Signale im Zeit- und Frequenzbereich

Vorlesung 5, Signale, Systeme und Sensoren

Prof. Dr. M. O. Franz

HTWG Konstanz, Fakultät für Informatik

Übersicht

Übersicht

1. Periodische Signale
2. Signale im Frequenzbereich
3. Wichtige periodische Signale

Signale

- Signale sind Träger von Information in Form einer zeitlich oder räumlich veränderlichen physikalischen Größe.
- Informationen liegen in Form von Mustern vor, die der Empfänger (er-)kennen muss.
- Nahezu alle Signale der realen physikalischen Welt liegen in analog-kontinuierlicher Form vor.
- Sensoren formen nicht-elektrische Signale in elektrische Signale um.

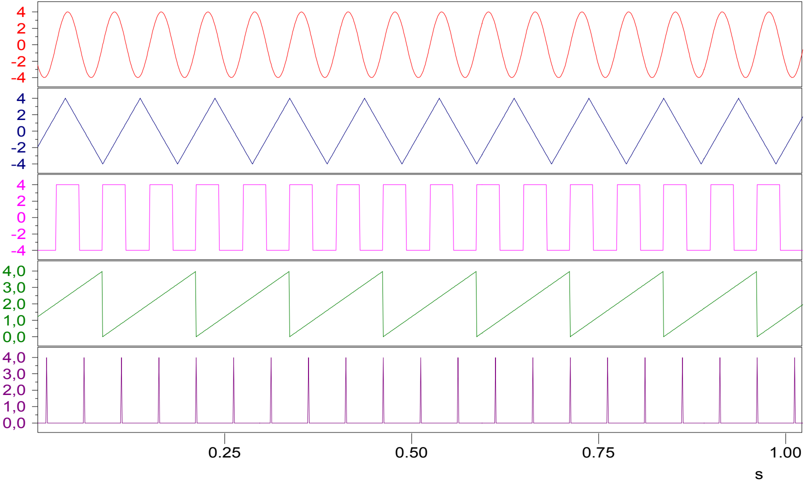
Im Prinzip gibt es unendlich viele mögliche Signale. Für eine systematische Behandlung müssen wir eine **einheitliche Beschreibungsweise** für Signale finden.

Periodische Schwingungen

Definition: Signale, die sich immer wieder nach einer bestimmten Periodendauer T auf die gleiche Art wiederholen. Der Kehrwert der Periodendauer ist die **Frequenz** $f = 1/T$ des Signals.

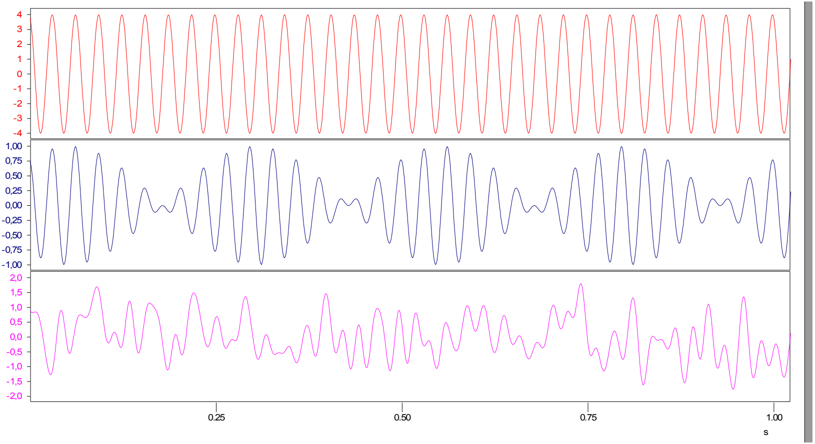
- Theoretisch dauern sie deshalb unendlich lange in Vergangenheit, Gegenwart und Zukunft. Praktisch ist das natürlich nie der Fall, aber es vereinfacht die Betrachtungsweise.
- Aufgrund der Periodizität liefern periodische Signale keine neuen Informationen, sobald der Momentanzustand (d.h. eine Periode) bekannt ist. Sie sind daher einfach beschreibbar.
- Allgemein gilt: Je größer also die Ungewissheit über den Verlauf des Signals im nächsten Augenblick ist, desto größer kann die in ihm enthaltene Information sein. Je mehr wir darüber wissen, welche Nachricht die Quelle übermitteln wird, desto geringer sind Unsicherheit und Informationswert.

Beispiele für periodische Schwingungen



Quelle: Karrenberg, 2012

Signal und Information



Quelle: Karrenberg, 2012

Übersicht

Experiment: Ohr als Fourieranalysator

- Beobachtung: Wüssten wir nicht, dass eine periodische Sägezahn-Schwingung hörbar gemacht wurde, würde unser Ohr uns glauben machen, gleichzeitig einen Sinus mit doppelter, dreifacher usw. Frequenz zu hören!
- Es gibt nur eine einzige Schwingung, die lediglich einen Ton enthält: Die (periodische) Sinus-Schwingung.
- Alle anderen (periodischen) Signale bzw. Schwingungen - z.B. auch Klänge oder Vokale - enthalten mehrere Töne.
- Die zusätzlich erklingenden Töne haben Frequenzen, die ganzzahlige Vielfache der Frequenz des tiefsten Tones sind. Sie heißen **Obertöne** oder **höhere Harmonische**.

Die Fouriersche Hypothese (1807 bzw. 1822)

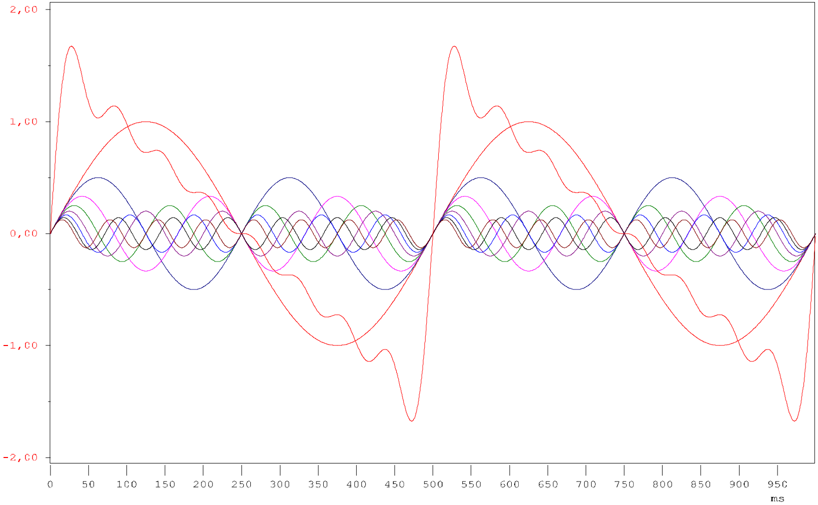
Quelle: Karrenberg, 2012

Alle Schwingungen und Signale können so aufgefasst werden, als seien sie aus Sinus-Schwingungen verschiedener Frequenz und Stärke (Amplitude) zusammengesetzt. Das gilt auch für unstetige und nichtperiodische Signale!

Bedeutung der Fourierschen Hypothese

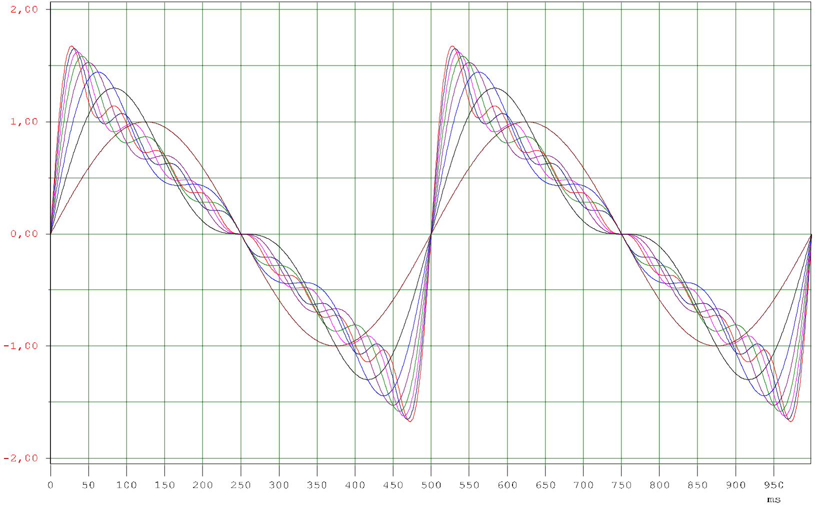
- 1829 konnte Dirichlet mathematisch streng beweisen, dass die Fouriersche Hypothese tatsächlich für alle technisch erzeugbaren Signale gilt.
- Damit vereinfacht sich die Signalverarbeitung: wir haben es nun nicht mehr mit einer unendlichen Vielfalt verschiedener Signale zu tun, sondern im Wesentlichen mit deren gemeinsamen Bausteinen: den Sinus-Schwingungen verschiedener Frequenzen.
- Als unmittelbare Folge für die Signalverarbeitung ergibt sich: Ist bekannt, wie ein beliebiges System auf Sinus-Schwingungen verschiedener Frequenz reagiert, so ist damit auch klar, wie es auf alle anderen Signale reagiert - weil ja alle anderen Signale aus lauter Sinus-Schwingungen zusammengesetzt sind.

Beispiel: Sinus-Schwingungen in der Sägezahnschwingung



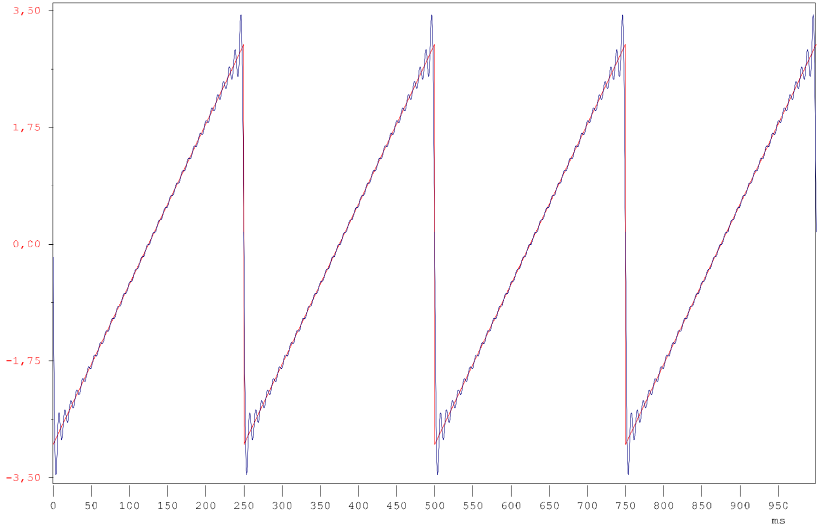
Quelle: Karrenberg, 2012

Beispiel: Teilsummen der ersten 8 Sinus-Schwingungen



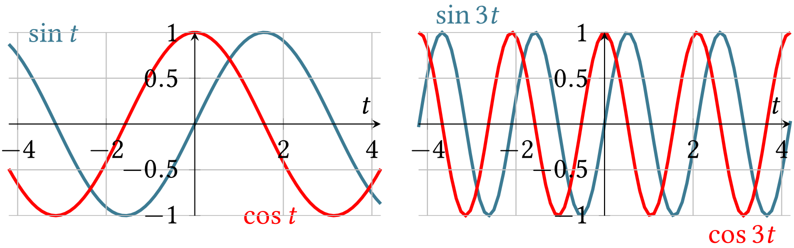
Quelle: Karrenberg, 2012

Beispiel: Summe der ersten 32 Sinus-Schwingungen



Quelle: Karrenberg, 2012

Eigenschaften einer Sinus-Schwingung

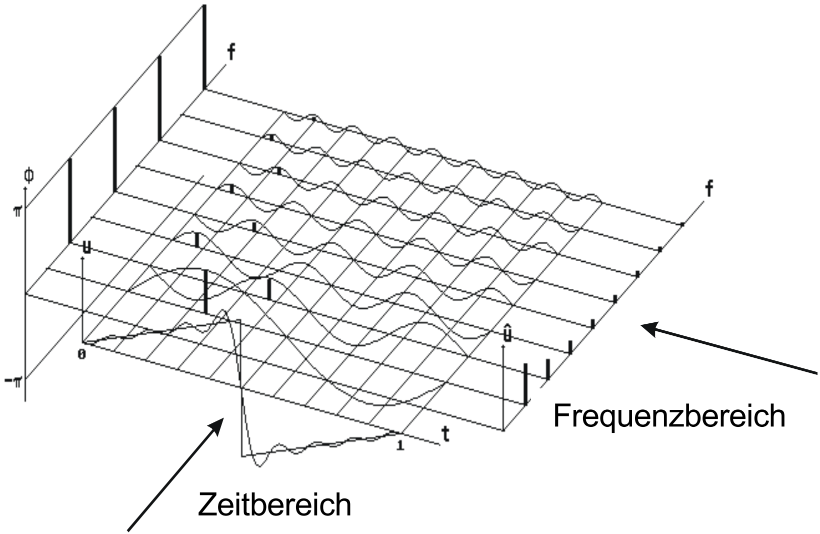


- **Frequenz** f: Anzahl der Schwingungen pro Zeiteinheit, gemessen in Hertz (1 Hz = 1/s). Entspricht der *Tonhöhe*.
- **Amplitude**: Betrag des Maximalwertes der Schwingung (hier: 1), entspricht der *Lautstärke* bzw. der Energie der Schwingung.
- **Phase**: Verschiebung φ der Schwingung entlang der t-Achse
- **Kreisfrequenz** ω: Anzahl der Schwingungen im Zeitraum 2π, d.h. $\omega = 2\pi f$.

Signale im Zeit- und im Frequenzbereich

- Die bisherigen Darstellungen zeigen das Signal im **Zeitbereich**, d.h. der Momentanwert wird in Abhängigkeit von der Zeit aufgetragen.
- Die Fouriersche Hypothese führt auf eine alternative Darstellung: das Signal wird vollständig durch die Eigenschaften der Sinus-Schwingungen beschrieben, aus denen es zusammengesetzt ist, d.h. durch die jeweilige Frequenz, Amplitude und Phase.
- Darstellung im **Frequenzbereich:** Amplitude und Phase aller beteiligten Sinus-Schwingungen werden in Abhängigkeit von der Frequenz aufgetragen.
- Beide Darstellungen sind gleichwertig, d.h. alle Informationen der einen sind jeweils in der anderen enthalten. Bei vielen praktischen Problemen ist es günstiger, die Signale im Frequenzbereich zu betrachten.

Beispiel: Sägezahnschwingung



Quelle: Karrenberg, 2012

Fouriertransformation

- **Spektrum:** Darstellung eines Signals im Frequenzbereich
- **Fouriertransformation:** Berechnung des Spektrums aus der Darstellung eines Signals im Zeitbereich
- **Inverse Fouriertransformation:** Berechnung der Darstellung eines Signals im Zeitbereich aus seinem Spektrum.
- Die Fouriertransformation kann für viele Signale rechnerisch (analytisch) bestimmt werden. In der Praxis wird sie meist näherungsweise mit numerischen Methoden berechnet.
- Die Fouriertransformation ist das wichtigste signaltechnische Verfahren und eine zentrale Methode der technischen Wissenschaften.

Spektrum eines periodischen Signals

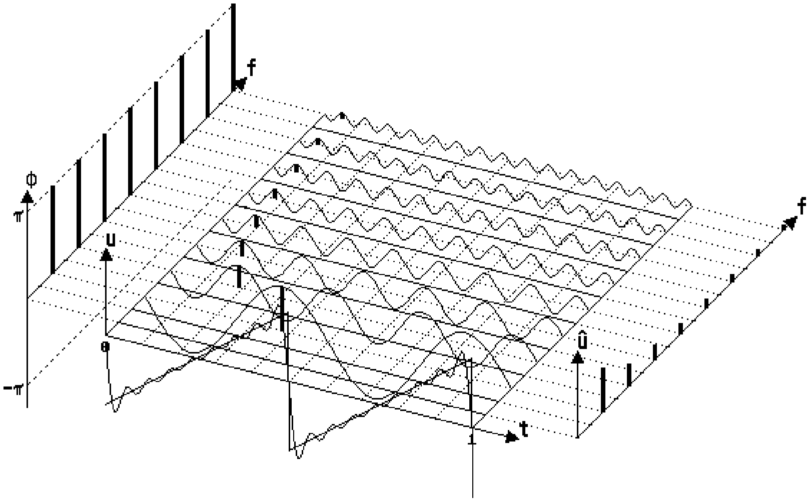
Die Sinus-Komponenten eines periodischen Signals können nur Frequenzen haben, die ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz sind.

Grund: Nur diese Sinus-Schwingungen (d.h. die höheren Harmonischen) passen in das Zeitraster mit Periodendauer T. Bei periodischen Schwingungen müssen sich alle in ihnen enthaltenen Sinus-Schwingungen jeweils nach der Periodendauer T in gleicher Weise wiederholen.

Beispiel: ein Sägezahn von 100 Hz enthält lediglich die Sinuskomponenten 100 Hz, 200 Hz, 300 Hz usw.

Das Spektrum periodischer Signale besteht demnach stets aus Linien in regelmäßigen Abständen: **Periodische Signale besitzen ein Linienspektrum.** Wegen $f = 1/T$ entspricht der Abstand der Linien dem Kehrwert der Periodendauer.

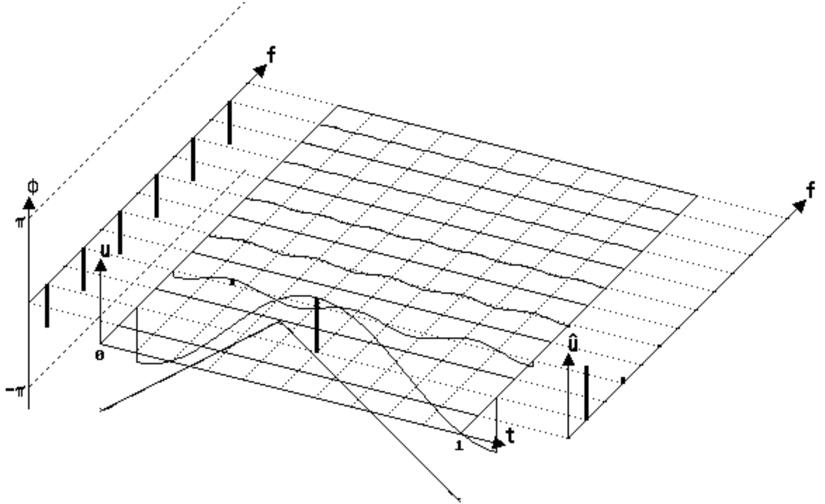
Beispiel: Frequenzverdoppelung bei der Sägezahnschwingung



Quelle: Karrenberg, 2012

Übersicht

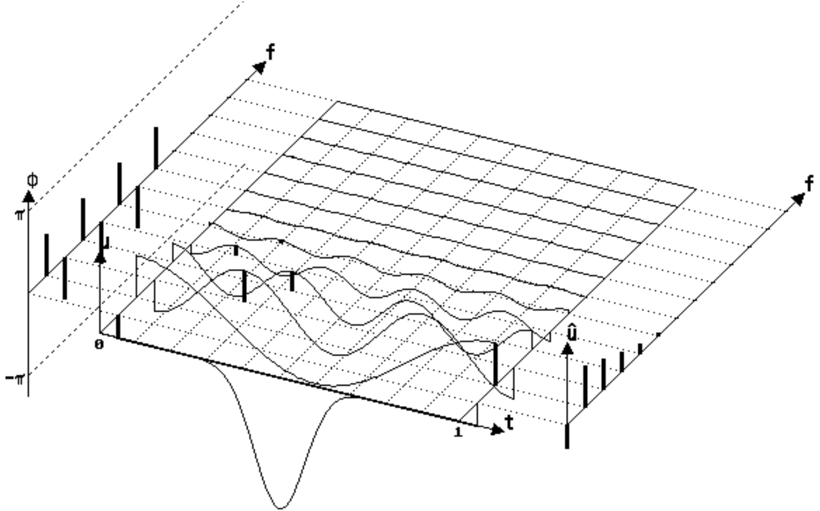
Periodische Dreiecksschwingung



Quelle: Karrenberg, 2012

Aus der symmetrischen Dreiecksform ergibt sich, dass keine geradzahligen Harmonischen vorkommen.

Gauß-Impulsfolge



Quelle: Karrenberg, 2012

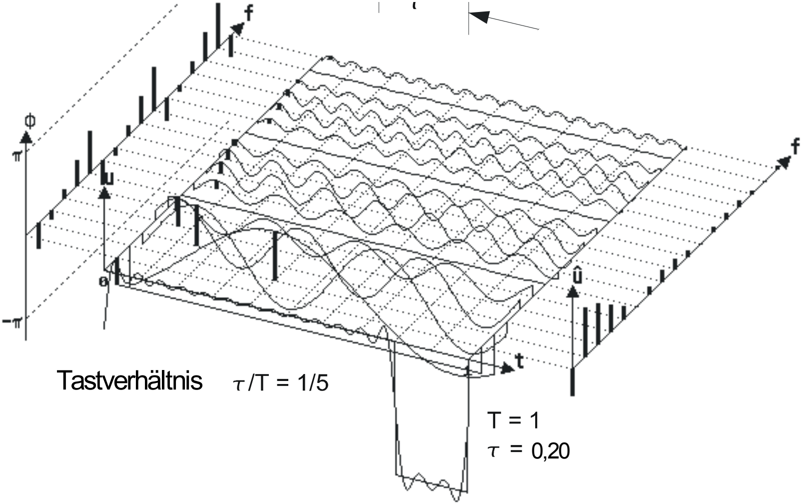
Das Signal ändert sich nur langsam. Daher kommen nur langsam veränderliche Sinuskomponenten vor.

Schnell und langsam veränderliche Signale

Der Vergleich von Dreiecksschwingung und Gaußimpulsfolge mit der Sägezahnschwingung zeigt:

- Signale, die keine schnellen Übergänge aufweisen, enthalten auch keine hohen Frequenzen.
- Signale können sich nicht schneller ändern als ihre Sinuskomponente mit der höchsten Frequenz.
- Signale mit Sprüngen (Übergänge in unendlich kurzer Zeit) enthalten daher auch Sinus-Schwingungen unendlich hoher Frequenz.
- Die Differenz zwischen dem idealen Sägezahn und der Summenkurve dort am größten, wo die schnellsten Übergänge bzw. Sprünge sind.

Periodische Rechteckimpulse



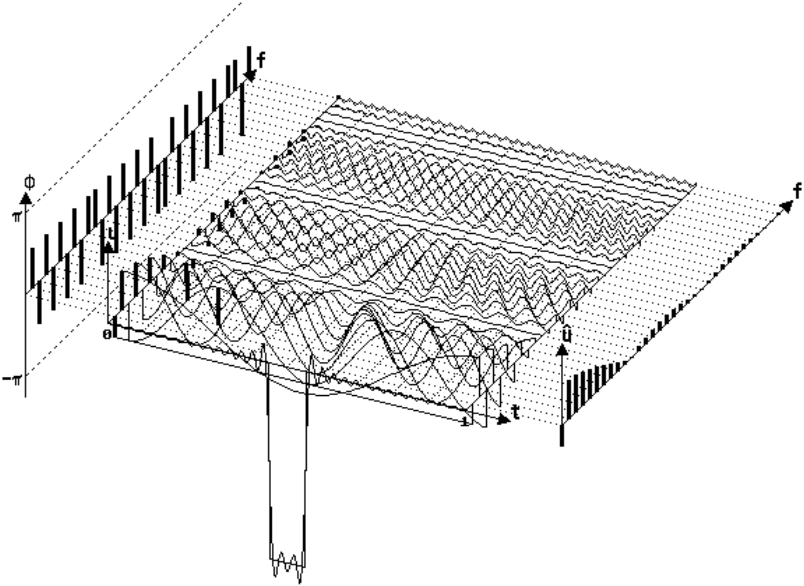
Quelle: Karrenberg, 2012

Interferenz: Nichts zu sehen, obwohl alles da ist.

Das Spektrum der Rechteckschwingung zeigt:

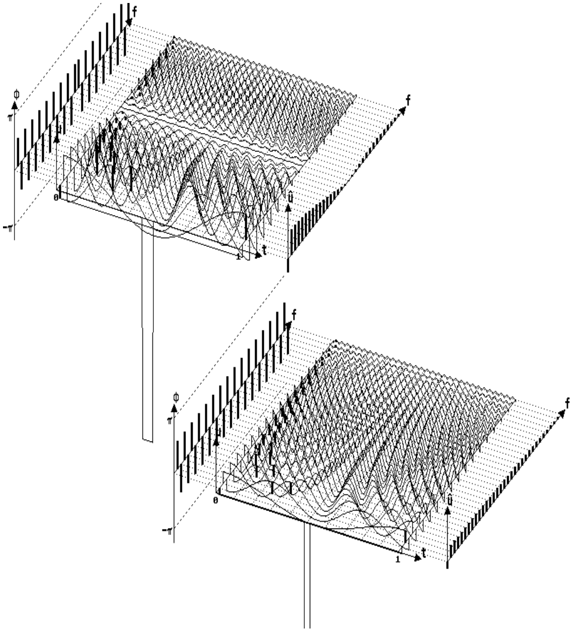
- Die Aussage “wo etwas Null ist, da kann nichts sein, also auch keine Sinus-Schwingungen” ist falsch.
- Es gilt: Schwingungen und Wellen können sich durch Überlagerung zeitweise und lokal gegenseitig auslöschen (**Interferenz**).
- Auch wenn Signale über einen Zeitbereich gleich Null sind, enthalten sie auch während dieser Zeit Sinus-Schwingungen. Genau genommen müssen auch unendlich hohe Frequenzen enthalten sein, weil sich sonst immer „runde“ Signalverläufe ergeben würden.
- Es gilt also: enthält ein Signal einen konstanten Bereich, so muss das Spektrum auch unendlich hohe Frequenzen enthalten.

Vom Rechteck- zum Nadelimpuls (1)



Quelle: Karrenberg, 2012

Vom Rechteck- zum Nadelimpuls (2)



Quelle: Karrenberg, 2012

δ-Impulsfolgen

- Geht das Tastverhältnis des Rechteckimpulses gegen 0, so erhält man einen δ-**Impuls** oder **Dirac-Impuls**, eine der wichtigsten Schwingungsformen der Signaltheorie.
- Die Amplituden der einzelnen Sinus-Schwingungen werden dabei sehr klein und sind in den Abbildungen kaum zu erkennen, es sei denn, man vergrößert gleichzeitig die Impulshöhe um denselben Faktor. Damit lassen sich immer schmalere Rechteckimpulse erzeugen, ohne dass die Energie der Schwingung (d.h. die Fläche unter dem Impuls) abnimmt.
- Der resultierende Impuls ist gleichzeitig unendlich steil und unendlich hoch, hat aber immer noch dieselbe Fläche wie das ursprüngliche Rechteck. Beim δ-Impuls ist diese Fläche auf 1 normiert.
- Der periodische δ-Impuls enthält im Abstand $\Delta f = 1/T$ alle ganzzahligen Vielfache der Grundfrequenz von Null bis Unendlich mit stets gleicher Amplitude.