Прикладные методы математической статистики

Домашнее задание 1. Вариант 4. Задача 2.

Студент: Абу Аль Лабан Н. А.
Группа: БПИ 198

Тестирование последовательностей псевдослучайных чисел.

Цель:

Рализовать датчик псевдослучайных чисел и проверить генерируемую последовательность на равномерность и независимость.

а) Рассчитать 100 псевдослучайных чисел степенным остаточным методом No1, с $z_1 = 1237$.
б) Привести первые 10 чисел этой последовательности.
в) Построить гистограмму с 10 столбцами для полученной последовательности.
г) Проверить гипотезу о том, что последовательность имеет распределение $R(0, 1)$ критерием хи-квадрат, разбив интервал $[0; 1)$ на десять равных интервалов.
д) Повторить шаги (в) и (г) для последовательности длиной в 10000 чисел.
е) Проверить тестом перестановок первые 9999 чисел последовательности, разбив их на тройки.

Использовать уровень значимости 5%.

Метод для генерации псевдослучайных чисел

Чтобы рассчитать псевдослучайные числа степенным остаточным методом No1, необходимо:

- Задать начальное число z_1
- Найти следующие числа по формуле $z_i = (z_{i-1}^{2.5} \text{ div } 100) \mod 10000$
- Уложить числа в интервал от 0 до 1 следующим образом: $x_i = \frac{z_i}{10000}$

In [2]:
```
def  generator(seed, count):
    numbers = [seed] # список случайных чисел
    # Генерирум числа и укладываем их в интервал от 0 до 1
    for i in range(1, count):
        numbers.append((numbers[i-1]**(2.5) // 100) % 10000)
    for i in range(count):
        numbers[i] /= 10000
    return numbers
```

а) Рассчет псевдослучайных чисел

Рассчитаем массив 100 псевдослучайных чисел, воспользовавшись вышеописанным генератором

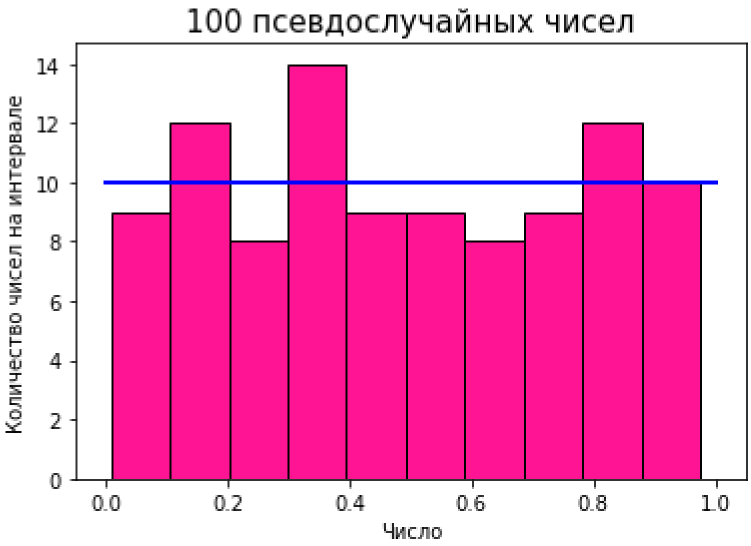
In [3]:
```
z = 1237 # начальное число

numbers100 = generator(z, 100)
```

```
Начальное число: 1237
Сгенерировано псевдослучайных чисел: 100
```

б) Вывод первых 10 чисел последовательности

Номер	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	z_6	z_7	z_8	z_9	z_10
Число	0.1237	0.8175	0.5381	0.0145	0.2531	0.2777	0.3868	0.4995	0.3508	0.8681

в) Построение гистограммы с 10 столбцами для полученной последовательности



в) Проврка гипотезы

Необходимо проверить гипотезу о том, что последовательность имеет распределение $R(0, 1)$ критерием хи-квадрат, разбив интервал $[0; 1)$ на десять равных интервалов.

Для начала определим основную и альтернативную гипотезы:

- H_0 : последовательность имеет распределение $R(0, 1)$
- H_A : последовательность не распределена равномерно

Зададим уровень значимости $\alpha = 0.05$ (см. условие)

Для проверки гипотезы применим **Критерий согласия Пирсона** χ^2

Нужно:

- Разбить диапазон изменения случайной величины на интервалы с шагом 0.1

- Вычислить наблюдаемые и теоретические частоты

При равномерном распределении и делении на равные интервалы, на эти интервaы выпало бы равное количество значений.
Значит, **теортетическая частота** равна $100/10 = 10$

Для вычисления **наблюдаемых частот** в соответствующих интервалах посчитаем, сколько чисел последовательности попадает в каждый интервал

Для удобства определим функцию

In [7]:
```
def get_observed(numbers):
    observed = [0 for i in range(10)]

    # Вычисляем наблюдаемые частоты
    for n in numbers:
        observed[int(n*10)] += 1
    return observed
```

Вычислим наблдаемые частоты для нашей выборки

In [8]:
```
observed100 = get_observed(numbers100)
```

Интервал	.0 - .1	.1 - .2	.2 - .3	.3 - .4	.4 - .5	.5 - .6	.6 - .7	.7 - .8	.8 - .9	.9 - 1
Частота	9	12	9	13	12	7	8	10	11	9

Вычислим эмпирическое значение Пирсона:

Статистика:
$\chi^2 = \sum\limits_{i=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_j} \overset{H_0}{\sim} \chi^2_{k-1},$
где

- O_j - наблюдаемая частота
- E_j - теоритическая частота
- k - количество интервалов

Критическое правило:
отвергнуть $H - 0$, если $\chi^2 > \chi^2_{k-1,\alpha}$
$\alpha = 0.05$ (см. условие)

Для удобства определим функция для вычисления статистики:

In [10]:
```
# e - Ожидаемая частота
def get_stat(e, observed):
    chi = 0
    for o in observed:
        chi += (o - e)**2/e
    return chi
```

Вычислим статистику:

In [11]:
```
chi100 = get_stat(10, observed100) # статистика
```

Статистика: 3.4

Степень свободы равна $k-1=10-1=9$
По таблице критических значений находим $\chi^2(0.05,9)=16.9$

Проверим критическое правило:
$\chi^2 < \chi^2_{9,0.05}$?
$3.4 < 16.9$

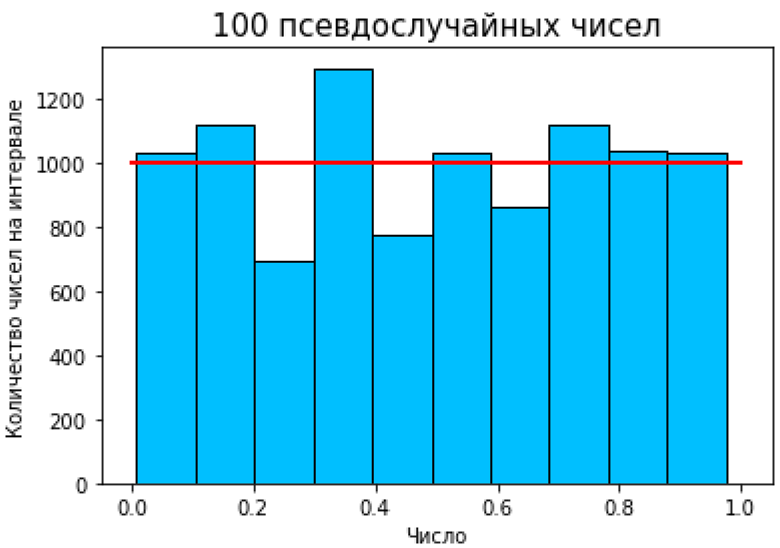
Следовательно, у нас нет оснований для опровержения основной гипотезы
Распределение последовательности **можно** считать равномерным

д) Повторим для выборки размером 10000
Для начала сгенерируем последовательность

In [13]:
```
numbers10000 = generator(z, 10000)
```

Начальное число: 1237
Сгенерировано псевдослучайных чисел: 10000

Построим гистограмму для полученной последовательности



Аналогично пункту (г) вычислим частоты

Теоретическая частота равна $10000/10=1000$
Наблюдаемые частоты вычислим:

In [16]:
```
observed10000 = get_observed(numbers10000)
```

Ожидаемые частоты на выборке из 10000 элементов:

Интервал	.0 - .1	.1 - .2	.2 - .3	.3 - .4	.4 - .5	.5 - .6	.6 - .7	.7 - .8	.8 - .9	.9 - 1
Частота	1033	1121	778	1210	1034	861	860	1207	1120	776

Посчитаем **статистику**:

In [18]:
```
chi10000 = get_stat(1000, observed10000) # статистика
```

Статистика: 256.616

Ранее мы нашли:
$\chi^2(0.05, 9) = 16.9$

Проверим критическое правило:
$\chi^2 < \chi^2_{9,0.05}$?
$256.616 > 16.9$

Следовательно, у нас есть значительные основания для опровержения основной гипотезы в пользу альтернативной
Распределение последовательности **нельзя** считать равномерным

---

e) Проверить тестом перестановок первые 9999 чисел последовательности, разбив их на тройки

Для начала разобьем числа на тройки и соберем в новый массив

In [20]:
```
triples = [[numbers10000[i], numbers10000[i + 1], numbers10000[i+ 2]]
          for i in range(0,9997,3)]
```

Собрано троек чисел: 3333

Элементам каждой тройки поставим в соответствие ранг:

- 1 — наименьшему элементу
- 2 — среднему
- 3 — наибольшему

Напишем метод, который превращает тройку в строку идущих подряд рангов

In [22]:
```
def get_rangs(triple):
    rangs = ''
    minimum = min(triple)
    maximum = max(triple)
    for n in triple:
        if n == minimum:
            rangs += '1'
        elif n == maximum:
            rangs += '3'
        else:
            rangs += '2'
    return rangs
```

Переведем тройки в строки рангов и посчитаем частоты рангов

In [23]:
```
triples_rangs = [get_rangs(t) for t in triples]
observed_rangs = {'123': 0, '132': 0, '213': 0, '231': 0, '312': 0, '321': 0}

for r in triples_rangs:
    observed_rangs[r] += 1
```

Частоты на выборке из рангов троек:

Перестановка	123	132	213	231	312	321
Частота	602	627	491	374	518	721

Теоретическую частоту вычисляем как раньше:
$3333/6 = 555.5$

Уровень значимости, как и прежде, $\alpha = 0.05$
Степень свободы $6 - 1 = 5$

Вычисляем по таблице $\chi^2(0.05, 5) = 11.1$

Вычислим **статистику** с помощью ранее определенной фунукции:

In [25]:

```
chi_rangs = get_stat(555.5, observed_rangs.values())
```

Статистика: 131.72547254725472

Проверим критическое правило:
$\chi^2 < \chi^2_{5,0.05}$?
$131.725 > 11.1$

Следовательно, у нас есть значительные основывания для опровержения основной гипотезы в пользу альтернативной
Распределение последовательности **нельзя** считать равномерным, а числа независимыми

P.S. В целях повышения читабельности удалены фрагменты кода, предназначенные для вывода данных