Notes du cours XIII (à compléter)

Mathématiques générales (MAT0339)

28 novembre 2018

Droites et plans

Position relative de deux droites, dans un espace de dimension 2.

Associer le nom, le symbole (s'il y a lieu), la définition et le dessin.

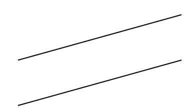
1. Parallèles
2. Perpendiculaires
3. Sécantes

$\perp$

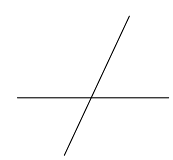
$//$

i. Droites dont l'intersection forment un angle droit.
ii. Droites qui se coupent en un point.
iii. Droites qui n'ont aucune intersection.

a.



b.



c.

Remarque 1. *Deux droites* ____________________ *sont aussi* ____________________.

Remarque 2. *On appelle aussi* ____________________ *deux droites qui sont parallèles et qui se coupent en une infinité de points. Hors, ces deux droites sont en fait la même droite.*

Les **relations entre les droites** correspondent aussi aux **relations entre les vecteurs** dont ces droites sont l'orientation.

Distance entre deux droites

Méthode pour trouver un vecteur perpendiculaire. Un vecteur (a, b) est perpendiculaire au vecteur (c, d) si ___________________.

Exemple 3. *Trouver un vecteur $\vec{u}$ parallèle à $\vec{v} = (4, 7)$.*

Définition 4. *La distance entre deux droites sécantes est ___________________.*

La distance entre deux droites parallèles est la ___________________ d'un _____________________________ compris entre les deux droites.

Pour la trouver, on prend deux droites D et E, puis :

1. On trouve un vecteur $\vec{u}$ dont l'orientation est celle de D (ou E, puisque les droites ont la même orientation).
2. On trouve un point a sur la droite D et un point b sur E.
3. On trouve le vecteur $\vec{v}$ de a à b.
4. Le ___________________ de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ donne l'aire du parallélogramme formé par ces vecteurs. La base est le vecteur $\vec{u}$.
5. La _________ est donnée par la formule ___________________.

Exemple 5. *Calculer la distance entre les droites D, dont l'équation est $y = x$, et E, donnée par $y = x + 2$.*

Distance d'un point à une droite

Définition 6. *La distance entre un point et une droite est la ___________________ d'un _____________________________ formé par un segment de la droite et un segment compris entre la droite et ___________________.*

Pour trouver la distance entre un point a et une droite D :

1. On trouve un vecteur $\vec{u}$ dont l'orientation est celle de D.
2. On trouve un point b sur la droite D et on calcule le vecteur $\vec{v}$ de a à b.
3. Le ___________________ de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ donne l'aire du parallélogramme formé par ces vecteurs. La base est le vecteur $\vec{u}$.
4. La _________ est donnée par la formule ___________________.

Exemple 7. *Calculer la distance entre la droite D dont l'équation est* $y = 2x - 3$ *et le point* $(5, 8)$.

Position relative de deux droites, dans un espace de dimension 3

Définition 8. *Dans un espace de dimension* 3*, deux droites peuvent être ni parallèles, ni sécantes. On dit alors qu'elles sont _________.*

Exemple 9. *Déterminer si les droites D et E ci-dessous sont parallèles, sécantes ou gauches.*

$$D = \{k(1,1,1),\ k \in \mathbb{R}\}, \qquad E = \{k(1,0,0) + (0,0,1),\ k \in \mathbb{R}\}.$$

Position relative de deux plans

Définition 10. *Un plan est déterminé par deux _____________________________ et _____________________________ et est constitué de tous les points a pour lesquels il existe k et l (réels) tels que _____________________________.*

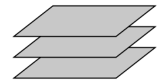
Associer la relation, la définition et le dessin.

1. Plans parallèles
2. Plans sécants

i. Plans qui n'ont aucun point en commun.

ii. Plans dont l'intersection est une droite.

a. 

b. 

Remarque 11. *Pour déterminer si deux plans sont parallèles, on utilisera leur vecteur normal, défini plus loin (Définition 15).*

Produit vectoriel et vecteur normal

Problème 12. *Étant donné deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ en dimension* 3 *qui ne sont pas parallèles, comment trouver un vecteur orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$?*

Par exemple, trouver un vecteur orthogonal à $(1,2,3)$ *et à* $(-3,1,5)$*, après avoir vérifié qu'ils ne sont pas parallèles.*

Définition 13. *Le produit vectoriel* ____________________ *de 2 vecteurs $\vec{u} = (a,b,c)$ et $\vec{v} = (d,e,f)$ est le vecteur $\vec{w}$ tel que*

avec $\vec{i} = (1,0,0)$, $\vec{j} = (0,1,0)$ *et* $\vec{k} = (0,0,1)$.

Exemple 14. *Le produit vectoriel de* $(1,2,3)$ *et de* $(-3,1,5)$ *est*

Définition 15. *Un vecteur normal à un plan est un vecteur orthogonal à tous les vecteurs de ce plan.*

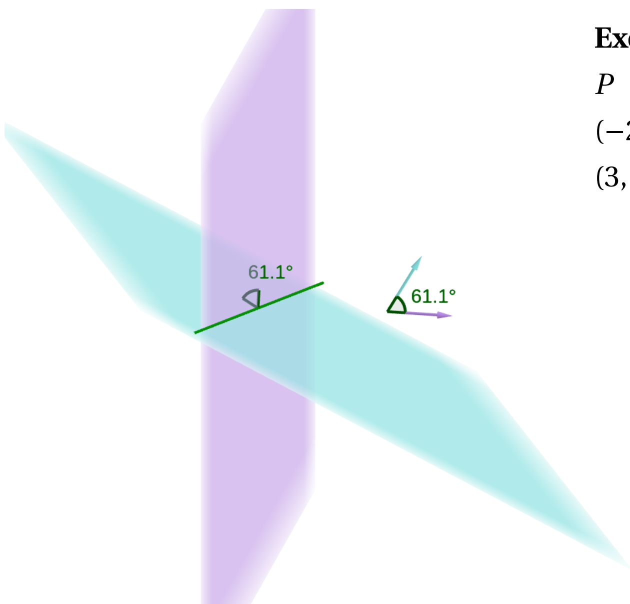
— *Il peut exister plusieurs vecteur normaux à un plan, mais leur* ________________ *est la même pour tous. Leur* ________________ *et leur* ________________ *changent.*

Le résultat du produit vectoriel $u \wedge v$ *est un vecteur normal du plan qui contient les vecteurs* ________________.

Proposition 16. *Deux plans sont* ________________ *s'ils ont les mêmes vecteurs normaux.*

Angle entre deux plans

Définition 17. *L'angle entre deux plans* P *et* Q *est l'angle* ________________________________.



Exemple 18. *Quel est l'angle entre les plans* P *et* Q*, si* P *contient les vecteurs* $(1,3,5)$ *et* $(-2,2,1)$ *et* Q *est déterminé par* $(0,0,1)$ *et* $(3,-4,6)$.