Сначала выведем простой случай, потом добавим взаимодействие между атомами и посмотрим, как это усложнение влияет на поведение балки.

Уравнение движения балки Эйлера-Бернулли

Балка – отсутствует напряжение по оси y. Пластину можно представить как массив балок, в которых помимо напряжения по x существует напряжение по y.

Согласно теории Бернулли-Эйлера (аналог гипотез Кирхгофа для оболочек), в трехмерной постановке задача решается в ансисе, мы будем двумерную рассматривать (то есть пластины/балки). Суть в чем: делаем из пластины балку (убираем из рассмотрения y) и остается только деформация по x, в направлении длины балки.

Будем рассматривать нелинейную теорию.

В действительности во многих конструкциях, особенно в так называемых гибких, даже при работе материала в упругой стадии нагружение приводит к большим перемещениям и изменению формы и размеров. В этом случае соотношение между деформациями и перемещениями оказываются нелинейными. Подобного рода нелинейность называется геометрической.

При расчете с учетом такой нелинейности в теорию вводят нелинейные соотношения между деформациями и перемещениями.

При возникновении нелинейной зависимости между напряжениями и деформациями закон Гука заменяется более сложными соотношениями. $\sigma=f(\varepsilon)$. *Это физическая нелинейность.*

Также существует конструктивная нелинейность.

Каждый из трех видов нелинейности изучается отдельно с помощью метода приращений параметров.

Их объединяет общая идея варьирования различных параметров (нагрузочных воздействий, жесткости системы, времени), входящих в систему нелинейных уравнений, описывающих задачу. Пошаговая линеаризация этой системы уравнений производится по выбираемому параметру x. Исходное значение этого параметра x и соответствующее ему исходное напряженно-деформированное состояние считаются известными. Затем варьированному параметру придается малое приращение Δx и находится соответствующее ему изменение напряженно-деформированного состояния. Последовательно выполняя эту операцию до окончательного значения $x=\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i$, можно решить задачу, т. е. систему нелинейных уравнений.

Напряженное и деформированное состояние в точке тела полностью определено, если в ней известны тензоры напряжений и деформаций. Тензор напряжений T_σ имеет вид квадратной матрицы

$$T_\sigma=\begin{pmatrix}\sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz}\\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z\end{pmatrix} \tag{1.1}$$

В силу закона взаимности (парности касательных напряжений), впервые доказанным Коши, для определения напряженного состояния достаточно знать только шесть компонент тензора напряжений, так как

$$\tau_{xy}=\tau_{yx},\quad \tau_{yz}=\tau_{zy},\quad \tau_{zx}=\tau_{xz} \tag{1.2}$$

Деформированное состояние в окрестности произвольной точки тела определяется тензором деформаций T_ε, который также имеет вид квадратной матрицы

$$T_\varepsilon=\begin{pmatrix}\varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz}\\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz}\\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z\end{pmatrix} \tag{1.3}$$

где введены обозначения: $\varepsilon_x,\varepsilon_y,\varepsilon_z$ – относительные линейные деформации, $\gamma_{xy},\gamma_{yz},\gamma_{zx}$ – относительные угловые деформации, причем в соответствии с определением относительной угловой деформации

$$\gamma_{xy}=\gamma_{yx},\quad \gamma_{yz}=\gamma_{zy},\quad \gamma_{zx}=\gamma_{xz} \tag{1.4}$$

Напряженное и деформированное состояние в точке можно описать тремя главными нормальными напряжениями $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, действующими в трех взаимно перпендикулярных плоскостях, проходящих через рассматриваемую точку, и тремя главными удлинениями $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$. Если деформируемое тело изотропно, то направления главных деформаций совпадают с соответствующими направлениями главных напряжений. При определенных условиях деформирования, например при сложном нагружении, это правило может нарушаться.

Связь между главными напряжениями в точке тела и напряжениями на произвольно ориентированной площадке, проходящей через эту точку, описывается кубическим уравнением

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0, \qquad (1.5)$$

коэффициенты которого определяются по формулам

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \\ I_2 &= \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1, \\ I_3 &= \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \end{aligned} \qquad (1.6)$$

Корнями этого уравнения являются главные нормальные напряжения $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. Так как главные напряжения не изменяются при повороте координатных осей, то коэффициенты уравнения (1.5) являются инвариантами тензора напряжений по отношению к повороту координатных осей. Любая функция трех главных напряжений инвариантна по отношению к координатной системе и может быть названа инвариантом напряженного состояния.

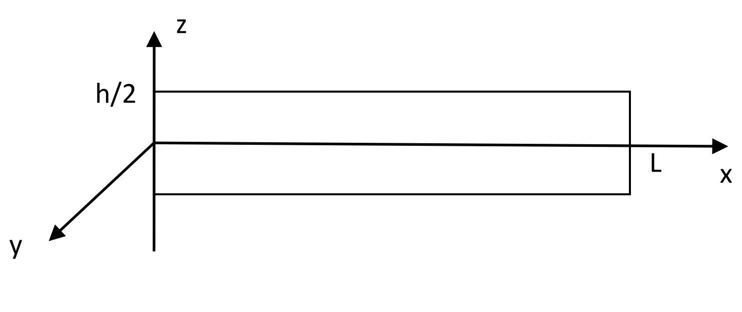
Главные относительные удлинения $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3$ определяются как корни кубического уравнения

$$\varepsilon^3 - \theta_1\varepsilon^2 + \theta_2\varepsilon - \theta_3 = 0 \qquad (1.7)$$

Величины $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ являются инвариантами тензора деформаций и определяются следующим образом

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \\ \theta_2 &= \varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_y\varepsilon_z + \varepsilon_z\varepsilon_x - \frac{1}{4}\left(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2\right) = \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1, \\ \theta_3 &= \varepsilon_x\varepsilon_y\varepsilon_z + \frac{1}{4}\left(\gamma_{xy}\gamma_{yz}\gamma_{zx} - \varepsilon_x\gamma_{yz}^2 - \varepsilon_y\gamma_{zx}^2 - \varepsilon_z\gamma_{xy}^2\right) = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 \end{aligned} \qquad (1.8)$$

Рассмотрим деформацию в некотором слое балки, параллельном срединной линии и удаленном от этой линии на расстояние $z \neq 0$



Для решения поставленной задачи необходимо иметь фундаментальную систему уравнений нелинейной механики, включающую статические, геометрические и физические уравнения.

Статические:

тическая группа уравнений получается на основе применения основной теоремы статики и использовании принципа отвердения (расчет по недеформированной схеме).

Принцип отвердения состоит в том, что равновесие деформируемой системы не нарушается, если предположить, что система стала абсолютно твердым телом. Применяя основную теорему статики для определения равновесия элементарного объема тела получим уравнения равновесия Навье, которые при использовании принципа отвердения становятся линейными, и представляют собой следующую систему дифференциальных уравнений в частных производных

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}+X=0\\
&\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}+Y=0\\
&\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+Z=0
\end{aligned}\right\} \qquad (1.9)$$

Здесь $\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z,\tau_{xy}=\tau_{yx},\tau_{yz}=\tau_{zy},\tau_{zx}=\tau_{xz}$ – компоненты тензора напряжений в системе координат x,y,z. X,Y,Z – компоненты массовых сил. Эти уравнения описывают статическую сторону задачи.

Геометрические:

Геометрические уравнения определяют связь деформаций и перемещений. Деформации и перемещения в общем случае связаны друг с другом нелинейными соотношениями, которые имеют следующий вид [2]

$$\begin{aligned}
\epsilon_x&=\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2\right],\\
\epsilon_y&=\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2\right],\\
\epsilon_z&=\frac{\partial W}{\partial z}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2\right].
\end{aligned} \qquad (1.10)$$

Физические:

Угловые относительные деформации и компоненты вектора перемещений связаны друг с другом также нелинейными соотношениями и имеют следующий вид

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} + \left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial x}\frac{\partial W}{\partial y} \right).$$

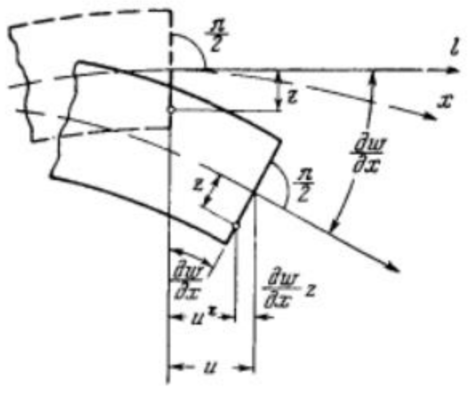
$$\gamma_{yz} = \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}\frac{\partial W}{\partial y} \right). \qquad (1.11)$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z} + \left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x}\frac{\partial W}{\partial z} \right).$$

здесь U – перемещение в направлении оси x, V – перемещение в направлении оси y, W – перемещение в направлении оси z (компоненты вектора перемещений).

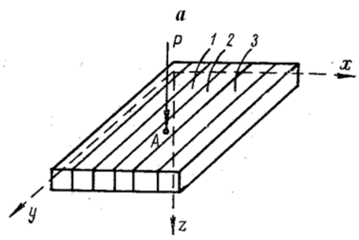
Первое, что стоит ввести, это перемещения, чтобы определить соотношения Коши. Перемещения точек срединной поверхности по направлениям x, y, z обозначим через u, v, w. Причем u=u(x,t), w=w(x,t), что означает, что перемещения точек срединного слоя вдоль координатной линии являются функциями координаты и времени.

При использовании гипотезы Эйлера — Бернулли предполагается, что нормаль, перпендикулярная срединной линии до момента начала деформации, остается перпендикулярной ей в процессе деформирования балки, но поворачивается относительно положения в недеформированном состоянии на угол, равный $\partial w/\partial x$.



Теперь определим перемещения произвольной точки балки.

Используя гипотезу о плоских сечениях, делаем вывод, что относительным сдвигом можно пренебречь. Тогда, интегрируя соотношение, получим формулу для перемещения по x:



$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \approx 0,$$

$$u^z = u - z\frac{\partial w}{\partial x}$$

Перемещение по z:

$$w^z = w$$

Ниже сначала записали деформацию как есть, потом подставили выражение для перемещения по x.

$$\varepsilon_x^z = \frac{\partial u^z}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 = \frac{\partial}{\partial x}\left(u - z\frac{\partial w}{\partial x}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \varepsilon_x + \varepsilon_{xz}$$

Деформация любой произвольной точки балки складывается из деформации срединной линии и из деформации изгиба.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2$$ *срединной линии*

$$-z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$ *изгиба*

Еще раз: по y не рассматриваем деформацию, потому что это балка, а по z не рассматриваем, потому что все сводится к срединной линии.

Запишем закон Гука:

$$\sigma_x^z = E\varepsilon_x^z$$

Усилия и моменты (из теории оболочек):

H - толщина балки.

$$N_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x^z dz$$ - нормальное напряжение

$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x^z z dz$ - момент

Выразим усилия и моменты через перемещения:

$$N_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E\varepsilon_x^z dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) dz = Eh\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{Eh}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2$$

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E\varepsilon_x^z z dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) z dz = -\frac{Eh^3}{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

Далее будем пользоваться вариационным принципом Остроградского-Гамильтона. Вариация – это малое изменение.

Принцип Остроградского-Гамильтона (кинетическая+потенциальная+работа внешних сил)

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\delta K - \delta \Pi + \delta W\right) dt = 0$$

О принципе Остроградского-Гамильтона:

Идея, которая положена в основу всех интегральных и некоторых дифференциальных принципов, заключается в положении, что реальное движение механической системы сообщает экстремальность некоторой физической величине.

Если сравнить действительное движение консервативной системы (прямой путь) с любым кинематически возможным, бесконечно близким к нему (окольный путь), происходящим в течение одного и того же промежутка времени и между одними и теми же положениями (конфигурациями), то вариация действия при переходе с прямого пути к окольному равна нулю.

Вариация — малое смещение независимой переменной или функционала.

$$\delta \int_{t1}^{t2} (T - \Pi) dt = 0$$

Принцип утверждает, что действительное движение материальной системы отличается от всех других возможных тем, что оно удовлетворяет необходимому условию экстремума гамильтонова действия.

Далее каждую из составляющих рассмотрим по отдельности.

Если рассматриваем пластину, то она занимает объем. Если балку, то она занимает область в пространстве.

$$\delta W_{\varepsilon} = \int_{\Omega} \varepsilon\rho \frac{\partial w}{\partial t} \delta w dv = \int_{0}^{l}$$

Ω - область xz.

ε - коэффициент диссипации среды (мешает балке перемещаться)

ρ - плотность материала балки

Нормальная нагрузка, зависит от точки приложения и от времени

$$\delta W_{q} = \int_{0}^{l} q(x,t)\delta w dx$$

Потенциальная энергия – интеграл суммы напряжений на одноименную деформацию.

Энергия, говоря простым языком, это возможность что-либо сделать, возможность совершить работу. То есть, если какое-либо тело может совершить какую-либо работу, то про это тело можно сказать, что оно обладает энергией.

Перед тем как приступить к выводу формул потенциальной энергии, ещё раз вспомним, что совершённая телом или над телом работа равна изменению его энергии. При этом, если само тело совершает работу, то его энергия уменьшается, а если над телом совершают работу, то его энергия увеличивается. К примеру, если спортсмен поднимает штангу, то он сообщает ей потенциальную энергию гравитационного взаимодействия, а если он отпускает штангу и она падает, то потенциальная энергия гравитационного взаимодействия штанги с Землёй уменьшается. Также, если вы открываете дверь, растягивая пружину, то вы сообщаете пружине *потенциальную энергию упругого взаимодействия, но если потом дверь закрывается, благодаря сжатию пружины в начальное состояние, то и энергия упругой деформации пружины уменьшается до нуля.*

Внешние силы, приложенные к телу, совершают работу на вызываемых ими перемещениях. В результате этого происходит накопление потенциальной энергии деформации, которая при удалении внешних сил расходуется на восстановление первоначального не- деформированного состояния тела. Если тело при нагружении испытывает только упругие деформации, то потенциальная энергия деформации численно равна работе сил, затраченной на деформацию тела. Энергия, накапливаемая в единице объема тела, называется удельной энергией.

В общем случае трехмерной задачи выражение для U_0 можно записать в виде

$$U_0 = \frac{1}{2}(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx}).$$

Это выражение называется формулой Клапейрона.

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_\Omega \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}dv = \frac{1}{2}\int_\Omega \sigma_x^z\varepsilon_x^z dv =$$

$$= \frac{1}{2}\int_\Omega \sigma_x^z\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)dv = \frac{1}{2}\int_0^l\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\left[\sigma_x^z\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right) - \sigma_x^z z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right]dv =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^l\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right)\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\sigma_x^z dzdx - \frac{1}{2}\int_0^l\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\sigma_x^z zdzdx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^l\left[N_x\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right) - M_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right]dx$$

Запишем ее вариацию:

$$\delta\Pi = \frac{1}{2}\int_0^l\left[N_x\left(\frac{\partial\delta u}{\partial x} + \frac{1}{2}2\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial\delta w}{\partial x}\right) - M_x\frac{\partial^2\delta w}{\partial x^2}\right]dx$$

Но такой вид уравнения нас не устраивает ↑, сделаем вариации здорового человека с помощью интегрирования по частям:

$$\delta\Pi = \frac{1}{2}\int_0^l \left[N_x\left(\frac{\partial\delta u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial\delta w}{\partial x}\right) - M_x\frac{\partial^2\delta w}{\partial x^2}\right]dx$$

=

$$\frac{1}{2}\int N_x\frac{\partial\delta u}{\partial x}dx = \left| u = N_x, \quad du = \frac{\partial N_x}{\partial x}dx, \quad dv = \frac{\partial\delta u}{\partial x}dx, \quad v = \delta u \right| = \frac{1}{2}N_x\delta u\Big|_0^l - \frac{1}{2}\int_0^l \frac{\partial N_x}{\partial x}\delta u dx$$

$$+\frac{1}{2}\int N_x\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial\delta w}{\partial x}dx = \left| u = N_x\frac{\partial w}{\partial x}, du = \frac{\partial}{\partial x}\left(N_x\frac{\partial w}{\partial x}\right)dx, \quad dv = \frac{\partial\delta w}{\partial x}dx, \quad v = \delta w \right| =$$

$$= \frac{1}{2}N_x\frac{\partial w}{\partial x}\delta w\Big|_0^l - \frac{1}{2}\int \frac{\partial}{\partial x}\left(N_x\frac{\partial w}{\partial x}\right)\delta w dx$$

$$-\frac{1}{2}\int M_x\frac{\partial^2\delta w}{\partial x^2}dx = -\frac{1}{2}M_x\frac{\partial\delta w}{\partial x}\Big| + \frac{1}{2}\frac{\partial M_x}{\partial x}\delta w - \frac{1}{2}\int \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2}\delta w dx$$

Кинетическая энергия:

$$K = \frac{\gamma h}{2g}\int_0^l \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2\right]dx$$

g – ускорение свободного падения;

γ - удельный вес материала балки.

l – длина балки.

Вариация кинетической энергии:

$$\delta K = \frac{1}{2}\frac{\gamma h}{g}\int_0^l \left[\frac{2\partial u}{\partial t}\frac{\partial\delta u}{\partial t} + \frac{2\partial w}{\partial t}\frac{\partial\delta w}{\partial t}\right]dx$$

$$\int_{t0}^t \delta K dt = \frac{\gamma h}{2g}\int\limits_0^l \int\limits_{t0}^t \left[\frac{2\partial u}{\partial t}\frac{\partial\delta u}{\partial t} + \frac{2\partial w}{\partial t}\frac{\partial\delta w}{\partial t}\right]dt dx$$

$$= \frac{\gamma h}{g}\left[\int\limits_0^l \left[\frac{\partial u}{\partial t}\delta u\Bigg|\begin{matrix} t \\ t0 \end{matrix} - \int \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\delta u dt + \frac{\partial w}{\partial t}\delta w\Bigg|\begin{matrix} t \\ t0 \end{matrix} - \int \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\delta w dt\right]dx\right]$$

Подставили все в вариационный принцип:

$$\int_{t0}^{t1}\left[\left[\frac{1}{2}M_x\frac{\partial\delta w}{\partial x}-\frac{1}{2}\frac{\partial M_x}{\partial x}\delta w+\frac{1}{2}\int\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2}\delta w dx\right]+\left[-\frac{1}{2}N_x\delta u+\frac{1}{2}\int_0^l\frac{\partial N_x}{\partial x}\delta u dx\right]+\right.$$

$$\left.\left[-\frac{1}{2}N_x\frac{\partial w}{\partial x}\delta w+\frac{1}{2}\int\frac{\partial}{\partial x}\left(N_x\frac{\partial w}{\partial x}\right)\delta w dx\right]+\int_0^l q(x,t)\delta w dx+\int\varepsilon\rho\frac{\partial w}{\partial t}\delta w dx\right]dt+$$

$$\frac{\gamma h}{g}\left[\int\left[\frac{\partial u}{\partial t}\delta u\left|_{t0}^{t}-\int\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\delta u dt+\frac{\partial w}{\partial t}\delta w\right|_{t0}^{t}-\int\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\delta w dt\right]dx\right]=0$$

Перегруппируем интегралы:

$$\int_{t0}^{t1}\left[\frac{1}{2}M_x\frac{\partial\delta w}{\partial x}\Big|_0^l-\frac{1}{2}\frac{\partial M_x}{\partial x}\delta w-\frac{1}{2}N_x\delta u-\frac{1}{2}N_x\frac{\partial w}{\partial x}\delta w\right]dt$$

$$+\iint\left[\frac{1}{2}\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2}\delta w+q(x,t)\delta w+\varepsilon\rho\frac{\partial w}{\partial t}\delta w+\frac{1}{2}\frac{\partial N_x}{\partial x}\delta u\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(N_x\frac{\partial w}{\partial x}\right)\delta w-\frac{\gamma h}{g}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\delta u-\frac{\gamma h}{g}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\delta w\right]dxdt$$

$$+\int\frac{\gamma h}{g}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\delta u\Big|_{t_0}^{t}+\frac{\partial w}{\partial t}\delta w\Big|_{t_0}^{t}\right)dx=0$$

Сумма вариаций тогда равна нулю, когда коэффициенты при всех вариациях равны нулю. Значит перегруппируем слагаемые перед δw и δu. В итоге получаем два уравнения:

$$\int_{t0}^{t1}\left[\frac{1}{2}M_x\frac{\partial\delta w}{\partial x}\Big|_0^l-\frac{1}{2}\frac{\partial M_x}{\partial x}-\frac{1}{2}N_x\frac{\partial w}{\partial x}\right]dt$$

$$+\iint\left[\frac{1}{2}\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2}+q(x,t)+\varepsilon\rho\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(N_x\frac{\partial w}{\partial x}\right)-\frac{\gamma h}{g}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right]dxdt$$

$$+\int\frac{\gamma h}{g}\left(\frac{\partial w}{\partial t}\Big|_{t_0}^{t}\right)dx=0$$

$$\int_{t0}^{t1}-\frac{1}{2}N_x\,dt+\iint\left[\frac{1}{2}\frac{\partial N_x}{\partial x}-\frac{\gamma h}{g}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right]dxdt+\int\frac{\gamma h}{g}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\Big|_{t_0}^{t}dx=0$$

dt – начальное, dx – граничное

Под двойным интегралом слагаемые выпишем отдельно:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2}+2q(x,t)+2\varepsilon\rho\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(N_x\frac{\partial w}{\partial x}\right)-2\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0$$

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial x}\left(N_x\frac{\partial w}{\partial x}\right)+2q(x,t)=-2\varepsilon\rho\frac{\partial w}{\partial t}+2\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} = 2\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Теперь подставим в уравнения полученные ранее выражения для усилий и моментов через перемещения:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(-\frac{Eh^3}{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\left(Eh\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{Eh}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right)\frac{\partial w}{\partial x}\right) + 2q(x,t)$$

$$= -2\varepsilon\rho\frac{\partial w}{\partial t} + 2\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(Eh\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{Eh}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right) = 2\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Раскроем скобки:

$$-\frac{Eh^3}{12}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + Eh\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{3}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + 2q(x,t)$$

$$= -2\varepsilon\rho\frac{\partial w}{\partial t} + 2\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

$$Eh\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Eh\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial w}{\partial x} = 2\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Неклассическая теория

Когда мы рассматриваем неклассическую теорию, т.е. межмолекулярные взаимодействия – силы, возникающие в результате учета структуры материала, то возникает еще один тензор изгиба-кручения (континуум Коссера). То есть наряду с обычным полем напряжений рассматриваются еще и моментные напряжения. Поля перемещений и напряжений не являются независимыми.

Компоненты симметричного тензора изгиба-кручения χ запишутся следующим образом:

$$\chi_{xx} = \frac{\partial \theta_x}{\partial x}, \chi_{yy} = \frac{\partial \theta_y}{\partial y}, \chi_{zz} = \frac{\partial \theta_z}{\partial z}, \chi_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \theta_y}{\partial x} + \frac{\partial \theta_x}{\partial y}\right),$$

$$\chi_{zx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \theta_z}{\partial x} + \frac{\partial \theta_x}{\partial z}\right), \chi_{zy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \theta_y}{\partial z} + \frac{\partial \theta_z}{\partial y}\right),$$

где θ_x, θ_y, θ_z- компоненты вектора микро-поворотов:

$$\theta_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right), \theta_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right), \theta_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right). \tag{1}$$

Поскольку y отсутствует в случае балки, соотношения упростятся:

$$\chi_{yy} = 0,$$
$$\chi_{zz} = 0,$$
$$\chi_{xx} = 0$$
$$\chi_{zx} = 0$$
$$\chi_{xy} = \frac{1}{2}\frac{\partial \theta_y}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$
$$\chi_{zy} = \frac{1}{2}\frac{\partial \theta_y}{\partial z} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) = 0$$
$$\theta_x = 0,$$
$$\theta_z = 0$$

Определяющие соотношения – соотношения между напряжениями и деформациями в деформируемом твердом теле.

Определяющие соотношения для материала балки примем в виде:

$$\left(m_{xx}, m_{xy}, m_{zx}\right) = \frac{El^2}{1+\nu}\left(\chi_{xx}, \chi_{xy}, \chi_{zx}\right),$$

$$Y_{xx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} m_{xx} dz, \quad Y_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} m_{xy} dz, \quad Y_{zx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} m_{zx} dz, \quad x \square \quad y, Y_{zz} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} m_{zz} dz, .$$

Слагаемые с σ пришли из классической теории, остальное связано с моментами. Посчитаем данный интеграл:

$$U = \frac{1}{2}\int_{\Omega}\left(\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + 2\sigma_{xy}\varepsilon_{xy} + \sigma_{yy}\varepsilon_{yy} + m_{xx}\chi_{xx} + m_{yy}\chi_{yy} + 2m_{xy}\chi_{xy} + 2m_{zx}\chi_{zx} + 2m_{zy}\chi_{zy} + m_{zz}\chi_{zz}\right)dv$$

$$U = \Pi = \frac{1}{2}\int_{\Omega} [2m_{xy}\chi_{xy} + 2m_{zy}\chi_{zy}]dv + I_2 = I_1 + I_2$$

$$I_1 = \frac{1}{2}\int_{\Omega} \left[2m_{xy}\chi_{xy} + 2m_{zy}\chi_{zy}\right]dv = \frac{1}{2}\int_0^l \int_{-h/2}^{h/2} -2m_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dz dx = \int_0^l -Y_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx$$

$$\delta I_1 = \int_0^l -Y_{xy}\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} dx = -\left[Y_{xy}\frac{\partial \delta w}{\partial x}\Big|_0^l - \int_0^l \frac{\partial \delta w}{\partial x}\frac{\partial Y_{xy}}{\partial x} dx\right]$$
$$= -Y_{xy}\frac{\partial \delta w}{\partial x}\Big|_0^l + \frac{\partial Y_{xy}}{\partial x}\delta w\Big|_0^l - \int \delta w \frac{\partial^2 Y_{xy}}{\partial x^2} dx$$

Теперь выразим Y_{xy} через перемещения и упругие константы:

$$Y_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} m_{xy} dz = -\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{El^2}{1+\nu}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dz = -\frac{El^2}{1+\nu}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} h$$

$$\delta I_1 = \frac{El^2}{1+\nu}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}h\frac{\partial \delta w}{\partial x}\bigg|_0^l - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{El^2}{1+\nu}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}h\right)\delta w\bigg|_0^l + \int \delta w\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{El^2}{1+\nu}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}h\right)dx$$

$$\delta I_2 = -\frac{1}{2}M_x\frac{\partial \delta w}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial M_x}{\partial x}\delta w - \frac{1}{2}\int\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2}\delta w dx + \frac{1}{2}N_x\delta u - \frac{1}{2}\int_0^l\frac{\partial N_x}{\partial x}\delta u dx + \frac{1}{2}N_x\frac{\partial w}{\partial x}\delta w - \frac{1}{2}\int\frac{\partial}{\partial x}\left(N_x\frac{\partial w}{\partial x}\right)\delta w dx$$

Тогда вариационный принцип с учетом новых слагаемых запишется в полном виде как:

$$\int_{t0}^{t1}\Bigg[\left[\frac{1}{2}M_x\frac{\partial\delta w}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{\partial M_x}{\partial x}\delta w + \frac{1}{2}\int\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2}\delta w dx\right] + \left[-\frac{1}{2}N_x\delta u + \frac{1}{2}\int_0^l\frac{\partial N_x}{\partial x}\delta u dx\right]$$
$$+ \left[-\frac{1}{2}N_x\frac{\partial w}{\partial x}\delta w + \frac{1}{2}\int\frac{\partial}{\partial x}\left(N_x\frac{\partial w}{\partial x}\right)\delta w dx\right]$$
$$+ \int_0^l q(x,t)\delta w dx + \int \varepsilon\rho\frac{\partial w}{\partial t}\delta w dx$$
$$+ \left[-\frac{El^2}{1+\nu}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}h\frac{\partial\delta w}{\partial x}\bigg|_0^l + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{El^2}{1+\nu}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}h\right)\delta w\bigg|_0^l\right.$$
$$\left. - \int\delta w\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{El^2}{1+\nu}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}h\right)dx\right]\Bigg]dt$$
$$+ \frac{\gamma h}{g}\left[\iint\left[\frac{\partial u}{\partial t}\delta u\bigg|_{t0}^{t} - \int\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\delta u dt + \frac{\partial w}{\partial t}\delta w\bigg|_{t0}^{t} - \int\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\delta w dt\right]dx\right]$$
$$= 0$$

Далее можно пропустить повторяющиеся действия и сразу записать уравнения с учетом новых слагаемых:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(-\frac{Eh^3}{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\left(Eh\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{Eh}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right)\frac{\partial w}{\partial x}\right) + 2q(x,t)$$
$$- \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{El^2}{1+\nu}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}h\right) = -2\varepsilon\rho\frac{\partial w}{\partial t} + 2\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(Eh\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{Eh}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right)=2\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$-\frac{Eh^3}{12}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+Eh\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{3}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)+2q(x,t)-\frac{Ehl^2}{1+\nu}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}$$
$$=-2\varepsilon\rho\frac{\partial w}{\partial t}+2\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

$$Eh\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+Eh\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial w}{\partial x}=2\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Метод Бубнова-Галеркина для статической линейной задачи

Рассмотрим линейную балку Бернулли-Эйлера (отвалится второе уравнение и скобки с нелинейностью), получится одно уравнение. Изучаем статический случай, т.е. с правой стороны слагаемых с t не будет.

Деформацию u не рассматриваем, потому что не учитываем геометрическую нелинейность.

$$-\left(\frac{Ehl^2}{1+\nu}+\frac{Eh^3}{12}\right)\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2q_1(x,t)=0$$

$$-\left(\frac{Ehl^2}{1+\nu}+\frac{Eh^3}{12}\right)\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}=q(x)$$

Концы балки жестко закреплены, значит

$$w(0) = w(l) = 0.$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}(0)=\frac{\partial w}{\partial x}(l)=0$$

Мы представляем искомую функцию в виде ряда следующего вида:

$$w(x)=\sum_{i}^{N}c_i\left(1-\cos\left(\frac{2\pi i x}{l}\right)\right)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\sum_{i=1}^{N}\frac{2\pi i}{l}c_i\left(sin\left(\frac{2\pi i x}{l}\right)\right)$$

Подставим базисную функцию в граничные условия и посмотрим, подходит ли она для решения данной задачи

$$w(0) = \sum_{i}^{N} c_i (1 - \cos(0)) = 0$$

$$w(l) = \sum_{i=1}^{N} c_i (1 - \cos(2\pi i)) = 0$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}(0) = \sum_{i=1}^{N} \frac{2\pi i}{l} c_i \big(sin(0)\big) = 0$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}(l) = \sum_{i}^{N} \frac{2\pi i}{l} c_i (\sin(2\pi i)) = 0$$

<u>1 итерация</u>: подставим данное разложение (взяли только первый член ряда) в исходное дифференциальное уравнение

$$\left(\frac{Ehl^2}{1+\nu} + \frac{Eh^3}{12}\right)\left(\frac{2\pi}{l}\right)^4 c_1 \cos\left(\frac{2\pi x}{l}\right) = q(x)$$

Умножим все уравнение на базисную функцию

$$\left(\frac{Ehl^2}{1+\nu} + \frac{Eh^3}{12}\right)\left(\frac{2\pi}{l}\right)^4 c_1 \cos\left(\frac{2\pi x}{l}\right)\left[1 - \cos\left(\frac{2\pi x}{l}\right)\right] = q(x)\left[1 - \cos\left(\frac{2\pi x}{l}\right)\right]$$

Проинтегрируем обе части уравнения по x (допустим *q(x) = const =* C_q)

$$\int_0^l \left(\frac{Ehl^2}{1+\nu} + \frac{Eh^3}{12}\right)\left(\frac{2\pi}{l}\right)^4 c_1 \cos\left(\frac{2\pi x}{l}\right)\left[1 - \cos\left(\frac{2\pi x}{l}\right)\right] dx$$

$$= \int_0^l C_q \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi x}{l}\right)\right] dx$$

$$\left(\frac{Ehl^2}{1+\nu} + \frac{Eh^3}{12}\right) c_1 \left(\frac{2\pi}{l}\right)^4 \left[\frac{l}{2\pi} sin\left(\frac{2\pi x}{l}\right) - \frac{x}{2} - \frac{l}{8\pi} sin\left(\frac{4\pi x}{l}\right)\right]\Big|_0^l$$

$$= C_q \left[x - \frac{l}{2\pi} sin\left(\frac{2\pi x}{l}\right)\right]\Big|_0^l$$

<u>2 итерация</u>: возьмем два члена ряда

$$w(x) = \sum_{i=1}^{N} c_i \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi i x}{l}\right)\right) = c_1 \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi x}{l}\right)\right) + c_2 \left(1 - \cos\left(\frac{4\pi x}{l}\right)\right)$$

Подставим w в уравнение:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = -c_1\left(\frac{2\pi}{l}\right)^4 \cos\left(\frac{2\pi x}{l}\right) - c_2\left(\frac{4\pi}{l}\right)^4 \cos\left(\frac{4\pi x}{l}\right)$$

$$\left(\frac{Ehl^2}{1+\nu} + \frac{Eh^3}{12}\right)\left[c_1\left(\frac{2\pi}{l}\right)^4 \cos\left(\frac{2\pi x}{l}\right) - c_2\left(\frac{4\pi}{l}\right)^4 \cos\left(\frac{4\pi x}{l}\right)\right] = q(x)$$

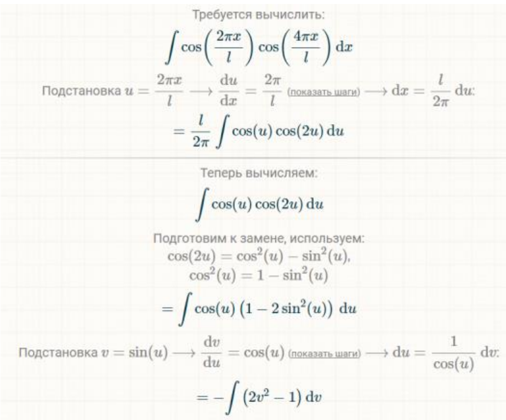
Теперь у нас две функции и требуется найти две константы. Получим два уравнения, поочередно умножая на каждую из базисных функций, потом проинтегрируем их и найдем константы.

Первое уравнение:

$$\left(\frac{Ehl^2}{1+\nu} + \frac{Eh^3}{12}\right)\left[c_1\left(\frac{2\pi}{l}\right)^4 \cos\left(\frac{2\pi x}{l}\right) + c_2\left(\frac{4\pi}{l}\right)^4 \cos\left(\frac{4\pi x}{l}\right)\right]\left[1 - \cos\left(\frac{2\pi x}{l}\right)\right]$$
$$= q(x)\left[1 - \cos\left(\frac{2\pi x}{l}\right)\right]$$

После интегрирования:

$$\left(\frac{Ehl^2}{1+\nu} + \frac{Eh^3}{12}\right) c_1\left(\frac{2\pi}{l}\right)^4 \left[\frac{l}{2\pi} sin\left(\frac{2\pi x}{l}\right) - \frac{x}{2} - \frac{l}{8\pi} sin\left(\frac{4\pi x}{l}\right)\right]$$
$$+ c_2\left(\frac{4\pi}{l}\right)^4 \left[\frac{l}{4\pi}\sin\left(\frac{4\pi x}{l}\right) - \frac{l}{12\pi}\left(sin\left(\frac{6\pi x}{l}\right) + 3sin\left(\frac{2\pi x}{l}\right)\right)\right]\Big|_0^l$$
$$= C_q\left[x - \frac{l}{2\pi} sin\left(\frac{2\pi x}{l}\right)\right]\Big|_0^l$$


Требуется вычислить:

$$\int \cos\left(\frac{2\pi x}{l}\right)\cos\left(\frac{4\pi x}{l}\right) dx$$

Подстановка $u = \frac{2\pi x}{l} \longrightarrow \frac{du}{dx} = \frac{2\pi}{l}$ (показать шаги) $\longrightarrow dx = \frac{l}{2\pi} du$:

$$= \frac{l}{2\pi}\int \cos(u)\cos(2u)\, du$$

Теперь вычисляем:

$$\int \cos(u)\cos(2u)\, du$$

Подготовим к замене, используем:
$\cos(2u) = \cos^2(u) - \sin^2(u)$,
$\cos^2(u) = 1 - \sin^2(u)$

$$= \int \cos(u)\left(1 - 2\sin^2(u)\right) du$$

Подстановка $v = \sin(u) \longrightarrow \frac{dv}{du} = \cos(u)$ (показать шаги) $\longrightarrow du = \frac{1}{\cos(u)} dv$:

$$= -\int \left(2v^2 - 1\right) dv$$

Теперь вычисляем:

$$\int \left(2v^2 - 1\right) \mathrm{d}v$$

Применим линейность:

$$= 2\int v^2 \,\mathrm{d}v - \int 1 \,\mathrm{d}v$$

Теперь вычисляем:

$$\int v^2 \,\mathrm{d}v$$

Интеграл от степенной функции:

$$\int v^{\mathrm{n}} \,\mathrm{d}v = \frac{v^{\mathrm{n}+1}}{\mathrm{n}+1} \text{ при } \mathrm{n} = 2:$$

$$= \frac{v^3}{3}$$

Теперь вычисляем:

$$\int 1 \,\mathrm{d}v$$

Интеграл от константы:

$$= v$$

Подставим уже вычисленные интегралы:

$$2\int v^2 \,\mathrm{d}v - \int 1 \,\mathrm{d}v$$

$$= \frac{2v^3}{3} - v$$

Подставим уже вычисленные интегралы:

$$-\int \left(2v^2 - 1\right) \mathrm{d}v$$

$$= v - \frac{2v^3}{3}$$

Обратная замена $v = \sin(u)$:

$$= \sin(u) - \frac{2\sin^3(u)}{3}$$

Подставим уже вычисленные интегралы:

$$\frac{l}{2\pi} \int \cos(u)\cos(2u) \,\mathrm{d}u$$

$$= \frac{l\sin(u)}{2\pi} - \frac{l\sin^3(u)}{3\pi}$$

Обратная замена $u = \frac{2\pi x}{l}$:

$$= \frac{l\sin\left(\frac{2\pi x}{l}\right)}{2\pi} - \frac{l\sin^3\left(\frac{2\pi x}{l}\right)}{3\pi}$$

Задача решена:

$$\int \cos\left(\frac{2\pi x}{l}\right)\cos\left(\frac{4\pi x}{l}\right) \mathrm{d}x$$

$$= \frac{l\sin\left(\frac{2\pi x}{l}\right)}{2\pi} - \frac{l\sin^3\left(\frac{2\pi x}{l}\right)}{3\pi} + C$$

Перепишем/упростим:

$$= \frac{l\cdot\left(\sin\left(\frac{6\pi x}{l}\right) + 3\sin\left(\frac{2\pi x}{l}\right)\right)}{12\pi} + C$$

Второе уравнение:

$$\left(\frac{Ehl^2}{1+\nu} + \frac{Eh^3}{12}\right)\left[c_1\left(\frac{2\pi}{l}\right)^4\cos\left(\frac{2\pi x}{l}\right) - c_2\left(\frac{4\pi}{l}\right)^4\cos\left(\frac{4\pi x}{l}\right)\right]\left[1 - \cos\left(\frac{4\pi x}{l}\right)\right]$$
$$= q(x)\left[1 - \cos\left(\frac{4\pi x}{l}\right)\right]$$

$$\left(\frac{Ehl^2}{1+\nu}+\frac{Eh^3}{12}\right)c_1\left(\frac{2\pi}{l}\right)^4\left[\frac{l}{2\pi}sin\left(\frac{2\pi x}{l}\right)-\frac{l}{12\pi}\left(sin\left(\frac{6\pi x}{l}\right)+3sin\left(\frac{2\pi x}{l}\right)\right)\right]$$

$$+c_2\left(\frac{4\pi}{l}\right)^4\left[\frac{l}{4\pi}\sin\left(\frac{4\pi x}{l}\right)-\frac{x}{2}-\frac{l}{16\pi}sin\left(\frac{8\pi x}{l}\right)\right]\Big|_0^l$$

$$=C_q\left[x-\frac{l}{2\pi}sin\left(\frac{2\pi x}{l}\right)\right]\Big|_0^l$$