Laboratorio Sperimentale di Matematica Computazionale

a.a. 2016/2017

ESERCITAZIONE 3

Modelli di crescita della popolazione

1. Si consideri una colonia di batteri. Assumiamo che la sua crescita, determinata da divisioni di cellule, sia caratterizzata dalle seguenti tre proprietà:

   - all'inizio la colonia è composta da 1000 batteri;
   - dopo un'ora il numero di batteri è raddoppiato;
   - in intervalli temporali di uguale lunghezza il numero di batteri aumenta di uguale fattore.

   Determinare i valori dei parametri del modello che descrive questa situazione.
   Utilizzando il metodo di Eulero, determinare la soluzione numerica del modello ottenuto e disegnare il numero di batteri presenti nella colonia nelle prime sei ore.

2. La *emivita* del plutonio, cioè il tempo richiesto per ridurre della metà la quantità di plutonio presente, è di 50 anni. Trovare la legge di decadimento e dire a quanto si riduce un grammo di plutonio dopo 100 anni.
   Utilizzando il metodo di Runge-Kutta classico, determinare la soluzione numerica del modello ottenuto. Dedurre quanti anni all'incirca occorrono affinché la quantità di plutonio sia 1/10 di quella iniziale. Disegnare la quantità di plutonio presente nei primi 50 anni.

3. Si consideri l'equazione logistica e la si risolva numericamente mediante la routine `ode45` sull'intervallo $[0, 0.5]$. Si supponga che la popolazione in esame abbia una densità iniziale pari a 2 e che la capacità portante dell'ambiente sia 0.01, con potenziale biologico della popolazione pari a 0.2. Stabilire graficamente a quale istante la densità di popolazione è un decimo di quella iniziale.

4. Risolvere l'equazione logistica

   $$y'(t) = \alpha \left(1 - \frac{y(t)}{K}\right) y(t), \qquad y(0) = y_0 \tag{1}$$

   con il parametro malthusiano dipendente dal tempo nel seguente modo (periodicità stagionale)

   $$\alpha(t) = \frac{1}{2} + \cos 2\pi t$$

   e la capacità portante $K = 100$. Studiare la soluzione in funzione del tempo t. Disegnare sull'intervallo $[0, 20]$ il grafico dell'equazione $y(t)$ per i valori di $y_0 = 1, 10, 50, 200$.