

# Série d'exercices XIII

Mathématiques générales (MAT0339)

1er décembre 2018

Cette feuille d'exercices devrait vous permettre de comprendre la matière du cours de cette semaine. À moins d'indication contraire, vous pouvez utiliser la calculatrice pour faire ces exercices.

## Géométrie vectorielle

1. Soit  $D$  la droite  $3x - 2y = 1$ .
  - Trouver un vecteur dans la direction de  $D$ .
  - Trouver un vecteur orthogonal à  $D$ .
  - Quelle est la distance de  $D$  au point  $(0, 4)$  ?
2. Pour chacune des droites suivantes, calculer la distance du point  $(3, -1)$  à la droite.
  - (a)  $C : 2x - y - 5 = 0$
  - (b)  $D : \frac{x+8}{4} = y + 1$
  - (c)  $E : x + 5y + 8 = 0$

3. Soit le plan d'équation

$$(x, y, z) = (4, -2, 3) + k(-7, 7, -4) + l(-3, 4, -4), \quad k, l \in \mathbb{R}.$$

- (a) Donner deux vecteurs du plan qui ne sont pas parallèles.
- (b) Donner un point du plan.
- (c) Pour chacune des données suivantes, dire si le sous-ensemble correspondant du plan est un point, une droite, un segment ou une partie de plan.

- i.  $k = 0$  et  $l = 1$
- iii.  $-1 \leq k \leq 1$  et  $l = 0$
- ii.  $k = 1$  et  $l \in \mathbb{R}$
- iv.  $0 \leq k \leq 2$  et  $0 \leq l \leq 1$

4. Soit  $P$  le plan d'équation  $2x - 3y + z = 5$ .

- (a) Donner trois points qui appartiennent au plan  $P$ .
- (b) Donner deux vecteurs de  $P$  qui ne sont pas parallèles.
- (c) Donner un vecteur orthogonal au plan  $P$ .
- (d) Quel est l'angle que  $P$  forme avec le plan qui contient les vecteurs  $(1, 3, 4)$  et  $(-1, 1, 0)$ ?

5. Quelle est la distance entre les plans parallèles  $P$  et  $Q$  définis par

$$P : x + 2y + 3z = 5 \quad \text{et} \quad Q : x + 2y + 3z = -1.$$

6. Vrai ou faux ?

- (a) Des plans parallèles à une même droite sont parallèles entre eux.
- (b) Étant donnés deux plans sécants, il existe une droite parallèle à ces deux plans.
- (c) Deux plans perpendiculaires à une même droite sont parallèles entre eux.
- (d) Deux plans perpendiculaires à un même plan sont parallèles entre eux.
- (e) Deux droites perpendiculaires à un même plan sont parallèles entre elles.
- (f) L'intersection de deux plans est un point.

## Règle de Cramer

7. Appliquer la règle de Cramer pour résoudre les systèmes d'équations suivants.

- (a)  $x + y = 1$  et  $x - y = -1$
- (b)  $5x - y = 1$  et  $x + 2y = 0$
- (c)  $3x + 6y = 8$  et  $-x - 2y = 7$
- (d)  $2x + 3y + z = -1$ ,  $3x - 2y + 4z = 0$  et  $3y - 2z = 2$
- (e)  $x + y - z = 0$ ,  $2x - y + z = 1$  et  $x + 3y + 2z = -1$ .

## Systèmes d'équations linéaires

8. Soit  $A$  une matrice qui a au moins quatre lignes. Parmi les opérations suivantes sur  $A$ , lesquelles sont élémentaires ou équivalentes à une séquence d'opérations élémentaires ?

(a)  $L_2 \leftarrow (3L_2 + 2L_4)$

(c)  $L_3 \leftarrow (L_1 - L_2)$

(b)  $L_3 \leftarrow \left(\frac{L_1 + L_2 + L_3}{3}\right)$

(d)  $L_4 \leftarrow 3L_1$

9. Aram et Nancy sont des collectionneurs de billes passionnés. Depuis leur enfance, ils sélectionnent les plus belles billes pour les joindre à leur collection respective. Ils ont cependant une manière un peu différente de les entreposer. Aram conserve ses billes dans des sacs pouvant en contenir 12, alors que Nancy utilise des sacs pouvant contenir 18 billes.

Les collections d'Aram et de Nancy réunies compte exactement 366 billes et le nombre de sacs de la collection d'Aram correspond au double du nombre de sacs de Nancy diminué de 1.

- (a) Décrire, en équations, le système d'équations linéaires qui permet de trouver le nombre de sacs de billes de chacun.
- (b) Donner la matrice augmentée de ce système.
- (c) Faites une suite d'opérations élémentaires de façons à trouver une matrice augmentée de la forme

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \end{array} \right)$$

avec  $a$  et  $b$  des nombres entiers.

- (d) Combien de sacs de billes possèdent-ils chacun ?
- (e) Combien de billes possède Nancy ?

10. Les systèmes suivants sont-ils équivalents ?

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 7 \end{array} \right) \quad \text{et} \quad \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 8 \end{array} \right)$$

Référence pour certains problèmes : Allô Prof, [alloprof.qc.ca](http://alloprof.qc.ca).