

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ

8.1. Основные понятия

Обыкновенными дифференциальными уравнениями называются уравнения, содержащие одну независимую переменную и одну или несколько производных от искомой функции $u = u(x)$. Например,

$$F(x, u(x), u'(x), u''(x), \dots, u^{(p)}(x)) = 0 \quad (8.1)$$

Здесь x - независимая переменная, $u^{(k)}(x)$ - k -тая производная функции. Порядок дифференциального уравнения определяется наивысшим порядком n , входящей в уравнение производной

Если в уравнении (8.1) старшую производную явно выразить через производные более низкого порядка и независимую переменную, то получаем уравнение, разрешенное относительно старшей производной. Например,

$$u^{(p)}(x) = f(x, u(x), u'(x), u''(x), \dots, u^{(p-1)}(x)). \quad (8.2)$$

Решением дифференциального уравнения называется произвольная функция $\varphi(x)$, которая удовлетворяет этому уравнению, т.е. после подстановки в уравнение превращает его в тождество.

Общее решение обыкновенного дифференциального уравнения n -го порядка, как известно, содержит n произвольных постоянных C_1, C_2, \dots, C_n и имеет вид

$$u = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n). \quad (8.3)$$

Частное решение получается из общего (8.3) путем задания определенных значений произвольным постоянным. Например, для уравнения первого порядка $u'(x) = f(x, u(x))$ из общего решения $u = \varphi(x, C)$ частное получается в результате задания произвольной константе C некоторого значения $C = C_0$:

$$u = \varphi(x, C_0)$$

Для выделения частного решения из общего для уравнений высшего порядка нужно задавать столько дополнительных условий, сколько произвольных постоянных в общем решении, т.е. каков порядок уравнения. В качестве дополнительных условий задаются значения искомой функции и ее производных при некоторых x . Конкретная прикладная задача может приводить к дифференциальному уравнению любого порядка, или к системе

уравнений любого порядка. Но известно, что обыкновенное дифференциальное уравнение p -го порядка

$$u^{(p)}(x) = f(x, u, u', u'', \dots, u^{(p-1)})$$

при помощи замены $u^{(k)}(x) = u_k(x)$ можно свести к эквивалентной системе p уравнений первого порядка

$$u'_k(x) = u_{k+1}(x), \quad 0 \leq k \leq p-2$$

$$u'_{p-1}(x) = f(x, u_0, u_1, \dots, u_{p-1})$$

где $u_0(x) = u(x)$. Аналогично, произвольную систему дифференциальных уравнений любого порядка можно заменить некоторой эквивалентной системой уравнений первого порядка. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать системы уравнений первого порядка

$$u'_k(x) = f_k(x, u_1, u_2, \dots, u_p), \quad 1 \leq k \leq p, \quad (8.5)$$

записывая их для краткости в векторной форме

$$\vec{u}'(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{x}, \vec{u}(\vec{x}))$$

$$\vec{u} = \{u_1, u_2, \dots, u_p\}, \quad \vec{f} = \{f_1, f_2, \dots, f_p\}$$

Известно, что система p -го порядка (8.5) имеет множество решений, которое в общем случае зависит от p параметров $\vec{C} = (C_1, C_2, \dots, C_p)$. Для определения значений этих параметров, т. е. для выделения единственного (или нужного) решения, надо наложить p дополнительных условий на функции $u_k(x)$.

В зависимости от способа задания дополнительных условий для получения частного решения дифференциального уравнения различают три типа задач: задачи Коши, краевые задачи и задачи на собственные значения.

Задача Коши. Если дополнительные условия задаются в одной точке x_0 , то задача называется *задачей Коши*, а эти условия называются начальными условиями. Точка $x = x_0$, в которой они задаются - начальной точкой.

Для системы p -го порядка задача Коши имеет дополнительные условия вида

$$u_k(x_0) = \eta_k, \quad 1 \leq k \leq p. \quad (8.6)$$

Эти условия можно рассматривать как задание координат начальной точки $(x_0, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_p)$ интегральной кривой в $(p+1)$ -мерном пространстве $(x, u_0, u_1, \dots, u_{p-1})$. Решение при этом обычно требуется найти на некотором $x_0 \leq x \leq X$ (или $X \leq x \leq x_0$) так что точку $x = x_0$ можно считать начальной точкой этого отрезка.

Если правые части (8.2) непрерывны и ограничены в некоторой окрестности начальной точки $(\xi, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_p)$, то задача Коши (8.2) – (8.6) имеет решение, но, вообще говоря, не единственное. Если правые части не только непрерывны, но и удовлетворяют условию Липшица по переменным u_k , то решение задачи Коши единственно и непрерывно зависит от координат начальной точки, т. е. задача корректно поставлена. Если вдобавок правые части имеют непрерывные производные по всем аргументам вплоть до q -го порядка, то решение $u(x)$ имеет $q+1$ непрерывную производную по x .

Краевая задача. Если дополнительные условия задаются в нескольких точках (т.е. при разных x), то такая задача называется *краевой*, а дополнительные условия – краевыми или граничными условиями. Обычно граничные условия задаются в точках $x=a$ и $x=b$, являющихся границами области решения дифференциального уравнения.

Например, требуется найти решения уравнения, $u'' + au + bu = cx^2$ на отрезке $0 \leq x \leq 1$, при краевых условиях $u(0) = 1$, $u(1) = 0$.

8.2. О методах решения дифференциальных уравнений

Для решения обыкновенных дифференциальных уравнений применяются аналитические, приближенные и численные методы.

Аналитические методы, позволяющие получать решения дифференциальных уравнений через элементарные или специальные функции в конечном виде, являются эффективным средством исследования уравнений, однако используются лишь для ограниченного класса дифференциальных уравнений. Часто в практических задачах они оказываются неприменимыми.

Приближенные методы используют различные упрощения исходных уравнений – линеаризацию, разложения в ряд по некоторому малому параметру, асимптотические методы. Однако они также имеют ограниченную область применения, хотя и являются эффективным средством исследования решения.

Наиболее мощными и универсальными методами решения обыкновенных дифференциальных уравнений являются численные методы, позволяющие получать решения тогда, когда традиционные, классические методы не помогают. Численные методы – это алгоритмы вычисления приближенных (а иногда – точных) значений искомого решения $u(x)$ на некоторой выбранной сетке значений аргумента. Решение при этом получается в виде таблицы. Численные методы не позволяют найти общего решения уравнения (8.1) или системы (8.5); они могут дать только какое-то частное решение, например, решение задачи Коши (8.5) — (8.6). Это основной недостаток численных методов. Зато эти методы применимы к очень широкому классу уравнений и всем типам задач для них. Поэтому с появлением быстродействующих ЭВМ численные методы решения стали

одним из основных способов решения конкретных практических задач для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Численные методы можно применять только к корректно поставленным (или регуляризованным) задачам. Заметим, однако, что для успешного применения численных методов формальное выполнение условий корректности может оказаться недостаточным. Надо, чтобы задача была *хорошо обусловлена*, т. е. малые изменения начальных условий приводили бы к достаточно малому изменению интегральных кривых. Если это условие не выполнено, т. е. задача *плохо обусловлена (слабо устойчива)*, то небольшие изменения начальных условий или эквивалентные этим изменениям небольшие погрешности численного метода могут сильно исказить решение.

В качестве примера плохой обусловленности рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} u'(x) &= u - x, \quad 0 \leq x \leq 100 \\ u(0) &= 1 \end{aligned}$$

Общее решение уравнения содержит одну произвольную постоянную:

$$u(x, c) = 1 + x + ce^x$$

При указанном начальном условии она равна $c=0$, так что $u(100) = 101$. Однако небольшое изменение начального условия $\bar{u}(0) = 1,000001$ слегка меняет постоянную: $c = 10^{-6}$; тогда $\bar{u}(0) = 2.7 \cdot 10^{37}$, т. е. решение изменилось очень сильно.

Среди численных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений одним из важнейших является *метод конечных разностей*.

Метод конечных разностей основывается:

- на замене непрерывной области определения дискретным множеством точек, называемых сеткой ω_h ;
- на замене непрерывных функций дискретными (сеточными), определенными на введенной сетке изменения аргумента;
- на замене производных, входящих в уравнение, конечными разностями.

В результате вместо дифференциального уравнения получается конечно-разностное уравнение, определенное в узлах разностной сетки. Решение его сводится к отысканию значений сеточной функции в этих узлах.

При использовании приближенных методов основным является вопрос о *сходимости*. Говорят, что *метод сходится в точке x^** , если построена последовательность сеток таких, что $x^* = x_0 + nh$ ($h \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$), и $|u(x^*) - y_n| \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$. Если существует такое $p > 0$, что $|u(x^*) - y_n| = O(h^p)$ при $h \rightarrow 0$, то говорят, что *метод имеет p -ый порядок точности*. Доказано, что при очень общих предположениях порядок точности разностного метода совпадает с порядком аппроксимации дифференциального уравнения (8.1) разностным.

Погрешность метода численного решения определяется нормой разности $u(x_k) - y_k$. *Локальной погрешностью* называют ошибку на данном шаге при условии, что предыдущие значения верны. *Глобальная погрешность* - это разность между вычисленным и точным решением, определяемым начальным условием.

8.3. Численное решение задачи Коши

Рассмотрим задачу Коши для ОДУ первого порядка:

требуется найти решение дифференциального уравнения

$$\frac{du(x)}{dx} = f(x, u), x \in [x_0, b] \quad (8.7)$$

удовлетворяющее начальному условию

$$u(x_0) = u_0. \quad (8.8)$$

Будем считать, что функция $f(x, u(x))$ в некоторой области удовлетворяет всем необходимым требованиям и задача поставлена корректно, т.е. решение задачи Коши для уравнения (8.7) существует и единственно.

В большинстве случаев интегрирование таких уравнений невозможно не только в элементарных функциях, но и в специальных (функции Бесселя, интегралы Френеля и др.). Рассмотрим численные методы, позволяющие вместо точного решения получить приближенное.

Введем по переменному x равномерную *сетку* ω_h с шагом $h, (h > 0)$, т.е. рассмотрим множество точек $x_k = x_0 + kh, k=1, 2, \dots, n$. Точки x_k называются узлами сетки. Введем сеточные функции $u_k = u(x_k)$, $y_k = y(x_k)$, $f_k = f(x_k, y_k)$, определенные в узлах сетки ω_h . Функции $y_k, f_k = f(x_k, y_k)$ соответствуют численному решению разностной задачи, а $u(x)$ - решению дифференциальной (8.7).

Численное решение задачи состоит в построении таблицы приближенных значений y_1, y_2, \dots, y_n решения уравнения $y(x)$ в точках x_1, x_2, \dots, x_n . С этой целью дифференциальное уравнение (8.7) заменяют некоторым разностным

$$y_{k+1} = \Phi(x_k, y_{k+1}, y_k, \dots, y_{k-p+1}),$$

которое необходимо решить на каждом шаге для нахождения y_{k+1} . Выбор функции Φ определяет метод численного решения дифференциального

уравнения: если она не зависит от y_{k+1} , то получают *явный метод* (явную формулу для вычисления y_{k+1}), и *неявный* - в противном случае.

Метод, дающий формулу для вычисления y_{k+1} по M предыдущим значениям $y_k, y_{k-1}, \dots, y_{k-M+1}$, называется *M-шаговым*. Существуют две группы численных методов решения задачи Коши: одношаговые (или методы Рунге -Кутта) и многошаговые разностные методы.

Рассмотрим вначале простейшие методы типа Рунге-Кутта, основанные на замене производной простейшей конечной разностью.

8.3.1. Простейшие методы

Метод Эйлера является самым простым методом типа Рунге-Кутта для решения задачи Коши (8.7)-(8.8). Будем считать, что вычисления проводятся с шагом $h = \frac{b-x_0}{n}$ и целью является построение таблицы:

x	x_0	x_1	\dots	$x_n=b$
y	y_0	y_1	\dots	$y_n \approx u(b)$

Предположим, что нам известно значение y_k в точке x_k , тогда, применяя к левой части уравнения (8.7) аппроксимацию производной правым разностным отношением первого порядка точности, заменим производную

$u'(x_k)$ выражением $u'(x_k) = \frac{y(x_{k+1}) - y(x_k)}{h} - \frac{y''(\xi_1)}{2}h$, а значение

$u(x_k)$ в $f(x, u) - y_k$. В результате получим разностное уравнение

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} = f(x_k, y_k) + \frac{y''(\xi_1)}{2}h.$$

Отсюда получаем

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_k, y_k) + \frac{y''(\xi_1)}{2}h^2.$$

Вычисление y_{k+1} явным образом по рекуррентной формуле

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_k, y_k) \quad (8.9)$$

называется *методом Эйлера* решения задачи Коши для ОДУ.

Формула Эйлера легко обобщается на случай нормальных систем ОДУ вида

Приведем без вывода оценку глобальной погрешности приближенного решения $z_k = y_k - u_k$:

$$|z_k| \leq M(x_k) \max_{0 \leq i \leq k} h_i = O(\max h),$$

где $M(x_k) \leq \frac{M_4}{3M_3} e^{M_3(x_k - x_0)}$,

в предположении, что $f(x, u)$ непрерывна и ограничена вместе со своими первыми производными: $|f| \leq M_1$, $|f'_x| \leq M_2$, $|f''_{xx}| \leq M_3$, (отсюда следует $|u''| \leq M_4 = M_2 + M_1 M_3$).

Пример. Решим методом Эйлера задачу Коши для уравнения

$$u'(x) = x^2 + u^2, 0 \leq x \leq 1, \quad u(0) = 0.$$

В таблице даны численные решения $y(x)$, полученные на сетках с шагами $h = 1, 0.5, 0.25$. Приведено также точное решение $u(x_k)$. Видно, что схема Эйлера для получения удовлетворительной точности требует гораздо более малого шага, чем использованный здесь.

x_k	y_k			\tilde{y}_k	u_k
	$h = 1$	$h = 0.5$	$h = 0.25$	$h = 0.25$	
0,00	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,25			0,000	0,008	0,005
0,50		0,000	0,016	0,031	0,042
0,75			0,078	0,114	0,143
1,00	0,000	0,125	0,220	0,316	0,350

Геометрическая интерпретация метода

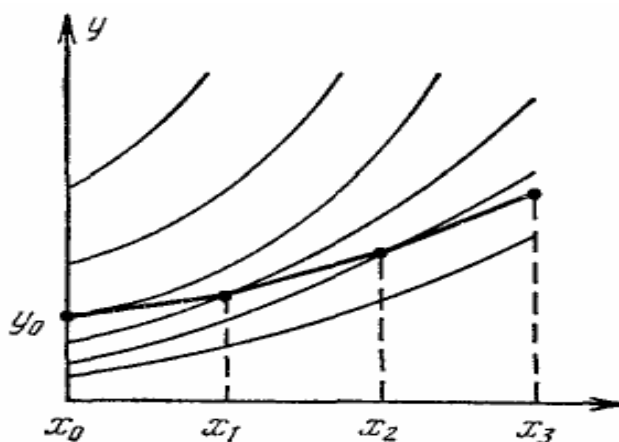


Рис. 8.1

Метод допускает простую геометрическую интерпретацию (рис.8.1).

Предположим, что известна точка (x_k, y_k) на искомой интегральной кривой. Тогда касательная к этой кривой с углом наклона равным $f(x_k, y_k)$, проходящая через точку (x_k, y_k) , определяется уравнением

$$y = y_k + f(x_k, y_k)(x - x_k),$$

Точка пересечения этой касательной с ординатой точки x_{k+1} дает приближенное значение функции y_{k+1} в точке x_{k+1} . Следовательно, метод Эйлера есть линейная экстраполяция функции в точку x_{k+1} по значениям ее и ее производной в точке x_k и формула (8.9) равносильна замене интегральной кривой ломаной линией, представляющей собой отрезки касательных к этой функции в узлах x_0, x_1, \dots . То есть метод Эйлера имеет первый порядок аппроксимации.

Неявный метод Эйлера первого порядка Этот метод является простейшим неявным одношаговым методом. Уравнение (8.7) заменяется разностным уравнением

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} = f(x_{k+1}, y_{k+1}), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (8.13)$$

которое неразрешимо относительно y_{k+1} . Для решения этого уравнения можно применить любой метод решения нелинейных уравнений, например метод простой итерации:

$$y_{k+1}^s = y_k + hf(x_k, y_{k+1}^{s-1}), \quad s = 1, 2, \dots \quad y_{k+1}^0 = y_k. \quad (8.14)$$

Обычно достаточно сделать 2-3 итерации. Этот метод абсолютно устойчив.

Метод трапеций (неявный метод второго порядка) получается в результате замены уравнения (8.7) разностным по симметричной схеме

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} = 0.5[f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1})]. \quad (8.15)$$

Для решения этого уравнения относительно y_{k+1} также можно применить метод простой итерации, используя в качестве начального приближения $y_{k+1}^0 = y_k$.

8.3.2. Методы Рунге - Кутты

В методах Рунге-Кутты используются значения производной $y' = f(x, y)$, вычисленной в нескольких точках плоскости (x, y) . Идея построения явных методов Рунге-Кутты p -го порядка заключается в получении приближений к значениям $u(x_{k+1})$ по формуле вида

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot \Phi(x_m, y_m, h), \quad (8.16)$$

где $\Phi(x_m, y_m, h)$ - некоторая функция, приближающая отрезок ряда Тейлора

$$u_{i+1} = u(x_i) + h \cdot u'(x_i) + \frac{1}{2!} h^2 u''(x_i) + \dots + \frac{1}{p!} h^p u^{(p)}(x_i) + O(h^{p+1})$$

до p -го порядка и не содержащая частных производных функции $f(x, y)$, т.е. $\Phi(x_m, y_m, h)$ — некоторое среднее производных в некоторых точках (x, y) . В зависимости от старшей степени h , с которой учитываются члены ряда, можно строить схемы разных порядков точности. Так, полагая в (8.16) $\Phi(x_m, y_m, h) = f(x, y)$, приходим к методу Эйлера, т.е. метод Эйлера можно считать простейшим примером методов Рунге-Кутты, соответствующему случаю $p=1$.

Для построения методов Рунге-Кутты порядка выше первого функцию $\Phi(x_m, y_m, h)$ берут многопараметрической

$$\begin{aligned} \Phi(x_m, y_m, h) = & a_1 f(x_m, y_m) + a_2 f(x_m + b_1 h, y_m + b_2 h k_1) + \\ & + a_3 f(x_m + c_1 h, y_m + c_2 h k_2) + \dots, \\ k_1 = & f(x_m, y_m), \quad k_2 = f(x_m + b_1 h, y_m + b_2 h k_1), \\ k_3 = & f(x_m + c_1 h, y_m + c_2 h k_2), \quad \dots \end{aligned} \quad (8.17)$$

и подбирают ее параметры такими, чтобы достичь максимального совпадения с точным тейлоровским разложением.

Для второго порядка получено однопараметрическое семейство схем вида

$$y_{k+1} = y_k + h \left[(1-\alpha) f_k + \alpha f \left(x_k + \frac{h}{2\alpha}, y_k + \frac{h}{2\alpha} f_k \right) \right] + O(h^3), \quad (8.18)$$

где $0 < \alpha \leq 1$ - свободный параметр.

Локальная погрешность схем (8.18) имеет третий порядок, глобальная – второй; т.е. решение ОДУ, полученное по этой схеме, равномерно сходится к точному решению с погрешностью $O(h^2)$.

Методов Рунге-Кутты второго порядка (как и более высоких порядков) бесконечно много. Наиболее известные из них: исправленный метод Эйлера (метод Эйлера - Коши.) ($\alpha=0.5$) и усовершенствованный (или модифицированный) метод Эйлера ($\alpha = 1$).

Усовершенствованный метод Эйлера. При $\alpha = 1$ формула (8.18) приобретает вид

$$y_{k+1} = y_k + h \left[f \left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} f_k \right) \right] + O(h^3) \quad (8.19)$$

Здесь вначале методом Эйлера определяется решение в средней точке интервала $x_{k+\frac{1}{2}} = x_k + \frac{h}{2}$ и вычисляется наклон касательной $f\left(x_{k+\frac{1}{2}}, y_{k+\frac{1}{2}}\right)$ к интегральной кривой в найденной точке. Затем находится решение с учетом этого наклона. Формула (8.19) обобщается на системы ОДУ аналогично схеме Эйлера.

Метод Эйлера - Коши. При $\alpha = 0.5$ формула (8.18) может быть записана в виде

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} \left[f_k + f\left(x_k + h, y_k + hf_k\right) \right] + O(h^3) \quad (8.20)$$

Вначале вычисляется приближённое решение в точке $x_k + h$ по формуле Эйлера, затем в найденной точке определяется наклон интегральной кривой $f(x_{k+1}, y^{\circ})$. После нахождения среднего наклона на шаге h находится уточнённое значение решения.

Реализация этого метода в виде двух этапов называется **методом прогноза и коррекции (метод "предиктор-корректор")**, что подразумевает грубое вычисление решения по формуле низкого порядка, а затем уточнение решения с учётом полученной информации о поведении интегральной кривой. Для прогноза обычно используют одну из следующих формул:

$$y_{k+1}^{(0)} = y_k + hf(x_k, y_k), \quad (8.21)$$

или

$$y_{k+1}^{(0)} = y_{k-1} + 2hf(x_k, y_k). \quad (8.22)$$

В простейшем варианте метода применяется следующий итерационный процесс коррекции:

$$y_{k+1}^{(m)} = y_k + 0.5h \left[f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1}^{(m-1)}) \right], \quad (8.23)$$

где $y_{k+1}^{(m)}$ - m -е приближение решения. Итерационный процесс (8.23) продолжают до тех пор, пока $y_{k+1}^{(m)}$ и $y_{k+1}^{(m-1)}$ не совпадут с заданной точностью. Обычно точность должна достигаться за две-три итерации, иначе надо уменьшить шаг сетки.

В формуле (8.21) используется информация только о последней вычисленной точке, поэтому методом (8.21) - (8.23) можно начинать решение задачи. "Прогноз" по формуле (8.22) более точен, но для ее использования необходимо совершить один шаг каким-либо другим методом, т.к. метод (8.22) - (8.23) является двухшаговым.

Метод Рунге-Кутты четвертого порядка точности. Наиболее часто в вычислительной практике используется следующая формула:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4);$$

$$k_1 = f(x_i, y_i), \quad k_2 = f(x_i + 0,5h, y_i + 0,5hk_1), \quad (8.24)$$

$$k_3 = f(x_i + 0,5h, y_i + 0,5hk_2), \quad k_4 = f(x_i + h, y_i + hk_3).$$

Отметим, что формулы более высокого порядка точности практически не употребляются по причине громоздкости, возрастающей значительно быстрее, чем точность формулы.

Метод Рунге-Кутты-Мерсона. Это модификация метода Рунге-Кутты четвертого порядка, позволяющая оценивать погрешность на каждом шаге и принимать решение об изменении шага:

$$y_{i+1} = y_i + (k_4 + k_5)/2,$$

$$k_1 = h_3 f(x_i, y_i), \quad h_3 = h / 3,$$

$$k_2 = h_3 f(x_i + h_3, y_i + k_1), \quad k_3 = hf(x_i + h_3, y_i + 0.5(k_1 + k_2)), \quad (8.25)$$

$$k_4 = k_1 + 4h_3 f(x_i + 0.5h, y_i + 0.375(k_1 + k_3)),$$

$$k_5 = h_3 f(x_i + h, y_i + 1.5(k_4 - k_3)).$$

Формула требует на каждом шаге вычислять правую часть в пяти точках, но за счет одного дополнительного коэффициента по сравнению с классической формулой (8.24) на каждом шаге можно определить погрешность R решения:

$$R = (2k_4 - 3k_3 - k_5)/10.$$

Если абсолютное значение погрешности R больше требуемой, то шаг h уменьшается в два раза, если же $|R| < \varepsilon/32$, то шаг можно удвоить.

Методы Рунге-Кутты имеют ряд важных достоинств:

- 1) обладают достаточно высокой степенью точности (за исключением метода Эйлера);
- 2) являются явными, т.е. значение y_{k+1} вычисляется по ранее найденным значениям;
- 3) допускают использование переменного шага, что дает возможность уменьшить его там, где функция быстро меняется, и увеличить в противном случае;

- 4) являются легко применимыми, так как для начала расчета достаточно выбрать сетку и задать значение $y_0 = f(x_0)$.

8.3.3. Погрешность схем Рунге-Кутта. Правило Рунге оценки погрешности

При решении конкретной задачи возникает вопрос, какой из формул Рунге-Кутта целесообразно пользоваться и как выбирать шаг сетки? Оценки погрешностей различных методов Рунге-Кутта связаны с максимумами модулей соответствующих производных функции $f(x, y)$ достаточно сложными формулами. Учитывая это, *априорной* оценкой точности для выбора шага при практических расчетах не пользуются, а заменяют ее, например, расчетами со сгущением сетки и дают *апостериорную* оценку точности. Шаг сетки следует выбирать настолько малым, чтобы обеспечить требуемую точность расчета, других ограничивающих шаг условий в методе Рунге-Кутта нет.

Если $f(x, y)$ непрерывна и ограничена вместе со своими четвертыми производными, то хорошие результаты дает метод четвертого порядка (8.24). Если правая часть уравнения не имеет указанных производных, то предельный порядок точности метода не может быть реализован. Тогда целесообразно пользоваться методами меньшего порядка точности, равного порядку имеющихся производных, например для дважды непрерывной дифференцируемой функции $f(x, y)$ - формулами (8.19) или (8.20).

Так же, как и при вычислении определённых интегралов, одним из наиболее простых, широко применяемых и достаточно эффективных методов оценки погрешности и уточнения полученного решения является правило Рунге. Для оценки погрешности решения дифференциального уравнения применяют *первую формулу Рунге*:

$$R_0 = \frac{y_h(x) - y_{kh}(x)}{k^p - 1}, \quad (8.26)$$

где $y_h(x)$ - приближенное решение дифференциального уравнения в точке x , полученное с шагом h , $y_{kh}(x)$ - приближенное решение того же уравнения с шагом kh ; p - порядок метода. Формула (8.26) позволяет опытным путём определить шаг h , обеспечивающий требуемую точность решения. Для уточнения решения применима *вторая формула Рунге*

$$\tilde{y}_k = y_k + R_0 \quad (8.27)$$

Отметим еще раз, что выполнить уточнение обычно проще, чем составить и использовать схему высокого порядка точности.

8.3.4. Метод Адамса

Методы Адамса относятся к числу многошаговых: для определения значения приближенного решения в следующем узле требуется знание значений в нескольких предыдущих узлах. При их построении рассматривают правую часть уравнения на интегральной кривой $y = y(x)$. Тогда $f(x, y(x)) = F(x)$ - функция одного аргумента x . Пусть известны значения приближенного решения $y_k, y_{k-1}, \dots, y_{k-m+1}$ в m узлах сетки $x_k, x_{k-1}, \dots, x_{k-m+1}$. Тогда в этих точках известны также значения $f_i = f(x_i, y_i)$ и функцию $F(x)$ можно приближенно заменить интерполяционным многочленом Ньютона:

$$F(x) = F(x_k) + F(x_k, x_{k-1})(x - x_k) + F(x_k, x_{k-1}, x_{k-2})(x - x_k)(x - x_{k-1}) + \dots + F(x_k, x_{k-1}, x_{k-2}, \dots, x_{k-m+1})(x - x_k)(x - x_{k-1}) \dots (x - x_{k-m+2})$$

Для вычисления решения в следующей точке запишем дифференциальное уравнение в интегральной форме

$$u_{k+1} = u_k + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, u(x)) dx = \int_{x_k}^{x_{k+1}} F(x) dx \quad (8.28)$$

и подставим в него интерполяционный многочлен. Получим формулу Адамса для переменного шага. Например, при использовании четырех точек получим формулу четвертого порядка точности:

$$y_{k+1} = y_k + h_k F(x_k) + \frac{1}{2} h_k^2 F(x_k, x_{k-1}) + \frac{1}{6} h_k^2 (2h_k + 3h_{k-1}) F(x_k, x_{k-1}, x_{k-2}) + \dots + \frac{1}{12} h_k^2 (3h_k^2 + 8h_k h_{k-1} + 4h_k h_{k-2} + 6h_{k-1}^2 + 6h_{k-1} h_{k-2}) \cdot F(x_k, x_{k-1}, x_{k-2}, x_{k-3}). \quad (8.29)$$

Если отбросить последнее слагаемое, получим формулу третьего порядка точности. Аналогично получаются формулы низших порядков. Формула первого порядка совпадает со схемой ломаных.

Чаще пользуются менее громоздким вариантом формулы (8.29), рассчитанным на постоянный шаг интегрирования. Вместо разделенных разностей вводят конечные разности и получают

$$y_{k+1} = y_k + h_k F_k + \frac{1}{2} h_k^2 \Delta^1 F_k + \frac{5}{12} h_k^3 \Delta^2 F_k + \frac{3}{8} h_k^4 \Delta^3 F_k. \quad (8.30)$$

Метод без изменений переносится на системы уравнений первого порядка.

Явный экстраполяционный метод Адамса

После преобразований из (8.30) получим

$$y_{k+1} = y_k + h(55f_k - 59f_{k-1} + 37f_{k-2} - 9f_{k-3}) / 24. \quad (8.31)$$

Остаточный член формулы (8.31) равен $\frac{251}{750}h^5 F^{(4)}(\xi)$, т.е. формула имеет пятый порядок локальной погрешности и четвертый - глобальной.

Неявный метод Адамса четвертого порядка записывается следующим образом:

$$y_{k+1} = y_k + h(9f_{k+1} + 19f_k - 5f_{k-1} + f_{k-2}) / 24 \quad (8.32)$$

и использует приближенные решения в трех предыдущих узлах. Для его реализации можно применить метод итераций и в качестве начального значения использовать решение, полученное с помощью явного метода Адамса (8.31).

Для начала расчета по формулам (8.31) и (8.32) надо знать значения решения y_0, y_1, y_2, y_3 в четырех точках с достаточной точностью. Обычно эти значения вычисляют методом Рунге-Кутты четвертого порядка. Кроме того, так как эти формулы рассчитаны на постоянный шаг, то при его изменении требуется вычислять значения решения в четырех предыдущих точках заново каким-либо другим методом. Все это делает методы Адамса неудобными для расчетов на ЭВМ.