Прикладные методы математической статистики

Домашнее задание 1. Вариант 4.

Студент: Абу Аль Лабан Н. А.
Группа: БПИ 198

Цель:

Оценить среднюю продолжительность вскармливания.

а) Рассчитать 90% доверительный интервал для средней продолжительности, считая распределение признака нормальным.
б) Построить график «квантиль-квантиль» и попробуйте понять, соответствует ли распределение времени вскармливания нормальному закону.
в) Рассчитать данным методом 90% доверительный интервал для средней продолжительности вскармливания, сгенерировав 1000 перевыборок.
г) Построить гистограмму для полученных в предыдщем пункте средних значений. Похоже ли распределение среднего в перевыборках на нормальное?

Выборка данных о продолжительности грудного вскрармливания в неделях состоит из 22 элементов

Выборка:

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_10	X_11
20	6	13	35	19	14	24	23	43	27	4
X_12	**X_13**	**X_14**	**X_15**	**X_16**	**X_17**	**X_18**	**X_19**	**X_20**	**X_21**	**X_22**
28	16	9	24	16	4	21	18	27	21	6

а) Построение доверительного интервала

Чтобы построить доверительный интервал, необходимо:

- Задать уровень значимости α
- Найти квантиль распределения Стьюдента $t_{(\frac{\alpha}{2};n-1)}$
- Найти среднее выборочное значение $\overline{X}$
- Найти стандартное отклонение $\hat{\sigma}$
- Найти границы интервала, подставив в формулу полученные значения

Приступим к вычислениям.

1. **Уровень доверия**, заданный по условию: $\alpha - 1 = 0.9$
   Отсюда находим **уровень значимости:** $\alpha = 0.1$
2. Найдем **квантиль распределения Стьюдента** по соответствующей таблице:
   $t_{(0.05;21)} = 1.721$
3. Рассчитаем **среднее выборочное значение** по формуле: $\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$
4. Стандартное отклонение найдем с помощью скорректированной выборочной дисперсии:
   $\hat{\sigma} = \sqrt{\hat{\sigma}^2}$

Для этого вычислим **скорректированную выборочную дисперсию** по формуле:

$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{n-1}$

5. Имея результаты вычислений, **интервал** найдем из формулы:

$\overline{X} - \left(t_{(\frac{\alpha}{2};n-1)} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \leqslant \mu \leqslant \overline{X} + \left(t_{(\frac{\alpha}{2};n-1)} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

In [3]:

```
x = sum(duration) / n # Среднее выборочное
s = sum([(d - x)**2
         for d in duration]) / (n - 1) # Выборочная дисперсия
t = 1.721 # Квантиль

left = x - t * np.sqrt(s) / np.sqrt(n)  # Левая граница
right = x + t * np.sqrt(s) / np.sqrt(n) # Правая граница
```

```
Среднее выборочное: 19.00
Несмещенная выборочная дисперсия: 99.24
Левая граница: 15.344820242959717
Правая граница: 22.655179757040283
```

Таким образом, **интервал**: $(15.34; 22.66)$

б) Построение графика квантиль-квантиль

Рассчитаем **выборочные квантили** порядков $\frac{1}{n+1}, .., \frac{n}{n+1}$

Это упорядоченная по возрастанию выборка: $\hat{Q}(\frac{1}{n+1}) = X_{(1)}, .., \hat{Q}(\frac{n}{n+1}) = X_{(n)}$

Рассчитаем **теоретические квантили** - квантили нормального распределения с параметрами $\mu = \overline{X}$ и $\sigma^2 = \hat{\sigma}^2$

$Q(\frac{1}{n+1}) = \overline{X} + \hat{\sigma}\Phi^{-1}(\frac{1}{n+1}), .., Q(\frac{n}{n+1}) = \overline{X} + \hat{\sigma}\Phi^{-1}(\frac{n}{n+1})$

Построим график на осях $(Q, \hat{Q})$

In [5]:

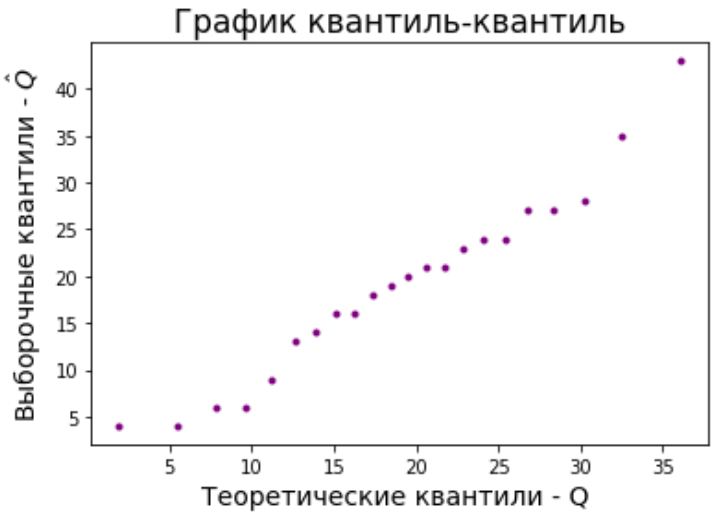
```
duration.sort()
Q = duration # Выборочные квантили
phi = [scipy.stats.norm.ppf((i+1)/(n+1)) for i in range(n)] # Квантили нормального распре
tQ = [x + np.sqrt(s) * p for p in phi] # Теоретические квантили
```

Выборочные квантили:

X(1)	X(2)	X(3)	X(4)	X(5)	X(6)	X(7)	X(8)	X(9)	X(10)	X(11)
4	4	6	6	9	13	14	16	16	18	19
X(12)	**X(13)**	**X(14)**	**X(15)**	**X(16)**	**X(17)**	**X(18)**	**X(19)**	**X(20)**	**X(21)**	**X(22)**
20	21	21	23	24	24	27	27	28	35	43

Теоретичесикие квантили:

Q(1/23)	Q(2/23)	Q(3/23)	Q(4/23)	Q(5/23)	Q(6/23)	Q(7/23)	Q(8/23)	Q(9/23)
1.948578	5.454525	7.799532	9.647690	11.219472	12.617784	13.900177	15.102969	16.251321
Q(12/23)	**Q(13/23)**	**Q(14/23)**	**Q(15/23)**	**Q(16/23)**	**Q(17/23)**	**Q(18/23)**	**Q(19/23)**	**Q(20/23)**
19.543108	20.635840	21.748679	22.897031	24.099823	25.382216	26.780528	28.352310	30.200468



Поскольку точки практически выстроены в линию, можно сделать вывод, что длительность вскармливания **распределена по нормальному закону**

в) Построение доверительного интервала с помощью бутстрапа и генерации 1000 перевыборок

Для начала неодбходимо построить 1000 **перевыборок** - n случайно выбранных из основной выборки элементов (элеметы могут повторяться)

Для кажлой перевыборки необходимо найти среднее выборочное значение $\overline{X}_i$, это будут перевыборочные

Далее нужно:

- Задать уровень значимости α
- Отсортировать массив средних значений
- Найти границы интервала, взяв нужные квантили из средних значений

Приступим к рассчетам

1. Рассчитаем для каждой перевыборки **переыборочное среднее** по формуле: $\overline{X}_i = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$
2. **Уровень доверия** по условию: $\alpha - 1 = 0.9$
   Отсюда находим **уровень значимости:** $\alpha = 0.1$
3. Отсортируем по возрастанию найденные в п. 1 средние выборочные
4. В общем случае, выборочные квантили $Q\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ и $Q\left(10 - \frac{\alpha}{2}\right)$ для средних в перевыборках образуют бутстраповский доверительный интервал для среднего в генеральной совокупности с уровнем доверия 1–α
5. Наконец, найдем **интервал**, взяв $0.05 * 1000$ и $0.95 * 1000$ элменты, это и будут нужные квантили

In [8]:

```
duration = [20, 6, 13, 35, 19, 14, 24, 23, 43, 27, 4,
            28, 16, 9, 24, 16, 4, 21, 18, 27, 21, 6] # Сбрасываем отсортированность

bootstrap_lst = [[random.choice(duration) for i in range(n)]
                 for j in range(1000)] # Генерируем перевыборки

# Средние перевыборочные для каждлй перевыборки
mean_lst = [sum(bootstrap) / n
            for bootstrap in bootstrap_lst]
mean_lst.sort()

left = mean_lst[49] # Левая граница
right = mean_lst[949] # Правая граница
```

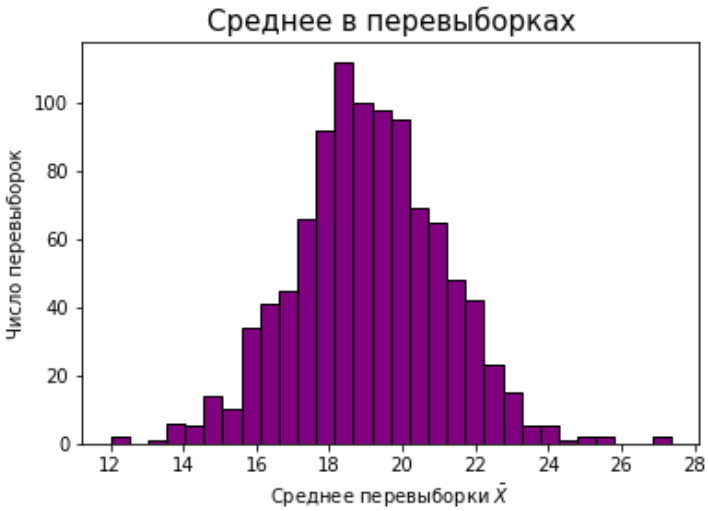
```
Левая граница: 15.772727272727273
Правая граница: 22.40909090909091
```

Таким образом, **интервал**: $(15.77; 22.41)$
Интервал, найденный по исходной выборке: $(15.34; 22.66)$

Поскольку интервалы находятся в одном отрезке, но найденный с помощью бутстрапа меньше, делаем вывод, что найденный в ходе эксперимента интревал **более точен**

г) Построение гистограммы

Гистограмма будет построена на основе средних значений перевыборок из предыдущего пункта



Поскольку гистограмма напоминает колокол, делаем вывод, что распределение средних значений **похоже на нормальное**

P.S. В целях повышения читабельности удалены фрагменты кода, предназначенные для вывода данных