושהי תוצאה, בלי למדוד את האנרגיה של המערכת אנחנו יודעים שהיא נמצאת במצב עמיד. במקרה כזה אנחנו קוראים לע"ע של A מספרים קוונטים טובים.

9.4 אי־וודאות זמן-אנרגיה לפי מאלברשטם-תם

נניח מערכת משמרת, כלומר כזו שההמילטוניאן שלה לא תלוי בזמן, ונבדוק את ערך התצפית על אופרטור A שמסמן גודל מדיד. בשביל זה נשתמש באי־הוודאות של הייזנברג $\sigma_A\sigma_H \geq \frac{1}{2}\langle[A,H]\rangle$. נסמן $\sigma_H = \Delta E$. נגדיר גם גודל חדש Δt:

$$\Delta t = \frac{\sigma_A}{\left|\frac{d\langle A\rangle}{dt}\right|}$$

הזמן הזה הוא הזמן שלוקח לערך התצפית להשתנות בסטיית תקן אחת. אם נשתמש בביטוי לנגזרת שראינו קודם ובעקרון אי־הוודאות נקבל:

$$\Delta E\Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

אי משוואת כמו נראית הזאת המשוואה־הוודאות של הייזנברג. לא כתבנו את זה עם σות כי עבור E זו באמת סטיית תקן, אבל עבור הזמן המצב קצת שונה. הזמן בתורת הקוונטים הוא לא גודל מדיד. יש לו משמעות אחרת – הוא המשתנה הדינמי שמתאר את ההתפתחות שכל המשתנים האחרים תלויים בו (למעשה גם קלאסית זה נכון). אין משמעות לשאלה מה הזמן של מערכת או למדידה של זמן של מערכת.

מערכת שיש בה דינמיקה בזמן אפשר לשאול כמה פאזה צברנו, ומזה אפשר לתרגם ולדעת כמה זמן עבר. מה שאנחנו שואלים זה מה הערך של גודל מדיד בזמן מסויים. זמן זה רק פרמטר, לכן הוא לא מיוצג ע"י אופרטור הרמיטי, ולכן גם אי אפשר לדבר על אי־וודאות בין זמן לבין משהו אחר. אולם, יש כמה דרכים להראות שיש קשר בין חוסר ידיעה של גדלים שקשורים בזמן לבין אנרגיה, וזה אחד מהם.

אם נסתכל על מערכת שיש לה אי־וודאות באנרגיה (שזה ממש סטיית התקן), ערכי התצפית של כל הגדלים המדידים אחרים במערכת חוץ מהאנרגיה יישתנו יותר מהר מ-$\frac{\hbar}{2}$ חלקי אי־הוודאות באנרגיה. ככל שאי־הוודאות באנרגיה תהיה יותר קטנה, ערכי התצפית יישתנו יותר לאט. בגבול שאי־הוודאות באנרגיה הולכת לאפס, ערך התצפית לא משתנה בכלל. זה קורה כשהוא מתחלף עם ההמילטוניאן.

אפשר לתת לזה עוד משמעות – ככל שאנחנו רוצים לדעת ערך של אנרגיה בצורה יותר מדוייקת, צריך למדוד את המערכת יותר זמן. זו פרשנות אחרת לאי־הוודאות זמן-אנרגיה.

10 שיעור 10 – 1.5.18

10.1 תדרי בוהר

בשיעור שעבר דנו בדינמיקה של מערכות קוונטיות באופן הכי כללי וראינו את שתי משוואות שרדינגר. דיברנו על דינמיקה של ערכי תצפית – קיבלנו מד"ר על ערכי תצפית שמכילה את יחס החילוף של האופרטור שמייצג את הגודל עם ההמילטוניאן. הבנו שההמילטוניאן הוא הבסיס לכל הדינמיקה בזמן. סיימנו עם אי־הוודאות של זמן ואנרגיה.

נניח מערכת משמרת (H משמר) ואופרטור A שלא תלוי בזמן (לא נניח כלום על יחס החילוף בין A ל-H). המערכת נמצאית במצב התחלתי $|\psi(t_0)\rangle$. אם נקח את המצב ההתחלתי ונפרוש אותו על מצבי ההמילטוניאן כל מצב ייקבל פאזה בקצב קבוע לפי האנרגיה שלו, והסכום הוא הפתרון הכללי. נסתכל על ערך התצפית:

$$\langle\psi(t)|A(t)|\psi(t)\rangle = \sum_i c_i^*(t_0)e^{\frac{i}{\hbar}E_i(t-t_0)}\langle E_i|\, A(t)\sum_j c_j(t_0)e^{\frac{i}{\hbar}E_j(t-t_0)}\left|E_j\right\rangle =$$

השתמשנו בפתרון הכללי של משוואת שרדינגר התלוייה בזמן כדי לכתוב את ערך התצפית לכל אופרטור כפונקציה של הזמן.

$$= \sum_{i,j} c_i^*(t_0)c_j(t_0)\left\langle E_i|A|E_j\right\rangle e^{\frac{i}{\hbar}(E_i-E_j)(t-t_0)}$$

חוץ מלהציב את ערך התצפית בפתרון הכללי לא עשינו כלום, אבל נדבר על השורה האחרונה. נניח לרגע ש-A לא תלוי בזמן. נקבל שערך התצפית של A הוא מספר ($c_i^*(t_0)c_j(t_0)\left\langle E_i|A|E_j\right\rangle$) שכופל אקספוננט מתנדנד ($e^{\frac{i}{\hbar}(E_i-E_j)(t-t_0)}$). באיזה תדר הוא מתנדנד:

$$\omega = \frac{E_i - E_j}{\hbar}$$

ערך התצפית מורכב מכמה אמפליטודות מתנדנדות במשקלים שונים ובתדרים מאוד ספציפיים, תדרים שיכולים להיות רק הפרשים של אנרגיות של המערכת. התדרים שנמצא יהיו רק כאלה שהמקדמים שלהם יהיו שונים מאפס, אז צריך שגם $c_i^*(t_0), c_j(t_0)$ יהיו שונים מאפס, וגם שאיבר המטריצה $\left\langle E_i|A|E_j\right\rangle$ לא ייתאפס כדי שיהיה רכיב בתדר המסויים.

אם נקח את ערך התצפית של גודל פיזיקלי ונעשה לו פורייה בזמן, נקבל מספר סופי של תדרים שיופיעו בדינמיקה שלו בזמן. כל תדר כזה נוכל לשייך להפרש בין ערכי אנרגיה שאפשריים במערכת (שהם תוצאה של ההמילטוניאן).

נדבר עכשיו על דוגמא – המקרה של אטום. אנחנו מסתכלים על ההמילטוניאן של אטום מסביב לגרעין. אם פותרים את זה מקבלים מצבים עצמיים של ההמילטוניאן, מצבי האנרגיה המותרים. אנחנו רוצים לדעת מה ערך התצפית של השדה החשמלי של אטום עם ההמילטוניאן הזה. מה שנקבל הוא שהשדה החשמלי יכול להתנדנד רק בתדרים שהם הפרשים של רמות אנרגיה באטום. זו בדיוק ההנחה של בוהר – אנחנו רואים אותה כאן עכשיו בתור תוצאה.

יותר מזה, כדי שהם יהיו שם צריך שברגע ההתחלה יהיה אכלוס, יהיה אלקטרון ברמה ה-c_i כדי שהמקדמים לא יתאפסו. מסתבר שגם אם אנחנו שמים אלקטרון במקום מסויים הוא לא יכול לרדת לכל הרמות שמתחתיו – יש רמות שמותר לו לרדת אליהן ויש רמות שאסור לו לרדת אליהן. הרמות המותרות הן כאלה שבהן איבר המטריצה בהצגת האנרגיה. יש גם מעברים שבהם זה כן מתאפס, ולכן המעבר אסור (בד"כ נובע ממעבר על חוק שימור תנע זוויתי או חוק שימור אחר).

10.2 מקום ותנע

אנחנו רוצים לדבר על תכונת המקום, שהיא תכונה בסיסית בפיזיקה – המקום של חלקיק, המקום של מערכת. הנושאים הבאים יעסקו בכך.

10.3 המקום הבדיד

נדבר על פונקציונל שנסמן אותו ב-δ_n. בשביל להציג את הפונקציונל הזה צריך הצגה, שנסמן אותה ב-$\{|u_i\rangle\}$. בהצגה הזאת, הפונקציונל מחזיר את האיבר ה-n-י של הווקטור $|\psi\rangle$:

$$\delta_n(|\psi\rangle) = \langle u_n|\psi\rangle$$

אם נציג את המספרים של ψ בהצגה בטור זה למעשה לשאול איזה איבר נמצא במקום ה-n, מהו c_n.

למדנו שלכל הצגה יש ווקטור *bra* שמתאים לכל פונקציונל. נסמן:

$$\langle\delta_n| = \langle n|$$

כך שההצגה של הווקטור היא:

$$[0,0,0, \ldots 0,1,0, \ldots ,0]$$

כך שסה"כ הווקטור באורך d, ו-1 הוא במקום ה-n-י. ככה ה-1 הזה ייבחר את הערך במקום ה-n אם נכפיל את זה בווקטור בהצגה u_i.

נניח שהמרחב ה-d מימדי הזה הוא מרחב הילברט של קופסאות. כלומר, הווקטור הזה הוא ווקטור של אמפליטודות על d קופסאות:

d	...	...	2	1

חלקיק קוונטי יכול להמצא בכל הקופסאות האלה. $|\psi\rangle$ יתאר את ההסתברויות להמצא בקופסאות (הקופסאות הן כבר בחירה של הצגה), והחלקיק יכול להמצא בו זמנית בכמה מהן, כי הוא קוונטי, ואז הוא יימצא בסופרפוזיציה שלהן.

אולם, אם נשאל את השאלה איפה נמצא החלקיק, מה המיקום שלו, אנחנו נמצא את החלקיק, ואנחנו יודעים שאחרי זה תהיה קריסה – הוא יעבור להמצא רק בקופסא אחת, זו שווקטור המצב שלה הוא ווקטור ה-ket שהוא הצמוד ההרמיטי של הפונקציונל הזה. במילים אחרות, δ_n הם פונקציונליים ששייכים למצבי ket שהם מצבים עצמיים של האופרטור שמתאר את השאלה איפה נמצא החלקיק.

נסמן ב-X את אופרטור המקום, אופרטור שמשייך למדידה את מיקום החלקיק במרחב הדיסקרטי הזה, מתאר באיזו קופסא נמצא החלקיק. נסדר את כל הווקטורים העצמיים של X לפי הסדר של המקומות $(\delta_1\delta_2, \ldots , \delta_d)$, וזה יכתיב לנו שהאופרטור X יהיה בהצגה הזאת אופרטור אלכסוני.

אנחנו רוצים גם שהערכים העצמיים יהיו התוצאות של המדידה. לכן, בהצגה הזאת אופרטור המקום ייכתב כך:

$$\langle n|X|m\rangle = n\delta_{n,m}$$

זה איבר המטריצה של אופרטור המקום בהצגה של המצבים העצמיים שלו שהיא אלכסונית (המ"ע הם כאמור הווקטורים שמתאימים לאופרטורים ששואלים מה המקום בהצגה הזאת.

נבדוק אם בנינו את האופרטור נכון. נפעיל אותו על $|m\rangle$. ראינו שהמ"ע של אופרטור פיזיקלי הם סט אורתונורמלי שלם, ולכן אפשר להכניס את אופרטור היחידה לפני X:

$$X|m\rangle = \sum_n |n\rangle\langle n|X|m\rangle = \sum_n n\delta_{n,m}|n\rangle = m|m\rangle$$

קיבלנו משוואת ע"ע ל-X, והיא אומרת שהערכים העצמיים הם מצבי $|m\rangle$, ולמצב עצמי $|m\rangle$ מתאים ע"ע m (התוצאה נותנת את המקום עצמו). זה מה שרצינו.

התיאור הזה שדיבר על d מימדים לא ישתנה אם נשאיף את d לאינסוף. לא רק זה, אנחנו יכולים גם להמשיך את הקופסאות שמאלה, לא להתחיל מ-1. אפשר ללכת ממינוס אינסוף עד אינסוף וזה יהיה אותו אופרטור, רק שייקח הרבה (מאוד) זמן לכתוב את הווקטורים והמטריצות שלהן.

10.4 מרחב הילברט אינסופי רציף

עד עכשיו ראינו רק מרחבי הילברט סופיים, אבל אנחנו לא יכולים לתאר עם מרחב כזה מדידה שיש לה אינסוף תוצאות, לדוגמא מקום. נבנה את המרחב החדש הזה בעזרת המקום הבדיד.

אנחנו נגיד ככה – נכון שהחלקיק לא יכול להמצא עכשיו באוסף סופי או אפילו בן מנייה של קבוצות. מה שנעשה יהיה להסתכל על סדרת מקומות, ולהשאיף את המרחק ביניהן לאפס. אם מלכתחילה לקחנו אינסוף קופסאות אז עדיין יהיו אינסוף מקומות. אבל יש לנו את כל הכלים המתמטיים לעבור בין סט סופי לבין סט רציף של ערכים אפשריים (לדומא מעבר מסכימה לאינטגרציה). אפשר לחשוב על ווקטור שהמספרים שלו מתארים מקומות שהולכים ומתקרבים אחד לשני ב-dx, ולהשאיף $dx \to 0$. עושים את זה בחשמל ומגנטיות – מדברים על התפלגות בדידה של מטענים ואז עוברים למשהו רציף. נקרא לזה הרצפה.

נסמן שוב ב-X את אופרטור המקום, הפעם האופרטור הרציף. המצב $|x\rangle$ יהיה המצב שאחרי שנשאל את השאלה "מה המקום של חלקיק" החלקיק יעבור אליו, והוא יהיה מצב עצמי של האופרטור. זה מצב בעל מקום מוגדר, אנחנו יודעים בדיוק איפה החלקיק נמצא אם אנחנו יודעים אותו.

אם נסתכל על מצב כללי של מערכת $|\psi\rangle$ ונשאל מה ההסתברות למצוא את המערכת במקום x, נצטרך להטיל את המערכת על המצב $|x\rangle$. כלומר, ל-$\langle x|\psi\rangle$ צריכה להיות המשמעות של מה הסיכוי להמצא במקום x. אולם, כיוון שיש אינסוף ערכים, המשמעות של $\langle x|\psi\rangle$ תהיה מה הסיכוי להמצא בסביבה בגודל dx ליד x (הרי התחלנו ממשהו דיסקרטי).

הביטוי $\langle x|\psi\rangle$ הוא המקביל ל-c_i, המקדם להמצא בקופסא ה-i. אם אנחנו רוצים את ההסתברות להמצא בקופסא ה-i אנחנו צריכים לקחת ערך מוחלט בריבוע של זה. לכן:

$$P([x, x+dx]) = |\langle x|\psi\rangle|^2 dx$$

מכאן אנחנו גם רואים שהיחידות של $\langle x|\psi\rangle$ הן אחד חלקי שורש המקום.

יש עניין שנאחנו צריכים לפתור – קודם הייתה סדרה של ערכים c_i וכאן יש אינסוף ערכי $\langle x|\psi\rangle$. זה אומר שהדבר הזה $\langle x|\psi\rangle$ הוא בעצם פונקציה של המקום, לכן נכתוב אותו בצורה $\psi(x)$. זו פונקציה של המקום שאנחנו נתייחס אליה מעכשיו בתור ההצגה של ψ בבסיס המקום. ψ הוא ווקטור אבסטרקטי ממרחב הילברט, וכאן אנחנו רואים שבהצגת המקום הוא פונקציה. זו פונקציה מרוכבת על הממשיים (המקום ממשי, והפונקציה יכולה להחזיר מספרים מרוכבים). הפונ' ψ מחליפה לנו את ה-c_i-ים בעזרת רצף אינסופי של ערכים.

גם $|\psi(x)|^2$ היא פונקציה, הפעם פונקציה ממשית. הפונקציה הזאת היא צפיפות ההסתברות. עכשיו אפשר לקבל את ההסתברות של חלקיק להמצא בקטע $[a,b]$:

$$P(a,b) = \int_a^b |\psi(x)|^2 dx$$

מכיוון שמדובר על מרחב אינסופי ועל צפיפות הסתברות התשובה לשאלה מה הסיכוי להמצא בנקודה מסויימת היא אפס, אבל עדיין אפשר לשאול מה הסיכוי להמצא במקטע מסויים.

מה שאנחנו רואים הוא זיהוי בין המצבים $|\psi\rangle$ של מרחב הילברט אינסופי לבין פונקציות $\psi(x)$ מרובבות על הממשיים. לכן, אפשר כבר להגיד שהפונקציות האלה חיות במרחב הילברט. מבחינתנו, הפונקציות האלה יהיו פשוט בחירה של הצגה ל-ψים. יהיו לנו גם הצגות אחרות למצבים האלה, לא רק הצגת המקום. הפונקציות $\psi(x)$ נקראות באופן היסטורי **פונקציות גל**.

מאחר שהמצבים של המקום בתור מצבים עצמיים של אופרטור הרמיטי של מדידת המקום, אז ה-$|x\rangle$ מהווים בסיס אורתונורמלי שלם. אם כן, צריך לדעת לכתוב יחס שלמות ואורתונורמליות, רק שצריך לעשות לזה הרצפה:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx|x\rangle\langle x| = \mathbb{1}$$

איך לרשום מצב כללי:

$$|\psi\rangle = \mathbb{1}|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx|x\rangle\langle x|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\psi(x)|x\rangle$$

פרשנו את ψ בעזרת איברי המקום, והמקדמים הם ה-c_iים, שהוחלפו במקרה הרציף ע"י פונ' הגל.

נניח שגם ל-ψ וגם לווקטור נוסף φ קיימת הצגה בהצגת המקום. המשמעות של מכפלה פנימית:

$$\langle\varphi|\psi\rangle = \langle\varphi|\mathbb{1}|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\langle\varphi|x\rangle\langle x|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\langle x|\varphi\rangle^*\langle x|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\varphi^*(x)\psi(x)$$

כלומר, אם אנחנו יודעים את ההצגה בבסיס המקום של שני מצבים, המכפלה הפנימית ביניהם היא מכפלה של הפונקציה הצמודה של הראשון בפונקציה של השני.

בשביל לקבל את המשמעות של הפעלת אופרטור בהצגת המקום נסתכל על הטלה של הפעלת האופרטור על הצגת המקום, כלומר:

$$\langle x|A|\psi\rangle = \langle x|A\mathbb{1}|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx'\langle x|A|x'\rangle\langle x'|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx' a(x,x')\psi(x')$$

$\langle x|A|x'\rangle \equiv a(x,x')$ הוא מספר שהוא פונקציה של שני מספרים, לכן סימנו אותו כך. הפונקציה זאת היא המקבילה האינסופית של המטריצה, ולמעשה מה שרשום כאן זו מכפלה של מטריצה בווקטור (x מספר השורה ו-x' מספר הטור).

נסתכל על $a(x,x')$, ההצגה של האופרטור A בבסיס המקום (נזכור שהוא הרמיטי), ונוכל לרשום:

$$a(x,x') = \langle x|A|x'\rangle = \left\langle x\middle|A^\dagger\middle|x'\right\rangle = \langle x'|A|x\rangle^* = a^*(x',x)$$

זו המקבילה של איך להצמיד הרמיטית מטריצה שמייצגת אופרטור. זה נותן לנו תנאי על הפונקציה כדי שתייצג אופרטור הרמיטי.

נרמול של פונקציות בהצגת המקום – אנחנו דורשים שעבור כך מצב פיזיקלי סך כל ההסתברויות שלו שווה 1. נסתכל על:

$$\langle\psi|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\psi^*(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2\,dx = 1$$

המעבר האחרון הוא בגלל ש-$|\psi(x)|^2$ היא פונקציית צפיפות הסתברות. לכן, אותה דרישה שהאורך של הווקטור יהיה שווה 1 במרחבים הסופיים שווה 1 קיימת גם כאן. המשמעות הפיזיקלית של זה היא מה המשמעות של החלקיק "להיות", מה המשמעות שהוא נמצא במקום כלשהו, והתשובה היא 1 (אחרת לא הייתה משמעות לשאלה).

אורך מהסוג הזה של וקטורים אינסופיים, הצורה הזאת להגדיר אורך, נקראית L^2. כל הפונקציות המרוכבות על הממשיים שנתנות לנרמול L^2 מהוות מרחב הילברט.

ברור לנו שרק פונקציות שנתנות לנרמול הן בעלות משמעות פיזיקלית, כי אנחנו רוצים שכל ההסתברויות יתכנסו ל-1. פונקציות מרוכבות על הממשיים שמתארות מצבים פיזיקליים שייכות למרחב הילברט, ופונקציה ששייכת למרחב הילברט מתארת מצבים פיזיקליים. לא כל פונקציה מרוכבת על הממשיים שייכת למרחב הילברט, הדרישה הנוספת היא הנרמול.

10.5 אופרטור המקום והמצבים העצמיים שלו בהצגת המקום (פונקציית דלתא)

נשאלת השאלה מהי פונקציית הגל $\psi_{x_0}(x)$ שהיא פונ' עצמית של אופרטור המקום, כלומר שמציינת שהחלקיק נמצא ב-x_0 (נכתוב אותה לפעמים בתור $\psi(x,x_0)$). נמצא את הצגת המקום שלה:

$$\psi_{x_0}(x)=\psi(x,x_0)=\langle x|x_0\rangle$$

כלומר, לקחנו מצב ידוע $|x_0\rangle$ והטלנו אותו על x כדי למצוא את הצגת המקום שלו.

מה אנחנו יודעים על הפונקציה הזאת? דבר ראשון, אנחנו יודעים ש-$\langle x|x_0\rangle$ מעבר להיותה הטלה אנחנו יכולים גם לחשוב על זה בתור מכפלה פנימית של הווקטור $\langle x|$ ו-$|x_0\rangle$. כאשר $x\neq x_0$, הערך $\psi_{x_0}(x)=0$, כי הוא מקבל ערך מהמכפלה הפנימית של x,x_0, והם צריכים להיות ניצבים.

דבר שני, אנחנו יודעים שלא יכול להיות שהיא תהיה 0 בכל נקודה, כי אז האינטגרל עליה יהיה אפס. כלומר ב-$x=x_0$ מתקיים $\psi_{x_0}(x)\neq 0$. אבל זה לא מספיק שזה יהיה שונה מאפס – אם נבחר איזה ערך סופי, מכיוון שסך כל הנקודות שבהן הפונקציה שונה מאפס הן מגודל אפס, האינטגרל על הפונקציה הזאת עדיין תהיה אפס. לכן, הערך ב-$x=x_0$ צריך להיות אינסופי.

נבדוק את הנרמול של הפונקציה הזאת בלי לדעת איך היא נראית:

$$\int_{-\infty}^{\infty}dx|\langle x|x_0\rangle|^2=\int_{-\infty}^{\infty}dx\langle x_0|x\rangle\langle x|x_0\rangle=$$

נשים לב שקיבלנו כאן את יחס השלמות. לכן:

$$=\langle x_0|x_0\rangle=\psi_{x_0}(x)\to\infty$$

זה אומר שהנרמול של הפונקציה הזאת הולך לאינסוף, היא לא ניתנת לנרמול, וזה אומר שהיא בתוך מרחב הילברט.

בנוסף, הפונקציה הזאת לא אנליטית וגם לא רציפה, כי בכל מקום חוץ מנקודה אחת היא תהיה אפס, ורק ב-x_0 היא תלך לאינסוף.

כדי להבין את זה, נבחר פונקציית גל אחרת $\varphi(x)$ ונציג אותה בהצגת המקום, ואז נפעיל את יחס השלמות:

$$\varphi(x)=\langle x|\varphi\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}dx'\langle x|x'\rangle\langle x'|\varphi\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}dx'\psi(x,x')\varphi(x')$$

עד כדי הצמדה קומפלקסית יש לנו כאן מכפלה בין שתי פונקציות – הפונקציה φ ואת הפ"ע של אופרטור המקום ψ. אם אנחנו כופלים במכפלה פנימית פונקציה שמתארת מצב מסויים ($\varphi(x')$) עם פונקציית המקום למקום מסויים ($\psi(x,x')$) אנחנו מקבלים את ערך הפונקציה במקום x.

נסיק שהפוקנציה ψ היא פונקציונל ששואל אותנו: בהצגה x', מה הערך של φ במקום x. קראנו ל-ψ פונקציה, אבל למעשה היא פונקציונל – היא שואל את השאלה הזאת ומחזירה מספר. זה המקרה הרציף של מה שהגדרנו במקרה הבדיד כ-δ_n. אלה יהיו המצבים העצמיים.

יש לנו כאן בעיה – המצבים העצמיים של x לא חיים במרחב הילברט, אבל הם מוגדרים היטב בתור פונקציונלים. בנינו את האינטגרל מהדרישה של כל מה שאמרנו על מצבי מקום. לכן, המצבים העצמיים באמת חיים רק במרחב ה-*bra*. כשדיברנו על הדואליות בין המרחב הילברט למרחב הדואלי ציינו גם שבמרחב סופי יש התאמה מלאה בין המרחב הרגיל לדואלי, אבל במרחבים אינסופיים לא תמיד. זו דוגמא לעניין הזה – המצבים העצמיים של אופרטור המקום מוגדרים היטב בתור פונקציונלים.

מה שנעשה זה לצור מרחב שנקרא מרחב הילברט מורחב (*augmented Hilbert space*), והוא ייצור פונקציות בדיוק מהצורה הזאת (שמוגדרות בתור פונקציונליים ולא בתור ווקטורים). לפונקציה $\psi(x, x_0)$ נקרא **פונקציית דלתא**. אפשר לראות שהיא תלויה רק במרחק ביניהם ($\psi(x, x_0) = \delta(x - x_0)$). היא תקבל 0 בכל נקודה $x = x_0$, וערך שונה מ-0 בכל $x = x_0$, שאותו אנחנו לא יודעים, אבל כן יודעים מה ייקרה כשנכניס אותו לתוך אינטגרל עם פונקציה אחרת (למשל $\int_{-\infty}^{\infty} dx' \psi(x, x')\varphi(x')$), דרך זה אנחנו מגדירים אותו.

השטח מתחת לפונקציה: $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x')\, dx$. בשביל לחשב אותה, נגדיר את הפונקציה $u(x) = 1$. מתקיים:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x')\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} u(x)\delta(x - x')\, dx = u(x') = 1$$

אם נתונה $\psi(x)$, מה תהיה ההצגה של זה בבסיס של פונקציות המקום? ראינו את זה מקודם לא בהצגת המקום אלא באופן כללי, אז נסתכל עכשיו זה על זה בהצגת המקום:

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' \psi(x')\delta(x - x')$$

כי זה בדיוק מה שעושה δ, דוגמאת את ψ במקום ה-x, זה מה שעושה המכפלה הפנימית. אבל בדיוק כתוב כאן איך לפרוס את ψ באמצעות פונקציות δ – עם משקלים של ψ. כלומר, $\psi(x)$ היא המשקלים בהצגת המקום.

11 <u>שיעור 11 – 6.5.18</u>

11.1 אופרטור המקום והמ"ע שלו בהצגת המקום – המשך

11.1.1 חזרה

בשיעור הקודם דיברנו על מקום ועל מציאת ערך ומקום בתור פונקציונל. כתבנו אופרטור למקום הדיסקרטי, ואז דיברנו על רעיון של הרצפה. התחלנו לדבר על הפונקציות העצמיות של אופרטור המקום, כלומר המצבים שאליהם תעבור המערכת כשנמדוד מה המקום שלה. ראינו שהמצבים העצמיים האלה הם בעייתיים מבחינה מתמטית כי הם לא ניתנים לנרמול, וראינו שאפשר להגדיר אותם רק דרך המכפלה הפנימית שלהם עם מצבים אחרים. לדוגמא:

$$\psi(x)=\int_{-\infty}^{\infty}dx'\psi(x')\delta(x-x')$$

את הפונקציות האלה סימנו כאמור בסימן דלתא ואמרנו שהן פונקציות דלתא (אפילו שהן לא ממש פונקציות). כיוון שהמכפלה הפנימית שלהם מוגדרת הם יכולים להיות שייכים למרחב הפונקציונליים, ולכן נרחיב את מרחב הילברט כדי לכלול אותם.

11.1.2 מכפלת מ"ע של אופרטור המקום

תוצאה מיידית: פונ' דלתא היא מכפלה פנימית של שני מצבים עצמיים של אופרטור המקום:

$$\langle x|x'\rangle=\langle x|\mathbb{1}|x'\rangle=\delta(x-x')$$

כלומר, אופרטור היחידה בהצגת המקום הוא $\delta(x-x')$. ראינו גם שאופרטור במרחבים אינסופיים נראה כמו אינטגרל על פונ' של שני משתנים, אז אפשר להגיד שהפעלנו אופרטור $\delta(x-x')$ על הווקטור $\psi(x')$ וקיבלנו את הווקטור $\psi(x)$, את אותו הווקטור. כלומר, אפשר לחשוב על זה כאילו הפעלנו את אופרטור היחידה.

11.1.3 אופרטור המקום בהצגת המקום

דיברנו על המ"ע של אופרטור המקום, נדבר על האופרטור עצמו. דבר ראשון, אנחנו מעוניינים בהצגה שלו בבסיס x, כלומר אנחנו מעוניינים באיברי המטריצה של אופרטור המקום בהצגת המקום:

$$\langle x|X|x'\rangle=a(x,x')$$

זו פונקציה של שני משתנים, והיא מקבילה למטריצות. נבנה אותו בדיוק כמו שבנינו את אופרטור המקום הדיסקרטי. קודם כל, זה אופרטור המקום בהצגת המקום, אז הוא צריך להיות אלכסוני. בנוסף, אנחנו רוצים שכשאר נמדוד מקום x נקבל את הע"ע x, כלומר אנחנו רוצים שעל האלכסון ישבו הערכים x:

$$a(x,x')=x\delta(x-x')$$

מהרמיטיות אפשר לכתוב גם (אפשר לראות את זה אם מצמידים ומשחלפים את הביטוי המקורי):

$$a(x,x')=x\delta(x-x')=x'\delta(x-x')$$

נפעיל את אופרטור המקום על מ"ע ונראה שזה מתאים:

$$X|x_0\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}dx|x\rangle\langle x|X|x_0\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}d\cdot x\delta(x-x_0)|x\rangle=x_0|x_0\rangle$$

יש לנו אינטגרל של ווקטורים – אנחנו עוברים על כל הווקטורים האפשריים, וכולם מתאפסים חוץ מהנקודה שבה $x=x_0$, וקיבלנו את משוואת הערכים העצמיים הצפויה.

11.1.4 הפעלת אופרטור המקום על אופרטור בהצגת המקום

אנחנו יודעים להפעיל את אופרטור המקום על ווקטור, כמו שעשינו עכשיו. מה ייקרה אם נתון לנו כבר ווקטור בהצגת המקום $\psi(x)$ ואנחנו רוצים להפעיל עליו את אופרטור המקום X? נסמן את זה ב-$X[\psi(x)]$. המשמעות של זה היא:

$$X[\psi(x)]=\langle x|X|\psi\rangle$$

כי הפעלנו את X על ψ ($X|\psi\rangle$) בהצגת המקום. נקבל:

$$\langle x|X|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx'\langle x|X|x'\rangle\langle x'|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx' x\delta(x-x')\psi(x') = x\psi(x)$$

התוצאה אומרת את הדבר הבא: אם נתון $\psi(x)$ ואנחנו מפעילים עליו את אופרטור המקום, זה שקול ללהכפיל אותו ב-x. נעיר שלא כל פונקציה ב-L^2 שמפעילים עליה את אופרטור המקום נותנת פונקציה ב-L^2. דוגמא:

$$\psi(x) = \frac{\sqrt{a/\pi}}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

הפונקציה הזאת כפול איקס לא ניתנת לנרמול, לכן לא שייכת ל-L^2.

11.2 על מה אנחנו מדברים כשאנחנו מדברים על מקום

11.2.1 איך חיים בשלום עם פונקציית דלתא

אם פונקציית דלתא היא חיה מתמטית שאפילו המתמטיקה לא חיה איתה טוב ומרחב הילברט לא מכיל אותה, ואנחנו אומרים שכל המצבים הפיזיקליים חיים במרחב הילברט וצריכים להרחיב אותו בשביל זה – זה לא מרגיש מאוד טבעי. נרצה להרגיש קצת יותר בנח עם פונ' דלתא, והדרך לעשות את זה תהיה להבין את הגבול בין העולם המתמטי לעולם הפיזיקלי – מה מוכל באיזה עולם, ולהשאיר אותנו בתור פיזיקאים בעולם הפיזיקלי שבו דברים מתנהגים טוב.

המילה "פונקציה" בשביל לתאר את פונקציית דלתא היא מבלבלת, כי היא לא שייכת למרחב הפונקציות. אולם, ראינו שהיא כן פונקציונל. לדברים האלה שחיים רק בתור פונקציונלים המתמטיקאים קוראים התפלגויות (distribution).

העניין של התפלגויות זה רעיון מתמטי שמתמטיקאים ניסחו בעקבות תורת הקוונטים, בעקבות דיראק, כדי להסביר למה התכוונו הפיזיקאים כשהם כתבו bra ו-ket (והיום זה כבר תחום במתמטיקה). הרעיון נובע משאלה פיזיקלית כזו: נדבר על שדה הטמפרטורות בחדר כלשהו. יש פונ' תלת־מימדית שמתארת את הטמפ' בכל החדר, זה ברור מבחינה פיזיקלית.

כשנשאל מה הטמפ' בנקודה מסויימת יש שתי תשובות – יש תשובה מתמטית, איזשהו מספר, אבל פיזיקלית אין שום משמעות למספר. למה: כי לעולם לא נוכל להגיע ולמדוד את הערך שנמצא בנקודה. למה? כדי למדוד את הטמפ' בצורה מדוייקת בנקודה צריך מכשיר עם רזולוציה (אבחנה) אינסופית, צריך מכשיר שידע למדוד בנקודה מתמטית את הערך. פיזיקלית אין דבר כזה – בהתחלה הגבולות הם טכנולוגיים, ובסוף נגיע גם לגבולות פיזיקאליים.

מה כן יעשה מכשיר מדידה – יהיה לו איזשהו גודל שנקרא לו האבחנה של המכשיר, ואנחנו נצייר את המדידה כך: הגודל של פונ' שנמדוד יהיה תלוי באבחנה של המכשיר, ונגדיר את זה מתמטית בתור:

$$\tilde{f}(x,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}\int_{x-\frac{\varepsilon}{2}}^{x+\frac{\varepsilon}{2}} f(x')dx'$$

מה שכתבנו כאן זה מיצוע – אנחנו ממצעים על גודל אבחנה מסויים את הערך הנמדד. זה מתאר מדידה פיזיקלית נכון, בשונה מ-$f(x)$. הפונ' $f(x)$ היא לא נגישה – אולי אנחנו יכולים לכתוב אותו על נייר ולהשתמש בו לחישובים, אבל לעולם לא באמת נוכל למדוד אותו.

את המשפט המתמטי הזה נכתוב בצורה הבאה:

$$\tilde{f}(x,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}\int_{x-\frac{\varepsilon}{2}}^{x+\frac{\varepsilon}{2}} f(x')dx' = \int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(x',x)f(x')dx'$$

כשהגדרנו $\delta_\varepsilon(x',x) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon}, & x-\frac{\varepsilon}{2} < x' < x+\frac{\varepsilon}{2} \\ 0, & else \end{cases}$. הגובה של הפונ' הזו הוא $1/\varepsilon$ והרוחב שלה ε, אז השטח שלה הוא 1. היא מציינת לנו את המיצוע של האבחנה של המכשיר.

נעיר שאותו הדבר מתקיים כשאנחנו שואלים על זמן – שום מכשיר מדידה לא יכול למדוד לנו ערך ברגע מסויים, בנקודה מתמטית. לכל מכשיר תהיה רזולוציה שתהיה תלויה במכשיר.

11.2.2 הגדרת פונקציית דלתא באמצעות גבול

לפי ההגדרה שאומרת שהרזולוציה נכנסת בעזרת הפונ' $\delta_\varepsilon(x',x)$, המדידה נראית כמו מכפלה פנימית של הפונ' שאנחנו רוצים למדוד עם הפונ' המרובעת (rect), שהיא פונ' של משקלים של המיצוע.

ברור שבגבול $\varepsilon \to 0$ מתקיים:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \delta_\varepsilon(x',x) = \delta(x-x')$$

זה מתכתב עם ההגדרה שאנחנו מכירים של פונ' דלתא מקורסים קודמים.

אפשר גם לראות את אותו הרעיון של איך פונ' הדלתא דוגמת את הפונ' – ה-x הוא מקום הדגימה, ובגבול שהפונ' הזאת הולכת לדלתא נקבל את $f(x)$.

מסתבר שאנחנו לא חייבים אפילו להגדיר את הפונ' δ באמצעות rect. כל פונ' $f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ שמתנהגת יפה בסביבה של אפס (גזירות, רציפות וכו'), אם נשאיף $\varepsilon \to 0$ נקבל פונ' דלתא. ספציפית יש שלוש פונ' שנח להשתמש בהן:

1. סינק ברוחב ε:

$$\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)}{\pi x}$$

2. גאוסיין ברוחב ε:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon^2}} e^{-\frac{x^2}{\varepsilon^2}}$$

3. לורנציאן:

$$\frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}$$

שלוש הפונקציות האלה מנורמלות ל-1, ובפרט כולן הולכות לדלתא ב-$\varepsilon \to 0$.

עכשיו אנחנו מבינים את פונ' דלתא בתור התפלגויות של המרחב. מתמטית אפשר לדבר עליהן בתור גבול. פיזיקלית, כל מצב פיזיקלי אמיתי יהיה שייך ל-L^2. מה שהראנו עכשיו, מכשיר שמודד דלתא אמיתית, לא קיים. לכן גם לא לצור מצב שממוקדם בדלתא, כי בשביל זה צריך למדוד מצב בוודאות אינסופית. כמו שלא קיים מכשיר כזה, לא נתקל במצב כזה בעולם האמיתי. לכן אפשר להמשיך ולחשוב שכל המצבים הפיזיקליים חיים ב-L^2 (ועכשיו גם יישבנו את זה מתמטית).

11.3 אופרטור התנע והמצבים העצמיים שלו

11.3.1 הקשר בין תנע לאורך גל

נזכר בדה-ברולי ובקומפטון, ובפרט בכך שאמרנו שמה שעובד על פוטון ועל חלקיק אנחנו מצפים שיהיה אותו הדבר. לפוטון אנחנו כבר יודעים שיש אורך גל, קומפטון אמר לנו שיש לו גם תנע; לחלקיק אנחנו יודעים שיש תנע, דה-ברולי אמר שיש לו גם אורך גל. אורך הגל והתנע קשורים לפי:

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

זה אומר שאם אנחנו מודדים את התנע של חלקיק, למעשה אנחנו גם יודעים את אורך הגל שלו. זה אומר שאם נגדיר אופרטור למדידה של אורך גל בנפרד מאופרטור למדידה של תנע, שני האופרטורים האלה יהיו מתחלפים (כי אם אנחנו יודעים אחד אנחנו גם יודעים את השני). זה אומר שיש להם סט משותף של מ"ע, כי אם מדדנו את התנע של חלקיק

המצב יעבור למצב עצמי של תנע, שיהיה מצב עצמי של אורך גל, ולכן אנחנו יודעים את אורך הגל. אנחנו יודעים את אורך הגל מהקשר הזה, אבל אנחנו גם יודעים שהמצבים העצמיים שלהם יהיו משותפים.

אנחנו מעוניינים עכשיו בתנע של חלקיק, מה שאומר שהמצבים העצמיים של התנע יהיו בעלי אורך גל מוגדר חח"ע.
אנחנו מכירים בהצגה של מקום סוג אחד (אין יותר) של פונ' שיש להן אורך גל מוגדר – אקספוננט, שמגדיר גל מישורי.
נצפה שמצב עצמי של אופרטור התנע (שיהיה מצב בעל תנע מוגדר) $\rangle p|$ בהצגת המקום היא פונ' שמגדירה מצב עם תנע מוגדר p:

$$\langle x|p\rangle = \psi_p(x)$$

כדי שלפונ' יהיה תנע מוגדר אמרנו עכשיו שהיא צריכה אורך גל מוגדר, והפונ' האלה הן גלים עומדים. לכן, עד כדי נרמול (שנחזור אליו אח"כ) נקבל:

$$\langle x|p\rangle = \psi_p(x) = \alpha e^{i\frac{2\pi}{\lambda}x} = \alpha e^{\frac{i}{\hbar}px}$$

נשים לב שהערך המוחלט של זה בריבוע צריך להיות מתאים לצפיפות התפלגות:

$$\left|\psi_p(x)\right|^2 = |\alpha|^2$$

יש עם זה כמה בעיות: קודם כל זה מפתיע מהבחינה שזה קבוע, וזה אומר שחלקיק עם תנע מוגדר הוא לא ממוקם, הוא בהסתברות שווה להמצא בכל מקום במרחב. בנוסף, אנחנו יכולים לראות שאינטגרל על הפונ' הזאת בין מינוס אינסוף לאינסוף ייתן אינסוף בתור אינטגרל של קבוע, ומה שכבר מצביע לנו על כך שהמצבים העצמיים בהצגת המקום של התנע הן פונקציות שלא ב-L^2 גם (נראה בהמשך שהן מוגדרות רק כהתפלגויות).

11.3.2 מעבר בין הצגה בבסיס במקום להצגה בבסיס התנע ולהפך

הביטוי $\langle x|p\rangle$ הוא מכפלה פנימית של שני מצבים עצמיים של אופרטור הרמיטי – אופרטור המקום ואופרטור התנע (שהוא הרמיטי כי אנחנו מצפים שתנע יהיה בר־מדידה), כלומר הם יהיו אורתונורמליים במובן מסויים. ראינו כבר שאיבר כזה הוא איבר של מטריצה שמעבירה אותנו בין בסיסים, במקרה הזה בין הצגה בבסיס תנע לבין הצגה בבסיס מקום.

לכן, אם נתונה לנו ההצגה של ψ בבסיס המקום $\psi(x)$ ואנחנו מעוניינים להציג את אותו המצב בבסיס התנע $\tilde{\psi}(p)$:

$$\tilde{\psi}(p) = \langle p|\psi\rangle$$

ואיבר מטריצת המעבר מהבסיס x לבסיס p יהיה $\langle p|x\rangle$. מתקיים:

$$\langle p|x\rangle = \langle x|p\rangle^* = \alpha e^{-\frac{i}{\hbar}px}$$

כך ייראה איבר של מטריצת מעבר בין x ל-p. את השורה הזאת אפשר לקרוא בעוד דרך: אפשר להגיד שלקחנו מ"ע של המקום והצגנו אותו בהצגת התנע. קודם אמרנו שמצב בעל תנע מוגדר ניתן למצוא בכל מקום, מקבלים פונ' של x.
עכשיו לקחנו מקום עם x מוגדר ויש פונ' של p. זו פונ' עם אותו גודל קבוע, כלומר גם עכשיו נקבל שאם נתון לנו חלקיק ממוקם במקום קבוע יש אי־וודאות מושלמת בנוגע למה התנע, כי הגודל של פונ' הגל בהצגת התנע הוא ערך קבוע.

נסתכל על:

$$\tilde{\psi}(p) = \langle p|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\langle p|x\rangle\langle x|\psi\rangle = \alpha\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\frac{i}{\hbar}px}\psi(x)$$

קיבלנו שאם נתונה לנו $\psi(x)$ ואנחנו רוצים לעבור ל-$\tilde{\psi}(p)$, צריך לעשות עליה התמרת פורייה.

כמו ש-$\psi(x)$ היא המשקלים של ההצגה של x (עד ערך מוחלט לריבוע), המשקלים של הצגת התנע הם התמרת הפורייה של המשקלים של x. אפשר להסתכל על זה בעוד דרך – באינטגרל כתובה מכפלה פנימית בין $\psi(x)$ לבין $e^{-\frac{i}{\hbar}px}$, שאפשר

לראות אותו כמצב עצמי של x בהצגה של p. במילים אחרות, אנחנו שואלים מה ההטלה של ψ על כל המצבים עם התנע המוגדר p.

באותה מידה ש-x היווה בסיס שלם אז גם p, מה שאומר שיהיה לנו יחס שלמות:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp|p\rangle\langle p| = \mathbb{1}$$

כעת, נניח שנתונה ההצגה בבסיס התנע $\tilde{\psi}(p)$ ואנחנו מעוניינים למצוא את ההצגה בבסיס המקום $\psi(x)$. נרשום:

$$\psi(x) = \langle x|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dp\langle x|p\rangle\langle p|\psi\rangle = \alpha\int_{-\infty}^{\infty} dpe^{\frac{i}{\hbar}px}\,\tilde{\psi}(p)$$

קיבלנו שהמעבר מהצגת התנע להצגת המקום הוא התמרת פורייה הפוכה.

11.3.3 הבדל בין מקום ותנע קלסיים לקוונטיים

מבחינת מקום ותנע קלאסיים צריך לדעת גם את המקום וגם את התנע כדי להבין מצב (צריך לדעת גם את המקום וגם את הנגזרות שלו). קוונטית, למקום ותנע יש משמעות אחרת לגמרי.

נזכר שמה שמגדיר מצב זה וקטור במרחב הילברט. למקום ותנע יש משמעות של הצגות של $|\psi\rangle$, בתור דרכים לכתוב את וקטורי העמודה, במקרי הזה פונ'. $|\psi\rangle$ עצמו נתון לחלוטין גם בלי קשר לבחירה של ההצגה, ולכן גם $\psi(x)$ וגם $\tilde{\psi}(p)$ הם דרך לכתוב את ψ, הצגה שלו. הם מכילים את כל המידע.

לכן, אם יש לנו את $\psi(x)$, בחישוב מתמטי פשוט מקבלים את $\tilde{\psi}(p)$ ולהפך. לא רק שהם לא בלתי־תלויים אלא גם לכל אחד מהם יש קיום בנפרד, כל אחד מהם מתאר בצורה מלאה את המצב. נוכל גם לבחור הצגות אחרות, לדוגמא הצגת האנרגיה, והיא תתאר את אותו המצב.

כלומר, במקרה הקלאסי צריך לקבל גם את x וגם את p בשביל לתאר מערכת, ובמקרה הקוונטי מספיק לקבל את $|\psi\rangle$, ויש בחירה באיזה מערכת להציג אותו.

המרחב הוא אינסופי. למעשה, גם למרחב סופי דו־מימדי יש אינסוף הצגות, אפשר לפרוס אותו בערת אינסוף בחירות של שני ווקטורים נצבים. גם כאן יש אינסוף בחירות של הצגות. ספציפית אנחנו מסתכלים על שתי בחירות מאוד מסויימות, x,p, כי זה ממשיך את ההבנה הקלאסית שלנו של מקום של חלקיק ותנע של חלקיק.

11.3.4 נרמול מ"ע של התנע

נסתכל עכשיו על המכפלה הפנימית $\langle p|p'\rangle$. בדומה למה שראינו על המקום, נקבל $\langle p|p'\rangle = \delta(p-p')$. אם נכנסי את יחס השלמות ב-x לפני p' נקבל:

$$\langle p|p'\rangle = \delta(p-p') = \int_{-\infty}^{\infty} dx\,\langle p|x\rangle\langle x|p'\rangle = \alpha^2\int_{-\infty}^{\infty} dxe^{-\frac{i}{\hbar}px}e^{\frac{i}{\hbar}p'x} = \alpha^2\int_{-\infty}^{\infty} dxe^{-\frac{i}{\hbar}(p-p')x}$$

קיבלנו שהמכפלה הפנימית הזו שווה לאינטגרל ממינוס אינסוף עד אינסוף לגודל שמתנדנד ב-x ותלוי בהפרש בין שני ה-pים. את האינטגרל הזה אנחנו לא יכולים לפתור, כי הוא לא מוגדר טוב באינסוף כיוון שהגודל מתנדנד.

לכן, כדי לפתור את זה נניח גבולות סופיים לבעיה ואז נשאיף את זה לאינסוף:

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\alpha^2\int_{-1/\varepsilon}^{1/\varepsilon} dxe^{-\frac{i}{\hbar}(p-p')x} = \lim_{\varepsilon\to 0}\alpha^2\frac{i\hbar}{\Delta p}\left[e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{\Delta p}{\varepsilon}} - e^{\frac{i}{\hbar}\frac{\Delta p}{\varepsilon}}\right] = 2\pi\hbar\alpha^2\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\sin\left(\frac{\Delta p}{\hbar\varepsilon}\right)}{\pi\Delta p} = 2\pi\hbar\alpha^2\delta(p-p') =$$

(הערה – אמנם יש $\hbar$ במכנה של הסינוס, אבל זה לא משנה כי באותה מידה ש-$\varepsilon \to 0$ גם $\hbar\varepsilon \to 0$ וזה לא משפיע לנו על הנרמול)

ואם משתמשים בקשר שראינו קודם בין התנע לבין אורך הגל (כשנציב בו את מספר הגל) ובתכונות של פונ' דלתא מקבלים:

$$= 2\pi\alpha^2\delta(k-k')$$

כמו כן, כדי שהשיוויון כולו יתקיים צריך להתקיים ששני המקדמים של הדלתאות במהלך החישוב שווים:

$$2\pi\hbar\alpha^2 = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}$$

מצאנו את הנרמול.

אבל מה המשמעות בכלל של נרמול? האינטגרל על $|\psi(x)|^2$ בין מינוס אינסוף לאינסוף במילא הולך לאינסוף, אז למה לבחור דווקא את זה? המשמעות היא מבחינתנו שהגדרנו סוג חדש של נרמול של פונ' גל, שנכנה אותו נרמול לפי דיראק. המשמעות היא שמכפלה פנימית של שתי פונ' נותנת דלתא. כדי שזה ייקרהצריך את קבוע הנרמול, אחרת יש עודף של $2\pi\hbar$. זה לעומת נרמול אלגברי שמשמעותו שהמכפלה הפנימית היא 0 או 1, שאותו אפשר לעשות במרחבים סופיים. ברמחבים סופיים יהיה נרמול לפי דיראק, שמשמעותו שהמכפלה הפנימית תהיה שווה דלתא, שהוא פונקציונל.

11.3.5 משפט פרסבל

נשים לב שמהשוויון הארוך קיבלנו עוד דרך לכתוב את פונ' דלתא:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{ikx} = 2\pi\delta(k)$$

נסתכל על גודל של מצב נתון $\langle\psi|\psi\rangle$. אפשר לכתוב את המצב הזה בשתי ההצגות, המקום והתנע, ע"י הכנסה של אופרטור היחידה פעם בהצגת המקום ופעם בהצגת התנע:

$$\begin{aligned}\langle\psi|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\langle\psi|x\rangle\langle x|\psi\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dx\langle\psi|p\rangle\langle p|\psi\rangle \\ = \int_{-\infty}^{\infty} dx|\psi(x)|^2 \qquad &= \int_{-\infty}^{\infty} dx\big|\tilde{\psi}(p)\big|\end{aligned}$$

זה משפט פרסבל, שאומר מתמטית שאינטגרל על פונ' ממינוס אינסוף עד אינסוף שווה לאינטגרל הזה על התמרת פורייה שלה. אלגברית, זה אומר שהגודל של ווקטור לא משתנה בין בסיס במקום לבסיס התנע.

11.3.6 הצגת אופרטור התנע בהצגת התנע ובהצגת המקום

נרצה להציג עכשיו את אופרטור התנע כמו שהצגנו את אופרטור המקום. נסתכל על איבר המטריצה של אופרטור התנע בהצגת התנע, ונקבל בדומה למקום:

$$\langle p|P|p'\rangle = p\delta(p-p')$$

נסתכל גם על אופרטורהתנע שמופעל על הצגת התנע של המצב ψ, ושוב, בדומה למה שעשינו עם מקום נקבל:

$$P\big[\tilde{\psi}(p)\big] = \langle p|P|\psi\rangle = p\tilde{\psi}(p)$$

עכשיו נסתכל על אופרטור התנע בהצגת המקום ולהפך. איבר המטריצה של P בהצגת המקום:

$$\langle x|P|x'\rangle = \langle x|\mathbb{1}P\mathbb{1}|x'\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dp\, dp' \langle x|p\rangle \langle p|P|p'\rangle\langle p'|x'\rangle$$
$$= \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dp\, dp' e^{\frac{i}{\hbar}px} p\delta(p-p') e^{-\frac{i}{\hbar}p'x'}$$
$$= \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} dp' p' e^{\frac{i}{\hbar}p'(x-x')} =$$

נעשה טריק מתמטי ונחשב במקום זה את האינטגרל הבא:

$$= \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} dp' \frac{\partial}{\partial x}\frac{\hbar}{i} e^{\frac{i}{\hbar}p'(x-x')} = -\frac{i}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_{-\infty}^{\infty} \hbar dk' e^{ik'(x-x')} =$$

(השתמשנו ב-$p/\hbar = k$) בתוך האינטגרל כתובה ההגדרה של δ (עד כדי $\hbar$):

$$= -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\delta(x-x') =$$

קיבלנו שאיבר המטריצה של התנע בהצגת המקום נראה כמו הנגזרת לפי המקום של פונ' דלתא, שזו נגזרת של פונקציונל. כדי להפעיל את איבר המטריצה הזה על איזושהי פונ' צריך להפעיל אותו בתור פונקציונל – לקחת אותו לתוך אינטגרל, להכפיל באיזושהי פונ' ולעשות את האינטגרל.

נשים לב שעשינו בחירה לפי מי לגזור. באותה מידה יכולנו לגזור לפי x' ואז היינו מקבלים עוד הצגה:

$$= i\hbar\frac{\partial}{\partial x'}\delta(x-x')$$

הדלתא סימטרית, אבל כשהחלפנו בין x ל-x' יצא סימן מינוס. נשים לב שמבחינה פיזיקלית זה משהו שיכולנו לצפות לו – בגלל שאנחנו מצפים שהאופרטור הזה יהיה הרמיטי, אנחנו מצפים שהוא יהיה שווה לצמוד ההרמיטי שלו. צמוד הרמיטי משמעותו להחליף x ב-x' ולהציד קומפלקסית, ובהצמדה i – הפך ל-i.

12 שיעור 12 – 8.5.18

12.1 הפעלות שונות של אופרטור התנע ושל אופרטור המקום

12.1.1 הפעלת אופרטור התנע על מצב בהצגת המקום

בשיעור הקודם ראינו:

$$\langle x|P|x'\rangle = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\delta(x-x') = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x'}\delta(x-x')$$

ואמרנו שזה ביטוי של ההרמיטיות של האופרטור. אמרנו גם ש-δ היא פונקציונל, אז יש כאן נגזרת של פונקציונל.

ננסה עכשיו להבין מה קורה כאשר אופרטור התנע עובד על מצב בהצגת המקום:

$$P[\psi(x)] = \langle x|P|\psi\rangle = \langle x|P\mathbb{1}|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx'\langle x|P|x'\rangle\langle x'|\psi\rangle = i\hbar\int_{-\infty}^{\infty} dx'\left[\frac{\partial}{\partial x'}\delta(\mathrm{x}-\mathrm{x}')\right]\psi(x') =$$

נפתור ע"י אינטגרציה בחלקים:

$$= \underbrace{i\hbar[\delta(x-x')\psi(x')]_{-\infty}^{\infty}}_{=0} - i\hbar\int_{-\infty}^{\infty} dx'\delta(x-x')\frac{d\psi(x')}{dx'} = -i\hbar\frac{d\psi(x)}{dx}$$

קיבלנו שהמשמעות של להפעיל את אופרטור התנע על מצב בהצגת המקום היא להכפיל אותו ב-$-i\hbar$ ולגזור לפי x.

נבדוק מה קורה כשמפעילים את אופרטור התנע על אחד המ"ע שלו, אבל כשהוא מוצג בהצגת המקום. לפי מה שעכשיו ראינו:

$$\langle x|P|p\rangle = -\frac{i\hbar}{\sqrt{2\pi\hbar}}\frac{d}{dx}e^{\frac{i}{\hbar}px} = \frac{p}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{\frac{i}{\hbar}px} = p\langle x|p\rangle$$

הפעלנו את אופרטור התנע של מ"ע של תנע, וקיבלנו את המ"ע הזה מוכפל ב-p, כמו שציפינו.

12.1.2 הפעלת אופרטור המקום על מצב כללי בהצגת התנע

נתחיל שוב מהפעלה של אופרטור המקום על מ"ע של התנע בהצגת התנע, כלומר איך אופרטור המקום ייראה בהצגת התנע. בדומה למה שעשינו עבור התנע:

$$\langle p|X|p'\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial p}\delta(p-p')$$

ואם נרצה להפעיל את אופרטור המקום על מצב כללי בהצגת התנע:

$$\langle p|X|\psi\rangle = i\hbar\frac{d\tilde{\psi}(p)}{dp}$$

יש סימטריה בין x ל-p עד כדי מינוס, שנובע מזה שמטריצת המעבר בשני הכיוונים היא עם i בסימן שונה.

הפעלה של אופרטור התנע על מצב בהצגת המקום היא גזירה שלו. אמרנו שהפעלה של אופרטור המקום לא שומרת על הווקטור בתוך L^2 (ראינו את הלורנציאן בתור דוגמא נגדית), אבל לעומת זאת הפעלה של אופרטור התנע כן שומרת עליו ב-L^2 כל עוד הפונ' מתנהגת יפה (רציפה, גזירה וכו').

12.2 המשמעות הפיזיקלית מצבי התנע

כמו שאמרנו, מצבי התנע לא שייכים ל-L^2, אבל אמרנו בשיעור שעבר שמצבים עצמיים בעולם הפיזיקלי האמיתי כן שייכים ל-L^2. נתנו נקודת התייחסות של רזולוציה של מכשיר המדידה למה זה מצב פיזיקלי (אם אנחנו לא יכולים למדוד

ברזולוציה אינסופית אנחנו לא יכולים לצור מצב בדיוק אינסופי). עכשיו נרצה לעשות את אותו הדיון על תנע, ונרצה לטעון שאנחנו לא יכולים לצור מצב עם דיוק אינסופי בתנע בגלל מכשיר המדידה.

המגבלה שתהיה הפעם לא תהיה הרזולוציה המרחבית של המכשיר, אלא מהגודל הסופי של המכשיר או המעבדה. המקום שבו אנחנו מבצעים את המדידה אף פעם לא יהיה כל היקום, ונראה שכל מעבדה או מכשיר מדידה בגודל סופי ייתנו אי־וודאות בתנע. מזה נוכל לקבל מסקנה בדומה לשיעור שעבר: במצבים פיזיקליים תמיד תהיה אי־וודאות בתנע, והם תמיד יהיו ב-L^2.

כדי להראות את זה, אנחנו מעוניינים לדגום פונ' מתנדנדת $\psi(x)$, וללמוד ממנה על תדר הנדנוד שלה, שהוא יילמד אותנו על התנע. נשווה את הפונ' הזאת לכל מיני תדרים, נכפיל אותה בכל מיני תדרים, ונחפש התאמות. למעשה, מה שאנחנו עושים זה טרנספורם פורייה – טרנספורם פורייה משמעותו לשאול מה התדרים הרלוונטיים בפונקציה, והמשמעות מבחינתנו יהיה למדוד את התנע שהפונ' הזאת נושאת. מה שנמדוד הוא:

$$\tilde{\psi}(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{?}^{?}dxe^{-ikx}\psi(x)$$

נרצה עכשיו להגביל את גודל המעבדה, שהמשמעות היא שהאינטגרל לא יילך ממינוס אינסוף עד אינסוף, אלא בתוך תחום סופי:

$$\tilde{\psi}_L(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-L}^{L}dxe^{-ikx}\psi(x)$$

עכשיו לא מדדנו בדיוק את התמרת הפורייה, אלא את ההתמרה עם הגבלה של מכשיר המדידה בגודל $2L$.

בשביל להסיק מידע על התדרים מהפונ' הזו, נמיר את הגבול הסופי בפונ' המרובעת:

$$\tilde{\psi}_L(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-L}^{L}dxe^{-ikx}\psi(x)=\tilde{\psi}_L(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}dx\,e^{-ikx}rect(x,2L)\psi(x)=$$

נשתמש בהתמרת הפורייה של פונ' מרובעת, שנותנת סינק $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}dxe^{ikx}rect(x,2L)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2}{k}\sin(kL)$, וכן בהתמרה של ψ שאנחנו כבר מכירים, ונציב אותם באינטגרל שלנו:

$$\begin{aligned}
&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}dxe^{-ikx}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dk'e^{ik'x}\frac{2}{k'}\sin(k'L)\int_{-\infty}^{\infty}dk''e^{ik''x}\tilde{\psi}(k'')\\
&=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}dx\int_{-\infty}^{\infty}dk'\frac{2}{k'}\sin(k'L)\int_{-\infty}^{\infty}dk''e^{i(k''+k'-k)x}\tilde{\psi}(k'')\\
&=\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dk'\frac{2}{k'}\sin(k'L)\int_{-\infty}^{\infty}dk''\delta(k''+k'-k)\tilde{\psi}(k'')\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}dk'\frac{1}{\pi k'}\sin(k'L)\,\tilde{\psi}(k-k')
\end{aligned}$$

הפונ' שדגמנו היא הפונ' שאנחנו מעוניינים בה ($\tilde{\psi}$ ממינוס אינסוף עד אינסוף) כשהפונ' הזאת היא בקונבולוציה עם sinc. כדי ש-$\tilde{\psi}_L=\tilde{\psi}$ היינו רוצים שהפונקציה תהיה דלתא, כי אז היינו דוגמים כל תנע בדיוק כמו שצריך. בגלל L, פונ' הדגימה שלנו היא פונ' יותר רחבה מדלתא, עם רוחב של $1/L$. כש-$L\to\infty$, הפונ' הזאת תלך לדלתא. כשהמעבדה סופית נקבל מיצוע – לדגימה יש משקלים רחבים יותר, ולכן נקבל אי־וודאות, כי כל תדר ממצעים עם הערכים השכנים שלו.

12.3 אי־הוודאות של מקום ותנע של חבילת גלים

אם פונ' בהצגת המקום שייכת ל-L^2, גם אותו מצב בהצגת התנע יהיה שייך ל-L^2, ניתן לנרמול. זו תוצאה של פרסבל – אם קיים אורך סופי לאיזושהו פונ' הוא אות אורך בכל הצגה, אז בפרט במקום והתנע. הדבר הזה מאפשר לנו לדבר

עכשיו על חלקיקים שנמצאים בסופרפוזיציה של מקום בתור חבילות גלים. נוכל לחשוב על $\psi(x)$ שמתאר פונ' בתור חבילת גלים (למרות שהאמפליטודות יהיו מרוכבות).

נראה לחקור פונ' אחת נפוצה – גאוסיין (מנורמל):

$$\langle x|\psi\rangle = \psi(x) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/4}} e^{\frac{i}{\hbar}p_0 x} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4\sigma^2}}$$

σ היא רוחב חבילת הגלים, $e^{\frac{i}{\hbar}p_0 x}$ פקטור מרוכב שנראה את המשמעות שלו בהמשך, $(2\pi\sigma^2)^{-1/4}$ קבוע הנרמול ב-L^2.

12.3.1 מיקום ממוצע ושונות של חבילת גלים

נחשב את המיקום הממוצע, שהוא ערך התצפית של אופרטור המקום:

$$\langle X\rangle = \langle\psi|X|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \psi^*(x) x \psi(x) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, x e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}} =$$

נחליף משתנים $x' = x - x_0$:

$$= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} dx' (x' + x_0) e^{-\frac{x'^2}{2\sigma^2}} =$$

האקספוננט סימטרי ו-x' אנטי־סימטרי, לכן המכפלה אנטי־סימטרית והאינטגרל של האיבר הזה יתאפס. נשארנו רק עם הפונ' הסימטרית $e^{-x'^2/2\sigma^2}$. אבל זה משאיר אותנו בדיוק עם אינטגרל הנרמול של הגאוסיין, לכן נקבל פשוט:

$$\langle X\rangle = x_0$$

קיבלנו שהמקום הממוצע שנמצא בו את החלקיק הוא x_0, מרכז הגאוסיין.

נשאל מה אי־הוודאות במציאת החלקיק. בשביל זה צריך לחשב את:

$$\langle X^2\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \psi^*(x) x^2 \psi(x)$$
$$= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, x^2 e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}} \underset{x-x_0}{=} \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(x'^2 + 2x'x_0 + x_0^2\right) e^{-\frac{x'^2}{2\sigma^2}} =$$

האינטגרל האמצעי יורד בגלל אנטי־סימטריה, נשאר רק עם:

$$= x_0^2 + \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} dx' x'^2 e^{-\frac{x'^2}{2\sigma^2}} = x_0^2 + \sigma^2$$

(אפשר לפתור את זה בחלקים, אנחנו פשוט לקחנו את התשובה)

עכשיו נסתכל על השונות:

$$\sigma_x = \sqrt{\langle X^2\rangle - (\langle X\rangle)^2} = \sigma$$

קיבלנו שהשונות במציאת המקום של החלקיק היא הסיגמא של הגאוסיין של חבילת הגלים.

12.3.2 הצגת התנע של המצב

אנחנו מעוניינים בהצגת התנע:

$$\langle p|\psi\rangle = \tilde{\psi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\frac{i}{\hbar}px}\psi(x)$$

נציב את הגאוסיין:

$$\tilde{\psi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/4}}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\frac{i}{\hbar}px}e^{\frac{i}{\hbar}p_0x}e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4\sigma^2}} = \frac{1}{(8\pi^3\hbar^2\sigma^2)^{1/4}}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\frac{i}{\hbar}(p-p_0)x}e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4\sigma^2}}$$

נעשה את ההחלפה $x' = x - x_0$:

$$= \frac{1}{(8\pi^3\hbar^2\sigma^2)^{1/4}}e^{-\frac{i}{\hbar}(p-p_0)x_0}\int_{-\infty}^{\infty} dx'\, e^{-\frac{i}{\hbar}(p-p_0)x'}e^{-\frac{x'^2}{4\sigma^2}} =$$

נעשה השלמה לריבוע:

$$= \frac{1}{(8\pi^3\hbar^2\sigma^2)^{1/4}}e^{-\frac{i}{\hbar}(p-p_0)x_0}\int_{-\infty}^{\infty} dx'\, e^{\frac{1}{4\sigma^2}\left[x'+\frac{2i\sigma^2}{\hbar}(p-p_0)\right]^2-\frac{\sigma^2}{\hbar^2}(p-p_0)^2}$$

$$= \frac{(16\pi^2\sigma^4)^{1/4}}{(8\pi^3\hbar^2\sigma^2)^{1/4}}e^{-\frac{i}{\hbar}(p-p_0)x_0}e^{-\frac{\sigma^2}{\hbar^2}(p-p_0)^2} = \left(\frac{2\sigma^2}{\pi\hbar^2}\right)^{1/4}e^{\frac{i}{\hbar}p_0x_0}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}p\mathrm{x}_0}\mathrm{e}^{-\frac{\sigma^2}{\hbar}(p-\mathrm{p}_0)^2}$$

קיבלנו גאוסיין ב-p.

אם יש לנו הצגה שהיא גאוסיין ובהצגה הזאת אנחנו רוצים לדעת את ערך התצפית של ההצגה (נגיד ערך התצפית של התנע בהצגת התנע) לא צריך לחשב שוב מה שעשינו קודם – יש כאן גאוסיין מנורמל, ואנחנו יודעים שערך התצפית של התנע ייצא:

$$\langle P\rangle = p_0$$

כי יש $p - p_0$ בתוך הגאוסיין.

עכשיו ברור לנו שהאיבר $e^{\frac{i}{\hbar}p_0x}$ מהגאוסיין המקורי הוא זה שגרם לתנע של חבילת הגלים. החבילה הזאת נעה באיזשהו תנע, שנובע מהאקספוננט הזה. אפשר לחשוב על זה שהאופרטור הזה לקח חבילה שאין לה תנע (תנע אפס), וההכפלה בה נתנה תנע.

באותו אופן, אפשר לחשב גם לפי הרוחב של חבילת הגלים את:

$$\langle P^2\rangle = p_0^2 + \frac{\hbar^2}{4\sigma^2}$$

ולכן סטיית התקן:

$$\sigma_p = \sqrt{\langle P^2\rangle - (\langle P\rangle)^2} = \frac{\hbar}{2\sigma}$$

אנחנו רואים שאי־הוודאות בתנע היא הופכית לאי־הוודאות במקום עד כדי פקטור.

אפשר גם לשים לב שכמו ש-x ו-p מחליפים אחד את השני בצורה כמעט סימטרית עד כדי פלוס ומינוס, גם לחבילת הגלים בהצגת p מופיע איבר $\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}p\mathrm{x}_0}$ כמו שבמקורי הופיע $e^{\frac{i}{\hbar}p_0x}$. בהצגת התנע, איבר פאזה ב-p הוא הזזה ב-x, מזיז את חבילת הגלים שתהיה ממורכזת ב-x_0, כמו שהאיבר הדומה בגאוסיין המקורי נתן לנו הזזה (תוספת) בתנע.

12.3.3 עקרון אי־הוודאות מקום-תנע

נסתכל על:

$$\sigma_x\sigma_p = \sigma\frac{\hbar}{2\sigma} = \frac{\hbar}{2}$$

זה הערך עבור החבילה הספציפית הזאת של גלים. נשתמש עכשיו באי־הוודאות של הייזנברג כדי לחסום את זה באופן כללי. בשביל זה צריך לחשב את ערך התצפית של יחס החילוף הבא:

$$\langle[X,P]\rangle = \langle XP - PX\rangle = -i\hbar\int_{-\infty}^{\infty} dx\,\psi^*(x)\left[x\frac{d}{dx} - \frac{d}{dx}x\right]\psi(x) =$$

מה שכתבנו בסוגריים המרובעים זה הצבה של מה שעושים האופרטורים ל-$\psi(x)$. נפעיל את האופרטור שבסוגריים ונקבל:

$$= -i\hbar\int_{-\infty}^{\infty} dx\,\psi^*(x)[x\psi'(x) - \psi(x) - x\psi'(x)] = i\hbar\int_{-\infty}^{\infty} dx\,\psi^*(x)\psi(x) = i\hbar$$

נציב בהייזנברג:

$$\boxed{\sigma_x\sigma_p \geq \frac{|\langle XP - PX\rangle|}{2} = \frac{\hbar}{2}}$$

זה נכון לכל חבילת גלים. ספציפית בגאוסיין, נקבל את הגבול, הערך הכי נמוך שאפשר לקבל. נאמר שחבילת גלים גאוסיינית מרווה את אי־הוודאות של הייזנברג. היא נותנת לנו את הוודאות הכי גדולה פיזיקלית שבה ניתן למצוא את שני הערכים, גם את x וגם את p.

אפשר עכשיו לחשוב על זה באמצעות פורייה. ככל שפונקציה יותר צרה ב-x, התמרת פורייה שלה יותר רחבה (ולהפך). הגבול הוא פונ' דלתא ופונ' קבועה – דלתא היא הפונ' הכי וודאית שאפשר, והתמרת פורייה שלה נותנת אי וודאות לחלוטין, כל ערך אפשרי. זה מסביר את מה שהגענו אליו בשיעור שעבר עם המצבים העצמיים של מקום ותנע – אם המקום מוגדר היטב, אם אין לנו אי־וודאות במקום, התנע לא וודאי באופן אין סופי, ועכשיו אנחנו מבינים שזה כדי לקיים את אי־הוודאות של הייזנברג.

הערה – אי־הוודאות של הייזנברג נובעת מיחסים בין אופרטורים במרחב הילברט, לא מיחסי ההצמדה של פורייה. היא דבר יותר כללי, ו-x,p זה דוגמא פרטית.

הערה 2 – אפשר להוכיח שלא רק שחבילת גלים גאוסיינית מרווה את אי־הוודאות של אייזנברג, היא החבילה היחידה שמרווה את אי־הוודאות של הייזנברג.

12.3.4 חישוב ערך התצפית של אופטור התנע בהצגת המקום

$$\langle P\rangle = \frac{\hbar}{i}\int_{-\infty}^{\infty} dx\,\psi^*(x)\frac{d}{dx}\psi(x) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/2}}\frac{\hbar}{i}\int_{-\infty}^{\infty} dx\left[\frac{i}{\hbar}p_0 - \frac{2(x-x_0)}{4\sigma^2}\right]e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}}$$

האינטגרל השני הוא אנטי־סימטרי, לכן הוא לא ייתרום. נשארנו רק עם אינטגרל הנרמול כפול קבוע, אז נקבל p_0, כמובן.

$$\langle P^2\rangle = -\hbar^2\int_{-\infty}^{\infty} dx\,\psi^*(x)\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) = \frac{\hbar^2}{(2\pi\sigma^2)^{1/2}}\int_{-\infty}^{\infty} dx\left[\left(\frac{i}{\hbar}p_0 - \frac{2(x-x_0)}{4\sigma^2}\right)^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\right]e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}} =$$

יש כאן ארבעה אינטגרלים. הראשון ייתן p_0^2, הרביעי $\frac{\hbar^2}{2\sigma^2}$, השני (האיבר המעורב) אנטי־סימטרי ונשארנו עם:

$$= p_0^2 + \frac{\hbar^2}{2\sigma^2} - \frac{\hbar^2}{(2\pi\sigma^2)^{1/2}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x-x_0)^2}{4\sigma^4}e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}} = p_0^2 + \frac{\hbar^2}{2\sigma^2} - \frac{\hbar^2}{4\sigma^4}\sigma^2 = p_0^2 + \frac{\hbar^2}{4\sigma^2}$$

כמו קודם.

13 שיעור 13 – 13.5.18

13.1 כללי הקוונטיזציה של גדלים פיזיקליים

נתון גודל פיזיקלי שמעניין אותנו, ואנחנו רוצים לשאול שאלות על הגודל הזה במערכת קוונטית. עד עכשיו אנחנו יודעים או לטפל בגדלים באופן הכי כללי או לטפל במקום ובתנע. היינו רוצים לטפל גם בגדלים פיזיקליים נוספים, ובשביל זה נצטרך לכתוב את האופרטורים שלהם.

אם הגודל הפיזיקלי שמעניין אותנו ניתן לכתיבה קלאסית בעזרת המקום והתנע, כללי הקוונטיזציה ילמדו אותנו איך לכתוב את האופרטור המתאים לגודל הפיזיקלי. זה יכסה כמעט את כל המקרים (למעט מקרים מיוחדים כמו ספין, אבל זה כבר בקוונטים 2).

<u>כלל הקוונטיזציה הראשון</u> – בהנתן גודל פיזיקלי קלאסי $f(x,p)$, האופרטור הקוונטי ששייך לו יקיים $F=F(X,P)$, כש-X,P הם האופרטורים של המיקום והתנע.

נשים לב שגדלים פיזיקליים נותנים לנו ערכים ממשיים, לכן באמת נקבל F הרמיטית, כנרש.

דוג'1: אנרגיה קינטית:

$$E_k=\frac{p^2}{2m}\xrightarrow{\text{קוונטיזציה}}K=\frac{P^2}{2m}$$

דוג' 2: אנרגיה פוט' של מתנד הרמוני:

$$E_p=\frac{1}{2}kx^2\xrightarrow{\text{קוונטיזציה}}V=\frac{1}{2}kX^2$$

אם אנחנו מסתכלים על גודל כמו px אנחנו בבעיה. האם נוכל לקוונטט אותו בתור PX? נשים לב שזו בעיה – אם אנחנו מקוונטטים ככה יכולנו גם באותה מידה לבחור את XP, ואם X,P לא חליפיים זה אפילו לא אותו האופרטור. יותר מזה, זה לא הרמיטי, כי $(XP)^\dagger=P^\dagger X^\dagger=PX\neq XP$. זה אומר שהאופרטור הזה גם לא בר־מדידה, הע"ע שלו לא יהיו ממשיים.

<u>כלל הקוונטיזציה השני</u> – נבחר את האופרטור ע"י סימטריזציה של האפשרויות כך שיהיה הרמיטי.

דוג': הקוונטיזציה של px תהיה:

$$px\xrightarrow{\text{קוונטיזציה}}\frac{1}{2}(PX+XP)$$

בשביל לבדוק שהצלחנו נבדוק שהוא הרמיטי ונבדוק שגם הכיוון ההפוך עובד (ואכן במקרה הזה $\frac{1}{2}(px+xp)=px$).

יש מקרים שבהם מפעילים את הכלל השני ומוצאים שתי תשובות סימטריות והרמיטיות, ושתיהן נכונות. במקרה כזה אפשר לבדוק ולהראות שמדובר על אותו האופרטור.

נבדוק את המקרה $F=f(X)$, ונשאל מה תהיה ההפעלה של F על ווקטור בהצגת המקום:

$$F[\psi(x)]=\langle x|F|\psi\rangle=\langle x|\sum_n X^n|\psi\rangle\overset{X|\psi\rangle=x|\psi\rangle}{=}\langle x|\sum_n x^n|\psi\rangle=f(x)\psi(x)$$

באופן דומה, אם $F=f(P)$ זה כמו להפעיל את האופרטור:

$$F[\psi(x)]=f\left(\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}\right)\psi(x)$$

ואז משתמשים בנגזרת כאילו היא פרמטר של הפונ'.

13.1.1 קוונטיזציה של המילטוניאן כללי

נרצה עכשיו לעשות את זה עבור המילטוניאנים במקרים שונים. מה שמשתנה בין ההמילטוניאנים זה האנרגיה הפוטנציאלית. נקח חלקיק יחיד במסה m. ההמילטוניאן הקלאסי הוא:

$$H_{cl} = E_k + E_p = \frac{p^2}{2m} + V(x)$$

נקווטט אותו לפי הכללים:

$$H_{qm} = \frac{P^2}{2m} + V(X)$$

נשים לב ש-H_{qm} הוא אופרטור בעוד H_{cl} הוא מספר. נוכל להציג את ההמילטוניאן שלנו בהצגת המקום ובהצגת התנע.

בהצגת המקום –

$$\langle x|H|\psi\rangle = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(X)\right]\psi(x)$$

בהצגת התנע –

$$\langle p|H|\psi\rangle = \left[\frac{p^2}{2m} + V\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial p}\right)\right]\tilde{\psi}(p)$$

13.2 משפט אהרנפסט

לקראת סוף הדיון על התפתחות של מערכת בזמן חישבנו את ההתפתחות בזמן של ערך תצפית של אופרטור, וקיבלנו שאם האופרטור לא תלוי בזמן האיבר החשוב זה יחס החילוף שלו עם ההמילטוניאן. נרצה עכשיו לחשב התפתחות בזמן של ערכי התצפית של אופרטורי המקום והתנע. הם כמובן לא משתנים בזמן, לכן מה שמשנה זה יחס החילוף שלהם עם ההמילטוניאן:

$$\frac{d}{dt}\langle X\rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle[X,H]\rangle, \qquad \frac{d}{dt}\langle P\rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle[P,H]\rangle$$

אמרנו שפונקציה של אופרטור מתחלפת עם האופרטור, לכן $\langle X\rangle$ ייתחלף עם החלק הפוטנציאלי של האופרטור ו-$\langle P\rangle$ עם הקינטי, ונשאר עם:

$$\frac{d}{dt}\langle X\rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle[X,H]\rangle = \frac{1}{i\hbar}\left\langle\left[X,\frac{P^2}{2m}\right]\right\rangle, \qquad \frac{d}{dt}\langle P\rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle[P,H]\rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle[P,V(X)]\rangle$$

נחשב את יחסי החילוף האלה. הראשון –

$$\left[X,\frac{P^2}{2m}\right] = \frac{1}{2m}(XPP - PPX)$$

כדי לפתור את זה נשתמש ביחס החילוף כדי להחליף את הסדר של XP בהתחלה ובסוף של הביטוי (נזכור שחישבנו $[X,P] = i\hbar$):

$$\left[X,\frac{P^2}{2m}\right] = \frac{1}{2m}(XPP - PPX) = \frac{1}{2m}[(PX + i\hbar)P - P(XP - i\hbar)] = \frac{i\hbar}{m}P$$

השני – נשתמש בנוסחא (שנוכיח בתרגיל או בתרגול), ואז שוב ביחס החילוף של X, P:

$$[P, V(X)] = [P, X]V'(X) = -i\hbar V'(X)$$

(הערה: בשביל שזה יהיה נכון צריך ש-$P, V(X)$ יתחלפו עם אופרטור יחס החילוף שלהם)

נציב את כל מה שמצאנו חזרה:

$$\frac{d}{dt}\langle X\rangle = \frac{1}{m}\langle P\rangle$$

$$\frac{d}{dt}\langle P\rangle = -\langle V'(X)\rangle$$

נשים לב שמבחינת הצורה זה מאוד דומה למשוואות המילטון-יעקבי (הראשון הוא כמו $\left\langle\frac{\partial H}{\partial P}\right\rangle$ והשני $-\left\langle\frac{\partial H}{\partial X}\right\rangle$). נקח את המשוואה הראשונה, נגזור אותה בזמן ונציב בשנייה:

$$m\frac{d^2}{dt^2}\langle X\rangle = -\langle V'(X)\rangle$$

וזה כבר בכלל דומה לחוק השני של ניוטון. מה קורה כאן?

כשהתחלנו לדבר על תורת הקוונטים אפשרנו מספר מצבים פיזיקליים בו זמנית, לדוגמא מספר מקומות בו זמנית. כאשר זה מתפתח בזמן, זה אומר שקיימים מספר מסלולים אפשריים. כלומר, לכל חלקיק אנחנו צריכים לתאר אותו נע במספר מסלולים, וכל עוד לא מדדנו אנחנו לא יודעים איפה הוא. זה אומר שזנחנו את הרעיון הקלאסי של מסלול – אין משוואות מסלול, מה שיש זה משוואות מצב, והמצב מתאר מספר מסלולים אפשריים, מספר אפשרויות.

המשוואות של ניוטון ושל המילטון-יעקבי הם מסלולים. כאן אנחנו רואים משוואות מסלול על ערך התצפית. זה גורם לנו לחשוד שערכי תצפית מתנהגים מאוד דומה להתנהגות הקלאסית.

מתי הם מתנהגים קלאסית יפה ומתי לא? אם חבילת הגלים מהשיעור שעבר מאוד ממוקמת (יחסית לשאר הגדלים) זה אומר שיש לנו חלקיק שיש לו מקום יחסית מוגדר, כלומר הוא יחסית קלאסי, ואז המשוואות האלה יהיו נכונות בגבול.

מתי המשוואות האלה לא משחזרות את התוצאה הקלאסית? האיבר שעושה את ההבדל הוא $-\langle V'(X)\rangle$. כדי שהן יהיו קלאסיות, מה שאנחנו צריכים שהאיבר הזה (שהוא הכח) יהיה על מרכז המסה כלומר $V'(\langle x\rangle)$. אם היינו מקבלים כזה דבר ההתנהגות הייתה בדיוק כמו של ניוטון ושל המילטון-יעקבי. אבל אנחנו קיבלנו את ערך התצפית של הכח, אז אנחנו בעצם לא שואלים מה הכח על מרכז החלקיק, אלא מה ממוצע הכוחות על כל המיקומים שהחלקיק נמצא בהם. אם החלקיק מספיק לא ממוקם הערכים האלה שונים, ואז נקבל משוואות מסלול שונות של ערכי תצפית.

13.3 משוואת שרדינגר בהצגת המקום

13.4 משוואת שרדינגר התלויה בזמן

אנחנו מכירים כבר את משוואת שרדינגר התלויה־בזמן:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle = H|\psi\rangle$$

נתעניין ספציפית בהצגת המקום. בשביל זה נכפיל כל צד של המשוואה בווקטור המקום:

$$\left\langle x\left|i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right|\psi(t)\right\rangle = \langle x|H|\psi(t)\rangle$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t)=H[\psi(x)]$$

$$\Rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t)=\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+V(X)\right]\psi(x,t)$$

קיבלנו מד"ר מסדר ראשון בזמן ומסדר שני במקום. זו סוג של משוואת גלים (ובעצם זו הסיבה ש-ψ נקראית פונקציית גל).

אפשר היה גם לכתוב את זה בהצגת התנע:

$$\left\langle p\left|i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right|\psi(t)\right\rangle=\langle p|H|\psi(t)\rangle$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\psi}(p,t)=\left[\frac{p^2}{2m}+V\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial p}\right)\right]\tilde{\psi}(p,t)$$

משוואת שרדינגר בהצגת המקום ומשוואת שרדינגר בהצגת התנע מהוות טרנספורם פורייה אחת של השנייה. נכתוב את הצגת התנע גם בתור פורייה של הצגת המקום. את האגף השמאלי נקבל מיידית, כי הנגזרת של הזמן וכל הקבועים יצאו החוצה. באגף ימין אם נתמיר את האיבר הראשון (נגזרת שנייה) נקבל גם מיידית את P^2 (הנגזרת השנייה תהיה שקולה להכפלה של P בריבוע).

אבל באיבר השני נקבל משהו אחר, אז זה אומר שאנחנו יכולים לקבל את $V\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial p}\right)\tilde{\psi}(p,t)$ מטרנספורם פורייה של V שעובד על ψ. נשווה את שני אלה, כשאת הטרנספורם אנחנו מחשבים בעזרת משפט הקונבולוציה:

$$V\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial p}\right)\tilde{\psi}(p,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty}dp'\tilde{V}(p-p')\tilde{\psi}(p',t)$$

לפעמים זה יהיה נח.

13.5 ההתפתחות בזמן של חלקיק חופשי

13.5.1 פתרון כללי

הכוונה בחלקיק חופשי זה שהפוטנציאל שלו קבוע בכל מקום, ובלי הגבלת הכלליות אפשר לאמר $V=0$.

נשים לב שיהיה יותר קל לפתור בהצגת התנע במקרה הזה:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\psi}(p,t)=\frac{p^2}{2m}\tilde{\psi}(p,t)$$

הפתרון הכללי:

$$\tilde{\psi}(p,t)=e^{-i\frac{p^2}{2m\hbar}t}\cdot\tilde{\psi}(p,t=0)$$

אם נעשה לזה התמרת פורייה נקבל את הפתרון בבסיס המקום:

$$\psi(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty}dp\,e^{\frac{i}{\hbar}\left(px-\frac{p^2}{2m}t\right)}\cdot\tilde{\psi}(p,t=0)$$

13.5.2 ערך התצפית של המקום והתנע בזמן עבור חבילת גלים

נסתכל על מקרה של חבילת גלים כללית, ונכתוב את ערך התצפית של המקום ברגע ההתחלתי. נעשה את זה בהצגת המקום:

$$\langle X\rangle(t=0)=i\hbar\int_{-\infty}^{\infty}dp\tilde{\psi}^*(p,0)\frac{\partial}{\partial p}\tilde{\psi}(p,0)$$

נרצה לקדם את זה בזמן. נעשה את זה ונציב את הפתרון הכללי שמצאנו קודם:

$$\begin{aligned}\langle X\rangle(t)&=i\hbar\int_{-\infty}^{\infty}dp\tilde{\psi}^*(p,t)\frac{\partial}{\partial p}\tilde{\psi}(p,t)=i\hbar\int_{-\infty}^{\infty}dp\left(e^{i\frac{p^2}{2m\hbar}t}\tilde{\psi}^*(p,0)\right)\frac{\partial}{\partial p}\left(e^{-i\frac{p^2}{2m\hbar}t}\tilde{\psi}(p,0)\right)\\&=i\hbar\int_{-\infty}^{\infty}dp\left(e^{i\frac{p^2}{2m\hbar}t}\tilde{\psi}^*(p,0)\right)\left(e^{-i\frac{p^2}{2m\hbar}t}\frac{d}{dp}\tilde{\psi}(p,0)-i\frac{pt}{m\hbar}e^{-i\frac{p^2}{2m\hbar}t}\tilde{\psi}(p,0)\right)\\&=i\hbar\int_{-\infty}^{\infty}dp\tilde{\psi}^*(p,0)\frac{d}{dp}\tilde{\psi}(p,0)+\frac{t}{m}\int_{-\infty}^{\infty}dp\tilde{\psi}^*(p,0)p\tilde{\psi}(p,0)\\&=\langle X\rangle(0)+\frac{\langle P\rangle(0)}{m}t\end{aligned}$$

קיבלנו משוואה עבור מרכז המסה שהיא המשוואה הקלאסית של תנועה של חלקיק כשהפוטנציאל קבוע (כי זה כמו $x=x+vt$). מרכז המסה מתנהג קלאסית לחלוטין. זה לא מפתיע אותנו, כי במשפט אהרנפסט אמרנו שכדי שזה יהיה קלאסי לחלוטין אמרנו שהכח על המקום הממוצע יהיה שווה לממוצע הקלאסי על הכוחות על כל המקומות של החלקיק. אם הפוטנציאל קבוע אז הכוחות הן כולם אפס אז נקבל מה שצריך, לכן הערך הממוצע של המקום נע לגמרי לפי משוואות קלאסיות (אפשר גם היה לראות שהאיבר היחיד שהיה שונה קודם, V', מתאפס עכשיו).

אנחנו יכולים גם להסיק:

$$\langle P\rangle(t)=\langle P\rangle(0)$$

אמרנו שקבועים של תנועה זה גדלים שמתחלפים עם ההמילטוניאן. במקרה שלנו ההמילטוניאן פורפורציוני ל-P^2 ו-P^2 מתחלף עם P, אז התנע הוא גודל נשמר, והוא קבוע בזמן.

13.6 חבילת גלים גאוסיינית חופשית כתלות בזמן

גנקח את אותה החבילה שראינו בשיעור שעבר (עם פוטנציאל חופשי) ונשתמש בה כתנאי ההתחלה של הבעיה, ונראה איך זה מתקדם בזמן. אנחנו כבר יודעים שמרכז הכובד של החבילה ינוע במהירות קבועה, ומרכז התנע לא ישתנה.

את ערך התצפית אנחנו כבד יודעים, אז מה שמעניין אותנו עכשיו זה סטיות התקן. בשביל זה ניקח את $\tilde{\psi}(p,t=0)$. כשהזמן מתקדם זה רק צובר פאזה (לפי המשוואה שקיבלנו), אז המעטפת תשאר אותה מעטפת והיא רק תצבור פאזה מרוכבת. ככה היא נראית ב-p, עכשיו נתעניין איך היא נראית ב-x.

ב-x גם יש גאוסיין, אבל הפעם הוא לא רק צובר תוספת פאזה. בהצגה של המקום יש את האיבר $e^{-\frac{\sigma_0^2}{\hbar^2}p^2}$, כלומר הרוחב של הגאוסיין הוא פורפורציוני ל-$\hbar/\sigma_0$. אם נוסיף את האיבר של הפאזה נקבל $\exp\left[p\left(\frac{\sigma_0^2}{\hbar^2}+\frac{it}{2m\hbar}\right)\right]$, ולזה אנחנו צריכים לעשות התמרת פורייה כדי לקדם את זה בזמן. קיבלנו עכשיו גודל מדומה, והתמרת פורייה תעשה לו אותו הדבר שהיא עשתה קודם ל-$\frac{\sigma_0^2}{\hbar^2}$. מקודם היא נתנה $\frac{1}{4\sigma_0^2}$, ועכשיו המקדם יהיה $\left(\frac{1}{1+i\frac{\hbar t}{2m\sigma_0^2}}\right)+\frac{1}{4\sigma_0^2}$. קיבלנו גודל מרוכב לרוחב.

כדי להבין מה המשמעות של הגודל המרוכב, נחלק אותו לחלק ממשי וחלק מדומה:

$$\frac{1}{4\sigma_0^2}+\left(\frac{1}{1+i\frac{\hbar t}{2m\sigma_0^2}}\right)=\frac{1-i\frac{\hbar t}{2m\sigma_0^2}}{4\sigma_0^2\left[1+\left(\frac{\hbar t}{2m\sigma_0^2}\right)^2\right]}$$

החלק הממשי הוא הרוחב החדש של פונקציית הגל. החלק המדומה הוא איזושהיא פאזה (פאזה ריבועית, כי כל הביטוי הזה מוכפל ב-x^2). אנחנו מתעניינים בחלק הממשי, ברוחב.

אם קודם הייתה לנו חבילת גלים ברוחב σ_0, עכשיו אנחנו מקבלים $\sigma(t)=\sigma_0\sqrt{1+\left(\frac{\hbar t}{2m\sigma_0^2}\right)^2}$. זה אומר שככל שהזמן עובר, הרוחב של חבילת הגלים הולך וגדל. הגדילה היא היפרבולית.

חבילת הגלים הולכת ומתרחבת, היא עושה דיספרסיה. חבילת הגלים מכילה רכיבים שונים (שאפשר לחשוב עליהם כנעים במהירויות שונות), ולכן החבילה מתרחבת. עוד דרך לחשוב על זה היא ש-$E=\frac{p^2}{2m}$ הוא יחס דיספרסיה בין האנרגיה והתנע (בדומה לאלומה גאוסיינית שעושה דיפרקציה שמתנהגת כמו דיספרסיה מרחבית שהאיבר הראשון שלה הוא ריבועי במספר הגל).

כש-$\frac{\hbar t}{2m\sigma_0^2}=1$ החבילה גדלה פי $\sqrt{2}$ מרגע ההתחלה. זה נותן לנו זמן אופייני τ להתרחבות:

$$\tau=\frac{2m\sigma_0^2}{\hbar}$$

אפשר לשים לב שככל שחבילת הגלים צרה יותר הזמן הזה יהיה קצר יותר, היא מתרחבת מהר יותר (בדומה למה שקורה באלומה גאוסיינית).

14 שיעור 14 – 15.5.18

14.1 משוואת שרדינגר שאינה תלויה בזמן

בשיעור שעבר ראינו את משוואת שרדינגר התלויה בזמן, והשתמשנו בפתרונות שלה כדי לחקור חבילת גלים שמתפתחת בזמן. ראינו את משפט אהרנפסט, וראינו את העניין של התפתחות של חבילת גלים. היום נדבר על משוואת שרדינגר שאינה תלויה בזמן, ובמה נתמקד עד סוף הקורס.

את המשוואה עצמה כתבנו, ועכשיו אנחנו מעוניינים בהצגות המקום והתנע שלה. המשוואה האופרטורית הייתה משוואת ערכים עצמיים:

$$H|\psi_E\rangle = E\psi_E$$

בהצגת המקום נקבל:

$$\langle x|H|\psi_E\rangle = E\langle x|\psi_E\rangle$$

כבר ראינו איך עובד ההמילטוניאן על וקטור בהצגת המקום:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right]\psi_E(x) = E\psi_E(x)$$

זו משוואה דיפרנציאלית מסדר שני. נקרא לה משוואת שרדינגר שאינה תלויה בזמן. נסדר קצת אחרת:

$$\frac{\partial^2\psi_E(x)}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2}[E - V(x)]\psi_E(x) = 0$$

אנחנו יודעים שהפתרונות של מד"ר הן פונקציות, אבל מה המשמעות של המשוואה? המשוואה אומרת שזו ההתנהגות של חלקיק קוונטי בעל מסה m במימד אחד כשהוא נתון תחת פוטנציאל $V(x)$.

מה קוונטי פה? זו משוואה שקיבלנו ממשוואת ע"ע ומ"ע של ההמילטוניאן, לכן הפתרונות שלה הם מצבים עצמיים של ההמילטוניאן. לכן, אם נפתור את המשוואה הזאת נקבל את כל המצבים שהם מצבים עצמיים של ההמילטוניאן בהצגת המקום, את כל פונ' הגל.

למה שנרצה לעשות את זה? אנחנו כבר יודעים שההמילטוניאן בתורת הקוונטים נותן לנו את הדינמיקה בזמן, אילו גדלים נשמרים וכו'. המ"ע שלו הם מצבים עמידים אם ההמילטוניאן לא תלוי בזמן, ומעניין אותנו לראות מ"ע שונים בהצגת האנרגיה. בשורה התחתונה, ההמילטוניאן והמ"ע שלו מאוד מעניינים אותנו, והדרך לקבל את המ"ע זה מתוך המשוואה.

נשיב לב שמשוואת שרדינגר שתלויה בזמן נותנת לנו דינמיקה בזמן של מצב התחלתי. המשוואה שאינה תלויה בזמן מלמדת אותנו על המ"ע של ההמילטוניאן (שבעזרתם אנחנו גם יכולים לפתור דינמיקה בזמן, אבל גם לעשות עוד דברים).

מה יישתנה בין בעיות שונות שנפתור – $V(x)$. האנרגיה הקינטית תהיה אותו הדבר, רק הפוטנציאלית תשתנה, ונקבל כל פעם משוואה אחרת שנצטרך לפתור.

לא לכל ערך של אנרגיה יהיה פתרון למשוואה, ונראה את זה היום. יכול להיות שהתחום שבו יש אנרגיות שיש להן פתרון הוא תחום רציף, מה שייתן אינסוף מצבי אנרגיה, ולפעמים הוא בדיד ורק ערכים מאוד מסויימים של אנרגיה ייתנו פתרון.

נעיר שאמרנו שכל הע"ע של אופרטור נקראים הספקטרום של האופרטור. כאן, כל ערכי האנרגיה שאפשריים עבור פוטנציאל כלשהו נקראים הספקטרום של האנרגיה.

14.2 תכונות של משוואת שרדינגר שאינה תלויה בזמן

לפני שנפתור משוואות מסויימות, נלמד את הדברים הכי כלליים על המשוואה שלנו. דבר ראשון, נשים לב שאנחנו יכולים להפריד את הצדדים:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x} = \frac{2m}{\hbar^2}[V(x) - E]\psi$$

באגף שמאל זו הנגזרת השנייה של פונ' הגל. אנחנו יכולים כבר לדעת שכל עוד $V(x)$ רציף אז הנגזרת השנייה רציפה, ואז גם הנגזרת הראשונה והפונ' עצמה רציפות. אם V לא רציף הנגזרת השנייה תהיה לא רציפה.

נעשה אינטגרציה אחת לפי x למשוואה סביב קטע קטן $[x-\varepsilon, x+\varepsilon]$:

$$\left[\frac{\partial\psi}{\partial x}\right]_{x+\varepsilon} - \left[\frac{\partial\psi}{\partial x}\right]_{x-\varepsilon} = \frac{2m}{\hbar^2}\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} dx[V(x) - E]\psi(x)$$

<u>אם הפוטנציאל סופי</u> – נחלק למקרים לפי רציפות.

- אם הוא גם רציף: לפי משוואת שרדינגר הנגזרת השנייה רציפה, ולכן גם הנגזרת וגם הפונ' עצמה רציפות.
- אם הוא לא רציף: אז לפי משוואת שרדינגר גם הנגזרת השנייה לא תהיה רציפה. אולם, כיוון שהוא סופי, קפיצה בנגזרת השנייה תגרור שהנגזר הראשונה תהיה רציפה, ובהתאם גם הפונ' תהיה רציפה.

<u>אם הפוטנציאל אינסופי</u> – נחלק למקרים לפי סופיות האינטגרל באגף ימין.

- אם הוא סופי: לפי משוואת שרדינגר, בגלל שהפוטנציאל אינסופי הנגזרת השנייה לא תהיה מוגדרת. אולם, כיוון שהאינטגרל סופי, אפשר לראות מהמשוואה של האינטגרציה שעשינו שהנגזרת הראשונה כן תהיה מוגדרת ותהיה בה קפיצה (הקפיצה תהיה בהתאם לערך שהתקבל מהאינטגרציה), כלומר נגזרת ראשונה מוגדרת ולא רציפה. הפונ' עצמה כבר תהיה רציפה.
- אם הוא אינסופי: נראה בהמשך שבמקרה כזה (האינטגרל אינסופי על קטע), הפונקציה והנגזרות שלה צריכות להיות שוות כולם לאפס.

לסיכום –

	פוטנציאל סופי		פוטנציאל אינסופי	
	הפוטנציאל רציף	הפוטנציאל לא רציף	אינטגרל אינסופי סביב נקודה	אינטגרל סופי סביב נקודה
ψ''	רציף	לא רציף	מתאפס	לא מוגדר
ψ'	רציף	רציף	מתאפס	לא רציף
ψ	רציף	רציף	מתאפס	רציף

14.3 הנושאים הבאים: פתרון משוואת שרדינגר שאינה תלויה בזמן

14.4 פוטנציאל קבוע למקוטעין

נגביל את עצמנו עכשיו רק לפוטנציאלים כאלה. זה מקרה שבו הפוטנציאל הוא מהצורה שאם נחלק את התחום שלנו לקטעים, בכל קטע הפוטנציאל יהיה קבוע. בין הקטעים יכולות להיות קפיצות, מה שכבר אומר ש-V לא תהיה רציפה.

בשביל לפתור את זה, אנחנו צריכים לפתור עבור כל קטע. בכל קטע יתקיים (עבור $V = const$):

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x} = -\frac{2m}{\hbar^2}(E - V)\psi$$

את זה אנחנו כבר יודעים לפתור, והשוני בין הפתרונות יהיה רק רק לפי הסימן של הסוגריים. נקבל:

$$\psi_E(x)=\begin{cases}A_+e^{i\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E-V)}x}+A_-e^{-i\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E-V)}x}, & E>V\\ Ax+B, & E=V\\ A_+e^{\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V-E)}x}+A_-e^{-\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V-E)}x}, & E<V\end{cases}$$

נסמן:

$$E>V:\;\; k\equiv\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E-V)},\qquad E<V:\;\; \alpha\equiv\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V-E)}$$

כבר יש משהו ששווה לשים לב אליו: במקרה של $E>V$ קיבלנו גלים מתנדנדים וזה לא מפתיע אותנו, אבל המקרה השני יותר מפתיע. זה איזור שבו האנרגיה נמוכה מהפוטנציאל, ויש פתרון שהוא לא אפס. מה זה אומר? קלאסית, אין לזה משמעות – אם חלקיק קלאסי מגיע לאיזור שהאנרגיה נמוכה מהפוטנציאל שלו הוא לא יכול לעבור לאיזור שהפוטנציאל נמצא מעליו, הוא מוחזר (למשל חלקיק גבעה). חלקיק לא יכול לשהות במקום שבו הפוטנציאל יותר גבוה מהאנרגיה.

במקרה הקוונטי זה לא המצב: החלקיק "חופר לעצמו מנהרה בתוך הר הפוטנציאל" ונכנס לתוכה, ולכן התופעה הזאת (היכולת של חלקיק להמצא מתחת לפוטנציאל) נקראית **מנהור** (tunneling).

14.5 פוטנציאל קבוע

אנחנו מדברים עכשיו על מקרה ש-$V(x)=V$. זה מקרה של חלקיק חופשי, שדיברנו עליו קצת, ואנחנו רוצים עכשיו את הפ"ע של ההמילטוניאן.

אם $E>V$ אז כמו שראינו:

$$\psi(x)=A_+e^{ikx}+A_-e^{-ikx}$$

נסמן $p=\sqrt{2m(E-V)}$, ונשים לב ש-$k=\frac{p}{\hbar}$. תחת הסימון הזה נשים לב שכתובים כאן שני מצבים עצמיים של התנע. כלומר, כל מצב בעל אנרגיה מוגדרת היטב הוא מצב שיכול להיות סופרפוזיציה של שני מצבי תנע. אילו מצבים: התנע p והתנע $-p$. דיברנו על זה בשיעור שעבר שההמילטוניאן מתחלף עם אופרטור התנע, ולכן המ"ע של ההמילטוניאן הם המ"ע של התנע.

המשמעות שאנחנו ניתן לכתיבה הזאת היא שיש לנו סופרפוזיציה של חלקיק שנושא תנע משמאל לימין (ממינוס אינסוף), והוא יכול להיות בו זמנית להיות נושא תנע מימין לשמאל (מאינסוף), כאשר המשקלים יכולים להיות שונים. מסתבר שהחופש במשקלים הוא לא מוחלט, אלא מתקיים:

$$|A_+|^2+|A_-|^2=\frac{1}{2\pi}$$

את התנאי הזה אפשר להראות מתנאי הנרמול של דיראק (ר' נספח 1). המצבים האלה לא יהיו ב-L^2, אבל אמרנו שלמצבים כאלה שאנחנו צריכים להרחיב עבורם את L^2 יהיה נרמול חדש, מה שקראנו נרמול של דיראק.

אם $E<V$ כבר ראינו את הפתרונות, אבל לא נוכל לנרמל אותם, אפילו לא לפי דיראק. המקרה היחיד שבו כן נוכל לנרמל הוא $A_+=A_-=0$, כלומר הפתרונות האלה לא קיימים. מכך שלא נוכל לנרמל נסיק שערכי האנרגיה ששייכים לתחום הזה הם אסורים. זה אומר שהדרישה שנוכל לנרמל, לפחות לפי דיראק, היא דרישה שאנחנו שומרים עליה, ולפי זה אנחנו יודעים אם מותר לנו להיות מתחת לפוטנציאל או לא.

14.6 החזרה מקיר פוטנציאל אינסופי

יש לנו פוטנציאל קבוע בכל מקום עד לנקודה מסויימת (בה"כ נבחר $V=0$), ומשם אינסופי (כלומר גדול בהרבה מכל גודל בבעיה:

$$V(x)=\begin{cases}0, & x>0\\ \infty, & x\le 0\end{cases}$$

ב-$x\le 0$ האנרגיה תמיד תהיה מתחת לפוטנציאל (כי הוא אינסוף), והפתרון תמיד יהיה הפתרון השלישי. אולם, את הפתרון הזה לא נוכל לנרמל, ולמעשה זה מה שהיה כתוב בטבלה – פוטנציאל אינסופי והאינטגרל סביב כל נקודה הוא אינסופי גם. לכן, חייב להתקיים בתחום הזה $\psi(x)=0$.

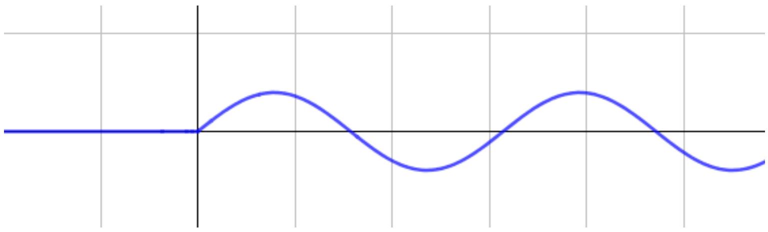
ב-$x>0$ הפתרון הוא מה שראינו קודם. מה שהשתנה זה שאנחנו צריכים שבתפר הפתרון יהיה רציף. מכיוון שהוא 0 בנקודה $x=0$ צריך להתקיים $\psi(0_+)=\psi(0_-)$, כלומר:

$$\psi(0_+)=A_++A_-,\qquad \psi(0_-)=0$$
$$\Rightarrow A_+=-A_-$$

המשמעות היא שנקבל:

$$x>0:\ \psi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sin(kx)$$

וזה ייראה כך:



מה המשמעות שהפתרון הוא סינוס – שני הרכיבים של הפתרון שווים בעצמות והפוכים בפאזה. יש לנו תנע שמגיע מהאינסוף, פוגע בקיר ומוחזר באותה אמפליטודה, אז נקבל פשוט גל עומד שמוחזר מקיר. הגל הוא התאבכות בין האמפליטודה שמגיעה מאינסוף לכיוון השלילי, עם החזרה מהנקודה $x=0$ שנובעת מתנאי השפה של אותו גל באותה עצמה שחוזר בפאזה ההפוכה מהנקודה הזאת.

זה גל עומד של הסתברויות, נותן לנו את ההסתברות להמצא בכל מרחק מהקיר. יש מקומות שההסתברות שלנו להמצא בהם היא תמיד אפס. אלה נקודות של התאבכות הורסת בין פונ' הגל של החלקיק כשהוא מגיע לבין הנקודות שהוא נמצא בהן כשהיא חוזרת, ובנקודות האלה אף פעם לא נמצא את החלקיק.

14.7 בור פוטנציאל אינסופי

פוטנ' שהוא בה"כ $V=0$ בתחום $|x|<\frac{L}{2}$ ובכל מקום אחר הולך לאינסוף:

$$\begin{cases}V=0, & |x|<\frac{L}{2}\\ V\to\infty, & |x|\ge\frac{L}{2}\end{cases}$$

באיזורים מחוץ לבור, מכיוון שהפוט' קבוע ואינסופי, הפתרון הוא אפס. בתוך הבור, הפתרון הוא הפתרון הכללי של $E>V$ (שוב, אם $E<0$ הפתרונות יהיו אפס זהותית). המשמעות של לפתור את המשוואה היא רק להציב את תנאי השפה בפתרון שכבר יש לנו:

$$[\psi(x)]_{-\frac{L}{2}}=A_+e^{-ik\frac{L}{2}}+A_-e^{ik\frac{L}{2}}=0$$

$$[\psi(x)]_{\frac{L}{2}} = A_+ e^{ik\frac{L}{2}} + A_- e^{-ik\frac{L}{2}} = 0$$

כדי למצוא את הפתרונות נחבר ונחסיר את שתי המשוואות:

$$\begin{matrix} [\psi(x)]_{-\frac{L}{2}} + [\psi(x)]_{\frac{L}{2}} \\ [\psi(x)]_{-\frac{L}{2}} - [\psi(x)]_{\frac{L}{2}} \end{matrix} = \begin{cases} (A_+ + A_-)\left(e^{ik\frac{L}{2}} + e^{-ik\frac{L}{2}}\right) = 0 \\ (A_+ - A_-)\left(e^{ik\frac{L}{2}} - e^{-ik\frac{L}{2}}\right) = 0 \end{cases} = \begin{cases} (A_+ + A_-)2\cos\left(\frac{kL}{2}\right) = 0 \\ (A_+ - A_-)2i\sin\left(\frac{kL}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

יש לנו שתי משוואות שצריכות להתקיים בו"ז כדי שתנאי השפה יתקיימו, ובכל משוואה יש מכפלה של שני גורמים. אי אפשר שהאיבר הראשון של האמפליטודות יהיו אפס בלי שהאמפליטודות יהיו טריויאליות. לכן, אם אנחנו משביעים את התנאי של האמפליטודות מצד אחד שיהיה אפס אז צריך שהתנאי שיתאפס במקרה השני יהיה התנאי הטריגונומטרי, ולהפך.

- נניח ש-$A_+ = -A_-$. אזי $\sin\left(\frac{kL}{2}\right) = 0$, כלומר:

$$k = \frac{2n\pi}{L}$$

הפתרון יהיה $\sim \sin\left(\frac{2n\pi}{L}x\right)$, וביחד עם נרמול נקבל:

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{2n\pi}{L}x\right)$$

- נניח ש-$A_+ = A_-$. אזי $\cos\left(\frac{kL}{2}\right) = 0$, כלומר:

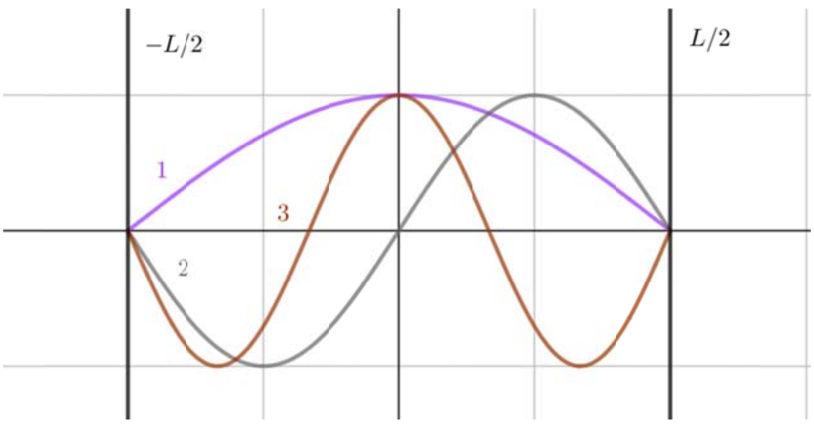
$$k = \frac{(2n-1)\pi}{L}$$

וביחד עם נרמול נקבל את הפתרון:

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{L}x\right)$$

נצייר את הפתרונות:

אנחנו רואים שהפתרונות מסודרים לסירוגין – סינוס ואז קוסינוס.



(ציור של שלושה פתרונות עבור $n = 1,2,3$)

אלה פתרונות של מהוד של גלים. כבר דיברנו על זה שיש לנו כאן גלים וראינו שמחסום פוטנציאל אחד הוא כמו החזרה, הוא כמו מראה, עכשיו יש לנו שתי מראות. הפתרונות הוא רק אלה שאורך בגל מתחיל באפס, ונכנס מספר פעמים חצי שלם כך שהוא ייגמר גם באפס.

באופן כללי, כל ה-k-ים מרוחקים אחד מהשני π/L:

$$k_n = n\frac{\pi}{L}$$

כלומר רמות האנרגיה:

$$E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} = \frac{\pi^2 {\hbar^2}^2}{2mL^2} n^2$$

זו האנרגיה של המצב ה-n-י, כשבאמור המצבים הם לסירוגין סינוס וקוסינוס.

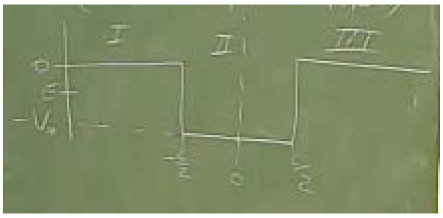
מעניין להשוות את זה לפתרונות של בור אינסופי לפי תורת הקוונטים הישנה. אם נעשה זאת נראה שמתקבל אותו הדבר – תורת הקוונטים הישנה היא מדוייקת במקרה הזה.

נסתכל על פונ' הגל עם האנרגיה הכי נמוכה, שנקרא לה מצב היסוד. קודם כל הוא לא יושבת באפס, אלא קצת מעליו. מצב היסוד כאשר הבור סימטרי הוא פונ' סימטרית, וזו תכונה כללית. המצב מעליו אנטי־סימטרי, ואז שוב סימטרי לחילופין. גם כאשר אין סימטריה לבור, מספר הצמתים הוא אחד יותר ממספר המצב.

14.8 בור פוטנציאל סופי

נסתכל שוב על בור פוטנציאל, רק שהפעם הערך בו יהיה סופי. בה"כ נגדיר:

$$\begin{cases} V = -V_0, & |x| \le \frac{L}{2} \\ V = 0, & |x| > \frac{L}{2} \end{cases}$$



יש לנו עכשיו פתרונות שמתקיימים גם משמאל ($x < -\frac{L}{2}$, נסמן את האיזור הזה ב-1), גם באמצע $-\frac{L}{2} \le x \le \frac{L}{2}$, איזור 2) וגם מימין $x > \frac{L}{2}$, איזור 3). צריך לפתור לערכי אנרגיה משלושה סוגים:

- קטנים מ-$-V_0$. אנחנו יודעים כבר שהפתרון הוא אפס (שוב, כי הוא יראה בכל האיזור כמו אקספוננטים ואי אפשר יהיה לנרמל אותו).
- יותר גדולים מ-0. הפתרון לאנרגיות חיוביות (נפתור בהמשך).
- האנרגיה "בתוך הבור", כלומר $-V_0 \le E \le 0$.

נתמקד בעת בסוג השלישי – הפתרון הכללי בכל איזור, בהתאם לפתרון הכללי שראינו קודם ולמצב הפוטנציאל:

$$\psi_1(x) = A_{1,+}e^{\alpha x} + A_{1,-}e^{-\alpha x}$$

$$\psi_2(x) = A_{2,+}e^{ikx} + A_{2,-}e^{-ikx}$$

$$\psi_3(x) = A_{3,+}e^{\alpha x} + A_{3,-}e^{-\alpha x}$$

נזכור ש-$\alpha = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(-E)}$ ו-$k = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E+V_0)}$ ונגדיר $k_0 \equiv \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}V_0} = \sqrt{k^2+\alpha^2}$.

מה שנשאר לנו זה להציב את תנאי השפה על המעברים בין הקטעים ועל האינסוף. נתחיל מהאינסוף, ונעשה את ההצבה דרך הנרמול. אם נסתכל על ψ_1 במינוס אינסוף, האיבר הדועך $A_{1,-}e^{-i\alpha x}$ אמור לגרום להתבדרות של הפתרון, וכנ"ל לאיבר $A_{3,+}e^{i\alpha x}$ של ψ_3 באינסוף. במקרה כזה לא נוכל לנרמל, לכן נסיק שחייב להתקיים $A_{1,-} = A_{3,+} = 0$.

עכשיו נציב את תנאי השפה בחיבורים בין החלקים. נשים לב שהפעם הפוטנציאל סופי בכל נקודה, לכן לפי הטבלה שלנו מה שלא רציף זה רק ψ_2, אז גם ψ וגם ψ' רציפים, מה שייתן שתי משוואות על כל נקודת מעבר, בדיוק כמספר הנעלמים שנותרו לנו.

רציפות ב-$-L/2$:

$$A_{1,+}e^{-\frac{\alpha L}{2}} = A_{2,+}e^{-\frac{ikL}{2}} + A_{2,-}e^{\frac{ikL}{2}}$$

רציפות הנגזרת ב-$-L/2$:

$$\alpha A_{1,+}e^{-\frac{\alpha L}{2}} = ikA_{2,+}e^{-\frac{ikL}{2}} - ikA_{2,-}e^{\frac{ikL}{2}}$$

רציפות ב-$L/2$:

$$A_{3,-}e^{-\frac{\alpha L}{2}} = A_{2,+}e^{\frac{ikL}{2}} + A_{2,-}e^{-\frac{ikL}{2}}$$

רציפות הנגזרת ב-$L/2$:

$$-\alpha A_{3,-}e^{-\frac{\alpha L}{2}} = ikA_{2,+}e^{\frac{ikL}{2}} - ikA_{2,-}e^{-\frac{ikL}{2}}$$

נציב את דרישת הרציפות של הפונ' בדרישת הרציפות של הנגזרת:

$$\alpha A_{1,+}e^{-\frac{i\alpha L}{2}} = ikA_{2,+}e^{-\frac{ikL}{2}} - ik\left(A_{1,+}e^{-\frac{i\alpha L}{2}} - A_{2,+}e^{-\frac{ikL}{2}}\right)$$

$$-\alpha A_{3,-}e^{-\frac{i\alpha L}{2}} = ikA_{2,-}e^{\frac{ikL}{2}} - ik\left(A_{3,-}e^{-\frac{i\alpha L}{2}} - A_{2,+}e^{-\frac{ikL}{2}}\right)$$

נבודד את $A_{2,+}$ בשתיהן:

$$A_{2,+} = \frac{\alpha+ik}{2ik}A_{1,+}e^{(-\alpha+ik)\frac{L}{2}}$$

$$A_{2,+} = \frac{-\alpha+ik}{2ik}A_{3,-}e^{(-\alpha-ik)\frac{L}{2}}$$

נשווה בין הביטויים האלה:

$$\frac{-\alpha+ik}{\alpha+ik}\frac{A_{3,-}}{A_{1,+}} = e^{ikL}$$

קיבלנו קשר בין האמפליטודה של המצבים הממנהרים (המצבים בהם אפשר למצוא את החלקיק באיזור שהוא אסור קלאסית).

כיוון שהבור הוא סימטרי $V(x) = V(-x)$ הפתרונות גם צריכים לקיים את הסימטריה. לכן, מתקיים ש-

$$|\psi(x)|^2 = |\psi(-x)|^2$$

כלומר יהיו לנו רק פתרונות ש-ψ היא או בדיוק סימטרית או בדיוק אנטי־סימטרית.

לכן, משיקולי סימטריה $A_{1,+} = \pm A_{3,-}$ (כשפלוס ייתן את הפתרונות הסימטריים, ומינוס את האנטי־סימטריים), ונקבל:

$$\pm\frac{-(\alpha - ik)^2}{\alpha^2 + k^2} = \pm\frac{k^2 - \alpha^2 + 2i\alpha k}{k_0^2} = e^{ikL}$$

נעשה השוואת מקדמים החלקים הממשיים בבכל אגף:

$$\frac{k^2 - \alpha^2}{k_0^2} = \frac{2k^2}{k_0^2} - 1 = \pm\cos(kL)$$

$$\Rightarrow \frac{k^2}{k_0^2} = \frac{V+E}{E} = \frac{1}{2}(1 \pm \cos(kL)) = \begin{matrix}(+): \\ (-):\end{matrix}\begin{cases}\cos^2\left(\frac{kL}{2}\right) \\ \sin^2\left(\frac{kL}{2}\right)\end{cases}$$

15 שיעור 15 – 22.5.18

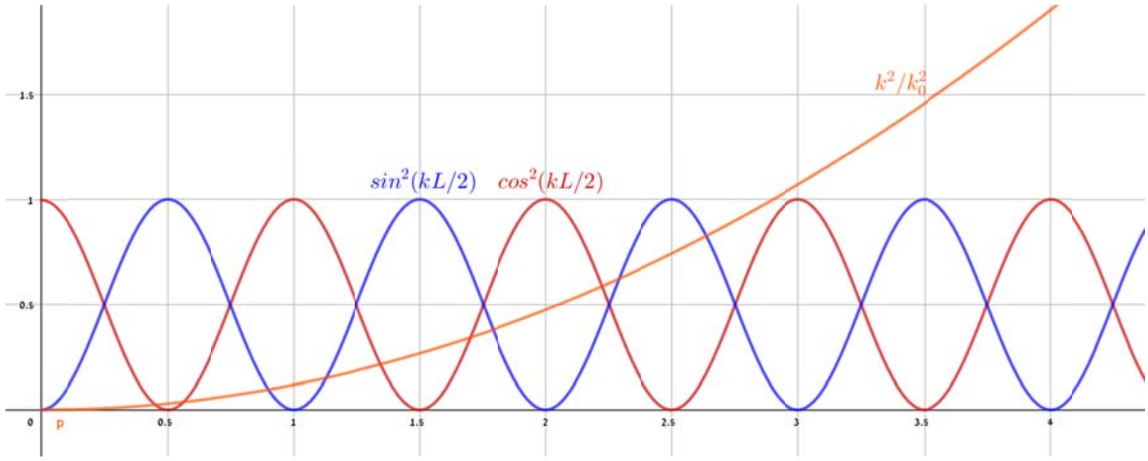
15.1 בור פוטנציאל סופי – המשך

נמשיך מאיפה שעצרנו בשיעור הקודם. נעשה עכשיו השוואת מקדמים של החלק המדומה של המשוואה:

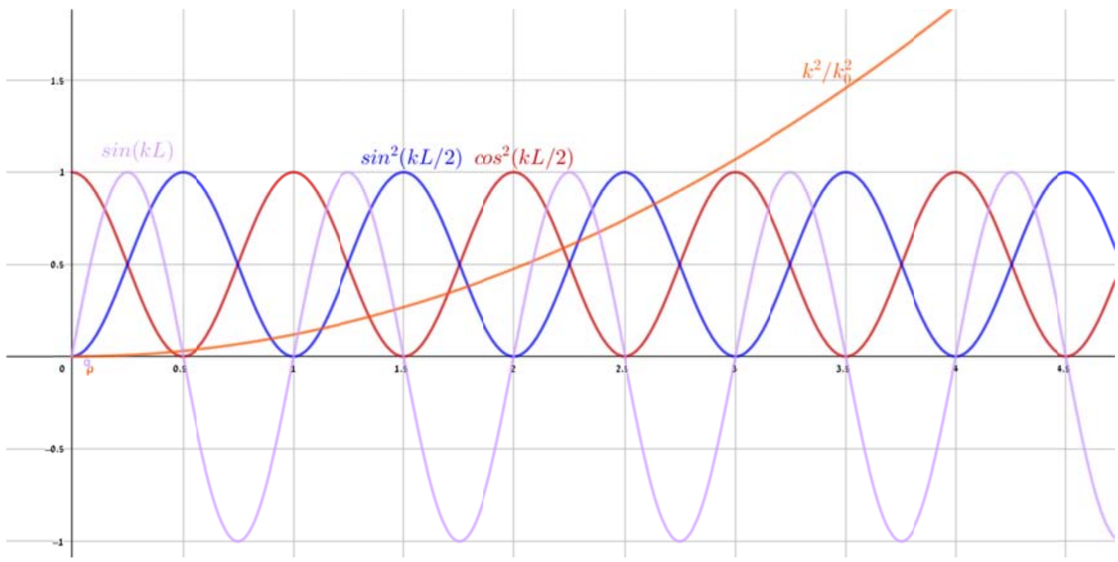
$$\pm\frac{2\alpha k}{k_0^2}=\sin(kL)$$

כאמור, את המשוואות שקיבלנו צריך לפתור נומרית. כדי להבין איך נראה הפתרון, נעשה חקירה שלו ונצייר על גרף: הציר האופקי הוא k והוא יהיה ביחידות של $2\pi/L$, והציר האופקי יהיה כ"א מהפונ'.

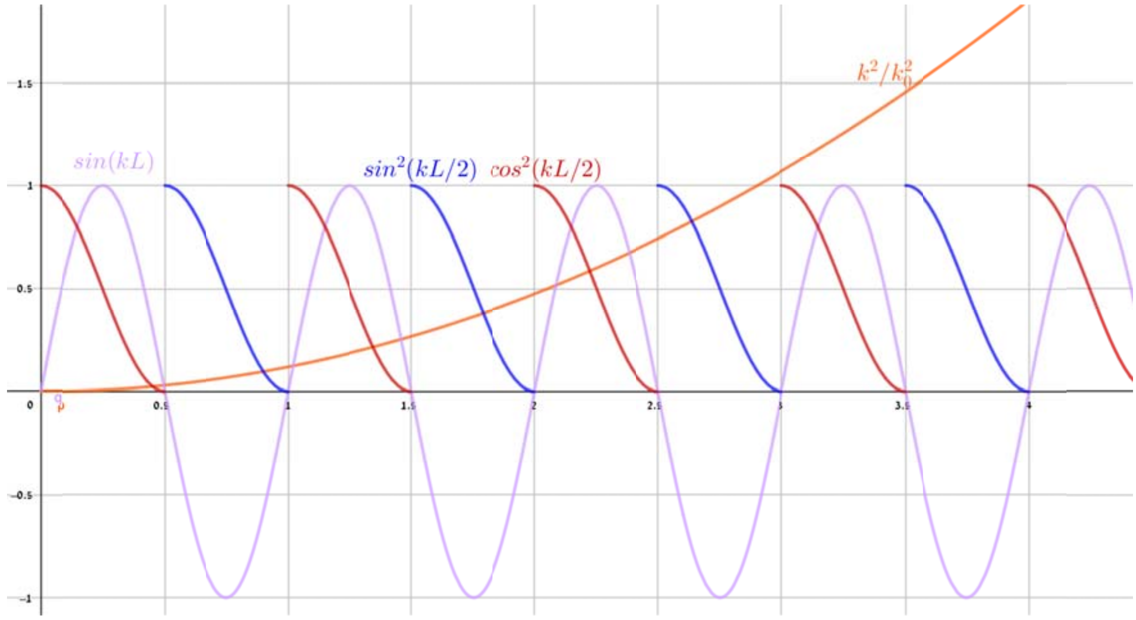
יש לנו באגף שמאל פרבולה של k ובאגף ימין פונ' טריגונומטרית של k. לא ידוע איך לפתור את המשוואה הזאת, אבל מה שאנחנו יכולים לעשות זה לחקור אותה בצורה גרפית. נקבל:



אנחנו כבר רואים את נק' החיתוך, אבל לפני שנציין אותן נסתכל על $\sin(kL)$ מהמשוואה של החלק המדומה. כש-k הולך וגדל הוא מקבל ערכים גם חיוביים וגם שליליים כשהוא הולך וגדל. הצד השמאלי של המשוואה מכיל כולו מספרים ממשיים וחיוביים (בלי הגבלת הכלליות נגיד שהם חיוביים, כי יש פלוס מינוס לפני). הפלוס מינוס שיש לפניו אומר שהמשוואה הזאת יכולה להתקיים רק באיזורים מסויימים רק כשבוחרים את הפתרונות הסימטריים, ובאיזורים אחרים רק כשבוחרים את הפתרונות האנטי־סימטריים. הפתרונות הסימטריים מתקבלים רק כשהסינוס הוא חיובי, והאנטי סימטריים רק בשהוא שלילי. אז נוסיף גם את הסינוס:



הפתרון של הקוסינוס בריבוע רלוונטי רק באיזורים שבהם הסינוס חיובי, והפתרון של הסינוס בריבוע רק באיזורים שבו הוא שלילי:

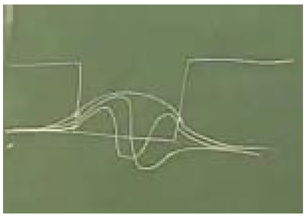


הפתרונות הרלוונטיים יהיו החיתוכים של k^2/k_0^2 עם מה שנשאר מהקוסינוס והסינוס בריבוע. אנחנו רואים שיש רק מספר מוגבל של פתרונות, **כ**ך שנקודת החיתוך הכי גבוהה מתקבלת ב-k_0.

הציר האופקי הוא ציר של k, אז הפתרונות הם פתרונות עבור k. יש לנו קשר בין זה לבין האנרגיה $E = \frac{k^2\hbar^2}{2m}$, אז אם אנחנו יודעים את ה-k שפותר את המשוואות אנחנו יודעים את האנרגיה בבור. אנחנו מקבלים מזה שיש מספר סופי של פתרונות לאנרגיה.

אנחנו יכולים לראות שוב תכונה שראינו בבור האינסופי – לפתרונות יש סימטריה מתחלפת (סימטרי ואנטי־סימטרי לסירוגין). אנחנו יכולים גם לראות שתמיד פתרון מצב היסוד, המצב הכי נמוך, יהיה פתרון סימטרי. כמו כן, תמיד יש לפחות פתרון אחד, כי תמיד הקו הכתום צריך לחתוך לפחות את ההתחלה של הקוסינוס בריבוע, אין פתרון בלי מצב אחד לפחות.

אם נצייר איך נראית פונ' הגל, נקבל משהו כזה:



באמצע יש אוסילציות לפי איזה פתרון זה, ומחוץ לבור דעיכה אקספוננציאלית.

(הוספנו בציור את הבור רק בשביל ההבנה של איפה מתחיל ונגמר הגל, זה בור פוטנציאל, אז זה אפילו לא מתאים באמת ליחידות של פונ' גל)

עוד דבר שאנחנו רואים – כמו בבור האינסופי, אפשר לשאול כמה התאפסויות יש (כלומר כמה מצבים קיימים שהסיכוי להמצא בהם הוא אפס). במצב היסוד אין מצבים כאלה בכלל, במצב השני יש אחד, בשלישי יש שניים וכו'.

הדבר הבא שנרצה לעשות זה לספור כמה פתרונות יש. מספר הפתרונות מוגבל ע"י k_0, אז צריך לראות כמה אוסילציות עושים הקוסינוס והסינוס בריבוע עד אז. אנחנו רואים שעבור כל אוסילציה מלאה של סינוס, כל אוסילציה מלאה שעוברים לפניה מקבלים פתרון, אבל לפני החצי. בקוסינוסים זה כל מספר שלם ועוד חצי של אוסילציות. זה לא טריוויאלי, אבל אם נחשוב על זה נקבל:

- מספר הפעמים שפאי נכנס ב-$\pi + \frac{k_0 L}{2}$:

$$N_s = \left\lfloor \frac{k_0 L}{2\pi} + 1 \right\rfloor = \left\lfloor \frac{L}{2\pi\hbar}\sqrt{2mV_0} + 1 \right\rfloor$$

זה מספר הפתרונות הסימטריים.

- מספר הפעמים שפאי נכנס ב-$\frac{\pi}{2} + \frac{k_0 L}{2}$:

$$N_{AS} = \left\lfloor \frac{k_0 L}{2\pi} + \frac{1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{L}{2\pi\hbar}\sqrt{2mV_0} + \frac{1}{2} \right\rfloor$$

זה מספר הפתרונות האנטי־סימטריים.

מספר הפתרונות הכללי הוא, אם כן:

$$N = N_S + N_{AS} = \left\lfloor \frac{L}{\pi\hbar}\sqrt{2mV_0} + 1 \right\rfloor = \left\lceil \frac{L}{\pi\hbar}\sqrt{2mV_0} \right\rceil$$

(כי הגבול העליון של מספר + 1 זה כמו הגבול התחתון של זה בלי ה-1+)

זה שקיבלנו גבול עליון מחזק את זה שתמיד נקבל לפחות פתרון אחד, ואם נסתכל בביטוי למספר הפתרונות הסימטריים נראה שזה מגיע משם.

אפשר לראות שמספר הפתרונות של בור תלוי פחות או יותר לינארית (עד כדי הקפיצות במספרים שלמים) ברוחב של הבור, ובשורש העומק שלו.

יש כאן מכפלה של העומק והרוחב של הבור (למרות שהוא עם שורש), זה כמו חוק שטח שרואים באופטיקה, שאומר שהשטח סופר את מספר המודים. מספר המודים מאוד משמעותי בהרבה אירועים פיזיקליים (באופטיקה יש בעיה דומה של מוליכי גלים דיאלקטריים).

נרצה עכשיו לקחת את הפתרונות האלה ולהסתכל על שני גבולות מעניינים:

- $V_0 \to \infty$, כלומר הבור ממשיך עד למינוס אינסוף. נפתור את זה באמצעות ניתוח של הפתרון הגרפי. בגבול הזה גם $k_0 \to \infty$. המשמעות היא שהפרבולה משטחת ויורדת לציר ה-x. נקודות החיתוך במקרה הזה הופכות להיות בדיוק מרוחקות π/L אחת מהשנייה, כלומר:

$$kL = n\pi$$

כש-n הוא מספר החיתוך. נציב את k:

$$\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E + V_0)} = \frac{n\pi}{L}$$

$$\Rightarrow E + V_0 = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$$

מה אומר הגודל $E + V_0$? נזכר ש-E זה האנרגיה של המצב, ו-$-V_0$ זה העומק של הבור העמוק. כלומר, הסכום הזה הוא המרחק בין האנרגיה לבין תחתית הבור. הביטוי שקיבלנו באגף ימין הוא בדיוק הביטוי אותו קיבלנו לרמות אנרגיה של בור אינסופי. כששולחים את תחתית הבור הסופי לאינסוף, הוא מתנהג בתחתית כבור

אינסופי. בבור האינסופי שמרנו את השפה באפס ושלחנו את הגבולות לאינסוף וכאן הפוך, אבל קיבלנו אותו פתרון.

- $V_0 \to \infty$ וגם $L \to 0$ (העומק שואף לאינסוף והרוחב לאפס – כמו פונ' דלתא). כדי לדאוג שהבור יישאר יפה, נצטרך לדאוג גם שהמכפלה בין העומק לרוחב תשאר קבועה, ונסמן $LV_0 = \lambda$.

ננסה להבין מה קורה באמצעות הגרף. $kL \to 0$, כי L הולך ישירות לאפס, ו-k הולך לאינסוף יותר לאט (כמו שורש, כי הוא פורפורציוני לשורש V_0), לכן סה"כ הביטוי הולך לאפס. היחס $\frac{k}{k_0} \to 1$ לפי הביטוי שראינו קודם.
נסתכל כעת על:

$$\frac{k^2}{k_0^2} = \frac{V_0 + E}{V_0} = 1 + \frac{E}{V_0} = \frac{1}{2}(1 + \cos(kL)) \approx 1 - \frac{k^2L^2}{4}$$
$$\Rightarrow \frac{E}{V_0} = -\frac{1}{4}\frac{2mL^2}{\hbar^2}(V_0 + E)$$
$$\Rightarrow E = -\frac{mL^2V_0^2}{2\hbar^2} = -\frac{m\lambda^2}{2\hbar^2}$$

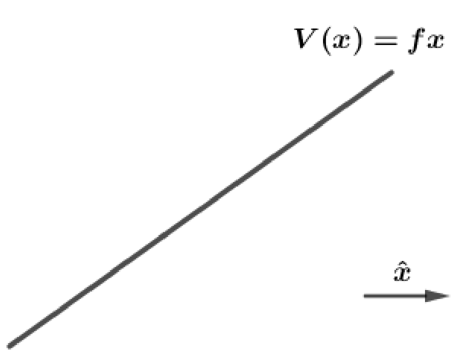
הערך של האנרגיה לא הולך לאפס או לאינסוף, כי הוא תלוי ב-V_0L, הגודל שנשמר. קיבלנו את הגבול של בור מאוד צר ועמוק.
פונקציית הגל בגבול הזה תראה כמו אקספוננט דועך משני הצדדים:

זה כמו שראינו קודם רק שיש רק דעיכה, אין מקום לחלק האוסילטורי באמצע כי הרוחב של הבור שואף לאפס.
נשים לב שהנגזרת הראשונה בגבול הזה לא רציפה, וזה מסתדר עם הטבלה שלנו.

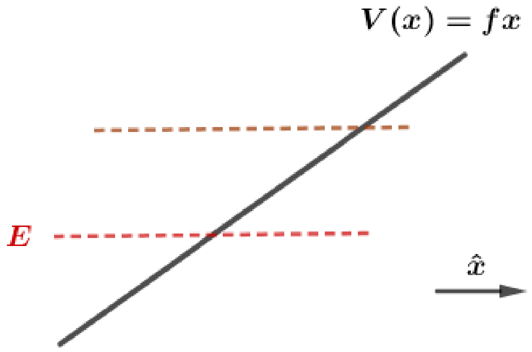
15.2 תנועה בכח קבוע (נפילה חופשית)

הנושא הבא הוא הדבר הכי טבעי במכניקה – נפילה חופשית, תנועה תחת כח קבוע. בתורת הקוונטים הדבר הזה מאוד לא טריוויאלי, עד כדי כך שהרבה מהקורסים הבסיסיים בתורת הקוונטים לא מכניסים אותו.

בבעיה אנחנו מדברים על חלקיק בעל מסה m שפועל עליו כח $-f$ (למשל mg, qE). הפוטנציאל נראה כמו קו:



אנחנו יכולים לראות תכונה מעניינת של הפתרונות (שנוכיח אותה בהמשך): נניח שיש לנו איזשהו פתרון עבור רמת אנרגיה מסויימת של החלקיק E. נשאל איך ייראה הפתרון של אנרגיה אחרת –



אם נקח את הפוטנציאל ונזיז אותו באיזושהי תזוזה ב-x, זה שקול לזה שעלינו כלפי מעלה. כלומר, בשביל לקבל את הפוטנציאל למעלה היינו צריכים להזיז אותו ימינה. זה אומר שהזזה של הפוטנציאל שקולה לשינוי של האנרגיה, ולכן נצפה לסימטריה הבאה בין הזזות ב-x לבין הזזות באנרגיה:

$$\Delta x = -\frac{\Delta E}{f}$$

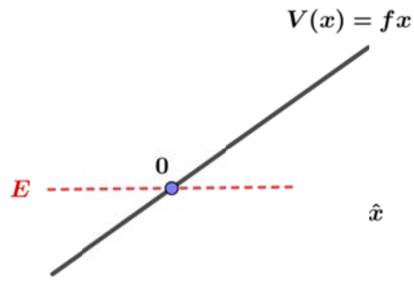
זה אומר שכל הפתרונות עבור האנרגיות השונות ייראו אותו הדבר מבחינת הצורה, רק מוסטים ביחס f אחד מהשני. כיוון שהפתרונות האלה הם פונ' עצמיות של אופרטור הרמיטי, ולכן הם אמורים להיות סט אורתונורמלי שלם. כלומר, הפתרונות האלה יהיו ניצבים אחד לשני בהזזה.

נתחיל בפתרון – משוואת שרדינגר:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + fx\psi - E\psi = 0$$

נעשה שתי החלפות של משתנים –

- $x' = x - E/f$. המשמעות: עבור אנרגיה מסויימת שפותרת את המשוואה, נזיז את ציר ה-x כך שהנקודה שחותכת את השיפוע תהיה אפס:



נקרא לנקודת החיתוך שלו נקודת המפנה הקלאסית, כי אם יהיה חלקיק ש-E זו האנרגיה שלו והוא ינוע בפוטנציאל הזה, הוא יאט בהתקרבות לנקודה, ובנקודה הזו (שבה האנרגיה פוגשת את הפוטנציאל) הוא יעצור ויתחיל להתקדם לצד השני.

- $y = \left(\frac{2mf}{\hbar^2}\right)^{\frac{1}{3}} x'$. נועד בשביל לקבל משוואה חסרת מימדים.

נקבל (ר' נספח 2):

$$\frac{d^2\psi}{dy^2} - y\psi = 0$$

בשביל לפתור את המשוואה, נעשה התמרה מ-$y \rightarrow k_y$ (שנקרא לו פשוט k במקום k_y):

$$-k^2\tilde{\psi} - i\frac{d\tilde{\psi}}{dk} = 0$$

עברנו למשוואה מסדר ראשון, שפשוט לפתור אותה, נקבל:

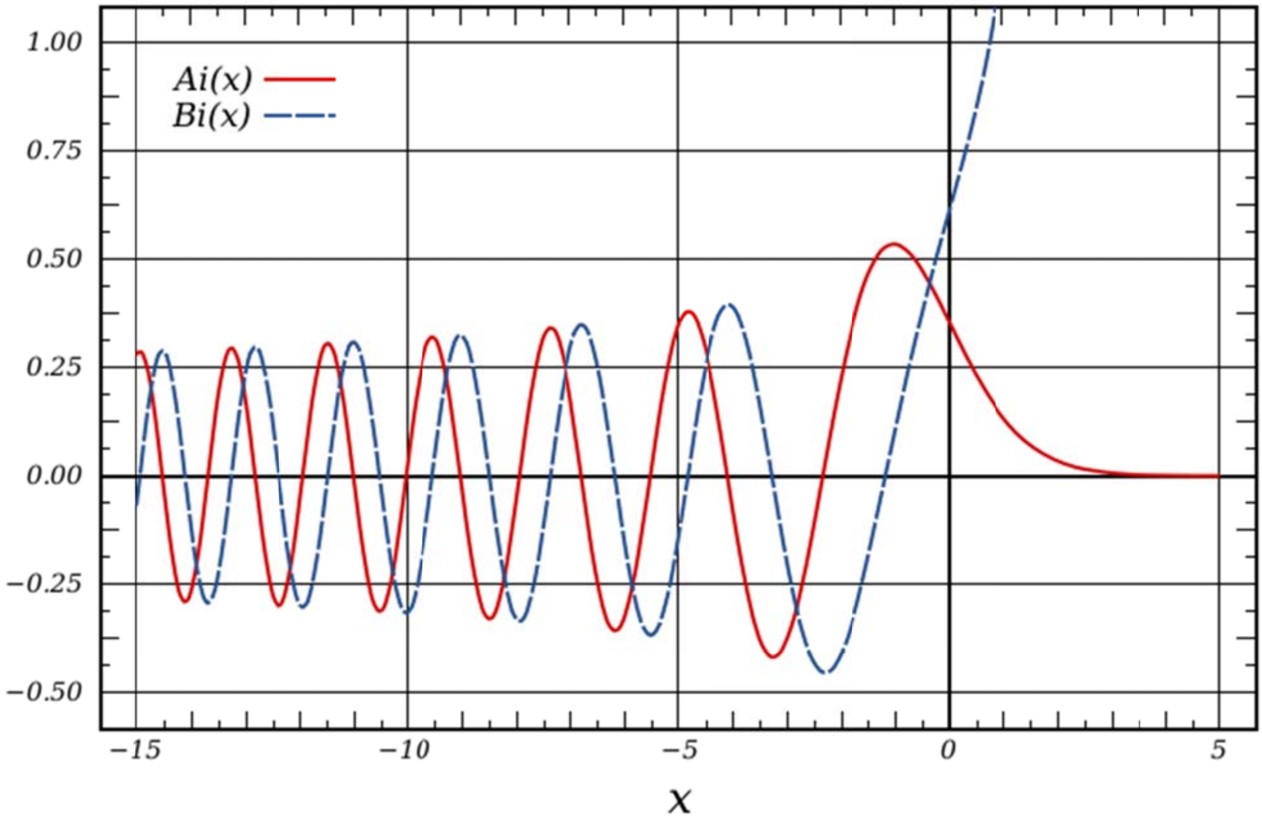
$$\tilde{\psi}(k) = \tilde{A}e^{\frac{ik^3}{3}}$$

נעשה את ההתמרה ההפוכה לפתרון, ונקבל (נכניס את המקדם של ההתמרה לתוך $\tilde{A}$):

$$\psi(y) = A\int_{-\infty}^{\infty} dke^{i\left(\frac{k^3}{3}+ky\right)} \equiv \mathrm{Ai}(y)$$

הפונקציה הזאת נקראת **פונקציית איירי ($\boldsymbol{Airy}$)**.

נרצה לצייר אותה. פיזיקלית, אנחנו יכולים להבין שבאיזור הימני, מימין ל-0, זה איזור של מנהור, איזור שקלאסית הוא אסור. לכן, אנחנו לא יכולים לקבל שם התקדמות, לא יכולות להיות שם אוסילציות. לכן, נרצה לקבל פונ' דועכת באיזור הזה. מהצד השני יש אוסילציות באמפליטודה הולכת ודועכת, וככל שאנחנו הולכים לערכים יותר שליליים של y, התדר שלהם הולך ונעשה יותר גבוה:



(פונקציית איירי – באדום. אפשר לשים לב שהאוסילציות הולכות ודועכות ככל שהולכים שמאלה)

יש לנו שני קירובים טובים לפונ' איירי – אחד רלוונטי ל-y חיובי והשני ל-y שלילי, שניהם כשאנחנו רחוקים מהסביבה של אפס:

$$\mathrm{Ai}_{y<0}(y) \approx \frac{\sin\left(\frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}+\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{\pi}(-y)^{\frac{1}{4}}}$$

$$\mathrm{Ai}_{y>0}(y) \approx \frac{e^{-\frac{2}{3}\left(y^{\frac{3}{2}}\right)}}{2\sqrt{\pi}y^{\frac{1}{4}}}$$

בחלק החיובי קיבלנו משהו שדומה לאקספוננט דועך, רק עם חזקה אחרת (לא ציפינו לאקספוננט דועך ממש, כי אקספוננט דועך זה מה שקורה כשהפוטנציאל מעלייך הוא קבוע וכאן הוא ממשיך לגדול).

בחלק החיובי אנחנו רואים סינוס עם מעטפת שהולכת ודועכת כמו $\sim y^{-\frac{1}{4}}$ והתדר (שבתוך הסינוס) הולך וגדל. אם הייתה תלות לינארית של מה שיש בתוך הסינוס ב-y אז התדר היה קבוע. מאחר וזו פונ' לא לינארית ב-y, שגדלה יותר מהר, זה אומר שככל ש-y יותר גדול בכיוון השלילי התדר יותר גדול. אפשר להתייחס לזה בתור "תדר מקומי" – הקצב שהארגומנט צובר פאזה (לקחת את הארגומנט ולגזור אותו פעם אחת לפי y). אם התדר היה משהו מהצורה ky התדר הולך כמו k, אבל אם יש $f(x)$ כללי התדר המקומי הוא $f'(x)$. במקרה הזה, התדר הזה הולך וגדל כמו שורש של y.

נשים לב שהמשוואה המקורית שלנו מסדר שני, לכן יש לה שני פתרונות. את הפתרון השני מסמנים ב-$\mathrm{Bi}(y)$, ומכנים אותה פונקציית ברי (בכחול בשרטוט). הפונ' הזאת תעשה אוסילציות משמאל, ויהיה לה אקספוננט שהולך ועולה מצד ימין. בגלל העליה של המתבדרת הפונ' הזאת לא תתאים למצב פיזיקלי – אי אפשר לנרמל אותה. הסט השלם שפורש את הכל זה כל האיירי + כל הברי, אבל אנחנו מתעניינים רק באיירי, שניתנות לנרמול.

נראה עכשיו את הנרמול. מהסימטריה דרשנו שתהיה ניצבות בהזזה, לכן נכפיל שתי פונ' איירי מוזזות (אחת מוזזת בשיעור של y' והשנייה בשיעור של y'') ונבחן את הסימטריה. נסתכל על המכפלה הפנימית (נשים לב שאחד האקספוננטים במינוס והשני בפלוס בגלל ההצמדה של המכפלה הפנימית):

$$\begin{aligned}
&A^2\int_{-\infty}^{\infty}dy\int_{-\infty}^{\infty}dk'e^{-i\left[\frac{k'^3}{3}+k'(y-y')\right]}\int_{-\infty}^{\infty}dk''e^{i\left[\frac{k''^3}{3}+k'(y-y'')\right]}\\
&=A^2\int_{-\infty}^{\infty}dy\int_{-\infty}^{\infty}dk'\int_{-\infty}^{\infty}dk''e^{iy(k''-k')}e^{i\left(\frac{k''^3}{3}-\frac{k'^3}{3}+k'y'-k''y''\right)}\\
&=2\pi A^2\int_{-\infty}^{\infty}dk'\int_{-\infty}^{\infty}dk''\delta(k'-k'')e^{i\left(\frac{k''^3}{3}-\frac{k'^3}{3}+k'y'-k''y''\right)}\\
&=2\pi A^2\int_{-\infty}^{\infty}dk'e^{ik'(y'-y'')}\\
&=4\pi^2A^2\delta(y'-y'')
\end{aligned}$$

נסכם את מה שעשינו – לקחנו שתי פונ' איירי מוסטות אחת ביחס לשנייה, וציפינו שהן תהיינה ניצבות. אנחנו רואים שהניצבות שלהן היא מה שקראנו ניצבות לפי דיראק (האינטגרל של פונ' איירי מתבדר לאינסוף, אז זה שוב משפחה של פונ' שאנחנו צריכים להרחיב את מרחב הילברט כדי לתת להם משמעות פיזיקאלית, אבל בבסיס אחר, לא המקום או התנע הפעם).

כדי לקבל דלתא נסיק שהנרמול הוא:

$$A=\frac{1}{2\pi}$$

פונ' איירי לא שייכות ל-L^2, אבל:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Ai}(y)\,dy = 1$$

נציב חזרה עכשיו את x לקבלת הפתרון של המשוואה המקורית שלנו:

$$\psi_E(x) = \left(\frac{2m}{\hbar\sqrt{f}}\right)^{\frac{1}{3}} \mathrm{Ai}\left[\left(\frac{2m}{\hbar\sqrt{f}}\right)^{\frac{1}{3}}\left(x - \frac{E}{f}\right)\right]$$

אנחנו יכולים לראות שכל השוני בין שתי אנרגיות שונות זה רק ההזזה.

נסתכל גם על ההצגה במרחב התנע (שאפשר לקבל אותה מלהציב ב-$\psi(k)$ את היחידות):

$$\tilde{\psi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar f}} e^{-\frac{i}{\hbar}\left(\frac{p^3}{6mf} - \frac{E}{f}p\right)}$$

תכונה מעניינת של פונ' הגל בהצגת התנע – נזכור שהערך המוחלט של הגודל של הדבר הזה בריבוע הוא צפיפות ההסתברות להמצא בכל p, וכאן אין תלות ב-p בערך הזה. זה אומר שחלקיק במצב עצמי בהמילטוניאן הזה נמצא בו־זמנית בכל תנע אפשרי באותה הסתברות. במקום זה לא ככה.

נזכור שעבור חלקיק חופשי, אם היה לנו מקום מוגדר יכולנו להמצא בכל תנע. פה המקום לא מוגדר, אבל כן יש איזושהי התפלגות. פונ' איירי היא פונ' ממשית ויש לה צמתים, מקומות שלא נמצא בהם לעולם את החלקיק, אבל יש אינסוף מקומות אחרים שאפשר למצוא אותו. עדיין, בתנע ההתפלגות היא אחידה למצוא אותו בכל מקום.

האיזור המרוכז הכי גדול שבו יש סיכוי למצוא את החלקיק הוא איזור נקודת המפנה. האינטואיציה שיש לנו מבחינה קלאסית היא ששם הוא התנועה הקלאסית היא הכי איטית. ומה קורה מבחינת פונ' הגל הקוונטית באיזור הזה? התדירות המקומית שם הכי נמוכה. אנחנו רואים שהתדירות המקומית היא איזושהי השתקפות של המהירות של החלקיק הקלאסי.

לרוחב של האונה שבאיזור אפס, זה שאמרנו שהסיכוי הכי גדול שהוא יהיה בו, יש גודל אופייני. הרוחב הזה הולך כמו $\sim \left(\frac{\hbar^2}{2m^2 g}\right)^{\frac{1}{3}}$. לחלקיק קלאסי בנפילה חופשית אין אורך אופייני לנפילה, הוא פשוט נופל ומאיץ. לחלקיק הקוונטי יש אורך אופייני. אם נציב במשוואה הזאת גדלים שמתאימים לאלקטרון בשדה גרביטציה, הגודל הזה יצא 0.9 מ"מ. זה אומר שאם לוקחים אלקטרון ושמים אותו במצב עם אנרגיה מוגדרת, האיזור שבו רוב הסיכויים שנמצא אותו נמצא באיזור האופייני.

16 שיעור 16 – 27.5.18

16.1 פיזור חד־מימדי

16.1.1 זרם הסתברות

אנחנו מתעניינים בתור התחלה בהתפתחות של איזושהיא פונ' גל בזמן תחת איזשהו פוטנציאל, ונקודת הפתיחה שלנו תהיה משוואת שרדינגר התלויה בזמן:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t)=\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+V(x)\right]\psi(x,t)$$

נכפיל את המשוואה ב-ψ^*:

$$i\hbar\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t}=\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\psi^*\frac{\partial^2}{\partial x^2}+V(x)\psi^*\right]\psi$$

נצמיד את כל המשוואה קומפלקסית:

$$-i\hbar\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\psi=-\frac{\hbar^2}{2m}\psi\frac{\partial^2\psi^*}{\partial x^2}+V(x)\psi\psi^*$$

נפחית את המשוואה מהצמודה:

$$i\hbar\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\psi\right)=-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\psi^*\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\psi^*}{\partial x^2}\psi\right)$$

נשים לב שהאיבר בסוגריים באגף שמאל הם נגזרת לפי הזמן של $|\psi|^2$ ובאגף ימין אפשר לכנס אותם לנגזרת לפי המקום:

$$\frac{\partial|\psi|^2}{\partial t}+\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial}{\partial x}\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x}-\frac{\partial\psi^*}{\partial x}\psi\right)$$

אנחנו רגילים לסמן $P=|\psi|^2$, והדבר הזה הוא צפיפות ההסתברות למצוא את החלקיק לפי x. נגדיר איבר חדש – נסמן:

$$\boxed{J\equiv\frac{\hbar}{2im}\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x}-\frac{\partial\psi^*}{\partial x}\psi\right)}$$

נציב את הסימונים במשוואה:

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial t}+\frac{\partial J}{\partial x}=0}$$

זוהי **משוואת רציפות** לגודל P. היא אומרת שהשינוי בזמן של P נתון לפי השינוי של פונ' כלשהי (J) במקום. אנחנו יודעים כבר מההיכרות שלנו עם משוואות רציפות ש-J הוא זרם, במקרה הזה זרם של הצפיפות ש-P מתאר.

נקרא אם כך ל-J **זרם צפיפות ההסתברות**. J הוא גודל פיזיקלי שמתאר זרם של צפיפות. עד עכשיו היה לנו שימור ההסתברות, שאמר שבכל רגע נתון, האינטגרל על כל ההסתברויות יהיה 1. השימור הזה הוא שימור הסתברות גלובלי, בכל המקומות בו זמנית. עכשיו אנחנו מקבלים שימור הסתברות לוקאלי, שאומר – במקום מסויים לא יכול להיות שינוי בצפיפות אלא אם כן היה זרם שונה מאפס באותו מקום פנימה או החוצה.

מה זה אומר – האם דינמיקה שיש שתי גבעות בפונ' הגל ואחת עולה ויורדת לסירוגין, האם היא יכולה להתקיים ב-L^2? גם אם זה שומר על ההסתברות הגלובלית, דינמיקה כזאת לא יכולה להיות לפי משוואת שרדינגר, כי אם הסתברות יורדת באחת הגבעות ומתווספת בשנייה, ברגע מסויים בדרך הצפיפות הייתה צריכה לעבור את הדרך ביניהן, לזרום ולהגיע גם למקום השני. צפיפות הסתברות לא יכולה להופיע בנקודה כלשהי ולגדול גם אם זה משמר את ההסתברות הגלובלית, כי יש שימור לוקאלי. זה נכון גם בצורה אינפיטיסילית.

16.1.2 זרם ההסתברות של חלקיק חופשי

נתחיל מחלקיק חופשי (פוטנציאל מתאפס) שנע ממינוס אינסוף עד אינסוף עם תנע מוגדר:

$$\psi_{p_0}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\frac{i}{\hbar}p_0 x}$$

כמו שאנחנו יודעים, זה מתאר מצב של תנע בכיוון החיובי. זה המצב העמיד של חלקיק שהגיע ממינוס אינסוף ומתקדם לפלוס אינסוף.

צפיפות ההסתברות של החלקיק הזה קבועה, כמו שכבר ראינו:

$$P = \frac{1}{2\pi\hbar}$$

נראה מה זרם צפיפות ההסתברות:

$$J = |\psi|^2 \frac{p_0}{m} = P v_g$$

סימנו $\frac{p_0}{m} = v_g$, מהירות חבורה של חלקיק. צריך לזכור עם זאת שאין כאן חלקיק ממוקם עם מהירות, החלקיק מפוזר ממינוס אינסוף עד אינסוף במובן שיש הסתברות אחידה למצוא אותו בכל מקום. למרות זאת, קיבלנו שזרם צפיפות ההסתברות הוא לא אפס. עם זאת, הזרם קבוע בכל מקום. ממינוס אינסוף כל הזמן נכנסת לנו צפיפות הסתברות, זה החלקיק שלנו, והוא נמצא בכל מקום בסיכוי אחיד, אבל הצפיפות כן זורמת.

נשים לב שהסימון של v_g מתאים לסימון של זרם צפיפות בתור הצפיפות כפול המהירות המקומית שאנחנו מכירים ממקומות אחרים (חשמל, לדוגמא). אז המהירות המקומית היא המהירות הקלאסית של החלקיק, אבל המצב הוא מצב עמיד.

אנחנו יודעים שבאופן כללי, חלקיק חופשי עם אנרגיה מוגדרת הוא בעל ניוון – יכולים להיות שני מצבים עצמיים של תנע: p_0 בכיוון החיובי ו-$-p_0$ בכיוון השלילי. נכתוב את המצב עם אנרגיה מוגדרת הפעם ולא תנע מוגדר (נשתמש בסימון $k = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E-V)}$):

$$\psi(x) = A_+ e^{ikx} + A_- e^{-ikx}$$

נרצה להציב את זה ב-J. נרשום את J כך (כלומר באמצעות צמוד מרוכב):

$$J = \frac{\hbar}{2im}\left(\psi^* \frac{\partial\psi}{\partial x} - C.C\right)$$

ונמצא אותו:

$$\begin{aligned} J &= \frac{\hbar}{2im}\left[\left(A_+^* e^{-ikx} + A_-^* e^{ikx}\right)\left(ikA_+ e^{ikx} + ikA_- e^{-ikx}\right) - C.C\right] \\ &= \frac{\hbar k}{2m}\left(|A_+|^2 - |A_-|^2 + A_+ A_-^* e^{2ikx} - A_+^* A_- e^{-2ikx} + C.C\right) \\ &= \frac{\hbar k}{m}\left(|A_+|^2 - |A_-|^2\right) \end{aligned}$$

קיבלנו שלצפיפות הזרם המקומית בכל נקודה יש שתי תרומות:

- $\frac{\hbar k}{2m}|A_+|^2$ שנובעת מהמקדם של החלקיק שמגיע ממינוס אינסוף לפלוס אינסוף, וזו אותה תרומה שהייתה לנו קודם – הצפיפות של החלקיק כפול מהירות החבורה.
- $-\frac{\hbar k}{2m}|A_-|^2$ של חלקיק שמגיע מפלוס אינסוף למינוס אינסוף, ולכן התרומה המקומית שלו לזרם היא בסימן מינוס.

עכשיו זה מסביר את המקרה של גל עומד – בגל עומד, כדי לקבל קוסינוס או קוסינוס צריך ש-$A_+ = A_-$. במקרה הזה הן בדיוק מתאפסות – אין צפיפות זרם, אלא רק צבירת פאזה, ודרך הצמתים לא זורמת צפיפות.

נסתכל על עוד מקרה מעניין – נניח שאנחנו מסתכלים על מקום שבו $E < V$, כלומר יש מנהור. האם יכול להיות זרם בתוך המנהרה, ואם כן מהם התנאים?

נקח את אותה פונ' רק עם הפתרון שקיבלנו עבור המצב הזה ונציב אותה לקבלת השטף:

$$\begin{aligned}J &= \frac{\hbar}{2im}\left[(A_+^* e^{\alpha x} + A_-^* e^{-\alpha x})(\alpha A_+^* e^{\alpha x} - \alpha A_-^* e^{-\alpha x}) + C.C\right] \\ &= \frac{\hbar\alpha}{2m}\left[-i|A_+|^2 e^{2\alpha x} + i|A_-|^2 e^{-2\alpha x} - iA_+A_-^* + iA_+^*A_- + C.C\right] \\ &= \frac{\hbar\alpha}{m}(iA_+^*A_- + C.C)\end{aligned}$$

קודם כל אנחנו רואים שבמקום שחלקיק קלאסי לא יכול להיות בו, עשוי להתקיים זרם צפיפות הסתברות. אולם, יש לזה שני תנאים:

א. באותו איזור יתקיימו גם A_+ וגם A_-.
ב. צריך שהמכפלה A_+A_- תהיה לא ממשית (אחרת זה גם מתאפס).

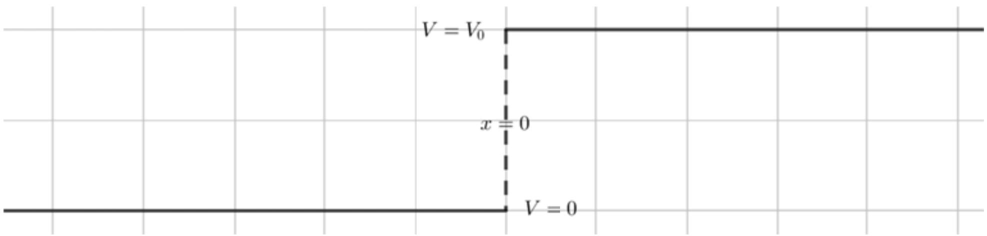
דוגמא למצב שבו יתקיים איזור כזה היא דוגמא של איזור מותר, איזור אסור ואז שוב איזור מותר. אם האיזור האסור היה נמשך עד מינוס אינסוף או עד אינסוף, כמו שראינו בשיעורים הקודמים אחד המקדמים היה צריך להתאפס (כי אחרת יש אקספוננטים שמתבדרים ואי אפשר לנרמל). המקרה של שיעור שעבר הוא דוגמה לזה – היה לנו פוטנציאל לינארי אינסופי, והאיזור האסור בו המשיך עד אינסוף. לכן, לא היה יכול להיות תיאור עם A_+ שונה מאפס.

כדי לקבל אינטואיציה, נדון במקרה של שיעור שעבר – חלקיק תחת כח קבוע, שראינו שפונ' הגל נראית כמו פונ' איירי. אם נציב את הקירוב של פונ' איירי באיזור השלילי ונסתכל על הסינוס בתור סכום של שני אקספוננטים מרוכבים, נקבל זרם צפיפות הסתברות אפס, אבל זה לא שאין זרם באיזור שאחרי מחסום הפוטנציאל, אלא שיש שתי תרומות משני האקספוננטים שמבטלות אחת את השנייה. ממינוס אינסוף מגיע זרם של חלקיקים שהולכים ומאיטים, שמבוטאים על ידי האקספוננט החיובי. הם מגיעים למחסום, חודרים אותו קצת, אבל מאחר והוא מטפס לאינסוף הם לא יכולים לעבור אותו, וכל מי שקצת חודר אותו מוחזר. לכן, כל מה שמגיע חוזר, לכן הזרם יהיה אפס. אם נבדיל את שני הזרמים, הזרם שנע מהזרם שחוזר, נקבל שהזרם בכל מקום הולך כמו $\sqrt{x}$.

16.1.3 פיזור ממדרגת פוטנציאל

יש לנו פוטנציאל בצורת מדרגה:

$$V(x) = \begin{cases} V_0, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$



הכלי שיש לנו כדי לטפל בדבר הזה הוא משוואת שרדינגר. זה פוטנציאל קבוע למקוטעין, אז אנחנו יודעים את הפתרון משמאל ואת הפתרון מימין.

<u>נתחיל מלפתור עבור $E > V_0$</u>:

נגדיר משמאל: $k_1 = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}E}$ ומימין $k_2 = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E-V_0)}$. מה שנשאר זה לתפור את תנאי השפה של שני הפתרונות. פונ' הגל:

$$\psi_1(x) = A_+e^{ik_1x} + A_-e^{-ik_1x}$$

$$\psi_2(x) = B_+e^{ik_2x} + B_-e^{-ik_2x}$$

כדי להקל, נניח שזרם הסתברות מגיע רק מצד שמאל ולא מצד ימין (בסוף נראה שההנחה הזאת לא תפגע בנו). זה אומר ש-$B_- = 0$, כי ראינו שזה האיבר שיתרום לזרם ההסתברות שמגיע באינסוף.

נדרוש רציפות של הפונ' בנק' $x = 0$:

$$A_+ + A_- = B_+$$

ושל הנגזרת ב-$x = 0$ (כי הפוטנ' סופי מסביב לנק'):

$$ik_1A_+ - ik_1A_- = ik_2B_+$$

נציב את הראשונה לשנייה:

$$ik_1A_+ - ik_1A_- = ik_2(A_+ + A_-)$$

$$(k_1 + k_2)A_- = (k_1 - k_2)A_+$$

$$\frac{A_-}{A_+} = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \equiv r$$

קיבלנו את היחס בין המשרעות המרוכבות מצד שמאל למחסום בין הצפיפות שנעה ימינה לצפיפות שנעה שמאלה, ונסמן אתו ב-r.

נקח כעת את תנאי הרציפות, נכפיל אותו ב-ik_1 ונחבר אותו לתנאי על הנגזרת:

$$2ik_1A_+ = iB_+(k_1 + k_2)$$

$$\frac{B_+}{A_+} = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} \equiv t$$

מה המשמעות הפיזיקלית של היחסים האלה? בשביל להבין את זה נדבר על זרמי הסתברות. אנחנו יודעים שזרם ההסתברות באיזור 1:

$$J_1=\frac{\hbar k_1}{m}\left[|A_+|^2-|A_-|^2\right]$$

ובאיזור 2:

$$J_1=\frac{\hbar k_2}{m}|B_+|^2$$

היחס בין הזרם שמגיע למדרגה משמאל ($\frac{\hbar k_1}{m}|A_+|^2$) לזרם שחוזר ממנה שמאלה לאינסוף ($\frac{\hbar k_1}{m}|A_-|^2$) הוא מקדם החזרה של זרמים מהמדרגה:

$$R\equiv\frac{J_{1_-}}{J_{1_+}}=\frac{|A_-|^2}{|A_+|^2}=|r|^2$$

r הוא יחס משרעות, R הוא יחס הזרמים. נציב:

$$R=\frac{(k_1-k_2)^2}{(k_1+k_2)^2}=\frac{(k_1+k_2)^2-4k_1k_2}{(k_1+k_2)^2}=1-\frac{4k_1k_2}{(k_1+k_2)^2}$$

אפשר גם לדבר על היחס בין הזרם שעבר לזרם שהגיע (מקדם ההעברה של הזרמים):

$$T\equiv\frac{J_{1_+}}{J_{2_+}}=\frac{k_2}{k_1}\frac{|B_+|^2}{|A_+|^2}=\frac{k_2}{k_1}|t|^2$$

נציב:

$$T=\frac{4k_1k_2}{(k_1+k_2)^2}$$

אפשר לשים לב גם שזה מקיים:

$$T=1-R$$

נשים לב שגם r וגם t הם ממשיים טהורים. זה אומר שבין האמפליטודות של החלקיק לפני שהוא מגיע לאחרי שהוא חוזר או עובר אין שינוי פאזה (אחרת הם היו מדומים). יש מקרים שבהם כן יש שינוי פאזה, בדוגמה הזו לא.

מקדם ההעברה של הזרמים שווה לאחד פחות מקדם ההעברה, שזה הגיוני. נרצה להבין מה המשמעות הפיזיקלית של זה שהסכום שלהם הוא 1:

$$R+T=\frac{|A_-|^2}{|A_+|^2}+\frac{k_2}{k_1}\frac{|B_+|^2}{|A_+|^2}=1=\frac{|A_+|^2}{|A_+|^2}$$

$$k_2|B_+|^2=k_1\left(|A_+|^2-|A_-|^2\right)$$

עד כדי קבועים, מה שקיבלנו באגף שמאל זה את צפיפות הזרם בצד ימין של המחסום, ובצד ימין של המשוואה את סך צפיפות הזרם מצד שמאל. במילים אחרות, צפיפות זרם ההסתברות משמאל וימין למחסום שוות. אפשר לקרוא לזה חוק קירכהוף – סך כל הזרמים שנכנסים לנק' מסויימת שווה לסך הזרמים שיוצאים, יש שימור זרם בצומת. זה מה שגרם לכך ש-$R+T=1$.

<u>נפתור עבור $E<V_0$</u>:

האלגברה תהיה אותו הדבר חוץ מזה שבמקום ik_2 יהיה α, אז נדלג עליה ונקח ישר את הפתרונות תחת ההחלפה:

$$\frac{A_-}{A_+} = \frac{k_1 - i\alpha}{k_1 + i\alpha} \equiv r$$

$$\frac{B_+}{A_+} = \frac{2k_1}{k_1 + i\alpha} \equiv t$$

ונקבל:

$$R = |r|^2 = 1$$

כשהחלקיק נמצא מתחת למחסום הפוטנציאל הוא אמנם חודר, אמנם יש פתרון של מנהור מתחת למחסום, אבל הפתרון הזה הוא פתרון דועך. אפשר לחשב את זרם צפיפות ההסתברות בתוך המחסום ונקבל שהוא אפס (שזה מתאים למה שדיברנו עליו קודם).

למעשה, גם זרם צפיפות ההסתברות לפני המחסום הוא אפס, כי כל מה שמגיע גם חוזר. אבל כן יש משהו חדש – האמפליטודות $|A_-| = |A_+|$, אבל יש ביניהם זווית:

$$\varphi = 2\,\mathrm{atan}\left(\frac{\alpha}{k_1}\right)$$

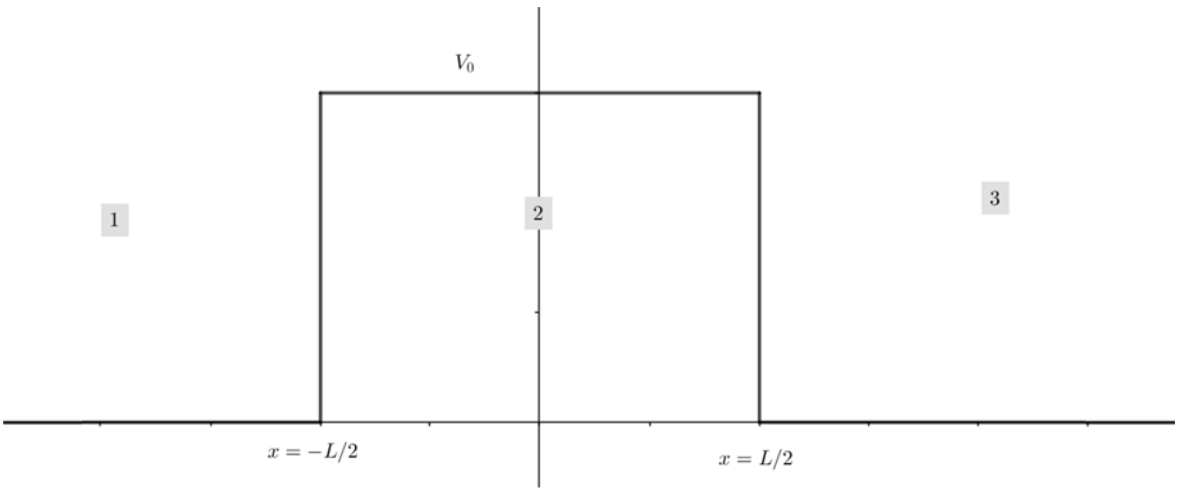
יש פאזה יחסית בין פונ' הגל שמגיעה משמאל לבין פונ' הגל שחוזרת. למה? זה מתאים למה שכבר דיברנו – מצד שמאל של המחסום יש אוסילציות, אחרי המחסום מימין יש גל דועך. אחרי המחסום החלקיק מתקדם וחוזר, ואפשר לדבר על ה"זמן" שהחלקיק בילה בתוך המחסום. זה נותן לנו הבנה אינטואיטיבית של איך נצברה פאזה.

עד כה פתרנו רק עבור זרם הסתברות שמגיע מצד אחד, מה קורה אם יש גם זרם שמגיע מהצד השני? נפרק את השאלה לשני חלקים, אחד עבור הזרם שמגיע מצד אחד ואחד עבור הזרם מהצד השני. ראינו שהפתרון הוא אותו הדבר עד כדי ההחלפה של k_1 ו-k_2, ואז אפשר לחבר את התשובות (ונקבל עדיין שסך הזרמים בצומת מתאפס, ורק נשים לב שמקדמי ההעברה וההחזרה יהיו תלויים בכיוון – אחד למעבר משמאל לימין והשני מימין לשמאל).

16.1.4 מכשול פוטנציאל סופי

יש לנו פוטנציאל בצורה של מדרגה ברוחב סופי:

$$V(x) = \begin{cases} 0, |x| > \frac{L}{2} \\ V_0, |x| \le \frac{L}{2} \end{cases}$$



מה שייקרה כאן בפועל זה חלקיק חופשי שרואה מדרגה ובהמשך רואה עוד מדרגה. כדי לפתור את זה נכתוב משוואות לכל אחד מהאיזורים, ואז נתפור אותן בעזרת רציפות של פונ' הגל והנגזרת.

מאחר ולא מעניין אותנו אם המדרגה עולה או יורדת, V_0 יכול להיות גם חיובי וגם שלילי. כשהוא שלילי זה בור פוטנציאל סופי כמו שכבר פתרנו, אבל כשעשינו את זה לא פתרנו עבור אנרגיות שגדולות מהבור, והפעם כן נפתור את הפתרונות האלה.

<u>שוב, נתחיל עם פתרון עבור $E > V_0$</u>:

נכתוב את פונ' הגל:

$$\psi_1(x) = A_{1+}e^{ik_1x} + A_{1-}e^{-ik_1x}$$

$$\psi_2(x) = A_{2+}e^{ik_2x} + A_{2-}e^{-ik_2x}$$

$$\psi_3(x) = A_{3+}e^{ik_1x} + A_{3-}e^{-ik_1x}$$

כמו במקרה של המדרגה הסופית, נגביל את עצמינו לזרם הסתברות שמגיע מצד שמאל בלי הגבלת הכלליות. כלומר, $A_{3-} = 0$ (שמבטא זרם שמגיע לכיוון המחסום מאינסוף למינוס אינסוף).

17 שיעור 17 – 29.5.18

17.1 פיזור חד־מימדי – המשך

17.1.1 מכשול פוטנציאל סופי – המשך

נכתוב את משוואות הרציפות של הפונ' והנגזרות:

$$A_{1+}e^{-ik_1\frac{L}{2}} + A_{1-}e^{ik_1\frac{L}{2}} = A_{2+}e^{-ik_2\frac{L}{2}} + A_{2-}e^{ik_2\frac{L}{2}}$$

$$k_1\left(A_{1+}e^{-ik_1\frac{L}{2}} - A_{1-}e^{ik_1\frac{L}{2}}\right) = k_2\left(A_{2+}e^{-ik_2\frac{L}{2}} - A_{2-}e^{ik_2\frac{L}{2}}\right)$$

$$A_{2+}e^{ik_2\frac{L}{2}} + A_{2-}e^{-ik_2\frac{L}{2}} = A_{3+}e^{ik_1\frac{L}{2}}$$

$$k_2\left(A_{2+}e^{ik_2\frac{L}{2}} - A_{2-}e^{-ik_2\frac{L}{2}}\right) = k_1A_{3+}e^{ik_1\frac{L}{2}}$$

בשביל לחסוך את האלגברה, לא נפתור, וישר ניתן את התשובה:

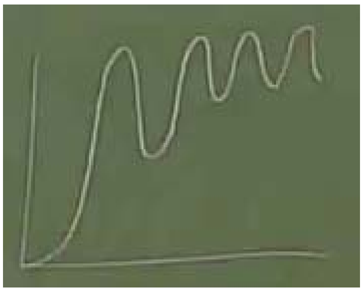
$$t = \frac{A_{3+}}{A_{1+}} = \frac{4k_1k_2e^{-ik_1L}}{(k_1+k_2)^2e^{-ik_2L} - (k_1-k_2)^2e^{ik_2L}}$$

נכתוב גם את T:

$$T = \frac{|A_{3+}|^2}{|A_{1+}|^2} = \frac{4k_1^2k_2^2}{4k_1^2k_2^2 + (k_1^2-k_2^2)^2\sin^2(k_2L)} = \frac{4E(E-V_0)}{4E(E-V_0) + V_0^2\sin^2\left(\sqrt{\frac{2mL^2}{\hbar^2}(E-V_0)}\right)}$$

קיבלנו פונ' מחזורית בארגומנט k_2L. זה אומר שההעברה עולה ויורדת כשאנחנו מעלים את k_2, שזה אומר מעלים גם את האנרגיה של החלקיק. אם נקח חלקיקים עם אנרגיה מסויימת וניתן להם יותר ויותר אנרגיה, סיכויי המעבר שלהם יעשו אוסילציות.

אפשר לשרטט את הגרף הזה, והוא יראה כמו משהו מהצורה (הציר האופקי הוא E/k והאנכי T):



מה שמעניין אותנו הוא במה הגרף מחזורי. כאמור, זה מחזורי ב-k_2, שהוא אורך הגל דה-ברולי של החלקיק מעל המחסום.

ראינו לפני שהתחלנו את המחסום הסופי מחסום אינסופי, ושם ברגע שיש שינוי בפוטנציאל יש סיכוי מסויים לחלקיק לעבור וסיכוי מסויים להיות מוחזר. אם מדובר על חבילת גלים אפשר לדבר על סופרפוזיציה של גלים שעוברים ומוחזרים. אותו דבר היה קורה גם אם הפוטנציאל היה עולה, כלומר זה היה בור ולא קיר.

במקרה של המחסום הסופי יש שני "מפזרים חדים" שנמצאים אחד אחרי השני. כשהחלקיק פוגש בראשון יש לו הסתברות להיות מועבר או מוחזר, למה שמועבר ומגיע לצד השני יש הסתברות גם להיות מוחזר או מועבר וכך הלאה. כך נקבל אינסוף תרומות למשרעת המועברת ואינסוף תרומות למשרעת המוחזרת.

אינסוף התרומות האלה מתאבכות ברגישות לפאזה שהגל צובר בתוך המחסום. הפאזה הזאת מתאימה לכמה פעמים הוא בילה בין הקירות – כל עוד הוא ייכנס מספר חצי שלם של פעמים בהלוך (כלומר מספר שלם בחזור) נקבל התאבכות בונה ביציאה: הסינוס במכנה יקבל מינימום, כלומר המכנה יהיה מינימלי ו-T יהיה מקסימלי ויקבל את הערך 1. זה כמו במהוד אופטי – כשאנחנו נמצאים ברזוננס יש אינסוף התאבכויות אבל הכל עובר.

אותו דבר ייתקבל גם אם V_0 תהיה שלילי, רק סדר הפיזורים ישתנה (קודם בעליה ואז בירידה או להפך), אבל התוצאה תהיה זהה.

זה מחזיר אותנו לעניין הבור הסופי עבור מצבי אנרגיה גדולים מהפוטנציאל – יש לנו רצף. מעל הבור יש אינסוף פתרונות, כל אנרגיה היא מותרת, אבל כל אנרגיה עוברת את הבור אחרת. לאנרגיות מסויימות יש רזוננס – הן עוברות את הבור בצורה מושלמת (וזה מחזורי ב-k_2).

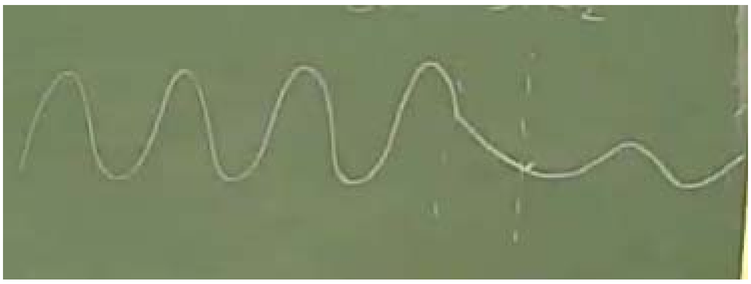
<u>נפתור עכשיו עבור $0 < E < V_0$</u>:

V הוא חיובי עכשיו (אם הוא שלילי זה לא רלוונטי), והאנרגיה היא מתחת. ראינו שכשהמחסום מדרגה אינסופית, אם אנחנו מתחת למחסום זה המקבילה האופטית להחזרה פנימית מלאה – כל מה שמגיע רק חודר קצת את המחסום ואז מוחזר.

נעשה גם כאן קיצור דרך – נסתכל על הפתרונות שקיבלנו בשיעור הקודם, ונראה שבאיזור הראשון והשלישי יש אותו פתרון, ואנחנו רק צריכים באיזור האמצעי להחליף את ik_2 ב-α. נקבל:

$$T = \frac{4k_1^2\alpha^2}{4k_1^2\alpha^2 + (k_1^2 - \alpha^2)^2 \sinh^2(\alpha L)}$$

זה פתרון לא מחזורי (יש לנו הפעם sinh ולא sin) שאומר פשוט מה הסיכוי לעבור את המחסום. עכשיו הסיכוי הוא לא אפס – אנחנו מקבלים מנהור עם אקספוננט שולט שיורד, אבל הוא לא דועך עד לאפס. לפני שהוא מגיע לאפס המחסום נגמר, והוא מתחיל שוב להתנדנד באותו k רק באמפליטודה יותר נמוכה. פונ' הגל תראה מצורה כזאת:



הקווים המקוקוים הם נקודות הכניסה והיציאה מהמחסום. לפני ואחרי הוא מתנדנד באותו תדר רק באמפליטודה יותר קטנה בסוף, ותוך כדי המחסום יש דעיכה.

נתעניין כעת בגבול של מחסום ארוך $\lim_{\alpha L\to\infty} T$. הגבול הזה אומר שאורך המחסום יותר גדול מ-$1/\alpha$, או בניסוח אחר אורך המחסום יותר ארוך ממספר אורכי דעיכה (α הוא הרי אורך הדעיכה).

$$\lim_{\alpha L\to\infty} T = \lim_{\alpha L\to\infty} \frac{1}{1+\frac{(k_1^2-\alpha^2)^2}{4k_1^2\alpha^2}\sinh^2(\alpha L)}$$

כש-αL הולך לאינסוף, הסינוס ההיפרבולי הוא כמו אקספוננט של αL (ועוד אקספוננט שדעך), אז יש אקספוננט בריבוע, והוא הולך לאינסוף הרבה יותר מהר מהאחד. נקבל (נזכור שבסינוס ההיפרבולי יש פקטור חצי):

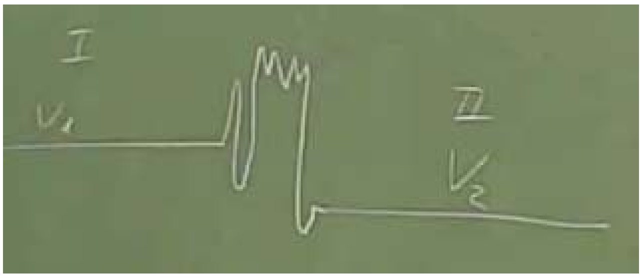
$$\lim_{\alpha L\to\infty} \frac{1}{1+\frac{(k_1^2-\alpha^2)^2}{4k_1^2\alpha^2}\sinh^2(\alpha L)} = \frac{16k_1^2\alpha^2}{(k_1^2-\alpha^2)^2}e^{-2\alpha L} = \frac{16E(V_0-E)}{V_0^2}e^{-2\alpha L}$$

מה שצריך ללמוד מזה זה שברגע שהמחסום לא מאוד מאוד צר, סיכויי המעבר דועכים כמו אורך המחסום. זה מסביר למה אנחנו לא מצליחים לעבור מחסומים קלאסים, מחסומים בגדלים שאנחנו נתקלים בהם ביום־יום.

17.2 מטריצות פיזור והעברה

זה החלק השני של פיזור, אבל הוא שייך עדיין לפיזור חד־מימדי. נסתכל על כל מה שלמדנו במבט יותר מלמעלה, ונצליח לקבל תוצאות קשות בדרך יותר פשוטה.

אנחנו מסתכלים על התרחיש הבא: שני איזורים עם פוטנציאל קבוע, וביניהם כל דבר שהוא –



זה יכול להיות מדרגה, משהו רציף או כל פוטנציאל אחר. לעניינינו זה לא משנה אם אפשר או אי אפשר לפתור, כי נאמר את הדבר הבא – נניח שכל מה שאנחנו יודעים על המקרה הזה הוא מקדם את ההעברה וההחזרה. מאותו רגע, כל מה שבאמצע הופך להיות קופסא שחורה, ואנחנו רוצים לדעת להגיד דברים על המקרה הזה (לפתור את משוואת שרדינגר) רק עם הידע שיש לנו.

במרכז זנחנו את הרעיון לפתור, אבל אנחנו כן יודעים לפתור משני הצדדים:

$$\psi_1(x) = A_+e^{ik_1x} + A_-e^{-ik_1x}$$

$$\psi_2(x) = B_+e^{ik_2x} + B_-e^{-ik_2x}$$

עבור $k_{1,2} = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E-V_{1,2})}$ כרגיל.

נגדיר שני וקטורים שנבנה אותם מהמקדמים A, B:

$$\begin{bmatrix} A_+ \\ B_- \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} B_+ \\ A_- \end{bmatrix}$$

נשים לב שהווקטור הראשון (משמאל) הוא וקטור של שתי המשרעות שנכנסות לאיזור הפיזור, השני הוא של שתי המשרעות שיוצאות מאיזור הפיזור.

נגדיר גם מטריצה 2×2 שהיא פונ' של האנרגיה של החלקיק. ההגדרה תעשה לפי הגדרת הפעולה שלה על אחד הווקטורים:

$$S(k)\begin{bmatrix}A_+\\B_-\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}B_+\\A_-\end{bmatrix}$$

קל להבין מה ערכי המטריצה המקשרת אם מסתכלים על כמה מקרי קצה:

- נניח שחלקיקים מגיעים רק משמאל, כלומר B_- הוא אפס.
  - o נקבל ש-$B_+ = s_{11} \cdot A_+$. מזה אפשר להבין ש-$s_{11} = t$.
  - o נקבל $A_- = s_{21} \cdot A_+$, לכן $s_{21} = r$.

- עכשיו נניח שחלקיקים מגיעים רק מימין, כלומר $A_+ = 0$.
  - o נקבל $B_+ = s_{12} \cdot B_-$. האיבר הזה הוא שוב r, אבל כמו שראינו יכול להיות הבדל של פאזה בין שני הכיוונים. לכן, נסמן את המקדם הזה ב-r_2 ואת הקודמים ב-r_1, t_1.
  - o נקבל $A_- = s_{22}B_-$, לכן $s_{22} = t_2$.

סה"כ:

$$S(k)=\begin{bmatrix}t_1(k) & r_2(k)\\ r_1(k) & t_2(k)\end{bmatrix}$$

המטריצה הזאת נקראית **מטריצת הפיזור**. במימד אחד היא לא מאוד שימושית בפני עצמה, אבל בשניים ושלושה מימדים גם אפשר לשייך את כל האמפליטודות האפשריות שנכנסות לאלה שיוצאות, ושם היא מאוד חשובה.

נכתוב עכשיו את הפתרון המלא למצב שהחלקיק מגיע משמאל (ψ^+) והפתרון למצב שהחלקיק מגיע מימין (ψ^-):

$$\begin{cases}\psi_1^+(x) = A_+e^{ik_1x} + r_1A_+e^{-ik_1x}\\ \psi_2^+(x) = t_1A_+e^{ik_2x}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\psi_1^-(x) = t_2B_-e^{-ik_1x}\\ \psi_2^-(x) = r_2B_-e^{ik_2x} + B_-e^{-ik_2x}\end{cases}$$

כשרשמנו חלק מהאמפליטודות באמצעות מקדמי ההחזרה וההעברה הרלוונטיים $A_- = r_1A_+$, $B_+ = t_1A_+$ במקרה הראשון ו-$A_- = t_2B_-$, $B_+ = r_2B_-$ בשני.

אלה שני הפתרונות של המקרה כתובים רק בעזרת פרמטר אחד, שגם הוא ניתן לנרמול דיראק (אי אפשר הרי לנרמל אותו בצורה רגילה כי יש פונ' מתנדנדות עד אינסוף). בלי הגבלת הכלליות אפשר לבחור: $A_+ = B_- = C$. זה בלי הגבלת הכלליות כי זה עדיין פתרון של המשוואה.

נגיד עוד משהו שאפשר להוכיח בקלות – אם הפוטנ' ממשי טהור (שזה מה שנתקלנו בו ונתקל בקורס), אז עבור כל ψ שפותר את משוואת שרדינגר גם ψ^* פותר אותה (אם נצמיד את כל המשוואה נקבל את זה מיידית). בפרט, אצלינו גם ψ^{+*} ו-ψ^{-*} פותרים.

נקח את הפתרונות ונצמיד אותם:

$$\psi_1^{+*}(x) = r_1^*Ce^{ik_1x} + Ce^{-ik_1x}$$

$$\psi_2^{+*}(x) = t_1^*Ce^{-ik_2x}$$

שני אלה כאמור גם פתרונות של משוואת שרדינגר עם תנאי שפה כלשהו (${\psi_1^+}^*$ לא מתאר חלקיק שמגיע משמאל, הוא הצמוד הקומפלקסי של חלקיק שמגיע משמאל, וכנ"ל לפתרון השני עם חלקיק שמגיע מימין. יש איזשהם תנאי שפה אחרים).

כעת, אם שלושת ה-ψ^+ הם פתרונות, גם סכומים לינאריים שלהם הם פתרונות של משוואת שרדינגר, רק עם תנאי שפה אחרים. נכתוב את הפתרון של חלקיק שמגיע מאינסוף למינוס אינסוף בעזרת סכום לינארי של הפתרון של חלקיק שמגיע משמאל ועוד הפתרון הצמוד שלו. כלומר, נרצה לחבר את הפתרונות שיש לנו כך שיקיימו תנאי שפה של חלקיק שמגיע מימין.

כדי לקיים את התנאי הזה, נרצה לקחת את הפתרונות כך שיתבטלו e^{ik_1x} ו-e^{ik_2x}, ויהיה לנו רק חלקיק שמגיע משמאל. נכפיל אם כן את המשוואה של ψ_1^+ ב-r_1^* ונחסר ביניהן:

$$\psi_1^- = r_1^*\psi_1^+ - {\psi_1^+}^*$$

נקבל ת המשוואה:

$$\psi_1^- = (|r|^2-1)Ce^{-ik_1x}$$

נעשה את אותו הדבר בחלק השני (עכשיו כבר אין חופש בחירה – צריך לקחת את הפתרונות באותו המשקל כמו בחלק הראשון):

$$\psi_2^- = r_1^*\psi_2^+ - {\psi_2^+}^*$$

$$\psi_2^- = r_1^*t_1Ce^{ik_2x} - t_1^*Ce^{-ik_2x}$$

זה נתן לנו עוד פתרון עבור חלקיק שמגיע משמאל. מיחידות הפתרונות, נרצה בשלב הבא להשוות את הפתרונות האלה, אבל קודם כל צריך לדאוג לנרמול. אם נתבונן שוב בפתרון שהיה לנו עבור האיזור השני + $\psi_2^-(x)\& = r_2B_-e^{ik_2x}$ $B_-e^{-ik_2x}$, נשים לב שהמקדם של e^{-ik_2x} הוא בלי שום מקדמים חוץ מ-B_-, שעכשיו הוא C, אז הכי נח לדרוש את הנרמול דרכו. המקדם המתאים לאיבר הזה בפתרון החדש הוא $-t_1^*$, אז כדי לקבל במשוואה החדשה את המקדם C בלי שום תוספות צריך לחלק את הכל ב-$-t_1^*$. אחרי שנעשה את זה יובטח לנו שהם מנורמלים באותה צורה, ואפשר יהיה להשוות מקדמים.

נעשה השוואת מקדמים עכשיו בהתחשב בנרמול. נתחיל עם המקדם של e^{-ik_1x}:

$$t_2 = -\frac{|r|^2-1}{t_1^*} = \frac{k_2}{k_1}\frac{|t_1|^2}{t_1^*} = \frac{k_2}{k_1}t_1$$

נשווה את המקדם של e^{ik_2x}:

$$r_2 = -r_1^*\frac{t_1}{t_1^*} = -\frac{t_1}{t_1^*}r_1^*$$

מצאנו שההעברה וההחזרה מצד שני הם לא פרמטרים חופשיים, בגלל שעקביות במשוואת שרדינגר הכתיבה לנו אילוצים עליהם. נכתוב שוב את המטריצה S תחת זה:

$$S(k) = \begin{bmatrix} t_1 & -\frac{t_1}{t_1^*}r_1^* \\ r_1 & \frac{k_2}{k_1}t_1 \end{bmatrix}$$

נשים לב ש-r_1 ו-$-\frac{t_1}{t_1^*}r_1^*$ הם באותו הגודל, אז ה-Rים שיהיו מתאימים להם יהיו שווים.

אפשר להראות שהמטריצה S היא אוניטרית. כמו שאמרנו, המטריצה הזאת מקשרת את האמפליטודות לפני הפיזור לאמפליטודות שנמצאות אחרי הפיזור, שיוצאות מהפיזור, ומיינו אותן לשתי הנכנסות ושתי היוצאות.

נגדיר עכשיו מטריצה אחרת – נחלק את ארבעת המקדמים האלה לאמפליטודות משמאל $\begin{bmatrix} A_+ \\ A_- \end{bmatrix}$ ולאמפליטודות מימין $\begin{bmatrix} B_+ \\ B_- \end{bmatrix}$, ונמצא את המטריצה שמקשרת ביניהם. למטריצה הזאת נקרא **מטריצת מעבר**, ושוב – היא מקשרת אמפליטודות משמאל לאמפליטודות מימין (מיון של האמפליטודות במרחב, לעומת המיון בזמן שעשתה המטריצה השנייה). אין לנו חופש אינסופי בכתיבה שלה – יש לנו כבר את הפרמטרים של מטריצת הפיזור, ואנחנו רוצים לכתוב אותה באמצעות זה. בשביל לעשות את זה נפעיל את S על האיברים של ווקטור הכניסה:

$$B_+ = t_1 A_+ - \frac{t_1}{t_1^*} r_1^* B_-$$
$$A_- = r_1 A_+ + \frac{k_2}{k_1} t_2 B_-$$

נסדר את זה כך שבצד אחד יופיעו רק ה-B ובצד שני רק ה-A. נבודד את B_- מהמשוואה התחתונה:

$$B_- = \frac{k_1}{k_2}\frac{1}{t_1}(-r_1 A_+ + A_-)$$

נציב את זה בראשונה:

$$\begin{aligned} B_+ = t_1 A_+ - \frac{t_1}{t_1^*} r_1^* \frac{k_1}{k_2}\frac{1}{t_1}(-r_1 A_+ + A_-) &= \left(\frac{k_1}{k_2}\frac{|r_1|^2}{t_1^*} + t_1\right) A_+ - \frac{k_1}{k_2}\frac{r_1^*}{t_1^*} A_- \\ &= \left(\frac{|r_1|^2 + \frac{k_2}{k_1}|t_1|^2}{t_1^* \frac{k_2}{k_1}}\right) A_+ - \frac{k_1}{k_2}\frac{r_1^*}{t_1^*} A_- \\ &= \frac{k_1}{k_2}\frac{1}{t_1^*} A_+ - \frac{k_1}{k_2}\frac{r_1^*}{t_1^*} A_- \end{aligned}$$

קיבלנו את מטריצת המעבר:

$$\begin{bmatrix} B_+ \\ B_- \end{bmatrix} = T(k) \begin{bmatrix} A_+ \\ A_- \end{bmatrix} = \frac{k_1}{k_2} \begin{bmatrix} \frac{1}{t_1^*} & -\frac{r_1^*}{t_1^*} \\ -\frac{r_1}{t_1} & \frac{1}{t_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_+ \\ A_- \end{bmatrix}$$

אפשר להראות שהדטרמיננטה של מטריצת המעבר היא 1. אם כותבים אותה ודורשים שהיא תהיה 1, מקבלים את מה שקראנו לו חוק קירכהוף, שימור הזרמים בנקודה.

למטריצות המעבר תהיה חשיבות גדולה. נניח שיש לנו מקרה אפילו יותר מסובך ממה שהיה קודם – יש שני איזורים עם פוטנציאל קבוע בכ"א מהם וביניהם מחסום מוזר, ואנחנו יודעים את מטריצת הפיזור והמעבר של אותו המחסום, אבל המחסום בנוי מרצף של מחסומים קטנים ולא ידועים, אבל שאנחנו כן יודעים את מטריצות המעבר ביניהם.

נניח שיש N מכשולים. נטען שמאחר ומטריצת המעבר מקשרת בין אמפליטודות מימין לבין מטריצה משמאל, אם נקח את המטריצה ה-N ונכפול אותה משמאל במטריצה ה-$N-1$, נקבל את מטריצת המעבר שמתאימה למעבר מהאיזור

שלפני המכשול ה-$N-1$ לאיזור שאחרי המכשול ה-N. אם נוסיף להכפיל ככה משמאל במטריצות של המכשולים שלפני, נקבל בסופו של דבר מטריצת מעבר שמתארת לנו את המעבר מלפני המכשולים לאחריהם, זאת למרות שיש לנו רק מידע חלקי על המעברים בתוך המכשול הכולל.

ברגע שיש לנו את המטריצה אפשר ללכת למשל לאיבר T_{22}, שאנחנו יודעים שצריך להיות שווה ל-$1/t_1$, ולחלץ ממנו את t_1. ככה נוכל לפתור את משוואת שרדינגר פשוט ע"י הכפלה של מטריצות. בלי המטריצות זה היה מאוד קשה, גם אם היינו יודעים לפתור את משוואת שרדינגר בתוך כל מכשול, זו הייתה עבודה קשה לתפור אותם ביחד אם לא היינו משתמשים במטריצות.

נחזור למדרגת הפוטנציאל שכבר פתרנו, ונרצה לחשב את זה באמצעות מטריצות. המחסום מורכב משינוי חד אחד, התקדמות חופשית ושינוי חד נוסף. נכתוב את המטריצות של כ"א מהאלמנטים האלה, ונראה שאפשר היה לקבל את אותה התוצאה. הפתרון שקיבלנו בשיעור הקודם היה:

$$r_1 = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}, \qquad t_1 = \frac{2k_1}{k_1 + k_2}$$

$$T(k) = \frac{1}{2k_2}\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & k_2 - k_1 \\ k_2 - k_1 & k_1 + k_2 \end{bmatrix}$$

זה מטריצה עבור מדרגת הפוטנציאל. נרצה לשאול גם מה המטריצה כשלא קורה כלום, כלומר פוטנציאל קבוע. נצטרך את זה בשביל לעשות את המעבר מצד אחד של המדרגה לצד השני. מה שקורה באמצע זה שרק נצברת פאזה, בהתאם לאורך של המעבר. אין החזרות, אז המטריצה תהיה אלכסונית. המטריצה תהיה:

$$T(k) = \begin{bmatrix} e^{ikL} & 0 \\ 0 & e^{ikL} \end{bmatrix}$$

נוכל לכתוב עכשיו את מטריצת המעבר של מחסום סופי – נרשום את הירידה, מעבר ואז עלייה:

$$T(k) = \underbrace{\frac{1}{2k_2}\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & k_1 - k_2 \\ k_1 - k_2 & k_1 + k_2 \end{bmatrix}}_{\text{ירידה}} \underbrace{\begin{bmatrix} e^{ikL} & 0 \\ 0 & e^{ikL} \end{bmatrix}}_{\text{מעבר}} \underbrace{\frac{1}{2k_2}\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & k_2 - k_1 \\ k_2 - k_1 & k_1 + k_2 \end{bmatrix}}_{\text{עלייה}}$$

בשיעור הבא נבצע את הכפל ונראה שזה כמו מה שקיבלנו בחישוב שכבר עשינו.

18 שיעור 18 – 3.6.18

18.1 מטריצות פיזור והעברה – המשך

בשיעור הקודם ראינו ראינו שמטריצת המעבר של מדרגת פוטנציאל היא:

$$T(k)=\underbrace{\frac{1}{2k_2}\begin{bmatrix}k_1+k_2 & k_1-k_2\\ k_1-k_2 & k_1+k_2\end{bmatrix}}_{\text{ירידה}}\underbrace{\begin{bmatrix}e^{ikL} & 0\\ 0 & e^{ikL}\end{bmatrix}}_{\text{מעבר}}\underbrace{\frac{1}{2k_2}\begin{bmatrix}k_1+k_2 & k_2-k_1\\ k_2-k_1 & k_1+k_2\end{bmatrix}}_{\text{עלייה}}$$

אם נכפול מצד שמאל בווקטור שאנחנו רוצים להעביר נקבל הכפלה לפי סדר המעבר – עלייה, מעבר בלי שינוי וירידה.

אם נבצע את המכפלות הפנימיות, נקבל (נציין רק שניים מארבעת האיברים):

$$T(k)=\frac{1}{2k_1k_2}\begin{bmatrix}\overset{T_{11}}{} & \overset{T_{12}}{}\\ i(k_1^2-k_1^2)\sin(k_2L) & -i(k_1^2+k_2^2)\sin(k_2L)+2k_1k_2\cos(k_2L)\end{bmatrix}$$

את t_{11} ואת t_{12} אפשר לכתוב באמצעות שני האיברים האחרים לפי הקשרים שראינו בשיעור שעבר.

נכתוב את מקדמי ההחזרה וההעברה לפי מה שראינו בשיעור שעבר (ולא נשכח את המקדם שבחוץ):

$$t_1=\frac{1}{T_{22}}=\frac{1}{2k_1k_2(2k_1k_2\cos(k_2L)-i(k_1^2+k_2^2)\sin(k_2L))}$$

$$r_1=-\frac{T_{21}}{T_{22}}=-\frac{i(k_1^2-k_1^2)\sin(k_2L)}{2k_1k_2(2k_1k_2\cos(k_2L)-i(k_1^2+k_2^2)\sin(k_2L))}$$

אם נשווה את מה שקיבלנו כאן לתוצאות שקיבלנו מחישוב ישיר למשוואת שרדינגר, נראה ש-T יהיה בדיוק שווה למה שקיבלנו שם, אבל עבור t יהיה חסר לנו איבר אחד. זה איבר של פאזה $\exp(-ik_1L)$. נסביר למה זה קרה כדי שנבין קצת יותר מה המשמעות של פאזה בהקשר של מטריצות מעבר, שהיא קצת שונה מההקשר של פאזות בפונקציית הגל שהתרגלנו אליה.

מה שאנחנו מדברים עליו זה יחס בין אמפליטודות של מה שמשמאל ומה שמימין. במשוואת שרדינגר יש פאזה אחת כללית לפונקציית הגל שהיא בכל מקום. כשאנחנו מדברים על התקדמות ועל מטריצות מעבר, גם אם מדובר במצב עמיד, בין שני נקודות שאנחנו מתקדמים ביניהן יש שוני בפאזה של פונקציית הגל. כלומר, בדרך של מטריצות מעבר אנחנו מקבלים אקסטרה פאזה, שהיא תנועה של חלקיק חופשי על כל המחסום (ותוספת הפאזה הזאת בדיוק מבטל את הפאזה של $\exp(-ik_1L)$). צריך להיות מודעים לזה – תהיה חסרה לנו פאזה (או למעשה יש לנו פאזה מיותרת של $\exp(ik_1L)$), ולכן לא נקבל בדיוק מה שקיבלנו קודם.

<u>הערה</u> – נראה טריק מתמטי שגורם למטריצות מעבר להיות עוד יותר חזקות, אבל הוא טריק מתמטי טהור, ולא ניתן לו משמעות פיזיקלית.

אנחנו מסתכלים על פוטנציאל אחרי ולפני (נניח ששניהם אפס) וביניהם מחסום, שהוא קופסא שחורה בשבילנו. אנחנו יודעים שאם הפוטנציאל בכל איזור הקופסא הוא חיובי לא יהיו מצבים קשורים, רק אם הקופסא בגובה סופי יהיו או החזרה והעברה רגילים (אם האנרגיה שלנו מעל האנרגיה של הקופסא) או מנהור (אם אנחנו מתחת), כמו שראינו.

אולם, אם יש בתוך הקופסא פוטנציאלים שליליים יותר נמוכים ממה שבחוץ, זה יהיה שונה קצת ממה שטיפלנו בו. כל מה שטיפלנו בו עכשיו בפיזור זה עדיין אנרגיה יותר גדולה מאפס, כי התחלנו עם זה שהפתרונות עושים אוסילציות לפני ואחרי המחסום. אם אנחנו מדברים על אנרגיות שליליות, לאו דווקא יש אוסילציות ויכול להיות שלפתרונות לפני ואחרי המחסום יש זנבות אקספוננציאלים. זה לא במסגרת הטיפול שלנו, ואי אפשר לדבר על חלקיקים שמגיעים ממינוס אינסוף כי אי אפשר לנרמל את זה.

נניח שקיימים ערכים שליליים בפוטנציאל, ולכן יש אפשרות לעוד פתרונות שמטריצת המעבר לא תספר עליהם כלום. נראה שבכל זאת יש טריק שכן מאפשר לנו ללמוד משהו –

פתרנו את הכל בשביל $E > 0$, אז נקח את הפתרון ונעשה לו המשכה אנליטית לאיזור $E < 0$. מה שעשינו עם מטריצות המעבר אמנם לא תופס באיזור הזה כמו שהוא, אבל אנחנו יודעים שמה שקיבלנו ממטריצת המעבר הוא למעשה פתרון של משוואת שרדינגר, שכן תופסת באיזורים האלה. נראה מה קורה כשעושים המשכה אנליטית של הפונ' – נעשה את זה על הפתרון שראינו בשיעור שעבר:

$$\psi_1^+ = Ce^{-\alpha_1 x} + r_1 Ce^{\alpha_1 x}$$

$$\psi_2^+ = t_1 Ce^{-\alpha_2 x}$$

כעת, קודם היה לנו ב-ψ_1^+ גל מתקדם, ועכשיו האיבר $Ce^{-\alpha_1 x}$ עושה את הפתרון לא פיזיקלי. לכן, הדרך היחידה שהפתרון הזה יהיה פיזיקלי הוא ש-$C = 0$, מה שמאפס את כל הפתרון ועושה אותו טריוויאלי ולא מעניין.

אז איך בכל זאת נוכל להפוך את הפתרון הזה ללא טריוויאלי ועדיין לשמור עליו פיזיקלי, שהוא עדיין יהיה פתרון של משוואת שרדינגר. נשים לב שאם $r_1, t_1 \to \infty$, אם נביא את מקדם ההחזרה או העברה לקוטב, הפתרון יהיה לא טריוויאלי, וככה נצליח למצוא פתרון מעניין.

נסתכל בתור מקרה בוחן על הדוגמא שעכשיו עשינו. נשים לב ש-k_2 יישאר כי הוא בתוך המחסום, ו-k_1 יוחלף ב-α. בשביל להשאיף את r_1, t_1 לאינסוף, נדרוש התאפסות של המכנה:

$$2i\alpha k_2 \cos(k_2 L) - i(k_2^2 - \alpha^2)\sin(k_2 L) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{2\alpha k}{k^2 - \alpha^2} = \tan(kL)$$

זה בדיוק התנאי לפתרונות שהיה לנו בבור פוטנציאל סופי (מנה בין התנאי של הסינוס לזה של הקוסינוס). הפתרונות של המשוואה הזאת אלה המצבים הלכודים בבור.

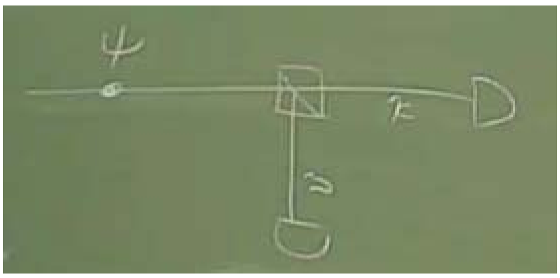
זה נותן לנו כלי מאוד חזק – לקחת בור פוטנציאל מורכב, לחשב לו מקדמי העברה והחזרה כשאנחנו עוברים מעל הפוטנציאל ואז לחפש קטבים בהמשכה האנליטית. כלי ההמשכה האנליטית הוא כלי מתמטי, אבל התוצאות הן פיזיקליות בגלל הטיעון הזה.

18.2 מרחבי מכפלה טנזורית (ריבוי דרגות חופש)

18.2.1 רקע

עבור רוב המקרים בעולם, הטיפול שנתנו עד עכשיו הוא חסר, כי לדבר על דרגת חופש אחת של מערכת זה דבר מאוד מקביל. נראה כל מיני מקרים שיש בהם ריבוי דרגות חופש, ולפני זה ננסח הקדמה אלגברית לעניין.

לדוגמא – נסתכל על מפצל קרן תלוי קיטוב שמגיע אליו חלקיק בקיטוב ψ. הקיטוב הוא מרחב הילברט דו־מימדי – יכול להיות אופקי, אנכי או כל צ"ל שלהם.



אולם, הקיטוב זו לא האינפורמציה היחידה כאן, אלא יש גם אינפורמציה מרחבית – החלקיק יכול או להמשיך בקו ישר או לפנות. המסלולים א' ו-ב' הם דרגת חופשת נוספת של החלקיק, ובלתי תלוי בקיטוב של החלקיק. יש כאן עוד דרגת חופשת דו־מימדית, ולמעשה נשים לב שגם לפני המעבר במפצל הבעיה הייתה בארבעה מימדים, כי החלקיק יכול היה להגיע למפצל גם מלמעלה (חלקיק שמגיע משמאל זה מקרה פרטי). את זה אנחנו לא יודעים לתאר.

דוגמא נוספת – נניח שיש חלקיק עם דרגת חופש סופית, לדוגמא פוטון עם קיטוב, ואנחנו שמים לידו עוד פוטון. גם לפוטון הזה יש דרגת קיטוב משלו, ובאופן הכי כללי דרגות החופש של שני הפוטונים האלה ב"ת. לעומת המקרה הקודם שדרגות החופש היו פנימיות (תכונות נוספות של החלקיק), כאן הן חיצוניות (עוד חלקיקים), אבל מתמטית הם זהים, וגם את זה אנחנו לא יודעים לתאר. צריך למצוא תיאור שכולל את המערכת של שני החלקיקים, וכמובן שיש מערכות עם הרבה יותר משתיים.

דיברנו על דרגות חופש סופיות כמו קיטוב, אפשר לדבר גם על דרגות חופש אינסופית. למשל, מקום, שמתואר ע"י משתנה רציף. עד עכשיו דיברנו על חלקיק על ציר אחד, אם נוסיף עוד צירים נצטרך לתאר את החלקיק גם ב-x וגם ב-y למשל, ובמקרה הכי כללי לא יהיה קשר ביניהן.

18.2.2 הקדמה מתמטית

נניח שיש לנו עכשיו שתי דרגות חופש כלשהן, ונניח שהמימדים סופיים (ההרחבה לאינסוף תהיה טריוויאלית).

- נסמן את דרגות החופש ב-a, b.
- אפשר לתאר את המצב של חלקיק בכל דרגת חופש באמצעות מרחב הילברט מתאים $\mathcal{H}_a, \mathcal{H}_b$.
- מימדי המרחב יסומנו d_a, d_b, והם לאו דווקא שווים.
- את הוקטורים במרחבים נסמן בהתאמה ב-$|a\rangle, |b\rangle$.

<u>הגדרה</u> – אם קיים מרחב הילברט חדש $\mathcal{H}$ כך שלכל זוג וקטורים מ-$\mathcal{H}_a$ ו-$\mathcal{H}_b$ אנחנו יכולים לשייך ווקטור ב-$\mathcal{H}$, נקרא למרחב החדש מרחב המכפלה הטנזורית של a ו-b, ונסמן:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_a \otimes \mathcal{H}_b$$

והווקטור ב-$\mathcal{H}$ שמתאים לווקטורים $|a\rangle, |b\rangle$ יסומן ב-$|a\rangle \otimes |b\rangle$.

<u>תכונות של ווקטורי המכפלה הטנזורית</u> –

- לינאריות ופילוג:

$$(C|\alpha\rangle)\otimes|\beta\rangle = C(|\alpha\rangle\otimes|\beta\rangle) = |\alpha\rangle\otimes(C|\beta\rangle)$$

-

$$|\alpha\rangle\otimes(|\beta_1\rangle + |\beta_2\rangle) = |\alpha\rangle\otimes|\beta_1\rangle + |\alpha\rangle\otimes|\beta_2\rangle$$
$$(|\alpha_1\rangle + |\alpha_2\rangle)\otimes|\beta\rangle = |\alpha_1\rangle\otimes|\beta\rangle + |\alpha_2\rangle\otimes|\beta\rangle$$

<u>בסיסים למרחבים והמימד של $\mathcal{H}$</u> –

נוכל לבחור בה"כ בסיסים אורתונורמליים שלמים שיפרשו את $\mathcal{H}_a, \mathcal{H}_b$. נסמן את הבסיסים האלה ב-$\{|u_i\rangle\}$ עבור הסט שפורש את $\mathcal{H}_a$ ו-$\{|v_j\rangle\}$ עבור הסט שפורש את $\mathcal{H}_b$. מתקיים (לא נוכיח) שהסט:

$$\{|u_i\rangle\otimes|v_j\rangle\}$$

הוא סט אורתונורמלי שלם שפורש את $\mathcal{H}$. מבאן אנחנו גם לומדים שהמימד של $\mathcal{H}$ הוא $d_a d_b$.

אפשר עכשיו לקחת ווקטור כללי $|\alpha\rangle \in \mathcal{H}_a$ ולפרוש אותו עם הבסיס השלם, וכנ"ל לווקטור $|\beta\rangle \in \mathcal{H}_b$:

$$|\alpha\rangle = \sum_{i=1}^{d_a} a_i|u_i\rangle, \qquad |\beta\rangle = \sum_{j=1}^{d_b} b_j|v_j\rangle$$

באמצעות שימוש בתכונות הלינאריות והפילוג נקבל:

$$|\alpha\rangle\otimes|\beta\rangle = \sum_{i=1}^{d_a}\sum_{j=1}^{d_b} a_i b_j\,|u_i\rangle\otimes|v_j\rangle$$

מה שיצא לנו זה פריסה על ווקטורי הבסיס של $\mathcal{H}$, אז קיבלנו את ההצגה של $|\alpha\rangle\otimes|\beta\rangle$.

נכתוב עכשיו ווקטור כללי $|\psi\rangle\in\mathcal{H}$:

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{d_a}\sum_{j=1}^{d_b} c_{ij}\,|u_i\rangle\otimes|v_j\rangle$$

כמה דרגות חופש יש בווקטור הזה? מספר דרגות החופש הוא כמספר ה-c-ים השונים, כמו שבמקרה של $|\alpha\rangle\otimes|\beta\rangle$ מספר דרגות החופש היה מספר הדרכים לבחור קובינציות שונות של a_i ו-b_j. הגודל של כ"א מהם:

- מספר דרגות החופש של a_i הוא d_a-1 ושל b_j הוא d_b-1, סה"כ: d_a+d_b-2 דרגות חופש לבחור את מקדם הפריסה (מינוס אחד בגלל שנרמול ופאזה מורידים דרגת חופש אחת).
- בכתיבה של $|\psi\rangle$ מספר דרגות החופש הוא $d_a d_b-1$.

כלומר, בכתיבה השנייה יש יותר דרגות חופש מאשר בכתיבה הראשונה. זה אומר שווקטורים שניתנים לכתיבה בתור ווקטורי מכפלה הם רק חלק מכלל הווקטורים ב-$\mathcal{H}$. ישנם ווקטורים ב-$\mathcal{H}$ שלא ניתן לכתוב אותם בצורה של מכפלה מ-a ו-b, ואנחנו רואים את זה נטו מספירה של דרגות חופש.

מה המשמעות של התכונה הזאת? התכונה הזאת, שמצבים בתורת הקוונטים מיוצגים ע"י מצבים במרחב מכפלה של מרחבי הילברט, והתכונה של מרחבי מכפלה של הילברט שלא ניתן לתאר כל מצב בצורת מכפלה, היא תכונה מבדלת מאוד חזקה בין התיאור הקוונטי לתיאור קלאסי.

מאוד פשוט למצוא מצבים פיזיקליים כאלה – נקח סופרפוזיציה של שני מצבים:

$$c_{11}|u_1\rangle\otimes|v_1\rangle + c_{22}|u_2\rangle\otimes|v_2\rangle$$

את המצב הזה <u>לא</u> ניתן לכתוב בתור $|\psi_a\rangle\otimes|\psi_b\rangle$. למצבים כאלה קוראים בפיזיקה **מצבים שזורים** (entangled states).

<u>סימון מקוצר לווקטורים במרחב המכפלה</u> –

נגדיר:

$$|\alpha\rangle\otimes|\beta\rangle \equiv |\alpha\rangle|\beta\rangle = |a,b\rangle$$

לקט ואז מיד עוד קט לא הייתה משמעות עד עכשיו, ומעכשיו נבין שהכוונה היא מכפלה טנזורית. נשתמש גם בסימון $|a,b\rangle$.

<u>מכפלה פנימית של ווקטור במרחב המכפלה</u> –

נגדיר מכפלה פנימית במרחב המכפלה:

$$[\langle\alpha'|\otimes\langle\beta'|][|\alpha\rangle\otimes|\beta\rangle] \equiv \langle\alpha',\beta'|\alpha,\beta\rangle = \langle\alpha'|\alpha\rangle\langle\beta'|\beta\rangle$$

כש- $\langle\alpha'|, \langle\beta'|$ הם כרגיל הווקטורים הדואלים ל-$|\alpha\rangle, |\beta\rangle$ ממרחב הילברט הדואלי.

אם לא ניתן לכתוב ווקטור מסויים בתור מכפלה הוא יהיה סכום של מכפלות (כמו שראינו בדוגמא של הסופרפוזיציה), ואז נפתח סוגריים ונכתוב את זה כסכום של מכפלות.

מהגדרת המכפלה הפנימית נקבל גם הגדרה של אורתוגונליות –

$$\langle u_i, v_j | u_k, v_\ell\rangle = \langle u_i|u_k\rangle\langle v_j|v_\ell\rangle = \delta_{ik}\delta_{j\ell}$$

זה תנאי האורתונורמליות.

אפשר בפרט לראות שמספיק שווקטורים יהיו ניצבים בתת־מרחב אחד בשביל שהם יהיו ניצבים במרחב המכפלה, גם אם המרחב השני הם לא ניצבים.

<u>אופרטורים</u> –

הרחבה של אופרטור מאחד המרחבים למרחב המכפלה:

נניח אופרטור A_a שפועל על ווקטורים מ-$\mathcal{H}_a$. נגדיר עכשיו אופרטור A שנקא לו "אופרטור ההרחבה של A_a ל-$\mathcal{H}$" באופן הבא:

$$A[|\alpha\rangle\otimes|\beta\rangle] = [A_a|\alpha\rangle]\otimes|\beta\rangle$$

כדי להגדיר באופן מלא את הפעולה של A על המרחב הטנזורי צריך להגיד גם איך הוא פועל על ווקטורים שלא ניתנים לכתיבה כמכפלה. נעשה את ההגדרה הזאת באמצעות הפרישה של הווקטורים האלה:

$$A|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{d_a}\sum_{j=1}^{d_b} c_{ij}\,[A|u_i\rangle]\otimes|v_j\rangle$$

באופן דומה, עבור B_b שפועל על $\mathcal{H}_b$, אופרטור ההרחבה של B_b ל-$\mathcal{H}$ יסומן ב-B ויוגדר באותה הצורה.

הרחבה של מכפלה של שני אופרטורים משני המרחבים למרחב המכפלה:

נגדיר אופרטור:

$$D = A_a\otimes B_b$$

המשמעות של הכתיבה הזאת:

$$D[|\alpha\rangle\otimes|\beta\rangle] = [A_a|\alpha\rangle]\otimes[B_b|\beta\rangle]$$

מההגדרה הזאת אנחנו יכולים לנסח את שני האופרטורים שראינו קודם כמכפלה:

$$A = A_a\otimes\mathbb{1}$$

$$B = \mathbb{1}\otimes B_b$$

עוד תוצאה של ההגדרה הזאת היא שאפשר לרשום:

$$D = AB = BA$$

כי אם שני המרחבים $\mathcal{H}_a, \mathcal{H}_b$ הם בלתי תלויים, לא משנה סדר ההפעלה, כי כ"א מהאופרטורים A, B לא עושים שום דבר למרחב השני (משפיעים רק על המרחב שהם מוגדרים עליו).

זה מלמד אותנו דבר נוסף – אופרטורים מורחבים מתחלפים תמיד.

<u>ווקטורים עצמיים וערכים עצמיים</u> –

נניח שבתוך תת־המרחב $\mathcal{H}_a$ אנחנו יודעים את כל הו"ע והע"ע של A_a:

$$A_a|u_n\rangle = \lambda_n|u_n\rangle$$

מהם הו"ע והע"ע של A? אפשר לראות שכל וקטור במרחב המכפלה שיהיה בנוי מו"ע של A_a מוכפל בווקטור כלשהו מהמרחב השני $|u_n\rangle\otimes|\beta\rangle$, אם נפעיל עליו את A נקבל:

$$A[|u_n\rangle\otimes|\beta\rangle] = [A|u_n\rangle]\otimes|\beta\rangle = \lambda_n|u_n\rangle\otimes|\beta\rangle$$

כלומר, כל וקטור שייבנה מו"ע של A_a ועוד וקטור מהמרחב השני יהיה ו"ע של A עם אותו ע"ע.

מאחר ויש לנו d_b אפשרויות אורתוגונליות לפרוס את β, בגלל החופש הזה נקבל שתת־המרחב העצמי של A הוא מנוון פי d_b (כי יש d_b אפשרויות לווקטורים אורתוגונליים להכניס בתור β, ונקבל d_b מצבים שבהם הע"ע הוא λ_n עבור כל מ"ע של A_a שהע"ע שלו הוא λ_n).

נשים לב של-A יש אותו ספקטרום כמו A_a, כל מה שגדל זה רק הניוון. אותו הדבר יהיה לנו גם ב-B. אבל, אם נקח את A_a כך שהוא סט שלם של אופרטורים ברי תצפית מתחלפים, כלומר נקח אותו לא מנוון, ונקח את B_b עם אותה תכונה (לא מנוון, סט שלם), אפשר לראות ש-A לא סט שלם, כי הוא קיבל ניוון. אולם, הניוון הזה יוסר בדיוק באמצעות ההרחבה של B. כלומר, כל אחד מ-A, B בנפרד הוא לא סט שלם של אופרטורים ברי תצפית מתחלפים, אבל ביחד הם כן סט שלם של אופרטורים כאלה.

אם A_a לא היה סט שלם בתת־המרחב שלו והיינו צריכים להוסיף לו עוד סט A'_a כדי שהוא יהיה שלם ואותו הדבר עם B_b, אם נקח ביחד את ההרחבות של כולם למרחב החדש, ביחד הם יהיו סט שלם.

נקודה נוספת – נסתכל על אופרטור $D = A + B$ כך ש-

$$D = A + B = A_a\otimes\mathbb{1} + \mathbb{1}\otimes B_b$$

לאופרטורים כאלה יש תכונות מעניינות למ"ע ולע"ע שמפשטות לנו התייחסות פיזיקלית. אם משוואות הע"ע הן:

$$A_a|u_n\rangle = \lambda_n|u_n\rangle$$
$$B_b|v_k\rangle = \mu_k|v_k\rangle$$

אז הו"ע של D יכולים להכתב כך:

$$|\psi_{nk}\rangle = |u_n\rangle\otimes|v_k\rangle$$

לכן אנחנו יכולים לכתוב פתרונות בעזרת הבסיס השלם של הווקטורים האלה. הע"ע של הווקטורים האלה:

$$D|\psi_{nk}\rangle = A[|u_n\rangle\otimes|v_k\rangle] + B[|u_n\rangle\otimes|v_k\rangle] = (\lambda_n + \mu_k)(|u_n\rangle\otimes|v_k\rangle)$$

כלומר, הווקטורים $|\psi_{nk}\rangle$ שנכתבו מכל המכפלות של הו"ע של A_a ו-B_b הם אכן ו"ע של האופרטור D, והע"ע הם סכומים.

נשים לב שיכול להיות מצב שאין ניוון ב-A_a או ב-B_b אבל D כן יהיה מנוון, וזה קורה כשיש קומבינציה של כמה $\lambda_n + \mu_k$ שונים שנותנים את אותו הסכום.

19 שיעור 19 – 5.6.18

19.1 חלקיק בשלושה מימדים

אמרנו בשיעור שעבר שאנחנו מטפלים במערכת שבה יש יותר מדרגת חופש ב"ת אחת, ונתנו דוגמאות של דרגות חופש חיצוניות (עוד חלקיקים) ופנימיות (עוד תכונות של החלקיק). ספציפית נתעניין בדרגות חופש של מיקום, ונדבר על שלושה מימדים.

מה זה אומר – אם יש חלקיק במרחב אפשר להציב אותו באיזשהו x ואז לבחור בצורה ב"ת את ה-y וה-z שלו. כלומר, שלוש דרגות חופש ב"ת אינסופיות. כעת, בכל פעם שנמדוד איפה נמצא החלקיק נקבל שלשה של מספרים ולא מספר אחד.

בדיוק כמו שהגדרנו את אופרטור X במימד אחד, כעת נגדיר עוד שני אופרטורים חדשים בדיוק באותה הדרך Y, Z. זו תהיה שלשה של אופרטורים, שכל אחד מהם יתנהג כמו ש-X התנהג (הע"ע שלהם הם ערכי המדידה האפשריים, הו"ע הם המצבים וכו').

נסמן עבור X, Y, Z בהתאמה:

- $|x_0\rangle, |y_0\rangle, |z_0\rangle$ את המ"ע של כ"א מהאופרטורים.
- $|\psi_x\rangle, |\psi_y\rangle, |\psi_z\rangle$ בתור מצב כלשהו בתוך כ"א מתתי־המרחבים האלה.
- הצגת המקום של המצב $\langle x|\psi_x\rangle = \psi_x(x), \langle y|\psi_y\rangle = \psi_y(y), \langle z|\psi_z\rangle = \psi_z(z)$.
- הצגת המקום של מצב עצמי אחרי מדידה $\langle x|x_0\rangle = \delta(x-x_0), \langle y|y_0\rangle = \delta(y-y_0), \langle z|z_0\rangle = \delta(z-z_0)$.
- נגדיר אופרטורי תנע בכל כיוון P_x, P_y, P_z.

נגדיר עכשיו את מרחב הילברט שמתאר בו־זמנית חלקיק בשלושה מימדים. זה כמובן יהיה מרחב מכפלה טנזורית:

$$\mathcal{H}_r = \mathcal{H}_x \otimes \mathcal{H}_y \otimes \mathcal{H}_z$$

<u>אופרטור המקום התלת־מימדי</u> –

עד עכשיו אופרטורים באחד המרחבים האלה החזירו מספר, מקום, ועכשיו אנחנו רוצים שהם יחזירו שלשה של מספרים. כדי להיות עקביים, נגדיר עכשיו את האופרטור R, שנכתוב אותו בתור שלשה של אופרטורים, וכדי שיהיה ברור נכתוב אותו בצורה של וקטורים (לא ווקטורים שלנו, אלא כתיבה ווקטורית כמו במכניקה נניח):

$$\vec{R} = X\hat{x} + Y\hat{y} + Z\hat{z}$$

כעת, כש-R יעבוד על איזשהו מצב הוא יחזיר לנו שלשה של ערכים עצמיים (זו הכוונה בסימון הזה).

באותו אופן:

$$\vec{P} = P_x\hat{x} + P_y\hat{y} + P_z\hat{z}$$

<u>ו"ע וע"ע של אופרטור המקום</u> –

מה יהיו המצבים העצמיים של אופרטור R, מצבי המקום?

$$|\vec{r}_0\rangle = |x_0\rangle \otimes |y_0\rangle \otimes |z_0\rangle = |x_0, y_0, z_0\rangle$$

נשים לב ש-X, Y, Z הם אופרטורים שעובדים על תתי־המרחבים (כמו מה שקראנו קודם A_a) ומה שכתבנו ב-R זה כבר האופרטורים המורחבים (כמו מה שקראנו A, כי הם עובדים כבר על תת־המרחב המורחב).

בגלל ש-$|\vec{r}_0\rangle$ הם מ"ע של R, הם גם מ"ע של האופרטורים המורחבים:

$$X|\vec{r}_0\rangle = x_0|\vec{r}_0\rangle$$
$$Y|\vec{r}_0\rangle = y_0|\vec{r}_0\rangle$$
$$Z|\vec{r}_0\rangle = z_0|\vec{r}_0\rangle$$

ואם נפעיל את R עצמו:

$$\vec{R}|\vec{r}_0\rangle = (X\hat{x} + Y\hat{y} + Z\hat{z})|\vec{r}_0\rangle = (x_0\hat{x} + y_0\hat{y} + z_0\hat{z})|\vec{r}_0\rangle$$

זה שוב מדגיש את הייתרון של הכתיבה של R בתור $\vec{R}$ – כשהפעלנו אותו על ווקטור קיבלנו שלשה של מספרים שמסמנים את המקום שלו.

נסתכל עכשיו על ע"ע של R בהצגת המקום:

$$\begin{aligned}\langle\vec{r}|\vec{r}_0\rangle = [\langle x_0|\otimes\langle y_0|\otimes\langle z_0|][|x_0\rangle\otimes|y_0\rangle\otimes|z_0\rangle] = \langle x|x_0\rangle\langle y|y_0\rangle\langle z|z_0\rangle &= \delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0) \\ &= \delta(\vec{r}-\vec{r}_0)\end{aligned}$$

כשהרחבנו את ההגדרה של פונ' דלתא להגדרה תלת־מימדית.

הווקטורים $|\vec{r}_0\rangle$ מהווים בסיס אורתונורמלי שלם של מרחב הילברט התלת־מימדי שמתאר שלוש דרגות חופש, כי לקחנו אותו בתור מכפלה של בסיסים אורתונורמליים שלמים לכ"א מתתי־המרחבים. זה נותן לנו בסיס שכולו בנוי ממצבים של מכפלות, אבל כמו שראינו בשיעור שעבר, ישנם $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_R$ שלא ניתן לפרק אותם למכפלה של שלושה מצבים מהמרחבים השונים, כלומר הם לאו דווקא מצבי מכפלה (הכוונה במצב מכפלה $\psi_x(x)\psi_y(y)\psi_z(z)$).

<u>סטים של האופרטורים המורחבים</u> –

הסט של האופרטורים $\{X,Y,Z\}$ הוא סט שלם של אופרטורים ברי־תצפית מתחלפים, כי כ"א מהם בנפרד סט שלם בתת־המרחב המתאים לו, וכמו שאמרנו בשיעור שעבר – כשמרחיבים כל אחד מקבלים אופרטור מנוון, אבל הצירוף שלהם ביחד נותן סט שלם.

באותו אופן, גם P_x בתת־המרחב $\mathcal{H}_x$ הוא אופרטור לא מנוון, והוא סתם של אופרטורים מתחלפים ברי־תצפית, כי מדידה של P_x מגדירה בצורה חח"ע את המצב במרחב $\mathcal{H}_x$. כלומר, $\{P_x,P_y,P_z\}$ היא גם שלשה שלמה של אופרטורים מתחלפים ברי־תצפית.

בנוסף, גם שילובים כמו $\{P_x,Y,Z\}$ הוא סט שלם של אופרטורים מתחלפים ברי־תצפית, כי מדידת התנע בכיוון x והמקום בשני הכיוונים האחרים גם מגדירה בצורה חח"ע את פונ' הגל של המצב.

<u>מעברי בסיס בין המקום והתנע</u> –

אנחנו יודעים שהאיברים של מטריצת מעבר הבסיס מהמקום לתנע הם $\langle\vec{p}|\vec{r}\rangle$, והיא תהיה פונקציה של שישה פרמטרים שמעבירה אותנו משלושה פרמטרים (x,y,z) לשלושה פרמטרים (P_x,P_y,P_z) ע"י אינטגרל על כל ה-r-ים יתן לנו את המעבר. באופן מפורש (בדומה למה שעשינו בחד־מימד):

$$\begin{aligned}\langle\vec{p}|\vec{r}\rangle = \langle p_x,p_y,p_z|x,y,z\rangle = \langle p_x|x\rangle\langle p_y|y\rangle\langle p_z|z\rangle &= \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi\hbar}\right)^3}e^{-\frac{i}{\hbar}p_x x}e^{-\frac{i}{\hbar}p_y y}e^{-\frac{i}{\hbar}p_z z} \\ &= \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi\hbar}\right)^3}e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{r}}\end{aligned}$$

זה מיד אומר לנו שאם אנחנו רוצים לכתוב את $\tilde{\psi}(\vec{p})$, המעבר יהיה ע"י:

$$\tilde{\psi}(p_x, p_y, p_z) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi\hbar}\right)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dzdydz e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{r}}\psi(x,y,z)$$

כלומר התמרת פורייה תלת־מימדית. המעבר ההפוך יהיה עם התמרת פורייה הפוכה (ואותם מקדמים).

<u>הפעלת אופרטור התנע בהצגת המקום</u> –

במקרה החד־מימדי, להפעיל את אופרטור התנע על מצב בהצגת המקום היה פורפורציוני לגזירה שלו לפי המקום. נראה מה המשמעות בהנתן $\psi(\vec{r}) = \langle\vec{r}|\psi\rangle$ של הפעלת אופרטור התנע עליו:

$$\begin{aligned}\left\langle\vec{r}\middle|\vec{P}\middle|\psi\right\rangle = \langle x,y,z|\left(P_x\hat{x} + P_y\hat{y} + P_z\hat{z}\right)|\psi\rangle &= \langle x,y,z|P_x|\psi\rangle\hat{x} + \left\langle x,y,z\middle|P_y\middle|\psi\right\rangle\hat{y} + \langle x,y,z|P_z|\psi\rangle\hat{z} \\ &= -i\hbar\left(\hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}\right)\psi(x,y,z) \\ &= -i\hbar\,\vec{\nabla}\psi(x,y,z)\end{aligned}$$

(המשך הנושא הוא מהשיעור של ה-28.5.2017)

כל שורה עכשיו תתאים לשיעור מהחודשים האחרונים, שנקבל עכשיו עברו הכתיבה הווקטורית.

<u>כללי קוונטיזציה, המילטוניאן ומשוואת שרדינגר</u> –

אנחנו רוצים בהצגת המקום פונ' של שלושת האופרטורים $f(X,Y,Z)$ שעובדים על פונ' גל כלשהי:

$$\langle\vec{r}|f(X,Y,Z)|\psi\rangle = f(x,y,z)\psi(x,y,z)$$

ההמילטוניאן יהיה:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(x,y,z)$$

ולכן, משוואת שרדינגר (שאינה תלויה בזמן) בשלושה מימדים:

$$\nabla^2\psi_E(x,y,z) + \frac{2m}{\hbar^2}[E - V(x,y,z)]\psi_E(x,y,z) = 0$$

<u>משוואת הרציפות</u> –

נחליף את הנגזרת במקום בדיברגנץ:

$$\frac{\partial|\psi|^2}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{J} = 0$$

כשזרם ההסתברות מוגדר בהתאמה (עם נגזרות מוחלפות בגרדיאנט):

$$\vec{J}(x,y,z,t) = \frac{\hbar}{2mi}\left[\psi^*\vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\psi^*\right]$$

<u>משוואת אהרנפסט</u> –

ערך התצפית של האופרטור $\vec{R}$ (שכולל שלושה של מספרים) הוא ווקטור (שלשה של מספרים גם הוא). משוואות אהרנפסט ברב־מימד:

$$\frac{d}{dt}\langle\vec{R}\rangle = \frac{1}{m}\langle\vec{P}\rangle, \qquad \frac{d}{dt}\langle\vec{P}\rangle = -\left\langle\vec{\nabla}V\left(\vec{R}\right)\right\rangle$$

<u>מקרה שבו ההמילטוניאן הכולל הוא סכום</u> –

ראינו בנושא של מרחבים טנזוריים את המקרה הפרטי שבו אופרטור במרחב המכפלה הטנזורית הוא סכום של אופרטורים מורחבים שעובדים על תתי־המרחבים כ"א, ואמרנו שבמקרה הזה הערכים העצמיים הם סכומים של הערכים העצמיים.

נדבר ספציפית על מקרה של ההמילטוניאן במרחב $\mathcal{H}_R$. שבו ניתן לכתוב את ההמילטוניאן כך:

$$H = H_x + H_y + H_z$$

כלומר כסכום ההמילטוניאנים שעובדים על תתי־המרחבים, שמקיימים כ"א:

$$\begin{aligned} H_x \left|\psi_n^{(x)}\right\rangle &= E_n^{(x)} \left|\psi_n^{(x)}\right\rangle \\ H_y \left|\psi_m^{(y)}\right\rangle &= E_m^{(y)} \left|\psi_m^{(y)}\right\rangle \\ H_z \left|\psi_\ell^{(z)}\right\rangle &= E_\ell^{(z)} \left|\psi_\ell^{(z)}\right\rangle \end{aligned}$$

אז אנחנו יודעים מיד מה הע"ע והו"ע של H:

$$H \left|\psi_{n,m,\ell}^{(r)}\right\rangle = \left(E_n^{(x)} + E_m^{(y)} + E_\ell^{(z)}\right) \left|\psi_n^{(x)}\right\rangle \left|\psi_m^{(y)}\right\rangle \left|\psi_\ell^{(z)}\right\rangle$$

כלומר, אנחנו לא צריכים לפתור את מש' שרדינגר, אלא יכולים להעזר בפתרונות של כ"א מתתי־המרחבים (שוב, זה במקרה שאפשר לרשום את ההמילטוניאן הכולל כסכום ההמילטוניאנים של תתי־המרחבים).

<u>ההמילטוניאן באופן כללי</u> –

באופן כללי, בהצגת המקום, המ"ע האלה:

$$\left\langle \vec{r} \middle| \psi_{n,m,\ell}^{(r)} \right\rangle = \left(\langle x|\langle y|\langle z|\right) \left(\left|\psi_n^{(x)}\right\rangle \left|\psi_m^{(y)}\right\rangle \left|\psi_\ell^{(z)}\right\rangle\right) = \psi_n(x)\psi_m(y)\psi_\ell(z)$$

באופן כללי, כמו שראינו ההמילטוניאן מורכב משני חלקים (א' קינטית ופוטנציאלית):

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(x,y,z) = -\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right] + V(x,y,z)$$

כלומר, החלק של האנרגיה הקינטית נכתב כמו סכום של המילטוניאנים ב-x, y, z, כלומר הוא מקיים את התנאי $H = H_x + H_y + H_z$. זה כבר אומר שעבור חלקיק חופשי אפשר לפתור בכל מרחב בנפרד, אפשר לעשות הפרדת משתנים.

בכל מקרה שניתן לכתוב ניתן לכתוב את הפוטנציאל בתור $V(x,y,z) = V(x) + V(y) + V(z)$ אז גם מתקיים $H = H_x + H_y + H_z$ ואנחנו יכולים לפתור כמו שאמרנו.

לפעמים במע' קורדינטות מסויימת הפוטנציאל לא ניתן להפרדה, אבל כן יש מע' קורדינטות אחרת שבה הם נפרדים, ואפשרלעבור אליה ולפתור שם.

(הרישומים מכאן עד סוף השיעור הם על סמך רישומי שיעור...)

19.2 מתנד הרמוני חד־מימדי

19.2.1 המשוואה והאופרטורים המתאימים

נגדיר מערכת עם כח מחזיר $f = -kx$, $\omega = \sqrt{k/m}$.

ההמילטוניאן הקלאסי של המערכת הזאת:

$$H_{cl} = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2$$

ההמילטוניאן הקוונטי של המערכת הזאת:

$$H_q = \frac{1}{2m}P^2 + \frac{m\omega^2}{2}X^2$$

נסמן את ההמילטוניאן הקוונטי פשוט ב-H מעתה.

נרצה למצוא את הע"ע והו"ע של ההמילטוניאן. את זה אפשר לעשות באמצעות משוואת שרדינגר:

$$H|\psi_n\rangle = E_n|\psi_n\rangle$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{m\omega^2}{2}x^2\right]\psi(x) = E\psi(x)$$

נעשה החלפת משתנים לקורדינטות חסרות מימדים:

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}x', \qquad p = \sqrt{m\hbar\omega}p'$$

וגם לאופרטורים:

$$X = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\hat{X}, \qquad P = \sqrt{m\hbar\omega}\hat{P}, \qquad H = \hbar\omega\hat{H}$$

ונקבל את ההמילטוניאן:

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\left(\hat{X}^2 + \hat{P}^2\right)$$

ומתקיים $\left[\hat{X}, \hat{P}\right] = i$.

נחפש ע"ע ומ"ע עבור ההמילטוניאן המנורמל:

$$\hat{H}|\psi_n\rangle = \varepsilon_n|\psi_n\rangle$$

נשים לב שהמ"ע הם אותו הדבר כמו עבור האופרטור המקורי, ורק הע"ע משתנים.

נשים כעת לב שאת ההמילטוניאן הקלאסי ניתן לכתוב בתור:

$$H_{cl} = \frac{1}{2}(x' - ip')(x' + ip')$$

אם נעשה לזה קוונטיזציה, נקבל שני אופרטורים שנסמן בתור:

$$\hat{a} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{X} + i\hat{P}\right), \qquad \hat{a}^\dagger \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{X} - i\hat{P}\right)$$

אפשר לחשב את יחס החילוף של האופרטורים האלה ולהווכח שהם לא הרמיטיים:

$$\left[\hat{a},\hat{a}^{\dagger}\right]=\frac{1}{2}\left[\hat{X}+i\hat{P},\hat{X}-i\hat{P}\right]=-\frac{i}{2}\left[\hat{X},\hat{P}\right]+\frac{i}{2}\left[\hat{P},\hat{X}\right]=1$$

כלומר $\hat{a}^{\dagger}\hat{a}\neq\hat{a}\hat{a}^{\dagger}$, ולכן זה לא הרמיטי.

נגדיר גם את האופרטור:

$$\hat{N}\equiv\hat{a}^{\dagger}\hat{a}$$

נכתוב אותו במפורש:

$$\hat{N}\equiv\hat{a}^{\dagger}\hat{a}=\frac{1}{2}\left(\hat{X}-i\hat{P}\right)\left(\hat{X}+i\hat{P}\right)=\frac{1}{2}\left(\hat{X}^{2}+\hat{P}^{2}+i\left[\hat{X},\hat{P}\right]\right)=\hat{H}-\frac{1}{2}$$

20 שיעור 20 – 10.6.18

20.1 אוסילטור הרמוני – המשך

20.1.1 המשוואה והאופרטורים המתאימים – המשך

בשיעור שעבר ראינו את האופרטור $\hat{N}$. אפשר להראות שמתקיים:

$$\hat{H} = \hat{a}^{\dagger}\hat{a} + \frac{1}{2} = \hat{N} + \frac{1}{2} = \hat{a}\hat{a}^{\dagger} - \frac{1}{2}$$

נחשב את יחסי החילוף:

$$\begin{aligned}\left[\hat{N}, \hat{a}\right] &= \left[\hat{a}^{\dagger}\hat{a}, \hat{a}\right] = \hat{a}^{\dagger}[\hat{a}, \hat{a}] + \left[\hat{a}^{\dagger}, \hat{a}\right]\hat{a} = -\hat{a} \\ \left[\hat{N}, \hat{a}^{\dagger}\right] &= \left[\hat{a}^{\dagger}\hat{a}, \hat{a}^{\dagger}\right] = \hat{a}^{\dagger}\left[\hat{a}, \hat{a}^{\dagger}\right] + \left[\hat{a}^{\dagger}, \hat{a}^{\dagger}\right]\hat{a} = \hat{a}^{\dagger}\end{aligned}$$

20.1.2 ספקטרום האנרגיה

ראינו שלחפש את ספקטרום האנרגיה של ההמילטוניאן זה כמו לחפש את זה של $\hat{N}$. אם נסמן:

$$N|\psi_n\rangle = \nu_n|\psi_n\rangle$$

בגלל שההמילטוניאן הוא פונקציה של האופרטור $\hat{N}$ (אפילו פונקציה ממשית שלו), אז $\hat{N}$ גם הוא אופרטור הרמיטי, הוא וההמילטוניאן יחלקו את אותם המצבים העצמיים והע"ע יהיו אותו הדבר רק מוסטים בחצי: אם ε_n הם הע"ע של $\hat{H}$ ו-ν_n של $\hat{N}$ יתקיים:

$$\nu_n = \varepsilon_n - \frac{1}{2}$$

ועבור ההמילטוניאן לפני החלפת היחידות:

$$E_n = \left(\nu_n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$$

עבור אותם מ"ע שיהיו משותפים לכולם.

נוכל אפשר לפתור את משוואת שרדינגר בלי לפתור משוואה דיפרנציאלית. המהלך שפותר את הבעיה הוא מהלך לוגי-אלגברי על $\hat{a}, \hat{a}^{\dagger}$:

1. נכתוב את הווקטור:

$$\hat{a}|\psi_n\rangle$$

$|\psi_n\rangle$ הוא ווקטור במרחב הילברט, אז אפשר להפעיל עליו אופרטור (אפילו לא הרמיטי) ונקבל ווקטור שגם הוא מאותו מרחב הילברט.

2. נכתוב את הגודל של הווקטור:

$$\|\hat{a}|\psi_n\rangle\| = \left\langle\psi_n\middle|\hat{a}^{\dagger}\hat{a}\middle|\psi_n\right\rangle = \left\langle\psi_n\middle|\hat{N}\middle|\psi_n\right\rangle$$

כששמנו לב שהאופרטור שהתקבל בפנים הוא $\hat{N}$.

3. אמרנו ש-$|\psi_n\rangle$ הוא גם מ"ע של $\hat{N}$. נכתוב את זה, ונשתמש בעובדה שגודל של ווקטור הוא אי־שלילי ($\|\hat{a}|\psi_n\rangle\| \geq 0$):
$$\|\hat{a}|\psi_n\rangle\| = \nu_n\langle\psi_n|\psi_n\rangle \geq 0$$

4. מתקיים גם $\langle\psi_n|\psi_n\rangle \geq 0$ כי גם זה גודל של ווקטור, מה שמלמד אותנו:
$$\nu_n \geq 0$$

5. אם קיים מ"ע עם ע"ע אפס אז $\|\hat{a}|\psi_n\rangle\| \geq 0$ הופך לשיוויון. זה מוביל לכך ש-$\|\hat{a}|\psi_n\rangle\| = 0$, אבל הווקטור היחידי שהגודל שלו הוא אפס הוא ווקטור האפס. נניח שיש ווקטור כזה שנותן אפס, נסמן אותו ב-ψ_0 ונקבל:
$$\hat{a}|\psi_0\rangle = 0$$
זה גם מלמד אותנו שאם $\hat{a}$ פועל על מ"ע עם ע"ע אפס התוצאה היא אפס.

6. נקח את המשוואה מ-5 ונפעיל עליה משמאל $\hat{a}^\dagger$:
$$\hat{a}^\dagger\hat{a}|\psi_0\rangle = \hat{N}|\psi_0\rangle = 0$$

כלומר, כל ווקטור שנפעיל עליו את $\hat{N}$ והתוצאה תהיה אפס, זה אומר שהווקטור הזה הוא מ"ע עם ע"ע אפס.

7. באותה מידה שלקחנו את $\hat{a}$ היה אפשר לקחת את $\hat{a}^\dagger$, ונקבל:
$$\|\hat{a}^\dagger|\psi_n\rangle\| = \langle\psi_n|\hat{a}\hat{a}^\dagger|\psi_n\rangle \overset{*}{=} \langle\psi_n|\hat{a}^\dagger\hat{a}+1|\psi_n\rangle = (\nu_n+1)\langle\psi_n|\psi_n\rangle \geq 0$$

כשאת המעבר * עשינו באמצעות יחס החילוף.

8. כעת, מכיוון שאנחנו יודעים $\langle\psi_n|\psi_n\rangle \geq 0$ ו-$\nu_n \geq 0$ אז מתקיים:
$$\nu_n + 1 > 0$$

9. נקח ו"ע ונפעיל עליו את יחסי החילוף:
$$\begin{cases}[\hat{N},\hat{a}]|\psi_n\rangle = -\hat{a}|\psi_n\rangle \\ [\hat{N},\hat{a}^\dagger]|\psi_n\rangle = \hat{a}^\dagger|\psi_n\rangle\end{cases}$$
נפתח סוגריים ונוציא את הע"ע:

$$\begin{cases}\hat{N}\hat{a}|\psi_n\rangle = \hat{a}\hat{N}|\psi_n\rangle - \hat{a}|\psi_n\rangle = \hat{a}\nu_n|\psi_n\rangle - \hat{a}|\psi_n\rangle = (\nu_n-1)\hat{a}|\psi_n\rangle \\ \hat{N}\hat{a}^\dagger|\psi_n\rangle = \hat{a}^\dagger\hat{N}|\psi_n\rangle + \hat{a}^\dagger|\psi_n\rangle = \hat{a}^\dagger\nu_n|\psi_n\rangle + \hat{a}^\dagger|\psi_n\rangle = (\nu_n+1)\hat{a}|\psi_n\rangle\end{cases}$$
סה"כ:
$$\begin{cases}\hat{N}\hat{a}|\psi_n\rangle = (\nu_n-1)\hat{a}|\psi_n\rangle \\ \hat{N}\hat{a}^\dagger|\psi_n\rangle = (\nu_n+1)\hat{a}|\psi_n\rangle\end{cases}$$

התוצאה שכתובה אומרת את הדבר הבא: אם $|\psi_n\rangle$ הוא מ"ע של $\hat{N}$ עם ע"ע ν_n, $|\psi_n\rangle$ אחרי שעבד עליו $\hat{a}$ זה הווקטור $\hat{a}|\psi_n\rangle$, והוא לא סתם ווקטור – הוא ו"ע של $\hat{N}$ עם ע"ע שונה. כנ"ל עבור הווקטור $\hat{a}^\dagger|\psi_n\rangle$.

<u>נוכיח עכשיו בשלילה ש-ν_n מספרים שלמים</u> –

1. נניח בשלילה ש-ν_n אינם מספרים שלמים.
2. זה אומר שקיים מספר m שלם כך ש-$m \leq \nu_n \leq m+1$.
3. הע"ע הזה מתאים למ"ע כלשהו $|\psi_n\rangle$. נפעיל על המ"ע הזה את האופרטור $\hat{a}$ ונקבל מצב חדש $\hat{a}|\psi_n\rangle$, שכמו שראינו הע"ע המתאים לו הוא $\nu_n - 1$. מתקיים:

$$m-1 \le \nu_n - 1 \le m$$

4. נמשיך להפעיל את האופרטור הזה. בסופו של דבר, אחרי $m-1$ הפעלות, נקבל מצב עם ע"ע בין אפס לאחת, ואחרי ההפעלה ה-m-ית נקבל מ"ע עם ע"ע שלילי, בסתירה למה שראינו $\nu_n \ge 0$, ולכן בסתירה להנחת האינדוקציה.

זה מוכיח ש-ν_n שלמים. נשים לב שאם היינו בוחרים אותו כמספר שלם ומנסים להפעיל את אותו האלגוריתם שהפעלנו במהלך אינדוקציה, בסופו של דבר נגיע למ"ע עם ע"ע אפס, וזה מותר. אם נפעיל עליו עוד פעם את $\hat{a}$ נקבל את וקטור אפס ממש (לפי מה שראינו: $\hat{a}|\psi_0\rangle = 0$), ואם נמשיך להפעיל את האופרטור על וקטור האפס נקבל פשוט אפס שוב ושוב.

מסקנה: $\nu_n = n \ge 0$, כלומר ν_n הם המספרים הטבעיים השלמים, ונסמן את הע"ע מעתה פשוט ב-n. את המ"ע נסמן ב-$|n\rangle$ (סתם כי זה סימון נח).

זה מסביר גם את הסימון $\hat{N}$, והאופרטור הזה נקרא **אופרטור המספר**. ההפעלה של $\hat{a}$ ו-$\hat{a}^\dagger$ מעבירה אותנו בין מנות שונות של אנרגיה. בהצגה חסרת יחידות, הגודל של המנות הזה הוא פשוט אחת, ובהצגה עם יחידות $\hbar\omega$ – זה המרחק בין רמות האנרגיה של האוסילטור ההרמוני.

אם אנחנו רוצים לרדת ברמות האנרגיה אנחנו מפעילים את $\hat{a}$ (**אופרטור ההורדה/הריסה**), אם לעלות $\hat{a}^\dagger$ (**אופרטור ההעלאה/יצירה**).

אם נקח את הביטוי $\hat{a}^\dagger|n\rangle$ ונצמיד אותו, נקבל $\langle n|\hat{a}$. כלומר: כאשר אופרטור ההורדה עובר ימינה הוא מוריד את את המצב, וכשהוא עובד שמאלה הוא מעלה אותו. כשאופרטור ההורדה עובד ימינה הוא מוריד, וכשעובד שמאלה הוא מעלה.

נשים לב שיש כאן הבדל גדול באוסילטור קלאסי, שם אפשר לקחת בור, לשים מסה במרכז ולתת לו אנרגיה אפס, והוא ייעמוד במקום. אם האוסילטור קוונטי, האנרגיה אפס לא קיימת! היא לא בספקטרום של המצבים העצמיים – אין אפשרות לצור אוסילטור הרמוני עם אנרגיה אפס. האנרגיה הכי נמוכה היא $\frac{\hbar\omega}{2}$ (מכונה האנרגיה של הוואקום), והמצב $|0\rangle$ שמתאים לה, מצב היסוד, מכונה גם מצב הריק/וואקום. המשמעות היא שאם נקח אוסילטור ונוריד לו את האנרגיה עד למצב היסוד, עדיין יהיו שם איזשהן "פלקטואציות קוונטיות" (החלקיק לא יכול להיות במנוחה באמצע כי אז האנרגיה שלו תהיה אפס).

20.1.3 המ"ע של ההמילטוניאן בהצגת האנרגיה/מספר

נשים לב שהמ"ע של ההמילטוניאן ושל אופרטור המספר הם אותם מצבים.

למרות שאנחנו עוברים בין מצב למצב עם אופרטורי ההעלאה וההורדה עדיין צריך לדאוג לנרמול – זה שזה מצב עצמי לא אומר שזה מצב בעל אותו אורך. נסתכל על האורך של וקטור n שקיבלנו ע"י העלאה של וקטור $n-1$ ועל וקטור כזה שהתקבל ע"י הורדה של $n+1$:

$$\begin{cases} \||c|n\rangle\| = \|\hat{a}^\dagger|n-1\rangle\| \\ \||c|n\rangle\| = \|\hat{a}|n+1\rangle\| \end{cases}$$

$$\begin{cases} |c|^2\langle n|n\rangle = \langle n-1|\hat{a}\hat{a}^\dagger|n-1\rangle = \langle n-1|\hat{N}+1|n-1\rangle \\ |c|^2\langle n|n\rangle = \langle n+1|\hat{a}^\dagger\hat{a}|n+1\rangle = \langle n+1|\hat{N}|n+1\rangle \end{cases}$$

בכתיבה הזאת ה-$|n\rangle$ ו-$|n\pm1\rangle$ מנורמלים. נקבל:

$$\begin{cases} |c|^2 = n \\ |c|^2 = n+1 \end{cases}$$

המסקנה:

- הווקטור שמתקבל מהעלאה של $|n\rangle$ הוא ארוך פי $\sqrt{n}$, לכן בשביל לנרמל את מה שיוצא:

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}}\hat{a}^\dagger|n-1\rangle$$

ומזה אפשר להסיק גם:

$$|n+1\rangle = \frac{1}{\sqrt{n+1}}\hat{a}^\dagger|n\rangle$$

- הווקטור שמתקבל מהורדה של $|n\rangle$ הוא ארוך פי $\sqrt{n+1}$, לכן בשביל לנרמל את מה שיוצא:

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n+1}}\hat{a}|n+1\rangle$$

ומזה אפשר להסיק גם:

$$|n-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}}\hat{a}|n\rangle$$

אם אפשר להרים מצב כדי להגיע ל-$|n\rangle$, אפשר גם להרים את המצב לפניו כדי להגיע אליו:

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}}\hat{a}^\dagger|n-1\rangle = \frac{\hat{a}^\dagger}{\sqrt{n}}\frac{\hat{a}^\dagger}{\sqrt{n-1}}|n-2\rangle = \frac{\hat{a}^\dagger}{\sqrt{n}}\frac{\hat{a}^\dagger}{\sqrt{n-1}}\frac{\hat{a}^\dagger}{\sqrt{n-2}}|n-2\rangle = \cdots = \frac{\left(\hat{a}^\dagger\right)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle$$

כך אפשר לכתוב כל מצב עצמי רק באמצעות מצב הוואקום ואופרטורי ההרמה.

נשתמש בכתיבה הזאת בשביל להראות אורתונורמליות של מצבים (למרות שכבר הוכחנו את זה לכל אופרטור הרמיטי, אבל נראה לראות את זה במפורש). נקח שני מצבים, ונכתוב אותם באמצעות אופרטורי ההרמה:

$$\langle m|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{m!}}\frac{1}{\sqrt{n!}}\left\langle 0\left|\hat{a}^m {\hat{a}^\dagger}^n\right|0\right\rangle = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{m!}}\langle 0|\hat{a}^m|n\rangle = \frac{\sqrt{n!}}{\sqrt{m!}}\langle 0|\hat{a}^{m-n}|0\rangle = 0, \ m>n \\ \frac{1}{\sqrt{n!}}\left\langle m\left|{\hat{a}^\dagger}^n\right|0\right\rangle = \frac{\sqrt{m!}}{\sqrt{n!}}\left\langle 0\left|{\hat{a}^\dagger}^n\right|0\right\rangle = 0, \ \ m<n \\ \frac{1}{\sqrt{m!}}\langle 0|\hat{a}^m|n\rangle = \langle 0|0\rangle = 1, \qquad\qquad m=n \end{cases}$$

מה עשינו בכל מקרה:

- במקרה הראשון –
  - הפעלנו את האופרטור $\hat{a}^\dagger$ ימינה n פעמים.
  - הפעלנו את האופרטור $\hat{a}^m$ ימינה, אבל יכולנו להפעיל אותו רק n פעמים ו-$m>n$.
  - כיוון ש-$m>n$ אפשר להפעיל אותו עוד לפחות פעם אחת, וכשנפעיל אותו על ווקטור הוואקום נקבל פשוט אפס.

- במקרה השני –
  - הפעלנו את האופרטור $\hat{a}$ שמאלה n פעמים.
  - הפעלנו את $\hat{a}^\dagger$ שמאלה m פעמים.
  - הפעלנו עוד פעם אחת את $\hat{a}^\dagger$ שמאלה, על ווקטור הוואקום, וקיבלנו אפס.

- במקרה השלישי –
  - הפעלנו את $\hat{a}^\dagger$ ימינה n פעמים.
  - הפעלנו את האופרטור $\hat{a}$ ימינה n פעמים והוא הוריד אותנו בחזרה.
  - התקבל מצב מנורמל, לכן הגודל שלו הוא 1.

תנאי השלמות שבא מההרמיטיות אומר לנו שיחס השלמות הוא:

$$\sum_{n=0}^{\infty}|n\rangle\langle n| = \mathbb{1}$$

מה ההצגה של אופרטורי ההעלאה וההורדה בהצגת האנרגיה? איברי המטריצה המתאימים –

$$\langle m|\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}\langle m|n+1\rangle = \sqrt{n+1}\delta_{m,n+1}$$

$$\langle m|\hat{a}|n\rangle = \sqrt{m+1}\langle m+1|n\rangle = \sqrt{m+1}\delta_{m+1,n}$$

נשים לב שבשני המקרים יכולנו לבחור אם להפעיל ימינה או שמאלה, ובכל בחירה מקבלים את אותה התוצאה.

נשים לב שבמקרה הראשון כל מה שלא מתאפס זה באלכסון הראשון מתחת לאלכסון הראשי:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

ובמקרה השני מעליו:

$$\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

נכתוב גם את איברי המטריצה של אופרטור המקום והתנע בהצגת האנרגיה:

$$\langle m|\hat{X}|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle m|\hat{a}^\dagger + \hat{a}|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{n+1}\delta_{m,n+1} + \sqrt{m+1}\delta_{m+1,n}\right)$$

$$\langle m|\hat{P}|n\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}\langle m|\hat{a}^\dagger - \hat{a}|n\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{n+1}\delta_{m,n+1} - \sqrt{m+1}\delta_{m+1,n}\right)$$

ובהצגה מטריציונית נקבל עבור אופרטור המקום:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{1} & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

אפשר לראות ככה בצורה ויזואלית שהוא הרמיטי.

ועבור אופרטור התנע:

$$\frac{i}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{1} & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{1} & 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

20.1.4 ערכי תצפית של מקום ותנע

כבר ראינו את החוזק של אופרטורי ההעלאה בחישוב הספקטרום, אבל בזה לא נגמר החוזק שלהם. הם מאוד מפשטים חישובים בגדלים שניתנים לכתיבה בעזרתם, למשל המקום והתנע, שהם אופרטורים חשובים שבאמצעותם ניתן לכתוב אופרטורים פיזיקליים חשובים אחרים.

ערך התצפית של אופרטור המקום עבור המ"ע עם הע"ע n:

$$\langle\hat{X}\rangle_n = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle n|\hat{a}^\dagger + \hat{a}|n\rangle = 0$$

(זה בגלל שאם נפעיל את האופרטור ימינה נקבל $n-1$ והמכפלה של n עם $n-1$ היא אפס, ואם נפעיל שמאלה נקבל $n+1$ כנ"ל.) זה אומר שערך התצפית של כל המצבים הוא אפס.

זה מסתדר עם משהו שיכולנו לדעת מראש – בגלל שהבור הוא סימטרי, כל המצבים העצמיים הם או סימטריים או אנטי־סימטריים, מה שאומר ש-$|\psi|^2$ בהצגת המקום יהיה סימטרי, ואז הממוצע שלה יהיה אפס.

ערך התצפית של אופרטור התנע:

$$\langle\hat{P}\rangle_n = \frac{i}{\sqrt{2}}\langle n|\hat{a}^\dagger - \hat{a}|n\rangle = 0$$

גם אפס עבור כל המצבים.

סטיית התקן (בריבוע) של המקום:

$$\sigma_{x_n}^2 = \langle\hat{X}^2\rangle_n - \langle\hat{X}\rangle_n^2 = \frac{1}{2}\left\langle n\left|\left(\hat{a}^\dagger + \hat{a}\right)^2\right|n\right\rangle = \frac{1}{2}\left\langle n\left|\hat{a}^{\dagger 2} + \hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^2\right|n\right\rangle$$

כשנפעיל את איברי הריבוע התרומה שלהם תתאפס, כמו שהיה עם האיברים הלא ריבועיים, כי אם למשל נפעיל את $\hat{a}^\dagger$ פעמיים ימינה נקבל את $|n+2\rangle$ וזה ניצב ל-$\langle n|$, ובאופן דומה לגבי $\hat{a}^2$.

עבור שני האופרטורים הנותרים, אנחנו יודעים ש-$\hat{a}^\dagger\hat{a}$ אופרטור המספר ו-$\hat{a}\hat{a}^\dagger$ האופרטור ועוד אחת, אז נקבל:

$$\sigma_{x_n}^2 = \frac{1}{2}\langle n|2\hat{N} + 1|n\rangle = \frac{1}{2}(2n+1) = n + \frac{1}{2}$$

סטיית התקן (בריבוע) של התנע:

$$\sigma_{p_n}^2 = \langle\hat{P}^2\rangle_n - \langle\hat{P}\rangle_n^2 = -\frac{1}{2}\left\langle n\left|\left(\hat{a}^\dagger - \hat{a}\right)^2\right|n\right\rangle = -\frac{1}{2}\left\langle n\left|\hat{a}^{\dagger 2} - \hat{a}^\dagger\hat{a} - \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^2\right|n\right\rangle$$

שוב, התרומות של הריבועים ייתבטלו, ונשאר עם:

$$\sigma_{p_n}^2 = n + \frac{1}{2}$$

אי־הוודאות עבור מצב n:

$$\sigma_x\sigma_p = n + \frac{1}{2}$$

עוד לפני שנמשיך את הנוסחא, נראה שאפשר ללמוד מזה כמה דברים:

- אי־הוודאות במקום ובתנע גדלה לינארית עם n – ככל שהרמה יותר גבוהה, אי־הוודאות יותר גדולה. זה גם הגיוני: ככל שעולים ברמה אנחנו גם יכולים להתרחק יותר מהראשית, כי למרות שהממוצע של המיקום הוא אפס, סטיית התקן גדלה. מצד שני, ככל שיש לנו יותר אנרגיה נעבור את הראשית (מבחינת אינטואיציה קלאסית) במהירות יותר גבוהה. לכן, נקבל פילוג יותר גדול של המקום והתנע.

- נראה בשיעור הבא שהמיקום של מצב עצמי יהיה מפולג בתוך האוסילטור, ואפשר להתייחס ל-σ_x בתור האמפליטודה של האוסילציה, כי תמיד יש סיכוי להמצא במרכז, אבל σ_x מראה לנו עד כמה רחוק אנחנו מגיעים. האנרגיה הולכת כמו הריבוע של המקום הכי רחוק, σ_x^2, כמו המשרעת, וזו תכונה שאנחנו מכירים גם מאוסילטור קלאסי.

- כמו שראינו, במצב היסוד עדיין יש אנרגיה. אפשר לראות גם שאי־הוודאות לא יורדת לאפס במצב היסוד, אלא נשארת חצי. אם נחזיר את היחידות, נקבל שאי־הוודאות המינימלית היא $\frac{\hbar}{2}$. זה בדיוק הגבול התחתון של אי־הוודאות של הייזנברג בין מקום לאנרגיה.
בתרגול ראינו (וציינו גם בשיעור) שאם למצב יש את מינימום אי־הוודאות, אם הוא מרווה את התנאי של הייזנברג, הוא נראה בהכרח כגאוסיין.
לכן, בלי לפתור משוואה דיפרנציאלית או שום דבר כזה, רק לפי זה אנחנו יודעים איך תראה פונ' הגל של מצב היסוד – היא תהיה גאוסיין.

<u>נראה שזה גאוסיין</u> –

ראינו ש-$\hat{a}|0\rangle = 0$. נטען שזו משוואה דיפרנציאלית למצב המקום: אפשר להטיל את זה למצב של המקום –

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\langle x'|\hat{a}|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle x'\big|\hat{X} + i\hat{P}\big|0\rangle$$

אנחנו יודעים בדיוק איך אופרטורי המיקום והתנע עובדים על מצב כלשהו בהצגת המקום:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\langle x'|\hat{a}|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x' + \frac{d}{dx'}\right)\psi_0(x') = 0$$

זו משוואה דיפרנציאלית פשוטה, והפתרון (המנורמל) שלה הוא:

$$\psi_0(x') = \pi^{-1/4}e^{-\frac{x'^2}{2}}$$

21 שיעור 21 – 12.6.18

21.1 מתנד הרמוני חד־מימדי – המשך

21.1.1 המ"ע של ההמילטוניאן בהצגת המקום והתנע

מצב היסוד:

יש לנו כבר הרבה מידע כדי לתת את הפתרונות של משוואת שרדינגר הדיפרנציאלית בהצגת המקום ישירות, בלי לפתור אותה. ההתחלה של התהליך הזה היא במשוואה:

$$\hat{a}|0\rangle = 0$$

כלומר, $\hat{a}$ שעובד על מצב היסוד הופך אותו לווקטור האפס. נפתור את המשוואה הזאת בהצגה חסרת המימדים $x' = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x$, ולכן נסתכל על זה בהצגה של x': $\langle x'|\hat{a}|0\rangle = 0$. זו משוואה דיפרנציאלית, כי את $\hat{a}$ אנחנו יודעים לכתוב באמצעות המקום והתנע, ואיך המקום והתנע עובדים על כל מצב בהצגת המקום אנחנו יודעים. נקבל:

$$\langle x'|\hat{a}|0\rangle = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\langle x'|\hat{X} + i\hat{P}|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x' + \frac{d}{dx'}\right)\psi_0(x) = 0$$

כמו שראינו בשיעור שעבר, זו משוואה פשוטה לפתרון, וביחד עם הנרמול נקבל:

$$\psi_0(x') = \pi^{-1/4}e^{-\frac{x'^2}{2}}$$

הממוצע של הגאוסיין הזה הוא באפס, אבל הוא לא "במנוחה קלאסית", כי ההסתברות לא למצוא אותו במרכז היא 1 (כי הוא לא יכול להיות במנוחה, כמו שראינו בשיעור הקודם), ונמצא אותו מפוזר לפי הגאוסיין.

אם נעבור ליחידות עם מימדים נקבל:

$$\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}$$

ובשיעור שעבר כבר דיברנו על המשמעויות של זה.

שאר המצבים:

בשביל לקבל את שאר המצבים ממה שכבר יש לנו, נקח את אופרטור ההעלאה ונפעיל אותו על מצב היסוד, וכך נקבל גם את שאר המצבים:

$$\psi_n(x') = \frac{1}{\sqrt{n!}}\langle x'|\hat{a}^\dagger|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}\frac{1}{\sqrt{2^n}}\left\langle x'\middle|\left(\hat{X} - i\hat{P}\right)^n\middle|0\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!\,2^n}}\left(x' - \frac{d}{dx'}\right)^n \psi_0(x)$$

ובקורדינטות עם המימדים:

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n!\,2^n}}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x - \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\frac{d}{dx}\right)^n \psi_0(x)$$

נסתכל שוב על הצורה חסרת המימדים. בשביל לחקור את זה, נפעיל פעמיים את האופרטור, לקבלת שני המצבים הראשונים אחרי מצב הוואקום:

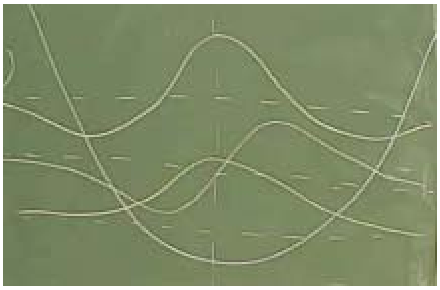
$$\psi_1(x') = \sqrt{\frac{2}{\sqrt{\pi}}}x'e^{-\frac{x'^2}{2}}$$

$$\psi_2(x') = \sqrt{\frac{1}{4\sqrt{\pi}}}\left(2x'^2 - 1\right)e^{-\frac{x'^2}{2}}$$

אנחנו כבר יודעים שמצב היסוד הוא גאוסיין. כל סדר של הפעלה או מכפיל או גוזר, אבל הגאוסיין בחוץ נשאר. בנוסף, הכפלה ב-x או נגזרת של גאוסיין מעלים את האיבר בחוץ בדרגה אחת של פולינום. התוצאה בסופו של דבר היא גאוסיין, שמוכפל בפולינום שהסדר שלו הוא הסדר של הפתרון (וצריך לחשב אותו בשביל לדעת את המקדמים).

הפולינומים האלה הם בעצמם פתרונות של משוואה דיפרנציאלית ידועה – משוואת הרמיט, והם נקראים פולינומי הרמיט. לכן, הפונקציות העצמיות של של המילטוניאן של אוסילטור הרמוני נקראות פונצקיות גאוס-הרמיט.

אפשר להוכיח שהפונקציות האלה הן תמיד סימטריות או אנטי־סימטריות, כלומר בעלות זוגיות מוגדרת לסירוגין. הזוגיות היא לפי הזוגיות של הסדר. זה צפוי, בגלל שהפוטנציאל סימטרי. אפשר לצייר "מפל" של מצבי האנרגיה (ונצייר ברקע גם את הפוטנציאל, כדי לתת נקודת ייחוס). למשל, שלושת המצבים הראשונים:



עוד תכונה שאנחנו רואים חוץ מהזוגיות זה מספר האפסים, שראינו גם בבורות לא סימטריים – למצב היסוד אין אפסים, למצב השני יש אפס אחד, לשני שניים וכו'. זה קורה כי לפולינום הרמיט מסדר n יש n אפסים ממשיים.

נסתכל על תכונה מעניינת של המ"ע של אוסילטור הרמוני, ונשים לב אליה מזה שאם נכתוב את ההמילטוניאן:

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\left(\hat{X}^2 + \hat{P}^2\right)$$

אם נעשה החלפה אלגברית בין $\hat{X} \leftrightarrow \pm\hat{P}$, המשוואה תהיה אותה המשוואה. זה נשמע מוזר מבחינה קלאסית, אבל מבחינה קוונטית זה יותר ברור – להחליף את ההצגה. במקרה הזה, כאמור, ההמילטוניאן ישאר אותו הדבר תחת ההחלפה. מה שכן, צריך לבחור את הסימן בצורה קונסיסטנטית כדי לשמור על המעברים מ-X ל-P באותה צורה, לכן נחליף $\hat{X} \leftrightarrow -\hat{P}$.

ברגע שעשינו את ההחלפה הזאת, נקח את הפתרונות שיש לנו ונכתוב x' בכל מקום שיש לנו p' ולהפך, והפתרונות שנקבל הם גם פתרונות של ההמילטוניאן. אם נעשה את זה, נוכל לקבל מיד את מצב היסוד בהצגת התנע, בלי לפתור כלום:

$$\tilde{\psi}_0(p') = \pi^{-1/4}e^{-\frac{p'^2}{2}}$$

גם בהצגת התנע זה גאוסיין, מה שכבר יכלנו לדעת מהעובדה שמצב היסוד מרווה את עקרון אי־הוודאות.

אם נרצה גם את שאר הפתרונות, נקבל אותו הדבר רק שאופרטור ההעלאה יכפיל ב-$-i$. זה אומר שנקבל:

$$\tilde{\psi}_n(p') = \frac{(-i)^n}{\sqrt{n!\,12^n}}\left(p' - \frac{d}{dp'}\right)\tilde{\psi}_0(p')$$

כשהאיבר $(-i)^n$ הגיע מהשינוי של אופרטור ההעלאה (אם כי זו פאזה גלובלית של המצב, אז היא לא משנה את הפיזיקה).

זה אומר שהפתרונות של אוסילטור הרמוני נראים אותו הדבר בהצגת המקום ובהצגת התנע, אלה אותן הפונקציות – פונקציות גאוס-הרמיט מהסדר של המשוואה.

ראינו בשיעורים קודמים שהמעבר בין הצגת המקום להצגת התנע באופן הכי כללי היא עם פורייה. אפשר לחשוב על פורייה בתור אופרטור – הראנו את פורייה בתור הפעלה של אופרטור אוניטרי שמעביר אותנו בין הצגת x ל-p. אנחנו רואים כאן שפונקציות גאוס-הרמיט הן פונקציות עצמיות של אופרטור פורייה, כי אם מפעילים עליהן התמרת פורייה מקבלים את אותה הפונקציה.

פונקציות גאוס-הרמיט שקיבלנו הם מ"ע של ההמילטוניאן, מה שאומר שהם מהווים בסיס שלם. כלומר, כל מצב יכול להכתב כסופרפוזיציה שלהם. כשעשינו בזמנו את ההרצפה ועברנו למרחבים אינסופיים, אמרנו שהמרחבים יתוארו ע"י פרמטר אינסופי, והסתייגנו קצת מהמילה רציפות. x הוא פרמטר אינסופי ורציף, אבל אפשר לתאר את אותם מצבים באותו מרחב הילברט כאשר הפרמטר של הפונ' האלה הוא דיסקרטי – n, והמצבים הדיסקרטיים האלה מתארים את אותו מרחב. זה אומר שמרחב אינסופי יכול להיות מתואר גם באמצעות פרמטרים רציפים וגם באמצעות פרמטרים דיסקרטיים אינסופיים.

ראינו שהממוצע של כל הפונקציות הוא אפס, כלומר הממוצע על x הוא במרכז. אם הפונ' סימטרית זה ברור למה זה קורה – הממוצע שלה במרכז. גם בתנע הממוצע במרכז כי גם שם יש גאוסיינים, ואפשר לפרש את זה בתור אם אנחנו נמצאים מצד ימין יש סיכוי שווה לנוע שמאלה או ימינה, ואם בשמאל אם זה גם יש סיכוי שווה, אז סך כל התרומות מתאפסות. אפשר לחשוב על זה בצורה סמי-קלאסית, שגם שם הממוצע של המקום והתנע קלאסית – הממוצע של המקום בתנועה קלאסית באוסילטור הרמוני על מחזור שלם או כמה מחזורים שלמים היא אפס, על כל תנועה ימינה יש תנועה שמאלה, ובדומה גם בתנע.

21.1.2 מצבים קוהרנטיים

יש בעיה אחת עם מצבים עצמיים של מצבי אנרגיה – אנחנו מצפים לעקרון ההתאמה, שאומר שאם נעלה את המספר הקוונטי נקבל מצבים יותר ויותר קלאסיים. מה קורה כש-$n \gg 1$? יש לנו בממוצע סטיית תקן מאוד גדולה, אז אנחנו יכולים להמצא בשני הצדדים של הראשית בעת ובעונה אחת בהסתברות דומה, וזו התנהגות מאוד קוונטית. אפשר לאמר שההתנהגות הקוונטית אפילו יותר מודגשת, כי המקומות שאנחנו יכולים להמצא בהם יותר רחוקים מהראשית לשני הצדדים.

אז למה אנחנו לא רואים התנהגות קוונטית כשאנחנו מתנדנדים על נדנדה בפארק, שהוא אוסילטור הרמוני? כבר אמרנו שצריך לתאר את האוסילטור באמצעות חבילת גלים ממוקמת היטב שתהיה סופרפוזיציה של מצבי האנרגיה, ונשאל איך תראה חבילת הגלים הזאת.

<u>התמונה הקלאסית של אוסילטור הרמוני:</u>

נתחיל מהאוסילטור הקלאסי. יש לנו את משוואות המילטון-יעקובי:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{p}{m}, \qquad \frac{dp}{dt} = -m\omega^2 x$$

ובהצגה חסרת יחידות:

$$\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\frac{dx'}{dt} = \frac{\sqrt{m\omega\hbar}}{m}p', \qquad \sqrt{m\omega\hbar}\frac{dp'}{dt} = -m\omega^2\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}x'$$

$$\Rightarrow \frac{dx'}{dt} = \omega p', \qquad \frac{dp'}{dt} = -\omega x'$$

זו משוואה שאם נצייר מישור $x - p$ תצייר בה מעגלים בתדירות ω.

נגדיר פרמטר מרוכב חדש:

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + ip')$$

נעשה את זה כדי שהמישור $x - p$ הופך להיות המישור המרוכב α, עם פתרון שהוא מעגל יחידה (כי x', p' חסרי מימדים):

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{dx'}{dt} + i\frac{dp'}{dt}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\omega p' - i\omega x') = -\frac{i\omega}{\sqrt{2}}(x' + ip') = -i\omega\alpha$$

וקיבלנו משוואה דיפרנציאלית פשוטה, שהפתרון שלה:

$$\alpha(t) = \alpha_0 e^{-i\omega t}$$

כאשר באופן כללי $\alpha_0 \in \mathbb{C}$, ומכיל את רדיוס המעגל ואת הזווית ההתחלתית.

נקבל מתוך הפתרון של זה את הפתרונות הקלאסיים:

$$x'(t) = \sqrt{2}Re(\alpha) = \sqrt{2}|\alpha_0|\cos(\omega t + arg\ \alpha_0)$$
$$p'(t) = -\sqrt{2}Im(\alpha) = -\sqrt{2}|\alpha_0|\sin(\omega t + arg\ \alpha_0)$$

האנרגיה הקלאסית בכל זמן של האוסילרטור ההרמוני:

$$E = \frac{1}{2}\left(x'^2 + p'^2\right) = \alpha^*\alpha = |\alpha_0|^2$$

והיא כמובן לא תלויה בזמן, כי האנרגיה רק הופכת מקינטית לפוטנציאלית בלי איבוד.

<u>התמונה הקוונטית:</u>

נרצה לעשות קוונטיזציה של הגודל α, שראינו שהוא מתאר אוסילטור הרמוני. אם מחליפים את x', p' באופרטורים גם α הופך לאופרטור, ונקבל:

$$\alpha \xrightarrow{\text{קוונטיזיה}} \hat{a}$$

α היה משתנה מרוכב, אז לא מפתיע שהאופרטור לא הרמיטי.

נרצה עכשיו לדעת את הדינמיקה של ערך התצפית של $\hat{a}$. נשתמש במשוואת אהרנפסט:

$$\frac{d\langle\hat{a}\rangle}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\langle[\hat{a}, H]\rangle = -i\omega\left\langle\left[\hat{a}, \widehat{H}\right]\right\rangle = -i\omega\left\langle\left[\hat{a}, \widehat{N}\right]\right\rangle = -i\omega\langle\hat{a}\rangle$$

כשהשתמשנו בכך ש-$\widehat{H}, \widehat{N}$ מתחלפים. הפתרון של המשוואה ייתן:

$$\langle\hat{a}\rangle(t) = \langle\hat{a}\rangle(t = 0)e^{-i\omega t}$$

וזה מאפשר לנו לכתוב גם את הדינמיקה של ערכי התצפית של המיקום והתנע:

$$\left\langle\widehat{X}\right\rangle(t) = \sqrt{2}Re(\langle\hat{a}\rangle) = \sqrt{2}|\langle\hat{a}\rangle(t = 0)|\cos\left[\omega t + arg\left(\langle\hat{a}\rangle(t = 0)\right)\right]$$
$$\left\langle\widehat{P}\right\rangle(t) = \sqrt{2}Im(\langle\hat{a}\rangle) = -\sqrt{2}|\langle\hat{a}\rangle(t = 0)|\sin\left[\omega t + arg\left(\langle\hat{a}\rangle(t = 0)\right)\right]$$

מאוד דומה לדינמיקה של α הקלאסית.

שלוש המשוואות האלה נכונות לכל מצב התחלתי של האוסילטור, ואנחנו רואים שעבור כל מצב התחלתי ערך התצפית שלו מתנדנד קלאסית.

הדינמיקה של מצבים עצמיים של האנרגיה מקבילה לדינמיקה הקלאסית של חלקיק שנמצא במנוחה במרכז האוסילטור. זו בדיוק הבעיה שדיברנו עליה קודם – גם אם $n \gg 1$ עדיין ההתנהגות הקלאסית תהיה כאילו החלקיק יושב באמצע.

נרצה למצוא את החלקיק הכי ממוקם שאפשר, הכי קלאסי, שמתנדנד כמו אוסילציות קלאסיות. לכן, נרצה למצוא מצב התחלתי שיתן את ההתנהגות הכי דומה בין ערכי התצפית של המיקום והתנע שקיבלנו עכשיו לבין מה שקיבלנו במקרה הקלאסית. נראה שזה מתקיים בתנאי הבא:

$$\langle\hat{a}\rangle(0) = \langle\psi(0)|\hat{a}|\psi(0)\rangle = \alpha_0$$

כלומר, אם נצליח לצור מצב שבו ערך התצפית של $\hat{a}$ ברגע ההתחלתי הוא α_0 נקבל התנהגות הכי דומה שאפשר לקלאסית. נרצה למצוא סופרפוזיציה שתיתן את זה (כבר אמרנו שמצב עצמי של האנרגיה לא ייתן את זה, כי הוא לא יתנדנד, אז נרצה למצוא סופרפוזיציה של מצבי אנרגיה שכן תיתן את זה).

נטען שיש הרבה מצבים $\psi(0)$ שייתנו את α_0, ובפרט יש אחד פשוט שיתברר כמעניין. זה המצב שמקיים:

$$\hat{a}|\psi(0)\rangle = \alpha_0|\psi(0)\rangle$$

כלומר ה-ψ שאנחנו מחפשים הוא מצב עצמי של אופרטור ההורדה. נזכור ש-$\hat{a}$ הוא לא אופרטור הרמיטי ולאו דווקא יש לו מצב עצמי, אבל מסתבר שדווקא יש כאן.

נתחיל לחפש את המצב הזה, שנקרא לו מעכשיו $|\psi(0)\rangle = |\alpha_0\rangle$. דבר ראשון נמצא אותו בהצגת האנרגיה – נפרוס אותו על הצגות המספר:

$$|\alpha_0\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n|n\rangle$$

נציב את זה בתוך משוואת הע"ע:

$$\hat{a}\sum_{n=0}^{\infty} c_n|n\rangle = \alpha_0\sum_{n=0}^{\infty} c_n|n\rangle$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n\sqrt{n}|n-1\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_0 c_n|n\rangle$$

נעשה שינוי נוטציה בסכום באגף שמאל כדי להתחיל את הסכימה מאפס:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}\sqrt{n+1}|n\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_0 c_n|n\rangle$$

יש כאן סכום של ווקטורים אורתונורמלים, אז כדי שהם יהיו שווים צריך שהמקדמים יהיו שווים:

$$c_{n+1}\sqrt{n+1} = \alpha_0 c_n$$
$$\Rightarrow c_{n+1} = \frac{\alpha_0}{\sqrt{n+1}}c_n$$

קיבלנו נוסחת רקורסיה. ננסה לפתור אותה ע"י זה שנבטא את c_n ואז נציב כל פעם את מה שאנחנו יודעים:

$$c_n = \frac{\alpha_0}{\sqrt{n}}c_{n-1} = \frac{{\alpha_0}^2}{\sqrt{n(n-1)}}c_{n-2} = \cdots = \frac{\alpha_0^n}{\sqrt{n!}}c_0$$

כלומר:

$$|\alpha_0\rangle = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_0^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$$

קיבלנו את ההצגה של $|\alpha_0\rangle$ בעזרת מצבי המספר. מה שנותר זה למצוא את c_0, שייקבע לפי הנרמול (עד כדי פאזה גלובלית, שנניח ש-c_0 ממשי נקח אותה כאפס):

$$\langle\alpha_0|\alpha_0\rangle = |c_0|^2 \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_0^m}{\sqrt{m!}}\frac{\alpha_0^n}{\sqrt{n!}} \langle m|n\rangle$$

זה לא מתאפס רק כש-$m = n$:

$$\langle\alpha_0|\alpha_0\rangle = |c_0|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha_0|^{2^n}}{n!} = |c_0|^2 e^{|\alpha_0|^2} = 1$$

קיבלנו טור שהוא הפיתוח של אקספוננט, אז ידענו לפתור אותו. סה"כ נקבל:

$$|\alpha_0\rangle = e^{\frac{-|\alpha_0|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_0^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$$

המצבים האלה נקראים **מצבים קוהרנטיים**. נתחיל להסתכל על תכונות שלהם, ודבר ראשון נבדוק מהו ערך התצפית של ההמילטוניאן במצב קוהרנטי שמוגדר ע"י α_0:

$$\langle\hat{H}\rangle = \left\langle \alpha_0 \left| \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right| \alpha_0 \right\rangle$$

נשים לב שאנחנו יודעים מה קורה כשאנחנו מפעילים את $\hat{a}$ על α_0 כי הוא מצב קוהרנטי שלו, אבל לא מה קורה כשאנחנו מפעילים את $\hat{a}^\dagger$ עליו. יותר מזה, אם נכתוב משוואת ע"ע לאופרטור ההעלאה לא יהיה לה פתרון.

לכן, נפעיל את $\hat{a}$ ימינה ואת $\hat{a}^\dagger$ שמאלה. זה יעזור לנו כי אם נקח את משוואת הע"ע של $\hat{a}$ ונצמיד אותה הרמיטית נקבל:

$$\langle\alpha_0|\hat{a}^\dagger = \alpha_0^*\langle\alpha_0|$$

ואז זה כבר מותר לעשות. לכן, נפעיל את $\hat{a}$ ואת $\hat{a}^\dagger$ שמאלה ונקבל:

$$\langle\hat{H}\rangle = \left\langle \alpha_0 \left| \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right| \alpha_0 \right\rangle = \langle\hat{H}\rangle = \left\langle \alpha_0 \left| \alpha_0^* \alpha_0 + \frac{1}{2} \right| \alpha_0 \right\rangle = |\alpha_0|^2 + \frac{1}{2}$$

נזכר שראינו שהאנרגיה הקלאסית היא $E = |\alpha_0|^2$, שזה שונה, אבל כן מסתדר עם עקרון ההתאמה – אם $\alpha_0 \gg 1$ אז החצי ייבלע בו, ואז נקבל אותה תוצאה כמו הקלאסית.

נחשב את ערך התצפית של אופרטור המספר עבור מצב α_0, כלומר נחשב מה הרמה המעוררת הממוצעת בהנתן α_0:

$$\langle\hat{N}\rangle = \langle\alpha_0|\hat{a}^\dagger\hat{a}|\alpha_0\rangle = |\alpha_0|^2$$

סטיית התקן:

$$\sigma_N^2 = \langle\hat{N}^2\rangle - \langle\hat{N}\rangle^2 = \langle\alpha_0|\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a}|\alpha_0\rangle - |\alpha_0|^4$$

נשים לב שאם נפעיל את שני האופרטורים הראשונים $\hat{a}^\dagger$ שמאלה ו-$\hat{a}$ ימינה נתקע עם $\hat{a}\hat{a}^\dagger$ באמצע שאנחנו לא יכולים להפעיל לכיוון הרצוי. לכן, נעשה את שתי ההפעלות הראשונות האלה ואז נשתמש ביחס החילוף כדי לסדר אותם בצורה שאנחנו יודעים להפעיל:

$$\sigma_N^2 = |\alpha_0|^2\langle\alpha_0|\hat{a}\hat{a}^\dagger|\alpha_0\rangle - |\alpha_0|^4 = |\alpha_0|^2\langle\alpha_0|\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1|\alpha_0\rangle - |\alpha_0|^4 = |\alpha_0|^2(|\alpha_0|^2 + 1) - |\alpha_0|^4 = |\alpha_0|^2$$

כלומר קיבלנו $\sigma_N = \sqrt{\langle\hat{N}\rangle}$. התפלגות שאנחנו מכירים שמתנהגת ככה היא התפלגות פואסון, ונראה שזו אכן ההתפלגות שקיבלנו בשיעור הבא.

22 שיעור 22 – 17.6.18

22.1 מתנד הרמוני חד־מימדי – המשך

22.1.1 מצבים קוהרנטיים – המשך

בשיעור הקודם חיפשנו מצבים שמתנהגים כמה שיותר כמו מצבים קלאסיים, ומצאנו את המצבים הקוהרנטיים. ראינו:

$$\langle\hat{N}\rangle = |\alpha_0|^2, \qquad \sigma_N = \sqrt{\langle\hat{N}\rangle}$$

$$|\alpha_0\rangle = e^{\frac{-|\alpha_0|^2}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha_0^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle$$

חישבנו את המומנטים הראשונים של ההתפלגות לפי רמת המספר, נחשב את הסיכוי להיות בכל רמה:

$$\Pr(n) = |\langle n|\alpha_0|\rangle|^2 = e^{-|\alpha_0|^2}\frac{|\alpha_0|^{2n}}{n!} = e^{-\langle\hat{N}\rangle}\frac{\langle\hat{N}\rangle^2}{n!}$$

נשים לב שזו **התפלגות פואסון**. כש-$1 \gg \langle\hat{N}\rangle$ זה נראה כמו התפלגות תרמית (אקספוננט דועך), כש-$1 \ll \langle\hat{N}\rangle$ זה נראה כמו גאוסיין ובאמצע היא מתוארת ע"י המשוואה הזאת.

נעיר שכשמדליקים לייזר, המצבים של האור שהוא מוציא הם מצבים קוהרנטיים. זה מעניין כי המוטיבציה שלנו היא לגלות דברים קוונטיים שמתנהגים בצורה שדומה לקלאסית. מה שאפשר לנו בקורס מעבדה לעשות ניסויים קלאסיים עם הלייזר הוא כי המצבים הם קוהרנטיים, זה המצב הכי דומה להתנהגות קלאסית.

עד עכשיו טיפלנו במצב של מערכת ברגע ההתחלה, ב-$t = 0$. מה יהיה המצב אחרי זמן t? ראינו בשיעור שעבר את משוואת התנועה של α. אפשר לכתוב:

$$|\alpha\rangle(t) = |\alpha(t)\rangle = \left|\alpha_0 e^{-i\omega t}\right\rangle$$

אם אנחנו יודעים את α ברגע מסויים נדע אותו גם בכל רגע אחר. על ההתפלגות זה לא משפיע, כי יש ערך מוחלט, ומבחינת המצב (בפריסה) עצמו זה נותן לנו פאזות למצב ה-nי שמסתובבות פי n יותר מהר מ-ω (והמחזוריות של כל הסכום הזה היא ω).

זה אומר שכשנכתוב מצב קוהרנטי זה לא ישנה באיזה זמן נכתוב אותו, אז נרשום פשוט $|\alpha\rangle$.

<u>מקום ותנע של מצב קוהרנטי</u> –

נסתכל על ערכי התצפית:

$$\langle\hat{X}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle\alpha|\hat{a}^\dagger + \hat{a}|\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha^* + \alpha) = \sqrt{2}Re(\alpha)$$

$$\langle\hat{P}\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}\langle\alpha|\hat{a}^\dagger - \hat{a}|\alpha\rangle = \frac{-i}{\sqrt{2}}(\alpha - \alpha^*) = \sqrt{2}Im(\alpha)$$

וזו באמת הייתה הדרישה שלנו מ-α כדי שיהיה דומה להתנהגות הקלאסית. קיבלנו שהמצב הקוהרנטי זה משהו שהמשקל שלו מתנדנד במקום ובתנע כמו אוסילטור קלאסי.

נחשב את סטיות התקן:

$$\langle\hat{X}^2\rangle = \frac{1}{2}\left\langle\alpha\left|\left(\hat{a}^\dagger+\hat{a}\right)^2\right|\alpha\right\rangle = \frac{1}{2}\left\langle\alpha\left|\hat{a}^{\dagger 2}+\hat{a}^2+\hat{a}^\dagger\hat{a}+\hat{a}\hat{a}^\dagger\right|\alpha\right\rangle = \frac{1}{2}\left\langle\alpha\left|\hat{a}^{\dagger 2}+\hat{a}^2+2\hat{a}^\dagger\hat{a}+1\right|\alpha\right\rangle$$
$$= \frac{1}{2}\langle\alpha|\alpha^{*2}+\alpha^2+2\alpha^*\alpha+1|\alpha\rangle = \frac{1}{2}\langle\alpha|\alpha^{*2}+\alpha^2+2\alpha^*\alpha+1|\alpha\rangle = \frac{1}{2}(\alpha^*+\alpha)^2+\frac{1}{2}$$

$$\langle\hat{P}^2\rangle = \frac{1}{2}\left\langle\alpha\left|\left(\hat{a}^\dagger-\hat{a}\right)^2\right|\alpha\right\rangle = -\frac{1}{2}(\alpha-\alpha^*)^2+\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sigma_X^2 = \langle\hat{X}^2\rangle - \langle\hat{X}\rangle^2 = \frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow \sigma_P^2 = \langle\hat{P}^2\rangle - \langle\hat{P}\rangle^2 = \frac{1}{2}$$

קיבלנו שסטיית התקן במקום ובתנע של מצב קוהרנטי לא תלויה ב-α, לא תלויה בכמה אנרגיה יש במצב. יותר מזה, מכפלת הערכים האלה מרווה את עקרון אי־הוודאות של הייזנברג, היא הערך הכי קטן שאפשר לקבל בו זמנית למקום ותנע, מה שגם מצביע לנו שפונ' הגל תהיה גאוסיין גאוסיין עם מינימום רוחב.

<u>פונקציית הגל בהצגת המקום של מצב קוהרנטי</u> –

רצינו מצב שמתנהג הכי קלאסית שאפשר. קלאסית אנחנו יודעים בכל רגע את המקום והתנע בדיוק שנראה לנו אינסופי. מה שאנחנו מקבלים הוא לא בדיוק אינסופי, אבל בלי להפר את ערכי הוודאות של הייזנברג קיבלנו מצב שממוקם גם במקסימום של המקום וגם במקסימום של התנע, ומתנהג בדיוק כמו אוסילטור הרמוני.

נרצה להראות בחישוב מפורש שזה גאוסיין. נקח את משוואת הע"ע של $\hat{a}$:
$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$$

ונפתור אותה בהצגת המקום:
$$\langle x'|\hat{a}|\alpha\rangle = \langle x'|\alpha|\alpha\rangle$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}}\langle x'|\hat{X}+i\hat{P}|\alpha\rangle = \alpha\langle x|\alpha\rangle$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x'+\frac{d}{dx'}\right)\psi_\alpha(x') = \alpha\psi_\alpha(x')$$
$$\frac{d}{dx'}\psi_\alpha(x') = \left(-x'+\sqrt{2}\alpha\right)\psi_\alpha(x')$$

$$\Rightarrow \psi_\alpha(x') = C\,e^{-\frac{x'^2}{2}+\sqrt{2}\alpha x'}$$

כמו שציפינו. מה שנשאר לנו זה לנרמל, אבל נשים לב שהגודל של האקספוננט משתנה בזמן – α זה מספר מרוכב שמשתנה בזמן. החלק המדומה שלו מוסיף פאזה מרוכבת, אבל החלק הממשי שלו משנה את הגודל של האקספוננט. לכן, נפריד ביניהם:

$$\psi_\alpha(x') = C\,e^{-\frac{x'^2}{2}+\sqrt{2}[Re(\alpha)+Im(\alpha)]x'} =$$

נעשה השלמה לריבוע:

$$= Ce^{-\frac{1}{2}\left[x'-\sqrt{2}Re(\alpha)\right]^2+\sqrt{2}Im(\alpha)x'+Re^2(\alpha)}$$

נכניס את $e^{Re^2(\alpha)}$ לתוך פקטור הנרמול. את הנרמול של מה שנותר כבר ראינו בשיעורים קודמים:
$$\psi_\alpha(x') = \pi^{-1/4}e^{-\frac{1}{2}\left[x'-\langle\hat{X}\rangle\right]+i\langle\hat{P}\rangle x'}$$

קיבלנו חבילת גלים גאוסיינית שהמרכז שלה הוא ערך התצפית של המיקום, התנע שלה הוא ערך התצפית של התנע, הרוחב שלה קבוע (אין לנו σ שתלויה בזמן), היא תמיד באותו רוחב מינימלי לא משנה כמה היא גבוהה והיא מתנדנדת.

למה היא סמי-קלאסית, למה מצב קוהרנטי הוא סמי-קלאסי? ככל שנעשה לאנרגיות יותר גבוהות, היחס בין רוחב החבילה והאמפליטודה של התנודה יילך וייקטן, באופן יחסי היא תהיה יותר ממוקמת. באופן אבסולוטי ערך התצפית של המקום לא משתנה, אבל ביחס לגובה מאוד גדול זה ייראה כמו מצב קלאסי, וגם בתנע ככה.

הערה – ראינו בשיעורים קודמים:

$$\hat{a}|0\rangle = 0, \qquad \hat{N}|0\rangle = 0$$

כלומר, המצב של $n = 0$ הוא מצב עצמי גם של אופרטור ההורדה וגם של מצב המספר. זה אומר שהוא גם מצב קוהרנטי. מצב היסוד של האוסילטור הוא גם מצב קוהרנטי והוא גם מצב עצמי, באחרים לא.

<u>אורתונורמליות ושלמות במצבים קוהרנטיים והצגה</u>:

נקח שני מצבים קוהרנטיים ונבדוק האם יש אורתונורמליות:

$$\langle\alpha|\beta\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2+|\beta|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha^{*n}}{\sqrt{n!}} \frac{\beta^m}{\sqrt{m!}} \langle n|m\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2+|\beta|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha^*\beta)^n}{n!} = e^{-\frac{\left(|\alpha|^2+|\beta|^2-2\alpha^*\beta\right)}{2}}$$
$$= e^{i\cdot Im(\alpha^*\beta)} e^{-\frac{1}{2}|\alpha-\beta|^2}$$

נשים לב שגודל המכפלה הפנימית הוא אף פעם לא אפס, כלומר מצבים קוהרנטיים שונים הם לא אורתוגונליים. עם זאת, מעניין לראות שהגודל של המכפלה הפנימית:

$$|\langle\alpha|\beta\rangle|^2 = e^{-|\alpha-\beta|^2}$$

כלומר, החפיפה ביניהם הולכת וקטנה ככל ש-α ו-β רחוקים יותר אחד מהשני. קיבלנו שהגודל של המכפלה הפנימית היא גאוסיין שדועך, וכך כש-α, β יהיו מאוד שונים אז נוכל להגיד שהם כמעט אורתוגונלים, הגודל של המכפלה הפנימית יהיה כמעט אפס, אבל זה אף פעם לא יהיה ממש אפס, ותמיד יישאר זנב קטן מהאקספוננט.

אם כך, נראה שאין טעם לדבר על שלמות, אבל בכל זאת נבדוק את זה. נעשה אינטגרל על כל אופרטורי ההטלה של α, שאם הם היו סט אורתונורמלי שלם היינו מצפים שזה ייתן את אופרטור היחידה. אנחנו כמובן יודעים כבר שזה לא סט אורתונורמלי שלם, אבל נראה מה זה כן. נעשה אינטגרל על כל ערכי ה-α האפשריים, שזה כל המספרים המרוכבים:

$$\int_{\alpha\in\mathbb{C}} d\alpha|\alpha\rangle\langle\alpha| = \int_{\alpha\in\mathbb{C}} d\alpha e^{-|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \frac{\alpha^{*m}}{\sqrt{m!}} |n\rangle\langle m| =$$

נחליף את סדר האינטגרציה והסכימה:

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|n\rangle\langle m|}{\sqrt{n!}\sqrt{m!}} \int_{\alpha\in\mathbb{C}} d\alpha e^{-|\alpha|^2} \alpha^n \alpha^{*m} =$$

את האינטגרל נעשה בקורדינטות מעגליות:

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|n\rangle\langle m|}{\sqrt{n!}\sqrt{m!}} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} rdr\ \underbrace{e^{-r^2}}_{e^{-|\alpha|^2}} \underbrace{\left(r^n e^{in\theta}\right)}_{\alpha^n} \underbrace{\left(r^m e^{-im\theta}\right)}_{\alpha^{*m}} =$$

הפרמטר θ הולך על פני מחזור של אוסילציה, ונקבל (בלי הוכחה):

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|n\rangle\langle m|}{\sqrt{n!}\sqrt{m!}} \int_0^{\infty} rdr \cdot e^{-r^2} r^{n+m} 2\pi\delta_{n,m} =$$

רגע לפני שנעשה את האינטגרל, נעשה את הסכום על m:

$$= 2\pi\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|n\rangle\langle n|}{n!}\int_0^{\infty}rdr\cdot e^{-r^2}r^{2n} = 2\pi\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|n\rangle\langle n|}{n!}\int_0^{\infty}rdr\cdot e^{-r^2}r^{2n} \overset{\rho=r^2}{=} \pi\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|n\rangle\langle n|}{n!}\int_0^{\infty}d\rho\cdot e^{-\rho}\rho^n =$$

האינטגרל הזה הוא האינטגרל שמקבלים איתו את פונקציית גמא, ולערכים שלמים פשוט מקבלים ממנו את $n!$:

$$= \pi\sum_{n=0}^{\infty}|n\rangle\langle n|$$

ה-nים הם בן סט שלם, לכן קיבלנו:

$$\int_{\alpha\in\mathbb{C}}d\alpha|\alpha\rangle\langle\alpha| = \pi\mathbb{1}$$

מה המשמעות של מה שקיבלנו, שמאוד דומה ליחס השלמות? ומאיפה הגיע הפאי? נניח שאנחנו מסתכלים על שני וקטורים אורתוגונלים ב-$\mathbb{R}^2$ שפורשים את המרחב. אפשר לכתוב אופרטור הטלה על כ"א מהווקטורים האלה, לסכם אותם ולקבל אופרטור יחידה.

אפשר גם לקחת את שני הווקטורים האלה ואת שני הווקטורים שב-45 מעלות אליהם, ולכתוב אופרטור שהוא סכום של ארבעת אופרטורי ההטלה, ונקבל פעמיים את אופרטור היחידה. הסט של ארבעת הווקטורים הוא לא סט שלם, הוא יותר משלם: אפשר לפרוס איתו כל מצב, אבל לכל מצב יש יותר מהצגה אחת.

זה בדיוק מה שקורה במצבים הקוהרנטיים – הם אמנם לא אורתוגונלים, אבל כן אפשר להציג איתם כל מצב, ולכל מצב יש יותר מהצגה אחת – במקרה הזה אינסוף הצגות, כי המרחב אינסופי.

מה המשמעות בכלל של הצגה? נזכר שהצגה של $|\psi\rangle$ כלשהו היא:

$$|\psi\rangle = \int d\alpha f(\alpha)|\alpha\rangle$$

כך ש-$f(\alpha)$ היא פונ' מרוכבת של α, והיא ההצגה. בהנתן $|\psi\rangle$ יש אינסוף הצגות לאותו ה-$|\psi\rangle$.

בפרט, למצב הקוהרנטי עצמו $|\beta\rangle$ יש אינסוף הצגות בתמונה הקוהרנטית עבור $f(\alpha) = \delta(\alpha-\beta)$. בשביל עוד הצגה אפשר למשל לכתוב אותו באמצעות האופרטור שראינו עכשיו:

$$|\beta\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{\alpha\in\mathbb{C}}d\alpha|\alpha\rangle\langle\alpha|\beta\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{\alpha\in\mathbb{C}}d\alpha e^{i\cdot Im(\alpha^*\beta)}e^{-\frac{1}{2}|\alpha-\beta|^2}|\alpha\rangle$$

כלומר, קיבלנו שגם גאוסיין במישור המרוכב שמרוכז ב-β היא גם הצגה של מצב קוהרנטי. אם נפעיל על זה עוד פעם את אופרטור היחידה נוכל לקבל עוד הצגה, וכך הלאה.

מעניין לראות גם מה ההצגה של מצב עצמי של ההמילטוניאן בבסיס העל־שלם של המצבים הקוהרנטיים:

$$|n\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{\alpha\in\mathbb{C}}d\alpha|\alpha\rangle\langle\alpha|n\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{\alpha\in\mathbb{C}}d\alpha\frac{e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}}{\pi}\frac{\alpha^{*n}}{\sqrt{n!}}|\alpha\rangle$$

קיבלנו את פונ' המשקלים של α שתיתן את n. נשים לב שהפונ' הזאת תלויה ב-n, ויש בה איבר שהולך ודועך מאפס לאינסוף בכל הכיוונים בצורה סימטרית $e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}$, ופולינום מדרגה n ברדיוס שהולך וגדל $\frac{\alpha^{*n}}{\sqrt{n!}}$. מה שמקבלת זה טבעת שהולכת ודועכת לאפס באינסוף ובאפס. על הטבעת הזאת יש גם פאזה (מ-α^{*n}), והפאזה נסגרת כשזזים סביבה n פעמים.

<u>האופרטור D</u>:

נגדיר אופרטור:

$$D(\alpha) \equiv e^{\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}}$$

נבדוק מה קורה אם מצמידים אותו הרמיטית:

$$D^\dagger(\alpha) = e^{\alpha^*\hat{a} - \alpha\hat{a}^\dagger} = D^{-1}(\alpha)$$

כלומר D הוא אופרטור אוניטרי.

בשביל להתקדם נשתמש בנוסחת בקר-האוסדורף (ר' מקור), שאומרת שאם A, B מתחלפים כ"א עם אופרטור יחס החילוף שלהם אז:

$$e^{A+B} = e^{-\frac{1}{2}[A,B]}e^A e^B$$

נפעיל את D מצב היסוד, שהוא אמנם מצב עצמי של האנרגיה אבל ראינו שהוא גם מצב קוהרנטי. ב-D יש שני אופרטורים שלא מתחלפים אחד עם השני אבל מתחלפים עם אופרטור יחס החילוף שלהם (שהוא מספר), אז אפשר להפעיל את הנוסחא, לקבלת:

$$D(\alpha)|0\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}[\hat{a}^\dagger,-\hat{a}]}e^{\alpha\hat{a}^\dagger}e^{-\alpha^*\hat{a}}|0\rangle =$$

מתקיים $[\hat{a}^\dagger, -\hat{a}] = 1$. אם נפעיל $e^{-\alpha^*\hat{a}}|0\rangle$ נקבל $|0\rangle$, כי מצב הוואקום הוא מצב עצמי עם ע"ע אפס של $\hat{a}$:

$$= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}e^{\alpha\hat{a}^\dagger}|0\rangle =$$

נפתח את האקספוננט לטור שלו:

$$= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\alpha\hat{a}^\dagger\right)^n}{n!}|0\rangle =$$

נפעיל את $\hat{a}^\dagger$ על מצב הוואקום n פעמים לקבלת המצב $|n\rangle$:

$$= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle = |\alpha\rangle$$

כלומר, הפעלה של האופרטור הזה על מצב הוואקום נתנה את המצב α.

נפעיל עכשיו את האופרטור D על מצב קוהרנטי כלשהו, ונכתוב אותו באמצעות הדרך החדשה שראינו עכשיו:

$$D(\alpha)|\beta\rangle = D(\alpha)D(\beta)|0\rangle = e^{\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}} \cdot e^{\beta\hat{a}^\dagger - \beta^*\hat{a}}|0\rangle$$

יש לנו שוב מכפלה של אופרטור שלא מתחלפים. נחשב את יחס החילוף:

$$\left[\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}, \beta\hat{a}^\dagger - \beta^*\hat{a}\right] = \alpha\beta^* - \alpha^*\beta$$

זה מספר, אז נפעיל את נוסחת בקר-האוסדורף בכיוון ההפוך:

$$D(\alpha)|\beta\rangle = e^{\frac{1}{2}(\alpha\beta^* - \alpha^*\beta)}\underbrace{e^{(\alpha+\beta)\hat{a}^\dagger + (\alpha^*+\beta^*)\hat{a}}}_{D(\alpha+\beta)}|0\rangle = e^{i\cdot Im(\alpha\beta^*)}|\alpha+\beta\rangle$$

בפרט, אם $\beta = 0$ היינו מקבלים $|\alpha\rangle$ (שזו התוצאה שראינו קודם).

אופרטור D הוא **אופרטור ההסטה** (*displacement operator*) – הוא לוקח את המצב הקוהרנטי מאיפה שהוא נמצא ומסיט אותו ב-α.

23 שיעור 23 – 19.6.18

23.1 הקירוב של WKB

השיעור של היום הוא מעין סגירת מעגל, והוא ממלא נקודה חסרה בין תורת הקוונטים הישנה לחדשה, ומראה מה המשמעות של תורת הקוונטים הישנה. הוא יהיה חשוב גם מבחינה חישובית, וייתן לנו עוד אינטואיציות פיזיקליות.

אנחנו מתחילים ממצב שבו יש חלקיק בפוטנציאל שמשתנה יחסית לאט (בהמשך נגיד לאט ביחס למה). במקרה כזה, יש איזורים שאפשר לאמר שהפוטנציאל בהם קבוע, ואז נקבל פוטנציאל קבוע למקוטעין, כמו שכבר פתרנו בעבר.

נגדיר גודל שנקרא לו $p(x)$ שיש לו משמעות פיזיקלית קלאסית ברורה – התנע של החלקיק. נגדיר אותו בתור:

$$p(x)=\sqrt{2m\big(E-V(x)\big)}$$

אם התנע הקלאסי היה קבוע על פני קטע מסויים, הפתרון הקוונטי באותו האיזור יכול להכתב בתור:

$$\psi(x)=Ae^{\pm\frac{i}{\hbar}p(x)x}$$

זה פתרון קוונטי שמשתמש בתנע הקלאסי שהוא יחסית קבוע באיזור הזה. נכתוב את משוואת שרדינגר, ואז נציב בתוכה את התנע הקלאסי:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x)+[V(x)-E]\psi(x)=0$$
$$\psi''(x)=-\frac{p^2(x)}{\hbar^2}\psi(x)$$

מאחר והפתרון ψ הוא פונ' מרוכבת, אפשר בכל מקום לכתוב אותו באמצעות הגודל שלו ובאמצעות הפאזה שלו:

$$\psi(x)=A(x)e^{i\varphi(x)}$$

כשגם A וגם φ הן פונ' ממשיות של המקום. נציב את הפתרון הזה בתוך משוואת שרדינגר:

$$A''+2iA'\varphi'+iA\varphi''-A(\varphi')^2=-\frac{p^2(x)}{\hbar^2}A$$

אפשר לחלק את המשוואה הזאת לחלק ממשי ולחלק מדומה:

$$\begin{cases}A''-A(\varphi')^2=-\frac{p^2(x)}{\hbar^2}A\Rightarrow\frac{A''}{A}=(\varphi')^2-\frac{p^2(x)}{\hbar^2} & \text{ממשי}\\ 2A'\varphi'+A\varphi''=0\qquad\Rightarrow 2A'A\varphi'+A^2\varphi''=(A^2\varphi')=0 & \text{מדומה}\end{cases}$$

נעשה אינטגרציה לחלק המדומה ונבודד את A:

$$A^2\varphi'=C\Rightarrow A=\frac{C}{\sqrt{\varphi'}}$$

כשהקבוע ייקבע בסופו של דבר מהנרמול של הפתרון.

נעשה עכשיו קירוב, שיאמר את הדבר הבא – השינוי היחסי בנגזרת השנייה באמפליטודה יקיים:

$$\frac{A''}{A}\ll(\varphi')^2,\frac{p^2(x)}{\hbar^2}$$

הקירוב הזה מאפשר לנו לאפס את אגף שמאל במשוואה של החלק הממשי:

$$(\varphi')^2=\frac{p^2(x)}{\hbar^2}$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = \pm\frac{p(x)}{\hbar}$$
$$\Rightarrow \varphi(x) = \pm\frac{1}{\hbar}\int p(x)dx + \varphi_0$$

בהנתן p הקלאסי, האינטגרל הזה (שעל הגבולות שלו נדבר בקרוב) נותן לנו את φ עד כדי קבוע, ומתוך זה אפשר לקבל את A:

$$A = \frac{C}{\sqrt{p(x)}}$$

נציב את מה שקיבלנו בפתרון הכללי (ונזכור שעשינו קירוב בדרך):

$$\psi(x) \overset{WKB}{\approx} \frac{1}{\sqrt{p(x)}}\left(C_+ e^{\frac{i}{\hbar}\int p(x)dx} + C_- e^{-\frac{i}{\hbar}\int p(x)dx}\right)$$

אנחנו רואים שבבל מקום הסיכוי של החלקיק להמצא במקום הזה (שהוא ריבוע של ψ) הולך ביחס הפוך לתנע. אם חושבים קלאסית, ככל שחלקיק חולף יותר מהר על פני מקום מסויים הוא מבלה בו פחות זמן, והפחות זמן זה בדיוק הפוך להמהירות, התנע.

ז"א שאנחנו רואים כאן את הקשר בין זרמי ההסתברות למיקום – ככל שזרם ההסתברות היה יותר גדול, הסיכוי להמצא במקום מסויים היה יותר קטן (ולהפך). גם כאן יש את זה, אבל לקחנו את משוואת שרדינגר צעד אחד לכיוון הקלאסי.

עד עכשיו פתרנו לאיזורים שבהם החלקיק נמצא אנרגטית מעל הפוטנציאל, אבל הפוטנציאל יכול להשתנות לאט גם באיזורים שבהם החלקיק נמצא מתחת לפוטנציאל. נפתור אותו הדבר רק עבור איזור שבו $E < V$. באיזור הזה נגדיר במקום $p(x)$ את $\alpha(x)$, שלא תהיה לו משמעות קלאסית, כי מבחינה קלאסית זה איזור אסור (ונקרא לאיזור הזה "אזיור המנהור"):

$$\alpha(x) = \sqrt{2m(V(x) - E)}$$

אנחנו יודעים שהפתרונות הקוונטיים באיזור הזה הם פתרונות מתבדרים ודועכים:

$$\psi(x) = Ae^{\pm\frac{1}{\hbar}\alpha(x)x}$$

נעשה שוב את מה שעשינו קודם, אבל תחת החלפה $ip(x) \leftrightarrow \alpha(x)$, ונקבל:

$$\psi(x) \overset{WKB}{\approx} \frac{1}{\sqrt{\alpha(x)}}\left(C_+ e^{\frac{1}{\hbar}\int \alpha(x)dx} + C_- e^{-e^{\frac{1}{\hbar}\int \alpha(x)dx}}\right)$$

יש לנו פתרון באיזור הקלאסי עם התנע הקלאסי, ופתרון באיזור המנהור עם α (שהוא גודל קלאסי, כי הוא כתוב באמצעות גדלים קלאסיים, אבל אין לו משמעות קלאסית).

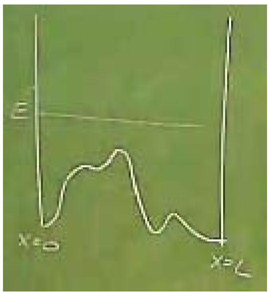
איפה הקירוב שעשינו בעייתי? הוא בעייתי אם p קטן מאוד, וזה קורה כש-x הוא בנקודה שבה $E = V$. לנקודה הזאת קלאסית אנחנו קוראים נקודת המפנה (כי חלקיק קלאסי מתקרב לנקודה הזאת, פוגע בה, מסתובב ומתחיל לחזור). בנקודת המפנה הקירוב לא נכון.

זה אומר שכל מה שעשינו, גם באיזורים הקלאסיים וגם באיזורים הקוונטים, נכון כל עוד אנחנו לא קרובים לנקודות המפנה (יש נקודה אחת אם מגיעים מכיוון אחד ונקודה נוספת אם מגיעים מהכיוון השני, קל לדמיין את זה אם חושבים על פוטנציאל בצורה של גבעה). אפשר לראות שגם φ' בעייתי במקום הזה, כי הוא הולך כמו p.

23.1.1 דוגמא: בור פוטנציאל אינסופי

איך נמנע נקודות מפנה? נקח פוטנציאל של בור אינסופי. בתוך הבור $E > V$, וכשמתקרבים לשפה של הבור אין נקודה שבה הם משתווים, אלא ישר $E < V$. כלומר, אם יש בור אינסופי בשתי נקודות הקירוב שעשינו עד עכשיו מספיק.

בתוך בור הפוטנציאל נוכל לקחת משהו קצת שונה ממה שעשינו עד עכשיו, ולתת פוטנציאל שרירותי כל עוד האנרגיה מעליו.



הפתרון לפי הקירוב:

$$\psi(x) \overset{WKB}{\approx} \frac{1}{\sqrt{p(x)}}\left[C_+ e^{i\varphi(x)} + C_- e^{-i\varphi(x)}\right]$$

בלי הגבלת הכלליות, אפשר לכתוב את זה גם כך:

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{p(x)}}\left[C_1 \sin\left(\varphi(x)\right) + C_2 \cos\left(\varphi(x)\right)\right]$$

עבור φ כמו שכבר הגדרנו, עם גבולות שמתאימים לנו:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\hbar}\int_0^x p(x')dx'$$

כשהגבול התחתון הוא נקודת ייחוס כלשהו שבחרנו.

יש לנו בבעיה תנאי שפה – הפונציאל הולך לאינסוף ב-$x = 0, L$, ולכן פונ' הגל צריכה להיות שווה לאפס זהותית ב-$x < 0$ וב-$x > L$, ושצריך לקבל רציפות של פונ' הגל. נדרוש רציפות:

$$\psi(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

תנאי שפה שני:

$$\psi(L) = 0 \Rightarrow C_1 \sin\left(\varphi(L)\right) = 0$$

בשביל פתרון לא טריוויאלי, זה ייתן לנו תנאי על φ:

$$\varphi(L) = \frac{1}{\hbar}\int_0^L p(x')dx' = \pi n$$

$$\Rightarrow \int_0^L p(x')dx' = \pi n \hbar$$

ואם נכתוב את האינטגרל הזה על המסלול הסגור (משמאל לימין וחזור):

$$\oint p(x)dx = 2\pi\hbar n = nh$$

ואת זה אנחנו מכירים מתורת הקוונטים הישנה! אנחנו רואים מקום שבו קירוב WKB מתקרב לתורת הקוונטים הישנה, ואנחנו יודעים שבמקרה הזה אין נקודות מפנה. כלומר:

$WKB +$ אין נקודות מפנה $=$ תורת הקוונטים הישנה

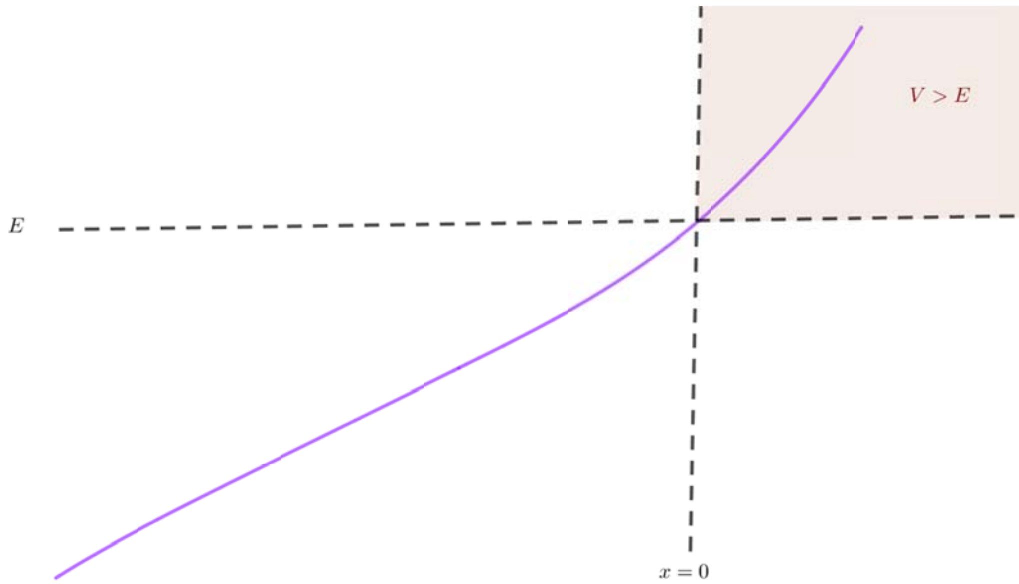
אם יש נקודות מפנה נקבל משהו חדש תחת הקירוב הזה, שנראה אותו בקרוב, אבל אנחנו כבר רואים שהוא סוגר לנו את הפינה של המעבר מתורת הקוונטים הישנה לחדשה.

נזכר שפתרנו עם תורת הקוונטים השינה בור שהוא שטוח בפנים, וכשפתרנו את זה עם תורת הקוונטים החדשה קיבלנו את אותן התוצאות. עכשיו אנחנו מבינים למה, ואפשר לראות שבמקרה הזה זה לא קירוב: אין לנו נקודות מפנה במקרה הזה מה שאומר ש-p לא מתאפס, ולפי הפתרון הקוונטי שיצא לנו A'' הוא אפס זהותית לכן, אנחנו מקבלים שהפתרונות של תורת הקוונטים הישנה נכונים שם.

23.1.2 נקודת המפנה הקלאסית

עדיין חסרה לנו דרך להתייחס לפתרון באיזור של נקודות המפנה. נסתכל בה"כ פוטנציאל שעולה ימינה ורמת אנרגיה כלשהי עם נקודת מפנה, ובה"כ נקודת המפנה תהיה ב-$x = 0$.

נעשה גם הנחה שכן מגבילה את הכלליות – נניח שמימין הפוטנציאל לא יורד מתחת ל-E (נעשה את זה רק כי מימין אנחנו רוצים רק פתרונות של מנהור, שלא הכל יהיה קלאסי):



הפתרון שלנו:

$$\psi(x) \approx \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{p(x)}}\left(C_+ e^{\frac{i}{\hbar}\int_x^0 p(x')dx'} + C_- e^{-\frac{i}{\hbar}\int_x^0 p(x')dx'}\right), & x < 0 \\ \dfrac{D}{\sqrt{\alpha(x)}} C_- e^{-\frac{1}{\hbar}\int_0^x \alpha(x')dx'}, & x > 0 \end{cases}$$

נשים לב שהפתרון $\frac{1}{\sqrt{\alpha(x)}}\tilde{D}e^{\frac{1}{\hbar}\int \alpha(x)dx}$ לא יתקיים כאן כי $V > E$ בכל נקודה מימין (כי זה אקספוננט של פונ' שעולה עד אינסוף, לכן הוא מתבדר).

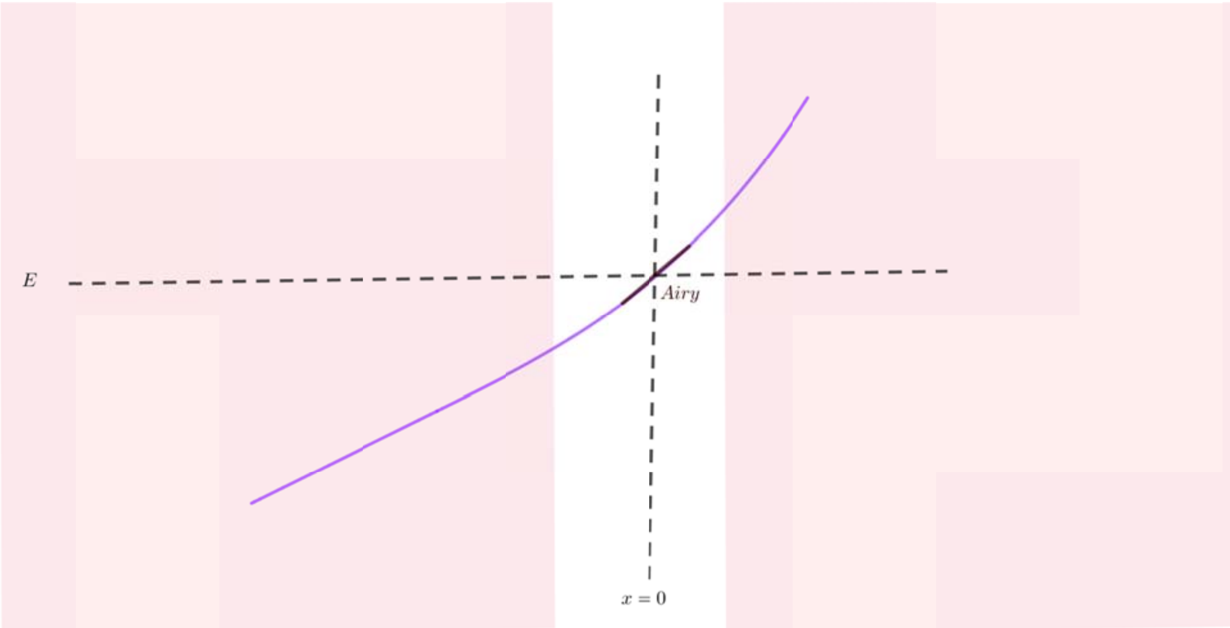
נדגיש שהפתרון שקיבלנו הוא נכון רחוק מנקודת המפנה. מה שנרצה לעשות עכשיו הוא לחפש פתרון מקורב לאיזור של נקודת המפנה. באיזור נקודת המפנה, הפוטנציאל הוא בקירוב (בסדר ראשון):

$$V(x) \approx E + V'(0)x$$

אפשר לסמן $V'(0) \equiv f$:

$$V(x) \approx E + fx$$

ועכשיו אנחנו רואים שמדובר בפתרון של נפילה חופשית, שכבר פתרנו. כלומר:



- באיזורים האדומים, רחוק מנקודת המפנה, אנחנו יודעים כבר את הפתרון.
- באיזור שממש ליד נקודת המפנה הפתרון הוא כמו של נפילה חופשית, כלומר פונ' איירי.
- נותר לנו לפתור באיזור הלבן, קרוב לנקודות המפנה מספיק בשביל שהפתרון האדום לא ייתפוס אבל לא מספיק בשביל שהקירוב הלינארי ייתפוס.

נתחיל מלראות איך נראה הפתרון באיזור הלינארי. בגבול של WKB כשאנחנו מתקרבים לאיזור הזה:

$$p_{x<0}(x) = \sqrt{2m(E-E-fx)} = \hbar\gamma^{\frac{3}{2}}\sqrt{-x}$$
$$\alpha_{x>0}(x) = \hbar\gamma^{\frac{3}{2}}\sqrt{x}$$

עבור $\gamma = \left(\frac{2mf}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}}$. עכשיו אפשר לכתוב את הפתרונות עצמם. נתחיל מלעשות את האינטגרלים:

$$\int_x^0 p(x')dx' = \frac{2}{3}\hbar(-\gamma x)^{\frac{3}{2}}$$
$$\int_0^x \alpha(x')dx' = \frac{2}{3}\hbar(\gamma x)^{\frac{3}{2}}$$

והפתרונות:

$$\psi(x) \approx \begin{cases} \frac{1}{(-x)^{1/4}}\left(C'_+e^{i\frac{2}{3}(-\gamma x)^{3/2}} + C'_-e^{-i\frac{2}{3}(-\gamma x)^{3/2}}\right), x<0 \\ \frac{D'}{x^{1/4}}e^{-\frac{2}{3}(\gamma x)^{3/2}}, \qquad x>0 \end{cases}$$

שוב, הפתרון הזה הוא הפתרון לפי WKB כשאנחנו מגיעים לאיזור המפנה מבחוץ.

נזכור שיש לנו קירובים טובים לפונקציית איירי רחוק מנקודת המפנה:

$$\mathrm{Ai}_{y<0}(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}(-y)^{1/4}}\sin\left(\frac{2}{3}(-y)^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\mathrm{Ai}_{y>0}(y) = \frac{e^{-2/3}(-y)^{3/2}}{2\sqrt{\pi}y^{1/4}}$$

נשים לב שאם $y = \gamma x$, וזה אכן המקרה, עד כדי קבוע שמתאים לנרמול D החלק של $x > 0$ והפתרון שקיבלנו עכשיו אותו הדבר. בבחירה מתאימה של Cים אפשר לגרום גם לפתרון בתחום $x < 0$ להראות כמו מה שקיבלנו עכשיו.

לכן, כל מה שנשאר לעשות זה לתפור את $C_\pm, D'$ כך שהפתרונות האלה ייתלכדו עם הקירובים באיזור הלבן, ואז נדע את הפתרון בכל מקום.

נתחיל מ-D':

$$D' = \frac{\gamma^{3/4}}{2\sqrt{\pi f}} = \left(\frac{m}{8\pi^2\hbar^2 f}\right)^{1/4}$$

נשים לב שהנרמול של הפונ' בנק' המפנה תלויה ב-$1/f$, כלומר הנגזרת של הפוטנציאל בנקודת המפנה תשפיע על הנרמול.

בשביל לקבל סינוס, צריך להתקיים:

$$C'_+ = iC'_- = \frac{\gamma^{3/4}}{2i\sqrt{\pi f}} e^{i\frac{\pi}{4}} = -iD' e^{i\frac{\pi}{4}}$$

נציב את זה בפתרונות (שעכשיו יהיו תקפים בכל התחום הלבן):

$$\psi(x) \approx \begin{cases} \dfrac{2D'}{\sqrt{p(x)}} \sin\left(\dfrac{1}{\hbar}\displaystyle\int_x^{x_2} p(x')dx' + \dfrac{\pi}{4}\right), x < x_2 \\ \dfrac{D'}{\sqrt{\alpha(x)}} e^{-\frac{1}{\hbar}\int_{x_2}^{x} \alpha(x')dx'}, \qquad x > x_2 \end{cases}$$

כש-x_2 היא נקודת המפנה. הפרמטר היחיד שנשאר הוא D', והוא ייקבע מנרמול L^2 של הפתרון בכל המרחב.

מה שפתרנו עד עכשיו אפשר לקרוא לו נקודת מפנה ימנית – החלקיק מגיע משמאל ימינה ופונה חזרה. נשאל את עצמנו עכשיו מה קורה אם הנקודה שמאלית. במקרה כזה האיזורים התחלפים, וכל x הופך ל-$-x$. נקבל:

$$\psi_{\substack{\text{נקודת}\\\text{מפנה}\\\text{שמאלית}}}(x) \approx \begin{cases} -\dfrac{2D''}{\sqrt{p(x)}} \sin\left(\dfrac{1}{\hbar}\displaystyle\int_{x_1}^{x} p(x')dx' + \dfrac{\pi}{4}\right), x > x_1 \\ \dfrac{D''}{\sqrt{\alpha(x)}} e^{\frac{1}{\hbar}\int_{x}^{x_1} \alpha(x')dx'}, \qquad x < x_1 \end{cases}$$

כש-x_1 היא נקודת המפנה השמאלית.

למה זה מעניין? נקח מקרה שבו שתי נקודות המפנה קיימות:

כך שמימין ומשמאל הפוטנציאל תמיד יותר גבוהה מהאנרגיה. אנחנו יודעים את הפתרון ביחס לכ"א מנקודות המפנה, אז נרצה לתפור את שני הפתרונות האלה.

אנחנו רואים שאלה פתרונות שעושים אוסילציות לפי $p(x)$, וצריך לדאוג שהסינוסים שמגיעים משני הפתרונות ייתלבשו אחד על השני, שהם יקבלו אפסים באותם מקומות. נדרוש שיוויון על הסינוסים:

$$\sin\left(\frac{1}{\hbar}\int_x^{x_2} p(x')dx' + \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{1}{\hbar}\int_{x_1}^{x} p(x')dx' + \frac{\pi}{4}\right)$$
$$\frac{1}{\hbar}\int_x^{x_2} p(x')dx' + \frac{\pi}{4} = -\sin\left(\frac{1}{\hbar}\int_{x_1}^{x} p(x')dx' + \frac{\pi}{4}\right) + n\pi$$

$$\Rightarrow \int_{x_1}^{x_2} p(x')dx' = \left(n - \frac{1}{2}\right)\pi\hbar$$

נכתוב את האינטגרל על המסלול הסגור ($x_1 \to x_2 \to x_1$):

$$\oint p(x')dx' = \left(n - \frac{1}{2}\right)2\pi\hbar = \left(n - \frac{1}{2}\right)\hbar$$

לקחנו בחשבון את נקודות המפנה, וקיבלנו את תורת הקוונטים הישנה עם תיקון של חצי. זה כל ההבדל – נקודות המפנה הזיזו לנו את האנרגיה כך שהפעולה זזה ב-$\hbar/2$.

עכשיו יש לנו את ההירכיה: תורת הקוונטים הישנה $\ll$ WKB שלוקח בחשבון את נקודות המפנה $\ll$ סדר ראשון של תורת הקוונטים המלאה.

23.1.3 פתירת מתנד הרמוני עם WKB

נרצה לפתור עם WKB את המתנד, שיש לנו כבר את הפתרונות המדוייקים שלו. הפוטנציאל והתנע:

$$V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2, \qquad p(x) = \sqrt{2m\left(E - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2\right)}$$

נקודות המפנה הקלאסיות:

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \equiv \pm x_0$$

האיטגנרל:

$$\int_{x_1}^{x_2} p(x)dx = 2m\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{E - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2}dx = m\omega\int_{-x_0}^{x_0}\sqrt{x_0^2 - x^2}dx' = \frac{m\omega\pi}{2}x_0^2 = \frac{2\pi E}{\omega} = (n-1)h$$
$$\Rightarrow E = \left(n - \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$$

קיבלנו בדיוק את האנרגיות האמיתיות של אוסילטור הרמוני, כולל ההזזה הנכונה.

24 שיעור 24 – 24.6.18

24.1 מערכות מחזוריות

24.1.1 משפט פלוקה-לוך

נדבר על מערכות עם מחזוריות סופית, שמה שמחזורי בהן זה הפוטנציאל. כלומר, מעניין אותנו לטפל בחלקיק שנמצא תחת פוטנציאל שחוזר על עצמו בצורה אינסופית.

כשאנחנו מדברים על מערכת מחזורית במימד אחד, הכוונה היא שלכל x:

$$V(x+d)=V(x)$$

ואז נגיד שהמערכת היא מחזורית עם מחזור d. זה למעשה גם איזשהו תנאי שפה שנותן אילוץ על משוואת שרדינגר.

נגדיר אופרטור שלוקח מ"ע של המקום ומזיז אותו ב-x_0:

$$T_{x_0}|x\rangle=|x-x_0\rangle$$

זה אופרטור הזזה ימינה, אז אנחנו יודעים שהאופרטור ההופכי שלו הוא ההזה שמאלה. הפעלה של שניהם מחזירה אותו לאותו המקום, לכן האופרטור הזה הוא אוניטרי:

$$T_{x_0}^{\dagger}=T_{x_0}^{-1}=T_{-x_0}$$

נסתכל בהצגת המקום על הפעלה שלו על ווקטור כללי, ונפעיל אותו שמאלה:

$$\left\langle x\middle|T_{x_0}\middle|\psi\right\rangle=\langle x+x_0|\psi\rangle=\psi(x+x_0)$$

כלומר זה ההצגה של ψ מוזזת שמאלה ב-x_0.

כתבנו כבר את האנרגיה הפוטנציאלית, האינרגיה הקינטית סימטרית להזזות גם היא, לכן כל ההמילטוניאן סימטרי להזזות. נסתכל על איבר המטריצה של המילטוניאן מוסט ונראה שהוא זהה לזה הלא מוסט:

$$\left\langle x'\middle|T_dHT_d^{\dagger}\middle|x\right\rangle=\langle x'+d|H|x'+d\rangle=\langle x'|H|x'\rangle$$

מאחר וזה נכון, אז מבחינת האופרטורים:

$$T_dHT_d^{\dagger}=H$$

$$\Rightarrow T_dHT_d^{\dagger}T_d=T_dH=HT_d$$

כלומר, קיבלנו שאם ההמילטוניאן סימטרי להזזות ב-d אז הוא מתחלף עם אופרטור ההסטה ב-d.

באופן דומה, כיוון שאם ההמילטוניאן סימטרי להזזה ב-d הוא סימטרי להזזה גם בכפולות שלמות של d, כלומר:

$$[H,T_{nd}]=0$$

בנוסף, אופרטורי ההזזה בשיעורים שונים מתחלפים זה עם זה (זה ברור מכך שזה לא משנה אם נסיט קודם ב-d_1 ואז ב-d_2 או להפך, נקבל אותה תוצאה), ומכאן נקבל בפרט:

$$T_{md}T_{nd}=T_{(m+n)d}=T_{nd}T_{md}$$

זה אומר שקיים בסיס משותף של מ"ע להמילטוניאן ולאופרטורי ההזזה. אנחנו מכירים כבר את הבסיס האורתונורמלי של ההמילטוניאן, והמ"ע של ההמילטוניאן הם גם מ"ע של אופרטורי ההזזה:

$$H|\varepsilon\rangle = \varepsilon|\varepsilon\rangle$$
$$T_{nd}|\varepsilon\rangle = \delta_{nd}|\varepsilon\rangle$$

נשים לב שלזוז nd פעמים שקול ללזוז n פעמים את הצעד d:

$$T_{nd} = T_d^n$$

נעזר בזה בשביל למצוא את הע"ע δ_{nd}. בגלל השיוויון בין האופרטורים שראינו עכשיו, אנחנו יודעים ש:

$$\delta_{nd} = \delta_d^n$$

מאחר וזה אופרטור אוניטרי, צריך גם להתקיים שאפשר לכתוב אותו בתור:

$$\delta_{nd} = \delta_d^n = \left(e^{ik(\varepsilon)d}\right)^n = e^{ik(\varepsilon)nd}$$

עבור $k(\varepsilon)$ פונ' כלשהי שתקבע מהפוטנציאל בבעיה. זה כפול d כי זו הדרך היחידה לקיים את היחס הזה (כי אם עכשיו למשל נחליף d ב-$2d$ נצטרך שהכל יעלה בריבוע, וזו הדרך היחידה לקבל את זה.

נעבור עכשיו למשפט. נסתכל על מצב עצמי של האנרגיה כשהוא מוסט:

$$\psi_\varepsilon(x+d) = \langle x+d|\psi_\varepsilon\rangle = \langle x|T_d|\psi_\varepsilon\rangle =$$

הפעם נפעיל את האופרטור שמאלה:

$$= e^{ikd}\langle x|\psi_\varepsilon\rangle = e^{ikd}\psi_\varepsilon(x)$$

סה"כ:

$$\psi_\varepsilon(x+d) = e^{ikd}\psi_\varepsilon(x)$$

זה **משפט בלוך** (ניסוח ראשון), והוא אומר לנו שאנחנו אמנם לא יודעים איך ייראו הפונ' העצמיות של ההמילטוניאן, אבל התנאי הזה שההמילטוניאן סימטרי להזזות אומר שאיך שהם לא ייראו, בסופו של דבר ההזזה ב-d תגרור לך הכפלה בפאזה.

ניסוח נוסף:

$$\psi_\varepsilon(x) = e^{ikx}u_\varepsilon(x)$$

כאשר u_ε היא פונ' מחזורית ב-d, כלומר $u_\varepsilon(x+d) = u_\varepsilon(x)$. הניסוח הזה אומר שניתן לכתוב את $\psi(x)$ באמצעות פונ' מחזורית כלשהי u מוכפלת בגל מישורי (בשלושה מימדים זה יהיה גל מישורי).

נראה שהמשפטים שקולים ע"י הצבת $x \to x+d$ בניסוח השני:

$$\psi_\varepsilon(x+d) = e^{ik(x+d)}u_\varepsilon(x+d) = e^{ikd}\underbrace{e^{ikx}u_\varepsilon(x)}_{\psi_\varepsilon(x)} = e^{ikd}\psi_\varepsilon(x)$$

וקיבלנו את הניסוח הראשון.

24.1.2 פיזור מפוטנציאל מחזורי חד־מימדי ומבנה פסים

נזכר מהי מטריצת פיזור – אם יש לנו איזשהו פוטנציאל ומשמאל ומימין יש לנו מצבים בעלי תנע מוגדר, המקדמים של של צד ימין תלויים במקדמים של צד שמאל בעזרת מטריצת המעבר:

$$\begin{bmatrix} B_+ \\ B_- \end{bmatrix} = T(k) \begin{bmatrix} A_+ \\ A_- \end{bmatrix} = \frac{k_1}{k_2} \begin{bmatrix} \frac{1}{t^*} & -\frac{r^*}{t^*} \\ -\frac{r}{t} & \frac{1}{t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_+ \\ A_- \end{bmatrix}$$

נגביל את עצמנו למקרים שבהם $k_1 = k_2$ (כדי לשרשר את הקטעים), ונתעניין מה קורה במקרים שבהם קטע הפיזור הזה חוזר הרבה פעמים. יעניין אותנו המקרה של "אינסוף" חזרות, כלומר:

$$T_\infty = \lim_{n\to\infty} T^n$$

נסמן ב- U היא המטריצה המלכסנת של T (מטריצה של ווקטורים עצמיים שמלכסנת את T) וב-D את המטריצה של הע"ע:

$$T = UDU^{-1}$$
$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

אם אנחנו יודעים את המטריצה המלוכסנת, נטען שאפשר לרשום:

$$T^n = \underbrace{UDU^{-1}UDU^{-1} \dots UDU^{-1}}_{n\ times} = UD^nU^{-1}$$

זו דרך קלה להעלות מטריצה בחזקה גבוהה. נקבל עבור המטריצה שלנו:

$$T_\infty = \lim_{n\to\infty} U \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{bmatrix} U^{-1}$$

נמצא את הע"ע של מטריצת המעבר:

$$|T - \lambda I| = \begin{vmatrix} \frac{1}{t^*} - \lambda & -\frac{r^*}{t^*} \\ -\frac{r}{t} & \frac{1}{t} - \lambda \end{vmatrix} = \left(\lambda - \frac{1}{t^*}\right)\left(\lambda - \frac{1}{t}\right) - \frac{|r|^2}{|t|^2} = \lambda^2 - \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t^*}\right)\lambda + \frac{1 - |r|^2}{|t|^2}$$
$$= \lambda^2 - \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t^*}\right)\lambda + 1 = 0$$

נרצה להציב את t, שהוא מספר מרוכב עם גודל בין 0 ל-1. נרשום אותו בתור גודל ממשי כפול פאזה:

$$t = \tau e^{i\varphi}$$

נציב:

$$\lambda^2 - 2\frac{\cos\varphi}{\tau}\lambda + 1 = 0$$

הפתרונות:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{\tau}\left(\cos\varphi \pm \sqrt{\cos^2\varphi - \tau^2}\right)$$

נרצה לחקור את הפתרונות. נבדיל בין שני מקרים –

1. <u>$\cos^2\varphi < \tau^2$</u>: במקרה הזה נגדיר $\cos\theta = \frac{\cos\varphi}{\tau}$ (תמיד קטן מ-1, כמו שצריך). במקרה כזה הע"ע יהיו:
$$\lambda_{1,2} = e^{\pm i\theta}$$
2. <u>$\cos^2\varphi > \tau^2$</u>: במקרה הזה נגדיר $\cosh\alpha = \frac{\cos\varphi}{\tau}$ (תמיד גדול מ-1, כמו שצריך). במקרה כזה הע"ע יהיו:
$$\lambda_{1,2} = e^{\pm\alpha}$$

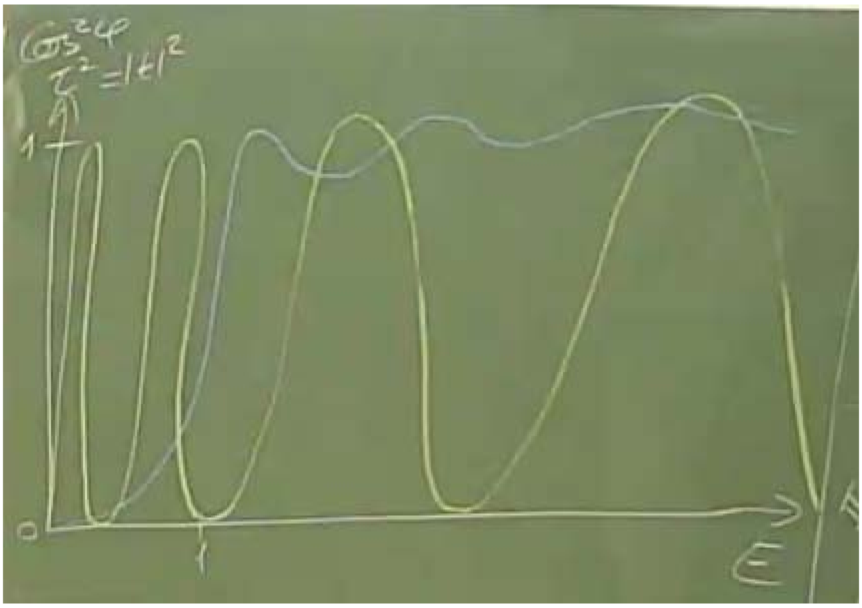
במקרה הראשון, הע"ע האלה הם מספרים שהגודל שלהם הוא 1, וכשנעלה אותם בחזקות הגודל שלהם יישאר אחד. כלומר, המטריצה D תשאר מטריצה אוניטרית, גם כשנשאיף את $n \to \infty$, ועד כדי מעברי הבסיס היא רק מכפילה בפאזה (מעברי הבסיס בין המ"ע של מטריצת המעבר, מצבים שמשמאל ומימין הם נראים אותו הדבר עד כדי פאזה). ככה נקבל מכפלות בפאזות עד אינסוף.

זה משפט בלוך – אלה הפתרונות של ההמילטוניאן שמקיימים שהחלקיק עובר מחזור אחד וצובר פאזה טהורה, וה-θ האלה הם אותם $k(d)$. מקודם פתרנו את המצבים העצמיים של האנרגיה. עכשיו אנחנו אומרים שאם מגיע זרם של חלקיקים למחסום הזה הוא ממשיך להתקדם לפי דיראק עם צבירה של פאזה θ, שאפשר לחשב אותה אם יודעים את t.

אם נעלה את הערכים האלה בחזקה אינסופית, אחד הערכים יילך לאפס והשני יילך לאינסוף. מה זה אומר – אם יש תנאי שפה A_+, A_- מצד שמאל של המחסום, ונכתוב אותו בעזרת שני המ"ע של מטריצת המעבר. המ"ע שמתאים לערך העצמי שמתבדר, הוא פיזיקלי לא יכול להיות קיים שם, פיזיקלית הוא אסור, בגלל ההתבדרות. זה אומר שהאמפליטודה הזאת לא קיימת, והאמפליטודה שמתאימה למצב השני הולכת ודועכת, עד אפס באינסוף.

כלומר, אם נקח אלקטרון בסופרפוזיציה של A_+, A_- במקרה הראשון ונעביר אותו דרך גביש מחזורי, מה שייקרה זה שהוא ייתקדם כמעט כמו גל חופשי, לא ירגיש הפרעה חוץ מצבירת פאזה. במקרה השני פונקציית הגל שלו תדעך (למרות שהוא יכול להיות מעל מחסום הפוטנציאל).

אם נניח שמנו מתח חשמלי כדי לתת לאלקטרון הזה אנרגיה והוא לא מצליח לעבור , למקרה 1 (עם θ) נקרא מוליך, ולמקרה 2 (עם α) נקרא מבודד. מה שנשאר לנו זה לשאול איפה נמצא האלקטרון, ומאחר ש-t היא פונ' של k ולכן גם פונ' של האנרגיה, אנחנו צריכים עכשיו לצייר דיאגרמה של התנאי הזה (מבודד-מוליך) כפונקציה של האנרגיה:

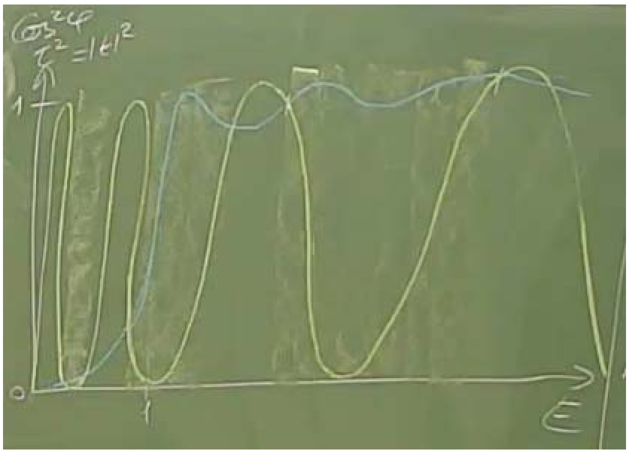


זה מחסום סופי עם גובה מנורמל ל-1.

בכחול – τ^2 של מחסום סופי. בגובה אפס לא עוברים בכלל, כשמתחילים לעבור יש מנהור וברגע שעברנו מעל המחסום יש את הרזוננס הראשון (התאבכות בונה בין ההחזרות בכניסה וביציאה מהמחסום), ואחרי זה יש אוסילציות עם ירידה פחותה. כשנמצאים גבוה מעל המחסום כבר "לא רואים אותו", וחוץ מלצבור פאזה ההעברה היא מושלמת.

בצהוב – $\cos^2\varphi$, בהתאם לפתרון שכבר ראינו עבור מחסום סופי.

כמו שרואים, $\cos^2\varphi$ מתחיל כשהוא גדול מ-τ^2, ואז יש איזור קטן שהוא קטן ממנו. אחרי זה שוב הקוסינוס יותר גדול, ושוב יש איזור שהוא יותר גדול:



האיזורים שצבענו הם האיזורים של התנאי המוליך, והאיזורים הלא צבועים הם האיזורים של התנאי המבודד.

לפי אנרגיית האלקטרון, יש מקומות שבהם הוא לא יכול לזרום (האיזורים ללא צבע) ומקומות שבהם הוא יכול לזרום (בצבע). למעשה יש פסי אנרגיה מותרים, פסים שהאלקטרון יכול לזרום בהם, ולכן המודל הזה נקרא מודל הפסים.

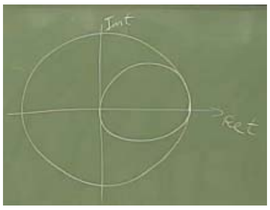
בחומר במנוחה האלקטרונים נמצאים במצב הכי נמוך. יש המון מצבים, אבל רק חלק מותרים. באיזשהו שלב האלקטרונים בחומר נגמרים, ואז נשאלת השאלה באיזה מצב עצרנו כשהם נגמרו. הרמה שהאלקטרונים מגיעים אליה נקראת **רמת פרמי**.

אם רמת פרמי היא באיזור מותר, אם נשים שדה חשמלי מאוד חלש האלקטרונים רוצים לקבל עוד אנרגיה, כלומר לזוז ימינה בגרף שלנו. זה איזור מותר, וחומר כזה הוא מתכת, מוליך.

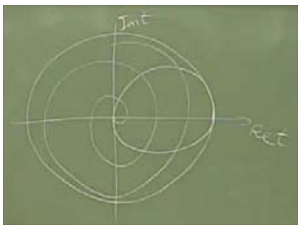
אם היו יותר אלקטרונים והרמה המותרת היא בדיוק בסוף של איזור מותר (ומסתבר שזה מקרה נפוץ), עכשיו לא משנה מה השדה החשמלי שנשים הוא ינסה להעביר אותם לאיזור אסור. לכן, לא תהיה תזוזה, וזה המקרה של מבודד. הפס המותר נקרא פס הולכה, וכשהאלקטרונים ינסו להגיע לקצה שלו זה יהיה מבודד.

24.1.3 הבנת מודל הפסים מהגודל של t

בשיעור האחרון אמרנו שבמודל הפסים אפשר להסתכל על המישור המרוכב של t והגודל של t מוגבל בתוך מעגל היחידה, ואפשר לצייר את התחום שבו $t > \cos(\varphi)$ שהוא מעגל ברדיוס חצי:



האלה האיזורים שבהם יש פתרונות מתקדמים, גלים מתקדמים (איזור שבו הדסקרימיננטה שלילית). אם מציירים את t כפונקציה של האנרגיה גם מקבלים עקומה, שנראית משהו כזה:



אז כל פעם שאנחנו עוברים בתוך העיגול אנחנו מקבלים פס מותר.

25 שיעור 25 – 26.6.18

25.1 אי־שיוויון בל

25.1.1 הקדמה

נתונים לנו שני חלקיקים שלכל אחד מהם יש שני מצבים קוונטיים, כלומר הוא חי במרחב הילברט דו־מימדי. אפשר לדבר למשל על שני פוטונים, ולהתסכל על הקיטוב שלהם. יש שני מצבי קיצוב בסיסיים, אופקי ואנכי, וכל קיטוב אחר אפשר לפרוס עליהם באמצעות מקדמים מרוכבים:

$$|pol\rangle = \alpha|h\rangle + \beta|v\rangle$$

בשביל שיהיה ברור שזה רלוונטי באופן כללי והקיטוב זה רק דוגמא, נסמן את המצבים בתור $|0\rangle, |1\rangle$, ואז:

$$|pol\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

נסתכל על המערכת של שני החלקיקים. יש אינסוף הצגות למרחב, ההצגה הפשוטה נקראית בסיס המדידה:

$$|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$$

עבור חלקיק בודד, בסיס המדידה שלו הוא $|0\rangle, |1\rangle$. מכשיר המדידה שימדוד באיזה מצב אנחנו נמצאים מהשניים יהיה מכשיר מדידה שמיוצג כמובן ע"י אופרטור אלכסוני, ובלי הגבלת הכלליות נהוג לסמן:

$$\sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

למעשה, כל אופרטור אלכסוני עם ערכים שונים באלכסון יוכל לייצג את המדידה.

נסתכל על אופרטור נוסף:

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

המ"ע שלו הם:

$$|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \pm |1\rangle)$$

נבנה האופרטור האוניטרי שמעביר אותנו בין ההצגה של הבסיס של σ_z לזה של σ_x מהו"ע עצמם, ונקבל:

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

אפשר לכתוב אופרטור שיעביר אותנו באופן כללי במרחב מ-$|0\rangle, |1\rangle$ לכל מצב, ואפשר להראות שאפשר לעשות את זה לכל היותר בעזרת שתי זוויות (לא נראה את זה כאן). נגביל את עצמינו בדיון היום למצבים שמקבילים לקיטובים לינאריים בפוטון. זו הגבלה, אבל יספיק לצורך הדיון שלנו היום.

בקיטוב לינארי יש רק זווית סיבוב אחת. נכתוב את מטריצת הסיבוב (האוניטרית):

$$T_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

ספציפית, עבור $45°$ נקבל את מה שסימנו קודם כ-T.

נסתכל על מצב מסויים של שני חלקיקים, שיהיה מצב של סופרפוזיציה של שני חלקיקים מבסיס המדידה:

$$|\psi_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$$

נטען שמצב הזה קורה משהו מעניין אם אנחנו מחליטים לסובב את הבסיס של כ"א מתתי־המרחבים באותה זווית. כלומר, נסובב את ההצגה של הראשון ושל השני באותו סיבוב, בזווית θ:

$$\begin{aligned}|\psi_-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}[(\cos\theta\,|0\rangle - \sin\theta\,|1\rangle)\otimes(\sin\theta\,|0\rangle + \cos\theta\,|1\rangle) - (\sin\theta\,|0\rangle - \cos\theta\,|1\rangle)\otimes(\cos\theta\,|0\rangle - \sin\theta\,|1\rangle)]\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos^2\theta + \sin^2\theta)|01\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin^2\theta + \cos^2\theta)|10\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)\end{aligned}$$

בהפעלה הזאת אנחנו משנים את ההצגה – הפעלנו את T_θ ככה שאנחנו משנים את ההצגה של שני הפוטונים. קיבלנו שזה מצב שלכל סיבוב של שני החלקיקים יש לו את אותה הצגה.

אמרנו שקודם מודדים באמצעות האופרטור σ_z. המדידה עכשיו צריכה להתבצע באמצעות מכשירי מדידה אחרים, מסובבים באותה זווית, למשל אם זה $45°$ אפשר למדוד עם σ_x. באותו אופן אפשר לבנות מטריצה של מכשיר מדידה בסיבוב כללי θ.

לסיכום – המצב הזה הוא מצב שלא משנה איך מסובבים את מכשיר המדידה הוא נראה אותו הדבר.

25.1.2 פרדוקס EPR

לאיינשטיין היה תפקיד מפתח בפיתוח תורת הקוונטים והוא ליווה אותה באופן הדוק, אבל הוא לא אהב את אלמנט האקראיות שבמדידה. הרעיון שאפשר לחזות רק הסתברויות וכשנגשים למדידה עצמה אפשר לקבל משהו שלא ניתן לחיזוי, שנראה אקראי, לא מצא חן בעיניו (במילים שלו "אלוהים לא משחק בקוביות"), והוא לא חשב שזה אפשרי שהטבע אינו דטרמיניסטי.

ביחד עם פודולסקי ורוזן הוא הוציא בשנת 1935 מאמר שבו הם מציגים את פרדוקס EPR (נציג אותו כאן לא כמו שהם הציגו את זה, אלא כמו שבוהר הציג את זה בהמשך).

יש לנו כמו בהקדמה שני חלקיקים עם שני מצבים אפשריים לכ"א, ונניח את המצב $|\psi_-\rangle$. נשמור את אחד החלקיקים אצלינו בירושלים, ואת השני נשלח עם מדען לירח. מראש תכננו שבשעה מסויימת המדען ימדוד את החלקיק שלו עם מכשיר σ_z. לפני המדידה, המדען יכול לקבל שתי תוצאות – 1 או 0, כי שני החלקיקים נמצאים בסופרפוזיציה. נגיד שבשעה הייעודית של הניסוי הוא מודד ומקבל 0. מה קורה למצב – יש כאן סופרפוזיציה, אז החלקיק קורס למצב $|10\rangle$.

עכשיו נתאר את הניסוי מירושלים – אנחנו יודעים שבשעה היעודית בירח מודדים את החלקיק. חצי שנייה לפני זה, החלקיק שלנו הוא בסופרפוזיציה – 0 או 1. חצי שנייה אחרי השעה היעודית, החלקיק שלנו כבר לא בסופרפוזיציה – הוא במצב 1 (כי הרי בירח היה מעבר למצב $|10\rangle$). התיאור הפיזיקלי של החלקיק שלנו השתנה, וכל זה קרה תוך שנייה. אולם, בשנייה האור עובר 300 אלף ק"מ, המרחק הממוצע לירח הוא 380 אלף ק"מ, כלומר האור צריך כשנייה ורבע כדי לעבור את המרחק הזה.

בתורת הקוונטים אין מנגנון שאומר שכשהמדען מודד את החלקיק קורה משהו כזה או אחר והמידע מגיע לירושלים – איכשהו החלקיק בירושלים יודע מה התוצאה של המדידה על הירח והוא יודע ממש מידית לאיזה מצב הוא אמור לעבור (לא אחרי חצי שנייה, אלא מיד באותו הרגע). כלומר, ממש באותו הזמן, התיאור הפיזיקלי של החלקיק השתנה. כמובן שגם אם היינו עושים את המדידה על ירושלים היה קורה אותו הדבר רק הפוך.

למקרה הזה אפשר לתת הסבר קלאסי, שיילך בצורה הבאה – נניח שעושים את אותו הניסוי רק במקום עם חלקיקים עושים אותו עם גפרורים. מישהו מדליק את אחד הגפרורים ומכבה אותו אחרי זמן קצר, כך שיש לו גפרור אחד שרוף וגפרור אחד חדש, ואת שני הגפרורים הוא שם בשתי קופסאות אטומות, אחת נותן לנו בירושלים ושנייה למדען שנוסע לירח. בשעה הייעודית המדען על הירח פתח את הקופסא שלו, וברגע שהוא רואה שאצלו יש גפרור שרוף הוא מבין שבירושלים יש גפרור לא שרוף.

זה ניסוי קלאסי לחלוטין, וכאן ברור לנו גם מה קרה – כאן אין פרדוקס של אינפורמציה, את האינפורמציה של איזה גפרור שרוף קבע כבר מי שהכין את הקופסאות. הסבר דומה אפשר לתת עבור החלקיקים – לטעון שאנחנו אמנם מציגים את המצב כסופרפוזיציה של שני מצבים, אבל החלקיק שנסע לירח כבר יודע מראש באיזה מצב הוא יהיה.

אבל גם זה לא כזה פשוט, כי אפשר לשנות את הניסוי בצורה הבאה – אומרים למדען שנוסע לירח שרגע לפני שהוא מודד יגריל אם הוא רוצה למדוד את המצב בהצגה שבה הוא מבחין בין קיטוב אופקי לקיטוב אנכי או בהצגה שבה הוא מבחין בין $\psi_\pm$. את זה הוא יעשה ממש רגע לפני המדידה, ובנוסף בירושלים נחליט רגע לפני איך אנחנו רוצים למדוד.

בעת, אנחנו בירושלים לא יודעים איך החלקיק השני הולך להמדד, או במילים אחרות – החלקיק שלנו לא יודע איך עתיד להמדד החלקיק השני. אנחנו נותנים כאן אופציה להחלטה מאוחרת של הניסוי – המדען יכול לקבוע מה הניסוי בזמן מספיק קצר כך שלא תהיה לו השפעה על החלקיק בירושלים, המידע לא יספיק להגיע לירושלים.

אם גם המדען בירח וגם אנחנו בירושלים מדדנו באותה צורה (שנינו אופקי-אנכי עם σ_z או מסובב באותה זווית עם σ_x) אז נגלה שבאמת התוצאה שמדדנו מתאימה לתוצאה השנייה. אבל מה ייקרה אם כל אחד ימדוד בצורה שונה? נניח שנמדוד עם σ_z והמדען על הירח עם σ_x. המצב הוא $|10\rangle - |01\rangle$, ואחרי המדידה נקבל:

$$|0\rangle\otimes(|0\rangle - |1\rangle) - |0\rangle\otimes(|0\rangle - |1\rangle)$$

אפשר לראות שיש כאן את כל ארבע האפשרויות בביטוי שקיבלנו ($|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$). כלומר, אם המדען על הירח מדד בבסיס המסובב, אנחנו עדיין יכולים לקבל גם אפסים וגם אחדות בניסוי הלא מסובב בירושלים. כלומר, תוצאת הניסוי נקבעת ע"פ ההחלטה שלו, שמתבצעת רגע מאוד קצר לפני הניסוי, לא מספיק כדי שאינפורמציה מהירח תגיע לכדוה"א.

איינשטיין אמר שזה לא יכול להיות – יש כאן השפעה יותר מהירה ממהירות האור, ולכן קוראים לזה פרדוקס EPR. מה שאיינשטיין אמר זה שהמצב בהתחלה הוא לא ψ_-, אלא $|\psi_-\rangle\otimes(\lambda)$, כש-$\lambda$ זה איזשהו משתנה, עוד דרגת חופש (לאו דווקא קוונטית) שיכולה להיות רב־מימדית, ודרגת החופש הזאת מוכלת בחלקיקים. לפי ההסבר הזה, כשאנחנו חושבים שאנחנו יוצרים את ψ_- אנחנו בעצם יוצרים את $|\psi_-\rangle\otimes(\lambda)$, כך שהמידע ב-$\lambda$ הוא מה תהיה תוצאת המדידה של $|\psi_-\rangle$.

לפי ההסבר הזה, כשהמדען נוסע לירח הוא לוקח איתו את דרגת החופש הזו בחלקיק, לוקח מידע על תוצאת המדידה. לכן, אין פרדוקס – כמו במקרה של הגפרורים, לפי ההסבר המידע כבר קיים עם החלקיק ומטייל איתו במהירות של החללית, וכשאנחנו מודדים זה רק נראה לנו כאילו יש קורלציות אקראיות ותוצאת המדידה בעצם כבר נמצאת במשתנים האלה.

אפשר להציע למדוד את המשתנים לפני, אבל איינשטיין אמר גם שהמשתנים האלה הם משתנים נסתרים, ושהפיזיקה שאנחנו מכירים לא מספיק מפותחת בשביל לגשת לדרגת החופש הזאת ולמדוד אותה. זה משהו שכבר קרה בעבר – לא ידענו בעבר שיש שדה חשמלי, ועדיין היו סביבנו תופעות של שדה חשמלי.

ההסבר הזה תוקף את תורת הקוונטים משני כיוונים – ראשית, הוא אומר שיש דרגות חופש שהיא לא מטפלת בהן, ולכן היא לא שלמה. שנית, הוא טוען שתורת הקוונטים היא דטרמיניסטית, ושרק נראה לנו כאילו היא הסתברותית.

25.1.3 הסבר ל"פרדוקס" – א"ש בל

זו הייתה התיאוריה של איינשטיין, אבל פיזיקה זה מדע ניסיוני – כשמציעים תיאוריה צריך ניסוי שיאושש אותה (או, במקרים מסויימים, לערוך ניסוי שמפריך את התיאוריה). איינשטיין לא הציע ניסוי לבדיקת העניין וגם לא אף אחד אחר, זאת עד שנת 1964 כשהגיע ג'ון סטיוארט בל עם א"ש בל.

דיברנו עד עכשיו על משתנים נסתרים שנמצאים עם החלקיק שהמדען לוקח איתו לירח, משתנים שמשוייכים לחלקיק והולכים יחד איתו. לכן, לתכונות הפיזיקאליות האלה שאמרנו שאנחנו מודדים נקרא תכונות פיזיקאליות מקומיות, ובהתאם המשתנים הנסתרים יהיו משתנים נסתרים מקומיים.

בל אמר שהוא לא יודע לאמר אם המשתנים המקומיים הנסתרים קיימים או לא, אבל הוא יתכנן ניסוי שאם נעשה אותו התשובה שלו תהיה או לכאן או לכאן – צד אחד יוכיח שתורת הקוונטים צודקת, וצד שני יוכיח שרעיון המשתנים הנסתרים המקומיים צדק. בל היה תיאורטיקן, אז מה שהוא תיאר זה לא מתקן, אלא אופרטור הרמיטי. נתאר את הניסוי כפי שתואר בספר של סקוראי (ר' מקור לשיעור).

נקח שני חלקיקים במצב $|\psi_-\rangle$. במצב הזה אנחנו יודעים שלפי תורת הקוונטים אם נמדוד תמיד נקבל אנטי־קורלציות בין החלקיקים (כלומר אם המצב של הראשון הוא 1 של השני 0 ולהפך). נניח שיש משתנים נסתרים מקומיים, והמשתנים האלה יודעים את תוצאת המדידה בזווית $\theta, \theta', \theta''$, כלומר בבסיסים מסובבים לפי θ. המשתנים הנסתרים צריכים להכיל את כל הקומבינציות האפשריות לכל סט של ניסויים שאנחנו והמדען בירח יכולים לבחור, והם צריכים להכיל את זה מראש – אין סופרפוזיציה. נשתמש בכתיבה הבאה: נסמן את המצב באות S, וניתן דוגמא לשני מצבים:

- $S_0 = (0,0',0'')_1(1,1',1'')_2$: מצב שאם נמדוד עם θ נקבל 0, עם θ' נקבל $0'$ ועם θ'' נקבל $0''$. זה אומר שהחלקיק השני צריך להיות באנטי־קורלציה, כלומר ימדודו $1,1',1'''$ בהתאם.
- $S_5 = (1,0',1'')_1(0,1',0'')_2$: באותה צורה בדומה ל-$S_0$, תוך שמירה על אנטי־קורלציות.

יש שמונה אפשרויות לשילובים, כלומר המצבים האפשריים הם $S_{\lambda\in[0,7]}$, כך שכל מצב ממסופר לפי ההצגה הבינארית שיוצר החלקיק הראשון (למשל 101 זה 5 בבינארית). המצב S_λ נוצר בהסתברות P_λ.

כשהמדען על הירח ואנחנו בוחרים בסיסים, אנחנו בוחרים שניים מתוך שלושה. אם למשל בחרנו למדוד ב-θ והוא ב-θ' וקיבלנו $(1,1')$ (נזכור שאם אלה בסיסים שונים אז לא חייבת להיות קורלציה), אז:

$$P(1,1') = P_4 + P_5$$

כי גם ב-4 וגם ב-5 מתקבלת התוצאה שאנחנו והוא מודדים 1, וכיוון שאף אחד לא מדד ב-θ'', שתי הקומבינציות של תוצאות אפשריות שם תורמות.

נכתוב עוד שתי הסתברויות:

$$P(1,1'') = P_4 + P_6$$
$$P(1'',1') = P_1 + P_5$$

נשלח המון חלקיקים עם המדען שטס לירח, ונחזור על הניסוי הרבה פעמים על הניסוי. ההסתברויות בניסוי הן אי־שליליות, לכן אפשר לכתוב (כי P_4+P_5 ועוד שני איברים גדול מ-P_4+P_5 לבד):

$$P(1,1') \leq P(1,1'') + P(1'',1)$$

זה התיאור הקלאסי. לפני תורת הקוונטים, אנחנו יודעים לחשב את $P(1,1')$: נמדוד את 1 בהסתברות חצי, ואז את זה צריך לכפול בהסתברות למדוד $1'$ עבור החלקיק השני בהנתן שהמצב שלו הוא 0. לפי תורת הקוונטים אנחנו יודעים לחשב את זה (בה"כ נקבע $\theta = 0$ כדי שנוכל לכתוב כל פעם פשוט θ' בשביל הסיבוב ולא $\theta' - \theta$. זה לא משנה, כי זה רק בחירה של נקודת ייחוס):

$$P(1,1') = \frac{1}{2}\cdot \Pr(1'_2|0_2) = \frac{1}{2}|\langle 0|1'\rangle|^2 = \frac{1}{2}|\langle 0|(\sin\theta'\,|0\rangle + \cos\theta'\,|1\rangle)|^2 = \frac{1}{2}\sin^2\theta'$$

בדומה:

$$P(1,1'') = \frac{1}{2}\sin^2\theta''$$

$$P(1'',1') = \frac{1}{2}|\langle 0''|1'\rangle|^2 = \frac{1}{2}\sin^2(\theta'-\theta'')$$

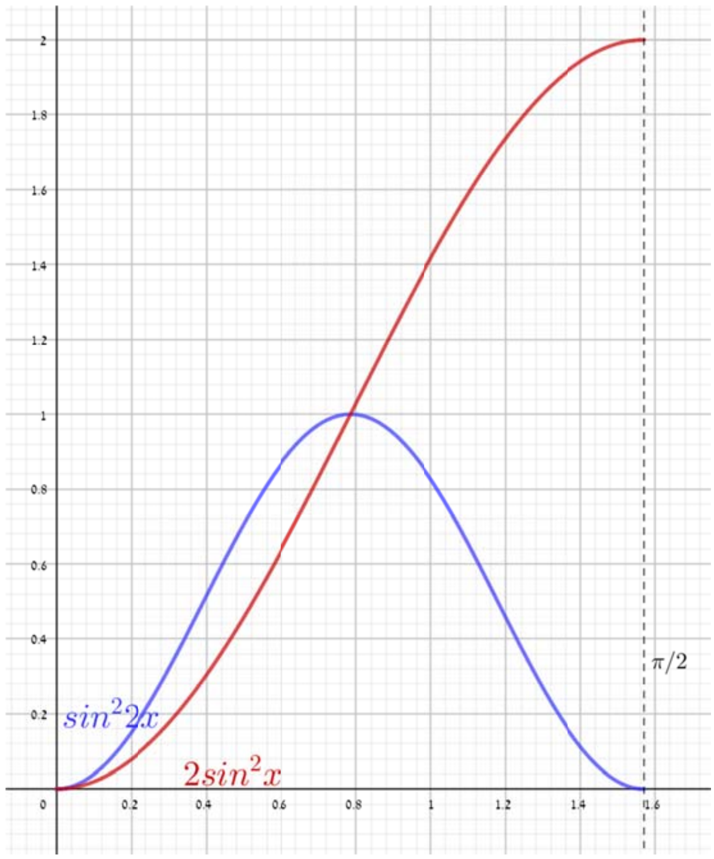
נכתוב את אה"ש של בל בצורה קוונטית:

$$P(1,1') \leq P(1,1'') + P(1'',1)$$
$$\sin^2\theta' \leq \sin^2\theta'' + \sin^2(\theta' - \theta'')$$

השאלה כעת היא האם זה מתקיים לכל θ', θ''. בשביל לעבור למשתנה יחיד, נגביל קצת את הכלליות ונסתכל על מקרים שבהם $\theta' = 2\theta''$. נקבל:

$$\sin^2 2\theta'' \leq 2\sin^2\theta''$$

עכשיו השאלה האם זה תמיד מתקיים. אפשר לצייר את זה:



ורואים מיד שזה לא תמיד מתקיים!בפרט, ב-$\pi/6$ הפער הוא מקסימלי: הכחול $3/4$ והאדום $1/4$.

מה זה אומר? בל בא והציע ניסוי – נמדוד ארבע פעמים הרבה זוגות של חלקיקים שונים שנמצאים במצב_ψ, וכל אחד מאיתנו מחליט באיזה מערכות למדוד. נבדוק כל קומבינציה, ונקבל שמונה הסתברויות שהסכום שלהן הוא 1. נציב את ההסתברויות האלה באי־השיוויון, כשנבחר לצורך העניין $\theta' = \pi/6$. לפי תורת הקוונטים, נקבל שיש איזור שבו $p(1,1')$ יותר גדול מהסכום של $p(1,1'') + p(1'',1')$.

איך זה יכול להיות? התשובה היא – אין משתנים נסתרים מקומיים! ההנחה שיש סותרת תוצאות נסיוניות.

בתחילת שנות השבעים בנו ניסוי, וראו שא"ש בל מתקיים. הם הסיקו שאיינשטיין צדק, אבל הייתה להם שגיאת מדידה גדולה, אז אחרי שנה בערך חזרו על הניסוי וקיבלו תוצאה הפוכה – א"ש בל לא מתקיים. במשך כל שנות השבעים שיפרו את הניסוי ונראה שמפרים את א"ש בל, אז נראה שאיינשטיין לא צדק, אבל – בעיקר בגלל התוצאה הראשונה ההפוכה – זה לא תמיד התקבל באמון.

בשנת שמונים ואחת פיזיקאי צרפתי בשם Aspect לקח את המערכת המקורית של הניסוי, שיפר את הניסוי וקיבל תוצאה מובהקת שסותרת את א"ש בל. עדיין לא האמינו לזה, אבל שנה אחרי זה הוא חזר על הניסוי וקיבל אותה תוצאה, ומאז

אנשים התחילו להאמין. מאז חזרו על הניסוי עם דיוקים יותר ויותר גבוהים, והיום הגיעו לרמת דיוק כל כך גבוהה שמדענים כבר לא מאמינים שאין משתנים נסתרים מקומיים.

נשים לב שהניסוי הזה פוסל משתנים נסתרים מקומיים, אבל הוא לא פוסל קיום של משתנים נסתרים לא מקומיים. למה הכוונה בלא מקומיים – תכונה פיזיקלית שכמה משתנים משתפים ביניהם, ונמצאת בשני מקומות בו זמנית. הדבר הזה נקרא משתנה לא מקומי, ואה"ש הזה לא מפריך את התיאוריה שאין משתנים נסתרים לא מקומיים. למעשה, במהלך הקורס דיברנו רבות על משתנה נסתר לא מקומי – פונקציית הגל. אין מכשיר מדידה שמודד פונקציה גל כרגע, זה משתנה נסתר לא מקומי שלא נגיש לנו.

נשים לב שזה נכון עבור הפירוש של קופנהגן לתורת הקוונטים, שזה מה שלמדנו כאן. יש למשל מה שנקרא מכניקת בוהם (Bohm), שבה התוצאות זהות למה שמקבלים בתורת הקוונטים לפי פרשנות קופנהגן, כולל בניסויים של בל, רק שיש משתנה נסתר לא מקומי אחר. בוהם אמר שהחלקיקים ממוקמים בכל רגע ונתן פרשנות פיזיקלית לפונקציית הגל – הוא אמר שיש גלים שהחלקיקים רוכבים האלה, והגלים מתנהגים לפי משוואת שרדינגר. הוא הראה שאפשר לקבל את אותן תוצאות. אחרי זה באה עוד פרשנות, ואמרה שכשיש סופרפוזיציה ומודדים היקום מתפצל לכמה יקומים מקבילים. בתיאוריה הזאת, המשתנה הלא לוקאלי הנסתר הוא היקום שבו אנחנו נמצאים – אנחנו לא יכולים למדוד את זה.

26 רשימת מקורות לקורס

26.1 מקורות

רשימת מקורות לנושאים בשיעור כפי שניתנו בשיעור לפי שיעורים. המקורות העיקריים –

- Quantum Mechanics, Cohen-Tannoudji (כ"ט)
- Quantum Mechanics, Griffiths
- Quantum Mechanics, Messiah כרך א'
- Modern Quantum Mechanics, Sakurai
- ספר ההרצאות של פיינמן

ברשימה יצוין ספר המקור + העמודים הרלוונטיים בספר.

26.2 מקורות לפי שיעור ונושא

שיעור 1

- קרינת גוף שחור – פיינמן 4-8, ויקיפדיה $Planck's\ Law$.

שיעור 2

- האפקט הפוטואלקטרי – משיח 11.
- אפקט קומפטון – משיח 13.
- מבנה האטום – משיח 21.
- אורך הגל של דה-ברולי – כ"ט 18.

שיעור 3

- עקרון ההתאמה ותורת הקוונטים הישנה – משיח 27.
- אור ומפצל קרן תלוי־קיטוב – דיראק 4 (הפעם היחידה שנשתמש במקור הזה), כ"ט 15.

שיעור 4

- מרחב המצבים ו-ווקטור המצבים – כ"ט 109.
  - הנחה 1א' – תובנות 1, 2 (סעיף 3.3.1).
  - הנחה 1ב' – כ"ט 253, תובנה 7 (סעיף 3.3.1).

שיעור 5

- אופרטורים לינאריים – כ"ט 114.
- אופרטור הרמיטי– כ"ט 120.
- הצגות של מרחב המצבים – כ"ט 121.
- הסבר מפורט על הצגת ווקטורים בסדרות – כ"ט 124.

שיעור 6

- מטריצת מעבר – כ"ט 130.
- תוצאות המדידה – כ"ט 216.

- o הנחה 3 – תובנה 5 (סעיף 3.3.1).
- o הנחה 4 – תובנה 5 (סעיף 4.1.1).
- תכונות של ו"ע של אופרטורים הרמיטיים – כ"ט 136.
  - o אופרטור בר־תצפית (*observable*) – כ"ט 137.
- אופרטורים ברי־תצפית מתחלפים – כ"ט 139.

שיעור 7

- ערך התצפית – כ"ט 227.
- סטיית תקן ועקרון אי־הוודאות – כ"ט 280, 286.
- אופרטורים מנוונים – כ"ט 132, 216, 259.
- סט שלם של אופרטורים מתחלפים ברי־תצפית – כ"ט 143.

שיעור 8

- אופרטורים אוניטריים– כ"ט 176.
- פונקציות ונגזרות של אופרטורים – כ"ט 169, 172.
- התפתחות מערכת בזמן– כ"ט 245, 310.

שיעור 9

- שימור גלובלי של הסתברות – כ"ט 237.
- דינמיקה של ערכי תצפית – כ"ט 240.
- אי־וודאות זמן-אנרגיה לפי מאלברשטם-תם– גריפית', מהדורה שנייה, 114.

שיעור 10

- תדרי בוהר – כ"ט 249.
- מרחב הילברט אינסופי רציף – כ"ט 95.
- אופרטור המקום והמצבים העצמיים שלו בהצגת המקום (פונקציית דלתא) – כ"ט 100,145 וכ"ט כרך 2 עמוד 1467.

שיעור 11

- אופרטור התנע והמצבים העצמיים שלו – כ"ט 100,145.
- אי־וודאות בין מקום ותנע של חבילת גלים – כ"ט 63.
- חבילת גלים גאוסיינית היא החבילה היחידה שמרווה את אי־הוודאות של הייזנברג – כ"ט 287.

שיעור 12

- כללי הקוונטיזציה של גדלים פיזיקליים – כ"ט 222.
- משפט אהרנספט – כ"ט 242.
- משוואת שרדינגר התלויה בזמן – כ"ט 184.
- ההתפתחות בזמן של חלקיק חופשי – כ"ט 61.
- חבילת גלים גאוסיינית כתלות בזמן– כ"ט 63.

שיעור 14

- משוואת שרדינגר שאינה תלויה בזמן – כ"ט 67.
- בור פוטנציאל אינסופי – כ"ט 77, 269, משיח 86.
- בור פוטנציאל סופי – כ"ט 74, משיח 88.

שיעור 15

- תנועה בכח קבוע (נפילה חופשית) – לנאדו-ליפשיץ 73.

שיעור 16

- זרם הסתברות – כ"ט 238.
- זרם ההסתברות של חלקיק חופשי – כ"ט 240, 280.
- פיזור ממדרגת פוטנציאל – משיח 1 עמ' 80, כ"ט 69,281.
- מכשול פוטנציאל סופי – משיח 94, כ"ט 72.

שיעור 17

- מטריצות פיזור והעברה – כ"ט 359 (הנושא מופיע בספר רק בצורה חלקית).

שיעור 18

- מרחבי מכפלה טנזורית: רקע מתמטי – כ"ט 153, 290.

שיעור 19

- חלקיק בשלושה מימדים – כ"ט 57, 150, 160, 182.
- מתנד הרמוני חד־מימדי – כ"ט 481.
  - המשוואה והאופרטורים המתאימים – כ"ט 487.

שיעור 20

- מתנד הרמוני חד־מימדי – כ"ט 481.
  - ספקטרום האנרגיה – כ"ט 491.
  - המ"ע של ההמילטוניאן בהצגת האנרגיה/מספר – כ"ט 496.
  - ערכי תצפית של מקום ותנע – כ"ט 503.

שיעור 21

- מתנד הרמוני חד־מימדי – כ"ט 481.
  - ספקטרום האנרגיה – כ"ט 500,529,542.
  - מצבים קוהרנטיים – כ"ט 559.

שיעור 22

- מתנד הרמוני חד־מימדי – כ"ט 481.
  - נוסחת בקר-האוסדורף – כ"ט 174.

שיעור 23

- הקירוב של WKB – גריפית' 274.

שיעור 24

- משפט בלוך– אשקרופט-מרמין 132.
- פיזור מפוטנציאל חד־מימדי ומבנה פסים – כ"ט 367.

שיעור 25

- א"ש בל – סקוראי 223.

27 נספחים

27.1 נספח 1 – תנאים על המקדמים לפי נרמול

רלוונטי לנושא 14.5 בסיכום – ראינו שעבור:

$$\psi(x) = A_+ e^{ikx} + A_- e^{-ikx}$$

צריך להתקיים:

$$|A_+|^2 + |A_-|^2 = \frac{1}{2\pi}$$

ההסבר לכך הוא בגלל הנרמול לפי דיראק. האינטגרל ממינוס אינסוף עד אינסוף על פונ' הגל מתבדר, אבל כן אפשר לנרמל לפי:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)\psi(x')dk = \delta(x - x')$$

ולדרוש שהמקדמים של הדלתא יהיו שווים. נראה את החישוב:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)\psi(x')dk = \int_{-\infty}^{\infty} \left(A_+^* e^{-ikx} + A_-^* e^{ikx}\right)\left(A_+ e^{ikx} + A_- e^{-ikx}\right)dk$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[|A_+|^2 e^{-ik(x-x')} + |A_-|^2 e^{ik(x-x')} + A_+^* A_- e^{-ik(x+x')} + A_-^* A_+ e^{ik(x+x')}\right]dk =$$

קיבלנו התמרות פורייה:

$$= 2\pi\left[|A_+|^2 \delta(x - x') + |A_-|^2 \delta(x - x') + A_+^* A_- \delta(x + x') + A_-^* A_+ \delta(x + x')\right]$$

נדרוש את תנאי הנרמול, כלומר נדרוש שזה יהיה שווה ל-$\delta(x - x')$. מהשוואת מקדמים עבור הדלתות נקבל:

$$\begin{cases} 2\pi\left(|A_+|^2 + |A_-|^2\right) = 1 \\ A_+^* A_- + A_-^* A_+ = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |A_+|^2 + |A_-|^2 = \dfrac{1}{2\pi} \\ A_+^* A_- = A_-^* A_+ \end{cases}$$

התנאי הראשון זה מה שחיפשנו, והשני זה תנאי נוסף שמתקבל מהנרמול.

27.2 נספח 2 – הגעה למשוואת איירי עבור מערכת בנפילה חופשית

רלוונטי לנושא 15.2 בסיכום – ראינו שבמערכת של תנועה בבח חופשי אפשר לעשות החלפת משתנים ולהביא את משוואת שרדינגר לתצורה של משוואת איירי. נראה את ההחלפה במפורש. משוואת שרדינגר:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2}+fx\psi-E\psi=0$$

נסמן $y=\left(\frac{2mf}{\hbar^2}\right)^{\frac{1}{3}}\left(x-\frac{E}{f}\right)$. מתקיים:

- $x=\left(y+\frac{E}{f}\right)\left(\frac{2mf}{\hbar^2}\right)^{-\frac{1}{3}}$
- נגזור את ψ לפי y באמצעות כלל השרשרת:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\psi\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{d\psi}{dy}\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d^2\psi}{dy^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{d\psi}{dy}\underbrace{\frac{d^2y}{dx^2}}_{0}=\frac{d^2\psi}{dy^2}\left(\frac{2mf}{\hbar^2}\right)^{\frac{2}{3}}$$

נציב את כל אלה במשוואת שרדינגר (ואת המקדם של האיבר הראשון נכפול ונחלק ב-f כדי להכניס לסוגריים):

$$-f\left(\frac{2mf}{\hbar^2}\right)^{-1}\frac{d^2\psi}{dy^2}\left(\frac{2mf}{\hbar^2}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(f\left(y+\frac{E}{f}\right)\left(\frac{2mf}{\hbar^2}\right)^{-\frac{1}{3}}-E\right)\psi=0$$

$$-f\left(\frac{2mf}{\hbar^2}\right)^{-\frac{1}{3}}\frac{d^2\psi}{dy^2}+\left(fy\left(\frac{2mf}{\hbar^2}\right)^{-\frac{1}{3}}\right)\psi=0$$

$$\frac{d^2\psi}{dy^2}-\psi y=0$$

וזה מה שרצינו להגיע אליו.