Fourierreihen

Vorlesung 6, Signale, Systeme und Sensoren

Prof. Dr. M. O. Franz

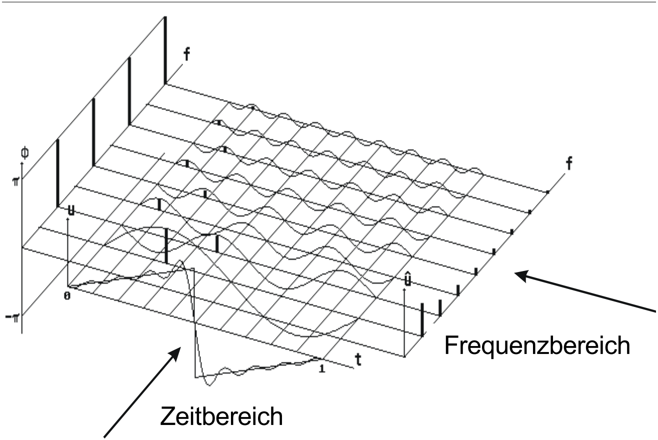
HTWG Konstanz, Fakultät für Informatik

Übersicht

Übersicht

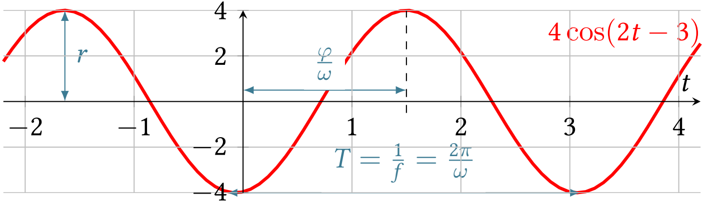
Wiederholung: Signale im Frequenzbereich

Fouriersche Hypothese: Alle Schwingungen und Signale können so aufgefasst werden, als seien sie aus Sinus-Schwingungen verschiedener Frequenz, Stärke und Phase zusammengesetzt.



Quelle: Karrenberg, 2012

Cosinusfunktion als elementares Grundsignal



Mathematisch werden Signale als Funktionen in Abhängigkeit von der Zeit t beschrieben, so auch die Sinus-Schwingung durch eine

$$\text{Cosinusfunktion:} \quad f(t) = r \cdot \cos(2\pi f t - \varphi) = r \cdot \cos(\omega t - \varphi)$$

mit Amplitude r, Frequenz f oder Kreisfrequenz ω (häufiger, da Faktor 2π weggelassen werden kann) und Phase φ.

Harmonische Fourierreihen

Mathematisch besagt die Fouriersche Hypothese also, dass jedes technisch erzeugbare Signal $f(t)$ (mit Gleichanteil A_0) geschrieben werden kann als

$$f(t) = A_0 + r_1 \cdot \cos(\omega_1 t - \varphi_1) + r_2 \cdot \cos(\omega_2 t - \varphi_2) + \cdots$$

Periodische Signale mit der Grundfrequenz ω_0 enthalten nur (potentiell unendlich viele) Sinus-Schwingungen, deren Frequenzen ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz sind, den **Harmonischen**. Dies führt auf die sog. **harmonische Form der Fourierreihe**:

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} r_k \cos(k \cdot \omega_0 t - \varphi_k).$$

Ziel der Fourieranalyse: Berechnung der Amplituden A_0, r_k und Phasen φ_k für jede Harmonische mit Frequenz $k \cdot \omega_0$ aus einem gegebenen periodischen Signal $f(t)$ [Demo].

Quiz 1: Welche Periode und Grundfrequenz ω_0 haben folgende Signale?

a. $f(t) = \sin t$

b. $f(t) = \tan t$

c. $f(t) = \cos(t + \frac{\pi}{2})$

d. $f(t) = \cos(2t + \pi)$

e. $f(t) = \begin{cases} 0, & \text{für } -1 < t \leq 0 \\ 1, & \text{für } 0 < t \leq 1 \\ & f(t+2) = f(t) \end{cases}$

f. $f(t) = \sin 4t$

g. $f(t) = \cos 3\pi t$

h. $f(t) = \cos \frac{7}{\pi} t$

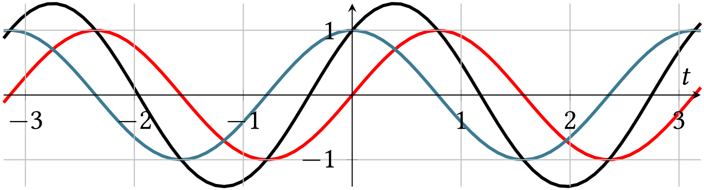
i. $f(t) = \cos(2(t + \pi))$

Elimination der Phase

Problem: in der harmonischen Form der Fourierreihe ist die Phase φ_k innerhalb der Cosinusfunktion, die Amplitude r_k außerhalb. Eine direkte Berechnung würde zu einem komplizierten nichtlinearen Gleichungssystem führen, für das keine analytische Lösung möglich ist.

Ansatz: Man versucht, die Phase durch eine geeignete Kombination von Sinus- und Cosinusfunktionen gleicher Frequenz zu eliminieren.

Beispiel: $\sin 2t + \cos 2t$

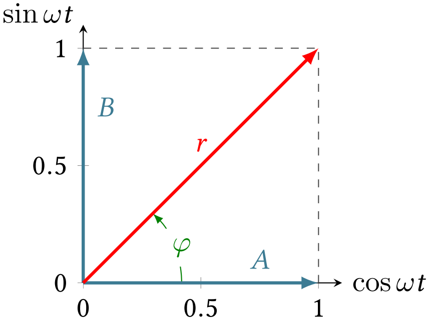


Sinus und Cosinus als zweidimensionale Vektoren

Allgemein gilt: eine gewichtete Summe (**Linearkombination**) von Sinus- und Cosinusfunktionen *gleicher Frequenz* ergibt wieder eine Cosinusschwingung gleicher Frequenz:

$$A \cos \omega t + B \sin \omega t = r \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

mit Phase $\varphi = \text{atan2} \frac{B}{A}$ und Amplitude $r = \sqrt{A^2 + B^2}$.



Harmonische und trigonometrische Form der Fourierreihe

Der Ausdruck $A\cos\omega t + B\sin\omega t$ kann also ohne Probleme in die in der harmonischen Form der Fourierreihe $r \cdot \cos(\omega t - \varphi)$ umgerechnet werden und umgekehrt.

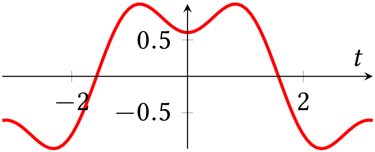
Die Fouriersche Hypothese schreibt sich damit in der **trigonometrischen Form der Fourierreihe**

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos k\omega_0 t + B_k \sin k\omega_0 t.$$

A_0 heißt **Gleichglied** der Fourierreihe, die Gewichtsfaktoren A_k und B_k sind die **Fourierkoeffizienten**.

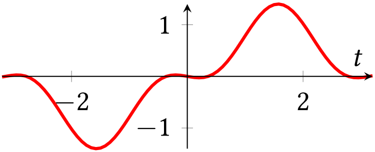
Vorteil: die unbekannten Fourierkoeffizienten können analytisch berechnet werden.

Gerade und ungerade Signale



Gerade Signale sind achsensymmetrisch zur y-Achse:

$$f(-t) = f(t)$$



Ungerade Signale sind punktsymmetrisch zum Ursprung:

$$f(-t) = -f(t)$$

- Jedes Signal kann in ein gerades und in ein ungerades Signal zerlegt werden.
- Gerader Anteil: $\mathrm{ge}\, f(t) = \frac{1}{2}(f(t) + f(-t))$
- Ungerader Anteil: $\mathrm{un}\, f(t) = \frac{1}{2}(f(t) - f(-t))$

Fourierreihen von geraden und ungeraden Signalen

- Ein Summe von geraden Signalen ergibt wiederum ein gerades Signal. Genauso ergibt eine Summe von ungeraden Signalen erneut ein ungerades Signal.
- Die Fourierreihe eines geraden Signals besteht daher nur aus Cosinus-Termen, da diese gerade Signale sind:

$$\text{ge}\, f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos k\omega_0 t.$$

- Die Fourierreihe eines ungeraden Signals besteht folglich nur aus Sinus-Termen, da diese ungerade Signale sind:

$$\text{un}\, f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin k\omega_0 t.$$

- Allgemein beschreiben die Cosinus-Terme den geraden Anteil eines Signals, die Sinus-Terme den ungeraden Anteil.

Quiz 2: welche Signale sind gerade, ungerade, beides oder keines?

a. $f(t) = \sin 4t$

b. $f(t) = \sin(t^2)$

c. $f(t) = t^5 \cdot \sin t$

d. $f(t) = 3$

e. $f(t) = \sin 4t \cdot \cos 5t$

f. $f(t) = 0$

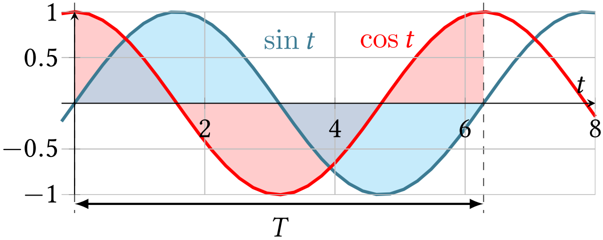
g. $f(t) = \sin 3t \cdot \sin 6t$

h. $f(t) = \cos 7t$

i. $f(t) = x^5 + 3x^2$

Übersicht

Hilfsmittel 1: Integrale über Sinus und Cosinus



Integration über eine Periode T:

$$\int_0^T \sin k\,\omega_0 t\,dt = 0 \quad \text{und} \quad \int_0^T \cos k\,\omega_0 t\,dt = 0 \quad \text{für} \quad k > 0.$$

Sonderfall $k = 0$:

$$\int_0^T \cos(0 \cdot \omega_0 t)\,dt = \int_0^T 1\,dt = T.$$

Das Integrationsintervall kann beliebig gewählt werden, solange es genau eine Periode umfasst.

Hilfsmittel 2: Additionstheoreme

$$\begin{aligned}
\cos\alpha\,\cos\beta &= \tfrac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right)\\
\sin\alpha\,\sin\beta &= \tfrac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right)\\
\sin\alpha\,\cos\beta &= \tfrac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right)
\end{aligned}$$

Daraus folgt für Integrale über Produkte der Harmonischen:

$$\int_0^T \cos k\,\omega_0 t \cdot \cos \ell\,\omega_0 t\,dt = \begin{cases} T, & \text{für } k=\ell=0 \\ T/2, & \text{für } k=\ell\neq 0 \\ 0, & k\neq\ell \end{cases}$$

$$\int_0^T \sin k\,\omega_0 t \cdot \sin \ell\,\omega_0 t\,dt = \begin{cases} 0, & k\neq\ell,\, k=\ell=0 \\ T/2, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\int_0^T \cos k\,\omega_0 t \cdot \sin \ell\,\omega_0 t\,dt = 0.$$

Berechnung der Fourierkoeffizienten

Die Funktionen $1, \cos k\,\omega_0\,t, \sin k\,\omega_0\,t$ bilden also ein **Orthogonalsystem**. Die Multiplikation der Fourierreihe auf beiden Seiten mit $\cos k\,\omega_0\,t$ bzw. $\sin k\,\omega_0\,t$ und Integration ergibt daher für $k \neq 0$:

$$\int_0^T f(t)\cdot\cos k\,\omega_0\,t\,dt = A_0\int_0^T \cos k\,\omega_0\,t + \sum_{\ell=1}^{\infty} A_\ell \int_0^T \cos k\,\omega_0\,t\cdot\cos \ell\,\omega_0\,t\,dt$$

$$+\sum_{\ell=1}^{\infty} B_\ell \int_0^T \cos k\,\omega_0\,t\cdot\sin \ell\,\omega_0\,t\,dt = 0 + A_k\frac{T}{2} + 0$$

$$\int_0^T f(t)\cdot\sin k\,\omega_0\,t\,dt = A_0\int_0^T \sin k\,\omega_0\,t + \sum_{\ell=1}^{\infty} A_\ell \int_0^T \sin k\,\omega_0\,t\cdot\cos \ell\,\omega_0\,t\,dt$$

$$+\sum_{\ell=1}^{\infty} B_\ell \int_0^T \sin k\,\omega_0\,t\cdot\sin \ell\,\omega_0\,t\,dt = 0 + 0 + B_k\frac{T}{2}$$

Analysegleichungen (Clairault, 1754; Lagrange 1759)

Auflösen nach A_k bzw. B_k ergibt die **Analysegleichungen** der Fourierreihe:

$$A_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t) \cdot \cos k\,\omega_0 t\, dt,$$

$$B_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t) \cdot \sin k\,\omega_0 t\, dt$$

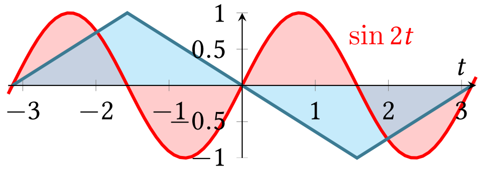
mit dem Sonderfall

$$A_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, dt \quad \text{(d.h. Gleichanteil = Durchschnitt von } f(t)\text{).}$$

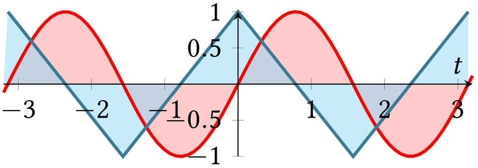
Die Amplitude r_k und die Phase φ_k der harmonischen Fourierreihe ergeben sich daraus wie gehabt als

$$r_k = \sqrt{A_k^2 + B_k^2} \quad \text{und} \quad \varphi_k = \text{atan2}\frac{B_k}{A_k}.$$

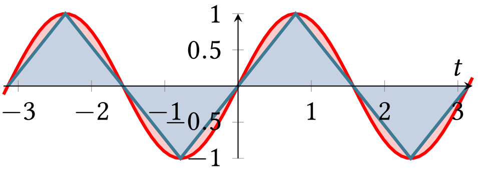
Fourierkoeffizienten als Ähnlichkeitsmaß



Unterschiedliche Periode:
$B_2 \approx 0$

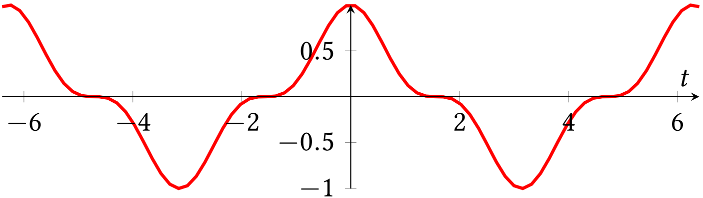


Unterschiedliche Phase:
$B_2 \approx 0$



Ähnliche Phase und Periode:
$|B_2| > 0$

$f(t) = \cos^3 t$: ein einfaches Beispiel…

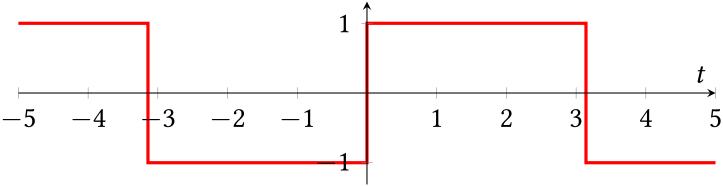


- Trigonometrische Identität aus der Formelsammlung:

$$\cos^3 t = \tfrac{1}{4}(3\cos t + \cos 3t)$$

- Periode: $T = 2\pi \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = 1$.
- Gerade Funktion $\quad \Rightarrow \quad B_k = 0$.
- Mittelwert ist 0 $\quad \Rightarrow \quad A_0 = 0$.
- Alle Integrale mit $\cos kt$ sind 0 für $k \neq 1, 3$, dort ergibt sich mit $T = 2\pi : \frac{3}{4} \cdot \pi$ bzw. $\frac{1}{4} \cdot \pi \quad \Rightarrow \quad A_1 = \frac{3}{4}, A_3 = \frac{1}{4}, A_k = 0$ sonst.

Beispiel: Rechteckwelle (Umpolfunktion)



$$f(t) = \begin{cases} -1, & \text{für } -\pi < t \le 0 \\ 1, & \text{für } 0 < t \le \pi \end{cases}$$

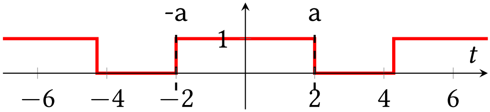
- Periode: $T = 2\pi \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = 1.$
- Ungerade Funktion $\quad \Rightarrow \quad A_k = 0.$
- Mittelwert ist 0 $\quad \Rightarrow \quad A_0 = 0.$
- Rest s. Tafel

(Haus-)Aufgaben

Bestimmen Sie die die Fourierreihen für folgende Signale:

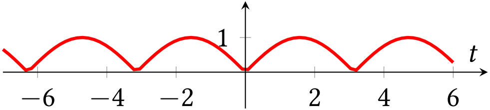
1. $f(t) = \sin^2 t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2t.$
2. Rechteckimpulsfolge: periodisch mit $f(t+2\pi) = f(t)$ und

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{für } -a < t \leq a \\ 0, & \text{für } -\pi < t \leq a \quad \text{und} \quad a < t \leq \pi \end{cases}$$



Tip: von $-a$ bis a integrieren!

3. Zweiweggleichgerichtetes Sinussignal: $f(t) = |\sin t|$



Tip: Additionstheoreme verwenden!