Laboratorio Sperimentale di Matematica Computazionale

a.a. 2016/2017

ESERCITAZIONE 7

Modelli geometrici

1. Si consideri la curva definita dalle equazioni

$$\begin{cases} y' = \cos(x^2) \\ z' = \sin(x^2) \\ y(0) = 0,\, z(0) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

   Il primo ad occuparsi della curva fu il matematico L. Eulero nel 1744 e per questo motivo essa è spesso nota con il nome di "spirale di Eulero". Nel 1874 il fisico francese Marie-Alfred Cornu utilizzò la curva nelle sue ricerche sui fenomeni di diffrazione e per questo talvolta è anche chiamata "spirale di Cornu". Ha interessanti applicazioni nella vita reale: per evitare il brusco passaggio da un tratto rettilineo ad un tratto a curvatura data, nelle strade e nelle ferrovie si inseriscono archi di questa curva come elementi di transizione.

   Disegnarla per $x > 0$ e per $x < 0$, verificandone eventuali simmetrie. Stimare le coordinate dei punti asintotici facendo variare x in intervalli molto ampi.

2. Si consideri la curva di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x(\theta) = ab^{\theta}\cos(\theta) \\ y(\theta) = ab^{\theta}\sin(\theta). \end{cases} \tag{2}$$

   Tale curva è nota come *spirale logaritmica* e fu scoperta da Renato Cartesio nel 1638. Cinquanta anni dopo un altro matematico, JacKob Bernoulli studiò molte sue proprietà e ne rimase talmente affascinato che richiese di averne una scolpita sulla sua pietra tombale accompagnata dalla scritta latina "eadem mutata resurgo" (sebbene cambiata, rinasco identica). La spirale logaritmica infatti prosegue indefinitamente sia verso l'interno che verso l'esterno, mantenedo la sua forma al variare della scala di osservazione. Se volessimo osservare il centro della spirale logaritmica con una lente di ingrandimento questo ci apparirebbe esattamente come la spirale che si vedrebbe continuando la curva nel verso opposto.

   Determinare un problema ai valori iniziali che definisce tale curva e, fissati i dati, risolverlo numericamente mediante la routine `ode45`. Fare quindi il grafico della spirale logaritmica corrispondente.