

# Circulation routière, championnat et un paradoxe comme solution

Nadia Lafrenière

Dartmouth College

Tempête des Sciences, Cégep Garneau  
13 avril 2022

## Question

Est-ce que l'ajout d'une route peut créer plus de trafic?



Une expérience!

# Qu'est-ce qui s'est passé?

## Définition

Un *réseau congestionné* est un réseau dans lequel, pour au moins un segment, le coût de transit (par exemple, le temps) augmente lorsque le trafic augmente.

# Qu'est-ce qui s'est passé?

## Définition

Un *réseau congestionné* est un réseau dans lequel, pour au moins un segment, le coût de transit (par exemple, le temps) augmente lorsque le trafic augmente.



## Paradoxe (Dietrich Braess, 1968)

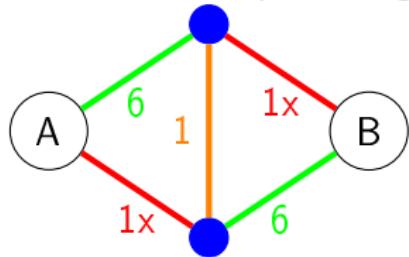
*Il existe des réseaux de transport congestionnés dans lesquels l'ajout d'un lien fait augmenter le coût de transit total si chaque individu cherche à minimiser son coût.*



Photo: Renate Schmid, Wikipédia

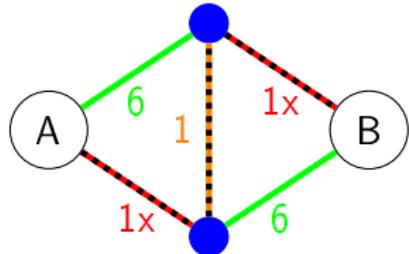
Qu'est-ce qui s'est passé?

Avec l'autoroute (en orange):



Qu'est-ce qui s'est passé?

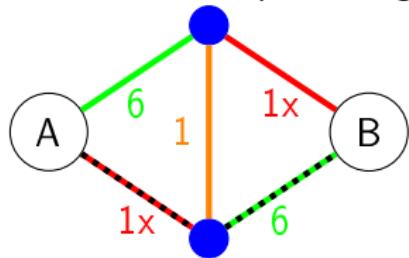
Avec l'autoroute (en orange):



Transit minimum : 9 minutes

Qu'est-ce qui s'est passé?

Avec l'autoroute (en orange):



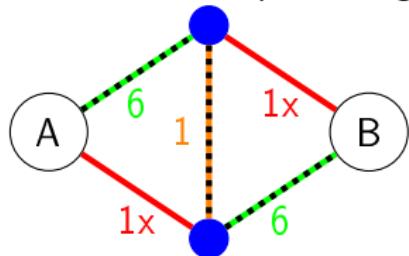
Transit minimum : 9 minutes

Chemins alternatifs :

- ▶ 10 minutes

# Qu'est-ce qui s'est passé?

Avec l'autoroute (en orange):



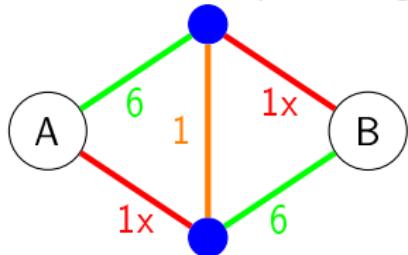
Transit minimum : 9 minutes

Chemins alternatifs :

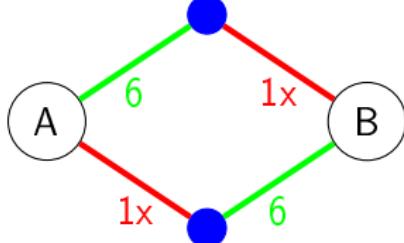
- ▶ 10 minutes
- ▶ 13 minutes

## Qu'est-ce qui s'est passé?

Avec l'autoroute (en orange):



Sans l'autoroute :



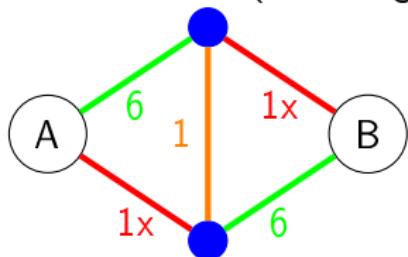
Transit minimum : 9 minutes

### Chemins alternatifs :

- ▶ 10 minutes
  - ▶ 13 minutes

# Qu'est-ce qui s'est passé?

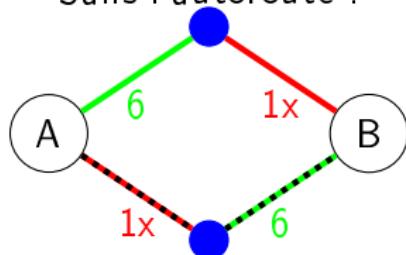
Avec l'autoroute (en orange):



Transit minimum : 9 minutes  
Chemins alternatifs :

- ▶ 10 minutes
- ▶ 13 minutes

Sans l'autoroute :



Transit minimum : 8 minutes  
(2 voitures de chaque côté)

## Pourquoi ça marche?

- ▶ On s'Imagine que les automobilistes se comportent comme un liquide dans un réseau de canaux. En fait, les automobilistes agissent de façon égoïste.

## Pourquoi ça marche?

- ▶ On s'Imagine que les automobilistes se comportent comme un liquide dans un réseau de canaux. En fait, les automobilistes agissent de façon égoïste.
- ▶ En théorie des jeux, on appelle ça *le prix de l'anarchie*.

## Le prix de l'anarchie

- ▶ L'*optimum social* correspond à un routage qui minimise le temps total de trajet pour les usagers.
- ▶ L'*optimum égoïste* correspond à un routage dans lequel aucun usager ne peut améliorer son temps de trajet.

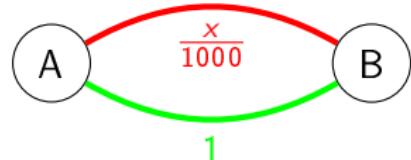
# Le prix de l'anarchie

- ▶ L'*optimum social* correspond à un routage qui minimise le temps total de trajet pour les usagers.
- ▶ L'*optimum égoïste* correspond à un routage dans lequel aucun usager ne peut améliorer son temps de trajet.
- ▶ Le *prix de l'anarchie* est le ratio entre l'optimum égoïste et l'optimum social :

$$P = \frac{\text{temps optimal égoïste}}{\text{temps optimal social}}.$$

## Théorème

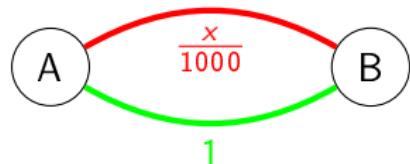
Le *prix de l'anarchie* est d'au plus  $\frac{4}{3}$ .



# Le prix de l'anarchie

## Théorème

*Le prix de l'anarchie est d'au plus  $\frac{4}{3}$ .*



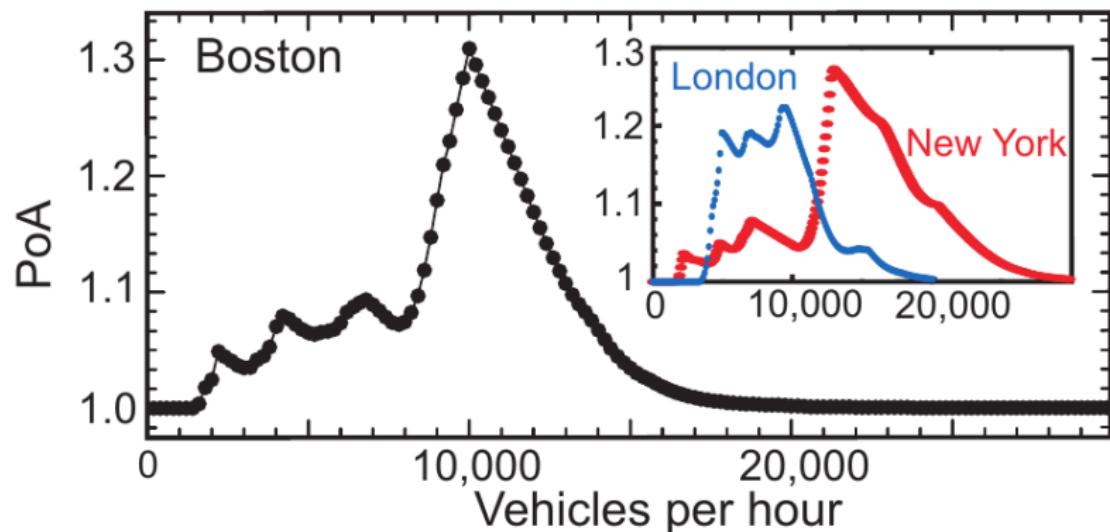
- ▶ Avec 1 000 voitures : un optimum égoïste correspond à un temps total de  $999 \cdot \frac{999}{1000} + 1 \approx 999$  : 999 voitures prennent la voie rouge, la millième peut prendre n'importe laquelle.
- ▶ En revanche, l'optimum social correspond à envoyer 500 voitures de chaque côté : le temps total est d'alors  $500 \cdot 0,5 + 500 \cdot 1 = 750$ .
- ▶ Le prix de l'anarchie est alors  $\frac{999}{750}$ , ce qui est près de  $\frac{4}{3}$ .

## Le prix de l'anarchie

En général, le prix de l'anarchie change selon le nombre d'usagers d'un réseau congestionné.

# Le prix de l'anarchie

En général, le prix de l'anarchie change selon le nombre d'usagers d'un réseau congestionné.



# Dans la vraie vie...



Dans la vraie vie...

- ▶ Stuttgart, 1968

Dans la vraie vie...

- ▶ Stuttgart, 1968
- ▶ New York, pour le Jour de la Terre, 1990

Dans la vraie vie...

- ▶ Stuttgart, 1968
- ▶ New York, pour le Jour de la Terre, 1990
- ▶ Séoul, début des années 2000

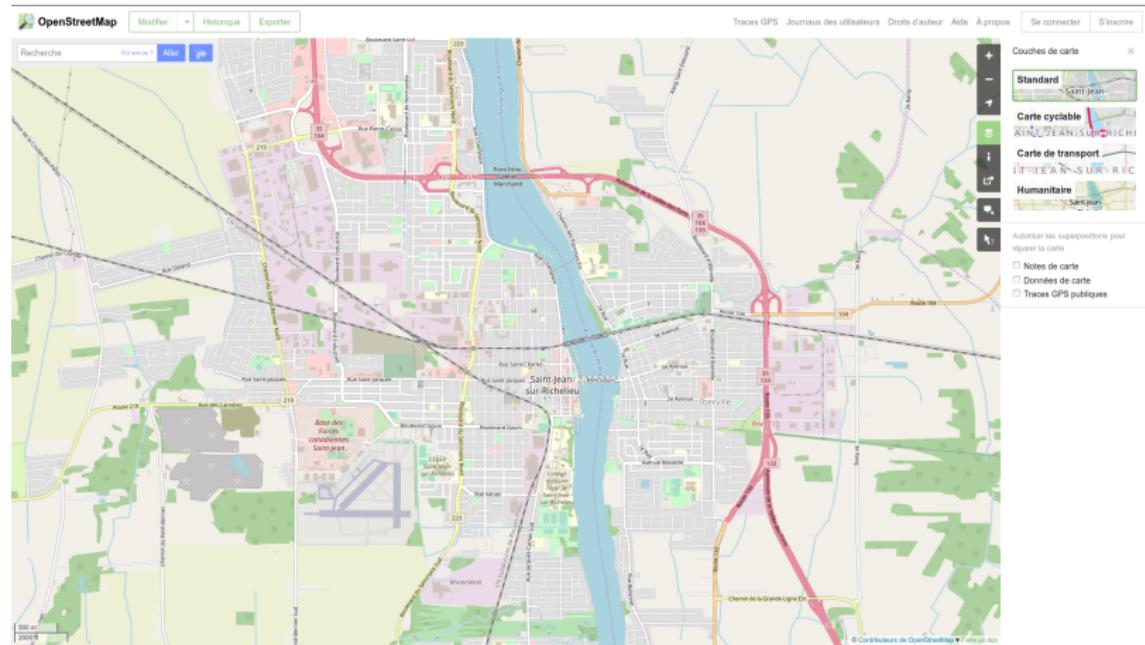
Dans la vraie vie...

- ▶ Stuttgart, 1968
- ▶ New York, pour le Jour de la Terre, 1990
- ▶ Séoul, début des années 2000
- ▶ Californie, 2011

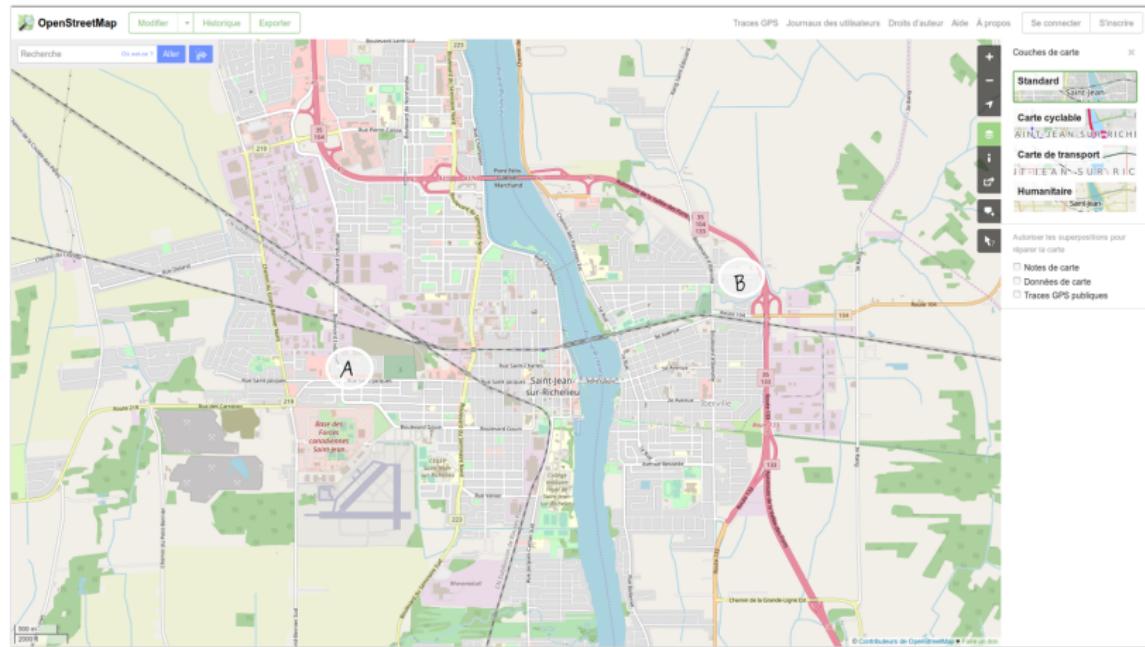
Dans la vraie vie...

- ▶ Stuttgart, 1968
- ▶ New York, pour le Jour de la Terre, 1990
- ▶ Séoul, début des années 2000
- ▶ Californie, 2011
- ▶ Saint-Jean-sur Richelieu (?)

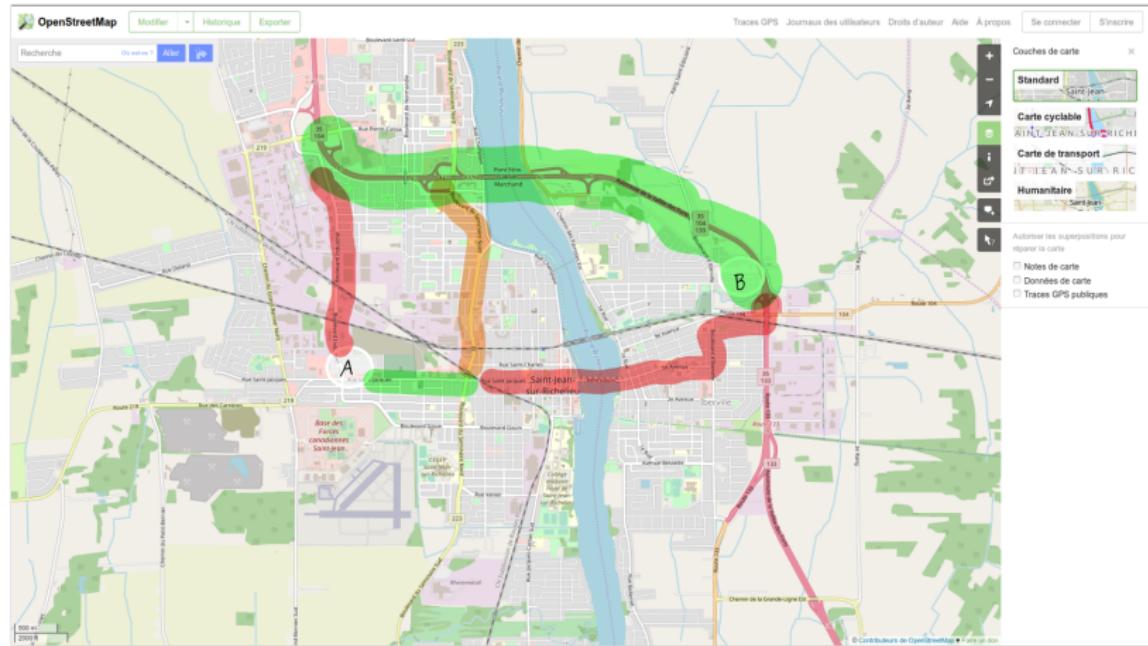
# Saint-Jean-sur-Richelieu



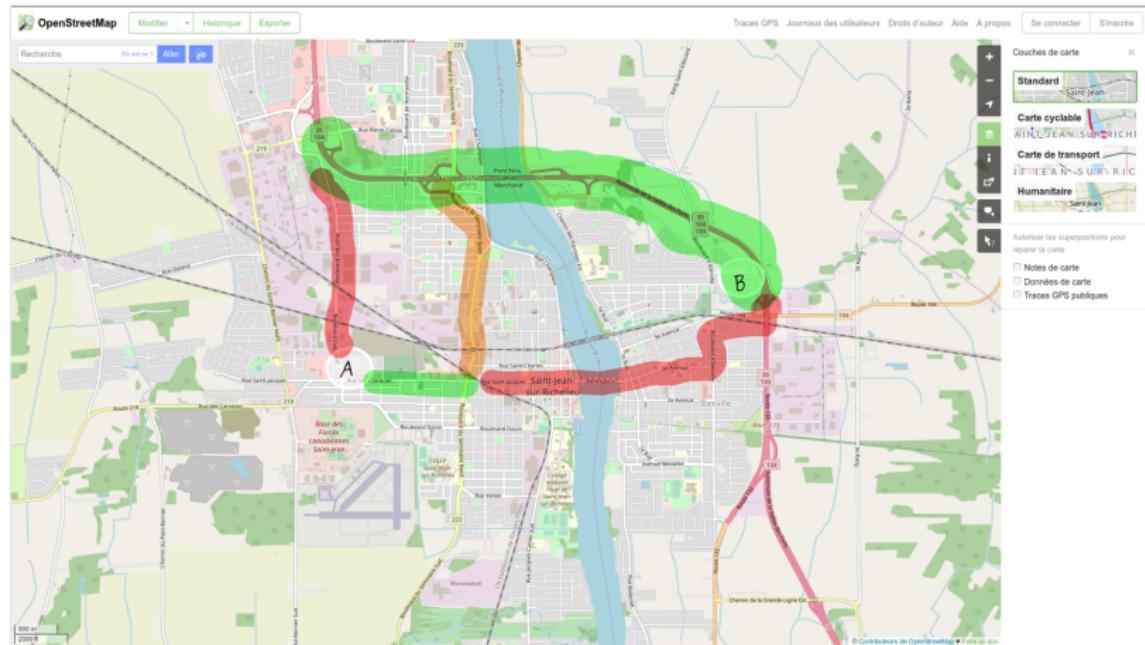
# Saint-Jean-sur-Richelieu



# Saint-Jean-sur-Richelieu



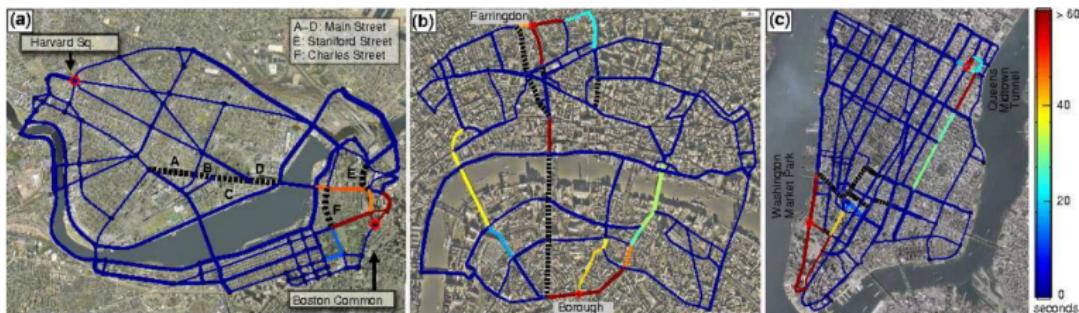
# Saint-Jean-sur-Richelieu



Bien qu'il semble y a voir un potentiel pour le paradoxe de Braess, plus de données sont nécessaires. Selon un mathématicien qui y a vécu longtemps, le temps de transit était moindre lorsque le Boulevard du Séminaire (en orange) était fermé.

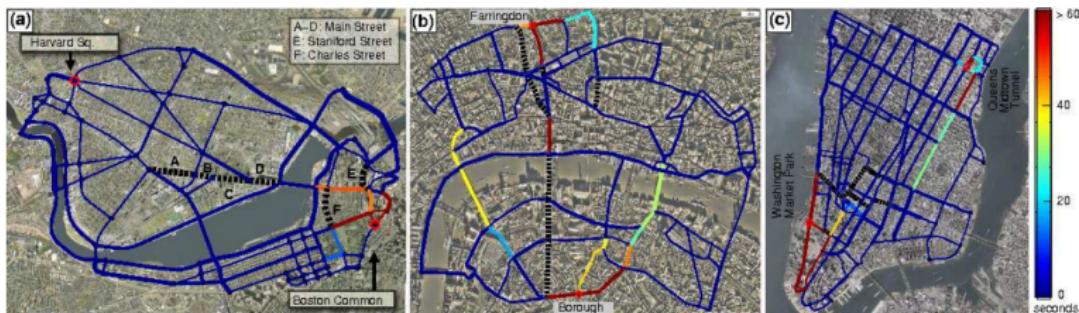
# Est-ce que ça peut se produire encore?

En 2008, deux physiciens et un informaticien ont identifié des itinéraires de Boston, Londres et New York qui seraient plus rapides si on enlevait des routes (pointillé noir sur l'image).



# Est-ce que ça peut se produire encore?

En 2008, deux physiciens et un informaticien ont identifié des itinéraires de Boston, Londres et New York qui seraient plus rapides si on enlevait des routes (pointillé noir sur l'image).



On remarque, d'ailleurs, que le retrait de certaines routes créerait aussi beaucoup de trafic (en rouge).

# Et à Québec?



Image: Ministère des Transports du Québec

# Et à Québec?



Image: Ministère des Transports du Québec

- ▶ Il est très difficile de prévoir à l'avance l'occurrence du paradoxe de Braess, parce qu'il faudrait connaître le comportement des automobilistes. Des simulations peuvent toutefois être faites.

# Et à Québec?



Image: Ministère des Transports du Québec

- ▶ Il est très difficile de prévoir à l'avance l'occurrence du paradoxe de Braess, parce qu'il faudrait connaître le comportement des automobilistes. Des simulations peuvent toutefois être faites.
- ▶ Ce qu'on sait, cependant, c'est que l'ajout de voies routières est généralement la cause de l'étalement urbain, d'une hausse du trafic à moyen terme et d'une hausse des émissions de GES.

# Désavantage numérique



## Paradoxe (Théorie d'Ewing)

*Certaines équipes performancent mieux lorsque leur meilleur joueur est blessé ou absent (Bill Simmons, ESPN).*

Patrick Ewing, joueur des Knicks

# Désavantage numérique



## Paradoxe (Théorie d'Ewing)

*Certaines équipes performancent mieux lorsque leur meilleur joueur est blessé ou absent (Bill Simmons, ESPN).*

Patrick Ewing, joueur des Knicks

## Question

Est-ce lié au paradoxe de Braess? Est-ce seulement un effet psychologique?

# Désavantage numérique et paradoxe de Braess

## Hypothèse (Prémissse)

La défense s'adapte à un jeu donné. Chaque bon jeu perd de son efficacité s'il est utilisé fréquemment.

# Désavantage numérique et paradoxe de Braess

## Hypothèse (Prémissse)

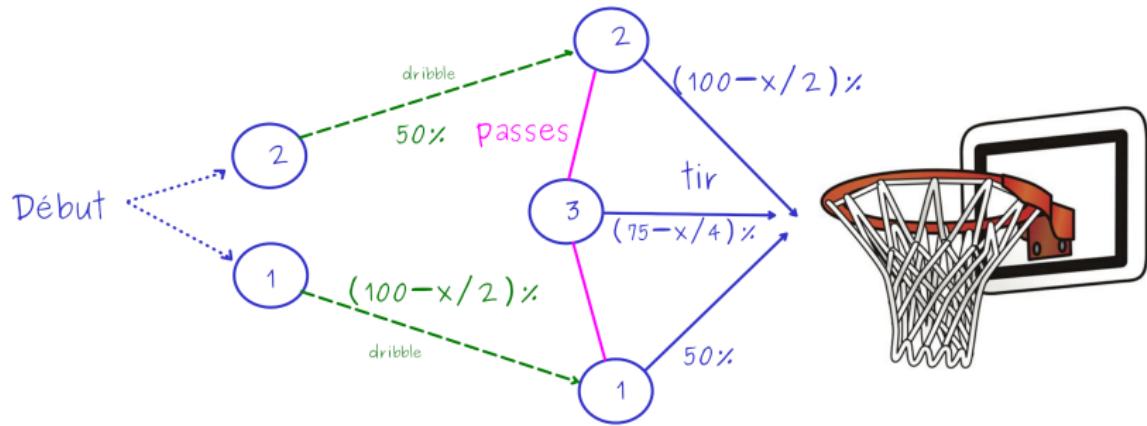
La défense s'adapte à un jeu donné. Chaque bon jeu perd de son efficacité s'il est utilisé fréquemment.

Quand un joueur est particulièrement fort, la stratégie à court terme est toujours de l'utiliser.

# Désavantage numérique et paradoxe de Braess

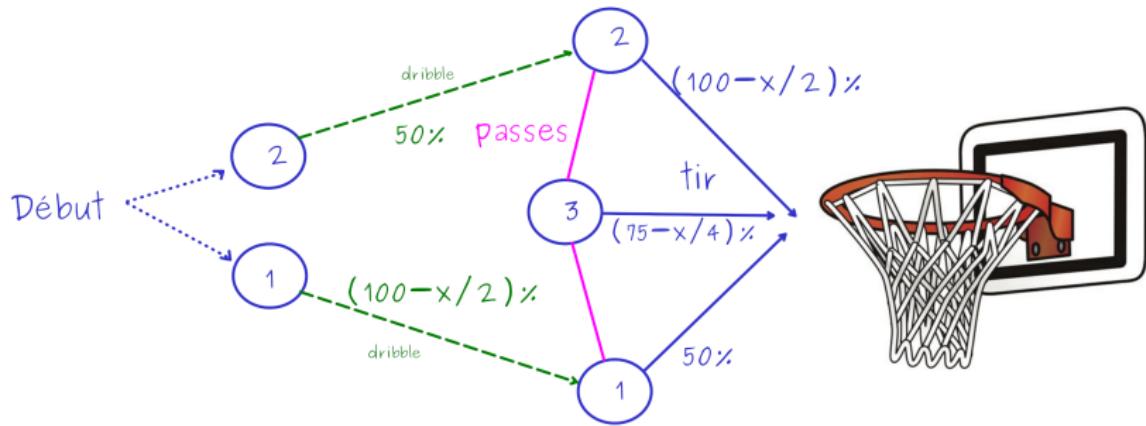
Une mise en situation...

1. Le meneur est un bon dribbleur, mais un mauvais tireur
2. L'arrière est un mauvais dribbleur, mais un bon tireur
3. Le pivot est un moyen tireur. Il est un excellent passeur



- ▶  $x$  est la fréquence (en pourcentage) d'utilisation d'un jeu
- ▶ Les passes sont toujours parfaites.

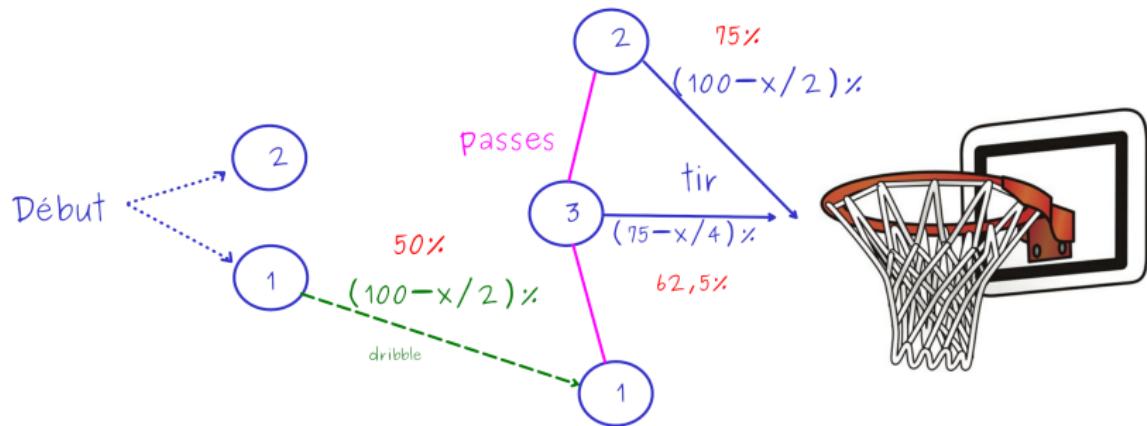
# Désavantage numérique et paradoxe de Braess



- ▶ Peu importe la stratégie déployée, chaque jeu a une probabilité de succès d'au moins 50%
- ▶ Il n'est donc jamais avantageux d'utiliser les stratégies qui ne fonctionnent que 50% du temps.

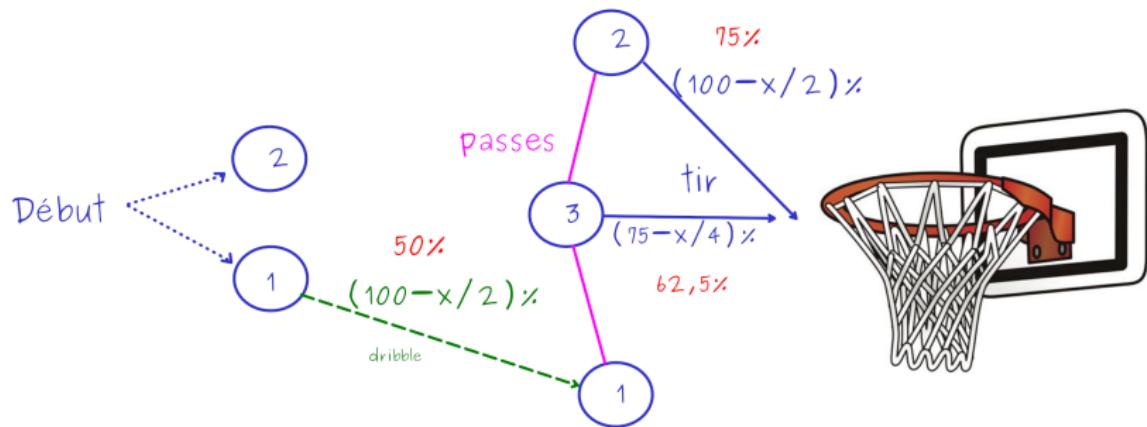
# Désavantage numérique et paradoxe de Braess

- Il n'est jamais avantageux d'utiliser les stratégies qui ne fonctionnent que 50% du temps.



# Désavantage numérique et paradoxe de Braess

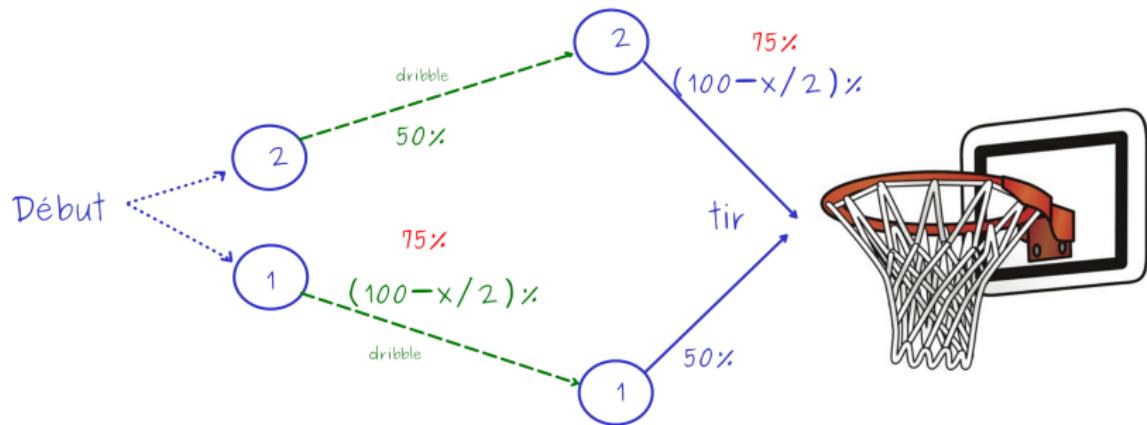
- Il n'est jamais avantageux d'utiliser les stratégies qui ne fonctionnent que 50% du temps.



- La stratégie optimale est d'utiliser l'arrière et le pivot 50% du temps chacun. On obtient alors un taux de succès de  $50\% \cdot 50\%(62,5\% + 75\%) = 34,4\%$ .

# Désavantage numérique et paradoxe de Braess

- ▶ Et si on supprime le pivot?

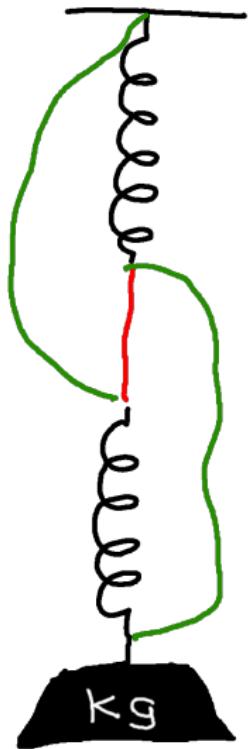


- ▶ La stratégie optimale est d'utiliser le meneur et l'arrière 50% du temps chacun. On obtient alors un taux de succès de  $50\% \cdot 50\%(75\% + 75\%) = 37,5\%$ .

# Une démonstration physique

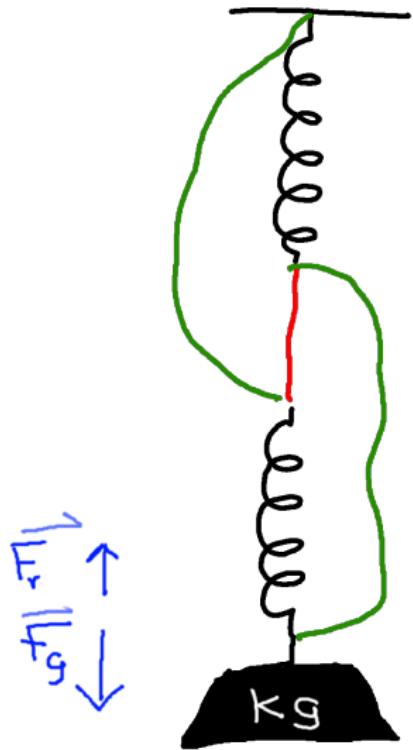
Pour les derniers sceptiques . . .

Comment ça marche?



Quelles sont les forces?

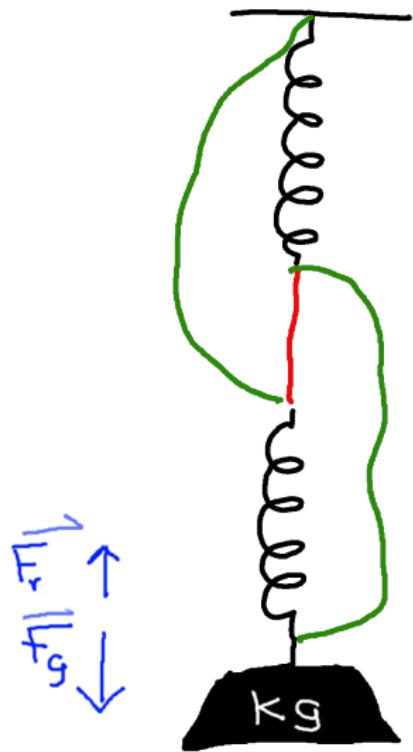
# Comment ça marche?



Quelles sont les forces?

- ▶ Gravité ( $\vec{F}_g$ )
- ▶ Force de rappel ( $\vec{F}_r$ )

# Comment ça marche?



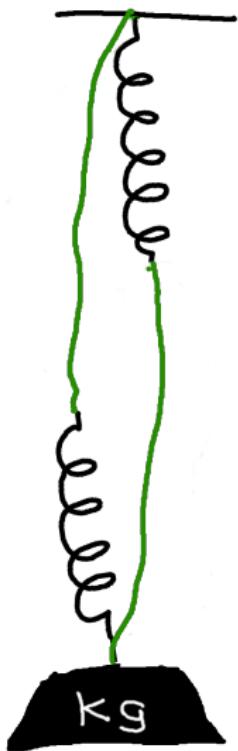
Quelles sont les forces?

- ▶ Gravité ( $\vec{F}_g$ )
- ▶ Force de rappel ( $\vec{F}_r$ )

À l'équilibre, la loi de Hooke dit que

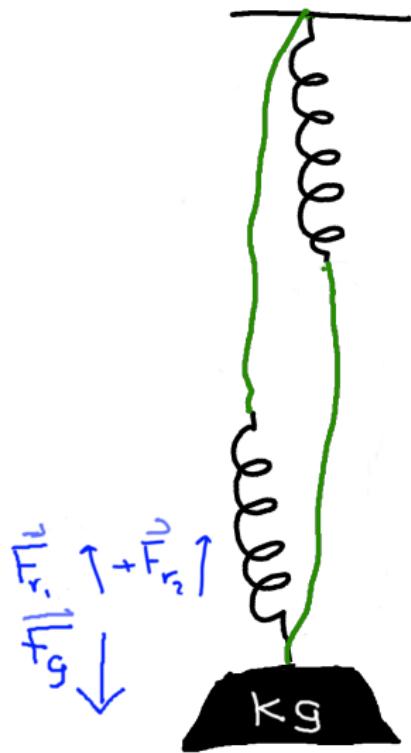
$$-\text{masse} \cdot 9.8 \text{m/s}^2 = -\vec{F}_g = \vec{F}_r = k \cdot \Delta x.$$

# Comment ça marche?



Quelles sont les forces?

# Comment ça marche?



La force de rappel est maintenant divisée en 2 :

$$\vec{F}_{r_1} = \vec{F}_{r_2} = \frac{-\vec{F}_g}{2}$$

et l'étirement des ressorts est aussi divisé par deux.

# Le paradoxe de Braess, ailleurs?

- ▶ Réseaux de communication
- ▶ Réseaux électriques
- ▶ Étude des populations éteintes et chaîne alimentaire