§6. Численное дифференцирование и интегрирование

Численное дифференцирование.

При решении практических задач часто требуется найти производные различных порядков от функций, заданных таблично, либо от функций, заданных с помощью очень сложных аналитических выражений. Тогда прибегают к численному дифференцированию.

Чтобы получить формулы приближенного дифференцирования, данную функцию $f(x)$ заменяют на отрезке $[a, b]$ интерполирующей функцией $P(x)$ (чаще всего полиномом)

$$f(x) \approx P(x),\ x \in [a, b],$$

а затем полагают

$$f'(x) \approx P'(x),\ f''(x) \approx P''(x),\ \ldots,\ f^{(n)}(x) \approx P^{(n)}(x),\ x \in [a, b].$$

Если известна погрешность $R(x)$ интерполирующей функции $P(x)$

$$R(x) = f(x) - P(x),$$

то можно найти погрешность $r_n(x)$ численного дифференцирования:

$$r_n(x) = f^{(n)}(x) - P^{(n)}(x) = R^{(n)}(x).$$

В результате численного дифференцирования мы получаем таблицу значений производной n-го порядка функции $f(x)$ в узловых точках, т.е. таблично заданную функцию $f^{(n)}(x)$.

Замечание. Численное дифференцирование представляет собой операцию менее точную, чем интерполирование. Действительно, близость друг к другу ординат двух кривых $y = f(x)$ и $y = P(x)$ на отрезке $[a, b]$ еще не гарантирует близости на этом отрезке их производных $f'(x)$ и $P'(x)$, т.е. малого отличия угловых коэффициентов касательных к этим кривым при одинаковых значениях аргумента.

Простейшие формулы численного дифференцирования.

Для функции $f(x)$, $(n+1)$ раз непрерывно дифференцируемой в окрестности точки c, справедлива формула Тейлора

$$f(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + R_n(x),$$

где остаточный член

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1},\ \ \xi\in(c,x).$$

Пусть дана таблица значений функции $f(x)$ в равноотстоящих узлах x_i отрезка $[a,b]$:

$$y_i=f(x_i),\quad x_i=x_0+ih,\quad i=\overline{0,n},\quad h=\frac{b-a}{n},\quad x_0=a,\quad x_n=b.$$

Получим некоторые простейшие формулы численного дифференцирования, используя формулу Тейлора.

1. Пусть функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема.

Для каждого отрезка $[x_i,x_{i+1}]$ запишем ее разложение по формуле Тейлора первого порядка в окрестности точки x_i:

$$f(x)=f(x_i)+\frac{f'(x_i)}{1!}(x-x_i)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_i)^2.$$

При $x=x_{i+1}$ имеем

$$y_{i+1}=y_i+y_i'h+\frac{f''(\xi)}{2!}h^2,\ \ \xi\in(x_i,x_{i+1}),$$

где $y_i=f(x_i)$, $y_{i+1}=f(x_{i+1})$.

Отсюда

$$y_i'=\frac{y_{i+1}-y_i}{h}-\frac{f''(\xi)}{2}h.$$

Тогда ***приближенная формула для первой производной*** имеет вид:

$$y_i'\approx\frac{y_{i+1}-y_i}{h},\quad i=\overline{0,n-1}.$$

При этом ***погрешность*** аппроксимации производной $R\le\frac{h}{2}\max\limits_{x\in[a,b]}\left|f''(x)\right|$.

Формула имеет ***первый порядок*** точности.

Заметим, что числитель формулы представляет собой конечную разность первого порядка $\Delta y_i=y_{i+1}-y_i$, т.е.

$$y_i'\approx\frac{\Delta y_i}{h},\quad i=\overline{0,n-1}.$$

2. Если $f(x)$ трижды непрерывно дифференцируема, то выразив y_{i+1} и y_{i-1} через y_i по формуле Тейлора второго порядка и вычтя из первого равенства второе, получим еще одну ***приближенную формулу для первой производной***:

$$y_i' \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}, \quad i = \overline{1, n-1},$$

ее ***погрешность*** $R \le \frac{h^2}{6} \max\limits_{x \in [a,\,b]} \left| f'''(x) \right|$. Формула имеет ***второй порядок*** точности.

3. Если $f(x)$ четырежды непрерывно дифференцируема, то выразив y_{i+1} и y_{i-1} через y_i по формуле Тейлора третьего порядка и сложив их, получим ***приближенную формулу для второй производной***:

$$y_i'' \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}, \quad i = \overline{1, n-1},$$

ее ***погрешность*** $R \le \frac{h^2}{12} \max\limits_{x \in [a,\,b]} \left| f^{(4)}(x) \right|$. Формула имеет ***второй порядок*** точности.

Заметим, что числитель формулы представляет собой конечную разность второго порядка $\Delta^2 y_i = y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}$, т.е.

$$y_i'' \approx \frac{\Delta^2 y_i}{h^2}, \quad i = \overline{1, n-1}.$$

Аналогичные ***формулы*** используют и ***для производных более высоких порядков***

$$y_i^{(k)} \approx \frac{\Delta^k y_i}{h^k},$$

однако они не обладают хорошей точностью.

Существуют ***более точные формулы***, основанные, в частности, на первой и второй интерполяционных формулах Ньютона, формулах Гаусса и др. Например, для первой и второй производной можно пользоваться следующими формулами, точность которых тем выше, чем большее число слагаемых в них мы используем:

$$y_i' \approx \frac{1}{h}\left(\Delta y_i - \frac{1}{2}\Delta^2 y_i + \frac{1}{3}\Delta^3 y_i - \frac{1}{4}\Delta^4 y_i + \ldots \right), \qquad y_i'' \approx \frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 y_i - \Delta^3 y_i + \frac{11}{12}\Delta^4 y_i + \ldots \right),$$

где $\Delta^k y_i$ – конечная разность порядка k.

Численное интегрирование.

Задача приближенного или численного интегрирования возникает в следующих случаях:

1) если первообразная интегрируемой функции $f(x)$ не может быть найдена с помощью элементарных средств или является слишком сложной;

2) если подынтегральная функция $f(x)$ задана таблично.

Задача численного интегрирования состоит в вычислении значения определенного интеграла на основании ряда значений подынтегральной функции:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i),$$

где x_i – узлы интегрирования ($x_i \in [a,b]$), A_i – квадратурные коэффициенты.

Численное нахождение однократного интеграла называется ***механической квадратурой***, двойного интеграла – ***механической кубатурой***. Соответствующие формулы называются *квадратурными* и *кубатурными*.

Квадратурные формулы прямоугольников.

Как известно, определенный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ от неотрицательной функции $f(x)$ равен площади криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции $y = f(x)$, снизу – осью OX, слева и справа – отрезками вертикальных прямых $x = a$, $x = b$.

Разобьем отрезок $[a,b]$ на n равных частей точками x_i:

$$x_0 = a, \quad x_i = x_0 + ih, \quad i = \overline{1,n}, \quad h = \frac{b-a}{n} \quad (x_n = b).$$

На каждом из частичных отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = \overline{1,n})$ определенный интеграл $\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx$ заменим площадью прямоугольника, ширина которого равна h, а длина – $f(c_i)$, где c_i – некоторая точка отрезка $[x_{i-1}, x_i]$:

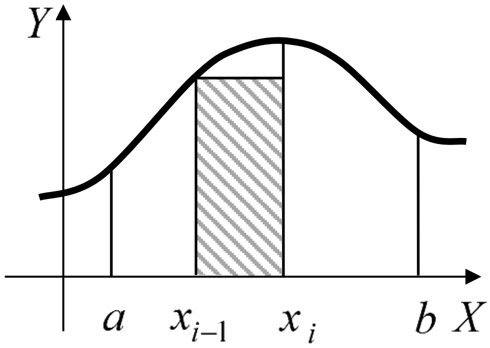
$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \approx S_i = h \cdot f(c_i) = \frac{b-a}{n} \cdot f(c_i), \quad i = \overline{1,n}.$$

Тогда определенный интеграл от функции $f(x)$ по всему отрезку $[a,b]$ будет равен сумме

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,.$$

Заметим, что эта формула справедлива и для функций, принимающих не только неотрицательные значения в точках отрезка $[a, b]$.

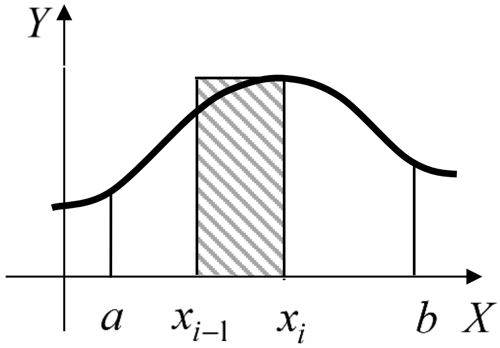
1) Выберем в качестве точки c_i левый конец отрезка $[x_{i-1}, x_i]$, т.е. $c_i = x_{i-1}$, получим так называемую ***формулу левых прямоугольников*** (где $y_i = f(x_i)$):



$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}) = \frac{b-a}{n} \cdot \left(y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1}\right).$$

Погрешность (остаточный член) формулы левых прямоугольников: $R_n = \dfrac{(b-a)^2}{2n} f'(\xi)$, где $a \le \xi \le b$.

2) Возьмем в качестве точки c_i правый конец отрезка $[x_{i-1}, x_i]$, т.е. $c_i = x_i$, получим ***формулу правых прямоугольников***:

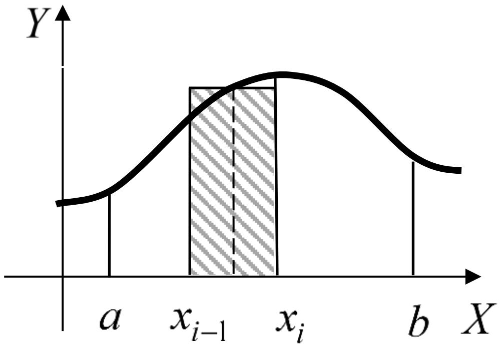


$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} f(x_i) = \frac{b-a}{n} \cdot \left(y_1 + y_2 + \ldots + y_n\right).$$

Погрешность формулы правых прямоугольников: $R_n = -\dfrac{(b-a)^2}{2n} f'(\xi)$, где $a \le \xi \le b$.

3) Выберем в качестве точки c_i середину отрезка $[x_{i-1}, x_i]$, т.е. $c_i = \left(x_{i-1} + x_i\right)/2 = x_{i-1} + h/2 = x_{i-\frac{1}{2}}$.

Тогда получим ***формулу средних*** (или ***центральных***) ***прямоугольников***:

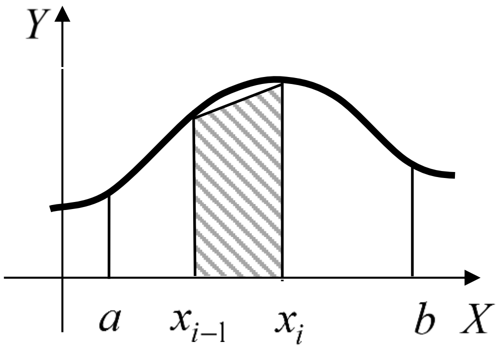


$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}+\frac{b-a}{2n}) = \frac{b-a}{n}\cdot\left(y_{\frac{1}{2}}+y_{\frac{3}{2}}+\ldots+y_{\frac{2n-1}{2}}\right).$$

Погрешность формулы средних прямоугольников: $R_n = \frac{(b-a)^3}{24n^2} f''(\xi)$, где $a \le \xi \le b$.

Квадратурная формула трапеций.

Разобьем отрезок $[a,b]$ на n равных частей точками x_i. На каждом из частичных отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ $(i=\overline{1,n})$ определенный интеграл $\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx$ заменим площадью прямоугольной трапеции с вершинами в точках $(x_{i-1},0)$, $(x_i,0)$, (x_{i-1},y_{i-1}), (x_i,y_i), где $y_i = f(x_i)$:



$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \approx S_i = h\cdot\frac{y_{i-1}+y_i}{2}.$$

Отсюда следует ***формула трапеций*** *(общая формула трапеций)*:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\cdot\left(\frac{y_0}{2}+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1}+\frac{y_n}{2}\right).$$

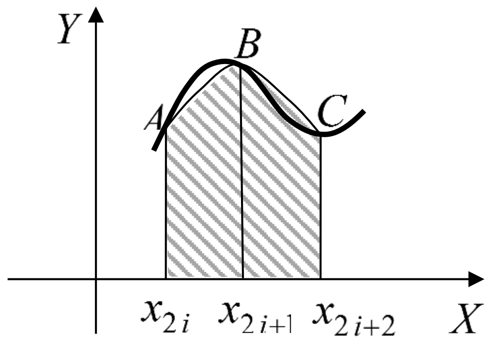
Погрешность формулы трапеций: $R_n = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\xi)$, где $a \le \xi \le b$.

Заметим, что формула средних прямоугольников и формула трапеций дают примерно одинаковую точность вычислений. Формулы правых и левых прямоугольников значительно менее точны, но более просты.

Квадратурная формула Симпсона.

Разделим отрезок $[a,b]$ на $2n$ равных частей точками x_k. Пусть $h = \frac{b-a}{2n}$, $x_0 = a$, $x_k = x_0 + kh$, $k = \overline{1,2n}$, $(x_{2n} = b)$.

На каждом из частичных отрезков $[x_{2i}, x_{2i+2}]$ ($i=\overline{0, n-1}$) определенный интеграл $\int\limits_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x)\,dx$ заменим площадью криволинейной трапеции, ограниченной сверху параболой, проходящей через точки $A(x_{2i}, f(x_{2i}))$, $B(x_{2i+1}, f(x_{2i+1}))$ и $C(x_{2i+2}, f(x_{2i+2}))$.



Составив уравнение такой параболы, и вычислив соответствующий интеграл, получим:

$$\int\limits_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\cdot\left(y_{2i}+4y_{2i+1}+y_{2i+2}\right).$$

Отсюда следует ***общая формула Симпсона*** (или ***формула парабол***):

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1}\int\limits_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x)\,dx \approx$$

$$\approx \frac{h}{3}\cdot\left(y_0+y_{2n}+4(y_1+y_3+\ldots+y_{2n-1})+2(y_2+y_4\ldots+y_{2n-2})\right),$$

где $h=\dfrac{b-a}{2n}$, $x_k = x_0 + kh$, $y_k = f(x_k)$, $k=\overline{0, 2n}$.

Погрешность формулы Симпсона: $R_n = \dfrac{(b-a)^5}{180n^4} f^{(4)}(\xi)$, где $a \le \xi \le b$.

Квадратурные формулы прямоугольников, трапеций и парабол являются частными случаями ***квадратурных формул Ньютона-Котеса*** (при $n=0$, $n=1$ и $n=2$), которые получаются при замене функции $f(x)$ ее интерполяционным многочленом Лагранжа степени n и строятся для равноотстоящих узлов.

Квадратурные формулы Гаусса.

Квадратурная формула Гаусса для вычисления определенного интеграла от функции $f(t)$ на отрезке $[-1, 1]$ имеет вид

$$\int\limits_{-1}^{1} f(t)\,dt = \sum_{i=1}^{n} A_i f(t_i),$$

где A_i – квадратурные коэффициенты, t_i – корни полинома Лежандра n-й степени $\chi_n(t) = \dfrac{1}{2^n n!}\cdot\dfrac{d^n}{dx^n}\left((x^2-1)^n\right)$.

По свойствам, полином Лежандра $\chi_n(t)$ имеет ровно n различных действительных корней, все они расположены в интервале $(-1,1)$. Их значения можно взять, например, из таблиц. Квадратурные коэффициенты A_i, для которых также составлены таблицы значений, являются решением системы линейных уравнений

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} A_i = 2, \\ \sum_{i=1}^{n} A_i\, t_i = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sum_{i=1}^{n} A_i\, t_i^{n-1} = \begin{cases} 2/n, & n - \text{нечетное}, \\ 0, & n - \text{четное}. \end{cases} \end{cases}$$

Для вычисления интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ с помощью квадратурной формулы Гаусса нужно произвести замену переменной $x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} \cdot t$. Тогда

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^{n} A_i\, f\left(\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} \cdot t_i\right).$$

Погрешность (остаточный член) формулы Гаусса с n узлами:

$$R_n = \frac{(b-a)^{2n+1} \cdot (n!)^4}{\left((2n)!\right)^3 \cdot (2n+1)} \cdot f^{(2n)}(\xi), \qquad \text{где } a \le \xi \le b.$$

Уточнение значения интеграла по Ричардсону.

Пусть с помощью одной и той же квадратурной формулы найдены два приближенных значения I_{n_1} и I_{n_2} интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ при $n_2 > n_1$. Более точное его значение, согласно Ричардсону, можно получить по формуле

$$I_{n_1,n_2} = I_{n_2} + \frac{n_1^k}{n_2^k - n_1^k}\left(I_{n_2} - I_{n_1}\right),$$

где k – порядок остаточного члена квадратурной формулы. Для формул правых и левых прямоугольников $k = 1$, для средних прямоугольников и трапеций $k = 2$

, для формулы Симпсона (парабол) $k = 4$, для формулы Гаусса с n узлами $k = 2n$.

Основные операторы и функции пакета Mathematica для дифференцирования и интегрирования.

D$[f, x]$ – находит производную (также и частную) функции f по указанной переменной x.

D$[f, \{x, n\}]$ – находит (частную) производную n-го порядка функции f по переменной x.

D$[f, x, y\}]$ – находит смешанную производную $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$. Может применяться для большего числа переменных.

D$[f, \{x, n_1\}, \{y, n_2\}]$ – находит частную производную $\dfrac{\partial^n f}{\partial x^{n_1} \partial y^{n_2}}$ порядка $n = n_1 + n_2$. Может применяться для большего числа переменных.

Dt$[f, x]$ – возвращает полную производную функции f по переменной x.

Dt$[f, \{x, n\}]$ – находит полную производную n-го порядка функции f по переменной x.

Dt$[f]$ – находит полный дифференциал функции f.

Integrate$[f, x]$ – находит первообразную (неопределенный интеграл) от функции f по переменной x. Константа при этом не добавляется.

Integrate$[f, \{x, a, b\}]$ – вычисляет определенный интеграл от функции f по переменной x на отрезке $[a, b]$.

NIntegrate$[f, \{x, a, b\}]$ – находит численное приближение к определенному интегралу от функции f на отрезке $[a, b]$.

Производные и интегралы в системе **Mathematica** можно записывать в привычной форме, используя палитру математических символов ***Basic Math Assistant***.

Отметим некоторые специальные математические функции из справочной базы данных **Mathematica** (они не могут быть выражены через элементарные функции):

CosIntegral[*x*] – интегральный косинус $\mathrm{Ci}(x)$;
SinIntegral[*x*] – интегральный синус $\mathrm{Si}(x)$;
CoshIntegral[*x*] – интегральный гиперболический косинус;
SinhIntegral[*x*] – интегральный гиперболический синус;

ExpIntegral[*x*] – интегральная показательная функция $\mathrm{Ei}(x)$;

Erf[*x*] – функция ошибок;

LogIntegral[*x*] – интегральный логарифм $\mathrm{Li}(x)$;

LegendreP[*n*, *x*] – полином Лежандра степени *n* относительно переменной *x*.

Для таких функций в системе **Mathematica** можно получить численные значения, построить график и др.

Примеры численного дифференцирования и интегрирования средствами пакета Mathematica.

Пример 6.1. Найти приближенные значения производных первого и второго порядков функции $f(x) = \ln\cos x$ в точке $x_1 = 0{,}83$, используя:

а) функцию ***D*** системы **Mathematica**;

б) формулы $y_i' \approx \dfrac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}$ и $y_i'' \approx \dfrac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$ для шага $h = 0{,}01$.

Δ а) Введем функцию $f(x)$, точку x_1, и вычислим производные с помощью функции ***D***.

```
In[1]:= f[x_] = Log[Cos[x]]; x1 = 0.83;
             |на··· |косинус

In[2]:= D[f[x], x]
        |дифференцироват
        D[f[x], {x, 2}]
        |дифференцироват

Out[2]= -Tan[x]

Out[3]= -Sec[x]^2
```

```
In[4]:= d11 = D[f[x], x] /. x → x1
              |дифференцировать

Out[4]= -1.09343

In[5]:= d21 = D[f[x], {x, 2}] /. x → x1
              |дифференцировать

Out[5]= -2.1956
```

б) Для вычисления производных в точке x_1 с помощью заданных формул потребуются значения функции в двух соседних точках $x_0 = x_1 - h$ и $x_2 = x_1 + h$. Введем функции для приближенного вычисления производных:

In[6]:= $\texttt{pr1[x\_, h\_]} = \dfrac{\texttt{f[x + h] - f[x - h]}}{\texttt{2 h}}$; $\texttt{pr2[x\_, h\_]} = \dfrac{\texttt{f[x + h] - 2 f[x] + f[x - h]}}{\texttt{h}^2}$;

Вычислим производные:

```
In[7]:= pr11 = pr1[x1, 0.01]

Out[7]= -1.09351
```

```
In[8]:= pr21 = pr2[x1, 0.01]

Out[8]= -2.19576
```

Определим абсолютную погрешность результата:

```
In[9]:= {Abs[d11 - pr11], Abs[d21 - pr21]}
         абсолютное значе⋯  абсолютное значени

Out[9]= {0.0000800335, 0.000167866}
```

▲

Пример 6.2. Вычислить определенный интеграл $\int_0^1 e^{-x^2}dx$: а) методом левых прямоугольников, разбив отрезок интегрирования на 200 частей;
б) с помощью функции **NIntegrate**.

Δ Введем функцию, концы отрезка интегрирования, число разбиений и шаг:

```
In[1]:= f[x_] = Exp[-x^2]; a = 0; b = 1; n = 200; h = (b - a)/n;
                показательная функция
```

а) Вычислим интеграл по формуле левых прямоугольников:

In[2]:= int1 = h * $\sum_{i=0}^{n-1}$ f[a + i * h] // N   Out[2]= 0.748403

По умолчанию система **Mathematica** выдает на экран результат с шестью значащими цифрами. Выведем полученное значение в виде числа, содержащего 9 цифр, 8 из которых находятся в дробной части.

```
In[3]:= PaddedForm[int1, {9, 8}]
        форма числа с заполнением нулями
Out[3]//PaddedForm=
        0.74840290
```

б) Вычислим интеграл с помощью встроенной функции численного интегрирования **NIntegrate**:

```
In[4]:= int2 = NIntegrate[f[x], {x, a, b}]
               квадратурное интегрирование
Out[4]= 0.746824

In[5]:= PaddedForm[int2, {9, 8}]
        форма числа с заполнением нулями
Out[5]//PaddedForm=
        0.74682413
```

Сравним полученные значения:

```
In[6]:= Abs[int1 - int2]
        абсолютное значение
Out[6]= 0.00157877
```

▲

Пример 6.3. Вычислить определенный интеграл $\int_1^2 \frac{\sin x}{x} dx$ с помощью квадратурной формулы Гаусса с пятью узлами.

Δ Квадратурная формула Гаусса с пятью узлами для функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ имеет вид

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{5} A_i f\left(\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}\cdot t_i\right),$$

где t_i – корни полинома Лежандра пятой степени, A_i – квадратурные коэффициенты Гаусса, определяемые из системы линейных уравнений

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{5} A_j = 2, \\ \sum_{j=1}^{5n} A_j t_j^{i-1} = \begin{cases} 0, & i-\text{четное}, \\ 2/i, & i-\text{нечетное}, \end{cases} \quad i=\overline{2,5}. \end{cases}$$

Найдем t_i и A_i, используя средства пакета **Mathematica**.

Полином Лежандра пятой степени имеет вид:

```
In[1]:= LegendreP[5, t]
        P-функция Лежандра первого рода
Out[1]= 1/8 (15 t - 70 t^3 + 63 t^5)
```

Список его корней сохраним под именем **tt**:

```
In[2]:= sl = NSolve[LegendreP[5, t] == 0, t]
              числе…  P-функция Лежандра первого
Out[2]= {{t → -0.90618}, {t → -0.538469}, {t → 0.}, {t → 0.538469}, {t → 0.90618}}

In[3]:= tt = t /. sl
Out[3]= {-0.90618, -0.538469, 0., 0.538469, 0.90618}
```

Для определения квадратурных коэффициентов Гаусса A_i решим линейную систему. Введем матрицу ее коэффициентов **T** и столбец свободных членов **B**:

```
In[4]:= T = Table[If[i == 1, 1, (tt[[j]])^(i-1)], {i, 5}, {j, 5}]; MatrixForm[T]
        |табл···  |условный оператор                          |матричная форма
```

Out[4]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -0.90618 & -0.538469 & 0. & 0.538469 & 0.90618 \\ 0.821162 & 0.289949 & 0. & 0.289949 & 0.821162 \\ -0.74412 & -0.156129 & 0. & 0.156129 & 0.74412 \\ 0.674307 & 0.0840705 & 0. & 0.0840705 & 0.674307 \end{pmatrix}$$

```
In[5]:= B = Table[If[EvenQ[i] == True, 0, 2/i], {i, 5}] // N
        |табл··· |у··· |чётное чис··· |истина            |чı

Out[5]= {2., 0., 0.666667, 0., 0.4}
```

Решение сохраним под именем **A**:

```
In[6]:= A = LinearSolve[T, B]
        |решить линейные уравı

Out[6]= {0.236927, 0.478629, 0.568889, 0.478629, 0.236927}
```

Далее введем подынтегральную функцию и отрезок интегрирования, вычислим определенный интеграл по формуле Гаусса:

```
In[7]:= f[x_] = Sin[x]/x; a = 1; b = 2;
```

$$\texttt{In[8]:= int} = \frac{b-a}{2} * \sum_{i=1}^{5} A[[i]] * f\left[\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} * tt[[i]]\right]$$

```
Out[8]= 0.65933
```

Выведем полученное значение в виде числа, содержащего 19 цифр, 18 из которых находятся в дробной части:

```
In[9]:= PaddedForm[int, {19, 18}]
        |форма числа с заполнением нулями

Out[9]//PaddedForm=
        0.659329906435518700
```

Найдем значение этого интеграла, записав его в привычном виде с помощью палитры инструментов:

$$\texttt{In[10]:=} \int_1^2 \frac{\texttt{Sin}[x]}{x}\, dx$$

```
Out[10]= -SinIntegral[1] + SinIntegral[2]
```

Система **Mathematica** выдает результат через встроенную специальную функцию **SinIntegral** (интегральный синус). Получим его численное значение:

```
In[11]:= N[-SinIntegral[1] + SinIntegral[2]]
```

|ч⋯ |интегральный синус |интегральный синус

```
Out[11]= 0.65933
```

Рассмотрим еще один вариант вычисления этого интеграла – с помощью функции **NIntegrate**:

```
In[12]:= int1 = NIntegrate[Sin[x]/x, {x, 1, 2}]
```

|квадратурное интегрирование

```
Out[12]= 0.65933
```

Выведем это значение в виде числа, содержащего 19 цифр, 18 из которых находятся в дробной части:

```
In[13]:= PaddedForm[int1, {19, 18}]
```

|форма числа с заполнением нулями

```
Out[13]//PaddedForm=
        0.659329906435512600
```

Сравним полученные результаты:

```
In[14]:= Abs[int - int1]
```

|абсолютное значение

Out[14]= 6.10623×10^{-15}

Столь малая погрешность объясняется тем, что система **Mathematica** по умолчанию выбирает наиболее подходящий (точный) метод численного нахождения интеграла, как правило – квадратурный метод Гаусса. ▲