Laboratorio Sperimentale di Matematica Computazionale

a.a. 2016/2017

ESERCITAZIONE 2

Metodi numerici

1. Si consideri il problema test

$$\begin{cases} y'(x) = -y(x), & x \in (0, 10], \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

la cui soluzione esatta è:

$$y(x) = e^{-x}.$$

Risolvere numericamente il problema mediante il metodo di Eulero.
Utilizzando il comando `subplot`, suddividere una figura in quattro parti. In ciascuna di esse disegnare la soluzione esatta e la soluzione numerica ottenuta per i valori del passo di integrazione $h = 0.5, 1, 2, 2.5$, rispettivamente. In ciascun grafico identificare le soluzioni disegnate utilizzando il comando `legend`. Commentare i risultati ottenuti.

2. Scrivere un file di tipo *function* che implementi su griglia uniforme il **metodo di Runge-Kutta classico** per la risoluzione del problema a valori iniziali:

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(x) = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}(x)), & x \in (x_0, T] \\ \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0, \end{cases}$$

con $\mathbf{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

```
%
% function [x,u] = RK4(odefun,tspan,y0,h)
%
% Risolve sull'intervallo [tspan(1),tspan(2)] il problema a valori iniziali:
%   y'(x) = odefun(x,y(x))
%   y(tspan(1)) = y0
% usando il metodo di Runge-Kutta classico
%
% Dati di INPUT:
%   odefun    funzione da integrare
%   tspan     intervallo di integrazione
%   y0        condizione iniziale
%   h         passo di discretizzazione
%
% Dati di OUTPUT:
%   x       nodi equispaziati della griglia
%   u       soluzione numerica in corrispondenza dei nodi
%
```

Utilizzando con passo $h = 0.01$ la *function* `RK4.m` appena costruita, risolvere il problema a valori iniziali:

$$\begin{cases} y''(x) = -\dfrac{4x+1}{2(x+1)}\, y' + \dfrac{2x-1}{4x^2}\, \dfrac{3y^3+y}{1+y^2}, & x \in [1, 2], \\ y(1) = 1 \\ y'(1) = 0. \end{cases}$$

3. Utilizzando il problema a valori iniziali
$$\begin{cases} y'(t) = -y - 5e^{-t}\sin(5t), & t \in (0,5], \\ y(0) = 1 \end{cases}$$
la cui soluzione esatta è:
$$y(t) = e^{-t}\cos(5t),$$
calcolare dieci stime dell'ordine di convergenza sia del metodo di Eulero sia del metodo di Runge-Kutta classico determinate sfruttando l'errore commesso in $t = 2$ a partire da $h = 0.1$. Riportare in una tabella i risultati ottenuti.

4. Applicare il metodo di Eulero ai seguenti problemi con diversi valori di h, confrontando i risultati ottenuti con i valori esatti e con quelli che si ottengono risolvendo mediante la routine `ode45`:
$$(a) \quad \begin{cases} y' = \dfrac{2y}{x} + x^2\,\mathrm{e}^x, & x \in [1,2], \\ y(1) = 0, & \text{soluzione esatta:} \quad y = x^2(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}), \end{cases}$$
$$(b) \quad \begin{cases} y' = -y + x + 1, & x \in [0,1], \\ y(0) = 1, & \text{soluzione esatta:} \quad y = \mathrm{e}^{-x} + x, \end{cases}$$
$$(c) \quad \begin{cases} y' = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{y}{x} - y^2, & x \in [1,2], \\ y(1) = -1, & \text{soluzione esatta:} \quad y = -\dfrac{1}{x}. \end{cases}$$

5. Fissato $h = 0.1, 0.01, 0.001$, calcolare l'errore relativo e l'errore assoluto che si commettono nell'approssimare con il metodo di Eulero i due problemi a valori iniziali
$$\begin{cases} y'(x) = -\alpha y + 2x, & x \in (0,6], \\ y(0) = 1, \end{cases}$$
ottenuti per $\alpha = 1, 100$.
Confrontare i risultati ottenuti con quelli che si ottengono applicando la routine `ode45` con `Reltol` $= 10^{-7}$. Inoltre, per entrambi i valori di α, fare il grafico del passo di integrazione che si ottiene applicando la routine `ode45`.