`Laboratorio Sperimentale di Matematica Computazionale`

`a.a. 2016/2017`

ESERCITAZIONE 4

Modelli di crescita della popolazione

1. Il microbiologo Gause determinò i parametri del modello di Lotka-Volterra di competizione interspecifica per le due specie di lievito Saccharomyces cerevisiae (N_1) e Schizosaccharomyces kephir (N_2) in coltura mista. Il modello che descrive la dinamica delle due popolazioni si scrive come segue:

$$\begin{cases} N_1' = \gamma_1 \left(1 - \dfrac{N_1}{k_1} - \dfrac{N_2}{h_{12}}\right) N_1 \\ \\ N_2' = \gamma_2 \left(1 - \dfrac{N_2}{k_2} - \dfrac{N_1}{h_{21}}\right) N_2 \end{cases} \tag{1}$$

dove $N_1(t)$ ed $N_2(t)$ indicano il volume in cc (centimetri cubi) occupato dalla prima e seconda popolazione di lieviti al tempo t (misurato in ore). I valori calcolati da Gause sono i seguenti

$$\gamma_1 = 0.21827,\ k_1 = 13,\ h_{12} = 3.71429; \quad \gamma_2 = 0.06069,\ k_2 = 5.8,\ h_{21} = 13.2118.$$

Utilizzando la routine `ode45` mostrare che per i seguenti valori iniziali del volume delle due popolazioni

$$N_1(0) = 0.5, \qquad N_2(0) = 0.3,$$

il modello descrive la crescita degli Schizosaccharomyces kephir, fino alla capacità portante k_2, e la conseguente estinzione dei Saccharomyces cerevisiae; si esegua l'integrazione sull'intervallo $[0, 300]$. Disegnare sulla stessa figura i grafici delle due densità. Inoltre, fissato $N_2(0) = 0.5$, descrivere la dinamica delle due popolazioni in corrispondenza dei seguenti tre casi:

$$N_1(0) = 0.5, \quad N_1(0) = 0.1, \quad N_1(0) = 10.$$

2. Risolvere il modello di Lotka-Volterra di predazione tra specie (*modello preda-predatore*) utilizzando il metodo di Runge-Kutta classico con i seguenti parametri:

$$\alpha = 2,\ \beta = 0,\ \gamma = 0.001; \quad \hat{\alpha} = 1,\ \hat{\beta} = 0.001$$

supponendo che le densità iniziali siano le seguenti:

   a) $y_1(0) = 300$, $y_2(0) = 150$;
   b) $y_1(0) = 15$, $y_2(0) = 22$.

Assegnare in input il tempo di calcolo finale *tmax* ed il passo di integrazione h. Disegnare quindi i tre grafici della soluzione relativi alle prede, ai predatori e dei predatori rispetto alle prede.

3. Nei parchi nazionali del Sud Africa si è studiata per anni l'interazione tra i leoni e gli gnu. I ricercatori, a tale proposito, determinarono sperimentalmente le costanti del modello di Lotka-Volterra, ottenendo il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} G'(t) = 0.405\, G(t) - 0.81\, G(t) L(t) \\ L'(t) \ = -1.5\, L(t) + 0.125\, G(t) L(t) \end{cases} \tag{2}$$

dove $G(t)$ e $L(t)$ indicano le popolazioni di gnu e leoni (in migliaia) al tempo t (in anni). Nel 1975 i dati raccolti sulle due popolazioni, in migliaia, furono $G(1975) = 7.7$ e $L(1975) = 0.5$. Utilizzando la routine `ode45` integrare il sistema sull'intervallo $[0, T]$ per $T = 10$ e $T = 25$. Nel primo caso, rappresentare come varia il numero dei predatori in funzione del numero delle prede, mentre nel secondo disegnare il numero delle prede ed il numero dei predatori rispetto al tempo, rispettivamente.

4. Considerare il caso di una malattia che non preveda guarigione, ma tenda a divenire cronica. In tal caso la popolazione si divide in due classi: gli individui infettivi e quelli suscettibili, ovvero sani e passibili di contagio. Indicando con $I(t)$ e con $S(t)$ il numero degli individui infettivi e quello degli individui suscettibili all'istante di tempo t, rispettivamente, poiché la malattia non è mortale si avrà che $I(t) + S(t) = N$, dove N indica il numero totale di individui della popolazione sotto osservazione.

   - Scrivere un'equazione differenziale che descriva il modello, indicando con r il tasso di contagio e dando le opportune limitazioni alle variabili affinché abbiano significato fisico.
   - Si consideri una città isolata con 1000 abitanti. Utilizzando il modello appena determinato stabilire in quanto tempo viene contagiato l'80% della popolazione, sapendo che al tempo $t_0 = 0$ un solo individuo è infettivo e che il tasso di contagio è pari a 0.0001.