Série d'exercices XII

Mathématiques générales (MAT0339)

24 novembre 2018

Cette feuille d'exercices devrait vous permettre de comprendre la matière du cours de cette semaine. À moins d'indication contraire, vous pouvez utiliser la calculatrice pour faire ces exercices.

Applications du produit matriciel

1. Deux boulangeries se partagent la clientèle d'un village. Pour augmenter sa part de marché, actuellement à 30%, *La mie dorée* lance une grande campagne de publicité. L'autre boulangerie, *Les bons pains*, met aussi sur pied une campagne pour garder sa clientèle et aller chercher celle de sa rivale.

   Après un mois, la campagne de *La mie dorée* fonctionne très bien, puisqu'elle a récupéré 20% de la clientèle de sa compétitrice. En revanche, 10% des clients de *La mie dorée* ont préféré changer pour *Les bons pains*.

   (a) Remplir le tableau suivant explicitant les mouvements de clientèle d'une boulangerie à l'autre.

De \ vers	*La mie dorée*	*Les bons pains*
La mie dorée		
Les bons pains		

La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.1 & 0.9 \end{pmatrix}$$

regroupe cette information. Ainsi, a_{ij} représente la proportion de la clientèle de la boulangerie i (au début) qui achète son pain à la boulangerie j un mois plus tard. La matrice A est appelée la matrice de transition.

(b) Donner la matrice des mouvements sur deux mois et trois mois.

(c) Combien de temps est nécessaire pour que la part de marché de *La mie dorée* dépasse celle des *bons pains* ?

(d) Quelles sont les parts de marché après trois mois ?

(e) Expliquer pourquoi $A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

(f) Sans faire de calcul, trouver la valeur de $A^7\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

2. La matrice
$$A = \begin{pmatrix}1 & \sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & 1\end{pmatrix}$$
modifie le triangle T délimité par les sommets $(1,0)$, $(3,3)$ et $(-2,1)$.

(a) Quelle est l'aire du triangle T (avant modification) ?

(b) La matrice A permet de dessiner un nouveau triangle S. Les coordonnées des sommets (x,y) de S sont obtenus des sommets (u,v) de T par $A\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.

i. Sans calculer les coordonnées des points de S, quelle sera l'aire de S ?

ii. Calculer les coordonnées des points de S.

iii. Dessiner S et T sur le même plan cartésien.

iv. Est-ce que S et T sont semblables ? Justifier.

v. Décrire avec des mots ce que fait la matrice A.

Propriétés des opérations

3. Soit A et B des matrices de formats $m\times p$ et $p\times n$. Montrer que $(AB)^\top = B^\top A^\top$.

4. Les propriétés suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier. Si l'énoncé est faux, donner un contre-exemple. Pour l'exercice, A et B sont toujours des matrices, et k et l sont des scalaires. La matrice nulle $\mathbf{0}$ est la matrice qui ne contient que des zéros.

(a) Si A et B sont deux matrices de format $n \times n$ telles que $AB = \mathbf{0}$, alors $A = \mathbf{0}$ ou $B = \mathbf{0}$.

(b) $A + B = B + A$

(c) $AB = BA$

(d) $kA^\top = (\frac{1}{k}A)^\top$

(e) $(k + l)A = kA + lA$

(f) $k(A + B) = kA + B$

(g) $A - A = \mathbf{0}$

(h) $\Delta < \vec{u}, \vec{v} >= \Delta < \vec{u} + \vec{v}, \vec{v} + \vec{v} >$

(i) $\Delta < \vec{u}, \vec{u}+\vec{v}, \vec{w} >= \Delta < \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}+\vec{v} >$

(j) $\Delta < 2\vec{u}, 2\vec{v}, 2\vec{w} >= 2\Delta < \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} >$

(k) $3 \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3a & 3b \\ c & d \end{vmatrix}$

Si A et B sont de format 2×3,

(l) $A + B$ est de format 2×3

(m) AB est de format 2×3

(n) $A - B$ est de format 2×3

5. Le tableau ci-dessous présente la valeur des échanges de services entre trois compagnies, en milliers de dollars, sur un an.

Vente (milliers de $)

Vendu de \ à	Compagnie A	Compagnie B	Compagnie C
Compagnie A	5	25	30
Compagnie B	6	1	20
Compagnie C	50	35	20

La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 25 & 30 \\ 6 & 1 & 20 \\ 50 & 35 & 20 \end{pmatrix}$$

illustre cette information.

(a) Que signifie l'entrée a_{ij} de cette matrice ?

(b) Calculer le vecteur $\vec{v} = A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(c) Que signifient les nombres dans le vecteur $\vec{v}$?

(d) Quelle compagnie a réalisé le plus de ventes dans la dernière année ? On ne considère que les ventes faites aux trois compagnies.

(e) Calculer la matrice $B = A^\top$.

(f) Que signifie la matrice B ?

(g) Calculer le vecteur $\vec{u} = B \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(h) Donner une interprétation du vecteur $\vec{u}$.

6. Que doit être le vecteur $\vec{v}$ pour que

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

7. Donner les matrices A qui satisfont

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 17 & 3 \\ 12 & 8 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 17 & 3 \\ 12 & 8 \end{pmatrix}$

(c) $A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

8. Une matrice carrée A de format 2×2 est dite *inversible* s'il existe une matrice B de même format telle que $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Justifier.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

9. Pour les quatre matrices du numéro précédent, calculer leur déterminant. Pouvez-vous établir une corrélation entre le déterminant et le fait qu'une matrice soit inversible ?

Distance d'un point à une droite

10. Considérons la droite $\mathcal{D}$ d'équation $3y = 4x - 2$.

(a) Donner un vecteur dont l'orientation est celle de $\mathcal{D}$.

(b) Donner un point P sur la droite $\mathcal{D}$.

(c) Quel est le vecteur de P à $Q = (3, -2)$?

(d) Trouver une façon de calculer la distance de $\mathcal{D}$ à Q. *La distance est la mesure la plus courte entre un point de $\mathcal{D}$ et le point Q.*