

Rendu TP Méthodes Numériques :

Simulation d'écoulement fluide

Fait par : BCHIR Yousra, AIT LAHMOUCH Nadir

1 Résolution de l'équation de transport diffusion

Question 1. Après des calculs pour résoudre le système :

$$N \begin{bmatrix} \phi(0, (k+1)dt) \\ \vdots \\ \phi(ndx, (k+1)dt) \\ \vdots \\ \phi((N_x-1)dx, (k+1)dt) \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} \phi(0, kdt) \\ \vdots \\ \phi(ndx, kdt) \\ \vdots \\ \phi((N_x-1)dx, kdt) \end{bmatrix}$$

On arrive aux résultats suivants :

$$N = \begin{pmatrix} 1 + 2\kappa \frac{dt}{dx^2} & -\kappa \frac{dt}{dx^2} & 0 & \dots & \dots & 0 & -\kappa \frac{dt}{dx^2} \\ -\kappa \frac{dt}{dx^2} & \ddots & -\kappa \frac{dt}{dx^2} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & & \ddots & 1 + 2\kappa \frac{dt}{dx^2} & -\kappa \frac{dt}{dx^2} \\ -\kappa \frac{dt}{dx^2} & 0 & \dots & \dots & \dots & -\kappa \frac{dt}{dx^2} & 1 + 2\kappa \frac{dt}{dx^2} \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 - c(0)^2 \frac{dt^2}{dx^2}; & -c(dx) \frac{dt}{2dx} + c(dx)^2 \frac{dt^2}{2dx^2} & 0 & \dots & 0 & -c((N_x-1)dx) \frac{dt}{2dx} + c((N_x-1)dx)^2 \frac{dt^2}{2dx^2} \\ c(0) \frac{dt}{2dx} + c(0)^2 \frac{dt^2}{2dx^2} & \ddots & \ddots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & 0 \\ 0 & 0 & & \ddots & & -c((N_x-1)dx) \frac{dt}{2dx} + c((N_x-1)dx)^2 \frac{dt^2}{2dx^2} \\ -c(0) \frac{dt}{2dx} + c(0)^2 \frac{dt^2}{2dx^2} & 0 & \dots & \dots & c((N_x-2)dx) \frac{dt}{2dx} + c((N_x-2)dx)^2 \frac{dt^2}{2dx^2} & 1 - c((N_x-1)dx)^2 \frac{dt^2}{dx^2} \end{pmatrix}$$

Les matrices M et N se sont pas tridiagonales par argument de périodicité.

Question 2. on montre dans cette question que la matrice N est symétrique (triviale) définie positive

on pose : $\alpha = \kappa \frac{dt}{dx^2}$ et un vecteur non nul $X : X = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{N_x-1} \end{bmatrix}$

et on montre que tXNX est strictement positif

$${}^tXNX = ((1+2\alpha)x_0 - \alpha x_1 - \alpha x_{N_x-1})x_0 + \sum_{k=1}^{N_x-2} ((1+2\alpha)x_k - \alpha(x_{k-1} + x_{k+1}))x_k + (1+2\alpha)x_{N_x-1} - \alpha(x_{N_x-2} + x_0)$$

alors

$${}^tXNX = \sum_{k=0}^{N_x-1} x_k^2 + 2\alpha \left(\sum_{k=0}^{N_x-2} x_k^2 - x_k x_{k+1} \right) - 2\alpha x_0 x_{N_x-1} + 2\alpha x_{N_x-1}^2$$

donc

$${}^tXNX = \sum_{k=0}^{N_x-1} x_k^2 + \sum_{k=0}^{N_x-2} (x_k - x_{k+1})^2 + (x_0 - x_{N_x-1})^2 \quad (3a)$$

Et comme $\sum_{k=0}^{N_x-1} x_k^2$ est forcément strictement positif, alors on déduit que N est bien symétrique définie positive.

On a N symétrique définie positive, ceci justifie la possibilité d'utiliser la méthode de cholesky qui est deux fois plus rapide que la méthode de factorisation LU.

Question 3. Dans cette question on nous demande de compléter le fichier "my-cholesky.sce" pour implémenter une fonction qui renvoi la solution des équation de type $NU = S$, en utilisant la factorisation de cholesky, qui est connue pour son coût moindre et sa rapidité. La solution se trouve donc dans le dossier joint à ce rapport.

Question 4. *Après avoir implémenté la résolution de l'équation sur scilab de l'équation étudiée en utilisant la méthode demandée dans l'énoncé soit après sa discrétisation, on arrive aux résultats suivants.*

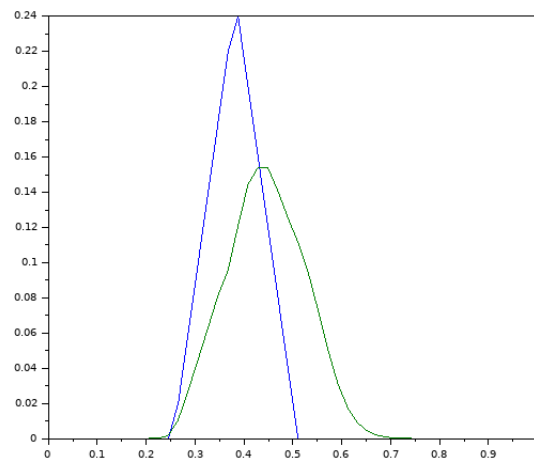


FIGURE 1 – Résultat avec $\kappa=0.0001$

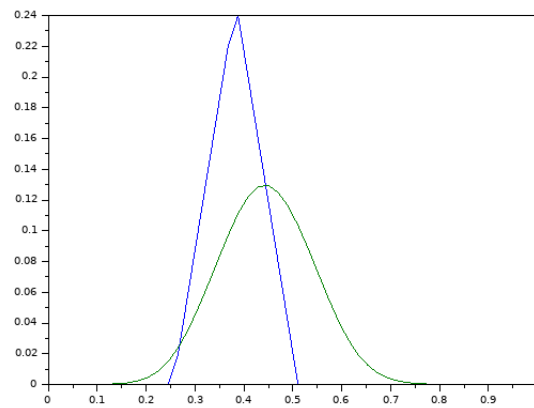


FIGURE 2 – Résultat avec $\kappa=0.001$

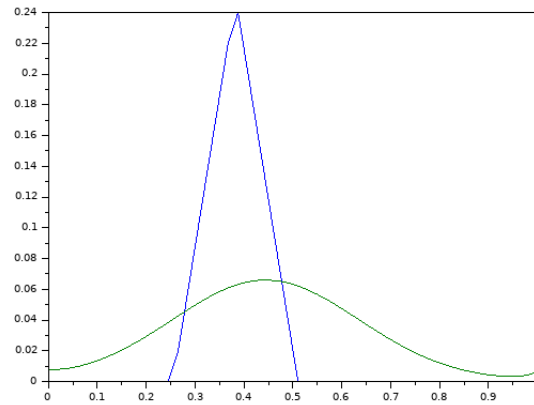


FIGURE 3 – Résultat avec kappa=0.01

On remarque que plus kappa est petit plus la solution Phi finale s'éloigne de son état initial, ce qui est normal.

Question 5. Dans cette question, on représentera à chaque pas de temps, les versions discrétisées des fonctions scalaires par les tableaux $f_{i,j}^k \simeq f(jdx, idy, kdt)$. On va appliquer les résultats trouvés en 1D en réalisant un *splitting directionnel*.

Après avoir remplacé le solveur 1D et implémenté le solveur 2D sur scilab, le test donne comme résultats :

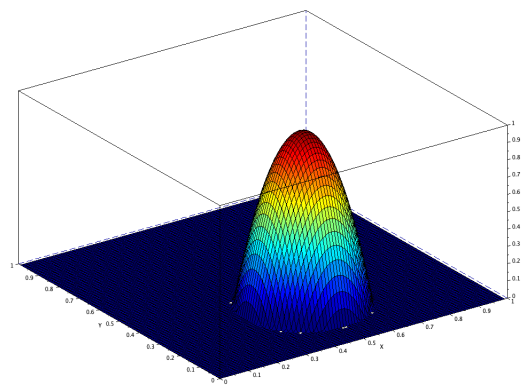


FIGURE 4 – Résultat à l'instant initial

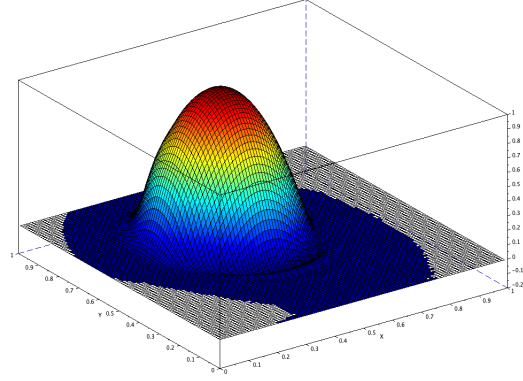
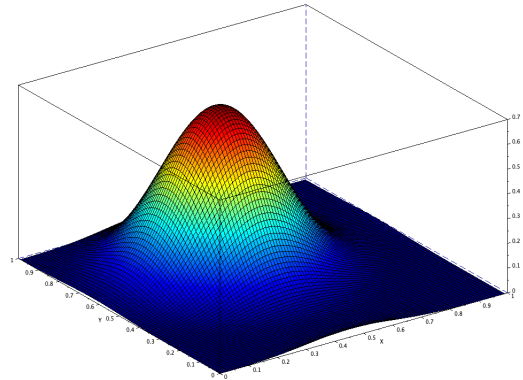


FIGURE 5 – Résultat à l'instant final

Changeons maintenant la valeur de kappa pour voir si ce modèle suit la même conjecture établie dans le modèle à 1 seule dimension.

FIGURE 6 – Résultat à l'instant final avec $\kappa=0.01$

Effectivement, quand on augmente la valeur de kappa, la courbe tend à s'aplatir sur les bords tout en diminuant en amplitude.

On remarque bien que le modèle 2D donne le même résultat que celui qu'avec une seule dimension. Effectivement, la courbe à l'instant initial présente une courbe haute pointu qui s'aplatit sur les bords tout en diminuant en amplitude à l'instant final. Et cela en dépendant de la valeur de kappa choisie. On pourrait en tirer exactement les mêmes résultats en intersectant un plan Z avec les courbes obtenues.

2 Résolution du problème du poisson

Question 6. on a $\frac{\partial \psi}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial \psi}{\partial y^2}(x, y) = f(x, y)$

alors :

$$S_{nm}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x^2}\right) + S_{nm}\left(\frac{\partial \psi}{\partial y^2}\right) = S_{nm}(f)$$

$$\frac{\partial S_{nm}(\psi)}{\partial x^2} + \frac{\partial S_{nm}(\psi)}{\partial y^2} = S_{nm}(f)$$

on calcule $\frac{\partial S_{nm}(\psi)}{\partial x^2}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_{nm}(\psi)}{\partial x^2} &= \frac{\partial \sum_{p=-n}^{p=n} \sum_{q=-m}^{q=m} \hat{\psi}_{pq} \exp(+k_y y) \exp(+k_x x)}{\partial x^2} \\ &= \frac{\partial \sum_{p=-n}^{p=n} \sum_{q=-m}^{q=m} k_x \hat{\psi}_{pq} \exp(+k_y y) \exp(+k_x x)}{\partial x} \\ &= \sum_{p=-n}^{p=n} \sum_{q=-m}^{q=m} k_x^2 \hat{\psi}_{pq} \exp(+k_y y) \exp(+k_x x) \end{aligned}$$

de même pour $\frac{\partial S_{nm}(\psi)}{\partial y^2}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_{nm}(\psi)}{\partial y^2} &= \frac{\partial \sum_{p=-n}^{p=n} \sum_{q=-m}^{q=m} \hat{\psi}_{pq} \exp(+k_y y) \exp(+k_x x)}{\partial y^2} \\ &= \frac{\partial \sum_{p=-n}^{p=n} \sum_{q=-m}^{q=m} k_y \hat{\psi}_{pq} \exp(+k_y y) \exp(+k_x x)}{\partial y} \\ &= \sum_{p=-n}^{p=n} \sum_{q=-m}^{q=m} k_y^2 \hat{\psi}_{pq} \exp(+k_y y) \exp(+k_x x) \end{aligned}$$

alors on trouve la relation suivante :

$$(k_y^2 + k_x^2) \hat{\psi}_{pq} = \hat{f}_{pq}$$

Question 7. on a

$$\begin{cases} \Delta u_x(x, y) = -\frac{\partial \omega(x, y)}{\partial y} \\ \Delta u_y(x, y) = \frac{\partial \omega(x, y)}{\partial x} \end{cases}$$

de la même manière que la question 6, on trouve :

$$\begin{cases} (k_x^2 + k_y^2) \hat{u}_{xpq} = -k_y \hat{\omega}_{pq} \\ (k_x^2 + k_y^2) \hat{u}_{ypq} = k_x \hat{\omega}_{pq} \end{cases}$$

Question 8. La fonction demandée est implémentée dans `poisson.sce`.

Question 9. Après implémentation des questions demandées, la simulation donne effectivement un **TEST SUCCESS** en sortie.

Question 10. Le résultat de la simulation est le suivant :

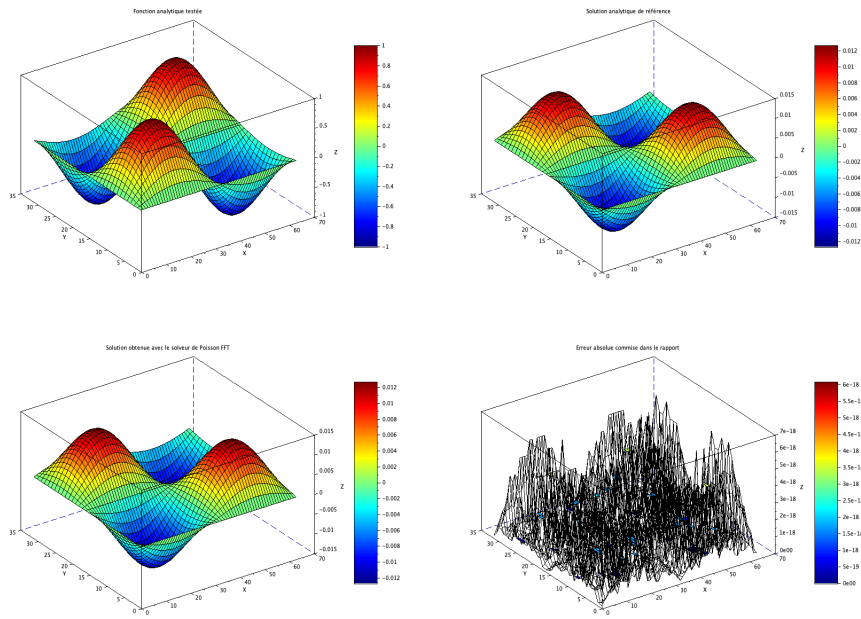


FIGURE 7 – Résultat de la simulation.

On constate pour la fonction analytique testée que la solution obtenue par le solveur du poisson-2d se concorde au graphe de la solution analytique de référence. A ce stade, on serait de conclure que le solveur est correct, néanmoins, pour conforter cette idée, il faut voir l'erreur absolue entre les deux.

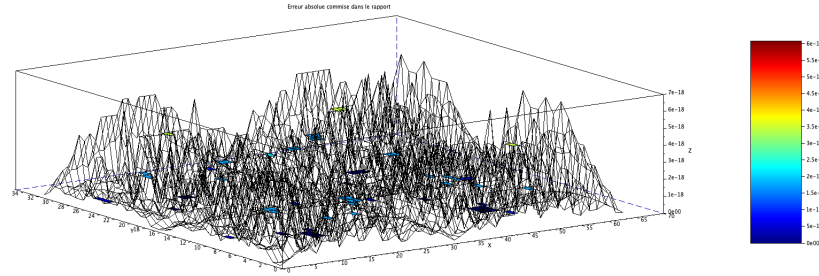


FIGURE 8 – Zoom sur l'erreur

L'erreur absolue ne dépasse pas $7e-18$, qui est une valeur trop petite. On peut alors conclure que le solveur poisson-2d donne des résultats corrects et vraisemblables.

Question 11. *Le résultat de la simulation est le suivant :*

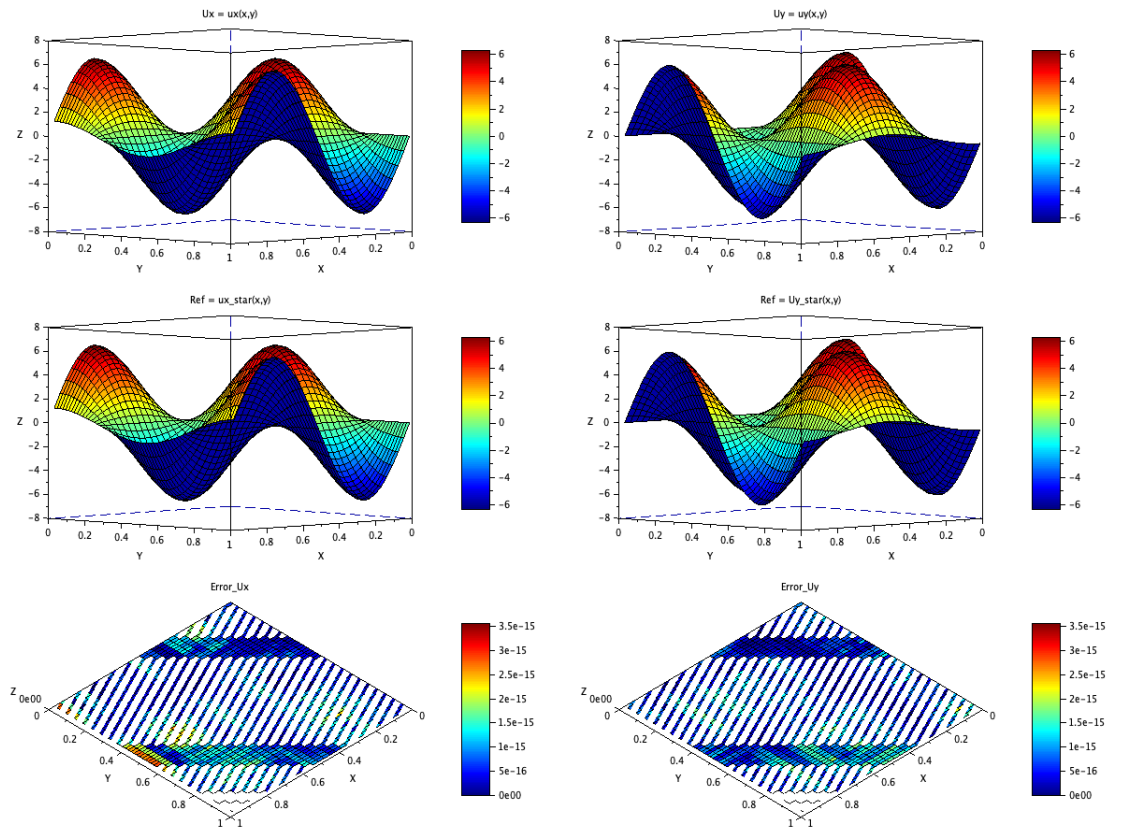


FIGURE 9 – Résultat de la simulation.

La solution de la simulation du solveur poisson-curl-2d s'apparente aux graphes des références. Voyons alors l'erreur absolue pour conclure sur l'efficacité de ce dernier.

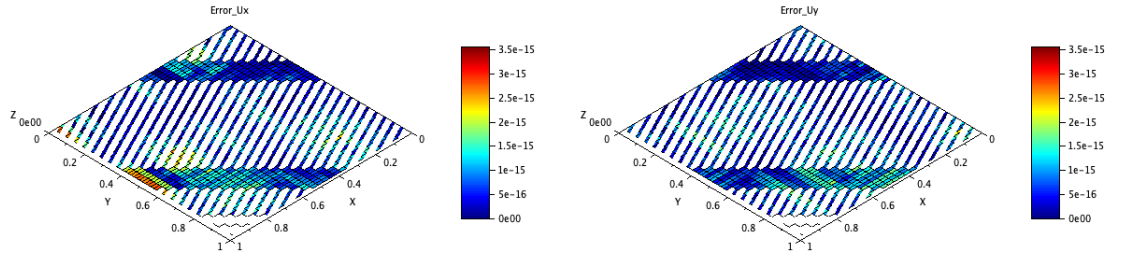


FIGURE 10 – Zoom sur les erreurs de U_x et U_y

L'erreur pour U_x et U_y ne dépasse pas $4e-15$, mais reste plus grande que celle de la question d'avant, ce qui est normal vu que ce solveur a plus d'opérations à processor (une dérivation de plus) et en résulte du coup une baisse de la précision. Mais l'erreur obtenue reste suffisamment petite pour conclure que le solveur donne des résultats logiques et vraisemblables.

3 Simulation numérique

Question 12. on calcule le champs de vorticité initial $\omega^0(x, y) = \frac{\partial u_y^0}{\partial x} - \frac{\partial u_x^0}{\partial y}$
on a

$$\frac{\partial u_y^0}{\partial x} = \begin{cases} \rho(1 - \tanh^2(\rho[y - 0.25])) & \text{si } y \leq 0.5 \\ -\rho(1 - \tanh^2(\rho[0.75 - y])) & \text{si } y > 0.5 \end{cases}$$

alors :

$$\omega^0(x, y) = \begin{cases} 2\pi\delta \sin(2\pi x) - \rho(1 - \tanh^2(\rho[y - 0.25])) & \text{si } y \leq 0.5 \\ 2\pi\delta \sin(2\pi x) + \rho(1 - \tanh^2(\rho[0.75 - y])) & \text{si } y > 0.5 \end{cases}$$

Question 13. *Les résultats de la simulation à $t=0.80$ et $t=1.20$ sont les suivants*

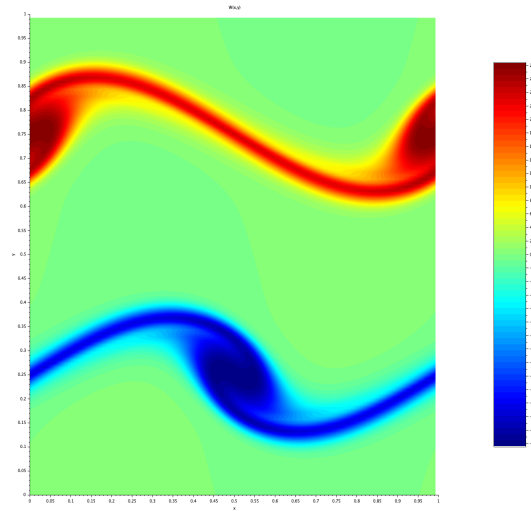


FIGURE 11 – Isocontours à $t=0.80$

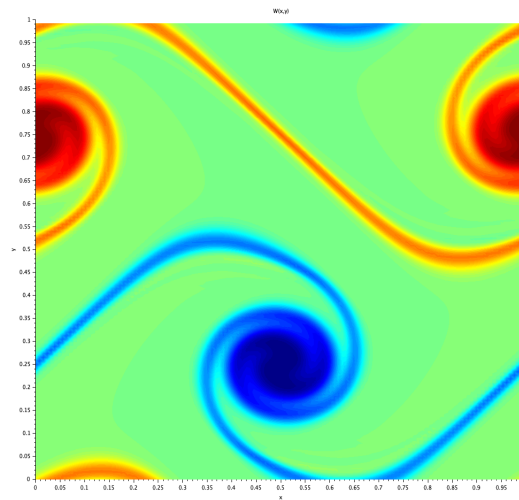


FIGURE 12 – Isocontours à $t=1.20$

On remarque dans la video (voir dossier teide) que plus on avance de le temps, plus la figure de W se distord pour créer une sorte de vortex qui rotate autour du point d'abscisse 0.5 et d'ordonnée 0.75.

Intéressons nous désormais aux isocontours :

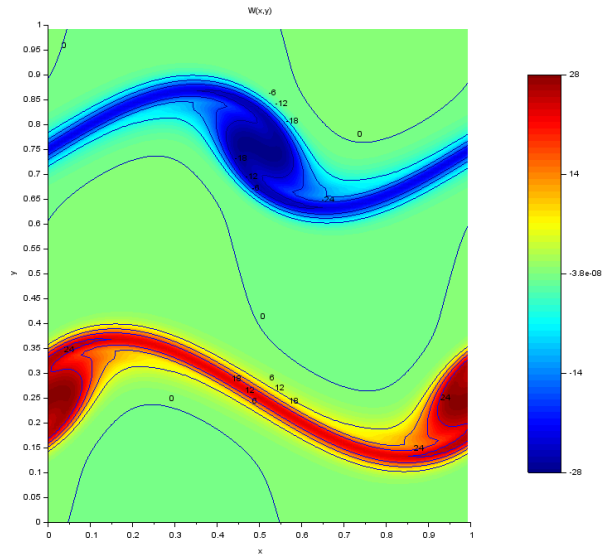


FIGURE 13 – Isocontours à $t=0.80$

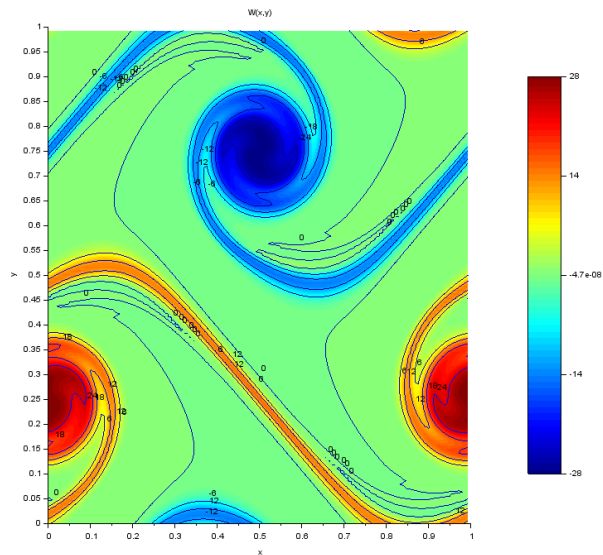


FIGURE 14 – Isocontours à $t=1.20$

Quand on étudie les isocontours ci dessus, on trouve que les résultats concordent avec ce qui a été trouvé précédemment.

Question 14. *On réitère la même simulation avec des paramètres différents.*

On trouve les résultats suivants :

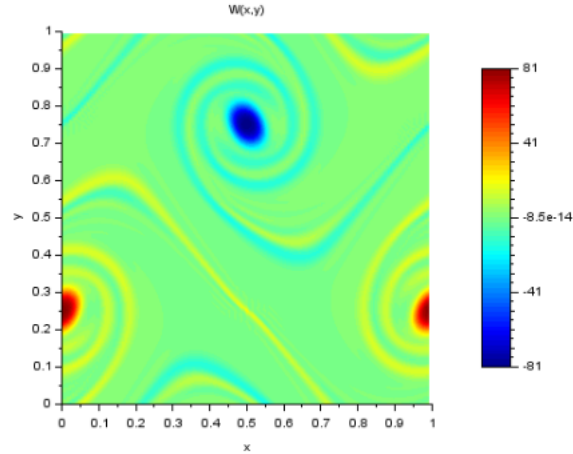


FIGURE 15 – Isocontours à $t=0.80$

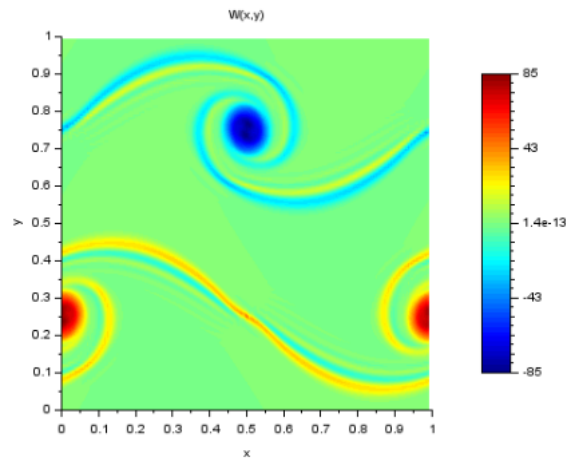


FIGURE 16 – Isocontours à $t=1.20$

On remarque que avec ces paramètres le vortex se crée plus rapidement mais conserve le même point central de rotation. On en déduit donc que ce point central dépend des conditions initiales. Aussi, on observe une certaine périodicité spatiale qui concorde bien avec notre modèle. Ce paramétrage prend beaucoup plus de temps car son nombre d'itérations est bien supérieur à celui du précédent.

Le résultat est donc satisfaisant.

Quand aux isocontours cette fois on trouve :

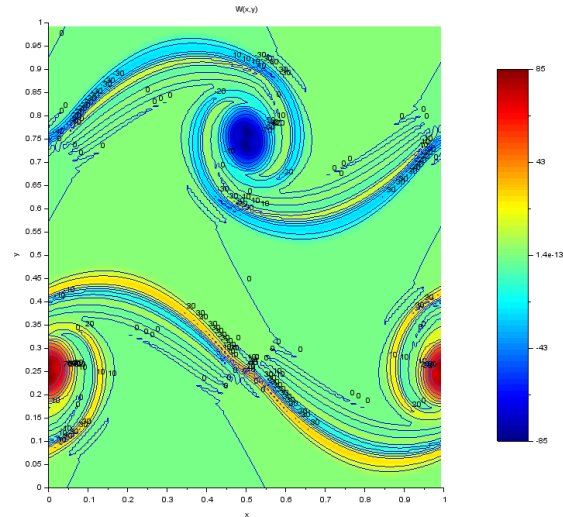


FIGURE 17 – Isocontours à $t=0.80$

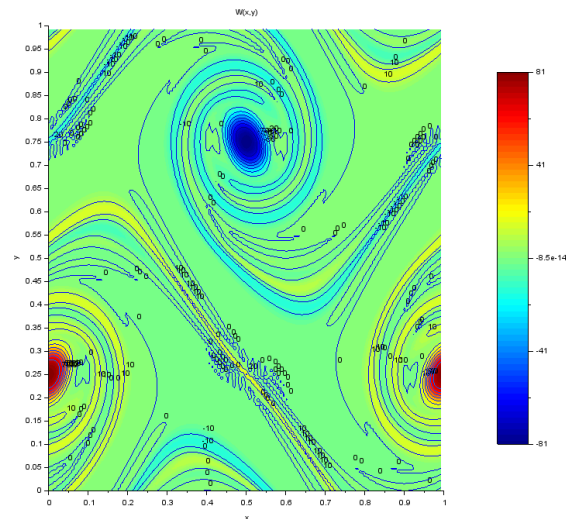


FIGURE 18 – Isocontours à $t=1.20$

N.-B : Vu que cette simulation prend beaucoup plus de temps que la précédente, ses résultats ont été supprimés pour ne pas alourdir le dossier à rendre. Ainsi, le script simu est paramétré selon la question 13.

Question 15.