1.3

Теория

№3

$\exists\ X\omega = y$ - недоопр.

Найдём $\|\omega\|^2 = \omega^T\omega$ - с минимальной нормой ℓ_2

X - полноранговая

$\triangleright$ $\exists\ (AA^*)^{-1}$: если $\exists \Rightarrow$

$\nexists$ общ. реш. $Ax = b$ - реш. сов. сис-мы:

$$(*) \quad x = A^*(AA^*)^{-1}b + (\mathbb{1} - A^*(AA^*)^{-1}A)y$$

$$Ax = (AA^*)(AA^*)^{-1}b + Ay - (AA^*)(AA^*)^{-1}Ay$$

$$Ax = b + Ay - Ay \Rightarrow Ax = b$$

Ищем $X\omega = y$: $\|\omega\|^2 = \omega^T\omega \to \min$

$$\|\omega\| = \|\underbrace{X^*(XX^*)^{-1}y + (\mathbb{1} - X^*(XX^*)^{-1}X)h}_{+(*)}\| \le$$

$$\le \|X^*(XX^*)^{-1}y\| + \|(\mathbb{1} - X^*(XX^*)^{-1}X)h\|$$

минимум при $h = \bar{0}$; $\omega = X^*(XX^*)^{-1}y$

№ 4

T1

$$\|X-\tilde{X}\| = \|V\sqrt{\Lambda}U^T - V\sqrt{\tilde{\Lambda}}U^T\| =$$

$$= \|V(\sqrt{\Lambda} - \sqrt{\tilde{\Lambda}})U^T\|$$

V, U^T - ортог (унит)

$\Downarrow$ ~~про~~ сохраняют скал пр-ие

$$\left.\begin{array}{l} \|V(\sqrt{\Lambda} - \sqrt{\tilde{\Lambda}})U^T\| \\ \quad\quad \| \\ \|\sqrt{\Lambda} - \sqrt{\tilde{\Lambda}}\| \end{array}\right\} \Rightarrow \|X-\tilde{X}\|^2 = \|\sqrt{\Lambda} - \sqrt{\tilde{\Lambda}}\|^2 = \sum_{i=r+1}^{n} \lambda_i$$

T2

u - правый синг. вектор, если:

$\exists\, v:\ Xu = \sigma v;\ Xv = \sigma u;\ \sigma$ - синг. зн.

u, v - ед.

$\exists\ \sigma = \sigma_{max} \Rightarrow$ происходит max растяж

ед. вектора (под д-ием X), т.е. $\bar{u}$ - искомый

$\bar{u}$ - и есть синг. век. отв. наиб. синг. числу

№5

Т1

При SVD происходит переход к незав. признак., чем $\uparrow \sigma$, тем важнее признак $\Rightarrow$ Если взять вектор, кот соотв. σ_{max} $\Rightarrow$ он отвечает самому главному признаку.

Т2

$$X: \quad (X^T X)_{ab} = \sum_{i=1}^{N} x_{ia} \cdot x_{ib}$$

$$J_{11} = \sum_{i=1}^{N} x_{i2}^2 + x_{i3}^2$$

$$J_{12} = -\sum_{i=1}^{N} x_{i1} x_{i2}$$