1.2
Теория

№ 3

$\triangle$ $\exists \dim = n$, $c_1 = \frac{1}{n}$, $c_2 = n$ $\Big\}$ тогда $\Downarrow$

$$\frac{1}{n}\|x\|_2 = \frac{1}{n}\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2} \le$$

$$\le \frac{1}{n}\sqrt{n \max_i x_i^2} \le \|x\|_2 \le n\sqrt{n \max x_i^2} \le$$

$$\le n \cdot \sqrt{x_1^2+\ldots} = n\|x\|_2 \quad \triangleleft$$

№ 4

Покажем, что $\|x\|_2 \le \sqrt{m}\,\|x\|_\infty$

$\|A\|_\infty \le \sqrt{n}\,\|A\|_2$

$\triangle$

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2+\ldots+x_m^2} \le \sqrt{m}\sqrt{\max x_i^2} = \sqrt{m}\,\|x\|_\infty$$

при $m = 2$, $x = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ $\Big\}$ $\Rightarrow$ равенство

~~$\exists\, x_0 \neq \bar{0}$, тогда $\|Ax_0\|_\infty = \|A\|_\infty \|x_0\|_\infty \Rightarrow$~~

~~$\|A\|_\infty \|x_0\|_\infty = \|Ax_0\|_\infty = \max_i |(Ax_0)_i| \le \|(Ax_0)_i\|_2 \le \sqrt{n}\|A\|_2$~~

$$\underbrace{\|A\bar{x}_0\|_\infty}_{\exists \neq \bar{0}} = \|A\|_\infty \|\bar{x}_0\|_\infty$$

Тогда $\|A\|_\infty \|x_0\|_\infty = \|Ax_0\|_\infty = \max\limits_i |(A_0\bar{x})_i| \leq$

$\leq \|(Ax_0)_i\|_2 \leq \|A\|_2 \|x_0\|_2 \leq \sqrt{n}\, \|A\|_2 \|x_0\|_\infty$

№5

Д-ть: $\|UA\|_F = \|AU\|_F = \|A\|_F$

U - Унитарные преобразования сохраняют скалярное пр-ие:

$$\langle Ux, Uy \rangle = \langle x, y \rangle$$

$$\Downarrow$$

следовательно доказано