Seri bahan kuliah Algeo #9

Vektor di Ruang Euclidean

(bagian 1)

Bahan kuliah IF2123 Aljabar Linier dan Geometri

Program Studi Teknik Informatika

STEI-ITB

Definisi Vektor

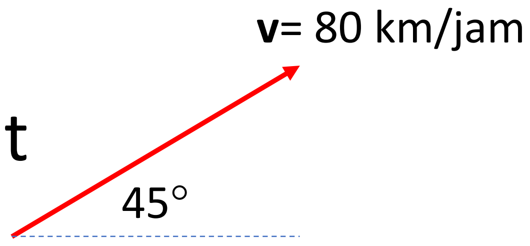
- Kuantitas fisik dapat direpresentasikan dalam dua jenis: skalar dan vektor

- Skalar: nilai numerik yang menyatakan besaran kuantitas fisik tersebut

  Contoh: temperatur 15° C, laju kendaraan 75 km/jam, panjang 2,5 m

- Vektor: kuantitas fisik yang memiliki besar dan arah

  Contoh: kecepatan (**v**) mobil 80 km/jam ke arah timur laut



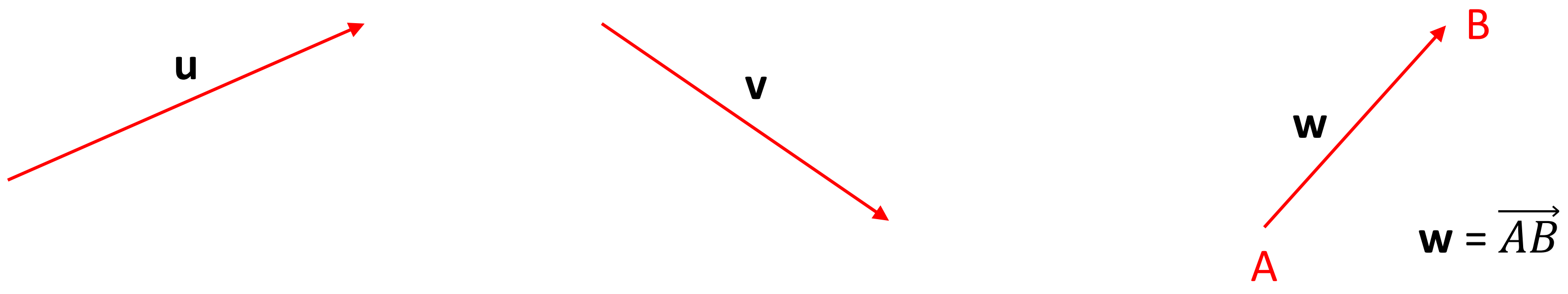
Notasi vektor

- Vektor dilambangkan dengan huruf-huruf kecil (dicetak tebal) atau memakai tanda panah (jika berupa tulisan tangan)

  Contoh, **u**, **v**, **w**, … atau $\overrightarrow{u}, \vec{v}, \overrightarrow{w}$, …

  a, **b**, **c**, …

- Secara geometri, vektor di ruang dwimatra (2D) dinyatakan sebagai garis berarah

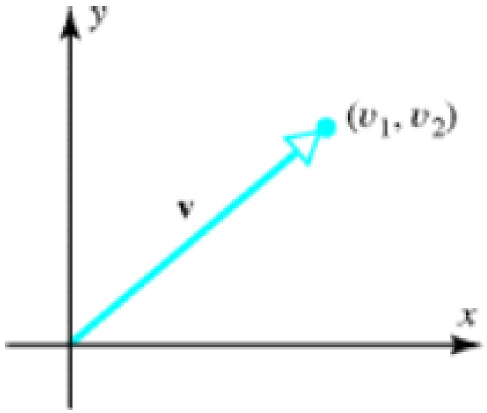


Ruang Vektor

- Ruang tempat vektor didefinisikan
- Disebut juga ruang Euclidean
- R^2, R^3, R^n

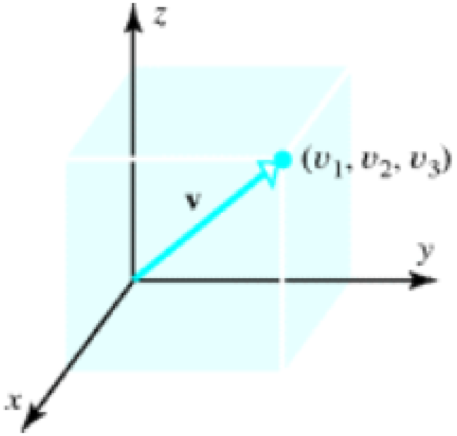
Vektor di R^2

$\mathbf{v}$ = (v_1, v_2) atau $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$



Vektor di R^3

$\mathbf{v}$ = (v_1, v_2, v_3) atau $\mathbf{v}$ = $\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$



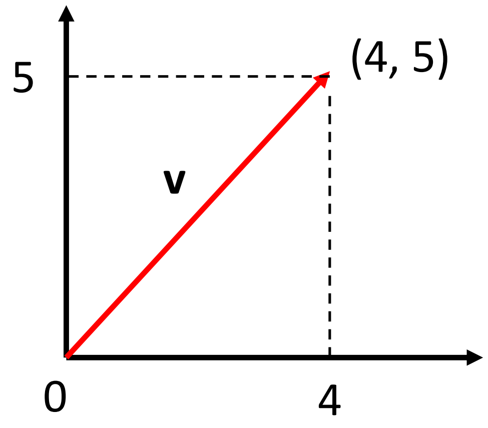
Vektor di R^n:

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \text{ atau } \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

(tidak ada gambaran geometri vektor di R^n)

- Semua vektor yang ditulis sebagai $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, atau $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ berawal dari **titik asal** O.

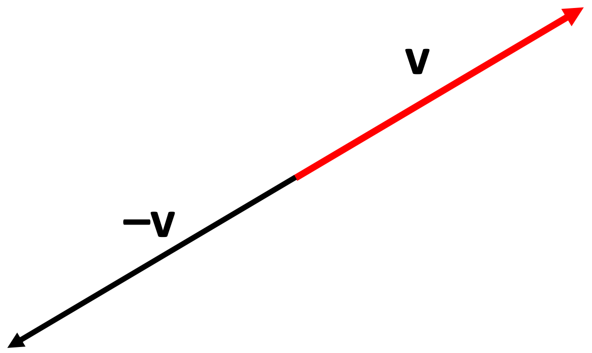
- Titik asal vektor di R^2 adalah (0, 0)
- Titik asal vektor di R^3 adakah (0, 0, 0)
- Titik asal vector di R^n adalah (0, 0, …, 0)



v = (4, 5)

- Vektor nol adalah vektor yang semua komponennya 0
  - Vektor nol dilambangkan dengan **0**
  - Vektor 0 di R^2: $\mathbf{0} = (0, 0)$
  - Vektor 0 di R^3: $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$
  - Vektor 0 di R^n: $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$

- Negatif dari vektor **v** dilambangkan dengan **–v**



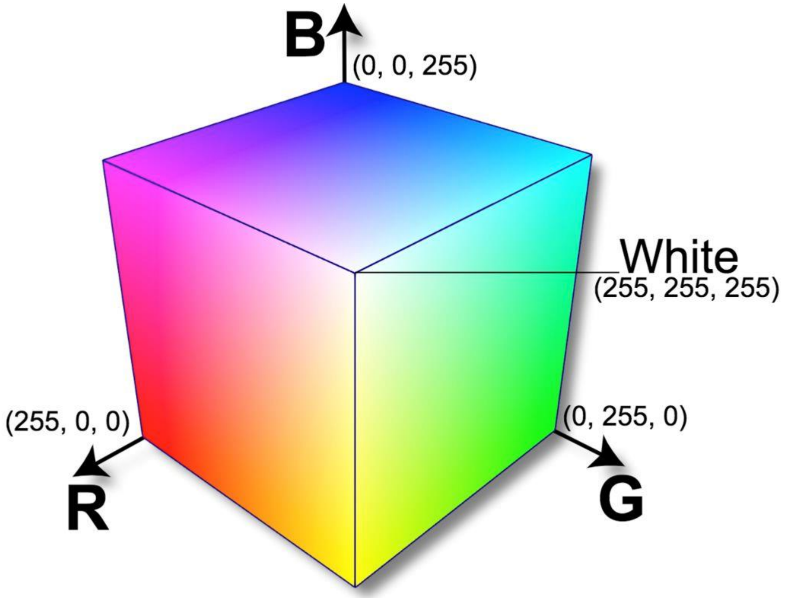
Contoh-contoh vektor:

(i) $\mathbf{u} = (4, 5)$ → vektor di R^2

(ii) $\mathbf{v} = (-2, 3, 10)$ → vektor di R^3

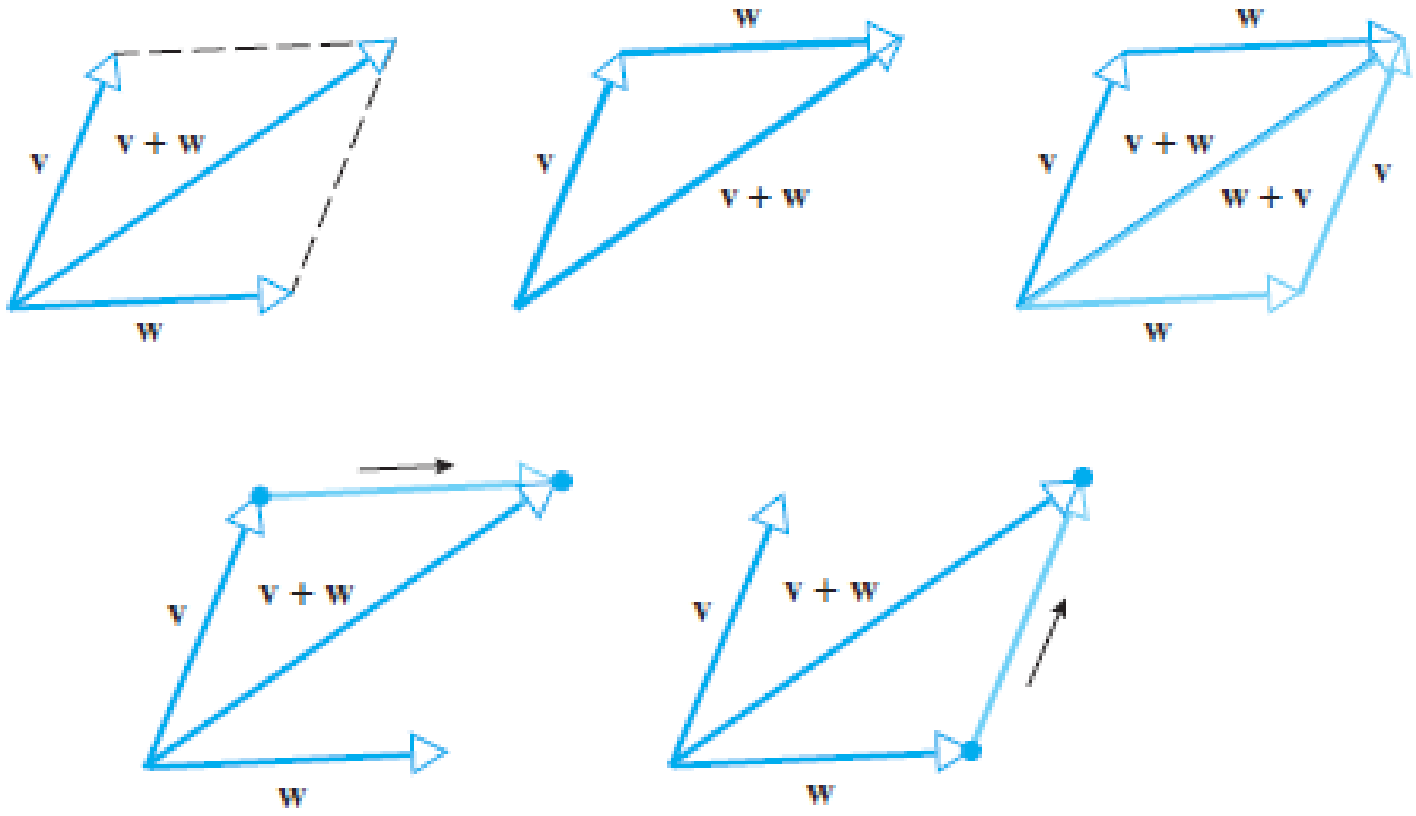
(iii) $\mathbf{w} = (1, -5, 0, 7, 8)$ → vector di R^5

(iv) $\mathbf{c} = (r, g, b)$ → warna di dalam model RGB (red-green-blue)



Penjumlahan dua vektor

- Menggunakan kaidah parallelogram atau kaidah segitiga



- Jika $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ dan $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$

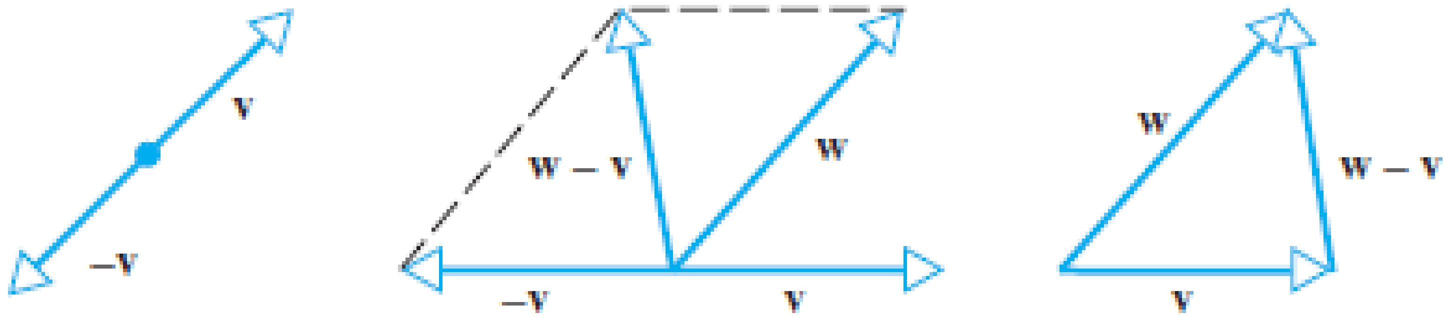
  maka $\mathbf{v} + \mathbf{w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, \ldots, v_n + w_n)$

- **Contoh 1:** Misalkan $\mathbf{v} = (3, -1, 4)$ dan $\mathbf{w} = (4, 0, 8)$ maka

$$v + w = (3 + 4, -1 + 0, 4 + 8) = (7, -1, 12)$$

Pengurangan dua vektor

$$\mathbf{w} - \mathbf{v} = \mathbf{w} + (-\mathbf{v})$$



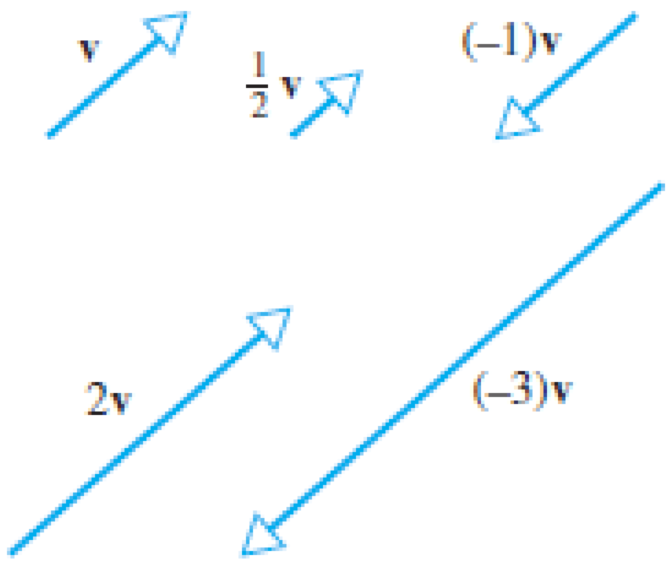
- Jika $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ dan $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$
  maka $\mathbf{v} - \mathbf{w} = (v_1 - w_1, v_2 - w_2, \ldots, v_n - w_n)$

- **Contoh 2:** Misalkan $\mathbf{v} = (3, -1\ , 4)$ dan $\mathbf{w} = (4, 0, 8)$ maka

$$\mathbf{v} - \mathbf{w} = (3 - 4, -1 - 0, 4 - 8) = (-1, -1\ , -4)$$

Perkalian vektor dengan skalar

k**v** = vektor yang panjangnya |k| kali Panjang **v**

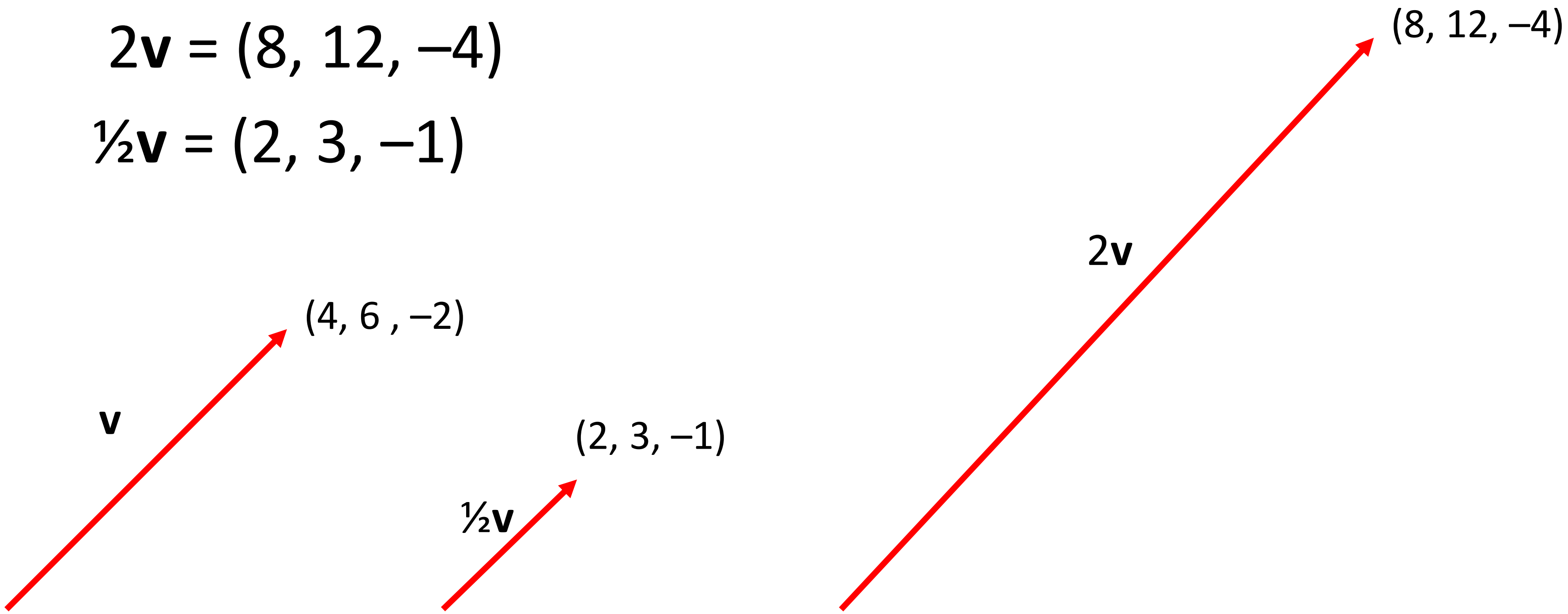


- Jika $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ maka $k\mathbf{v} = (kv_1, kv_2, \ldots, kv_n)$

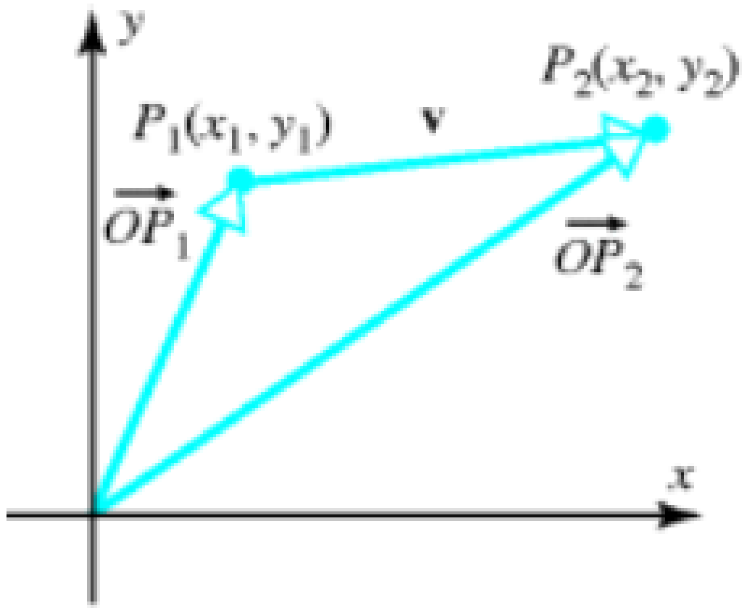
- **Contoh 3:** Misalkan $\mathbf{v} = (4, 6, -2)$ maka

$$2\mathbf{v} = (8, 12, -4)$$

$$\tfrac{1}{2}\mathbf{v} = (2, 3, -1)$$



Vektor yang tidak berawal dari titik asal



Di R^2 : Misalkan $P_1(x_1, y_1)$ dan $P_2(x_2, y_2)$, maka

$$\begin{aligned}\mathbf{v} = \overrightarrow{P_1P_2} &= \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} \\ &= (x_2, y_2) - (x_1, y_1) \\ &= (x_2 - x_1, y_2 - y_1)\end{aligned}$$

Di R^3 : Misalkan $P_1(x_1, y_1, z_1)$ dan $P_2(x_2, y_2, z_2)$, maka

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

Contoh 3: Misalkan $P_1(2, -1, 4)$ dan $P_2(7, 5, -8)$, maka

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) = (7 - 2, 5 - (-1), -8 - 4) = (5, 6, -12)$$

Norma sebuah vektor

- Panjang (atau *magnitude*) sebuah vektor **v** dinamakan **norma** (*norm*) **v**.
- Norma vektor **v** dilambangkan dengan $\|\mathbf{v}\|$.
- Norma sebuah vektor dinamakan juga **norma Euclidean**.

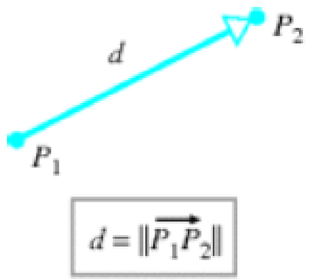
- Norma vektor **v** = (v_1, v_2) di R^2 adalah $\|\mathbf{v}\|=\sqrt{v_1^2 + v_2^2}$

- Norma vektor **v** = (v_1, v_2, v_3) di R^3adalah $\|\mathbf{v}\|=\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$

- Norma vektor **v** = (v_1, v_2, …, v_n) di R^n adalah $\|\mathbf{v}\|=\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2}$

- Jika $P_1(x_1, y_1)$ dan $P_2(x_2, y_2)$ adalah dua titik di R^2 maka jarak (*d*) kedua titik tersebut adalah norma vektor $\overrightarrow{P_1P_2}$:

$$d = \|\overrightarrow{P_1P_2}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



- Jika $P_1(x_1, y_1, z_1)$ dan $P_2(x_2, y_2, z_2)$ adalah dua titik di R^3 maka jarak (*d*) kedua titik tersebut adalah norma vektor $\overrightarrow{P_1P_2}$:

$$d = \|\overrightarrow{P_1P_2}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

- Jika $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ dan $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ adalah dua titik di R^n maka jarak (*d*) kedua titik tersebut adalah $d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$:

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \ldots + (u_n - v_n)^2}$$

Contoh 4:

(i) Misalkan **v** = (6, –2 , 3), maka norma vektor **v** adalah

$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{6^2 + (-2)^2 + (3)^2} = \sqrt{36 + 4 + 9} = \sqrt{49} = 7$

(ii) Jika P_1(2, –1 , –5) dan P_2(4, –3 , 1) maka jarak kedua titik adalah

$d = \|\overrightarrow{P_1P_2}\| = \sqrt{(4-2)^2 + (-3-(-1))^2 + (1-(-5))^2}$

$= \sqrt{4 + 4 + 36} = \sqrt{44} = 2\sqrt{11}$

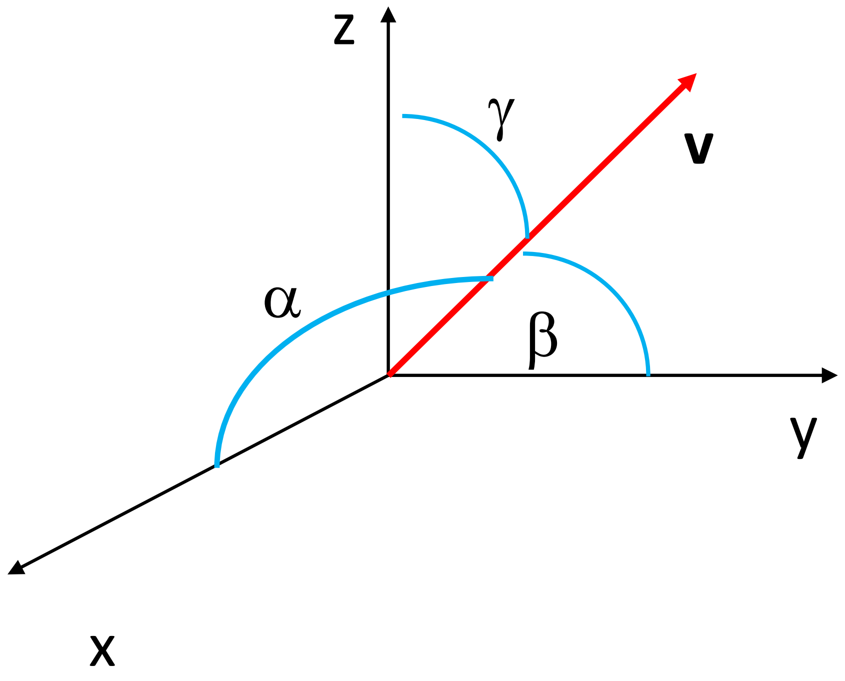
(iii) Misalkan **u** = (1, 3, –2, 7) dan **v** = (0, 7, 2, 2) adalah dua titik di R^4

maka jarak antara **u** dan **v** adalah:

$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{(1-0)^2 + (3-7)^2 + (-2-2)^2 + (7-2)^2} = \sqrt{58}$

Arah sebuah vektor

- Misalkan **v** = (v_1, v_2, v_3) adalah vector di R^3 maka arah vektor **v** adalah



$$\cos \alpha = \frac{v_1}{\|\mathbf{v}\|}$$

$$\cos \beta = \frac{v_2}{\|\mathbf{v}\|}$$

$$\cos \gamma = \frac{v_3}{\|\mathbf{v}\|}$$

Bersambung ke bagian 2

Vektor di Ruang Euclidean
(bagian 2)

Bahan kuliah IF2123 Aljabar Linier dan Geometri

Program Studi Teknik Informatika
STEI-ITB

Sifat-sifat aljabar vektor

THEOREM 3.1.1 *If* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, *and* $\mathbf{w}$ *are vectors in* R^n, *and if* k *and* m *are scalars, then:*

(*a*) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$

(*b*) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$

(*c*) $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$

(*d*) $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$

(*e*) $k(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = k\mathbf{u} + k\mathbf{v}$

(*f*) $(k + m)\mathbf{u} = k\mathbf{u} + m\mathbf{u}$

(*g*) $k(m\mathbf{u}) = (km)\mathbf{u}$

(*h*) $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

Kombinasi linier vektor

- Sebuah vektor dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari vektor-vektor lain.

  Contoh: $\mathbf{u} = 3\mathbf{v} + 2\mathbf{w} - 5\mathbf{x}$; $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, dan $\mathbf{x}$ adalah vektor-vektor di R^3

- Secara umum, jika $\mathbf{w}$ adalah vektor di R^n, maka $\mathbf{w}$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari vektor-vektor $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, ..., $\mathbf{v_r}$ jika $\mathbf{w}$ dapat dinyatakan sebagai

$$\boxed{\mathbf{w} = k_1\mathbf{v_1} + k_2\mathbf{v_2} + \ldots + k_r\mathbf{v_r}}$$

yang dalam hal ini $k_1, k_2, \ldots, k_r$ adalah skalar.

Contoh 1: Tentukan semua k_1, k_2, dan k_3 sehingga

$$k_1(1, 2, 3) + k_2(2, -3, 1) + k_3(3, 2, -1) = (6, 14, -2)$$

Penyelesaian:

$$k_1\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} + k_2\begin{bmatrix}2\\-3\\1\end{bmatrix} + k_3\begin{bmatrix}3\\2\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6\\14\\-2\end{bmatrix}$$

Diperoleh sistem persamaan linier (SPL):

$$\begin{aligned} k_1 + 2k_2 + 3k_3 &= 6 \\ 2k_1 - 3k_2 + 2k_3 &= 14 \\ 3k_1 + k_2 - k_3 &= -2 \end{aligned}$$

Selesaikan SPL di atas dengan metode eliminasi Gauss, diperoleh:

$$k_1 = 1, \quad k_2 = -2, \quad k_3 = 3$$

Vektor satuan

- Vektor satuan (*unit vector*) adalah vektor dengan panjang = 1

- Dilambangkan dengan **u**
- Jika **v** adalah vektor di R^n dan $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ maka $\boxed{\mathbf{u} = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v}}$ atau $\boxed{\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}}$
- Vektor **u** memilik arah yang sama dengan **v**
- Proses “membagi” sebuah vektor **v** dengan panjangnya dinamakan **menormalisasi vektor**.

  (sebenarnya bukan membagi, karena vektor tidak bisa dibagi)

Contoh 2: Misalkan **v** = (6, –2 , 3), maka norma vektor **v** adalah

$\|\mathbf{v}\|$=$\sqrt{6^2 + (-2)^2 + (3)^2}$= $\sqrt{36 + 4 + 9}$ = $\sqrt{49}$ = 7 dan vektor satuannya:

$$\mathbf{u} = \frac{1}{7}\ (6, -2\ , 3) = (\frac{6}{7}\ , -\frac{2}{7}, \frac{3}{7})$$

Periksa bahwa panjang **u** adalah satu,

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{(6/7)^2 + (-2/7)^2 + (3/7)^2}$$

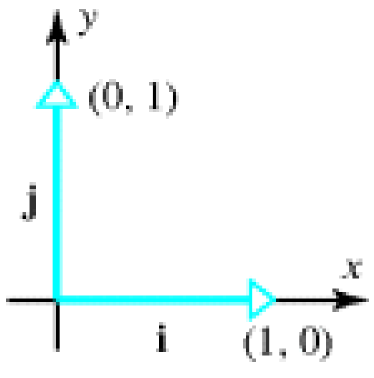
$$= \sqrt{\frac{36}{49} + \frac{4}{49} + \frac{9}{49}}$$

$$= \sqrt{\frac{49}{49}} = 1$$

Vektor satuan standard

- Vektor satuan standard di R^2 adalah **i** dan **j**:

  i = (1, 0) dan **j** = (0, 1)



(a)

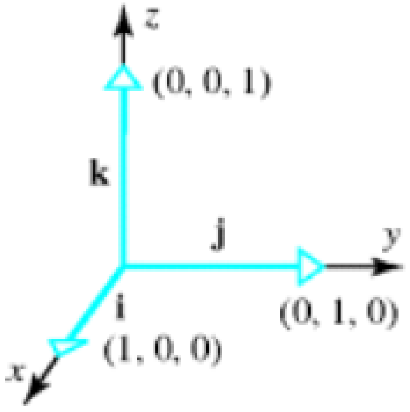
- Setiap vektor **v** = (v_1, v_2) di R^2 dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier

  v = v_1**i** + v_2**j**

- Vektor satuan standard di R^3 adalah **i**, **j**, dan **k**:

  i = (1, 0, 0), **j** = (0, 1, 0), dan **k** = (0, 0, 1),

- Setiap vektor **v** = (v_1, v_2, v_3) di R^3 dapat dinyatakan sebagai kombinasi liner **v** = v_1**i** + v_2**j** + v_3**k**



(b)

- Vektor satuan standard di R^n adalah $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$, …, $\mathbf{e_n}$,

  $\mathbf{e_1} = (1, 0, 0, \ldots, 0)$, $\mathbf{e_2} = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, …, dan $\mathbf{e_n} = (0, 0, 0, \ldots, 1)$,

- Setiap vektor $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ di R^n dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e_1} + v_2\mathbf{e_2} + \ldots + v_n\mathbf{e_n}$

Contoh 3:

(i) $\mathbf{v} = (8, -4) = 8\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$

(ii) $\mathbf{v} = (6, -2, 3) = 6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

(ii) $\mathbf{v} = (4, 6, 10, -1) = 4\mathbf{e_1} + 6\mathbf{e_2} + 10\mathbf{e_3} - \mathbf{e_4}$

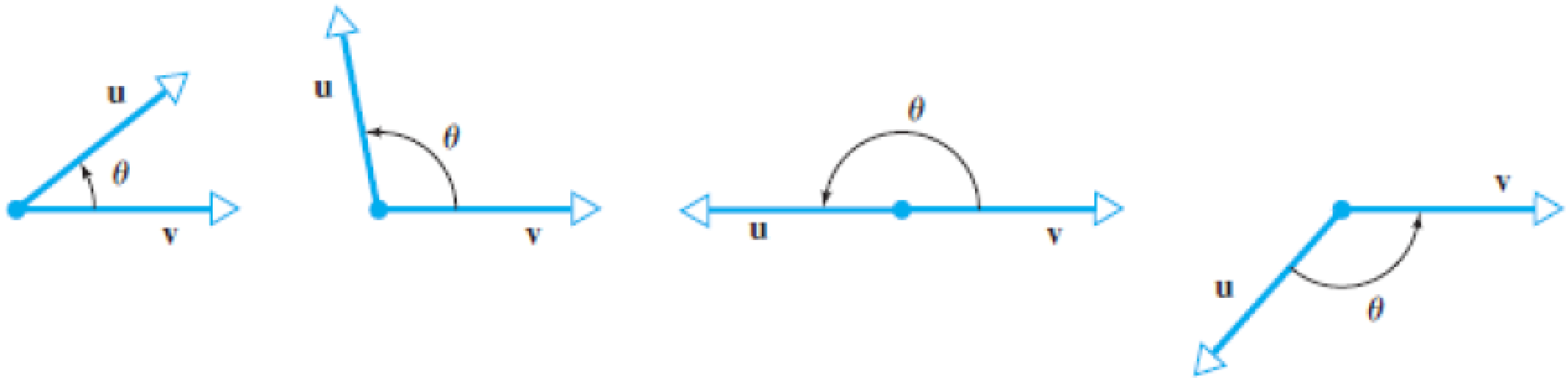
Perkalian titik (*dot product*)

- Jika **u** dan **v** adalah vektor tidak nol di R^2 atau R^3, maka perkalian titik (*dot product*), atau disebut juga *Euclidean inner product*, **u** dan **v** adalah

$$\boxed{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \theta}$$

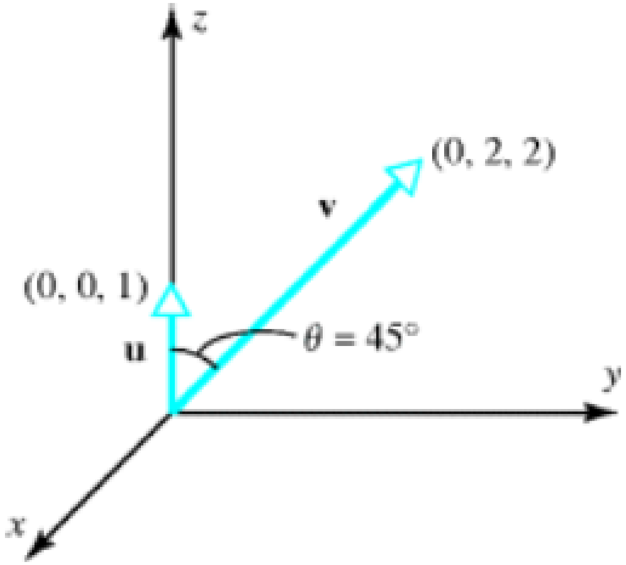
yang dalam hal ini θ adalah sudut yang dibentuk oleh **u** dan **v**.

- Jika **u** = 0 atau **v** = 0, maka $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$



Contoh 4: Misalkan **u** = (0, 0, 1) dan **v** = (0, 2, 2), sudut yang dibentuk oleh **u** dan **v** dapat ditentukan dari gambar adalah 45°.

Maka dapat dihitung,



$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\theta$$

$$= (\sqrt{0^2+0^2+1^2})(\sqrt{0^2+2^2+2^2})\cos 45°$$

$$= (\sqrt{1})(\sqrt{8})\ \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$= \frac{\sqrt{16}}{2}$$

$$= 2$$

- Jika **u** = (u_1, u_2, u_3) dan **v** = (v_1, v_2, v_3) adalah dua vektor di R^3 maka dapat dibuktikan (bukti tidak diperlihatkan di sini) bahwa

$$\boxed{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3}$$

- Secara umum, jika **u** = (u_1, u_2, …, u_n) dan **v** = (v_1, v_2, …, v_n) adalah dua buah vektor di R^n maka

$$\boxed{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \ldots + u_nv_n}$$

Contoh 5: Tinjau kembali Contoh 4, **u** = (0, 0, 1) dan **v** = (0, 2, 2), maka

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (0)(0) + (0)(2) + (1)(2) = 0 + 0 + 2 = 2$$

sama dengan hasil pada Contoh 4.

Contoh 6: Misalkan **u** = (–1, 3, 5, 7) dan **v** = (–3, –4, 1, 0), maka

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (-1)(-3) + (3)(-4) + (5)(1) + (7)(0)$$

$= 3 - 12 + 5 + 0$

$= -4$

- Dari rumus perkalian titik $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \cos\theta$ dapat ditulis menjadi

$$\boxed{\cos\theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}}$$

dan karena $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \ldots + u_nv_n$, maka

$$\boxed{\cos\theta = \frac{u_1v_1 + u_2v_2 + \ldots + unvn}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}}$$

Contoh 6: Carilah sudut antara vektor **u** = (2, –1, 1) dan **v** = (1, 1, 2).

Penyelesaian:

$$\cos\theta = \frac{u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}$$

$$= \frac{(2)(1)+(-1)(1)+(1)(2)}{\sqrt{(2)^2+(-1)^2+(1)^2}\cdot\sqrt{(1)^2+(1)^2+(2)^2}}$$

$$= \frac{2-1+2}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}}$$

$$= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\theta = \text{arc cos}\,\frac{1}{2} = 60^\circ$$

Sifat-sifat perkalian titik

THEOREM 3.2.2 *If* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, *and* $\mathbf{w}$ *are vectors in* R^n, *and if* k *is a scalar, then:*

(*a*) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ **[Symmetry property]**

(*b*) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$ **[Distributive property]**

(*c*) $k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = (k\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}$ **[Homogeneity property]**

(*d*) $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \geq 0$ *and* $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0$ *if and only if* $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ **[Positivity property]**

THEOREM 3.2.3 *If* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, *and* $\mathbf{w}$ *are vectors in* R^n, *and if* k *is a scalar, then:*

(*a*) $\mathbf{0} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{0} = 0$

(*b*) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$

(*c*) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$

(*d*) $(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$

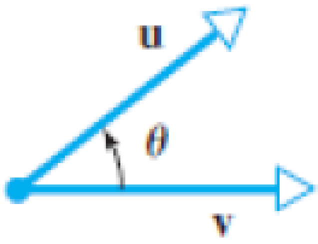
(*e*) $k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot (k\mathbf{v})$

Teorema: Misalkan **u** dan **v** adalah vector-vector di R^2 atau R^3. Kondisi di bawah ini berlaku

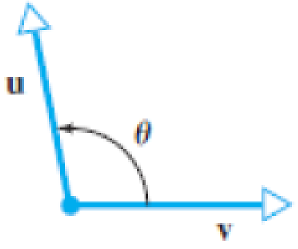
(1) $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|^2$ dan $\|\mathbf{v}\| = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})^{1/2}$

(2) Jika **u** dan **v** adalah vektor tidak-nol dan θ adalah sudut antara kedua vector, maka

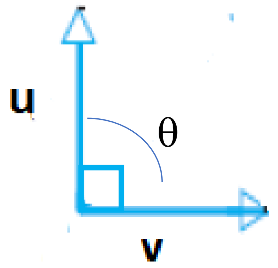
- θ adalah sudut lancip ($0 < \theta < 90°$) jika dan hanya jika $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} > 0$
- θ adalah sudut tumpul ($90 < \theta < 180°$) jika dan hanya jika $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} < 0$
- $\theta = 90°$ jika dan hanya jika $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ ($\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$ atau ortogonal)



sudut lancip



sudut tumpul



ortogonal

Contoh 7:

(i) Misalkan **u** = (6, 3, 3) dan **v** = (4, 0, –6), maka

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (6)(4) + (3)(0) + (3)(-6)$$

$$= 24 + 0 - 18$$

$$= 6 > 0$$

Jadi, **u** dan **v** membentuk sudut lancip

(ii) Misalkan **u** = (4, 1, 6) dan **v** = (–3, 0, 2), maka

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (4)(-3) + (1)(0) + (6)(2)$$

$$= -12 + 0 + 12$$

$$= 0$$

Jadi, **u** dan **v** saling tegak lurus (ortogonal)

Ketidaksamaan Cauchy-Schwarz

THEOREM 3.2.4 Cauchy–Schwarz Inequality

If $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ *and* $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ *are vectors in* R^n, *then*

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \tag{22}$$

or in terms of components

$$|u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n| \leq (u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2)^{1/2} (v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2)^{1/2} \tag{23}$$

Hermann Amandus Schwarz (1843-1921)

Viktor Yakovlevich Bunyakovsky (1804-1889)

Dot Products and Matrices

Table 1

Form	Dot Product	Example	
u a column matrix and **v** a column matrix	$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{u}^T\mathbf{v} = \mathbf{v}^T\mathbf{u}$	$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$ $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\mathbf{u}^T\mathbf{v} = [1 \quad -3 \quad 5]\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = -7$ $\mathbf{v}^T\mathbf{u} = [5 \quad 4 \quad 0]\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix} = -7$
u a row matrix and **v** a column matrix	$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{u}\mathbf{v} = \mathbf{v}^T\mathbf{u}^T$	$\mathbf{u} = [1 \quad -3 \quad 5]$ $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\mathbf{u}\mathbf{v} = [1 \quad -3 \quad 5]\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = -7$ $\mathbf{v}^T\mathbf{u}^T = [5 \quad 4 \quad 0]\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix} = -7$
u a column matrix and **v** a row matrix	$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{v}\mathbf{u} = \mathbf{u}^T\mathbf{v}^T$	$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$ $\mathbf{v} = [5 \quad 4 \quad 0]$	$\mathbf{v}\mathbf{u} = [5 \quad 4 \quad 0]\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix} = -7$ $\mathbf{u}^T\mathbf{v}^T = [1 \quad -3 \quad 5]\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = -7$
u a row matrix and **v** a row matrix	$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{u}\mathbf{v}^T = \mathbf{v}\mathbf{u}^T$	$\mathbf{u} = [1 \quad -3 \quad 5]$ $\mathbf{v} = [5 \quad 4 \quad 0]$	$\mathbf{u}\mathbf{v}^T = [1 \quad -3 \quad 5]\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = -7$ $\mathbf{v}\mathbf{u}^T = [5 \quad 4 \quad 0]\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix} = -7$

Ortogonal dan ortonormal

- Dua buah vektor tak-nol **u** dan **v** di R^n dikatakan **ortogonal** atau saling tegak lurus jika $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$,

- Vektor nol selalu ortogonal dengan *setiap* vektor di R^n

- Himpunan vektor di R^n disebut **himpunan ortogonal** jika setiap pasang vektor di dalam himpunan tersebut ortogonal.

- Himpunan ortogonal vektor-vektor satuan dinamakan **himpunan ortonormal**.

Contoh 8:

(a) Himpunan vektor {$\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, $\mathbf{v_3}$} dengan $\mathbf{v_1}$ = (–2, 1, 1), $\mathbf{v_2}$ = (1, 0, 2), dan $\mathbf{v_3}$ = (–2, –5, 1) membentuk himpunan orthogonal karena

$$\mathbf{v_1} \cdot \mathbf{v_2} = (-2)(1) + (1)(0) + (1)(2) = -2 + 0 + 2 = 0$$

$$\mathbf{v_1} \cdot \mathbf{v_3} = (-2)(-2) + (1)(-5) + (1)(1) = -4 - 5 + 1 = 0$$

$$\mathbf{v_2} \cdot \mathbf{v_3} = (1)(-2) + (0)(-5) + (2)(1) = -2 + 0 + 2 = 0$$

(ii) Himpunan vektor {$\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, $\mathbf{v_3}$} dengan $\mathbf{v_1}$ = (–3, 4, –1), $\mathbf{v_2}$ = (1, 2, 2), dan $\mathbf{v_3}$ = (4, –3, 0) bukan himpunan orthogonal karena

$$\mathbf{v_1} \cdot \mathbf{v_2} = (-3)(1) + (4)(2) + (-1)(2) = -3 + 8 - 2 = 3 \neq 0$$

(cukup ditunjukkan satu saja perkalian titik dua vector yang tidak menghasilkan nol untuk menyatakan bukan himpunan ortoginal)

Contoh 9: Himpunan vektor satuan {**i**, **j**, **k**} di R^3 adalah himpunan orthogonal sekaligus himpunan ortonormal, karena

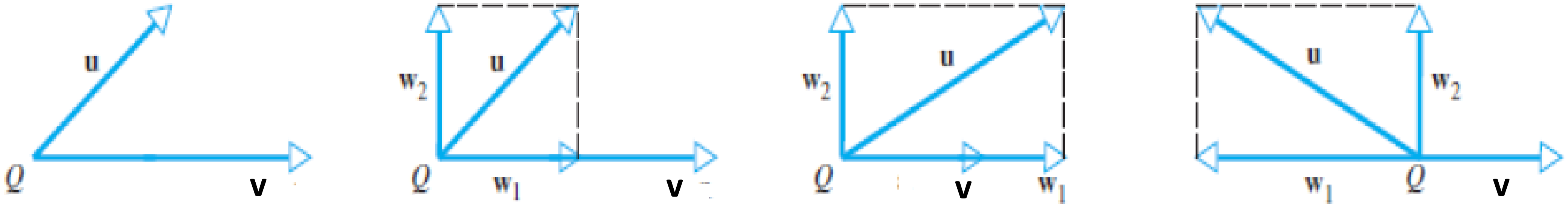
$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = (1, 0, 0) \cdot (0, 1, 0) = (1)(0) + (0)(1) + (0)(0) = 0$$

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = (1, 0, 0) \cdot (0, 0, 1) = (1)(0) + (0)(0) + (0)(1) = 0$$

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = (0, 1, 0) \cdot (0, 0, 1) = (0)(0) + (1)(0) + (0)(1) = 0$$

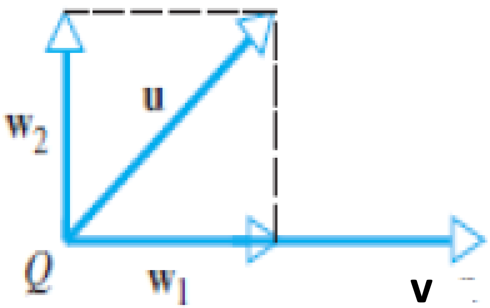
Proyeksi Ortogonal

- Jika **u** dan **v** adalah dua vektor di R^n dan **v** $\neq 0$, maka **u** dapat dinyatakan sebagai **u** = $\mathbf{w_1} + \mathbf{w_2}$, yang dalam hal ini $\mathbf{w_1}$ adalah proyeksi **u** pada **v** dan $\mathbf{w_2}$ adalah komponen dari **u** yang orthogonal pada **v**.



Bagaimana cara menentukan $\mathbf{w_1}$ dan $\mathbf{w_2}$?

- Tinjau gambar ini:



$\mathbf{w_1}$ = proyeksi **u** pada **v**

= perkalian skalar k dengan **v**

= $k\mathbf{v}$

dan

$\mathbf{w_2}$ = komponen dari **u** yang orthogonal pada **v**.

maka

$$\mathbf{u} = \mathbf{w_1} + \mathbf{w_2} = k\mathbf{v} + \mathbf{w_2}$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (k\mathbf{v} + \mathbf{w_2}) \cdot \mathbf{v}$$

$$= k\,\|\mathbf{v}\|^2 + \mathbf{w_2} \cdot \mathbf{v}$$

$$= k\,\|\mathbf{v}\|^2 \quad (\mathbf{w_2} \cdot \mathbf{v} = 0 \text{ sebab } \mathbf{w_2} \perp \mathbf{v}) \rightarrow k = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2}$$

sehingga

$$\boxed{\mathbf{w_1} = k\,\mathbf{v} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2} \cdot \mathbf{v}}$$

dan

$$\boxed{\mathbf{w_2} = \mathbf{u} - \mathbf{w_1} = \mathbf{u} - k\mathbf{v} = \mathbf{u} - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2} \cdot \mathbf{v}}$$

Contoh 10: Misalkan **u** = (2, –1, 3) dan **v** = (4, –1, 2), tentukan proyeksi orthogonal **u** pada **v** dan komponen **u** yang orthogonal dengan **v**.

Penyelesaian:

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (2)(4) + (-1)(-1) + (3)(2) = 15$

$\|\mathbf{v}\|^2 = (\sqrt{4^2 + (-1)^2 + (2)^2})^2 = (4)^2 + (-1)^2 + (2)^2 = 16 + 1 + 2 = 21$

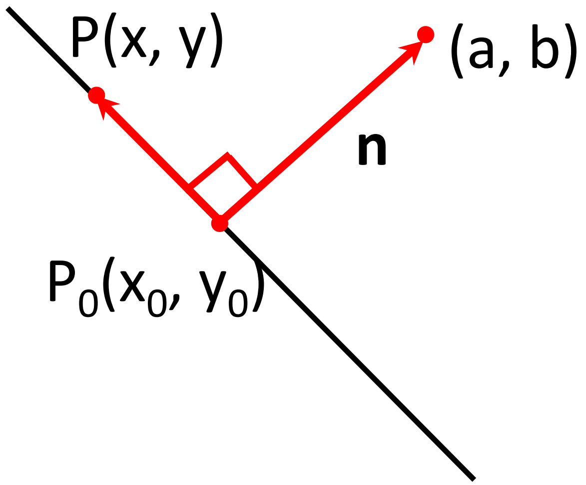
maka

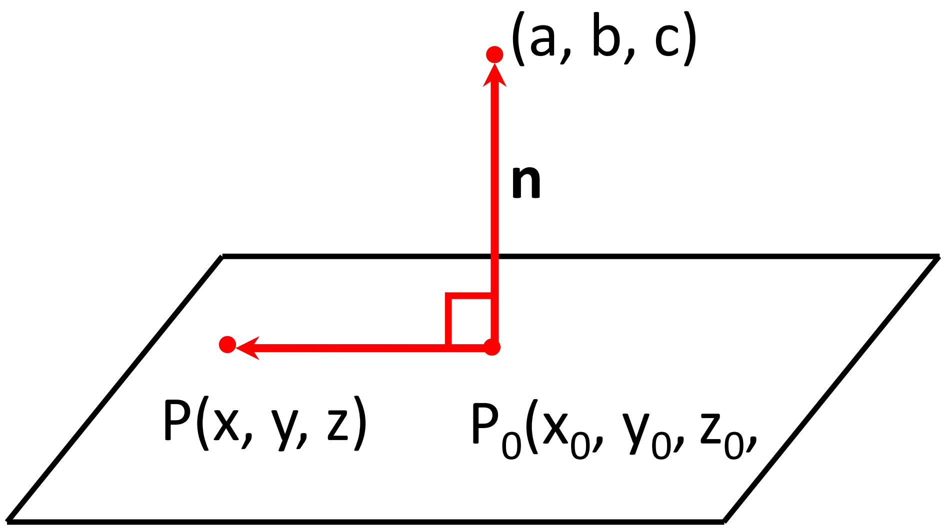
$\mathbf{w_1} = \dfrac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2} \cdot \mathbf{v} = \dfrac{15}{21}(4, -1, 2) = (20/7, -5/7, 10/7)$

$\mathbf{w_2} = \mathbf{u} - \mathbf{w_1} = (2, -1, 3) - (20/7, -5/7, 10/7) = (-6/7, -2/7, 11/7)$

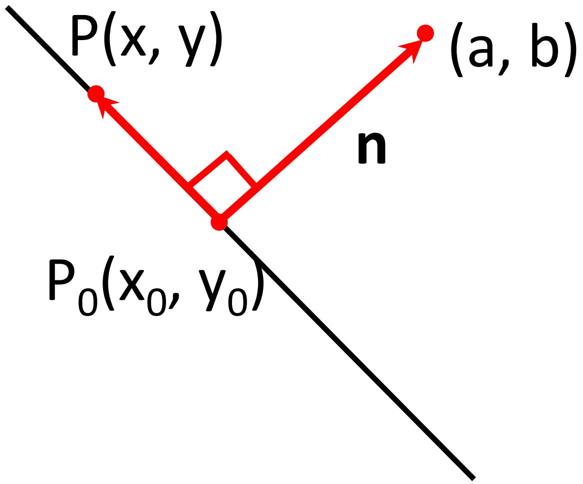
Vektor Normal

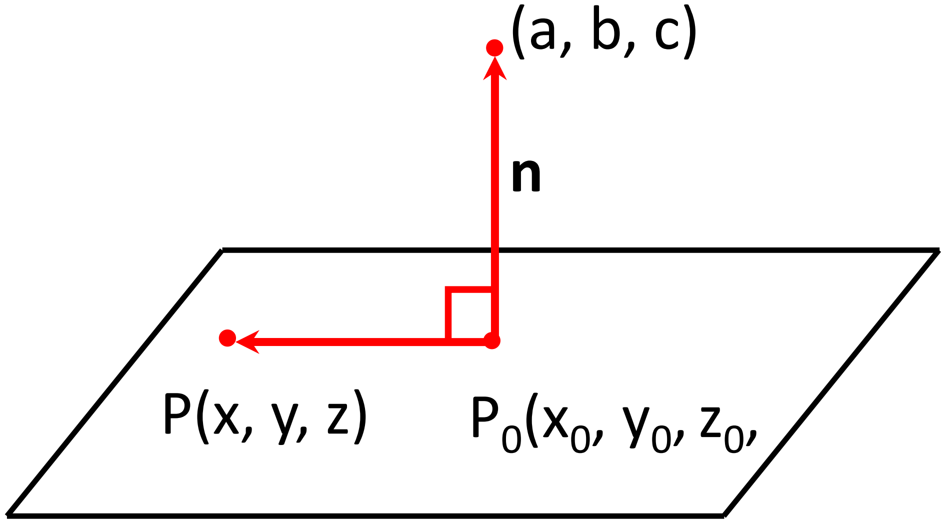
- Vektor normal (atau **normal** saja) adalah vector yang tegak lurus dengan sebuah garis atau sebuah bidang





n = vektor normal = normal





$\mathbf{n} = (a, b)$

$\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0, y - y_0)$

n dan $\overrightarrow{P_0P}$ orthogonal, sehingga

$\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$

$$\boxed{a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0}$$

$\mathbf{n} = (a, b, c)$

$\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$

n dan $\overrightarrow{P_0P}$ orthogonal, sehingga

$\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$

$$\boxed{a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0}$$

Contoh 11:

(i) Persamaan $7(x - 1) + 2(y + 3) = 0$ menyatakan persamaan garis lurus yang melalui titik $(1, -3)$ dengan normal $\mathbf{n} = (7, 2)$.

(ii) (i) Persamaan $2(x - 3) - 5(y - 6) + 7z = 0$ menyatakan persamaan bidang yang melalui titik $(3, 6, 0)$ dengan normal $\mathbf{n} = (2, -5, 7)$.

Contoh 12: Carilah persamaan bidang yang melalui titik $P(2, 6, 1)$ dan tegak lurus dengan $\mathbf{n} = (1, 4, 2)$.

<u>Penyelesaian</u>: $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$

$$1(x - 2) + 4(y - 6) + 2(z - 1) = 0$$

$$x - 2 + 4y - 24 + 2z - 2 = 0$$

$$x + 4y + 2z - 28 = 0$$

- Bentuk umum persamaan garis adalah ax + by + c = 0 dengan normal **n** = (a, b)

- Bentuk umum persamaan bidang adalah ax + by + cz + d = 0 dengan normal **n** = (a, b, c)

Contoh 13: Carilah persamaan bidang yang melalui titik (3, 2, 1), (2, 1, –1), dan (–1, 3, 2).

Penyelesaian:

Persamaan bidang: $ax + by + cz + d = 0$

(3, 2, 1) → $3a + 2b + c + d = 0$

(2, 1, –1) → $2a + b - c + d = 0$

(–1, 3, 2) → $-a + 3b + 2c + d = 0$

SPL:

$$
\begin{aligned}
3a + 2b + c + d &= 0 \\
2a + b - c + d &= 0 \\
-a + 3b + 2c + d &= 0
\end{aligned}
$$

Selesaikan SPL dengan metode eliminasi Gauss untuk menemukan nilai a, b, c, dan d (solusi berbentuk parametrik, karena banyak sekali bidang yang melalui ketiga titik tersebut)

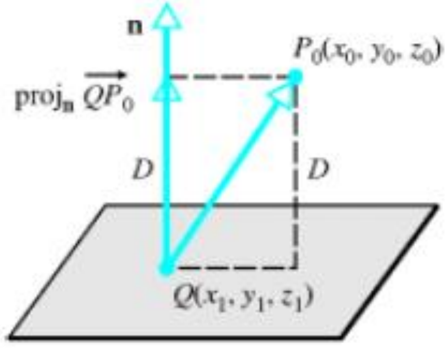
Jarak sebuah titik ke garis dan ke bidang

- Di R^2, jarak antara titik $P_0(x_0, y_0)$ dengan garis $ax + by + c = 0$ adalah

$$\boxed{d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

- Di R^3, jarak antara titik $P_0(x_0, y_0, z_0)$ dengan bidang $ax + by + cz + d = 0$ adalah

$$\boxed{d = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$$



Distance from P_0 to plane.

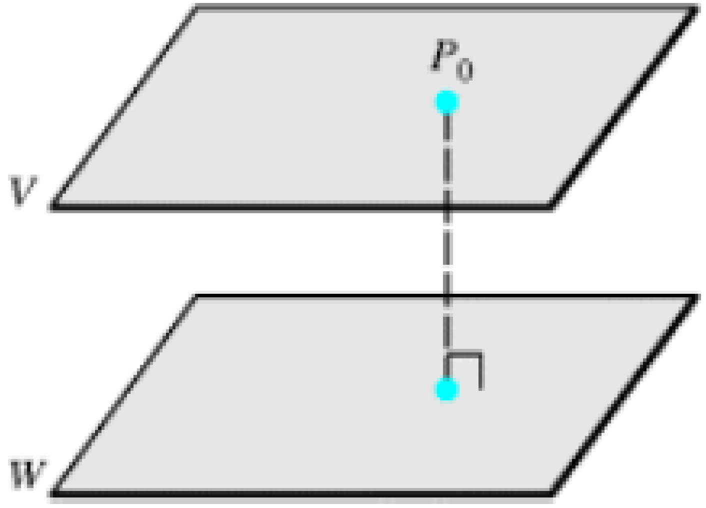
Contoh 14: Tentukan jarak dari titik (1, –4, –3) ke bidang 2x – 3y + 6z = -1

Penyelesaian:

2x – 3y + 6z = –1 → 2x – 3y + 6z + 1 = 0 →a = 2, b = –3, c = 6, d = 1

$$d = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|2(1)+(-3)(-4)+6(-3)+1|}{\sqrt{2^2+(-3)^2+6^2}} = \frac{3}{7}$$

Jarak antara dua bidang paralel



Jarak antara bidang V dan bidang W = jarak dari P_0 ke W

Contoh 15: Tentukan jarak antara bidang x + 2y – 2z = 3 dan bidang 2x + 4y – 4z = 7

Penyelesaian:

Bidang x + 2y – 2z – 3 = 0 → **n** = (1, 2, –2)

Bidang 2x + 4y – 4z – 7 = 0 → **n** = (2, 4, –4)

Pilih sebuah titik di bidang x + 2y – 2z – 3 = 0:

ambil y = 0, z = 0, maka x = 3 – 2y + 2z = 3 – 2(0) + 2(0) = 3

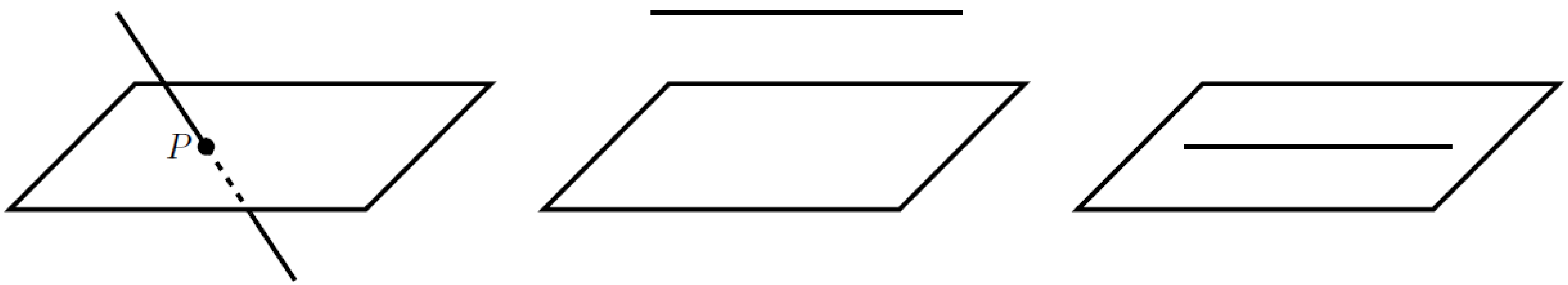
diperoleh titik (3, 0, 0)

Hitung jarak dari (3, 0, 0) ke bidang 2x + 4y – 4z – 7 = 0 sbb:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|2(3) + 4(0) + (-4)(0) - 7|}{\sqrt{2^2 + 4^2 + (-4)^2}} = \frac{1}{6}$$

Perpotongan garis dengan bidang

- Kedudukan sebuah garis dengan bidang dapat memiliki tiga kemungkinan:
  1. Garis memotong bidang di sebuah titik
  2. Garis sejajar dengan bidang
  3. Garis terletak pada bidang



Sumber: MIT Open CourseWare. http://ocw.mit.edu

Contoh 16: Diketahui bidang P dengan persamaan $2x + y - 4z = 4$.

(a) Tentukan semua titik potong P dengan garis $x = t$, $y = 2 + 3t$, $z = t$

(b) Tentukan semua titik potong P dengan garis $x = 1 + t$, $y = 4 + 2t$, $z = t$

(c) Tentukan semua titik potong P dengan garis $x = t$, $y = 4 + 2t$, $z = t$

<u>Penyelesaian</u>: Ket: Persamaan garis dalam bentuk parametrik

a) Sulihkan x, y, dan z ke dalam persamaan bidang:

$$2(t) + (2 + 3t) - 4(t) = 4 \rightarrow t = 2$$

Gunakan t untuk menemukan $(x, y, z) = (2, 8, 2)$ → berpotongan pada satu titik

b) Sulihkan x, y, dan z ke dalam persamaan bidang:

$2(1 + t) + (4 + 2t) - 4(t) = 4 \rightarrow 6 = 4 \rightarrow$ tidak ada nilai t yang memenuhi persamaan ini

→ garis sejajar dengan bidang

c) Sulihkan x, y, dan z ke dalam persamaan bidang:

$2(t) + (4 + 2t) - 4(t) = 4 \rightarrow 4 = 4 \rightarrow$ semua nilai t memenuhi persamaan ini

→ garis terletak pada bidang

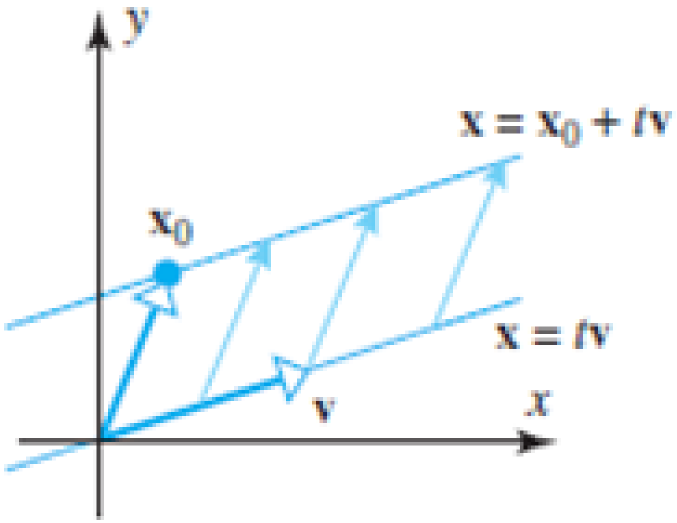
Vektor dan persamaan parametrik garis di R^2 dan R^3

- Misalkan L adalah garis di R^2 atau R^3 yang mengandung titik $\mathbf{x_0}$ dan paralel dengan vektor $\mathbf{v}$. Persamaan garis yang melalui $\mathbf{x_0}$ dan parallel dengan $\mathbf{v}$ adalah

$$\mathbf{x} = \mathbf{x_0} + t\mathbf{v}$$

- Jika $\mathbf{x_0} = \mathbf{0}$, maka persamaan garis yang melalui titik asal menjadi

$$\mathbf{x} = t\mathbf{v}$$



Contoh 17: Tentukan persamaan vektor dan persamaan parametrik garis yang melalui titik asal dan parallel dengan vector **v** = (–2, 3).

<u>Penyelesaian</u>:

(i) Persaman vector: $\mathbf{x} = t\mathbf{v}$

Misalkan **x** = (x, y), maka (x, y) = t(–2, 3).

(ii) Persamaan parametrik garis: $x = -2t$ dan $y = 3t$

Contoh 18: Tentukan persamaan vektor dan persamaan parametrik garis yang melalui titik $P_0(1, 2, -3)$ dan paralel dengan vector **v** = (4, –5, 1).

<u>Penyelesaian</u>:

(i) Persaman vector: $\mathbf{x} = \mathbf{x_0} + t\mathbf{v}$

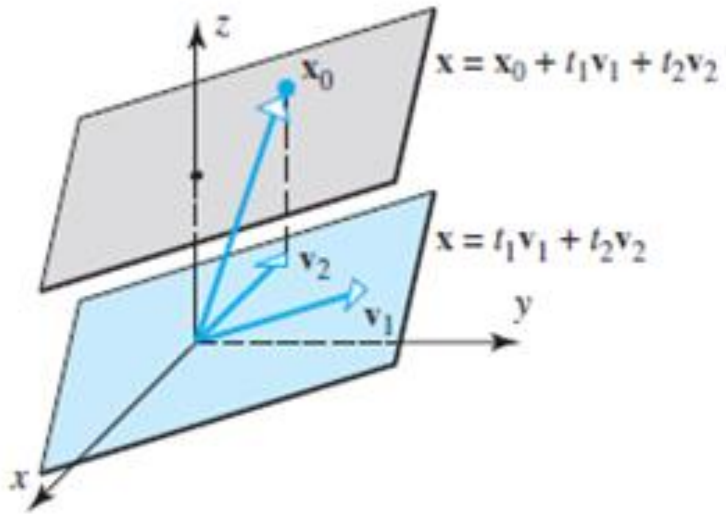
Misalkan **x** = (x, y, z), maka (x, y, z) = (1, 2, –3) + t (4, –5, 1)

(ii) Persamaan parametrik garis: $x = 1 + 4t$, $y = 2 - 5t$, $z = -3 + t$

Vektor dan persamaan parametrik bidang di R^3

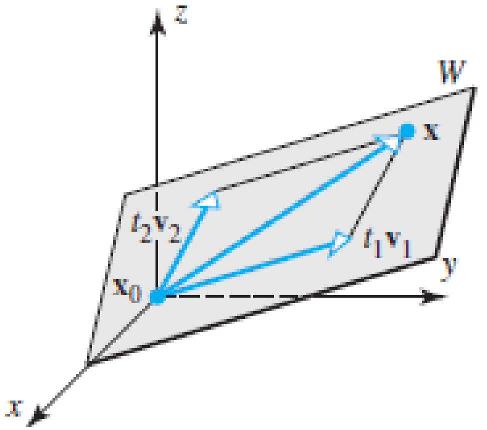
- Misalkan W adalah bidang di R^3 yang mengandung titik $\mathbf{x_0}$ dan paralel dengan vektor $\mathbf{v_1}$ dan $\mathbf{v_2}$. Persamaan bidang yang melalui $\mathbf{x_0}$ dan parallel dengan $\mathbf{v_1}$ dan $\mathbf{v_2}$ adalah

$$\mathbf{x} = \mathbf{x_0} + t_1\mathbf{v_1} + t_2\mathbf{v_2}$$



- Jika $\mathbf{x_0} = \mathbf{0}$, maka persamaan bidang yang melalui titik asal menjadi

$$\mathbf{x} = t_1\mathbf{v_1} + t_2\mathbf{v_2}$$



Contoh 19: Tentukan persamaan garis (dalam notasi vector) dan persamaan parametrik garis yang melalui titik asal dan parallel dengan vector **v** = (5, –3, 6, 1).

Penyelesaian:

(i) Persaman garis (dalam notasi vektor): $\mathbf{x} = t\mathbf{v}$

Misalkan $\mathbf{x}$ = (w, x, y, z), maka (w, x, y, z) = t(5, –3, 6, 1).

(ii) Persamaan parametrik garis: w = 5t, x = –3t, y = 6t, z = t

Contoh 20: Tentukan persamaan bidang (dalam notasi vektor) dan persamaan parametrik bidang yang melalui titik $\mathbf{x_0}$(2, –1, 0, 3) dan paralel dengan vector $\mathbf{v_1}$= (1, 5, 2, –4) dan $\mathbf{v_2}$ = (0, 7, –8, 6).

Penyelesaian:

(i) Persaman bidang (dalam notasi vektor): $\mathbf{x} = \mathbf{x_0} + t_1\mathbf{v_1} + t_2\mathbf{v_2}$

Misalkan $\mathbf{x}$ = (w, x, y, z), maka (w, x, y, z) = (2, –1, 0, 3) + t_1(1, 5, 2, –4) + t_2(0, 7, –8, 6)

(ii) Persamaan parametrik bidang: w = 2 + t_1, x = –1 + 5t_1 + 7t_2 , y = 2t_1 – 8t_2, z = 3 – 4t_1 + 6t_2

Latihan soal (diambil dari soal UTS)

1. Diketahui tiga buah vektor $\mathbf{u}$=(2,-6,2), $\mathbf{v}$=(0,4,-2), $\mathbf{w}$=(2,2,-4).

   a). Perlihatkan apakah {$\mathbf{u}$,$\mathbf{v}$ dan $\mathbf{w}$} merupakan himpunan orthogonal

   b). Tentukan panjang vektor proyeksi orthogonal $\mathbf{u}$ pada vektor $\mathbf{w}$

2. Diberikan 4 buah titik di ruang yakni, A(0,1,-1); B(1,1,2); C(2,2,1), P(3,3,3)

   a). Tentukan persamaan bidang yang melewati titik A,B, dan C dalam bentuk vektor.

   b). Pertanyaan sama dengan a) dengan menggunakan normal bidang

   c). Hitungalah jarak titik P ke bidang tersebut.

   d). Hitunglah luas segitiga ABC.

3. Diberikan dua persamaan bidang sebagai berikut:

$$\begin{aligned} 3x - 4y + 2z &= 1 \\ x - 2y + 2z &= 1 \end{aligned}$$

a) Periksa apakah dua bidang tersebut parallel atau berpotongan, berikan alasan. *(nilai 10)*

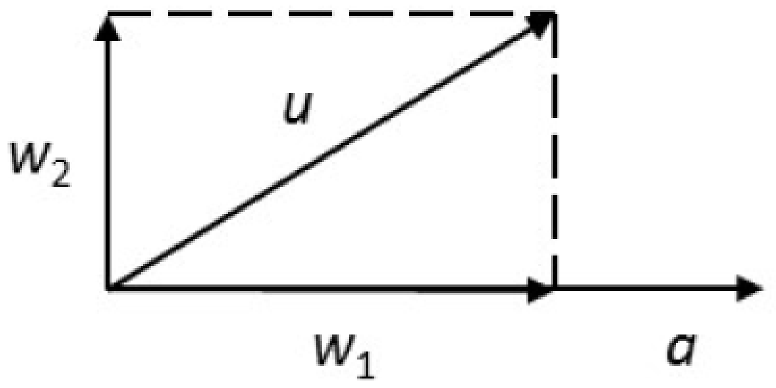
b) Jika bidang tersebut berpotongan, tentukan persamaan garis yang merupakan perpotongannya, jika parallel tentukan jaraknya. *(nilai 10)*

4. Diberikan dua persamaan bidang sebagai berikut:

$$\begin{aligned} 3x - 4y + z &= 1 \\ 6x - 8y + 2z &= 3 \end{aligned}$$

a). Periksa apakah dua bidang tersebut parallel atau berpotongan.
b). Jika bidang tersebut parallel tentukan jarak antara keduanya.

5. Perhatikan gambar berikut



w_1 adalah projeksi vektor **u**=(2,1,1,2) pada vektor **a**=(4,-4,2,-2), sedangkan w_2 adalah vektor yang orthogonal dengan vektor **a**. Jika vektor **u** dinyatakan sebagai $w_1 + w_2$, tentukan w_1 dan w_2.

6. Tentukan normal dari bidang yang melewati tiga titik P(9,0,4), Q(-1,4,3), dan R(0,6,-2), kemudian tentukan persamaan bidangnya.

Seri bahan kuliah Algeo #13

Vektor di Ruang Euclidean
(bagian 3)

Bahan kuliah IF2123 Aljabar Linier dan Geometri

Program Studi Teknik Informatika
STEI-ITB

Perkalian Silang (*cross product*)

- Jika **u** = (u_1, u_2, u_3) dan **v** = (v_1, v_2, v_3) adalah dua vektor di R^3 maka perkalian silang (*cross product*) antara **u** dan **v** adalah

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)$$

Tips: $\begin{bmatrix} u_1 & \boxed{\begin{matrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{matrix}} \\ v_1 & \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} u_1 \\ v_1 \end{matrix}} & \begin{matrix} u_2 \\ v_2 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} u_3 \\ v_3 \end{matrix}} \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{matrix}} & \begin{matrix} u_3 \\ v_3 \end{matrix} \end{bmatrix}$

- Perkalian silang menghasilkan vektor, perkalian titik menghasilkan skalar

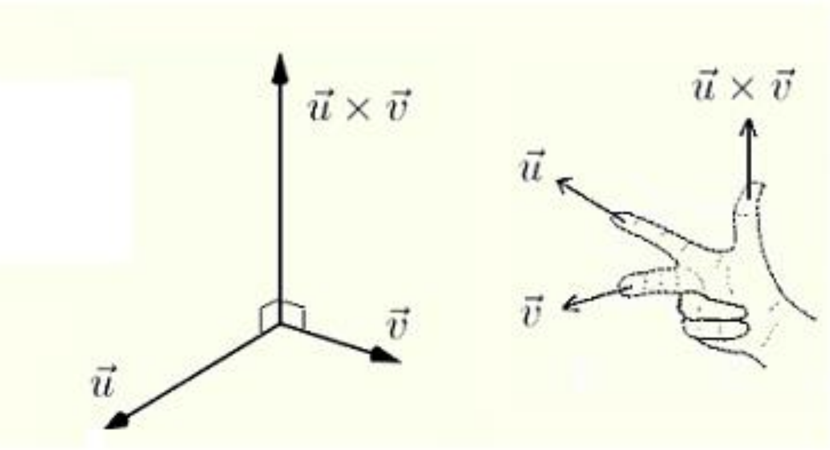
Contoh 1: Misalkan **u** = (0, 1, 7) dan **v** = (1, 4, 5), maka

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 7 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \left(\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \right)$$

= (5 – 28, –(0 – 7), 0 – 1)

=(–23, 7, –1)



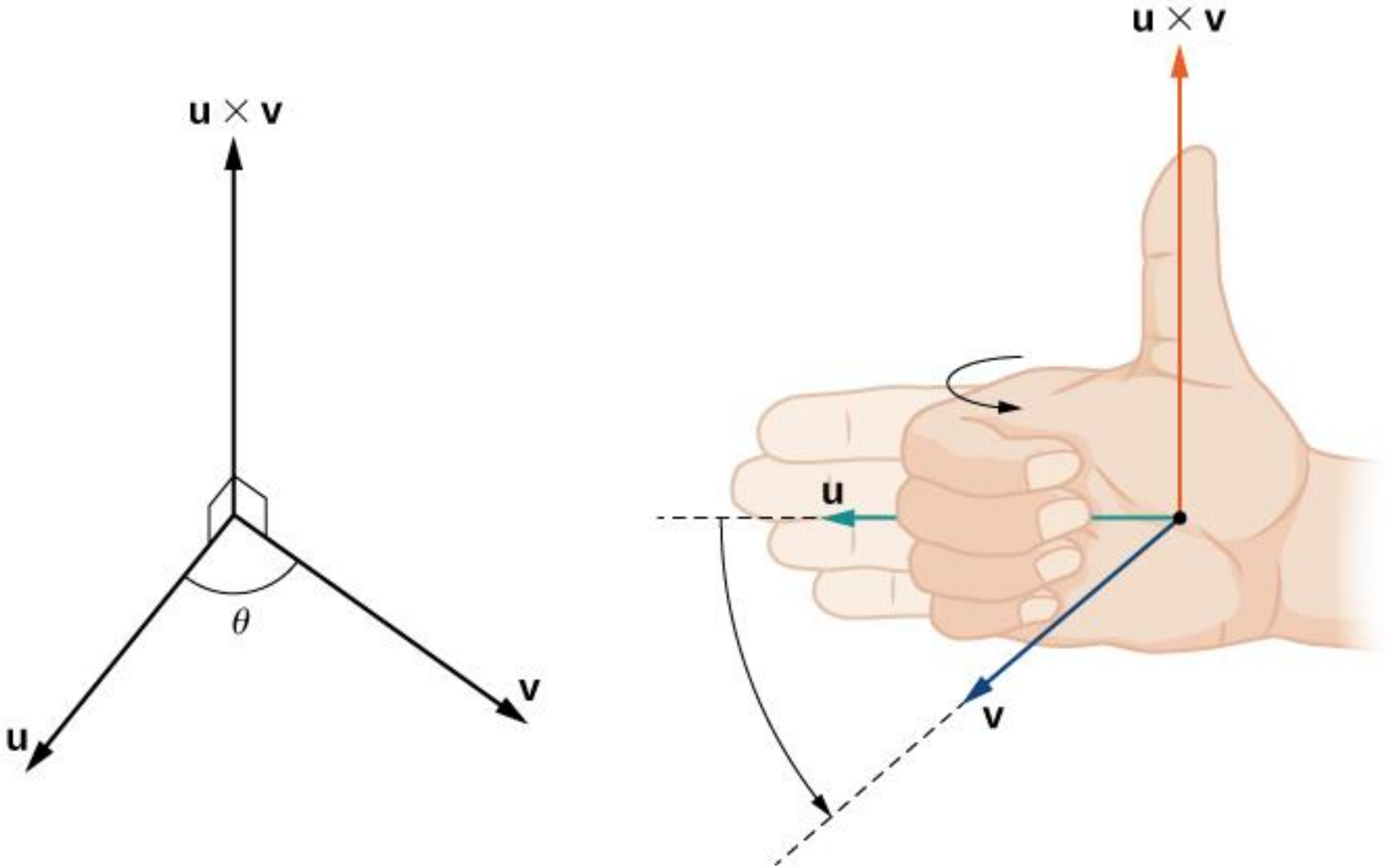
- Jika $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{w}$ maka $\mathbf{w} \perp \mathbf{u}$ dan $\mathbf{w} \perp \mathbf{v}$

- Pada Contoh 1 sebelumnya, **u** = (0, 1, 7) dan **v** = (1, 4, 5), dan sudah dihitung:

$$\underset{\mathbf{u}}{(0, 1, 7)} \times \underset{\mathbf{v}}{(1, 4, 5)} = \underset{\mathbf{w}}{(-23, 7, -1)}$$

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{u} = (-23, 7, -1) \cdot (0, 1, 7) = (-23)(0) + (7)(1) + (-1)(7)$$
$$= 0 + 7 - 7 = 0 \rightarrow \mathbf{w} \perp \mathbf{u}$$

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{v} = (-23, 7, -1) \cdot (1, 4, 5) = (-23)(1) + (7)(4) + (-1)(5)$$
$$= -23 + 28 - 5 = 0 \rightarrow \mathbf{w} \perp \mathbf{v}$$



u × v
θ
u
v
u × v
u
v

Sifat-sifat Perkalian Silang

THEOREM 3.5.2 Properties of Cross Product

If $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, *and* $\mathbf{w}$ *are any vectors in 3-space and* k *is any scalar, then:*

(*a*) $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$

(*b*) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \times \mathbf{w})$

(*c*) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (\mathbf{u} \times \mathbf{w}) + (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$

(*d*) $k(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (k\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (k\mathbf{v})$

(*e*) $\mathbf{u} \times \mathbf{0} = \mathbf{0} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$

(*f*) $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$

Perkalian Silang dan Perkalian Titik

THEOREM 3.5.1 Relationships Involving Cross Product and Dot Product

If $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, *and* $\mathbf{w}$ *are vectors in 3-space, then*

(*a*) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$ ($\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ *is orthogonal to* $\mathbf{u}$)

(*b*) $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$ ($\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ *is orthogonal to* $\mathbf{v}$)

(*c*) $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2$ (*Lagrange's identity*)

(*d*) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}$ (*relationship between cross and dot products*)

(*e*) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{u}$ (*relationship between cross and dot products*)

- Menurut kesamaan Lagrange (Teorema 3.5.1(c)):

$$
\begin{aligned}
\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 &= \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 \\
&= \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 - (\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \theta)^2 \\
&= \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 - (\|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 \cos^2 \theta) \\
&= \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 (1 - \cos^2 \theta) \\
&= \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 \sin^2 \theta
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \sin \theta}$$

θ adalah sudut antara **u** dan **v**

Perkalian Silang Vektor Satuan Standard

- Vektor satuan standard di R^2 adalah **i** dan **j**:

  i = (1, 0) dan **j** = (0, 1)

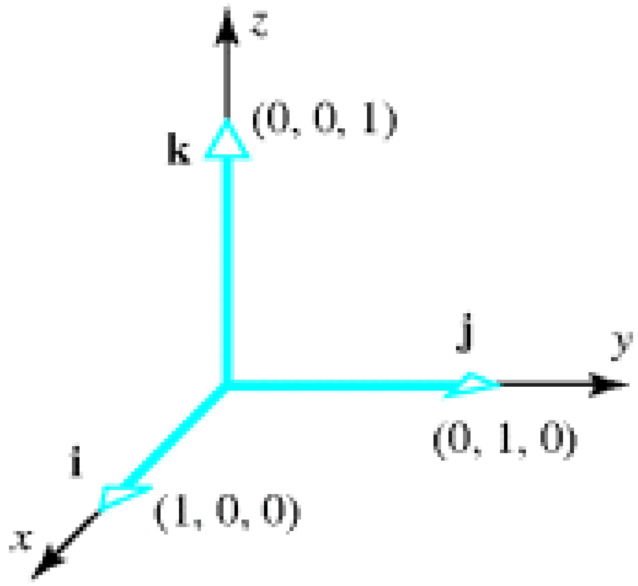
- Setiap vektor **v** = (v_1, v_2) di R^2 dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier

  v = v_1**i** + v_2**j**

- Vektor satuan standard di R^3 adalah **i**, **j**, dan **k**:

  i = (1, 0, 0), **j** = (0, 1, 0), dan **k** = (0, 0, 1),

- Setiap vektor **v** = (v_1, v_2, v_3) di R^3 dapat dinyatakan sebagai kombinasi liner **v** = v_1**i** + v_2**j** + v_3**k**



- Perkalian silang **i** dan **j**:   **i** = (1, 0, 0) dan **j** = (0, 1, 0), maka

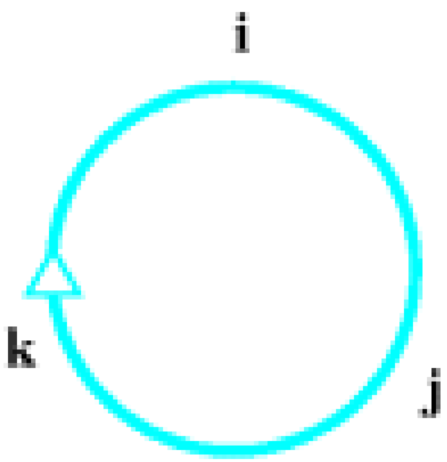
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \left(\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right)$$

= (0, 0, 1) = **k**

- $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$ $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$ $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$

  $\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$ $\mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}$ $\mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$



- Misalkan **u** = (u_1, u_2, u_3) = u_1**i** + u_2**j** + u_3**k**

  dan **v** = (v_1, v_2, v_3) = v_1**i** + v_2**j** + v_3**k**

  maka, dengan menggunakan ekspansi kofaktor:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

Contoh 2: Lihat kembali Contoh 1,

u = (0, 1, 7) = **j** + 7**k**

v = (1, 4, 5) = **i** + 4**j** + 5**k**

maka

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 1 & 7 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

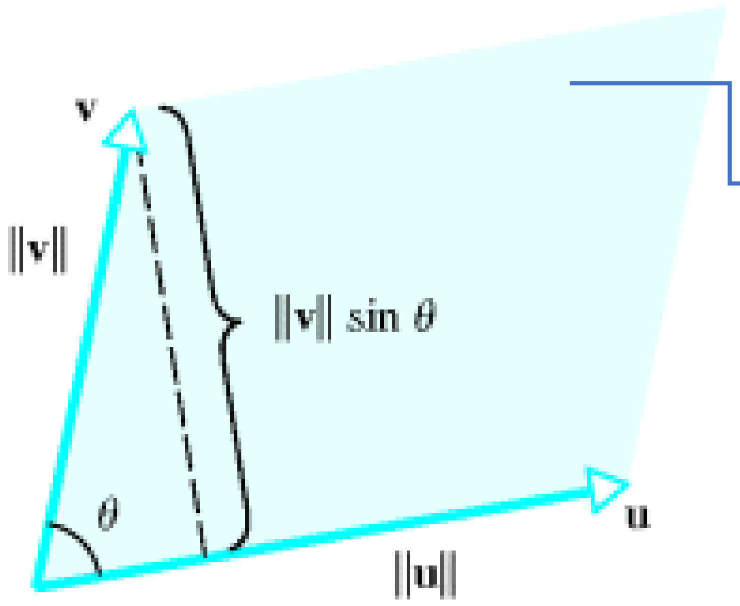
$$= (5 - 28)\mathbf{i} - (0 - 7)\mathbf{j} + (0 - 1)\mathbf{k}$$

$$= -23\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - \mathbf{k}$$

Aplikasi Geometri Perkalian Silang

1. **Menghitung luas area *parallelogram***

   Parallelogram: area paralel yang dibentuk oleh dua buah vektor



Luas parallelogram = A

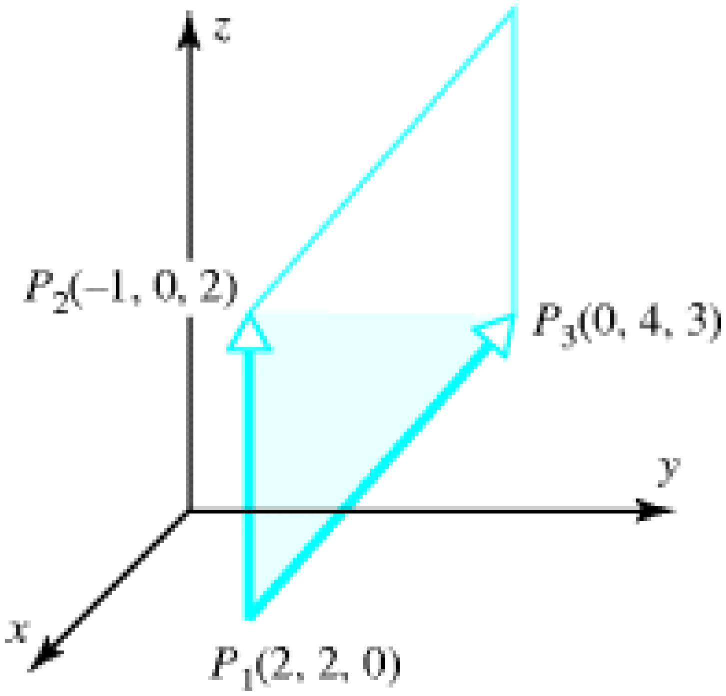
A = alas x tinggi

$= \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\| \sin \theta$

$= \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$ dari kesamaan Lagrange

Jadi, $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$ menyatakan luas area paraleogram yang ditentukan oleh vektor **u** dan **v**

Contoh 3: Tentukan luas segitiga yang ditentukan oleh titik $P_1(2, 2, 0)$, $P_2(-1, 0, 2)$, dan $P_3(0, 4, 3)$.



Penyelesaian: luas segitiga = ½ luas parallelogram

$$\mathbf{u} = \overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} = (-1, 0, 2) - (2, 2, 0) = (-3, -2, 2)$$

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{P_1P_3} = \overrightarrow{OP_3} - \overrightarrow{OP_1} = (0, 4, 3) - (2, 2, 0) = (-2, 2, 3)$$

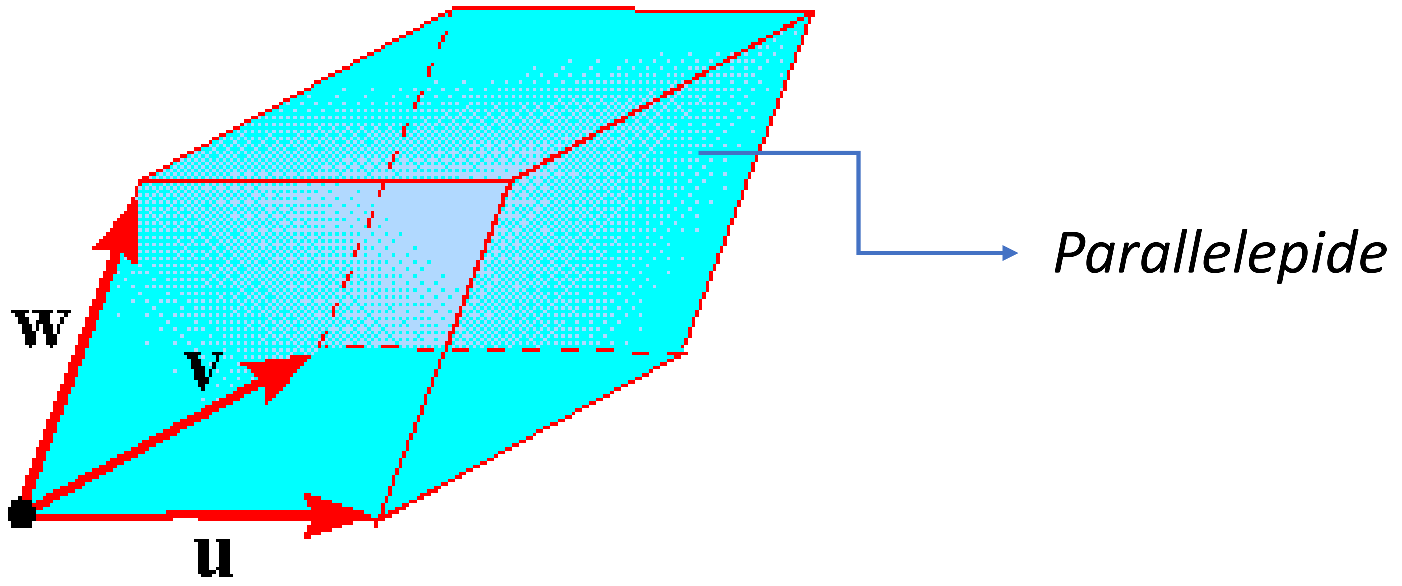
$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \left(\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \right) = (-10, 5, -10)$$

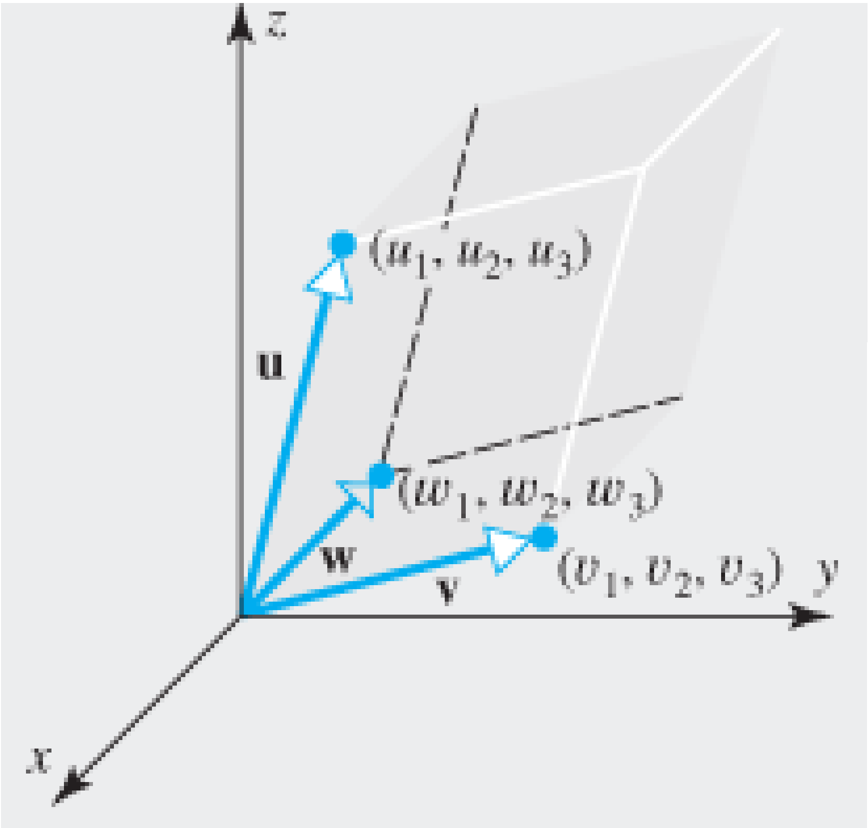
Luas parallelogram: $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \sqrt{(-10)^2 + (5)^2 + (-10)^2} = \sqrt{225} = 15$

Luas segitiga $P_1P_2P_3$ = ½ (15) = 7.5

2. Menghitung volume *parallelepide*

Parallelepide: bangun tiga dimensi yang dibentuk oleh tiga buah vektor di R^3.





Tinjau tiga vektor:

u = (u_1, u_2, u_3)
v = (v_1, v_2, v_3)
w = (w_1, w_2, w_3)

$$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) = \mathbf{u}\cdot\left(\begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix}\mathbf{k}\right)$$

$$= \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix}u_1 - \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix}u_2 + \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix}u_3$$

$$= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \Rightarrow \text{determinan}$$

Nilai mutlak dari determinan, atau $|\,\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w})|$, menyatakan volume *parallelepiped*

Contoh 4: Tentukan volume *paralellepiped* yang dibentuk oleh tiga buah vektor **u** = 3**i** – 2**j** – 5**k**, **v** = **i** + 4**j** – 4**k**, dan **w** = 3**j** + 2**k**

Penyelesaian:

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -5 \\ 1 & 4 & -4 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 3 \begin{vmatrix} 4 & -4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - (-2) \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + (-5) \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$= 60 + 4 – 15$

$= 49$

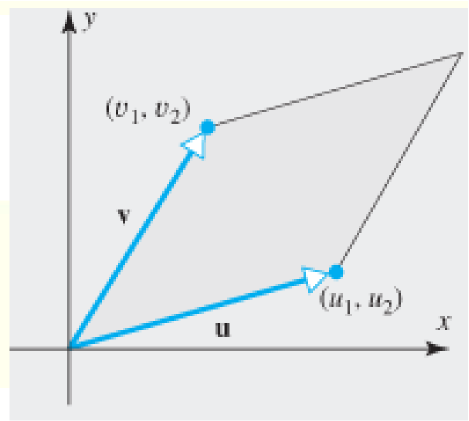
Volume parallelepiped adalah $|49| = 49$

Tafsiran Geometri Determinan

- Kembali ke determinan
- Misalkan **u** = (u_1, u_2) dan **v** = (v_1, v_2) adalah vektor-vektor di R^2. Nilai mutlak dari determinan

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$$

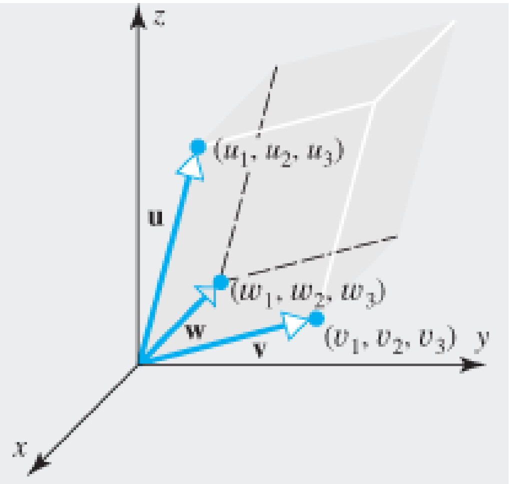
menyatakan luas *parallelogram* yang dibentuk oleh **u** dan **v**.



- Misalkan **u** = (u_1, u_2, u_3), **v** = (v_1, v_2, v_3), dan **w** = (w_1, w_2, w_3), adalah vektor-vektor di R^3. Nilai mutlak dari determinan

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

menyatakan volume *parallelepiped* yang dibentuk oleh **u, v** dan **w**.



Contoh 5: Tentukan luas *paralellogram* yang dibentuk oleh dua buah vektor **u** = 4**i** + 3**j** dan **v** = 3**i** – 4**j**

Penyelesaian:

$$\det\left(\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -16 - 9 = -25$$

Luas parellogram yang dibentuk oleh **u** dan **v** adalah |–25| = 25

Contoh 6: Misalkan tiga buah vektor di R^3 berikut memiliki titik asal yang sama

u = (1, 1, 2) , **v** = (1, 1, 5), dan **w** = (3, 3, 1)

Perlihatkan bahwa ketiga buah vektor tersebut terletak pada satu bidang yang sama.

Penyelesaian:

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}\right) = (1)\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - (1)\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (2)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (1)(-14) - (1)(-14) + (2)(0) = -14 + 14 + 0 = 0$$

Karena determinan = 0, berarti volume *parallelpiped* = 0, dengan kata lain ketiga buah vektor tersebut terletak pada satu bidang yang sama.

TAMAT

Seri bahan kuliah Algeo #14

Ruang Vektor Umum

(bagian 1)

Bahan kuliah IF2123 Aljabar Linier dan Geometri

Program Studi Teknik Informatika

STEI-ITB

Sumber:

Howard Anton & Chris Rores, *Elementary Linear Algebra, 10th Edition*

Pengantar

- Studi tentang vektor pada awalnya dimulai dengan menampilkan vektor sebagai ruas garis dengan tanda panah ( ).

- Vektor-vektor di ruang R^2 dan R^3 dinyatakan sebagai 2-tupel atau 3-tupel (yaitu (w_1, w_2) atau (w_1, w_2, w_3)) dan dapat digambarkan secara visual sebagai ruas garis pada sistem koordinat kartesian.

- Selanjutnya, pengertian vektor diperluas ke ruang R^n, dan sebuah vektor dinyatakan sebagai n-tupel, namun penggambaran secara visual menjadi tidak mungkin lagi.

- Konsep vektor di ruang R^n dapat diperluas sehingga berbagai objek matematika dapat diperlakukan sebagai vektor asalkan memenuhi sejumlah aksioma.

Ruang Vektor

- Yang dimaksud dengan **ruang vektor** (*vector space*) adalah himpunan objek-objek yang dilengkapi dengan dua operasi di dalam himpunan tersebut, yaitu:
  1. operasi penjumlahan objek-objek
  2. operasi perkalian objek dengan skalar

- R^3 adalah contoh sebuah ruang vektor. Himpunan objeknya adalah vektor-vektor yang dinyatakan sebagai $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Di dalam R^3 didefinisikan operasi penjumlahan dua buah vektor, $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, dan perkalian skalar $k\mathbf{v}$ seperti yang sudah dipelajari sebelumnya.

- Namun, kita dapat memperlakukan himpunan lain sebagai ruang vektor asalkan memenuhi persyaratan yang dijelaskan pada *slide* berikut.

Ruang Vektor

Sebuah himpunan objek-objek V yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan (+) dan operasi perkalian dengan skalar dapat disebut sebagai **ruang vektor** dan semua objek di dalam V disebut **vektor**, apabila memenuhi 6 aksioma berikut ini:

1. **Tertutup (*closure*)**

Operasi penjumlahan dan perkalian skalar selalu menghasilkan vektor di dalam V.

Jadi, untuk semua **u**, **v** $\in V$ dan skalar k, maka

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} \in V$$

$$k\mathbf{u} \in V$$

2. Komutatif

Untuk semua **u**, **v** $\in$ *V*, maka **u** + **v** = **v** + **u**

3. Asosiatif

Untuk semua **u**, **v**, **w** $\in$ *V*, maka **u** + (**v** + **w**) = (**u** + **v**) + **w**

4. Identitas

Untuk semua **u** $\in$ *V*, terdapat elemen identitas (vektor) **0** dan skalar 1 sedemikian sehingga

u + **0** = **0** + **u** = **u**

1**u** = **u**

5. Balikan (*inverse*) atau negatif

Untuk setiap $\mathbf{u} \in V$, terdapat $-\mathbf{u} \in V$ sedemikian sehingga

$$\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = (-\mathbf{u}) + \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

6. Distributif

Untuk semua $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w} \in V$ dan k, m skalar, maka

$$k(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = k\mathbf{u} + k\mathbf{v}$$

$$(k + m)\mathbf{w} = k\mathbf{w} + m\mathbf{w}$$

$$k(m\mathbf{u}) = (km)\mathbf{u}$$

- Enam (6) aksioma tersebut dapat dirangkum menjadi 10 poin sebagai berikut:

1. If $\mathbf{u}$ and $\mathbf{v}$ are objects in V, then $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ is in V.
2. $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$
3. $\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})=(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}$
4. There is an object $\mathbf{0}$ in V, called a *zero vector* for V, such that $\mathbf{0}+\mathbf{u}=\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{u}$ for all $\mathbf{u}$ in V.
5. For each $\mathbf{u}$ in V, there is an object $-\mathbf{u}$ in V, called a *negative* of $\mathbf{u}$, such that $\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=(-\mathbf{u})+\mathbf{u}=\mathbf{0}$.
6. If k is any scalar and $\mathbf{u}$ is any object in V, then $k\mathbf{u}$ is in V.
7. $k(\mathbf{u}+\mathbf{v})=k\mathbf{u}+k\mathbf{v}$
8. $(k+m)\mathbf{u}=k\mathbf{u}+m\mathbf{u}$
9. $k(m\mathbf{u})=(km)(\mathbf{u})$
10. $1\mathbf{u}=\mathbf{u}$

Cara menunjukkan apakah sebuah himpunan dengan dua operasi merupakan ruang vektor

1. Identifikasi himpunan V dengan objek-objek di dalamnya yang akan menjadi vektor

2. Identifikasi operasi penjumlahan dan perkalian skalar di dalam V

3. Periksa aksioma 1 (tertutup terhadap operasi penjumlahan dan tertutup terhadap operasi perkalian skalar)

4. Periksa apakah lima aksioma lainnya dipenuhi

Contoh-contoh Ruang Vektor

1. **R^n (termasuk R^2 dan R^3) adalah ruang vektor**
   - $V = R^n$ = himpunan objek berbentuk $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, $u_i \in R$
   - Operasi penjumlahan dan perkalian skalar didefinisikan sbb:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n)$$

$$k\mathbf{u} = (ku_1, ku_2, \ldots, ku_n)$$

   - *Closure*: operasi penjumlahan dan perkalian skalar menghasilkan vektor dengan n-tupel di R^n.
   - Lima aksioma lainnya: komutatif, identitas, asosiatif, distributif, balikan, juga dipenuhi oleh R^n (periksa!)

2. **Ruang vektor matriks 2 x 2**

- V = himpunan matriks berukuran 2 x 2 dengan elemen-elemen bilangan riil
- Operasi penjumlahan dan perkalian skalar didefinisikan sbb:

$$\mathbf{u}+\mathbf{v}=\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} u_{11}+v_{11} & u_{12}+v_{12} \\ u_{21}+v_{21} & u_{22}+v_{22} \end{bmatrix}$$

$$k\mathbf{u}=k\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ku_{11} & ku_{12} \\ ku_{21} & ku_{22} \end{bmatrix}$$

- *Closure*: operasi penjumlahan dan perkalian skalar menghasilkan matriks yang berukuran 2 x 2 juga
- Aksioma-aksioma lain juga dipenuhi, misalnya

  - komutatif $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$

  - elemen identitas adalah $\mathbf{0}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ sehingga $\mathbf{0}+\mathbf{u}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}=\mathbf{u}$

- kemudian, $1\mathbf{u} = 1\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{u}$

- balikan atau negatif: terdapat $-\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -u_{11} & -u_{12} \\ -u_{21} & -u_{22} \end{bmatrix}$ sehingga

$$\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -u_{11} & -u_{12} \\ -u_{21} & -u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

- periksa bahwa aksioma asosiatif dan distributif juga dipenuhi, yaitu jika **u**, **v**, dan **w** adalah matriks 2 x 2, maka

u + (**v** + **w**) = (**u** + **v**) + **w**

dan jika *k* dan *m* adalah skalar maka

k(**u** + **v**)= *k***u** + *k***v**
(*k* + *m*)**w** = *k***w** + *m***w**
k(*m***u**)= (*km*)**u**

3. Ruang vektor fungsi-fungsi bernilai bilangan riil

- V = himpunan semua fungsi bernilai bilangan rill untuk setiap x di dalam selang $(-\infty, \infty)$. Elemen himpunan V adalah fungsi berbentuk f(x)
- Operasi penjumlahan dan perkalian skalar didefinisikan sbb: jika f = f(x) dan g = g(x), maka

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(kf)(x) = kf(x)$$

- *Closure*: operasi penjumlahan dua buah fungsi dan perkalian skalar fungsi menghasilkan fungsi lain yang juga di dalam V yang terdefenisi untuk x di dalam $(-\infty, \infty)$
- Aksioma-aksioma lain juga dipenuhi, misalnya

  - komutatif: $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g + f)(x)$

  - elemen identitas adalah 0 sehingga $f(x) + 0 = 0 + f(x) = f(x)$

  - negatif fungsi adalah $–f(x)$ sehingga $f(x) + (–f(x)) = 0 = (–f(x)) + f(x)$

4. Ruang vektor polinom

- V = himpunan semua polinom berbentuk $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ untuk setiap x di dalam selang $(-\infty, \infty)$.
- Operasi penjumlahan dan perkalian skalar didefinisikan sbb: jika **p** = $p(x)= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ dan **q** = $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n$ maka

$$\mathbf{p} + \mathbf{q} = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2+ b_2)x^2 + \ldots + (a_n + b_n)x^n$$

$$k\mathbf{p} = ka_0 + ka_1x + ka_2x^2 + \ldots + ka_nx^n$$

- *Closure*: operasi penjumlahan dua buah polinom dan perkalian skalar polinom menghasilkan polinom lain yang juga di dalam V yang terdefenisi untuk x di dalam $(-\infty, \infty)$
- Aksioma-aksioma lain juga dipenuhi, misalnya

  - komutatif: $p(x) + q(x) = q(x) + p(x)$
  - elemen identitas adalah 0 sehingga $p(x) + 0 = 0 + p(x) = p(x)$
  - negatif polinom adalah $-p(x) = -a_0 - a_1x - a_2x^2 - \ldots - a_nx^n$ sehingga $p(x) + (-p(x)) = 0 = (-p(x)) + p(x)$

Contoh yang bukan ruang vektor

Misalkan $V = R^2$ = himpunan objek berbentuk $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, $u_i \in R$. Didefinisikan operasi penjumlahan dan perkalian skalar di dalam V sbb:

$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$

$k\mathbf{u} = (ku_1, 0)$

Contoh: misalkan $\mathbf{u} = (3, 4)$, $\mathbf{v} = (5, 2)$ maka

$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (3 + 5, 4 + 2) = (8, 6)$

$8\mathbf{u} = (8 \cdot 3, 0) = (24, 0)$

- Aksioma *closure* dipenuhi oleh ruang vektor ini
- Namun ruang vektor gagal memenuhi aksioma identitas, sebab

$$1\mathbf{u} = (1u_1, 0) = (u_1, 0) \neq \mathbf{u}$$

Subruang

- Jika *V* adalah sebuah ruang vektor, maka sub-himpunan *W* dari *V* disebut **subruang** (*subspace*) jika *W* sendiri adalah ruang vektor di bawah operasi penjumlahan dan perkalian scalar

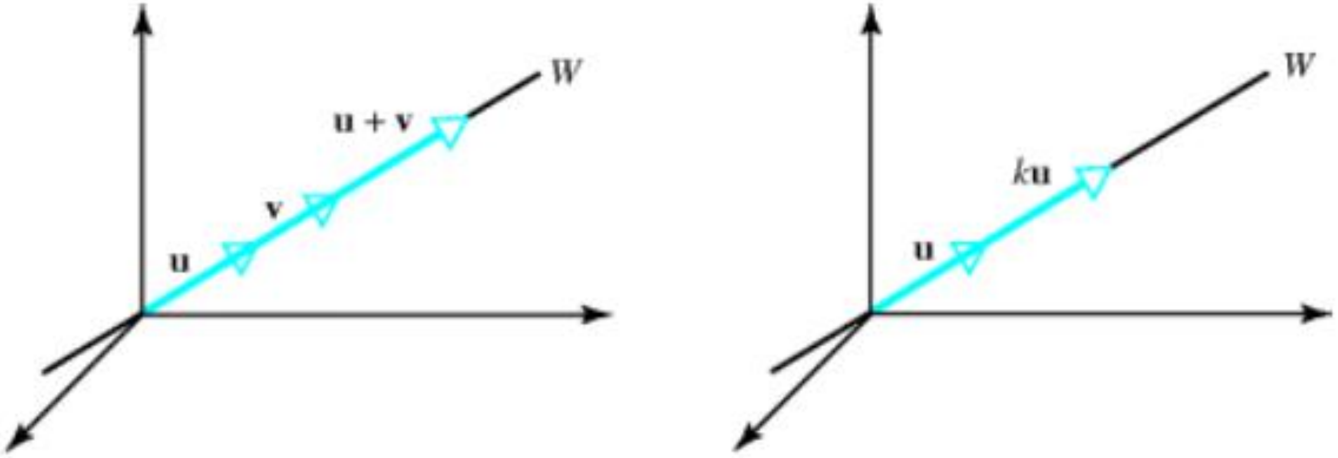
  Contoh: $V = R^3$, W = sebuah bidang yang melalui titik asal (0, 0, 0)

- **Teorema**: Jika W adalah himpunan yang berisi satu atau lebih vektor di dalam ruang vektor V, maka W adalah subruang dari V jika dan hanya jika kondisi berikut terpenuhi:

  1. Jika **u** dan **v** adalah vektor di W, maka **u** + **v** menghasilkan vektor di W
  2. Jika *k* adalah skalar dan **u** adalah vekto di W, maka *k***u** adalah vektor di W

Contoh-contoh subruang

1. Himpunan titik-titik sepanjang garis yang melalui titik asal di R^2 atau di R^3 yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan dan perkalian skalar adalah subruang dari R^2 atau R^3.



(*a*) *W* is closed under addition.

(*b*) *W* is closed under scalar multiplication.

2. Himpunan titik-titik pada bidang yang melalui titik asal di R^3 yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan dan perkalian skalar adalah subruang dari R^3.

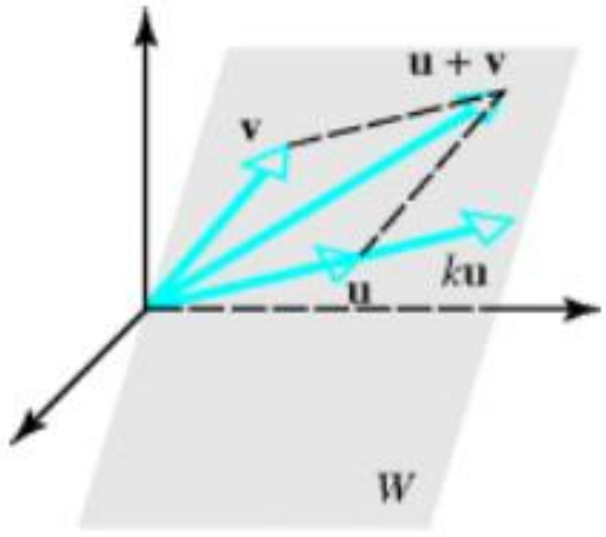


Figure 4.2.3 The vectors $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ and $k\mathbf{u}$ both lie in the same plane as $\mathbf{u}$ and $\mathbf{v}$

Contoh yang bukan subruang

- Himpunan titik-titik di dalam kuadran 1 pada bidang kartesian tidak membentuk subruang karena tidak tertutup pada operasi penjumlahan dan perkalian skalar.

Contoh: **v** = (1, 1) adalah vektor di W tetapi (–1)**v** = (–1, –1) terletak di luar W

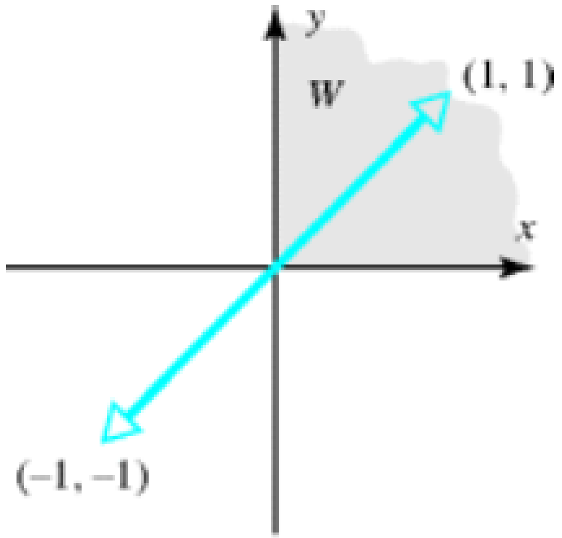


Figure 4.2.4 *W* is not closed under scalar multiplication

Kombinasi linier

- Jika **w** adalah vektor di V, maka **w** dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari vektor-vektor $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, …., $\mathbf{v_r}$ apabila **w** dapat dinyatakan sebagai

$$\boxed{\mathbf{w} = k_1\mathbf{v_1} + k_2\mathbf{v_2} + ... + k_r\mathbf{v_r}}$$

yang dalam hal ini k_1, k_2, ..., k_r adalah skalar.

Contoh 1: Misalkan $\mathbf{v_1} = (3, 2, -1)$, $\mathbf{v_2} = (2, -4, 3)$, maka

$$\mathbf{w} = 2\mathbf{v_1} + 3\mathbf{v_2} = 2(3, 2, -1) + 3(2, -4, 3) = (12, -8, 7)$$

Contoh 2: Nyatakan vektor (5, 9, 5) sebagai kombinasi linier dari **u** = (2, 1, 4), **v** = (1, –1 , 3) dan **w** = (3, 2, 5)

Penyelesaian:

$$k_1\begin{bmatrix}2\\1\\4\end{bmatrix} + k_2\begin{bmatrix}1\\-1\\3\end{bmatrix} + k_3\begin{bmatrix}3\\2\\5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\9\\5\end{bmatrix}$$

Diperoleh sistem persamaan linier (SPL):

$$\begin{aligned}2k_1 + k_2 + 3k_3 &= 5\\ k_1 - k_2 + 2k_3 &= 9\\ 4k_1 + 3k_2 + 5k_3 &= 5\end{aligned}$$

Selesaikan SPL di atas dengan metode eliminasi Gauss, diperoleh:

$k_1 = 3$, $k_2 = -4$, $k_3 = 2$

Teorema: Jika S = {$\mathbf{w_1}$, $\mathbf{w_2}$, …, $\mathbf{w_r}$} adalah himpunan vektor-vektor di ruang vektor V, maka

(a) Himpunan W yang berisi semua kombinasi linier vektor-vektor di dalam S adalah subruang dari V

(b) Himpunan W tersebut adalah subruang "terkecil" dari V yang mengandung vektor-vektor di dalam S dengan pengertian bahwa sembarang subruang lain yang mengandung vektor-vektor tersebut juga mengandung W.

Himpunan membangun (*spanning set*)

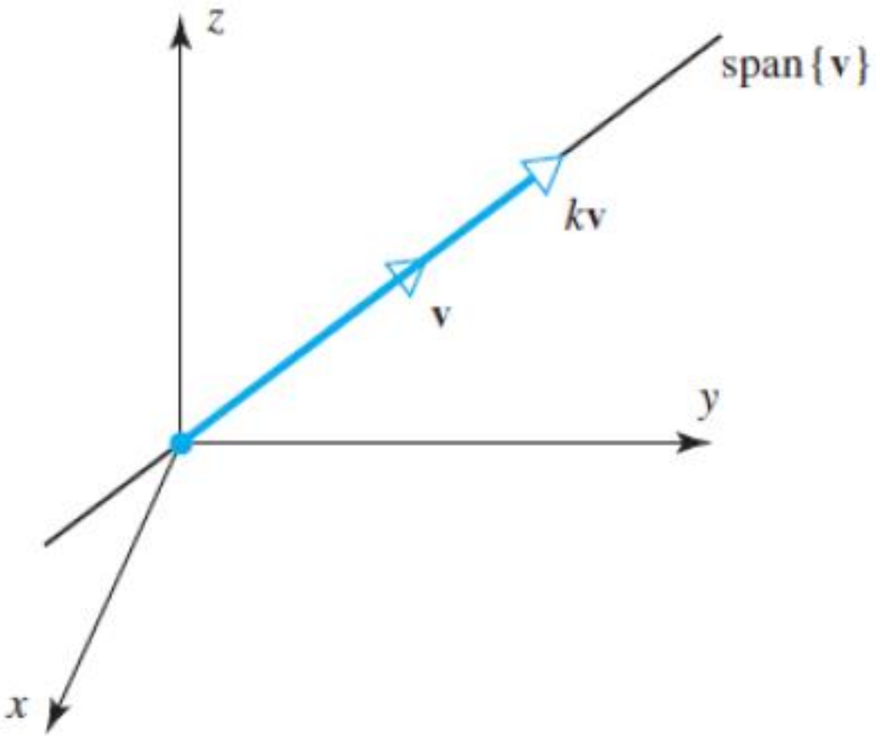
- Jika $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_r}$ adalah vektor-vektor di dalam ruang vektor V dan subruang dari V dibentuk dari kombinasi linier $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_r}$ maka himpunan $S = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_r}\}$ dikatakan **membangun** (*span*) subruang tersebut.

- $S = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_r}\}$ disebut himpunan merentang atau himpunan membangun (*spanning set*).

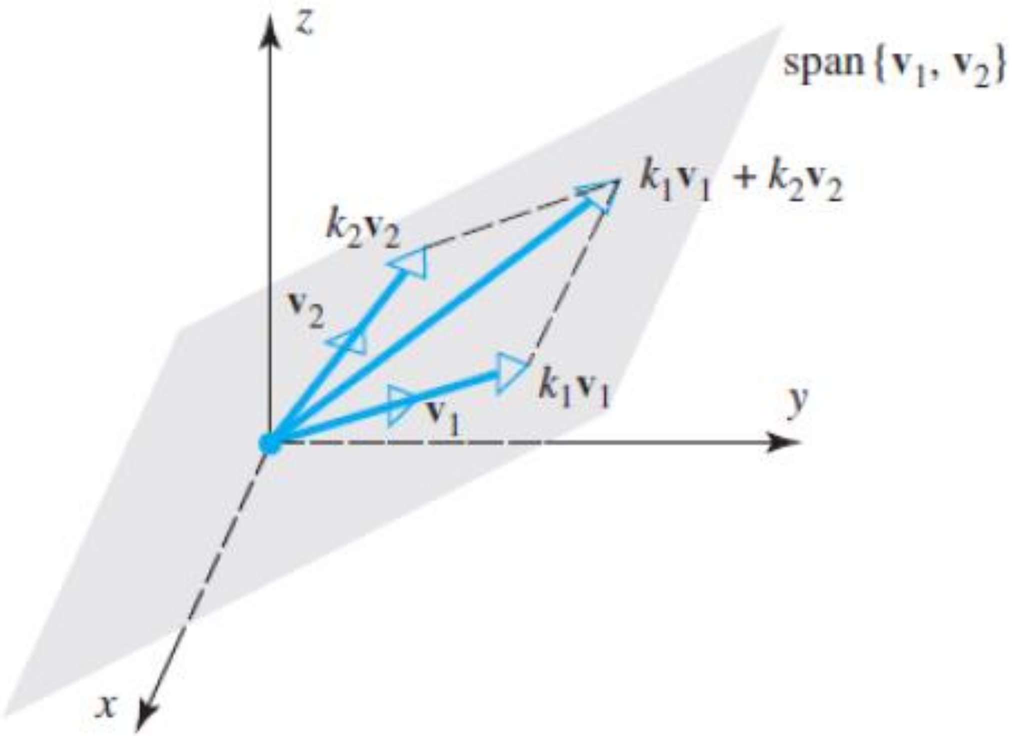
- S membangun subruang maka kita menyatakannya sebagai

  span$\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_r}\}$ atau *span*(S).

- Jika $S = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_r}\}$ membangun V maka sembarang vektor $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_r)$ di V dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier $\mathbf{u} = k_1\mathbf{v_1} + k_2\mathbf{v_2} + \ldots + k_r\mathbf{v_r}$



(a) Span{$\mathbf{v}$} is the line through the origin determined by $\mathbf{v}$.



(b) Span{$\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$} is the plane through the origin determined by $\mathbf{v}_1$ and $\mathbf{v}_2$.

Contoh 3: Vektor-vektor satuan standard **i** = (1, 0, 0), **j** = (0, 1, 0), dan **k** = (0, 0, 1) membangun R^3 karena setiap vektor **v** = (v_1, v_2, v_3) di R^3 dapat dinyatakan sebagai kombinasi liner **v** = v_1**i** + v_2**j** + v_3**k**. Kita dapat menyatakan R^3 = *span*{**i**, **j**, **k**}.

Contoh 4: Polinom 1, x, x^2, …, x^n membangun ruang vektor P_n, karena setiap polinom **p** di dalam P_n dapat ditulis sebagai

$$\mathbf{p} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$$

yang merupakan kombinasi linier dari 1, x, x^2, …, x^n. Kita dapat menyatakan bahwa P_n = *span*{1, x, x^2, …, x^n}

Contoh 5: Tentukan apakah $\mathbf{v_1} = (2, -1, 3)$, $\mathbf{v_2} = (4, 1, 2)$ dan $\mathbf{v_3} = (8, -1, 8)$ membangun R^3?

Penyelesaian: Kita harus menentukan apakah sembarang vektor $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ di R^3 dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier $\mathbf{u} = k_1\mathbf{v_1} + k_2\mathbf{v_2} + k_3\mathbf{v_3}$

$$(u_1, u_2, u_3) = k_1(2, -1, 3) + k_2(4, 1, 2) + k_3(8, -1, 8)$$

Diperoleh SPL:

$$2k_1 + 4k_2 + 8k_3 = u_1$$

$$-k_1 + k_2 - k_3 = u_2$$

$$3k_1 + 2k_2 + 8k_3 = u_3$$

Apakah SPL di atas dapat dipecahkan? Perhatikan matriks koefisien SPL, yaitu $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 8 \end{bmatrix}$

$$\det(A) = 2\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} + 8\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 20 + 20 - 40 = 0$$

Karena $\det(A) = 0$, maka SPL tersebut tidak konsisten, artinya tidak terdapat k_1, k_2 dan k_3 yang memenuhi. Oleh karena itu $\mathbf{u}$ tidak dapat dinyatakan sebagai kombinasi liner $\mathbf{u} = k_1\mathbf{v_1} + k_2\mathbf{v_2} + k_3\mathbf{v_3}$. Dengan kata lain $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, dan $\mathbf{v_3}$ tidak membangun R^3.

Kebebasan linier (*linear independence*)

- Misalkan V adalah ruang vektor. Himpunan S = {$\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, …, $\mathbf{v_r}$ } dikatakan **bebas linier** (*linear independence*) jika dan hanya jika kombinasi linier

$$k_1\mathbf{v_1} + k_2\mathbf{v_2} + \dots + k_r\mathbf{v_r} = 0$$

memiliki hanya satu solusi yaitu

$$k_1 = 0, k_2 = 0, \dots, k_r = 0$$

Solusi ini disebut **solusi trivial**.

- Sebaliknya, S = {$\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, …, $\mathbf{v_r}$ } dikatakan **tidak bebas linier** atau **kebergantungan linier** (*linear dependence*) jika dan hanya jika kombinasi linier

$$k_1\mathbf{v_1} + k_2\mathbf{v_2} + \dots + k_r\mathbf{v_r} = 0$$

memiliki **solusi non-trivial**, yaitu memiliki solusi lain selain $k_1 = 0$, $k_2 = 0$, …, $k_r = 0$

Pengertian lain bebas linier dan tidak bebas linier adalah sbb:

Sebuah himpunan S yang memiliki dua atau lebih vektor dikatakan:

(a) **tidak bebas linier** (*linear dependence*) jika dan hanya jika <u>sedikitnya</u> satu vektor di dalam S adalah kombinasi linier dari vektor-vektor lainnya.

(b) **bebas linier** (*linear independence*) jika <u>tidak ada</u> vektor di dalam S yang dinyatakan sebagai kombinasi linier dari vektor-vektor lainnya.

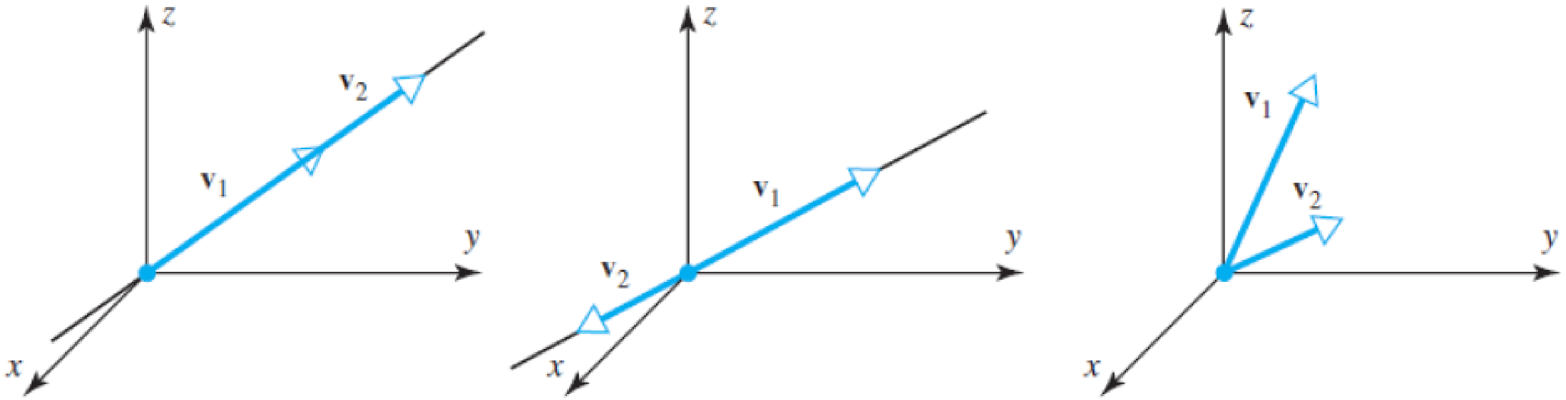
Contoh 6: Misalkan S = {$\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, $\mathbf{v_3}$ } dengan $\mathbf{v_1}$ = (1, 2 , 3), $\mathbf{v_2}$ = (2, 1, 5) dan $\mathbf{v_3}$ = (4, 5, 11). Kita dapat memverifikasi bahwa

$$2\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2} - \mathbf{v_3} = 0 \rightarrow \mathbf{v_3} = 2\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}$$

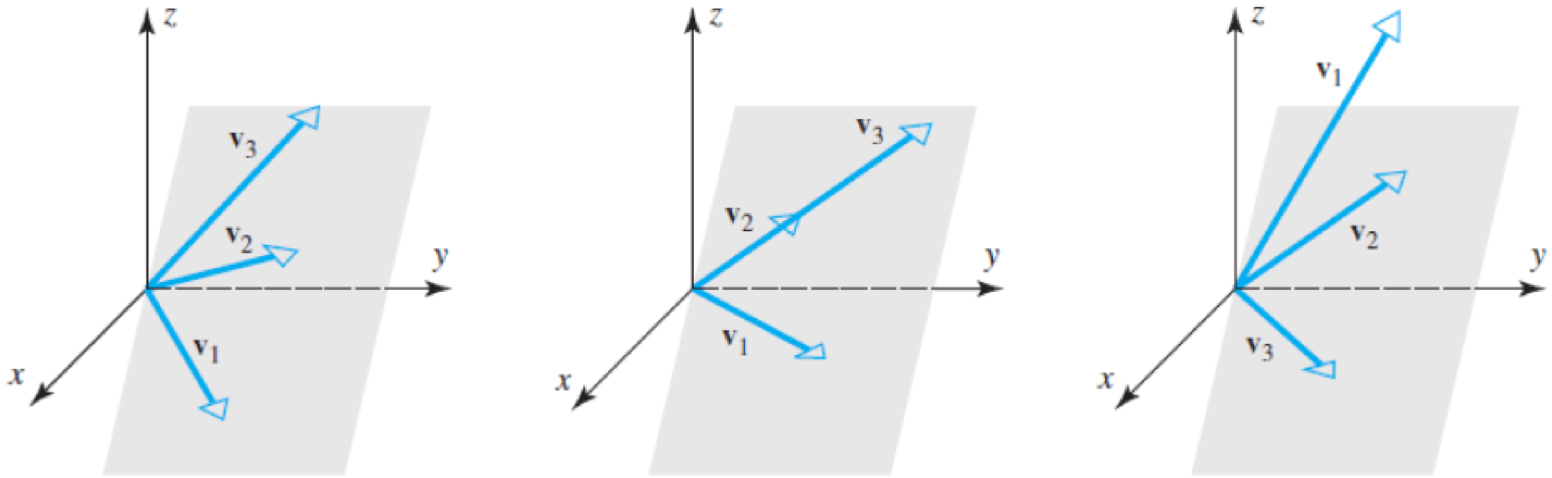
Karena $\mathbf{v_3} = 2\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}$ maka itu berarti $\mathbf{v_3}$ merupakan kombinasi linier dari vektor-vektor lainnya. Dengan kata lain, $\mathbf{v_3}$ bergantung pada vektor-vektor lainnya di dalam S, sehingga himpunan S = {$\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, $\mathbf{v_3}$ } dikatakan tidak bebas linier.

Contoh 7: Polinom $\mathbf{p_1} = 1 - x$, $\mathbf{p_2} = 5 + 3x - 2x^2$, dan $\mathbf{p_3} = 1 + 3x - x^2$ membentuk himpunan yang tidak bebas linier karena $3\mathbf{p_1} - \mathbf{p_2} + 2\mathbf{p_3} = 0 \rightarrow \mathbf{p_2} = 3\mathbf{p_3} + 2\mathbf{p_3}$, yang berarti $\mathbf{p_2}$ merupakan kombinasi linier dari polinom-polinom lainnya.

Linear Independence in R^2 and R^3



(*a*) Linearly dependent (*b*) Linearly dependent (*c*) Linearly independent



(*a*) Linearly dependent (*b*) Linearly dependent (*c*) Linearly independent

Contoh 8: Tentukan apakah $\mathbf{v_1}$ = (1, –2, 3), $\mathbf{v_2}$ = (5, 6, –1) dan $\mathbf{v_3}$ = (3, 2, 1) membentuk himpunan yang bebas linier atau tidak bebas linier.

<u>Penyelesaian</u>: Kita harus memeriksa apakah kombinasi linier $k_1\mathbf{v_1} + k_2\mathbf{v_2} + k_3\mathbf{v_3} = 0$ memiliki solusi trivial atau non-trivial.

$$k_1(1, -2, 3) + k_2(5, 6, -1) + k_3(3, 2, 1) = 0$$

Diperoleh SPL homogen:

$$\begin{aligned} k_1 + 5k_2 + 3k_3 &= 0 \\ -2k_1 + 6k_2 + 2k_3 &= 0 \\ 3k_1 - k_2 + k_3 &= 0 \end{aligned}$$

Selesaikan SPL homogen di atas dengan metode eliminasi Gauss:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & 6 & 10 & 0 \\ 4 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \overset{\text{OBE}}{\cdots} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

Solusi: $k_1 = 0$, $k_2 = 0$, $k_3 = 0$ (solusi trivial)

Karena kombinasi linier $k_1\mathbf{v_1} + k_2\mathbf{v_2} + k_3\mathbf{v_3} = 0$ mempunyai solusi trivial maka dikatakan $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}\}$ adalah himpunan yang bebas linier.

Contoh 9: Tentukan apakah $\mathbf{v_1} = (2, -1, 4)$, $\mathbf{v_2} = (3, 6, 2)$ dan $\mathbf{v_3} = (1, 10, -1)$ membentuk himpunan yang bebas linier atau tidak bebas linier.

Penyelesaian: Kita harus memeriksa apakah kombinasi linier $k_1\mathbf{v_1} + k_2\mathbf{v_2} + k_3\mathbf{v_3} = 0$ memiliki solusi trivial atau non-trivial.

$$k_1(2, -1, 4) + k_2(3, 6, 2) + k_3(1, 10, -1) = 0$$

Diperoleh SPL homogen:

$$\begin{aligned} 2k_1 + 3k_2 + 2k_3 &= 0 \\ -k_1 + 6k_2 + 10k_3 &= 0 \\ 4k_1 + 2k_2 - k_3 &= 0 \end{aligned}$$

Selesaikan SPL homogen di atas dengan metode eliminasi Gauss, diperoleh solusinya:

$$k_1 = t,\ k_2 = -\tfrac{1}{2}t,\ k_3 = -\tfrac{1}{2}t$$

(Solusi non-trivial. Perhatikan bahwa jika $t = 0$, maka SPL memiliki solusi $k_1 = 0$, $k_2 = 0$, $k_3 = 0$. Namun, ada banyak solusi yang lain selain $k_1 = 0$, $k_2 = 0$, $k_3 = 0$)

Karena kombinasi linier $k_1\mathbf{v_1} + k_2\mathbf{v_2} + k_3\mathbf{v_3} = 0$ mempunyai solusi non trivial maka dikatakan $\{\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}\}$ adalah himpunan yang tidak bebas linier.

Catatan: Cara lain untuk memeriksa apakah SPL homogen

$$2k_1 + 3k_2 + 2k_3 = 0$$
$$-k_1 + 6k_2 + 10k_3 = 0$$
$$4k_1 + 2k_2 - k_3 = 0$$

memiliki solusi trivial atau non trivial adalah dengan menghitung determinan matriks

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -1 & 6 & 10 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Karena det(A) = 0, maka SPL homogen tersebut memiliki solusi non-trivial.

Contoh 10: Vektor-vektor satuan standard **i** = (1, 0, 0), **j** = (0, 1, 0), dan **k** = (0, 0, 1) adalah vektor-vektor yang bebas linier di R^3. Hal ini ditunjukkan sebagai berikut:

$$k_1\mathbf{i} + k_2\mathbf{j} + k_3\mathbf{k} = 0$$

atau

$$k_1(1, 0, 0) + k_2(0, 1, 0) + k_3(0, 1, 0) = 0$$

Diperoleh SPL homogen:

$$\begin{aligned} k_1 \qquad\qquad &= 0 \\ k_2 \qquad &= 0 \\ k_3 &= 0 \end{aligned}$$

Jadi solusinya $k_1 = 0$, $k_2 = 0$, $k_3 = 0$ (solusi trivial)

Secara umum, vektor-vektor satuan standard di R^n,

$$\mathbf{e_1} = (1, 0, 0, ..., 0),\ \mathbf{e_2} = (0, 1, 0, ..., 0), ..., \text{dan } \mathbf{e_n} = (0, 0, 0, ..., 1),$$

membentuk himpunan yang bebas linier di R^n

Bersambung

Seri bahan kuliah Algeo #15

Ruang Vektor Umum
(bagian 2)

Bahan kuliah IF2123 Aljabar Linier dan Geometri

Program Studi Teknik Informatika
STEI-ITB

Sumber:

Howard Anton & Chris Rores, *Elementary Linear Algebra, 10th Edition*

Basis

- Jika V adalah ruang vektor dan S = {$\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, …, $\mathbf{v_n}$} adalah himpunan vektor-vektor di ruang vektor V, maka S dinamakan **basis** untuk V jika:

  (a) S bebas linier

  (b) S membangun V

- Jika S = {$\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, …, $\mathbf{v_n}$} adalah basis untuk ruang vektor V, maka setiap vektor **v** di V dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v_1} + c_2\mathbf{v_2} + ... + c_n\mathbf{v_n}$$

tepat dengan satu cara

Contoh 11: Vektor-vektor satuan standard **i** = (1, 0, 0), **j** = (0, 1, 0), dan **k** = (0, 0, 1) adalah basis standard untuk R^3, karena

(a) Sudah ditunjukkan pada Contoh 10 bahwa {**i**, **j**, **k**} bebas linier

(b) Sudah ditunjukkan pada Contoh 3 bahwa {**i**, **j**, **k**} membangun R^3

Secara umum, vektor-vektor satuan standard,

$$\mathbf{e_1} = (1, 0, 0, \ldots, 0),\ \mathbf{e_2} = (0, 1, 0, \ldots, 0),\ \ldots,\ \text{dan } \mathbf{e_n} = (0, 0, 0, \ldots, 1),$$

adalah basis standard untuk R^n

Contoh 12: Perlihatkan bahwa $\mathbf{v_1}$ = (1, 2, 1), $\mathbf{v_2}$ = (2, 9, 0) dan $\mathbf{v_3}$ = (3, 3, 4) adalah basis untuk R^3.

Jawaban:

(a) Harus ditunjukkan bahwa $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, dan $\mathbf{v_3}$ bebas linier sbb:

$$k_1(1, 2, 1) + k_2(2, 9, 0) + k_3(3, 3, 4) = 0$$

Diperoleh SPL homogen:

$$\begin{aligned} k_1 + 2k_2 + 3k_3 &= 0 \\ 2k_1 + 9k_2 + 3k_3 &= 0 \\ k_1 + 4k_3 &= 0 \end{aligned}$$

Harus ditunjukkan bahwa solusi SPL adalah trivial yaitu $k_1 = 0$, $k_2 = 0$, $k_3 = 0$

(b) Harus ditunjukkan bahwa $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, dan $\mathbf{v_3}$ membangun R^3 sbb:
Misalkan vektor sembarang $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ di R^3 dapat dinyatakan sebagai $\mathbf{w} = k_1\mathbf{v_1} + k_2\mathbf{v_2} + k_3\mathbf{v_3}$

$$(w_1, w_2, w_3) = k_1(1, 2, 1) + k_2(2, 9, 0) + k_3(3, 3, 4)$$

Diperoleh SPL:

$$\begin{aligned} k_1 + 2k_2 + 3k_3 &= u_1 \\ 2k_1 + 9k_2 + 3k_3 &= u_2 \\ k_1 + 4k_3 &= u_3 \end{aligned}$$

Harus ditunjukkan bahwa SPL di atas dapat dipecahkan.

Untuk (a) dan (b) kita cukup menunjukkan bahwa matriks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

mempunyai balikan (*invers*), yaitu det(A) $\neq$ 0. Karena det(A) = –1 (periksa!), maka matriks A tersebut dapat dibalikkan.

Oleh karena itu, SPL homogen:

$$\begin{aligned} k_1 + 2k_2 + 3k_3 &= 0 \\ 2k_1 + 9k_2 + 3k_3 &= 0 \\ k_1 \qquad\quad + 4k_3 &= 0 \end{aligned}$$

memiliki solusi trivial, dan SPL:

$$\begin{aligned} k_1 + 2k_2 + 3k_3 &= u_1 \\ 2k_1 + 9k_2 + 3k_3 &= u_2 \\ k_1 \qquad\quad + 4k_3 &= u_3 \end{aligned}$$

dapat dipecahkan. Jadi, $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, dan $\mathbf{v_3}$ adalah basis untuk R^3.

- Contoh basis lainnya:

1. S = $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ adalah basis untuk ruang vektor polinom P_n

2. $M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, dan $M_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ adalah basis untuk ruang vektor matriks 2 x 2, yaitu M_{22}

Dimensi

- **Dimensi** ruang vektor V yang berhingga, dinyatakan dengan dim(V), adalah banyaknya vektor di dalam basis.

- Contoh:

  (i) dim(R^2) = 2, sebab basis standardnya memiliki 2 vektor (**i** dan **j**)

  (ii) dim(R^3) = 3, sebab basis standardnya memiliki 3 vektor (**i** , **j** dan **k**)

  (iii) dim(R^n) = n, sebab basis standardnya memiliki n vektor

  (iv) dim(P_n) = n + 1, sebab basis standardnya memiliki n + 1 vektor, yaitu

  $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$

  (v) dim(M_{mn}) = mn, sebab basis standardnya memiliki mn vektor

Contoh 13: Tentukan basis dan dimensi dari ruang solusi SPL homogen berikut:

$$\begin{aligned}
2x_1 + 2x_2 - x_3 \qquad\quad + x_5 &= 0 \\
-x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 &= 0 \\
x_1 + x_2 - 2x_3 \qquad\quad - x_5 &= 0 \\
x_3 + x_4 + x_5 &= 0
\end{aligned}$$

<u>Jawaban</u>: Bila SPL tersebut diselesaikan dengan metode eliminasi Gauss, maka dihasilkan solusinya sebagai berikut:

$$x_1 = -s - t \,;\; x_2 = s,\; x_3 = -t;\; x_4 = 0,\; x_5 = t$$

Solusi SPL dalam bentuk vektor (matriks kolom):

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s-t \\ s \\ -t \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s \\ s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -t \\ 0 \\ -t \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Jadi, solusi SPL dapat dinyatakan sebagai

$$\mathbf{x} = s\mathbf{v_1} + t\mathbf{v_2}$$

yang dalam hal ini, $\mathbf{v_1}$ = (–1, 1, 0, 0, 0) dan $\mathbf{v_2}$ = (–1, 0, –1, 0, 1)

Solusi SPL tersebut membentuk ruang vektor V. Jadi, V dibangun oleh $\mathbf{v_1}$ dan $\mathbf{v_2}$.

Dapat ditunjukkan bahwa $\mathbf{v_1}$ dan $\mathbf{v_2}$ bebas linier (buktikan!).

Jadi basis ruang vektor solusi SPL adalah {$\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$} dan dim(V) = 2.

Vektor Koordinat (relatif pada basis)

- Jika S = {$\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, …, $\mathbf{v_n}$} adalah basis untuk ruang vektor V, sedemikian sehingga setiap vektor **v** di dalam V dapat dinyatakan sebagai

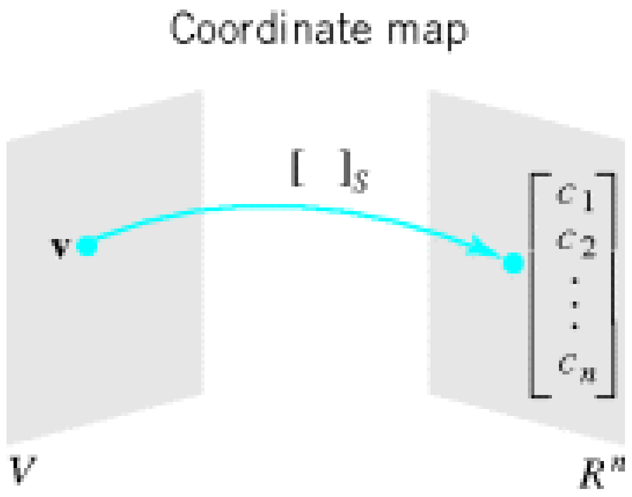
$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v_1} + c_2\mathbf{v_2} + \dots + c_n\mathbf{v_n}$$

maka koordinat **v** relatif terhadap basis S adalah

$$(\mathbf{v})_S = (c_1, c_2, \dots c_n)$$

atau dalam bentuk matriks koordinat:

$$[\mathbf{v}]_S = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$



Contoh 14: Sudah dibuktikan pada Contoh 12 bahwa $\mathbf{v_1} = (1, 2, 1)$, $\mathbf{v_2} = (2, 9, 0)$ dan $\mathbf{v_3} = (3, 3, 4)$ adalah basis untuk R^3.

(a) Tentukan vektor koordinat $\mathbf{v} = (5, -1, 9)$ relatif terhadapa basis $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}\}$

(b) Carilah vektor di R^3 yang koordinat vektornya adalah $(\mathbf{v})_S = (-1, 3, 2)$

Jawaban:

(a) $\mathbf{v} = c_1\mathbf{v_1} + c_2\mathbf{v_2} + c_3\mathbf{v_3}$

$(5, -1, 9) = c_1(1, 2, 1) + c_2(2, 9, 0) + c_3(3, 3, 4)$

Diperoleh SPL:

$$\begin{aligned} c_1 + 2c_2 + 3c_3 &= 5 \\ 2c_1 + 9c_2 + 3c_3 &= -1 \\ c_1 \qquad\quad + 4c_3 &= 9 \end{aligned}$$

Solusi SPL tersebut adalah $c_1 = 1$, $c_2 = -1$, $c_3 = 2$, maka $(\mathbf{v})_S = (1, -1, 2)$

(b) $\mathbf{v} = c_1\mathbf{v_1} + c_2\mathbf{v_2} + \dots + c_n\mathbf{v_n} = (-1)(1, 2, 1) + 3(2, 9, 0) + 2(3, 3, 4) = (11, 31, 7)$

Mengubah Basis

- Jika **v** adalah vektor di dalam V dan kita mengubah basis V dari basis B menjadi basis B', bagaimana mengubah koordinat vektor $[\mathbf{v}]_B$ menjadi $[\mathbf{v}]_{B'}$?

- Jika kita mengubah basis ruang vektor V dari basis lama B = $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ menjadi basis baru B' = $\{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2, \ldots, \mathbf{u}'_n\}$, maka untuk setiap vektor **v** di dalam V, koordinat lama vektor $[\mathbf{v}]_B$ menjadi $[\mathbf{v}]_{B'}$ dihubungkan dengan relasi berikut:

$$[\mathbf{v}]_B = P[\mathbf{v}]_{B'}$$

yang dalam hal ini, kolom-kolom *P* adalah koordinat vektor basis baru relatif terhadap basis lama, yakni kolom-kolom *P* adalah

$$[\mathbf{u}'_1]_B , [\mathbf{u}'_2]_B , \ldots, [\mathbf{u}'_n]_B$$

- P disebut **matriks transisi** dari basis B' ke basis B.
- Jika *P* adalah matriks transisi dari basis B' ke basis B untuk ruang vektor V, maka matriks P dapat dibalikkan dan P^{-1} adalah mariks transisi dari B ke B'.

- **Algoritma menghitung $P_{B \to B'}$:**

  Step 1: Bentuklah matriks [B' | B]

  Step 2: Lakukan operasi baris elementer (OBE) untuk mereduksi matriks dari step 1 menjadi matriks eselon baris tereduksi.

  Step 3: Matriks hasil step 2 akan menjadi $[\, I \mid P_{B \to B'} \,]$

  Step 4: Ruas kanan dari hasil step 3 (sebelah tanda |) menjadi $P_{B \to B'}$

- Algoritma di atas dapat diringkas ke dalam diagram:

$$[\text{ basis baru} \mid \text{basis lama}] \xrightarrow{\text{OBE}} [\, I \mid P_{B \to B'} \,]$$

Contoh 15: Di dalam R^2, basis standardnya adalah B = {$\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$} = {**i**, **j**} = {(1,0), (0, 1)}. Basis yang lain untuk R^2 adalah B'= {$\mathbf{u'_1}$, $\mathbf{u'_2}$} = {(1, 1), (2, 1)}

(a) Tentukan matriks transisi dari B' ke B

(b) Tentukan matriks transisi dari B ke B'

Jawaban:

(a) Pada kasus ini, B' = basis lama, dan B = basis baru

$$[\text{ basis baru} \mid \text{basis lama }] = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{OBE}} [\, I \mid P_{B' \to B} \,]$$

Karena ruas kiri sudah berbentuk matriks identitas, maka tidak perlu dilakukan OBE, sehingga matriks transisi adalah $P_{B' \to B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(b) Pada kasus ini, B = basis lama, dan B' = basis baru

$$[\text{ basis baru} \mid \text{basis lama }] = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{OBE}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Matriks transisi adalah $P_{B \to B'} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

- Menghitung koordinat vektor **v** dari basis B ke B’:

$$[\mathbf{v}]_{B'} = P_{B\to B'}\,[\mathbf{v}]_B$$

- Menghitung koordinat vektor **v** dari basis B’ ke B:

$$[\mathbf{v}]_{B} = P_{B'\to B}\,[\mathbf{v}]_{B'}$$

Contoh 16: Berdasarkan Contoh 15, misalkan koordinat vektor **v** pada basis B’ adalah $[\mathbf{v}]_{B'} = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}$, maka koordinat **v** pada basis B adalah

$$[\mathbf{v}]_{B} = P_{B'\to B}\,[\mathbf{v}]_{B'} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Contoh 17 (soal kuis 2 tahun 2019): Diketahui basis B = {$\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$} dan basis B' = {$\mathbf{u}'_1$, $\mathbf{u}'_2$, $\mathbf{u}'_3$} sebagai berikut: $\mathbf{u}_1$ = (2, 1, 1), $\mathbf{u}_2$ = (2, –1, 1), $\mathbf{u}_3$ = (1, 2, 1) dan $\mathbf{u}'_1$ = (3, 1, –5), $\mathbf{u}'_2$ = (1, 1, –3), $\mathbf{u}'_3$ = (–1, 0, 2).

(a) Tentukan matriks transisi dari B ke B'
(b) Tentukan matriks transisi dari basis standard ke B
(c) Tentukan matriks transisi dari basis standard ke B'
(d) Tentukan koordinat vektor **w** pada basis B, jika koordinat W pada basis standard (S) adalah $(\mathbf{w})_S$ = (–5, 8, –5).

<u>Jawaban</u>:

(a) Matriks transisi dari B ke B':

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & -1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & -3 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{OBE}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 & 5/2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -3 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 1 & 6 \end{array}\right) = (I\,|\,P_{B\to B'})$$

Jadi, matriks transisi $P_{B\to B'} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5/2 \\ -2 & -3 & -1/2 \\ 5 & 1 & 6 \end{bmatrix}$

(b) Matriks transisi dari basis standard ke basis B

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{OBE}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3/2 & 1/2 & -5/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & -1/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right) = (I|P_{S\to B})$$

Jadi, matriks transisi $P_{S\to B} = \begin{bmatrix} 3/2 & 1/2 & -5/2 \\ -1/2 & -1/2 & 3/2 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

(c) Matriks transisi dari basis standard ke basis B'

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{OBE}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) = (I|P_{S\to B'})$$

Jadi, matriks transisi $P_{S\to B'} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ -1 & 1/2 & -1/2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

18

(d) Koordinat vektor **w** pada basis B, jika koordinat **w** pada basis standard adalah $[w]_S$ = (–5, 8, –5) dihitung sebagai beriku:

$$\begin{bmatrix} 3/2 & 1/2 & -5/2 \\ -1/2 & -1/2 & 3/2 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ 8 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -9 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Bersambung

Seri bahan kuliah Algeo #16

Ruang Vektor Umum
(bagian 3)

Bahan kuliah IF2123 Aljabar Linier dan Geometr

Program Studi Teknik Informatika
STEI-ITB

Sumber:

Howard Anton & Chris Rores, *Elementary Linear Algebra, 10th Edition*

Ruang Baris, Ruang Kolom, dan Ruang Null

- Misalkan A adalah matriks m x n sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- Kita dapat membentuk dari matriks A:

  (1) **Vektor baris**: vektor yang dibentuk dari baris-baris matriks

  (2) **Vektor kolom**: vector yang dibentuk dari kolom-kolom matriks

- Vektor-vektor baris dari matriks A:

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_1 &= [a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1n}] \\
\mathbf{r}_2 &= [a_{21} \quad a_{22} \quad \cdots \quad a_{2n}] \\
\vdots & \qquad\qquad\qquad \vdots \\
\mathbf{r}_m &= [a_{m1} \quad a_{m2} \quad \cdots \quad a_{mn}]
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ vektor-vektor di R^n

- Vektor-vektor kolom dari matriks A:

$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \ldots, \quad \mathbf{c}_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ vektor-vektor di R^m

Contoh 1: Diberikan matriks A sebagai berikut $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 & 7 \\ 2 & 6 & 9 & -3 \\ 0 & 4 & -1 & 10 \end{bmatrix}$

Vektor-vektor barisnya adalah

$$\mathbf{r_1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{r_2} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 9 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{r_3} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -1 & 10 \end{bmatrix}$$

Vektor-vektor kolomnya adalah

$$\mathbf{c_1} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{c_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{c_3} = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{c_4} = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \\ 10 \end{bmatrix}$$

DEFINISI

- Jika A adalah matriks m x n, maka subruang dari R^n yang dibangun oleh vektor-vektor baris dari A dinamakan **ruang baris** (*row space*) matriks A.

- Subruang dari R^m yang dibangun oleh vektor-vektor kolom dari A dinamakan **ruang kolom** (*column space*) matriks A.

- Ruang solusi sistem persamaan linier homogen A**x** = 0, yang merupakan subruang dari R^n, dinamakan **ruang null** (*null space*) matriks A.

Contoh 2 (Ruang null): Tentukan ruang null untuk matriks A berikut

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

<u>Jawaban</u>: Untuk menentukan ruang null, selesaikan SPL homogen A**x** = 0 berikut

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dengan metode eliminasi Gauss/Gauss-Jordan, diperoleh solusinya sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

atau dinyatakan sebagai $\mathbf{x} = s\mathbf{v_1} + t\mathbf{v_2}$

yang dalam hal ini, $\mathbf{v_1} = (-1, 1, 0, 0, 0)$ dan $\mathbf{v_2} = (-1, 0, -1, 0, 1)$

Ruang solusi yang dibentuk oleh $\mathbf{v_1}$ dan $\mathbf{v_2}$ disebut **ruang null**

Teorema. Sebuah SPL A**x** = **b** disebut **konsisten** jika dan hanya jika **b** adalah kombinasi linier dari vektor-vektor kolom matriks A, dengan kata lain **b** berada di dalam ruang kolom matriks A.

Contoh 3: Tinjau SPL berikut ini

$$\begin{aligned} -x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= -9 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 &= -3 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Solusinya dengan metode eliminasi Gauss adalah $x_1 = 2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 3$. Solusi ini dapat dinyatakan sebagai

$$2\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix} = \mathbf{b}$$

Jadi, **b** merupakan kombinasi linier dari vektor-vektor kolom matriks A

Basis untuk Ruang Baris, Ruang Kolom, dan Ruang Null

- Misalkan A adalah matrik berukuran m x n.
- Bagaimana menentukan basis untuk ruang baris, ruang kolom, dan ruang null dari matriks A?
- Langkah-langkahnya adalah sebagai berikut:

  1. Lakukan reduksi baris pada A dengan menerapkan OBE sampai menghasilkan matriks eselon baris R
  2. Basis untuk ruang baris dari A adalah semua vektor baris yang mengandung 1 utama pada matriks R
  3. Basis untuk ruang kolom dari A adalah semua vektor kolom dari matriks A yang berkoresponden dengan vektor kolom matriks R yang mengandung 1 utama.

- Basis untuk ruang null adalah adalah vektor-vektor yang membangun ruang solusi SPL homogen A*x* = 0

Contoh 4: Tentukan basis untuk ruang baris, basis untuk ruang kolom, dan basis untuk ruang null dari matriks A berikut

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 8 & 2 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 9 & 7 \\ -1 & 3 & -4 & 2 & -5 & -4 \end{bmatrix}$$

Jawaban: Lakukan reduksi baris pada matriks A dengan operasi baris elementer sbb:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 8 & 2 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 9 & 7 \\ -1 & 3 & -4 & 2 & -5 & -4 \end{bmatrix} \overset{\text{OBE}}{\sim \;\cdots\; \sim} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R$$

Basis untuk ruang baris adalah semua baris matriks R yang mengandung 1 utama:

$$\mathbf{r_1} = [1 \quad -3 \quad 4 \quad -2 \quad 5 \quad 4]$$
$$\mathbf{r_2} = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 3 \quad -2 \quad -6]$$
$$\mathbf{r_3} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 5]$$

$\Rightarrow$ Dimensi ruang baris = 3

Basis untuk ruang kolom adalah semua kolom dari matriks A yang berkoresponden dengan kolom matriks R yang mengandung 1 utama:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 8 & 2 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 9 & 7 \\ -1 & 3 & -4 & 2 & -5 & -4 \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R$$

Jadi, basis untuk ruang kolom adalah

$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 9 \\ -4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{c}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 9 \\ -5 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

Dimensi ruang kolom = 3

$\boxed{\text{Dimensi ruang baris = dimensi ruang kolom}}$

Untuk menemukan basis ruang null, tentukan solusi A**x** = 0 sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 & 0 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 8 & 2 & 0 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 9 & 7 & 0 \\ -1 & 3 & -4 & 2 & -5 & -4 & 0 \end{bmatrix} \overset{\text{OBE}}{\sim \; \cdots \; \sim} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matriks augmented

Dari matriks augmented yang terakhir diperoleh tiga persamaan sbb:

$$x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 + 5x_5 + 4x_6 = 0 \qquad \text{(i)}$$

$$x_3 + 3x_4 - 2x_5 - 6x_6 = 0 \qquad \text{(ii)}$$

$$x_5 + 5x_6 = 0 \qquad \text{(iii)}$$

Dari (iii) diperoleh: $x_5 = -5x_6$

Dari (ii) diperoleh: $x_3 = -3x_4 + 2x_5 + 6x_6 = -3x_4 + 2(-5x_6) + 6x_6 = -3x_4 - 4x_6$

Dari (i) diperoleh: $x_1 = -3x_2 - 4x_3 + 2x_4 - 5x_5 - 4x_6 = -3x_2 - 4(-3x_4 - 4x_6) + 2x_4 - 5(-5x_6) - 4x_6 = -3x_2 + 14x_4 + 22x_6$

Misalkan $x_2 = r$, $x_4 = s$, dan $x_6 = t$, maka

$x_1 = -3x_2 + 14x_4 + 22x_6 = -3r + 14s + 22t$

$x_3 = -3x_4 - 4x_6 = -3s - 4t$

$x_5 = -5t$

Solusi A**x** = 0 dinyatakan dalam bentuk vektor sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3r + 14s + 22t \\ r \\ -3s - 4t \\ s \\ -5t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3r \\ r \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 14s \\ 0 \\ -3s \\ s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 22t \\ 0 \\ -4t \\ 0 \\ -5t \\ t \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 14 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 22 \\ 0 \\ -4 \\ 0 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Basis untuk ruang null adalah:

$\mathbf{v_1} = (-3, 1, 0, 0, 0, 0)$, $\mathbf{v_2} = (14, 0, -3, 1, 0, 0)$, dan $\mathbf{v_3} = (22, 0, -4, 0, -5, 0)$

Dimensi ruang null = 3

- Kita juga dapat menemukan basis untuk ruang vector di R^n dengan menggunakan operasi baris elementer. Perhatikan contoh 5 di bawah ini.

Contoh 5: Tentukan basis untuk subruang dari R^5 yang dibangun oleh vektor-vektor

$\mathbf{v_1}$ = (1, –2, 0, 0, 3), $\mathbf{v_2}$ = (2, –5, –3, –2, 6), $\mathbf{v_3}$ = (0, 5, 15, 10, 0), dan $\mathbf{v_4}$ = (2, 6, 18, 8, 6)

<u>Jawaban</u>:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & -5 & -3 & -2 & 6 \\ 0 & 5 & 15 & 10 & 0 \\ 2 & 6 & 18 & 8 & 6 \end{bmatrix} \sim \overset{\text{OBE}}{\cdots} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R$$

Basis adalah semua baris dari R yang mengandung 1 utama, yaitu:

$\mathbf{w_1}$ = (1, –2, 0, 0, 3), $\mathbf{w_2}$ = (0, 1, 3, 2, 0), dan $\mathbf{w_3}$ = (0, 0, 1, 1, 0)

Dimensi = 3

Rank dan Nullity

- *Rank* matriks A, ditulis sebagai *rank*(A), didefinisikan sebagai dimensi ruang baris atau dimensi ruang kolom dari matriks A.
- Ingat kembali bahwa dimensi ruang baris = dimensi ruang kolom
- *Nullity* matriks A, ditulis sebagai *nullity*(A), didefinisikan sebagai dimensi ruang null dari matriks A.
- Untuk matriks A dengan n kolom, berlaku hubungan sbb:

$$\boxed{\mathit{rank}(A) + \mathit{nullity}\,(A) = n}$$

- Rank matriks A juga dapat diartikan juga sebagai

  = jumlah baris tidak-nol pada matriks eselon dari hasil reduksi baris matriks A.

  = jumlah variabel utama (variable non-parameter) pada solusi umum Ax = 0

- Nullity matriks A dapat diartikan sebagai jumlah parameter di dalam solusi umum Ax = 0

THEOREM 4.8.3 *If A is an $m \times n$ matrix, then*

(a) $\text{rank}(A)$ = *the number of leading variables in the general solution of* $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

(b) $\text{nullity}(A)$ = *the number of parameters in the general solution of* $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Contoh 6: Tinjau kembali matriks A pada Contoh 4

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 8 & 2 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 9 & 7 \\ -1 & 3 & -4 & 2 & -5 & -4 \end{bmatrix}$$

Ukuran mariks A adalah 4 x 6 (m = 4, n = 6). Sudah dihitung pada Contoh 4 bahwa dimensi ruang baris = 3, dimensi ruang kolom = 3, dan dimensi ruang null = 3, maka

rank(A) = 3

nullity(A) = 3

rank(A) + nullity(A) = n $\rightarrow$ 3 + 3 = 6

Contoh 17: Tentukan *rank* dan *nullity* matriks A berikut

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 & 5 & -3 \\ 3 & -7 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & -5 & 2 & 4 & 6 & 1 \\ 4 & -9 & 2 & -4 & -4 & 7 \end{bmatrix}$$

<u>Jawaban</u>:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 & 5 & -3 \\ 3 & -7 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & -5 & 2 & 4 & 6 & 1 \\ 4 & -9 & 2 & -4 & -4 & 7 \end{bmatrix} \overset{\text{OBE}}{\sim \cdots \sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & -28 & -37 & 13 \\ 0 & 1 & -2 & -12 & -16 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Rank(A) juga dapat dihitung dari jumlah baris tidak-nol pada matriks hasil OBE. Ada dua baris tidak-nol pada matriks hasil OBE di atas, maka *rank*(*A*) = 2.

Nullity dihitung sbb: *nullity*(A) = *n* – *rank*(*A*) = 6 – 2 = 4

Untuk membuktikan bahwa *nullity*(A) = 4, maka selesaikan terlebih dahulu A**x** = 0,

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 & 5 & -3 & 0 \\ 3 & -7 & 2 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & -5 & 2 & 4 & 6 & 1 & 0 \\ 4 & -9 & 2 & -4 & -4 & 7 & 0 \end{bmatrix} \overset{\text{OBE}}{\sim \ \cdots \ \sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & -28 & -37 & 13 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -12 & -16 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks *augmented* yang terakhir diperoleh dua persamaan sbb:

$$\begin{aligned} x_1 \quad & - 4x_3 - 28x_4 - 37x_5 + 13x_6 = 0 \qquad \text{(i)} \\ x_2 & - 2x_3 - 12x_4 - 16x_5 + 5x_6 = 0 \qquad \text{(ii)} \end{aligned}$$

Dari (ii) diperoleh: $x_2 = 2x_3 - 12x_4 + 16x_5 - 5x_6$
Dari (i) diperoleh: $x_1 = 4x_3 + 28x_4 + 37x_5 - 13x_6$
Misalkan $x_3 = r$, $x_4 = s$, $x_5 = t$, $x_6 = u$, maka solusi A**x** = 0 dinyatakan sebagai vektor:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4r + 28s + 37t \ - 13u \\ 2r + 12s + 16t - 5u \\ r \\ s \\ t \\ u \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 28 \\ 12 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 37 \\ 16 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \ u\begin{bmatrix} -13 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Basis untuk ruang null adalah:

$\mathbf{v_1}$ = (4, 2, 1, 0, 0, 0), $\mathbf{v_2}$ = (28, 12, 0, 0, 1, 0), $\mathbf{v_3}$ = (37, 16, 0, 0, 1, 0), dan
$\mathbf{v_4}$ = (–13 , –5, 0, 0, 0, 1)

Dimensi ruang null = 4, sehingga *nullity*(A) = 4

Nullity(A) = 4 juga berarti jumlah parameter pada solusi umum Ax = 0 adalah 4 (pada kasus ini parameter solusi adalah r, s, t, dan u, semuanya elemene bilangan riil)

THEOREM 4.8.4 Equivalent Statements

If A is an $n \times n$ matrix, then the following statements are equivalent.

(a) A is invertible.

(b) $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ has only the trivial solution.

(c) The reduced row echelon form of A is I_n.

(d) A is expressible as a product of elementary matrices.

(e) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ is consistent for every $n \times 1$ matrix $\mathbf{b}$.

(f) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ has exactly one solution for every $n \times 1$ matrix $\mathbf{b}$.

(g) $\det(A) \neq 0$.

(h) The column vectors of A are linearly independent.

(i) The row vectors of A are linearly independent.

(j) The column vectors of A span R^n.

(k) The row vectors of A span R^n.

(l) The column vectors of A form a basis for R^n.

(m) The row vectors of A form a basis for R^n.

(n) A has rank n.

(o) A has nullity 0.

Latihan

1. (soal kuis tahun 2019)

Diberikan matriks berukuran 3x3 sbb :

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & -4 & -4 \\ 7 & -6 & 2 \end{bmatrix}$$

Tentukan:

a). Basis dari ruang kolom
b). Basis dari ruang baris
c). Basis dari ruang null

Seri bahan kuliah Algeo #17

Ruang Vektor Umum (bagian 4) dan Transformasi Linier

Bahan kuliah IF2123 Aljabar Linier dan Geometri

Program Studi Teknik Informatika
STEI-ITB

Sumber:

Howard Anton & Chris Rores, *Elementary Linear Algebra, 10th Edition*

Transformasi Linier

- Transformasi = fungsi =pemetaan (*mapping*)

DEFINISI 1: Misalkan V dan W adalah ruang vektor. Transformasi yang memetakan ruang vektor V ke ruang vektor W ditulis sebagai

$$T : V \rightarrow W$$

V adalah daerah asal (domain) transformasi T dan W adalah daerah hasil transformasi (kodomain) fungsi. Jika V = W, maka T dinamakan **operator** pada V.

- Jika $\mathbf{v} \in V$ dan $\mathbf{w} \in W$, maka

$$\mathbf{w} = T(\mathbf{v})$$

Contoh 1: Misalkan T : $R^3 \rightarrow R^3$ didefinisikan sebagai berikut:

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 + x_3 \\ x_1 + 5x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Tentukan bayangan vektor **v** = (3, 2, 0).

<u>Jawaban</u>:

$$T\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 + 2(2) + 0 \\ 3 + 5(2) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 13 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Jadi, bayangan vektor (3, 2, 0) adalah (7, 13, 0).

DEFINISI 2: Misalkan V dan W adalah ruang vektor. Transformasi

$$T : V \rightarrow W$$

dinamakan **transformasi linier** jika untuk semua **u** dan **v** di dalam **V** dan *k* sebuah skalar berlaku:

(1) $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$

(2) $T(k\mathbf{u}) = kT(\mathbf{u})$

Jika V = W, maka T dinamakan **operator** linier pada V.

Contoh 2: Diberikan fungsi T : $R^2 \rightarrow R^2$ yang dalam hal ini T(x,y) = (2x, y), maka akan ditunjukkan bahwa T adalah transformasi linier.

Misalkan **u** dan **v** adalah dua buah vektor di R^2, **u** = (u_1, u_2) dan **v** = (v_1, v_2).

(1) T(**u** + **v**) = T($u_1 + v_1$, $u_2 + v_2$) = (2($u_1 + v_1$), $u_2 + v_2$) = (2u_1 + 2v_1, $u_2 + v_2$)

$$= \begin{bmatrix} 2u_1 + 2v_1 \\ u_2 + v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$$

(2) T(k**u**) = T(ku_1, ku_2) = (2ku_1, ku_2)

$$= \begin{bmatrix} 2ku_1 \\ ku_2 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 2u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = kT(\mathbf{u})$$

Karena T(**u** + **v**) = T(**u**) + T(**v**) dan T(k**u**) = kT(**u**), maka T adalah transformasi linier

Contoh 3: Diberikan fungsi T : $R^2 \rightarrow R^2$ yang dalam hal ini T(x,y) = (x, y + 1), maka akan ditunjukkan bahwa T <u>bukan</u> transformasi linier.

Misalkan **u** dan **v** adalah dua buah vektor di R^2, **u** = (u_1, u_2) dan **v** = (v_1, v_2).

(1) T(**u** + **v**) = T($u_1 + v_1$, $u_2 + v_2$) = ($u_1 + v_1$, $u_2 + v_2 + 1$)

$$= \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 + 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = T(\mathbf{u}) + ?$$

Karena T(**u** + **v**) $\neq$ T(**u**) + T(**v**) maka T bukan transformasi linier

- Jika T : V $\rightarrow$ W adalah transformasi linier, $\mathbf{v_1}$ dan $\mathbf{v_2} \in \mathbf{V}$, dan k_1 dan k_2 adalah skalar maka

$$T(k_1\mathbf{v_1} + k_2\mathbf{v}_2) = T(k_1\mathbf{v_1}) + T(k_2\mathbf{v}_2) = k_1T(\mathbf{v_1}) + k_2T(\mathbf{v}_2)$$

- Secara umum, jika $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n} \in$ ..**V**, dan $k_1, k_2, \ldots, k_n$ adalah skalar maka

$$T(k_1\mathbf{v_1} + k_2\mathbf{v}_2 + \ldots + k_n\mathbf{v}_n) = k_1T(\mathbf{v_1}) + k_2T(\mathbf{v}_2) + \ldots + k_nT(\mathbf{v}_n)$$

Teorema 1: Jika T : V $\rightarrow$ W adalah transformasi linier, maka

(1) T(0) = 0

(2) T(–**v**) = –T(**v**)

(3) T(**u** – **v**) = T(**u**) – T(**v**)

Transformasi Matriks dari R^n ke R^m

- Jika $V = R^n$ dan $W = R^m$, maka

$$T : R^n \rightarrow R^m$$

- Jika $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n$ dan $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_m) \in R^m$ maka

$$(w_1, w_2, \ldots, w_m) = T(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

yang dalam hal ini,

$$w_1 = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
$$w_2 = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
$$\ldots$$
$$w_m = f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

- Jika $f_1, f_2, \ldots, f_m$ linier maka

$$w_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n$$

$$w_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n$$

…

$$w_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n$$

yang dapat ditulis dengan notasi matriks:

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

atau dalam bentuk ringkas

$$\mathbf{w} = A\mathbf{x}$$

A disebut **matriks standard** transformasi sedangkan transformasi T dinamakan **transformasi matriks**, sehingga $\mathbf{w} = A\mathbf{x}$ dapat ditulis sebagai

$$\mathbf{w} = T_A(\mathbf{x})$$

Contoh 4. Tranformasi matriks T : $R^4 \rightarrow R^3$ didefinisikan sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & -5 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Matriks standard transformasi adalah

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & -5 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Jika **x** = (1, –3, 0, 2), maka hasil transformasi T adalah

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & -5 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Jadi, **w** = (1, 3, 8)

Teorema. Untuk setiap matriks A, transformasi matriks $T_A : R^n \rightarrow R^m$ memiliki sifat-sifat sebagai berikut untuk semua vektor **u** dan **v** di dalam R^n dan untuk setiap skalar *k*:

(a) $T_A(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$

(b) $T_A(k\mathbf{u}) = kT_A(\mathbf{u})$

(c) $T_A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T_A(\mathbf{u}) + T_A(\mathbf{v})$

(d) $T_A(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = T_A(\mathbf{u}) - T_A(\mathbf{v})$

Prosedur Menemukan Matriks Standard

Step 1: Tentukan bayangan dari semua vektor basis standard $\mathbf{e_1}$**,** $\mathbf{e_2}$, …, $\mathbf{e_n}$ di R^n , yaitu

$$T(\mathbf{e_1}),\ T(\mathbf{e_2}),\ \ldots,\ T(\mathbf{e_n})$$

dalam bentuk kolom.

Step 2: Konstruksi matriks yang memiliki bayangan-bayangan hasil dari Step1 sebagai kolom-kolom yang berurutan. Matriks tersebut adalah matriks standard untuk transformasi.

- Secara umum, jika

$$T(\mathbf{e_1}) = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, T(\mathbf{e_2}) = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \ldots., T(\mathbf{e_n}) = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

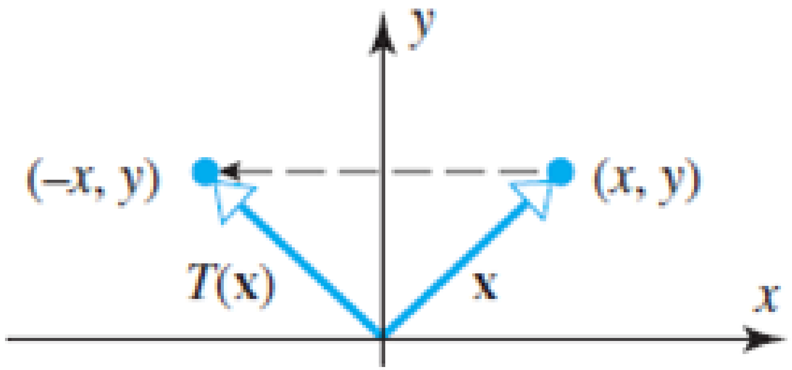
maka

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ T(\mathbf{e_1}) & T(\mathbf{e_2}) & \ldots & T(\mathbf{e_n}) \end{array}$$

adalah matriks standard untuk $T : R^n \rightarrow R^m$

Contoh 5: Tentukan matriks standard untuk pencerminan vektor di R^2 terhadap sumbu-Y.



Pencerminan vektor **x** = (x, y) terhadap sumbu-Y
Hasil pencerminan adalah **x'** = T(**x**) = (–x , y)

$\mathbf{e}_1 = (1, 0) \rightarrow T(\mathbf{e}_1) = (-1, 0)$
$\mathbf{e}_2 = (0, 1) \rightarrow T(\mathbf{e}_2) = (0, 1)$

Matriks standard: $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Contoh 6: Carilah matriks standard dari transformasi T : $R^3 \to R^3$ yang didefinisikan sebagai berikut:

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 + x_3 \\ x_1 + 5x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Lalu tentukan bayangan vektor **v** = (3, 2, 0).

Jawaban:

$\mathbf{e_1} = (1, 0, 0) \to T(\mathbf{e_1}) = T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 + 2(0) + 0 \\ 1 + 5(0) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\mathbf{e_2} = (0, 1, 0) \to T(\mathbf{e_2}) = T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 + 2(1) + 0 \\ 0 + 5(1) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\mathbf{e_3}$ = (0, 0, 1) $\rightarrow$ T($\mathbf{e_3}$) = T$\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0+2(0)+1\\0+5(0)\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

Matriks standard adalah

$$A = \begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\1 & 5 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Jika **v** = (3, 2, 0), maka bayangan **v** adalah **w**,

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix}w_1\\w_2\\w_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\1 & 5 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\2\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7\\13\\0\end{bmatrix}$$

Table 1

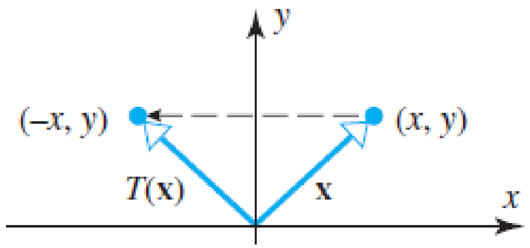
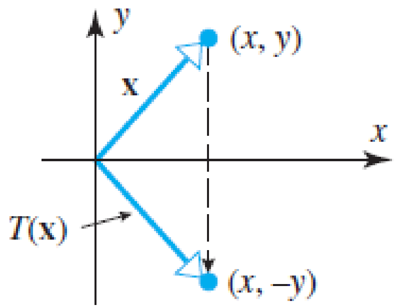
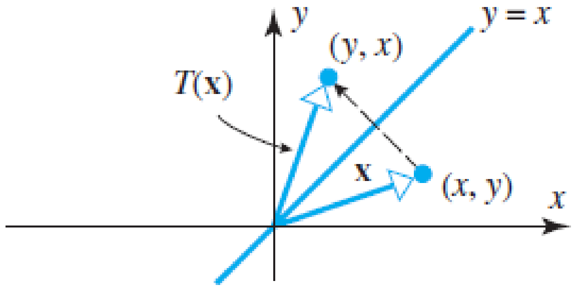
Operator	Illustration	Images of $\mathbf{e}_1$ and $\mathbf{e}_2$	Standard Matrix
Reflection about the y-axis $T(x, y) = (-x, y)$		$T(\mathbf{e}_1) = T(1, 0) = (-1, 0)$ $T(\mathbf{e}_2) = T(0, 1) = (0, 1)$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
Reflection about the x-axis $T(x, y) = (x, -y)$		$T(\mathbf{e}_1) = T(1, 0) = (1, 0)$ $T(\mathbf{e}_2) = T(0, 1) = (0, -1)$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
Reflection about the line $y = x$ $T(x, y) = (y, x)$		$T(\mathbf{e}_1) = T(1, 0) = (0, 1)$ $T(\mathbf{e}_2) = T(0, 1) = (1, 0)$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Table 2

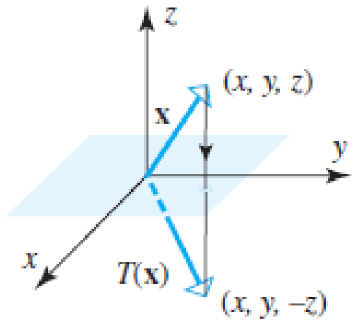
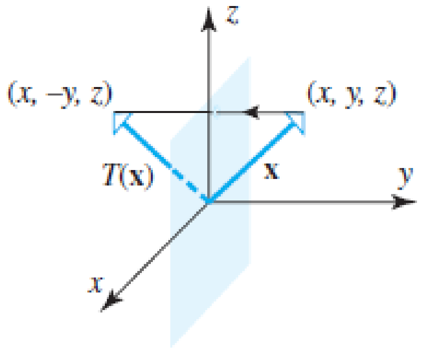
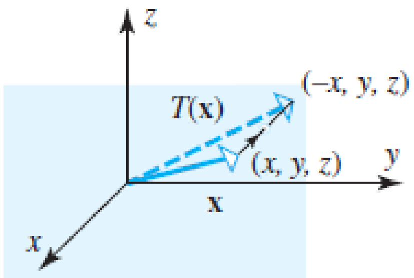
Operator	Illustration	e_1, e_2, e_3	Standard Matrix
Reflection about the xy-plane $T(x, y, z) = (x, y, -z)$		$T(\mathbf{e}_1) = T(1, 0, 0) = (1, 0, 0)$ $T(\mathbf{e}_2) = T(0, 1, 0) = (0, 1, 0)$ $T(\mathbf{e}_3) = T(0, 0, 1) = (0, 0, -1)$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$
Reflection about the xz-plane $T(x, y, z) = (x, -y, z)$		$T(\mathbf{e}_1) = T(1, 0, 0) = (1, 0, 0)$ $T(\mathbf{e}_2) = T(0, 1, 0) = (0, -1, 0)$ $T(\mathbf{e}_3) = T(0, 0, 1) = (0, 0, 1)$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Reflection about the yz-plane $T(x, y, z) = (-x, y, z)$		$T(\mathbf{e}_1) = T(1, 0, 0) = (-1, 0, 0)$ $T(\mathbf{e}_2) = T(0, 1, 0) = (0, 1, 0)$ $T(\mathbf{e}_3) = T(0, 0, 1) = (0, 0, 1)$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Table 3

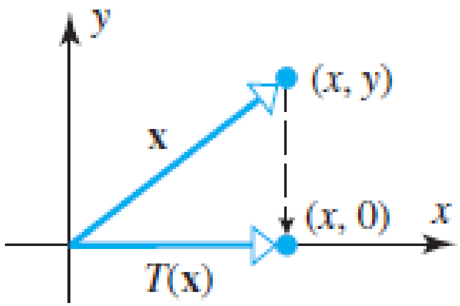
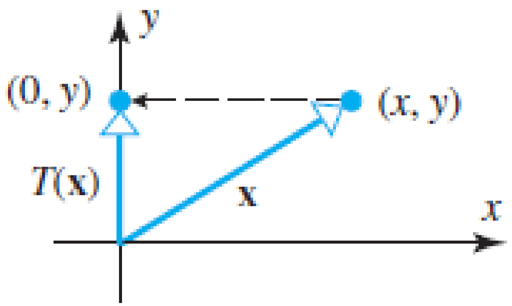
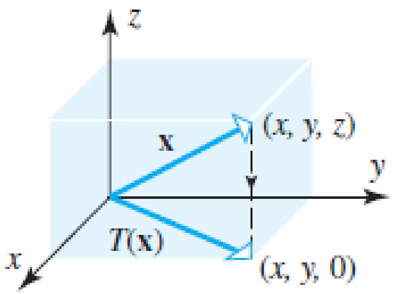
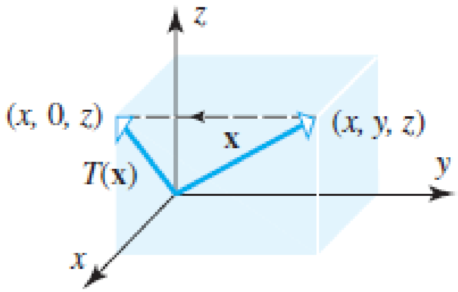
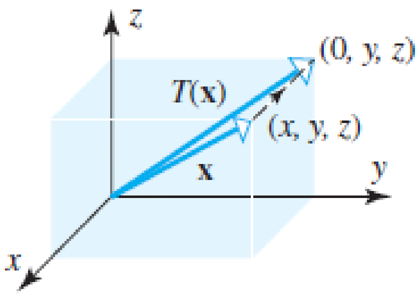
Operator	Illustration	Images of e_1 and e_2	Standard Matrix
Orthogonal projection on the x-axis $T(x, y) = (x, 0)$		$T(\mathbf{e}_1) = T(1, 0) = (1, 0)$ $T(\mathbf{e}_2) = T(0, 1) = (0, 0)$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
Orthogonal projection on the y-axis $T(x, y) = (0, y)$		$T(\mathbf{e}_1) = T(1, 0) = (0, 0)$ $T(\mathbf{e}_2) = T(0, 1) = (0, 1)$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Table 4

Operator	Illustration	Images of $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$	Standard Matrix
Orthogonal projection on the xy-plane $T(x, y, z) = (x, y, 0)$		$T(\mathbf{e}_1) = T(1, 0, 0) = (1, 0, 0)$ $T(\mathbf{e}_2) = T(0, 1, 0) = (0, 1, 0)$ $T(\mathbf{e}_3) = T(0, 0, 1) = (0, 0, 0)$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Orthogonal projection on the xz-plane $T(x, y, z) = (x, 0, z)$		$T(\mathbf{e}_1) = T(1, 0, 0) = (1, 0, 0)$ $T(\mathbf{e}_2) = T(0, 1, 0) = (0, 0, 0)$ $T(\mathbf{e}_3) = T(0, 0, 1) = (0, 0, 1)$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Orthogonal projection on the yz-plane $T(x, y, z) = (0, y, z)$		$T(\mathbf{e}_1) = T(1, 0, 0) = (0, 0, 0)$ $T(\mathbf{e}_2) = T(0, 1, 0) = (0, 1, 0)$ $T(\mathbf{e}_3) = T(0, 0, 1) = (0, 0, 1)$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Operator Rotasi

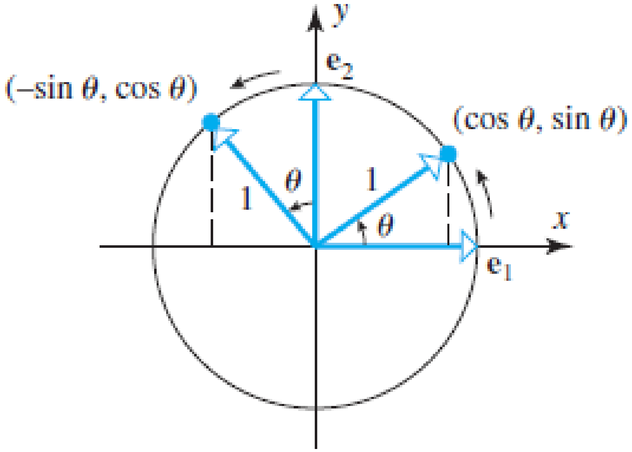


Table 5

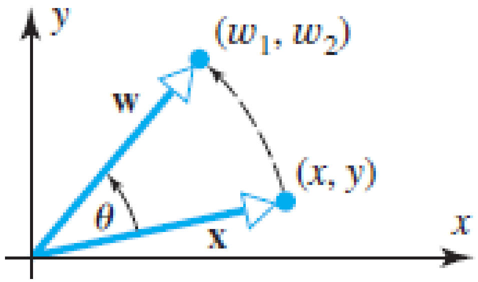
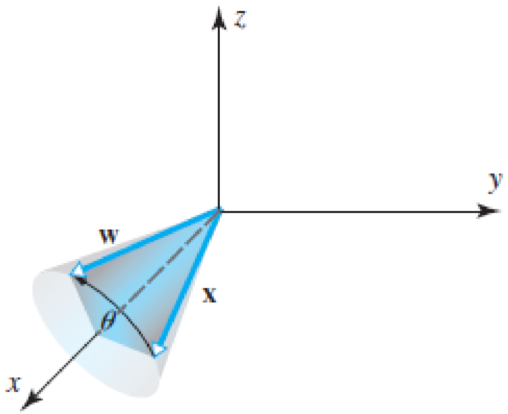
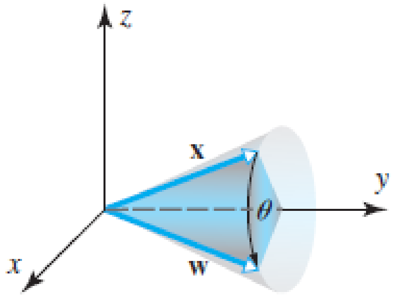
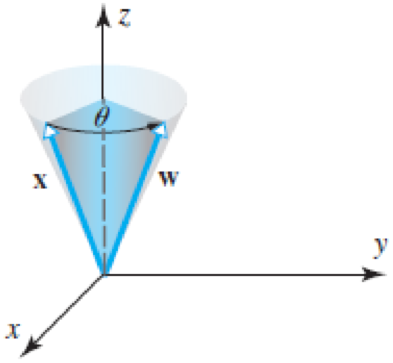
Operator	Illustration	Rotation Equations	Standard Matrix
Rotation through an angle θ		$w_1 = x\cos\theta - y\sin\theta$ $w_2 = x\sin\theta + y\cos\theta$	$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

Table 6

Operator	Illustration	Rotation Equations	Standard Matrix
Counterclockwise rotation about the positive x-axis through an angle θ		$w_1 = x$ $w_2 = y\cos\theta - z\sin\theta$ $w_3 = y\sin\theta + z\cos\theta$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$
Counterclockwise rotation about the positive y-axis through an angle θ		$w_1 = x\cos\theta + z\sin\theta$ $w_2 = y$ $w_3 = -x\sin\theta + z\cos\theta$	$\begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$
Counterclockwise rotation about the positive z-axis through an angle θ		$w_1 = x\cos\theta - y\sin\theta$ $w_2 = x\sin\theta + y\cos\theta$ $w_3 = z$	$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Dilatasi dan Kontraksi

Table 7

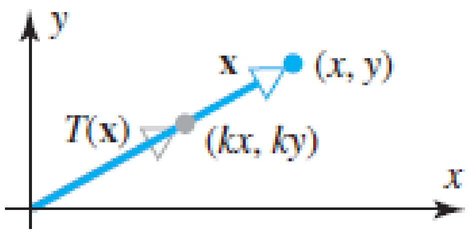
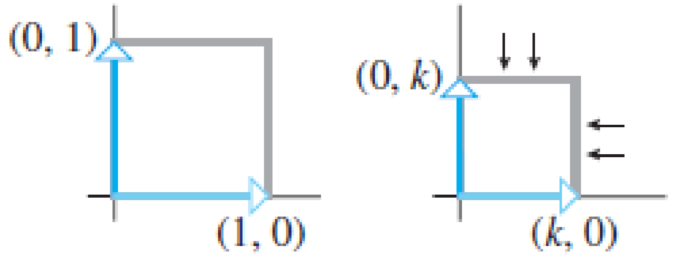
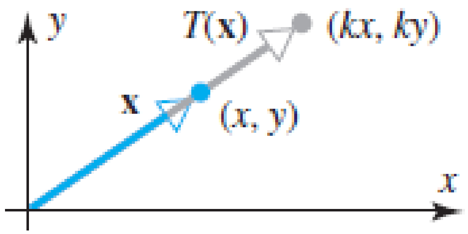
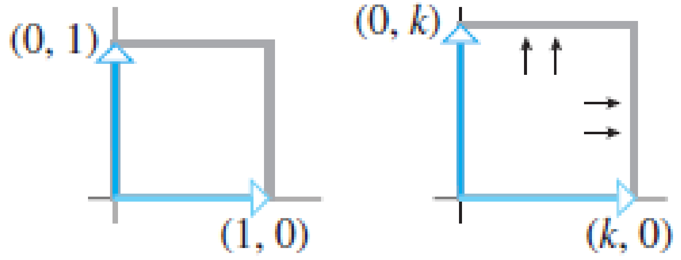
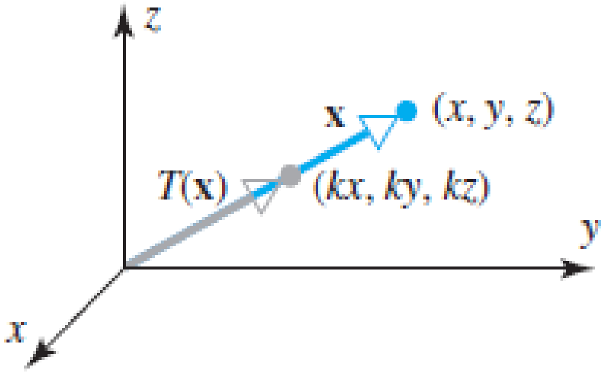
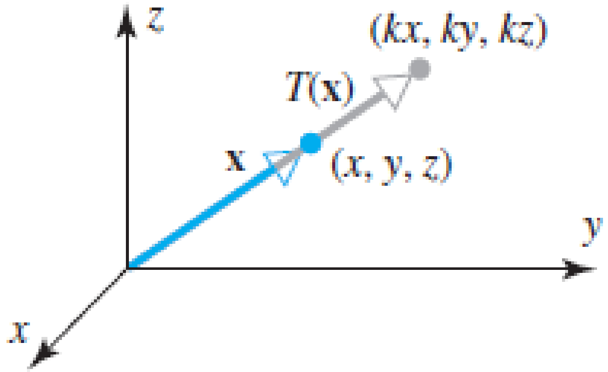
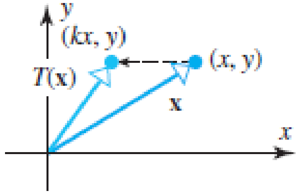
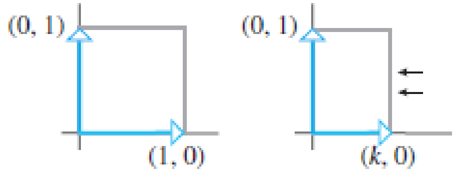
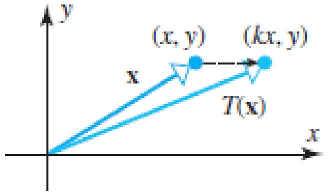
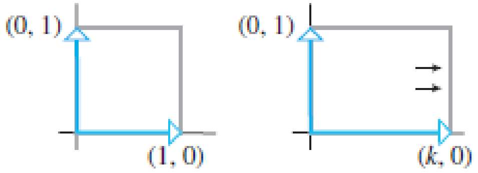
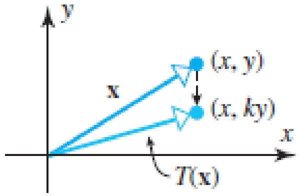
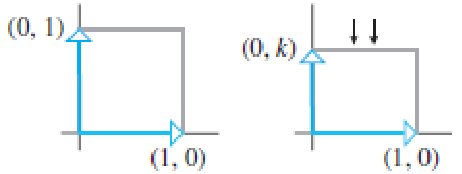
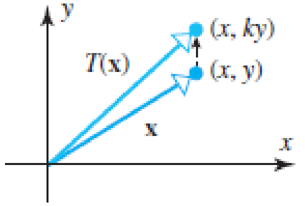
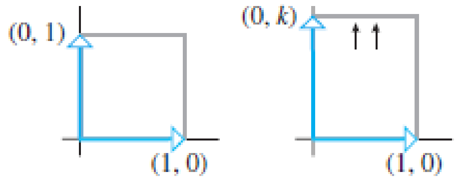
Operator	Illustration $T(x, y) = (kx, ky)$	Effect on the Standard Basis	Standard Matrix
Contraction with factor k on R^2 $(0 \leq k < 1)$			$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$
Dilation with factor k on R^2 $(k > 1)$			

Table 8

<table>
<tr><th>Operator</th><th>Illustration
$T(x, y, z) = (kx, ky, kz)$</th><th>Standard Matrix</th></tr>
<tr><td>Contraction with factor k on R^3
$(0 \le k \le 1)$</td><td>
</td><td rowspan="2">$$\begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$</td></tr>
<tr><td>Dilation with factor k on R^3
$(k \ge 1)$</td><td>
</td></tr>
</table>

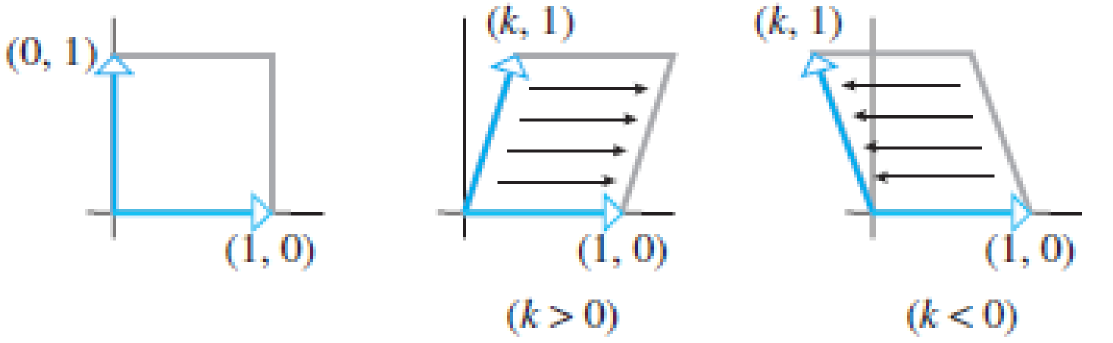
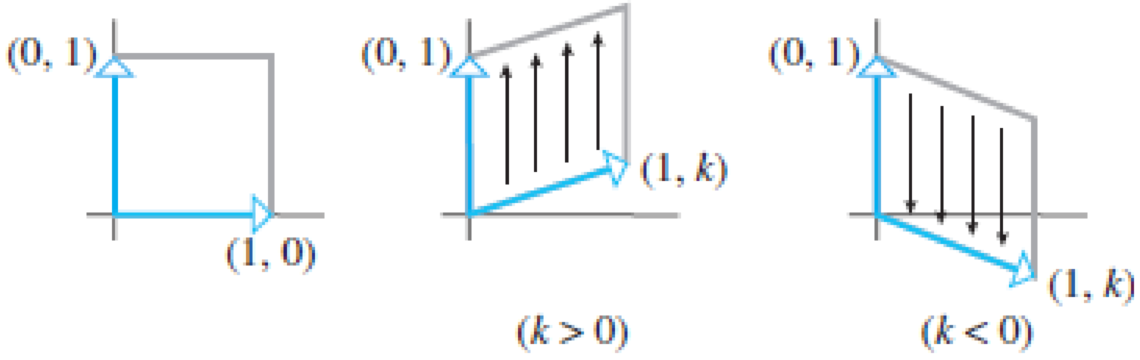
Ekspansi dan Kompresi

Table 9

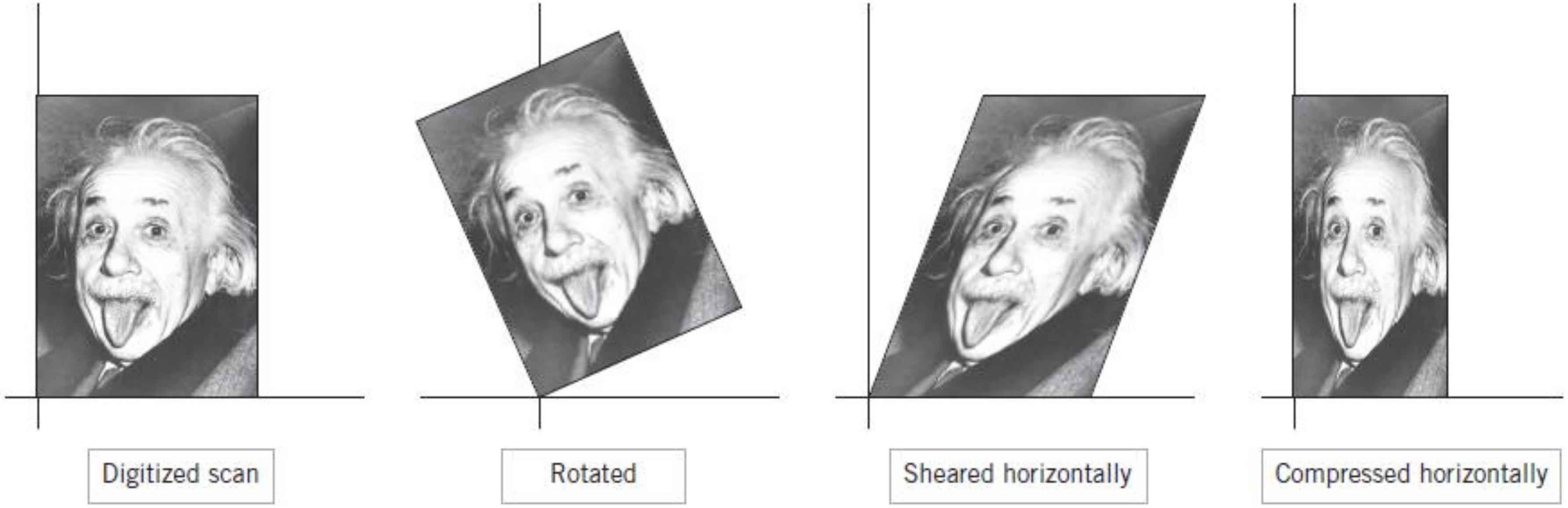
Operator	Illustration $T(x, y) = (kx, y)$	Effect on the Standard Basis	Standard Matrix
Compression of R^2 in the x-direction with factor k $(0 \le k < 1)$			$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
Expansion of R^2 in the x-direction with factor k $(k > 1)$			
Operator	**Illustration $T(x, y) = (x, ky)$**	**Effect on the Standard Basis**	**Standard Matrix**
Compression of R^2 in the y-direction with factor k $(0 \le k < 1)$			$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$
Expansion of R^2 in the y-direction with factor k $(k > 1)$			

Shear

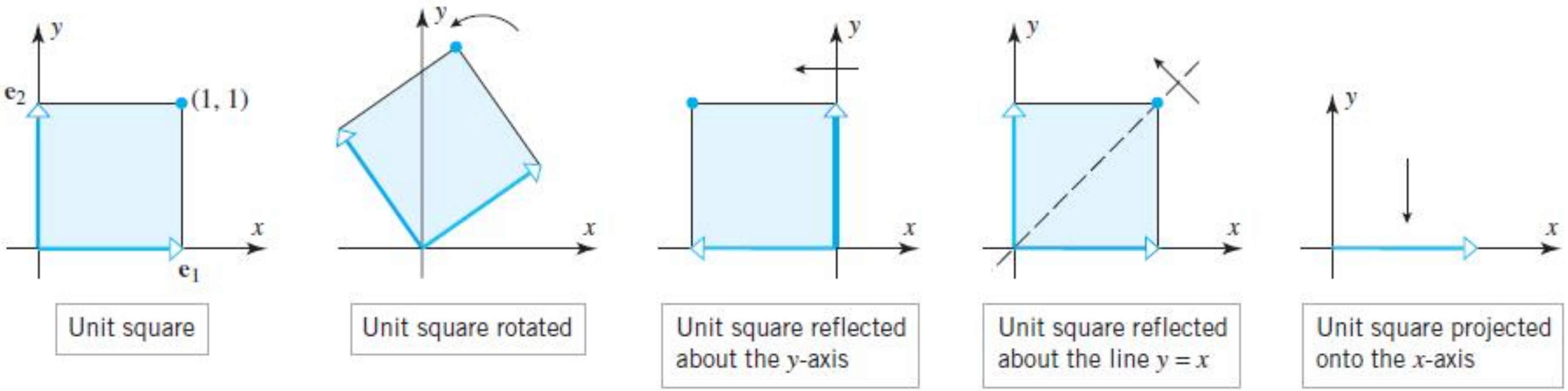
Table 10

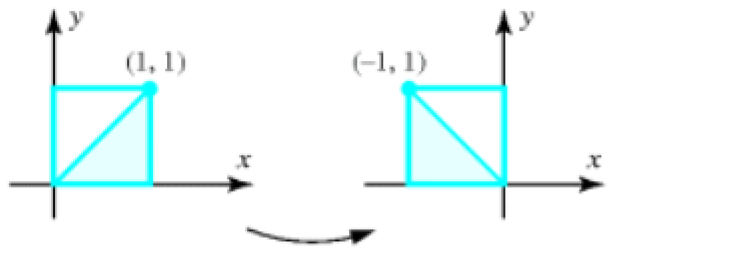
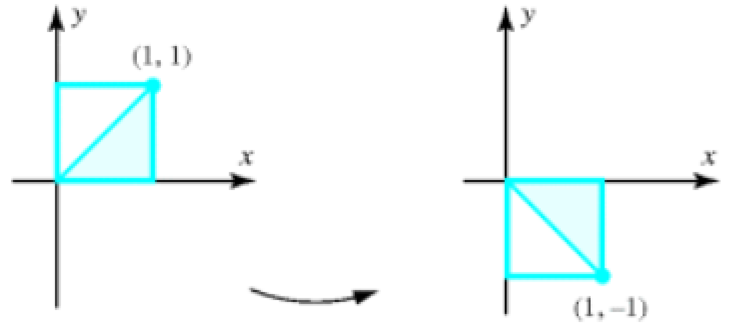
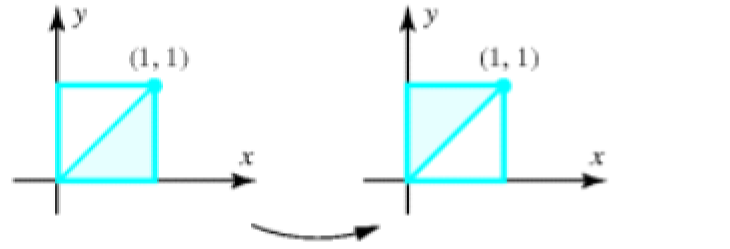
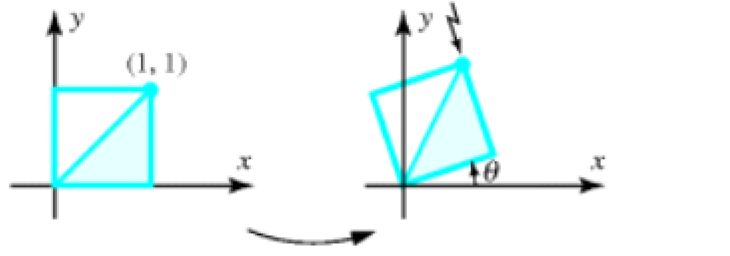
Operator	Effect on the Standard Basis	Standard Matrix
Shear of R^2 in the x-direction with factor k $T(x, y) = (x + ky, y)$		$\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
Shear of R^2 in the y-direction with factor k $T(x, y) = (x, y + kx)$		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$

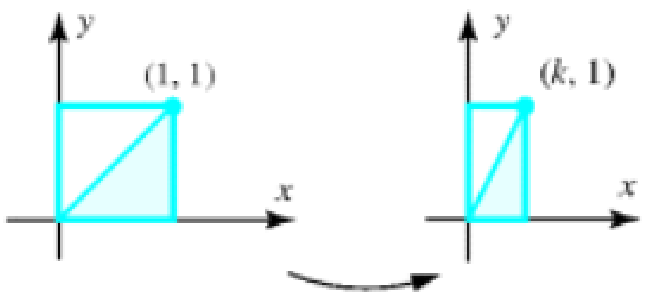
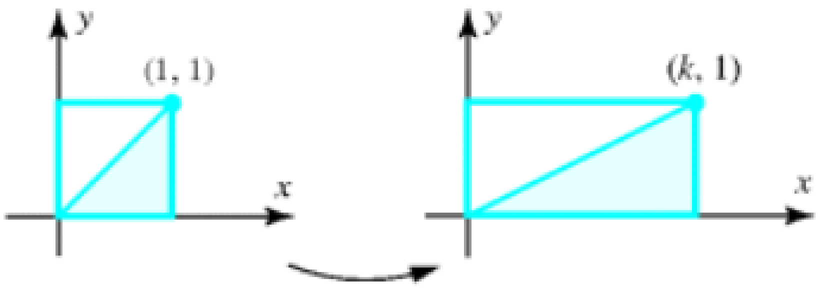
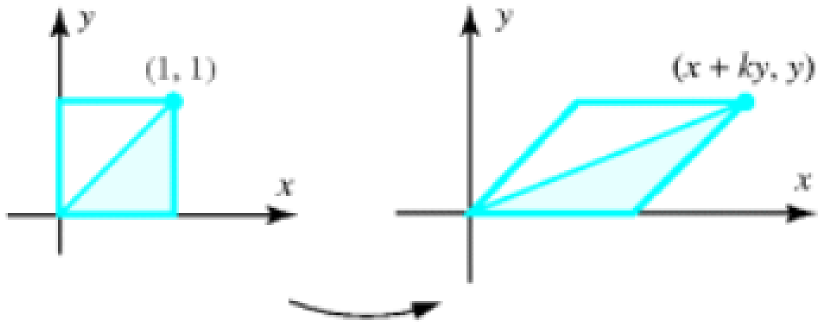
Geometri Operator Matriks di R^2



▲ Figure 4.11.1



Operator	Standard Matrix	Effect on the Unit Square
Reflection about the y-axis	$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	
Reflection about the x-axis	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$	
Reflection about the line $y = x$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	
Counterclockwise rotation through an angle θ	$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$	

Compression in the x-direction by a factor of k $(0 < k < 1)$	$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	
Expansion in the x-direction by a factor of k $(k > 1)$	$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	
Shear in the x-direction with factor $k > 0$	$\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	

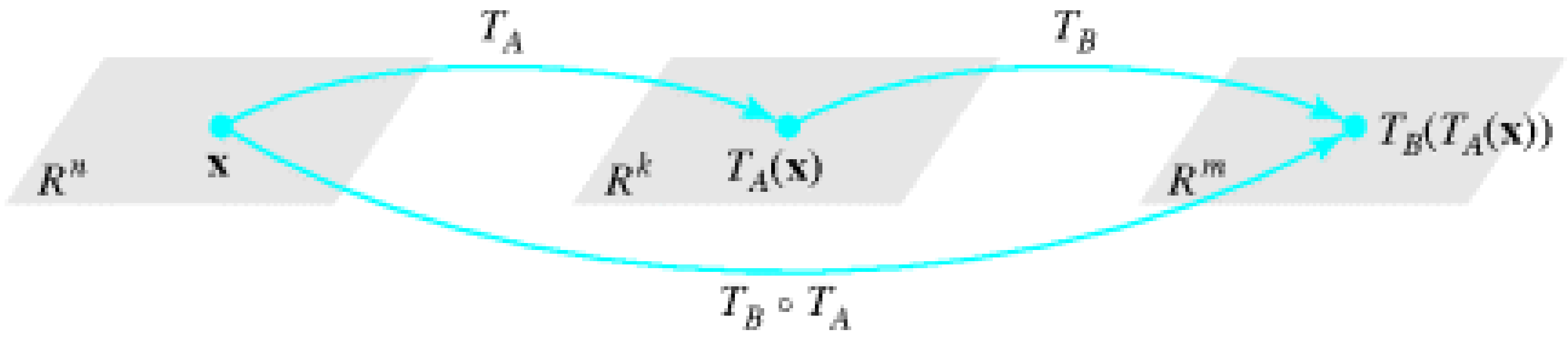
Komposisi Transformasi

- Misalkan $T_A : R^n \to R^k$ dan $T_B : R^k \to R^m$ maka jika sebuah vektor **x** ditransformasikan oleh T_A lalu bayangannya ditransformasikan lagi oleh T_B, maka hasilnya adalah transformasi dari R^n ke R^m yang dinamakan **komposisi T_B dengan T_A** dan dinyatakan dengan simbol:

$$T_B \circ T_A$$

- Urutan pengerjaan adalah T_A dulu baru kemudian T_B, atau dinyatakan sebagai:

$$(T_B \circ T_A)(\mathbf{x}) = T_B(T_A(\mathbf{x}))$$



- Komposisi transformasi ini sendiri adalah trransformasi matriks sebab:

$$(T_B \text{ o } T_A)(\mathbf{x}) = T_B(T_A(\mathbf{x})) = B(T_A(\mathbf{x})) = (BA)\mathbf{x}$$

yang memperlihatkan bahwa ini adalah perjalian matriks BA.

Jadi,

$$T_B \text{ o } T_A = T_{BA}$$

- Perhatikan bahwa komposisi tranformasi tidak komutatif, jadi

$$T_B \text{ o } T_A \neq T_A \text{ o } T_B$$

Contoh 7: Carilah matriks transformasi dari R^2 ke R^2 jika mula-mula vektor **v** diregang (*shear*) dengan faktor sebesar 3 dalam arah-x kemudian hasilnya dicerminkan terhadap y = x.

Jawaban:

Matriks standard peregangan dalam arah x dengan faktor k = 3 adalah

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriks standard pencerminan terhadap y = x adalah

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Jadi, matriks standard untuk peregangan lalu diikuti pencerminan adalah

$$A_2A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Jadi, T(**v**) = $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

- Contoh kombinasi transformasi lainnya: rotasi sejauh θ lalu diikuti dengan kompresi dalam arah x dengan factor ½.

Rotasi: $A_1 = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

Kompresi: $A_2 = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Matriks standard rotasi lalu diikuti kompresi adalah

$$A_2A_1 = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\cos\theta & -\frac{1}{2}\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

- Secara umum, jika $T_1, T_2, \ldots, T_k$ adalah transformasi

  $T_1(\mathbf{x}) = A_1\mathbf{x}$

  $T_2(\mathbf{x}) = A_2\mathbf{x}$

  ...

  $T_k(\mathbf{x}) = A_k\mathbf{x}$

  dari R^n ke R^n dan dilakukan secara berturut-turut ($T_1, T_2, \ldots, T_k$), maka hasil yang sama dicapai dengan sebuah transformasi

  $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$

  yang dalam hal ini,

  $A = A_k A_{k-1} \ldots A_2 A_1$

Latihan

1. Soal UAS 2017

Transformasi $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ didefinisikan :

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7x_1 + 2x_2 - x_3 + x4 \\ x_2 + x_3 \\ -x_1 + 2x_3 \end{pmatrix}$$

a). Tentukan matriks transformasi T. (Perlihatkan cara perhitungan dengan menggunakan vektor basis satuan).

b). Dengan menggunakan jawab a), tentukan bayangan vektor (3,-1,4,5).

c). Jika hasil dari langkah b) diregang (shear) dalam arah x, tentukan bayangan akhirnya.

2. (Soal kuis 2017)

Tentukan bayangan dari vektor (-2,1,2) jika dirotasikan sebesar 30^o pada sumbu x.

3. (Soal UTS 2015)

Tinjaulah basis $S = \{ \mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}\}$ untuk R^3 yang dalam hal ini $\mathbf{v_1} = (1, 2, 3)$, $\mathbf{v_2} = (2, 5, 3)$, dan $\mathbf{v_3} = (1, 0, 10)$. Carilah sebuah rumus untuk tansformasi lanjar T : $R^3 \rightarrow R^2$ sehingga $T(\mathbf{v_1}) = (1, 0)$, $T(\mathbf{v_2}) = (1, 0)$, dan $T(\mathbf{v_3}) = (0, 1)$, lalu hitunglah $T(1, 1, 1)$. **(20)**

Materi Pelengkap
(Opsional)

Aplikasi Transformasi Linier di dalam *Computer Graphics*

Oleh: Rinaldi Munir

Program Studi Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
ITB

Aplikasi Transformasi Linier di dalam *Computer Graphics*

- **Definisi**: Jika $T : V \rightarrow W$ adalah sebuah fungsi dari ruang vektor V ke ruang vektor W, maka T dinamakan transformasi linier jika

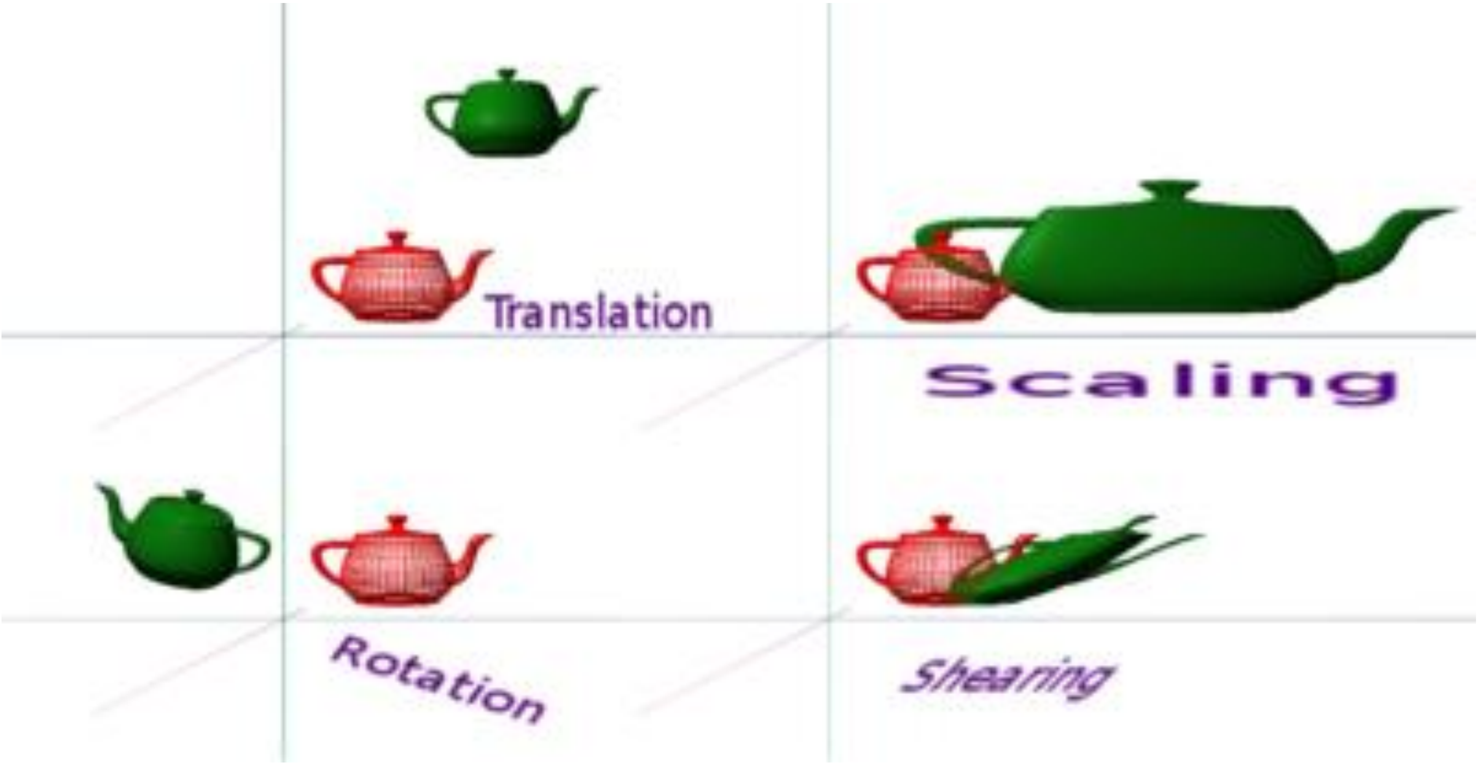
  (i) $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$ untuk semua vektor **u** dan **v** di dalam **V**

  (ii) $T(k\mathbf{u}) = kT(\mathbf{u})$ untuk semua vektor **u** di dalam V

- Transformasi linier $T : R^n \rightarrow R^m$ dapat dinyatakan sebagai sebuah perkalian matriks

$$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$$

Jenis-Jenis Tranformasi Linier 2D (T : $R^2 \rightarrow R^2$)



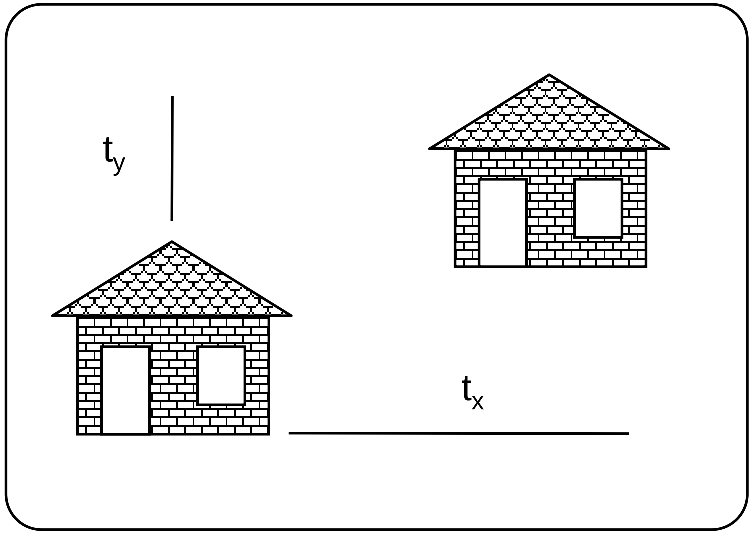
Sumber: http://mathforum.org/mathimages/imgUpload/thumb/Tranformations4.png/400px-Tranformations4.png

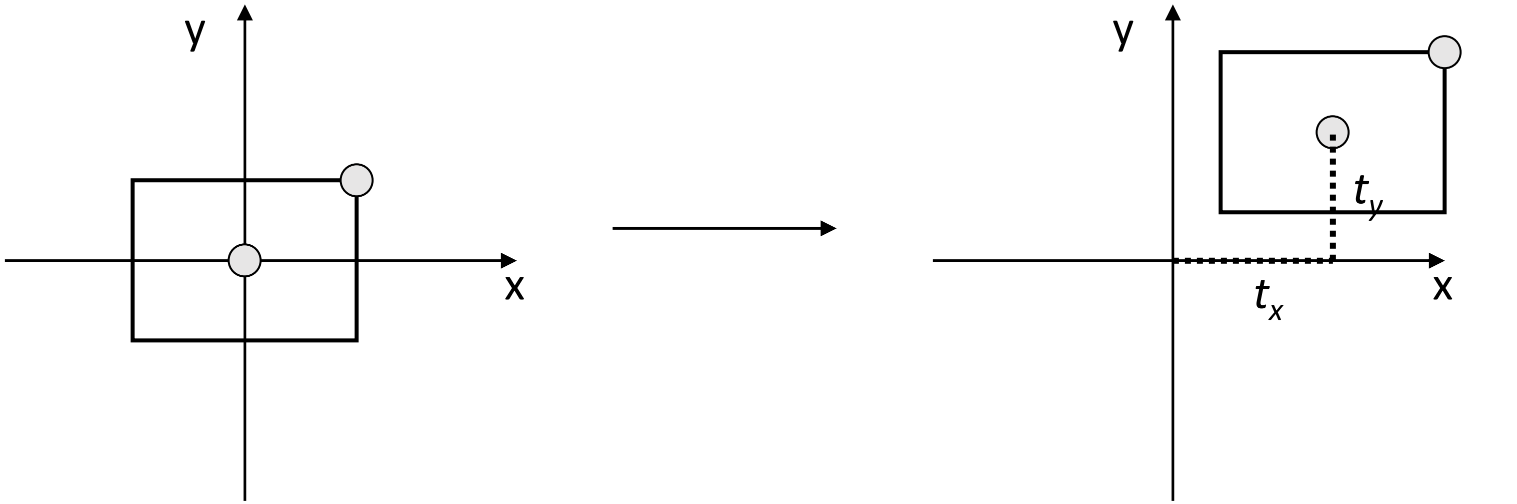
1. Translasi

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix}$$

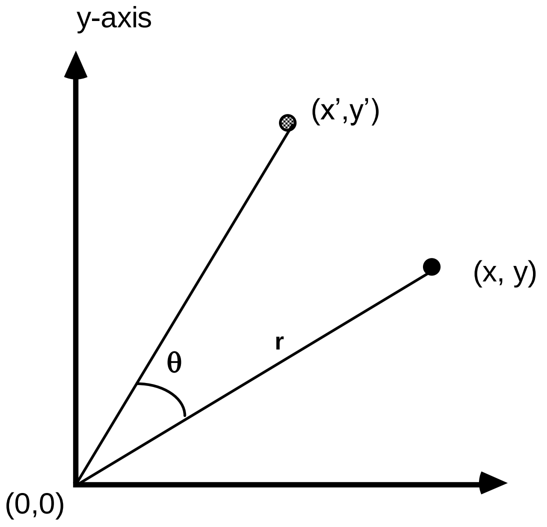
atau

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix}$$

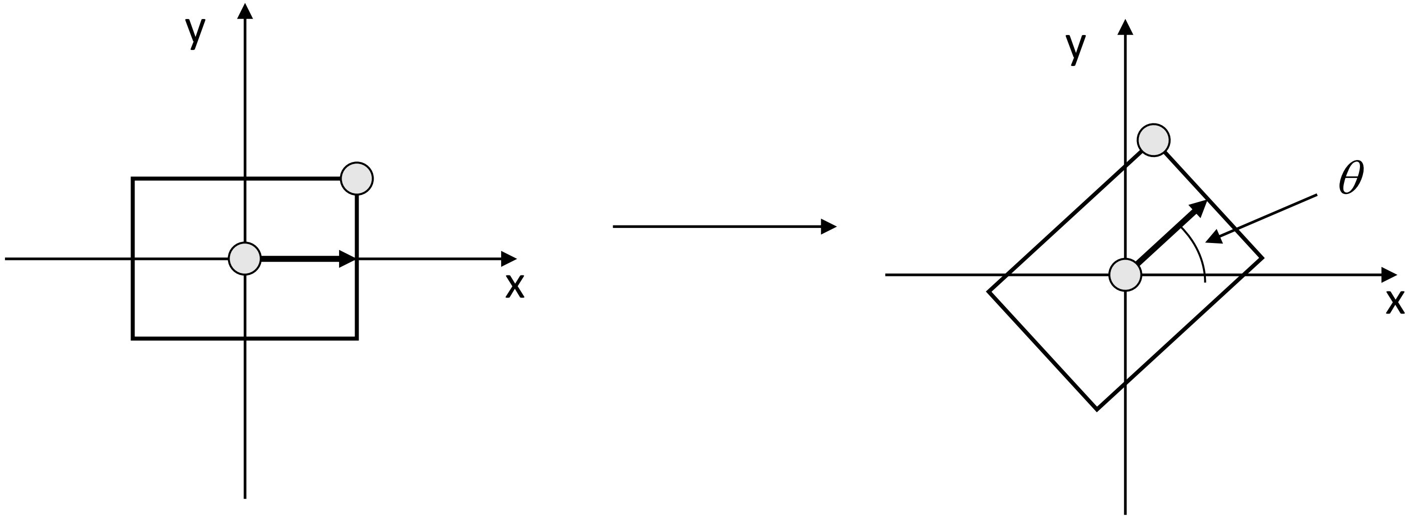




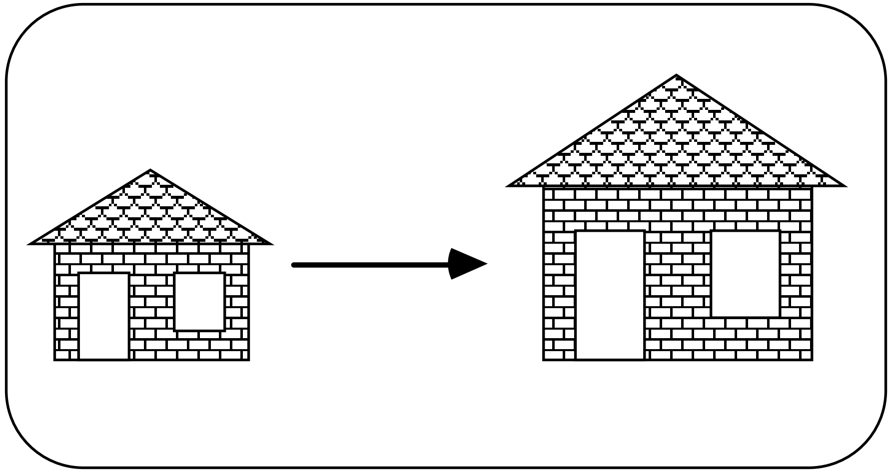
2. Rotasi

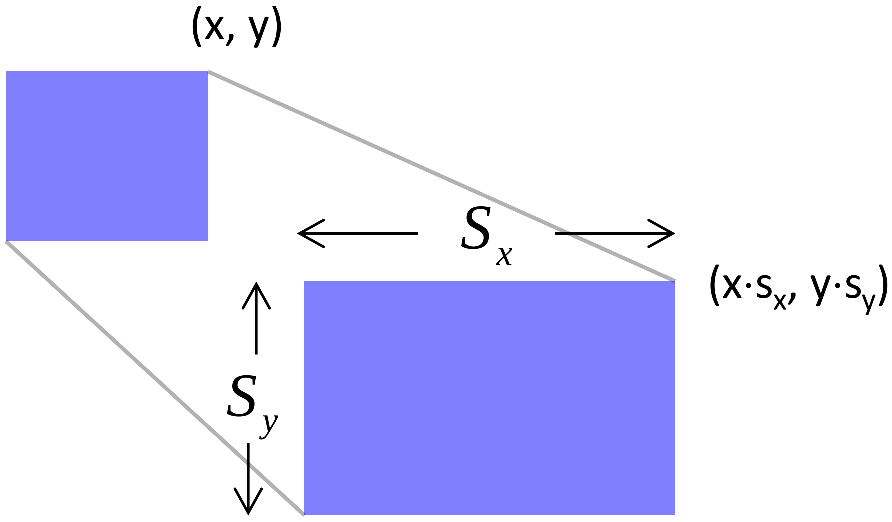


$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$



3. Penskalaan (*scaling*)





$$x' = x \cdot s_x, \quad y' = y \cdot s_y$$

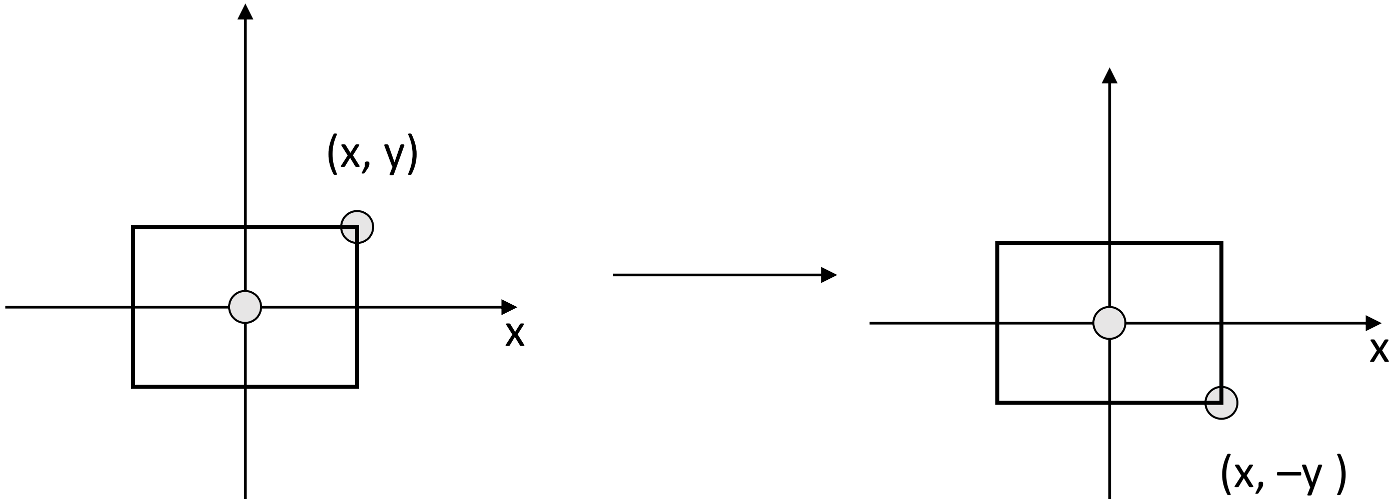
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}' = \mathbf{S} \cdot \mathbf{P}$$

4. Pencerminan (*reflection*)

Pencerminan pada sumbu-X:

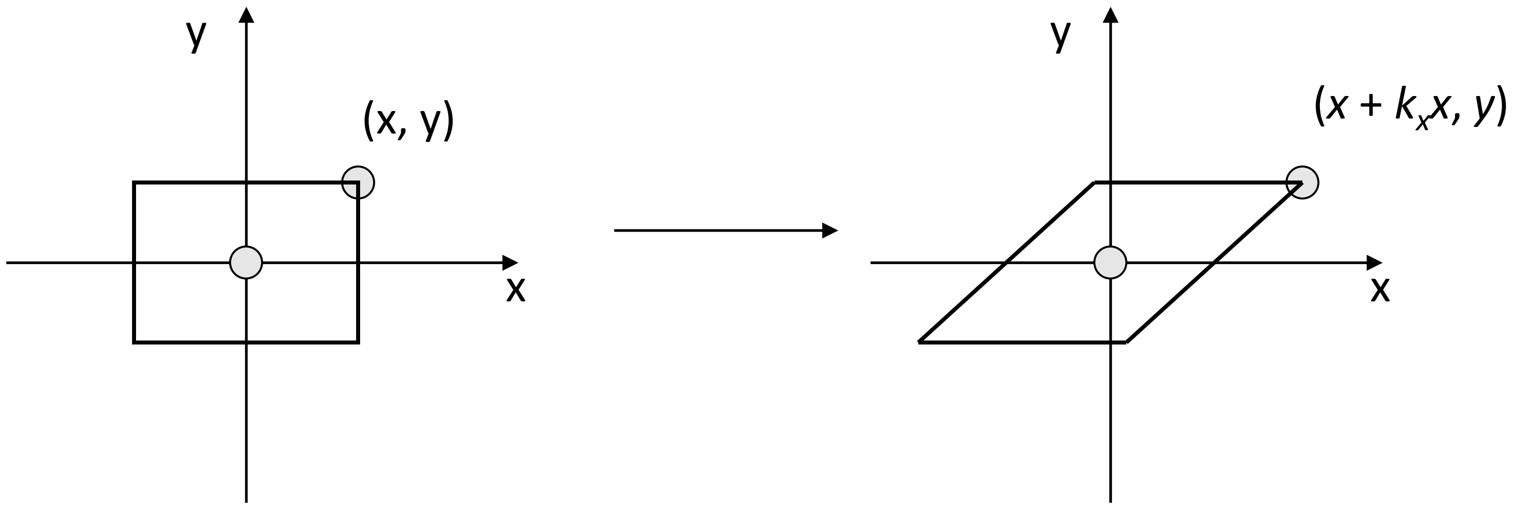
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$



5. Peregangan (*shear*)

Peregangan sepanjang sumbu-X:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & k_x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$



Koordinat Homogen

- Di dalam grafika computer, sebuah gambar dapat dibangun dari dari sekumpulan bentuk terdefinisi (kotak, lingkaran, segitiga, dll).
- Tiap bentuk mungkin diskalakan, dirotasi, atau ditranslasi ke posisi gambar yang sebenarnya.
- Agar perhitungan koordinat akhir dapat langsung dihitung dari koordinat awal dengan efisien, maka diperlukan sebuah sistem koordinat yang homogen
- Pada koordinat homogen, setiap titik direpresentasikan dengan tiga angka:

$$(x, y) \rightarrow (x \cdot w, y \cdot w, w) \quad \text{dengan syarat } w \neq 0$$

Translasi 2D

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}' = \mathbf{T}\left(t_x, t_y\right) \cdot \mathbf{P}$$

Rotasi 2D

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}' = \mathbf{R}\left(\theta\right) \cdot \mathbf{P}$$

Penskalaan 2D

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}' = \mathbf{S}\left(S_x, S_y\right) \cdot \mathbf{P}$$

Transformasi *inverse*:

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -t_x \\ 0 & 1 & -t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{R}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/S_x & 0 & 0 \\ 0 & 1/S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Komposisi tranformasi: $\mathbf{P}' = \mathbf{M}_2\left(\mathbf{M}_1 \cdot \mathbf{P}\right) = \left(\mathbf{M}_2 \cdot \mathbf{M}_1\right) \cdot \mathbf{P} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{P}$

$$\mathbf{P}' = \mathbf{T}\left(t_{2x}, t_{2y}\right)\left\{\mathbf{T}\left(t_{1x}, t_{1y}\right) \cdot \mathbf{P}\right\} = \left\{\mathbf{T}\left(t_{2x}, t_{2y}\right) \cdot \mathbf{T}\left(t_{1x}, t_{1y}\right)\right\} \cdot \mathbf{P}$$

Komposisi translasi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & t_{2x} \\ 0 & 1 & t_{2y} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_{1x} \\ 0 & 1 & t_{1y} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_{1x} + t_{2x} \\ 0 & 1 & t_{1y} + t_{2y} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}\left(t_{2x}, t_{2y}\right) \cdot \mathbf{T}\left(t_{1x}, t_{1y}\right) = \mathbf{T}\left(t_{1x} + t_{2x}, t_{1y} + t_{2y}\right)$$

Komposisi rotasi:

$$\mathbf{P}' = \mathbf{R}\left(\theta_2\right)\left\{\mathbf{R}\left(\theta_1\right) \cdot \mathbf{P}\right\} = \left\{\mathbf{R}\left(\theta_2\right) \cdot \mathbf{R}\left(\theta_1\right)\right\} \cdot \mathbf{P}$$

$$\mathbf{R}\left(\theta_2\right) \cdot \mathbf{R}\left(\theta_1\right) = \mathbf{R}\left(\theta_1 + \theta_2\right)$$

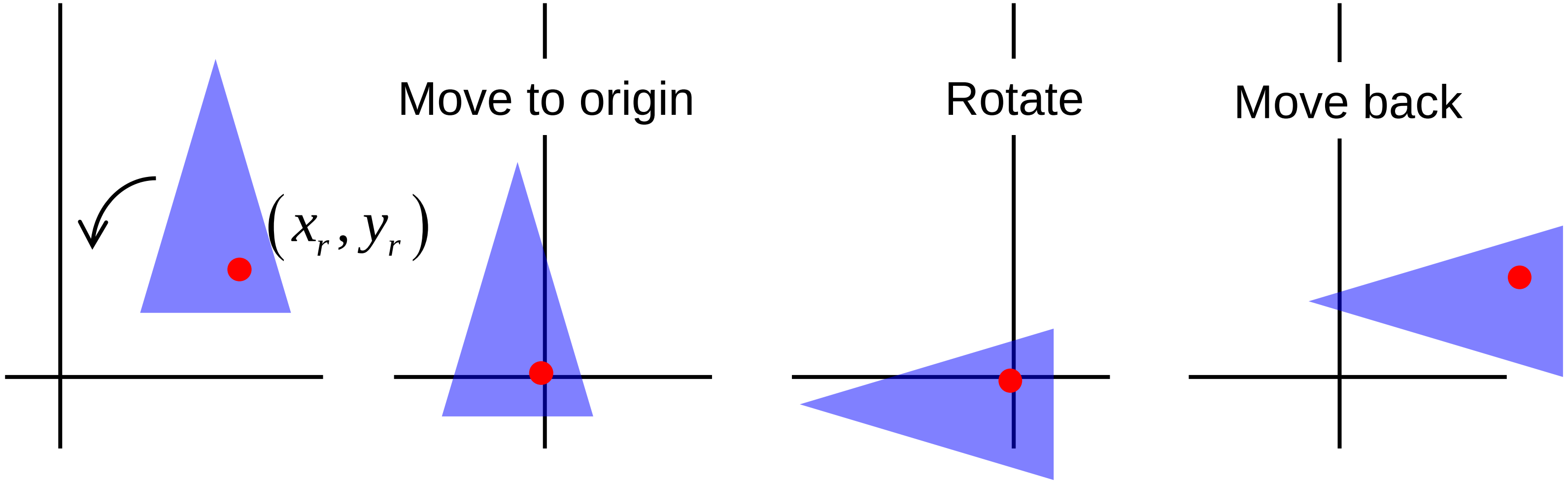
$$\mathbf{P}' = \mathbf{R}\left(\theta_1 + \theta_2\right) \cdot \mathbf{P}$$

$$\begin{bmatrix} S_{2x} & 0 & 0 \\ 0 & S_{2y} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_{1x} & 0 & 0 \\ 0 & S_{1y} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1x} \cdot S_{2x} & 0 & 0 \\ 0 & S_{1y} \cdot S_{2y} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Komposisi penskalaan:

$$\mathbf{S}\left(S_{2x}, S_{2y}\right) \cdot \mathbf{S}\left(S_{1x}, S_{1y}\right) = \mathbf{S}\left(S_{1x} \cdot S_{2x}, S_{1y} \cdot S_{2y}\right)$$

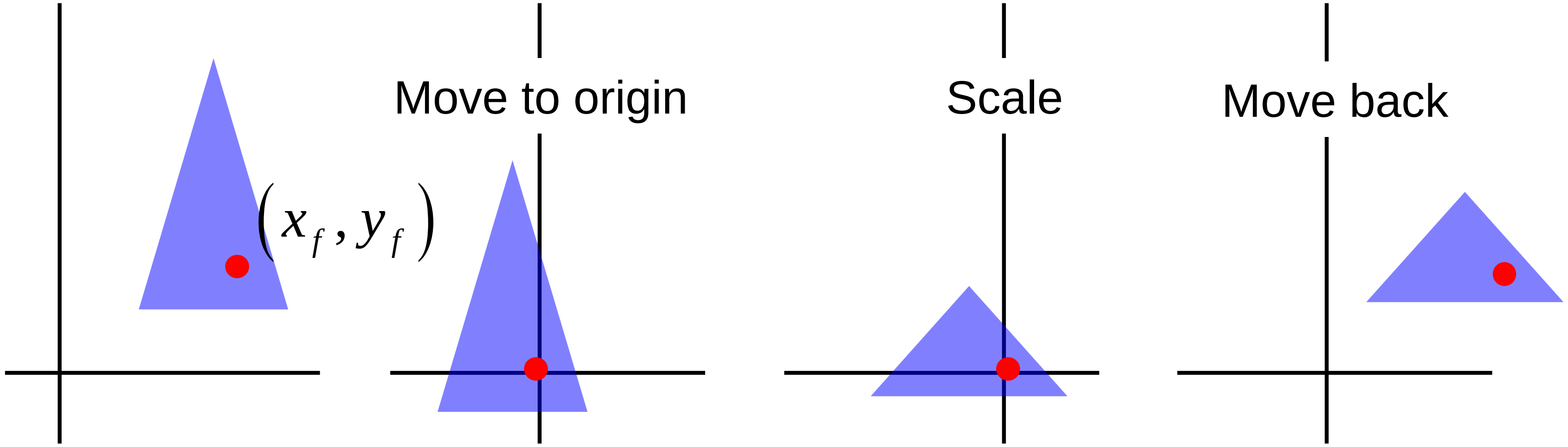
General 2D Rotation



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & x_r \\ 0 & 1 & y_r \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_r \\ 0 & 1 & -y_r \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & x_r(1-\cos\theta)+y_r\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta & y_r(1-\cos\theta)-x_r\sin\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

General 2D Scaling

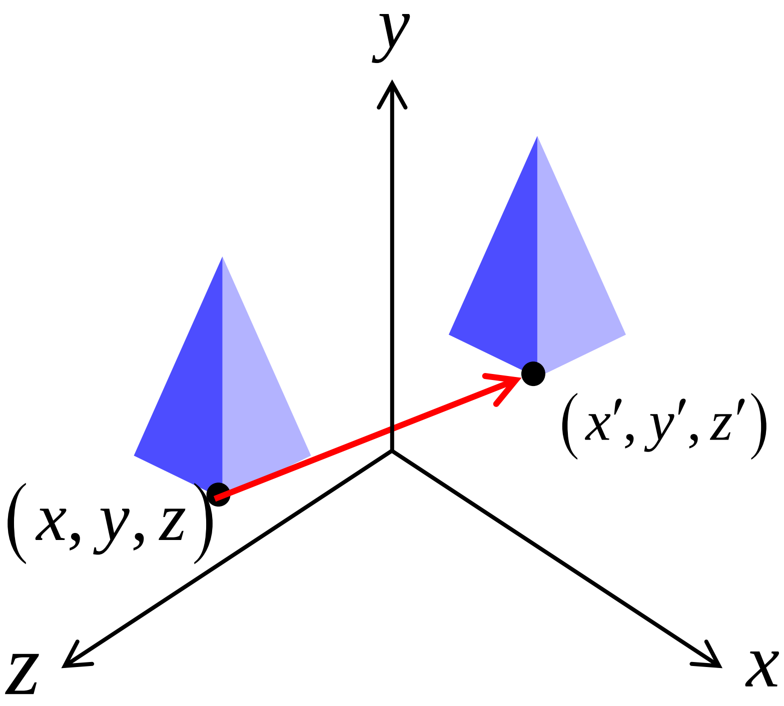


$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & x_f \\ 0 & 1 & y_f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_f \\ 0 & 1 & -y_f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_x & 0 & x_f\left(1-S_x\right) \\ 0 & S_y & y_f\left(1-S_y\right) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformation 3D

Mirip dengan transformasi 2D. Menggunakan matriks 4x4

Translation



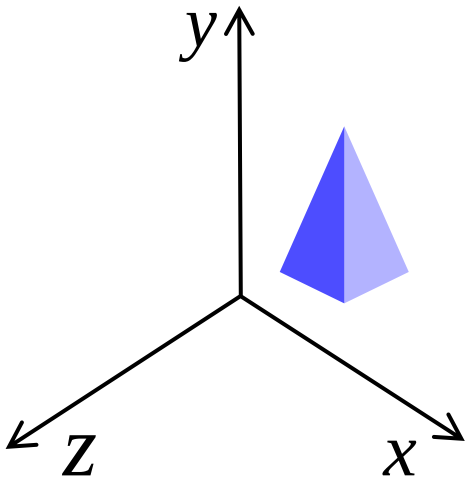
$$x' = x + t_x$$

$$y' = y + t_y$$

$$z' = z + t_z$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

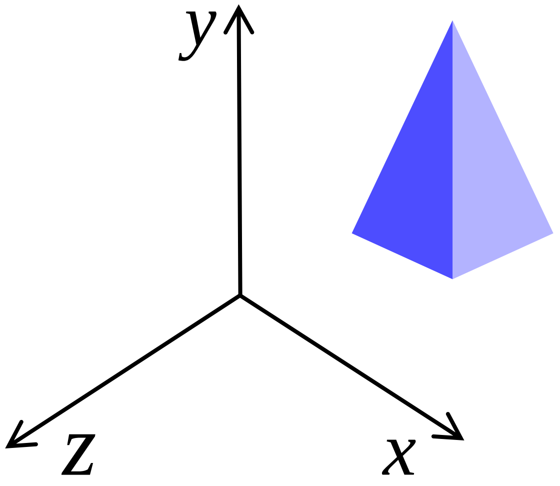
Penskalaan 3D



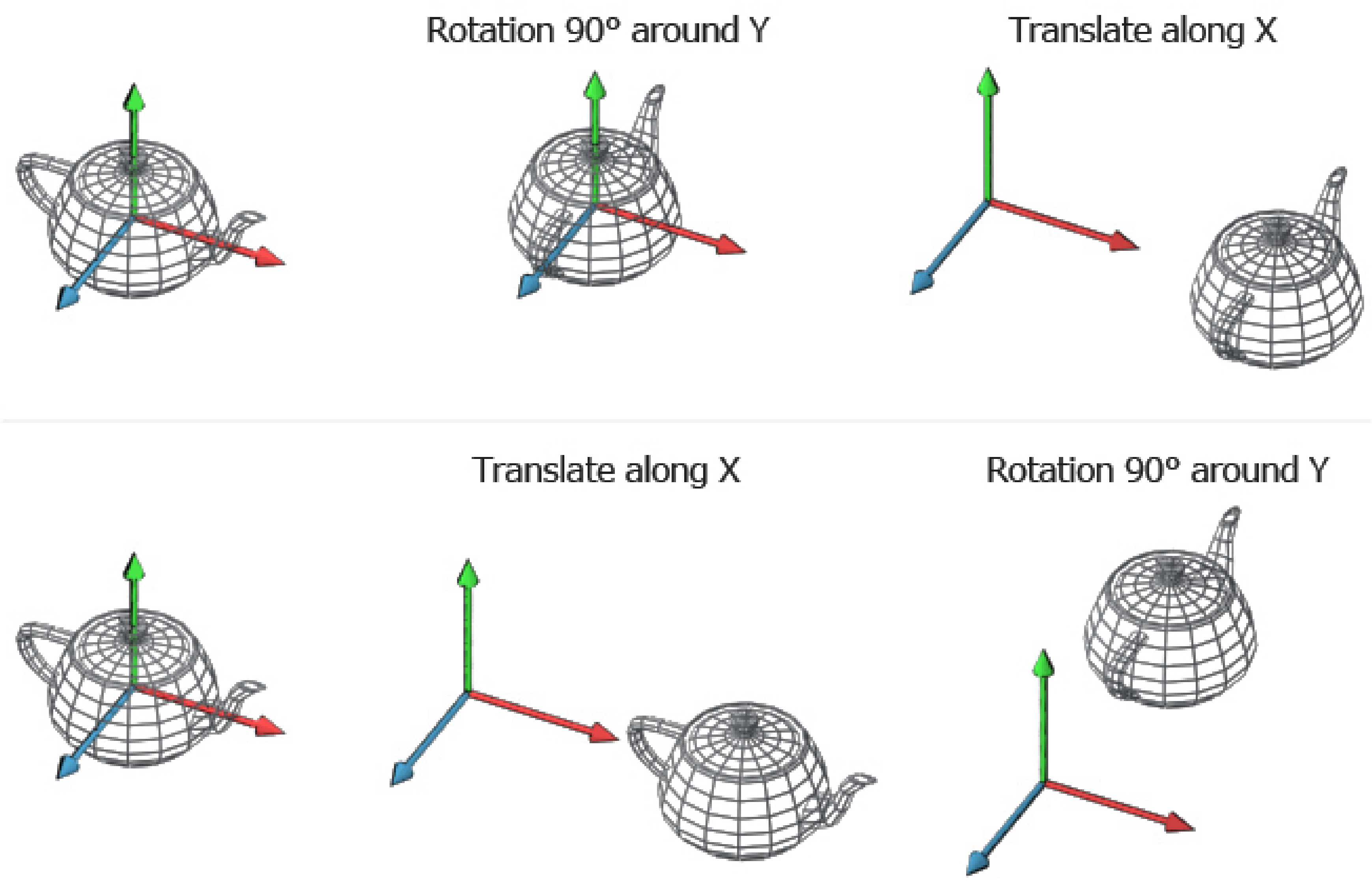
$$x' = x \cdot S_x$$

$$y' = y \cdot S_y$$

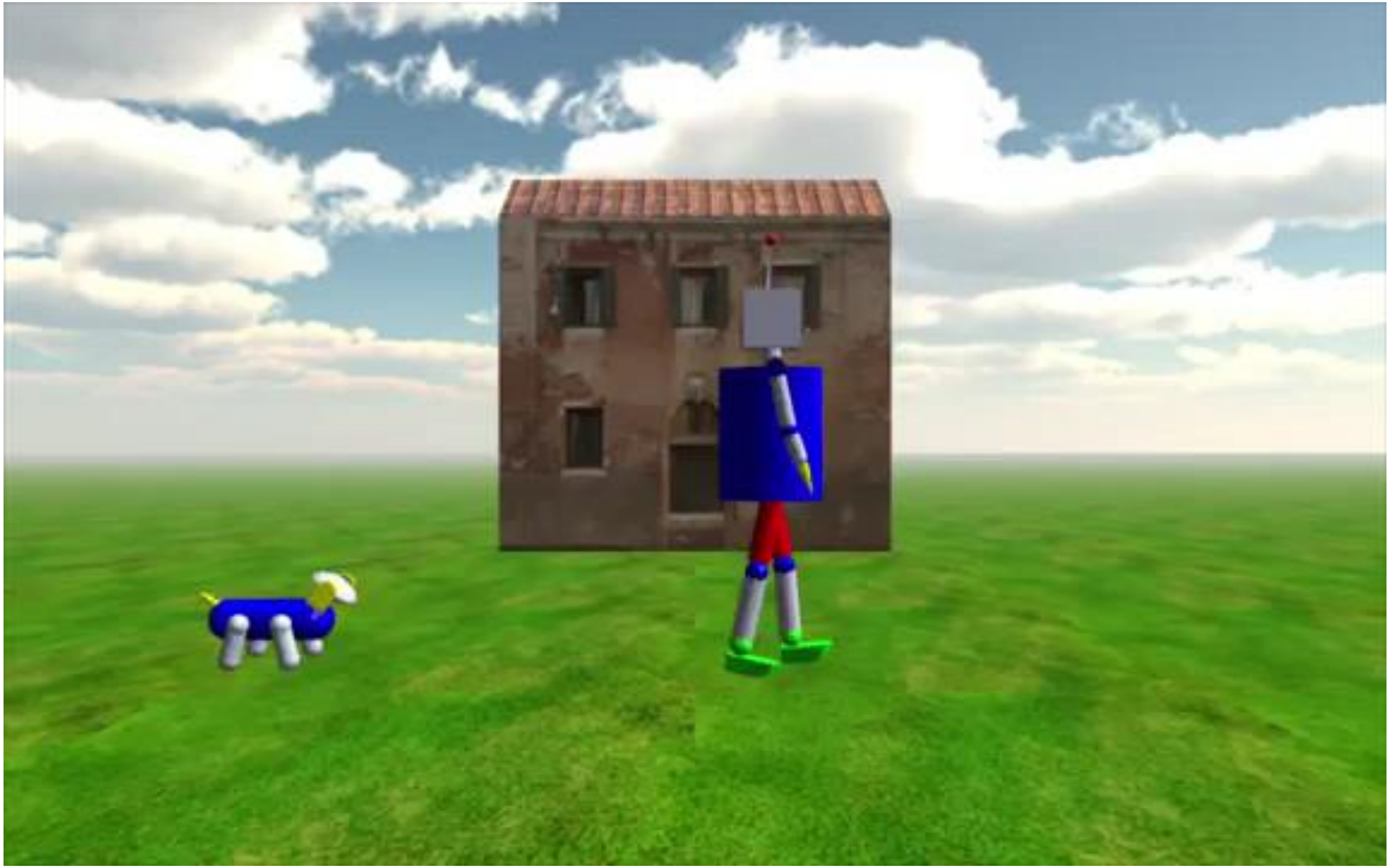
$$z' = x \cdot S_z$$



$$\mathbf{P}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{P}$$



Sumber: http://www.codinglabs.net/public/contents/article_world_view_projection_matrix/images/order_dependency.png



Referensi

1. Shmuel Wimer, *Geometric Transformations for Computer Graphics*, Bar Ilan Univ., School of Engineering
2. Larry F. Hodges, *2D Transformation*