Laboratorio Sperimentale di Matematica Computazionale

a.a. 2016/2017

ESERCITAZIONE 6

Modelli dinamici

1. Il moto di un punto $\mathbf{z}(x) = (z_1(x), z_2(x), z_3(x))^T$ di massa m soggetto alla forza di gravità $\mathbf{F} = (0, 0, -gm)^T$ e vincolato a muoversi sulla superficie sferica di equazione $\Phi(\mathbf{z}) = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - 1 = 0$ è descritto dal seguente sistema di equazioni differenziali ordinarie
$$\mathbf{z}'' = \frac{1}{m}\left(\mathbf{F} - \frac{m\mathbf{z}'^T H \mathbf{z}' + \nabla\Phi^T \mathbf{F}}{|\nabla\Phi|^2}\nabla\Phi\right), \qquad x > 0; \tag{1}$$
abbiamo indicato con $\nabla\Phi$ il gradiente di Φ e con H la matrice Hessiana di Φ le cui componenti sono $H_{ij} = \partial^2\Phi/\partial z_i \partial z_j$, per $i, j = 1, 2, 3$. Al sistema (1) dobbiamo aggiungere le condizioni iniziali $\mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0$ e $\mathbf{z}'(0) = \mathbf{v}_0$.
Al fine di risolvere numericamente (1), trasformarlo in un sistema di equazioni differenziali di ordine 1 nella nuova incognita $\mathbf{y}$ le cui componenti sono $y_i = z_i$, $y_{3+i} = z_i'$, $i = 1, 2, 3$. Considerare come vettore delle condizioni iniziali `y0=[0,1,0,0.8,0,1.2]`, come intervallo di integrazione $[0, 10]$ e $m = 1$. Applicare il metodo di Eulero esplicito (con $h = 0.0025$ e h $= 0.00025$), il metodo di Runge-Kutta classico (con $h = 0.005$ e $h = 0.0005$) e le *function* `ode23` e `ode45` (quest'ultima per vari valori della tolleranza relativa `RelTol`). Tracciare la traiettoria del punto $\mathbf{z}(x)$ utilizzando il comando `plot3.` Commentare i risultati ottenuti. La bontà della soluzione numerica può essere valutata osservando che la quantità $r \equiv |y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - 1|$ dovrebbe essere nulla e misurando quindi il massimo valore del residuo r al variare di n.

2. Calcolare la soluzione numerica del *modello di Lorenz* nel caso in cui $\sigma = 10$, $r = 28$, $b = 8/3$ a partire dalle seguenti condizioni iniziali:

   a) $y_1(0) = 10$, $y_2(0) = 0$, $y_3(0) = 20$,
   b) $y_1(0) = 11$, $y_2(0) = 0$, $y_3(0) = 20$,

   per un tempo $x_{\max}$ assegnato. Realizzare i grafici di (x, y_1), (x, y_2), (x, y_3) ed il grafico di (y_1, y_2, y_3) utilizzando l'istruzione `plot3.` Osservare che pur essendo i dati iniziali molto vicini il comportamento della soluzione per tempi grandi risulta completamente differente.

3. L'*equazione di Van der Pol* governa l'intensità di corrente $y(x)$ in un circuito oscillante a triodo e viene utilizzata nello studio di circuiti che contengono valvole termoioniche, i cosiddetti tubi a vuoto, come il magnetron nei forni a microonde. L'equazione ha la seguente forma:
$$y'' = \mu(1 - y^2)\, y' - y$$
dove $\mu > 0$ indica l'intensità dello smorzamento non lineare. Per valori di μ piccoli y ha un comportamento transitorio oscillante che evolve in un comportamento a regime di forma simile ad una sinusoide. Invece, per valori di μ grandi il comportamento di y presenta rapide transizioni intercalate da periodi più tranquilli.
Risolvere numericamente questa equazione sull'intervallo $[0, 100]$ applicando la *function* `ode45` oppure `ode15s` associata alle condizioni iniziali $y(0) = 1$ e $y'(0) = 1$ per i seguenti casi: $\mu = 0.1$, 1, 10, 100.
Per i vari casi disegnare la traiettoria di y in funzione di x e il piano delle fasi. Confrontare il costo dei vari metodi in termini di numero di punti della griglia. Confrontare i risultati con quelli ottenuti applicando il metodo di Eulero. È sempre possibile applicare con successo il metodo di Eulero?