HOCHSCHULE KONSTANZ TECHNIK, WIRTSCHAFT UND GESTALTUNG
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Signale, Systeme und Sensoren

Zusammenfassung

Mert Zeybek

Konstanz, 7. Februar 2017

Inhaltsverzeichnis

1 02_Messung

1.1 *Sensor Definition (Folie 5)*

Ein Sensor ist ein technisches Bauteil, das physikalische Eigenschaffen oder die stoffliche Beschaffenheit seiner Umgebung erfassen kann.

Erfasst wird eine physikalische oder chemische Größe (der Stimulus) über entsprechende physikalische oder chemische Effekte und in der Regel in elektromagnetische Signale (z.B. Strom, Spannung, Ladung . . .) umgeformt.

1.2 *Wieso werden die erfassten Signale in elektromagnetische Signale umgeformt? (Folie 6)*

- breiten sich (nahezu) mit Lichtgeschwindigkeit aus.
- können mit Hilfe von Leitungen genau dorthin geführt werden, wo sie gebraucht werden.
- können mit Hilfe von Antennen auch drahtlos, d.h. durch Luft und Vakuum rund um die Erde oder sogar ins Weltall gesendet werden.
- lassen sich konkurrenzlos präzise und störsicher aufnehmen, verarbeiten und übertragen.
- verbrauchen kaum Energie im Vergleich zu anderen physikalischen Systemen.
- werden durch winzigste Chips verarbeitet, die sich durchweg äußerst preiswert produzieren lassen (vollautomatische Produktion in großen Serien).

1.3 *Nenne die drei Ausgangssignalformen bei Sensoren (Folie 7)*

- **Amplitudenanalog:**
  der Stimulus wird in ein amplitudenproportionales elektrisches Signal umgewandelt. Bei Weiterverarbeitung durch einen Rechner ist eine AD-Wandlung notwendig. Relative geringe Störsicherheit aufgrund elektrischer Einkopplungen.
- **Frequenzanalog:**
  der Stimulus ist als Frequenz (auch als Pulsoder Periodendauer) abgebildet. Die Anzahl der Schwingungen lässt sich digital auszählen (pseudodigitale Messwerterfassung). Frequenzen können relativ störungsarm übertragen werden.
- **Digital:**
  der Stimulus wird als Datenwort bestimmter Länge umgesetzt, übertragen und verarbeitet. Datensicherheit kann durch spezielle fehlertolerante Codes und Pulscodemodulation erreicht werden.

1.4 *Nenne 4 Typen von Sensoren (Folie 8)*

- **Extrinsisch:**
  Ermitteln von Informationen über die Systemumgebung (z.B. Radar, Kamera)
- **Intrinsisch:** Ermitteln von Informationen über den internen Systemzustand (z.B. Tachometer, Gyroskop, Umdrehungsmesser)

- **Aktiv:**
  Variieren angelegtes elektrisches Signal bei Veränderung des Stimulus (z.B. Widerstandsthermometer, Kraftaufnehmer). Erlauben das Messen von statischen Größen, brauchen eine Energiezufuhr.

- **Passiv:**
  Erzeugen direkt ein elektrisches Signal bei Veränderung des Stimulus (z.B. dynamisches Mikrofon, Piezoelemente). Detektieren nur die Änderung der Messgröße, brauchen keine eigene Energiezufuhr.

1.5 *Was ist eine Messung und was eine Messgröße? (Folie 10)*

Messung:
experimenteller Vorgang zum quantitativen Vergleich zwischen einer Messgröße und einer Bezugsgröße mit Hilfe einer Messeinrichtung Kriterium: **Reproduzierbarkeit**.

Messgrößen:
messbare Merkmale von Objekten, die stets als Produkt einer Maßzahl mit einer Maßeinheit auftreten.

1.6 *Was versteht man unter Messgerät und Messeinrichtung? (Folie 11)*

Messgerät:
Ein Gerät, das allein oder in Verbindung mit anderen Einrichtungen für die Messung einer Messgröße vorgesehen ist. Der Sensor oder auch Messgrößenaufnehmer ist dabei der Teil eines Messgerätes oder einer Messeinrichtung, der auf eine Messgröße unmittelbar anspricht. Der Aufnehmer ist das erste Element einer Messkette.

Messeinrichtung:
Unter einer Messeinrichtung versteht man die Gesamtheit aller Messgeräte zur Erzielung eines Messergebnisses. Handelt es sich um eine Kombination von mehreren Sensoren und nicht von Messgeräten, so spricht man in der Regel von einem *Multisensorsystem.*

1.7 *Was versteht man unter Messkette und Messprinzip? (Folie 12)*

Messkette:
Unterteilt man nun die einzelnen Elemente eines Sensors oder eines Messgerätes, die den Weg des Messsignals von der Aufnahme der Messgröße bis zur Bereitstellung der Ausgabe bilden, so spricht man von der Messkette.

Messprinzip:
Physikalischer oder chemischer Vorgang, der zur Messung benutzt wird (z.B. Längen-, Widerstandsänderung, Flüssigkeitsausdehnung, thermoelektrischer Effekt zur Bestimmung der Temperatur).

1.8 ??? sind Kenngrößen? (Folie 14)

1.9 Nennen Sie die 7 Basiseinheiten (Folie 15)

Basisgröße	Formelzeichen	Einheit	Einheitenzeichen
Länge	l	Meter	m
Zeit	t	Sekunde	s
Masse	m	Kilogramm	kg
Stromstärke	I	Ampere	A
Temperatur	T	Kelvin	K
Stoffmenge	n	Mol	mol
Lichtstärke	I_V	Candela	cd

1.10 Mit welcher FOrmel werden alle anderen SI-Einheiten abgeleitet? (Folie 16)

$[Q] = 10^n * m^\alpha * kg^\beta * s^\gamma * A^\omega * K^\epsilon * mol^\zeta * cd^\eta$
Dimension einer abgeleiteten Größe gibt deren Zusammenhang mit den Basisgrößen an, z.B. v = s /t .

1.11 Was sind Kohärente- und nicht-kohärente Einheiten? (Folie 17)

- Ist der numerische Faktor = 1 (d.h. n = 0), spricht man von kohärenten Einheiten, die keine Umrechnungsfaktoren benötigen.
- Bei nicht-kohärenten SI-Einheiten werden folgende Einheitenvorsätze verwendet:

Potenz	Name	Zeichen	Potenz	Name	Zeichen
10^{24}	Yotta	Y	10^{-1}	Dezi	d
10^{21}	Zetta	Z	10^{-2}	Zenti	c
10^{18}	Exa	E	10^{-3}	Milli	m
10^{15}	Peta	P	10^{-6}	Mikro	µ
10^{12}	Tera	T	10^{-9}	Nano	n
10^{9}	Giga	G	10^{-12}	Piko	p
10^{6}	Mega	M	10^{-15}	Femto	f
10^{3}	Kilo	k	10^{-18}	Atto	a
10^{2}	Hekto	h	10^{-21}	Zepto	z
10^{1}	Deka	da	10^{-24}	Yokto	y

1.12 Erklärung: Kalibrierung, Justierung und Eichung (Folie 18)

- **Kalibrierung:** Ermitteln des Zusammenhanges zwischen Messwert und dem zugehörigen wahren Wert der Messgröße für eine betrachtete Messeinrichtung bei vorgegebenen Bedingungen. Beim Kalibrieren erfolgt kein technischer Eingriff am Messgerät.
- **Justierung:** Einstellen oder Abgleichen eines Messgerätes, um systematische Messabweichungen so weit zu beseitigen, wie es für die vorgesehene Anwendung erforderlich ist. Das Justieren erfordert also im Gegensatz zum Kalibrieren einen Eingriff, der das Messgerät meist bleibend verändert.

- **Eichung:** Die Eichung besteht aus der eichtechnischen Prüfung und der Stempelung eines eichfähigen Messgeräts durch die zuständige Behörde. Ein Messgerät ist eichfähig, wenn seine Bauart durch die Bundesanstalt oder die Art des Messgerätes allgemein zur Eichung zugelassen ist.

1.13 *Erklärung der 4 Normale (Folie 19)*

- **Normal:** Messgerät, Messeinrichtung oder Referenzmaterial mit dem Zweck, eine Einheit oder einen oder mehrere bekannte Werte einer Größe darzustellen, zu bewahren oder zu reproduzieren, um diese an andere Messgeräte durch Vergleich weiterzugeben (DIN 1319–1).

- **Primärnormal:** Normal, das die höchsten metrologischen Forderungen auf einem speziellen Anwendungsgebiet erfüllt.

- **Bezugsnormal:** Normal mit der höchsten örtlich verfügbaren Genauigkeit (i.A. Normal einer Eichbehörde).

- **Gebrauchsnormal:** Normal, das unmittelbar oder über einen oder mehrere Schritte mit einem Bezugsnormal kalibriert und routinemäßig benutzt wird, um Maßverkörperungen oder Messgeräte zu kalibrieren oder zu prüfen.

2 03_Messfehler

2.1 *Wie berechnet mn den absoluten Fehler? (Folie 4)*

$$\boxed{\Delta x = x - x_\omega}$$

x_ω = wahrer Wert
x = gemessener Wert
Der absolute Fehler hat die Dimension der Messgröße.

2.2 *Wie berechnet man den relativen Fehler? (Folie 4)*

$$\boxed{\frac{\Delta x}{x}}$$

Δx = absolute Fehler
x = gemessener Wert.
(Angabe meist in Prozent)

2.3 *Wie wird der Systematische- und der zufällige Fehler berechnet? (Folie 6)*

Um den Systematische- und den zufällige Fehler zu berechnen wird das arithmetische Mittel aus den Einzelmesswerten benötigt.

$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

Systematischer Fehler: $E_s = \overline{x} - x_\omega$
Die Abweichung wird durch den Sensor verursacht, z.B. durch falsche Eichung, dauernd vorhandene Störung wie Reibung.
(x_ω = wahrer Wert)

Zufälliger Fehler: $E_{ai} = x_i - \overline{x}$
Die Abweichung wird durch unvermeidbare, regellose Störungen Rauschen) verursacht.
(x_i = Einzelmesswerte)

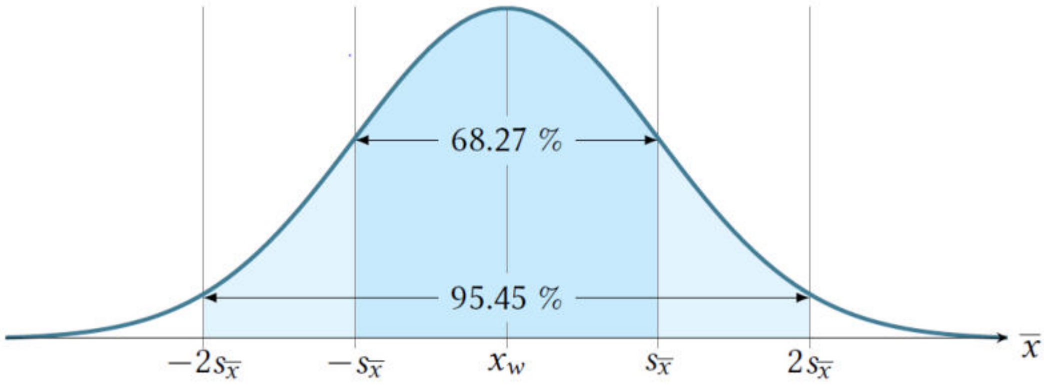
2.4 *Wie berechnet man die (empirischer) Standartabweichung für den Mittelwert? (Folie 7)*

$$s_{\overline{x}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} (\overline{x} - x_i)^2} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$\overline{x}$ = arithmetischer Mittelwert aus n Einzelsummen.
n = Anzahl der Messungen.
x_i = jede einzelne Messung

2.5 *Erklärung Gaußverteilung (Folie 8+)*

Man kann beweisen, dass sich die Wahrscheinlichkeitsverteilung für das arithmetische Mittel x (d.h. wenn man die Messreihe wiederholt und dann die Häufigkeiten von x aufträgt) immer mehr einer Gaußverteilung der Breite sx nähert, je mehr Einzelmessungen hinzukommen (Zentraler Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitstheorie).



Geht man davon aus, dass $\overline{x}$ gaußverteilt ist, so gibt $\pm sx$ einen **Vertrauensbereich** an, in den 68% der arithmetischen Mittelwerte fallen. Entsprechend gibt $\pm 2sx$ den 95%-Bereich an. Anders gesagt: wir haben eine **Sicherheit** von 68% bzw. 95%, dass sich der wahre Wert in dem entsprechenden Vertrauensbereich befindet, sofern keine systematischen Fehler vorliegen.

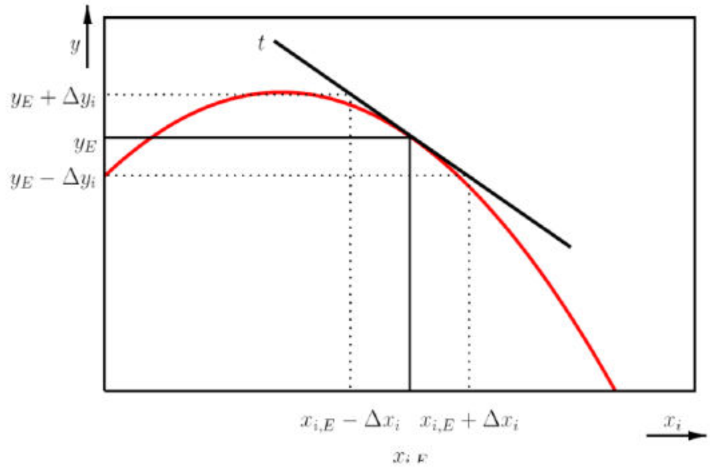
Wenn wenige Messwerte vorliegen ($n \leq 30$), besteht die Gefahr einer Unterschätzung des Fehlers, da die Schätzung von $s_{\overline{x}}$ selbst fehlerbehaftet ist. Man korrigiert daher die Fehlerschätzung um einen Faktor **t** nach oben, der von der Anzahl **n** und der gewünschten Sicherheit **P** abhängt (s. Tabelle unten).

Die korrekte Angabe des Messergebnisses erfolgt in der Form: $x = \overline{x} \pm t * s_{\overline{x}}\ [Einheit]$

Anzahl Messungen	Sicherheit P = 68,26 %	Sicherheit P = 95 %	Sicherheit P = 99 %
2	1,84	12,71	63,66
3	1,32	4,3	9,93
4	1,2	3,18	5,84
5	1,15	2,78	4,6
6	1,11	2,57	4,03
7	1,09	2,45	3,71
8	1,08	2,37	3,5
9	1,07	2,31	3,36
10	1,06	2,26	3,25
15	1,04	2,15	2,98
20	1,03	2,09	2,86
30	1,02	2,05	2,76
50	1,01	2,01	2,68
80	1,0	1,99	2,64
100	1,0	1,98	2,63
unendlich	1,0	1,96	2,58

2.6 *???Fehlervortpflanzung (Folie 12+)*

Eindimensionales Beispiel: die Ausgangsgröße y hängt von der Eingangsgröße x über eine Funktion y = f (x) ab. Es gilt näherungsweise: $\Delta y \approx f'(x) * \Delta x$



Erweiterung auf mehrere Eingangsgrößen:
Allgemeinerer Fall: Ausgangsgröße hängt von mehreren Eingangsgrößen ab:
$y = f(x_1, x_2, ..., x_m) = f(\mathbf{x})$

Hier gilt das **Gaußsche Fehlerfortpflanzungsgesetz:**

$$\Delta y = \sqrt{(\frac{\partial}{\partial x_1} f(\mathbf{x}) * \Delta x_1)^2 + ... + (\frac{\partial}{\partial x_m} f(\mathbf{x}) * \Delta x_m)^2}$$

mit den partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x_i} f(\mathbf{x})$. Die partiellen Ableitungen stellen Gewichtsfaktoren für die Fortpflanzung der einzelnen Fehler dar.

Beispiel: Geschwindigkeit

Geschwindigkeit: $v = f(s,t) = s/t$ mit der gemessenen Strecke s und Zeit t und den zugehörigen Messunsicherheiten $\Delta s, \Delta t$.

Partielle Ableitungen:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} f(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial s} f(s,t) = \frac{1}{t}$$
$$\frac{\partial}{\partial x_2} f(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial t} f(s,t) = -\frac{s}{t^2}$$

Fehlerfortpflanzung:

$$\Delta v = \sqrt{\left(\frac{\partial}{\partial s} f(s,t) \cdot \Delta s\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial t} f(s,t) \cdot \Delta t\right)^2}$$
$$= \sqrt{\left(\frac{1}{t}\Delta s\right)^2 + \left(-\frac{s}{t^2}\Delta t\right)^2}$$

2.7 Nenne die 3 Regeln für die Fehlerfortpflanzung (Folie 16)

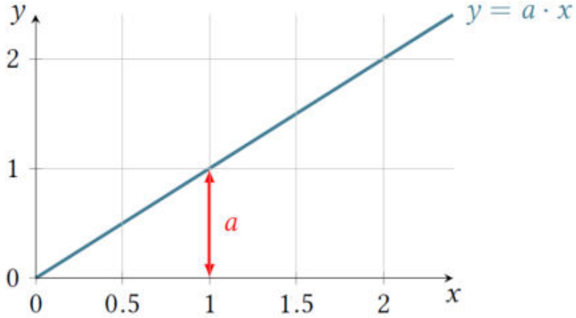
- **Vorgehensweise:** Die partiellen Ableitungen als Gewichtsfaktoren sollten grundsätzlich vor der Messung berechnet werden. Nur so kann erkannt werden, welche Fehler sich besonders stark auf das Endergebnis auswirken. Die entsprechenden Messwerte müssen dann besonders genau ermittelt werden.

- **Faustregel 1:** Bei Addition und Subtraktion zweier Größen addieren sich deren absolute Fehler. Daher ist es besser, die Differenz zweier nahezu gleich großer Größen direkt zu messen.

- **Faustregel 2:** Bei Multiplikation und Division zweier Größen addieren sich deren relative Fehler. Bei Qadrierung verdoppelt sich daher der relative Fehler, bei Qadratwurzel halbiert er sich.

2.8 Was ist der Übertragsfunktion eines Sensors? (Folie 18)

Bei einem idealen Sensor ist die Übertragsfunktion eine Ursprungsgerade y = a * x. Die Steigung **a** ist die **Sensitivität** des Sensors.



- Der Bereich zwischen dem kleinsten größten und kleinsten Wert eines Stimulus, der von einem Sensor erfasst wird, wird **Messbereich** genannt. Größere Stimuli können den Sensor beschädigen.

- Der Messbereich G wird meist als Verhältnis vom maximalem zum minimalem Eingangswert angegeben, oft logarithmiert in
Dezibel: $G[db] = 20log\frac{x_{max}}{x_{min}}$

- Der **Ausgabebereich** eines Sensors ist das Intervall zwischen dem Ausgangssignal bei kleinstem und größtem angelegten Stimulus.

2.9 Wie können die Fehler durch zu geringe Ansprechempfindlichkeit und Kappungsfehler vermieden werden? (Folie 23)

Durch einhalten des Messbereichs.

2.10 *Wie kann der Fehler in der Kennliniensteigung, der Lage des Nullpunktes und der nichtlineare Kennlinie ausgeglichen werden? (Folie 23)*

Durch eine Kalibrierung.

Die Kalibrierung geschieht mithilfe von **Normalen**, d.h. geeichten Messgeräten oder geeignetem Referenzmaterial, mit denen die Übertragungsfunktion des Sensors ausgemessen wird.

Beispiel: Bei einem linearen Sensor kann die Übertragungsfunktion mittels Anlegen zweier genau bekannter Stimuli ermittelt werden. Daraus ergibt sich die Steigung und der Nullpunkt des Sensors. Achtung:um den Einfluss zufälliger Fehler zu minimieren, sollte der Vorgang oft genug wiederholt werden (s.o.).

2.11 *Nenne eine alternative Methode zur Bestimmung der Übertragungsfunktion und erkläre sie (Folie 24)*

Eine alternative Methode zur Bestimmung der Übertragungsfunktion ist die lineare Regression. Hierbei wird von vornherein angenommen, dass die Übertragungsfunktion linear ist, d.h. $y = a * x + b$

wobei die Sensitivität a und der Offset b unbekannt sind. Dazu werden mithilfe eines genauen Messgerätes Wertepaare $(x_i;\ y_i)$ aus Ein- und Ausgangswerten aufgenommen.

Ziel der der linearen Regression ist das Auffinden einer **Ausgleichsgeraden**, die die Summe der quadrierten Abstände zwischen allen n Datenpunkten und der Gerade minimiert:
$E = \sum_{i=1}^{n}(y_i - (a * x_i + b))^2$

Nichtlineare Regression:
Ist der Zusammenhang zwischen Stimulus und Ausgangswert nichtlinear, so gibt es auch Verfahren zur nichtlinearen Regression, bei denen z.B. angenommen wird, dass der Zusammenhang eine Parabel oder eine e-Funktion ist.

3 05_Signale

3.1 *Was ist der Frequenzbereich? (Folie 16)*

Die bisherigen Darstellungen zeigen das Signal im **Zeitbereich**, d.h. der Momentanwert wird in Abhängigkeit von der Zeit aufgetragen.

Darstellung im **Frequenzbereich:** Amplitude und Phase aller beteiligten Sinus-Schwingungen werden in Abhängigkeit von der Frequenz aufgetragen.

3.2 *Was ist ein Spektrum? (Folie 18)*

Darstellung eines Signals im Frequenzbereich.

3.3 *Was ist die Fouriertransformation? (Folie 18)*

Berechnung des Spektrums aus der Darstellung eines Signals im Zeitbereich.

3.4 *Was ist die inverse Fouriertransformation? (Folie 18)*

Berechnung der Darstellung eines Signals im Zeitbereich aus seinem Spektrum.

3.5 *Was ist der Dirac-Impuls? (Folie 29)*

- Geht das Tastverhältnis des Rechteckimpulses gegen 0, so erhält man einen **δ-Impuls** oder **Dirac-Impuls**, eine der wichtigsten Schwingungsformen der Signaltheorie.
- Die Amplituden der einzelnen Sinus-Schwingungen werden dabei sehr klein und sind in den Abbildungen kaum zu erkennen, es sei denn, man vergrößert gleichzeitig die Impulshöhe um denselben Faktor. Damit lassen sich immer schmalere Rechteckimpulse erzeugen, ohne dass die Energie der Schwingung (d.h. die Fläche unter dem Impuls) abnimmt.
- Der resultierende Impuls ist gleichzeitig unendlich steil und unendlich hoch, hat aber immer noch dieselbe Fläche wie das ursprüngliche Rechteck. Beim δ-Impuls ist diese Fläche auf 1 normiert.
- Der periodische δ-Impuls enthält im Abstand Δf = 1=T alle ganzzahligen Vielfache der Grundfrequenz von Null bis Unendlich mit stets gleicher Amplitude.

4 06_fourrierreihen

4.1 *Harmonische Fourierreihe (Folie 6)*

Mathematisch besagt die Fouriersche Hypothese also, dass jedes technisch erzeugbare Signal f (t) (mit Gleichanteil A0) geschrieben werden kann als:

$f(t) = A_0 + r_1 * cos(\omega_1 t - \varphi_1) + r_2 * cos(\omega_2 t - \varphi_2) + ...$

Periodische Signale mit der Grundfrequenz ω_0 enthalten nur potentiell unendlich viele) Sinus-Schwingungen deren Frequenzen ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz sind, den **Harmonischen**. Dies führt auf die sog. **harmonische Form der Fourierreihe:**

$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} r_k cos(k * \omega_0 t - \varphi_k)$

4.2 *Was ist das Ziel der Fourierreihe? (Folie 6)*

Ziel der Fourieranalyse: Berechnung der Amplituden A_0; r_k und Phasen φ_k für jede Harmonische mit Frequenz k * ω_0 aus einem gegebenen periodischen Signal f (t) [Demo].

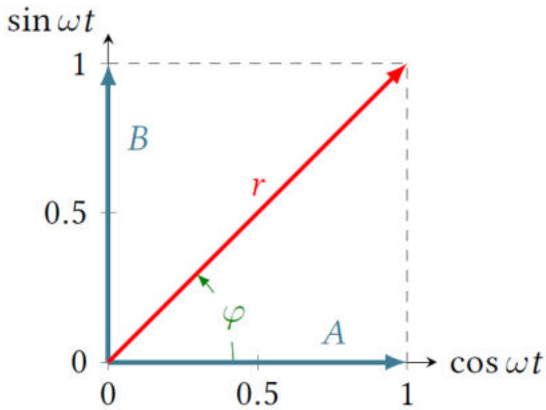
4.3 *???mination der Phase (Folie 8)*

4.4 *Sinus und Cosinus als zweidimensionale Vektoren (Folie 9)*

Allgemein gilt: eine gewichtete Summe (**Linearkombination**) von Sinus- und Cosinusfunktionen gleicher Frequenz ergibt wieder eine Cosinusschwingung gleicher Frequenz:

$Acos\omega t + Bsin\omega t = r * cos(\omega t + \varphi)$

mit Phase $\varphi = atan2\frac{B}{A}$ und Amplitude r = $\sqrt{A^2 + B^2}$



4.5 *Was ist di Trigonometrische Form der Fourierreihe? (Folie 10)*

$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k cosk\omega_0 t + B_k sink\omega_0 t$

A_0 heißt **Gleichglied** der Fourierreihe, die Gewichtsfaktoren A_k und B_k sind die **Fourierkoeffizienten**.

Vorteil: die unbekannten Fourierkoeffizienten können analytisch berechnet werden.

4.6 *Wie weißt man nach ob ein Signal punkt- oder achsensymetrisch ist? (Folie 11)*

Achsensymetrisch: f(-t) = f(t)
Punktsymetrisch: f(-t) = -f(t)

4.7 *Wie kann man Signale in gerade und ungerade Anteile zerlegen? (Folie 11)*

Gerader Anteil: ge f(t) = $\frac{1}{2}$ (f(t) + f(-t))
Ungerader Anteil: un f(t) = $\frac{1}{2}$ (f(t) - f(-t))

4.8 *Info: Fourierreihe von geraden und ungeraden Signalen (Folie 12)*

Die Fourierreihe eines geraden Signals besteht daher nur aus Cosinus-Termen, da diese gerade Signale sind:
ge $f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \; cos \; k \; \omega_0 \; t$

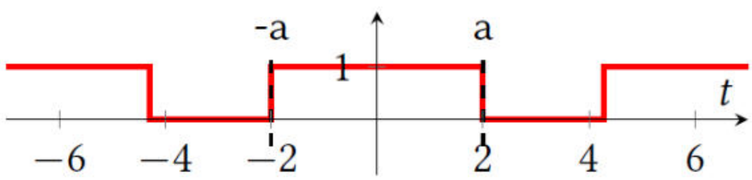
Die Fourierreihe eines ungeraden Signals besteht folglich nur aus Sinus-Termen, da diese ungerade Signale sind:
un $f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \; sin \; k \; \omega_0 \; t$

4.9 *?? gaben (Folie 22)*

Bestimmen Sie die die Fourierreihen für folgende Signale:

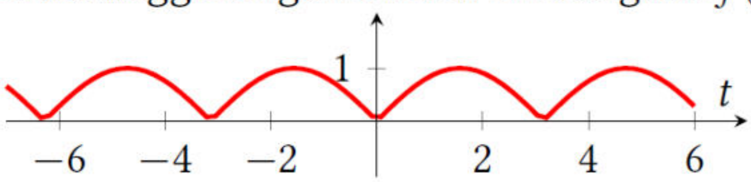
1. $f(t) = \sin^2 t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2t.$
2. Rechteckimpulsfolge: periodisch mit $f(t+2\pi) = f(t)$ und

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{für } -a < t \leq a \\ 0, & \text{für } -\pi < t \leq a \quad \text{und} \quad a < t \leq \pi \end{cases}$$



Tip: von $-a$ bis a integrieren!

3. Zweiweggleichgerichtetes Sinussignal: $f(t) = |\sin t|$



Tip: Additionstheoreme verwenden!

5 07_Komplexe_Fourriehrreihen

5.1 *Nenne Sie die Trigonometrische Form der Fourierreihe für periodische Signale (Folie 4)*

$f(t) \;=\; A_0 \;+\; \sum_{k=1}^{\infty} A_k cos\; k\; \omega_0\; t \;+\; B_k sin\; k\; \omega_0\; t$

5.2 *Was sind die Fourierkoeffizienten von der obigen Funktion? (Folie 4)*

$$A_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt, \quad A_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cdot\cos k\,\omega_0 t\,dt,$$

$$B_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cdot\sin k\,\omega_0 t\,dt.$$

Die Berechnung der Koeffizienten weist eine seltsame Asymmetrie 1auf: das Gleichglied A_0 hat das Gewicht $\frac{1}{T}$, alle anderen Koeffizienten haben das Gewicht $\frac{2}{T}$ vor dem Integral. Warum haben alle Frequenzen größer 0 das doppelte Gewicht in der Fourierreihe?

5.3 *Negative Ferquenzen bei Cosinus und Sinus (Folie 8)*

Bei einer Cosinus-Schwingung ändert sich nichts, wenn man von $t_0 = 0$ in die Zukunft oder in die Vergangenheit misst. Dies liegt an der altbekannten Spiegelsymmetrie des Cosinus:
$cos(-t) \;=\; cos\; t \Longrightarrow cos(-\omega t) \;=\; cos\; \omega t$

Man kann sich also jede Cosinus-Schwingung als (z.B. zur Hälfte) zusammengesetzt aus einer Schwingung mit positiver und negativer Frequenz denken:
$cos\; \omega t \;=\; \frac{1}{2}\; cos\; \omega t \;+\; \frac{1}{2}\; cos(-\omega t)$

Bei einer Sinus-Schwingung führt aufgrund der Punktsymmetrie eine negative Frequenz zu seinem Wechsel der Vorzeichens:
$sin(-t) \;=\; -sin\; t \Longrightarrow sin(-\omega t) \;=\; -sin\; \omega t$

Es gilt daher:
$sin\; \omega t \;=\; \frac{1}{2}\; sin\; \omega t \;-\; \frac{1}{2}\; sin(-\omega t)$

5.4 *Zweiseitige Fourierreihe (Folie 9)*

Setzt man vorige Zerlegung in positive und negative Frequenzen in die trigonometrische Fourierreihe ein, so erhält man:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t$$

mit negativen und positiven $k \in \mathbb{Z}$ und den Koeffizienten

$$a_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(t) \cdot \cos k\omega_0 t \, dt, \quad b_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(t) \cdot \sin k\omega_0 t \, dt.$$

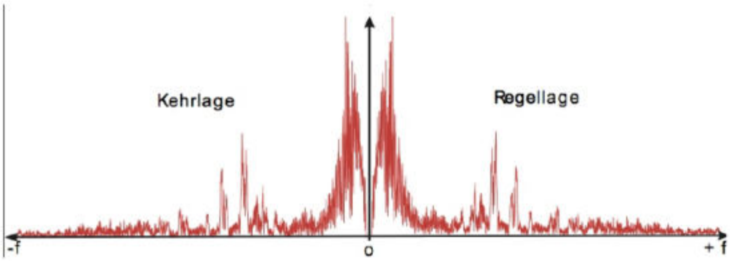
Die Sonderrolle für a_0 entfällt durch Einführung negativer Frequenzen!

Koeffizienten für positive und negative Frequenzen sind nicht frei wählbar, sondern es gelten die Symmetrien

$$a_{-k} = a_k \quad \text{und} \quad b_{-k} = -b_k.$$

5.5 *Zweiseitiges Amplitudenspektrum (Folie 10)*

Aufgrund dieser Symmetrien ist das **zweiseitige Amplitudenspektrum** $r_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ für positive und negative Frequenzen immer spiegelsymmetrisch zur y-Achse. Die negative Seite des Spektrums heisst daher **Kehrlage**, die positive **Regellage**.



Achtung: Die Regellage ist nicht identisch zum einseitigen Amplitudenspektrum. Die zweiseitigen Koeffizienten für Frequenzen größer 0 müssen dafür verdoppelt werden.

5.6 *Eulersche Formel (Folie 15)*

- Taylorentwicklung von e^x:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \quad \text{mit} \quad n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$$

- Einsetzen der rein imaginären Zahl ix:

$$\begin{aligned} e^{ix} &= 1 + ix + \frac{i^2x^2}{2} + \frac{i^3x^3}{3!} + \cdots = 1 + ix - \frac{x^2}{2} - \frac{ix^3}{3!} + \cdots \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\right) \end{aligned}$$

- Vgl. Taylorreihe von $\cos x$ und $\sin x$:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \quad \text{und} \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

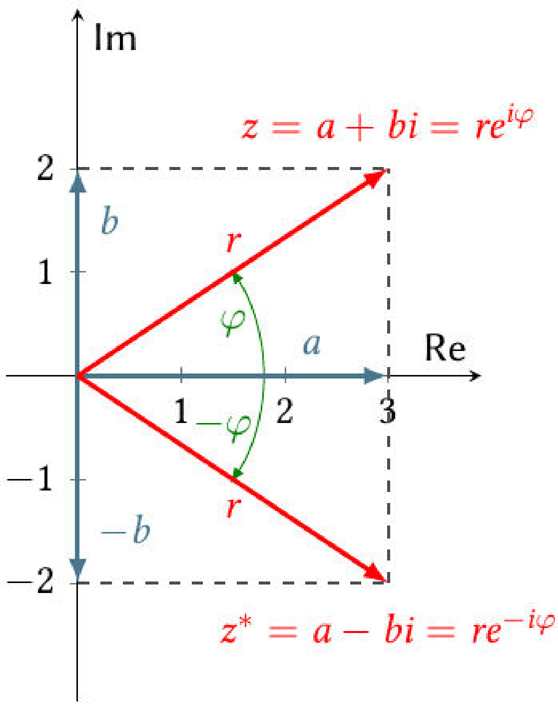
- **Eulersche Formel:** $e^{ix} = \cos x + i \sin x$

5.7 *Geometrische Interpretation komplexer Zahlen (Folie 16)*

- Komplexe Zahlen können als Punkte in der **komplexen** oder **Gaußschen Zahlenebene** dargestellt werden:
  Realteil = x-Wert,
  Imaginärteil: y-Wert.

- **Kartesische Koordinaten:** Repräsentation als x-y-Paar
  z = (a, b) = a + ib

- **Polarkoordinaten:** Repräsentation als Betrag und Phasenwinkel
  $z = (r, \varphi) = r(cos\varphi + i\ sin\varphi) = re^{i\varphi}$ mit r = |z|



5.8 *Komplexe Fourierreihe (Folie 20)*

Wir können also die zweiseitige Fourierreihe

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t$$

in komplexer Notation schreiben als

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k - ib_k)e^{ik\omega_0 t} + (a_k + ib_k)e^{-ik\omega_0 t}$$

Wir definieren die beiden **komplexen Fourierkoeffizienten** als

$$c_k = a_k - ib_k \quad \text{und} \quad c_{-k} = a_k + ib_k = c_k^*$$

und erhalten so die elegante **komplexe Fourierreihe**

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega_0 t}.$$

5.9 *Nenne die Analysegleichung der komoplexen Fourierreihe (Folie 21)*

$c_k \;=\; \frac{1}{T}\int_0^T \; f(t) \;*\; e^{-ik\omega_0 t}dt$

Die Fourierreihe:

$f(t) \;=\; \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega_0 t}$

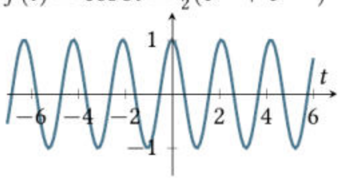
beschreibt den umgekehrten Vorgang und wird auch **Synthesegleichung** bezeichnet.

5.10 *Beispiel: Darstellung komplexer Spektren (Folie 23)*

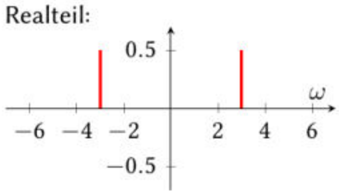
Zeitbereich

Frequenzbereich

$f(t) = \cos 3t = \frac{1}{2}(e^{i3t} + e^{-i3t})$

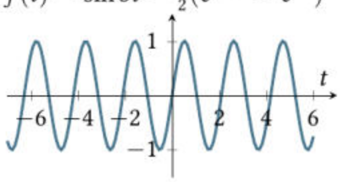


Realteil:



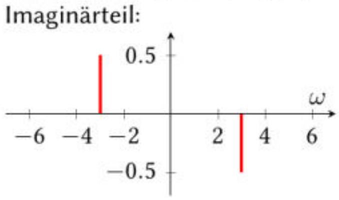
Imaginärteil: 0 (gerades Signal)

$f(t) = \sin 3t = \frac{i}{2}(e^{-i3t} - e^{i3t})$



Realteil: 0 (ungerades Signal)

Imaginärteil:



5.11 *Beispiel: Berechnung Imaginär und Realteil (Folie 25+)*

Beispiel: $f(t) = 1 + \sin t + 2\cos 2t + \cos(2t + \frac{\pi}{4})$ (1)

Das Signal ist weder gerade noch ungerade. Somit sind sowohl Real- als auch Imaginärteil ungleich 0.

Mittelwert: $c_0 = 1$, Periode: $T = 2\pi \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = 1$

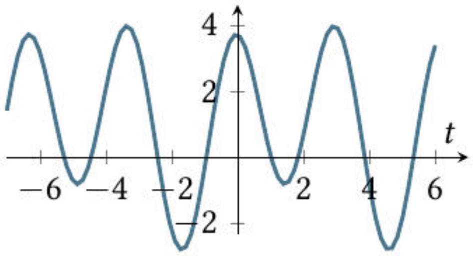
Erste Harmonische:

$$\sin t = \frac{i}{2}(e^{-it} - e^{it}) \quad \Rightarrow \quad c_1 = -\frac{1}{2}i,\ c_{-1} = \frac{1}{2}i$$

Zweite Harmonische: $2\cos 2t = 2 \cdot \frac{1}{2}(e^{i2t} + e^{-i2t})$

$$\begin{aligned}\cos(2t + \tfrac{\pi}{4}) &= \tfrac{1}{2}(e^{i2t+i\pi/4} + e^{-i2t-i\pi/4}) = \tfrac{1}{2}(e^{i\pi/4}e^{i2t} + e^{-i\pi/4}e^{-i2t}) \\ &= \tfrac{1}{2\sqrt{2}}((1+i)e^{i2t} + (1-i)e^{-i2t}) \text{ mit } e^{\pm i\pi/4} = \tfrac{1}{2\sqrt{2}}(1 \pm i) \\ &\Rightarrow \quad c_2 = 1 + \tfrac{1}{2\sqrt{2}}(1+i),\ c_{-2} = 1 + \tfrac{1}{2\sqrt{2}}(1-i)\end{aligned}$$

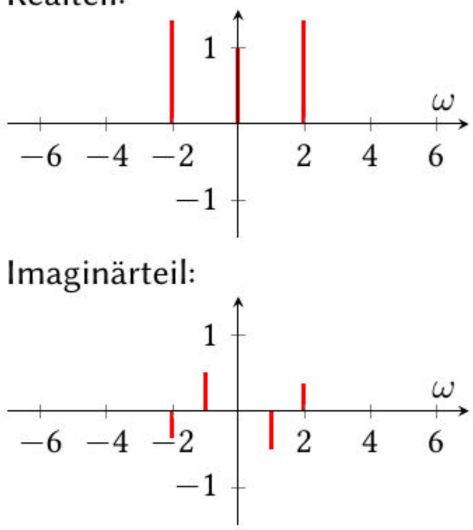
Zeitbereich:



Frequenzbereich

Realteil:

Imaginärteil:



5.12 *Umrechnung in andere Darstellungen der Fourierreihe (Folie 27)*

Die Koeffizienten der älteren Darstellungen lassen sich wie folgt aus den komplexen Fourierkoeffizienten c_k berechnen:

- Zweiseitige Fourierreihe: $a_k = \frac{1}{2}(c_k + c_k^*)$ und $b_k = \frac{i}{2}(c_k^* - c_k)$
- Trigonometrische Fourierreihe:

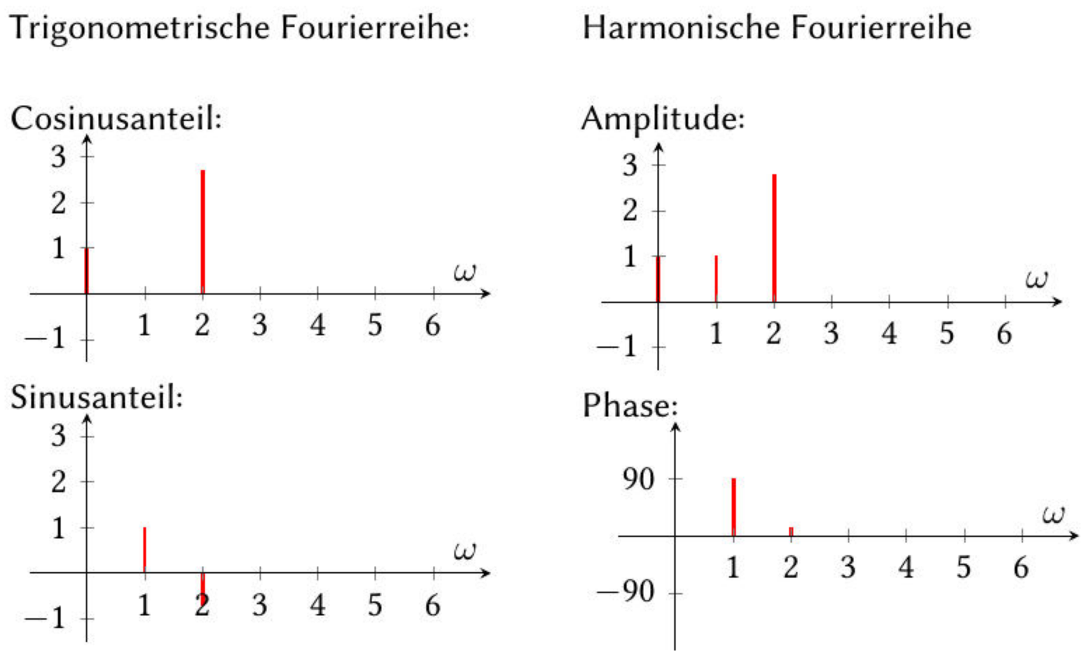
$$A_k = c_k + c_k^* \quad \textit{und} \quad B_k = i(c_k - c_k^*) \quad \text{für} \quad k > 0, A_0 = c_0$$

- Harmonische Fourierreihe:

$$r_0 = |c_0|, r_k = 2\sqrt{c_k c_k^*} \quad \text{und} \quad \varphi_k = \text{atan}_2\left(i(c_k - c_k^*), c_k + c_k^*\right)$$

5.12.1 Beispiel:

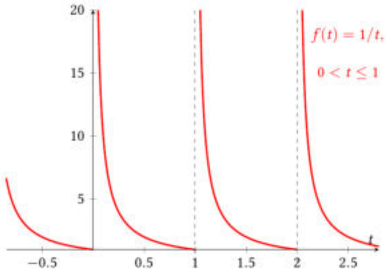
Beispiel: $f(t) = 1 + \sin t + 2\cos 2t + \cos(2t + \frac{\pi}{4})$ (3)



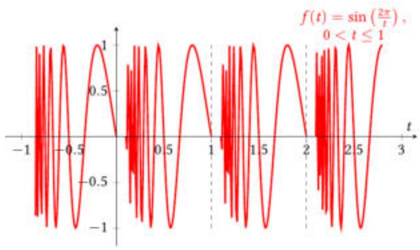
6 08_Fourriertransformation

6.1 *Benennen Sie die 3 Dirichlet-Bedingungen (Folie 5)*

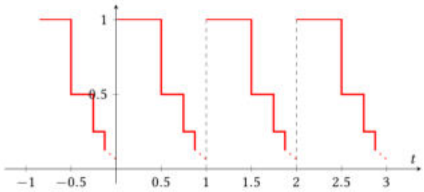
- f(t) muss über eine Periode absolut integrierbar sein: $\int_0^T |f(t)|dt < \infty$
  Beispiel Verletzung:



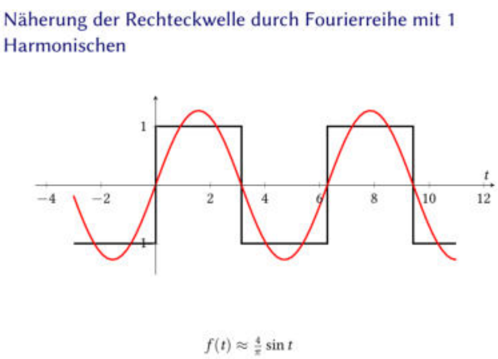
- In jeder einzelnen Peridode dürfen nur endlich viele Maxima und Minima vorkommen.
  Beispiel Verletzung:

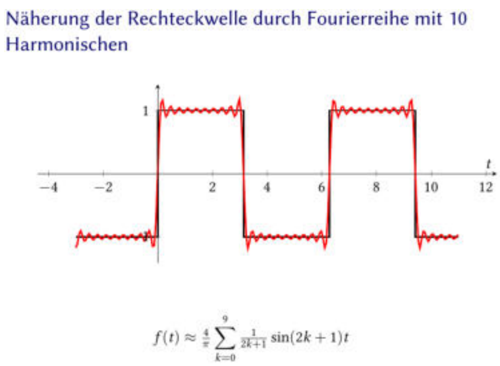


- In jeder einzelnen Periode dürfen nur endlich viele und endliche Unstetigkeiten vorkommen.
  Beispiel Verletzung:



6.2 *Näherung der Rechteckwelle durch Furierreihe (Folie 9 - 13)*





Um sich der Rechteckfunktion mit einer Fourierreihe zu nähern wird so oft eine höhere Harmonische gewählt bis man mit dem Ergebnis zufrieden ist.

6.3 *Was ist das Gibbs-Phänomen (Folie 14)*

- In den glatten Signalabschnitten konvergiert die endliche Fourierreihe gleichmäßig zum Originalsignal.
- Nahe der Unstetigkeitsstellen entstehen sogenannte **Gibbsche Über-und Unterschwinger**, deren Amplitude (bei Rechteckwelle 9%) nicht kleiner wird, egal wie viele Terme man zur Fourierreihe hinzunimmt.
- Die Gibbsche Über- und Unterschwinger verschwinden erst, wenn unendlich viele Therme in der Fourierreihe sind.
- An den Unstetigkeitsstellen selbst konvergiert die Reihe zum Halbwert der Unstetigkeit.
- **Gibbs-Phänomen:** der maximale Abstand zwischen Fourierreihen und Zielsignal konvergiert bei unstetigen Signalen nicht.

6.4 *Gibbs-Phänomen bei starker JPEG-Komprimierung (Folie 15)*

Bei der JPEG-Komprimierung wird das Originalbild durch eine abgeschnittene 2-D-Fourierreihe dargestellt. An Kanten (d.h. Unstetigkeitsstellen) ergeben sich Gibbsche Unter- und Überschwinger.

6.5 *Berechnung der Amplitude und die Phase aus der Analysegleichung der komplexen Fourierreihe (Folie 18)*

$$c_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\cdot e^{-ik\omega_0 t}\, dt$$

$$r_0 = |c_0|, r_k = 2\sqrt{c_k c_k^*} \quad \text{und} \quad \varphi_k = \mathrm{atan}_2\left(i(c_k - c_k^*), c_k + c_k^*\right)$$

r_0 = Amplitude
φ_k = Phase

- Andere Frequenzen als ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz können nicht vorkommen, da sich sonst das resultierende Gesamtsignal nicht nach der Zeit T exakt wiederholen könnte.
- Umgekehrt muss also gelten: bei nichtperiodischen Signalen müssen Frequenzen in unterschiedlichen Abständen vorkommen, sonst würde sich das Signal ja wiederholen!

6.6 *Spektren nichtperiodischer Signale (Folie 22)*

- Das Experiment zeigt: wird die Periodendauer T (bei gleichbleibender Impulsdauer) größer, so wird der Abstand der Linien 1/T notwendigerweise immer enger.
- Geht die Periodendauer gegen unendlich (d.h. das Signal wird nichtperiodisch), verschmelzen die einzelnen Linien zu einem durchgehenden, d.h. kontinuierlichen Spektrum.
- Allgemein gilt: periodische Signale besitzen ein **diskretes Linienspektrum**, nichtperiodische Signale dagegen ein **kontinuierliches Spektrum**.
- Im Prinzip genügt also ein Blick auf das Spektrum, um festzustellen, ob ein Signal periodisch oder nichtperiodisch ist. Leider ist der Übergang nicht immer scharf. Viele Signale (z.B. Musik und Sprache) sind fastperiodisch, d.h. sie bestehen aus Abschnitten unterschiedlicher Zeitdauer, innerhalb derer das Signal periodisch ist.

6.7 *?????????????????????????????????? (Folie 24-25)*

6.8 *Vergleich Fourierreihe und Fouriertransformation (Folie 26)*

	Fourierreihe	Fouriertransformation
Signaltyp	periodisch	aperiodisch
Spektrum	diskret	kontinuierlich
Synthese-gleichung	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega_0 t}$	$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\cdot e^{i\omega t}\,d\omega$
Analyse-gleichung	$\frac{1}{T}\int_T f(t)\cdot e^{-ik\omega_0 t}\,dt$	$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot e^{-i\omega t}\,dt$

Das Signal und sein Spektrum bilden ein **Transformationspaar**.
Schreibweise:

$$f(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(\omega)$$

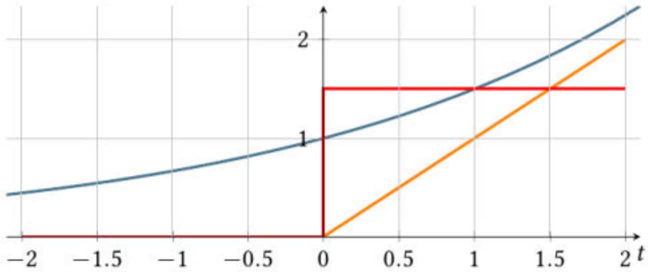
6.9 *Nenne die 3 Dirichlet-Bedingungen für die Fouriertransformation (Folie 28)*

- f(t) muss absolut integrierbar sein
- In jedem endlichen Intervall dürfen nur endlich viele Maxima und Minima vorkommen
- In jedem endlichen Intervall dürfen nur endlich viele und endlich große unstetige Sprünge vorkommen

Auch hier spielen die letzten beiden Einschränkungen in der Praxis eine geringe Rolle, die erste aber schon. (Bei der Fourierreihe spielten in der Praxis alle drei keine Rolle, da sie nicht realisierbar sind.)

6.10 *Beispiele für Signale, die nicht absolut integrierbar sind (Folie 29)*

Die Rampen- und die Sprungfunktion spielen eine wichtige Rolle in der Signalverarbeitung, die Exponentialfunktion beschreibt die Antwort instabiler Systeme. Zur Behandlung solcher Signale ist eine Erweiterung der Fouriertransformation notwendig, die **Laplacetransformation.**



7 09_Komplementarität

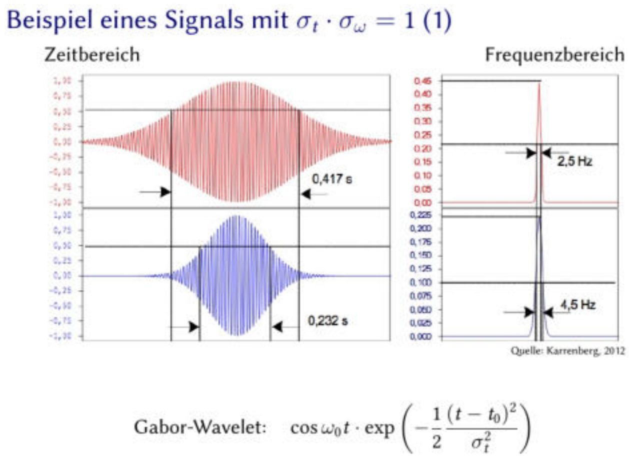
7.1 *Komplementarität von Frequenz und Zeit (Folie 7)*

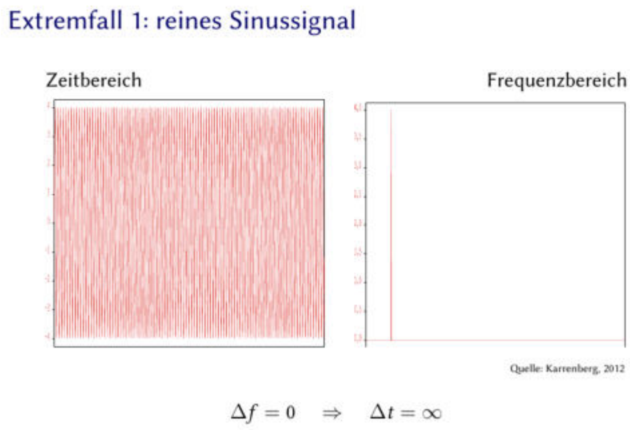
- Besteht der Sinuston nur noch aus wenigen Perioden, ist dieTonhöhe nicht mehr erkennbar.
- Bei einer zeitbegrenzten Sinusschwingung kann man nicht von einer Frequenz sprechen, sondern nur von einem **Frequenzband.**
- **Komplementarität von Frequenz und Zeit:** Eine zeitliche Eingrenzung der Signaldauer Δt bedeutet eine Ausweitung des Frequenzbandes Δf . Umgekehrt gilt: Je eingeschränkter das Frequenzband eines Signals ist, desto größer muss zwangsläufig die Zeitdauer des Signals sein.
- Konsequenz: Frequenzband und Zeitdauer eines Signals können nicht unabhängig voneinander gemessen werden. Eine genaue Messung des Frequenzbandes erfordert ein lange Zeitdauer, eine genaue Messung der Zeitdauer ein breites Spektrum.

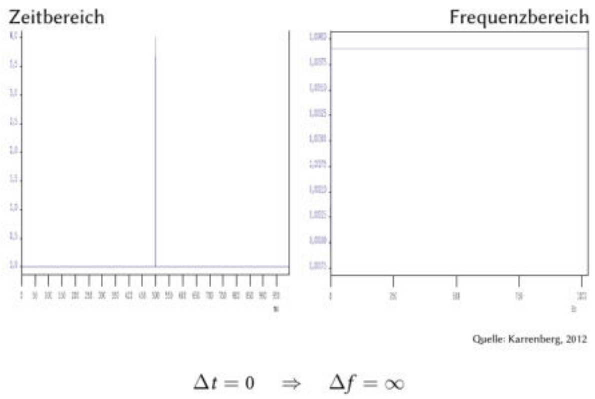
7.2 *Unschärferelation für Frequenz und Zeit (Folie 8)*

- Oft ist Beginn und Ende der Zeitdauer oder des Frequenzbandes eines Signals nicht scharf definiert. Man nimmt daher zur Schätzung von Δt und Δf oft die Halbwertsbreite (die Breite bei 50% des Maximalwertes) oder die Standardabweichungen σ_t und σ_ω.
- Im vorigen Experiment sind Δt und Δf *umgekehrt proportional*, d.h. eine Halbierung von Δt ergibt eine Verdoppelung von Δf:
  $\Delta t \ * \ \Delta f = \text{const.}$
- Tatsächlich lässt sich zeigen, dass für beliebige Signale die **Frequenz-Zeit-Unschärferelation** gilt:
  $\sigma_t \ * \ \sigma_\omega \ \geq \ 1$ bzw. $\Delta t \ * \ \Delta f \ \geq 0.88$
- Man kann niemals gleichzeitig Zeitdauer und Frequenz genauer als $\sigma_t * \sigma_\omega = 1$ angeben. Dies ist eine fundamentale Grenze der Fourieranalyse und damit auch der Physik.

7.3 *Beispiele: (Folie 9+)*







7.4 *Wie muss man bei der der Frequenzmessung bei nichtperiodischen Signalen beachten? (Folie 14)*

Aus $\sigma_t \, * \, \sigma_\omega \geq 1$ folgt: Je länger wir messen, desto genauer können wir die Frequenz ermitteln.

Achtung: übersteigt die Messdauer die Signaldauer, führt die längere Messdauer zu keiner Verbesserung der Auflösung! Hier bestimmt ausschließlich die Signaldauer die Frequenzauflösung. Dies ist eine Konsequenz der Unschärferelation: bei kurzzeitigen Signalen ist grundsätzlich keine hohe Frequenzauflösung möglich.

7.5 *Warum wird Windowing angewandt? (Folie 16)*

Bei lang andauernden Signalen könnte man im Prinzip das Spektrum sehr genau messen. Da aber oft die momentanen Töne und Klänge von Interesse sind und nicht das Gesamtspektrum, wird das Signal aufgeteilt und mit einer Window-Funktion multipliziert.

Windowing: das Signal wird in aufeinanderfolgende, oft überlappende Fenster zerlegt. In diesen Fenstern wird eine lokale Fourieranalyse durchgeführt. Damit lässt sich der zeitliche Verlauf des Spektrums verfolgen bzw. durch Mittelung das Gesamtspektrum ermitteln.

7.6 *Warum enthalten beim Naiven Windowing die Abschnitte deutlich höhere Frequenzen? (Folie 17 - 18)*

- Durch den senkrechten Ausschnitt sind steile Übergänge erzeugt worden, die im ursprünglichen Signal nicht vorhanden sind. Steile Übergänge erzeugen jedoch viele hohe Frequenzen im Spektrum.
- Durch die scharfe Trennung sind zusammengehörige Signalabschnitte willkürlich voneinander getrennt worden.

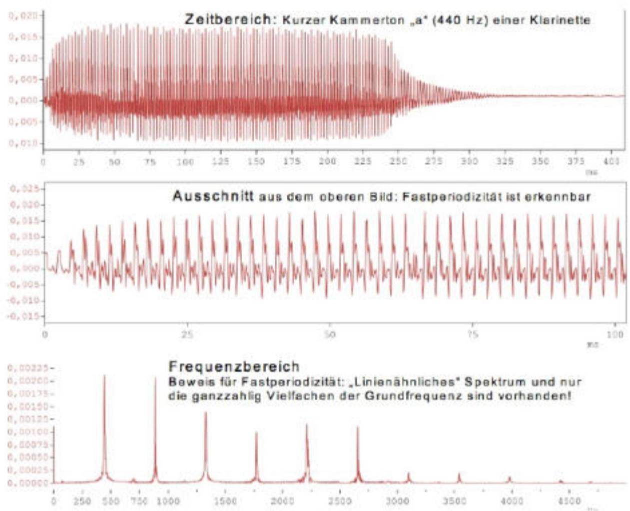
7.7 *Wie kann man das Problem beim Naiven Windowing lösen? (Folie 18)*

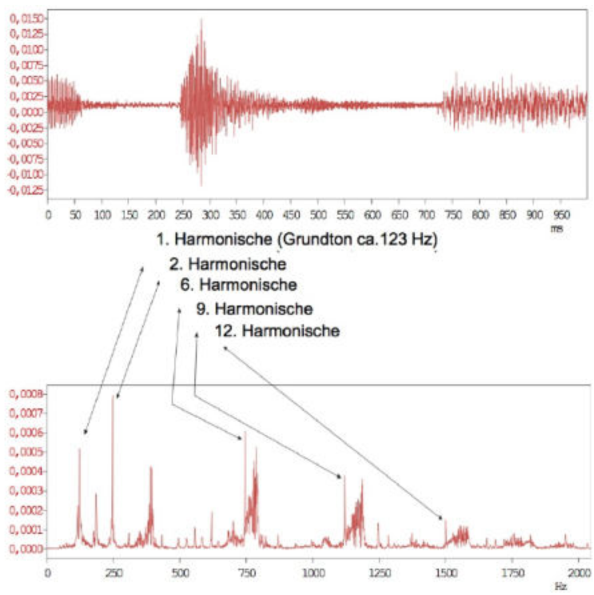
Ansatz: die Abschnitte werden überlappend gewählt (meist zu 50%). Innerhalb des Abschnitts wird das Signal mit einer langsam ansteigenden und abfallenden **Fensterfunktion** (z.B. Gaußfunktion) multipliziert, bevor die Fouriertransformation ausgeführt wird.Dadurch werden plötzliche Sprünge vermieden.

Durch Fensterfunktionen werden die Nachteile des naiven Windowing vermieden. Allerdings wird dadurch das originale Spektrum geglättet und damit die Auflösung verringert.

Hier kommt wieder die Unschärferelation ins Spiel: je breiter die Fensterfunktion, desto höher die Frequenzauflösung, aber desto geringer die zeitliche Auflösung.

7.8 *Erkennung Fastperiodische Signale anhand ihres Frequenzbereiches (Folie 24 -25)*





7.9 *Töne und Klänge (Folie 26)*

- **Reiner Ton:** lediglich eine Frequenz ist hörbar, d.h. eine sinusförmige Druckschwankung am Ohr.
- **Ton:** Tonhöhe ist eindeutig bestimmbar. Die Tonhöhe wird durch die Frequenz des Grundtons bestimmt, die anderen Harmonischen sind die Obertöne.
- **Klang:** besteht aus mehreren Tönen (z.B. ein Akkord).
- **Klangfarbe:** Obertonspektrum eines Instruments bzw. der Stimme u.ä.

7.10 *Erkläre Fastperiodisch und Quasiperiodisch (Folie 27)*

Fastperiodisch:
Fastperiodische Signale (z.B. Burst) bilden den Grenzbereich zwischen periodischen und aperiodischen Signalen. Sie wiederholen sich nur über einen begrenzten Zeitraum.

Fastperiodische Signale (z.B. Burst) bilden den Grenzbereich zwischen periodischen und aperiodischen Signalen. Sie wiederholen sich nur über einen begrenzten Zeitraum.

Quasiperiodisch:
Aufgrund dieser Eigenschaft wiederholen sich quasiperiodische Signale nicht in jeder Periode exakt, man beobachtet eine leichte Veränderung des Signals von Periode zu Periode. Die Perioden bleiben aber zueinander ähnlich. Quasiperiodische Töne werden vom Ohr oft als unharmonisch empfunden, aber nicht immer (z.B. Glocke).

8 10_Fouerierеigenschaften

8.1 *Fouriertransformation und ihre Inverse (Folie 4)*

Berechnung der Fouriertransformierte $F(\omega)$ **aus dem Signal f(t):**
$F(\omega) \; = \; \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \; * \; e^{-i\omega t} \; dt$

$\Rightarrow$ kurz: $F(\omega) \; = \; \mathcal{F}\{f(t)\}$

Berechnung des Signals f(t) aus der Fouriertransformierten $F(\omega)$**:**
$f(t) \; = \; \frac{1}{2\pi} \; \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \; * \; e^{-i\omega t} \; dw$

$\Rightarrow$ kurz: $f(t) \; = \; \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\}$

8.2 *Beispiel: Fouriertransformieren eines Rechteckimpulses (Folie 5)*

$$\text{Rechteckimpuls:} \quad f(t) = \begin{cases} 1, & \text{für } -a \leq t \leq a \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t}\, dt = \int_{-a}^{a} e^{-i\omega t}\, dt \\ &= -\frac{1}{i\omega} e^{-i\omega t} \Big|_{t=-a}^{t=a} = -\frac{1}{i\omega}(e^{-i\omega a} - e^{i\omega a}) \\ &= \begin{cases} \frac{2}{\omega} \sin a\omega, & \text{für } \omega \neq 0 \\ 2a, & \text{für } \omega = 0 \end{cases} = 2a \cdot \operatorname{sinc} a\omega \quad \text{(rein reell)} \end{aligned}$$

mit der **Sinc-Funktion** (*sinus cardinalis*, auch Spaltfunktion)

$$\operatorname{sinc} z = \begin{cases} \frac{1}{z} \sin z, & \text{für } z \neq 0 \\ 1, & \text{für } z = 0. \end{cases}$$

8.3 *Dirac-Impuls und seine Fouriertransformierte (Folie 9)*

Der **Dirac-Impuls** $\delta(t)$ spielt eine wichtige Rolle in der Signalverarbeitung. Mathematisch ist er definiert als Grenzübergang einer Serie von immer schmaleren (z.B. Gauß-)Impulsen der Fläche 1. Dadurch wird er gleichzeitig unendlich hoch und schmal, behält aber trotzdem die Fläche 1:
$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \; dt \; = \; 1$
Seine definierende Eigenschaft ist die **Sieb- oder Ausblendeigenschaft:**
$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \; * \; f(t) \; dt \; = \; f(0)$

Die Fouriertransformierte ergibt sich somit als:
$\mathcal{F}\delta(t) \; = \; \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \; * \; e^{-i\omega \, * \, 0} \; = \; 1$

8.4 *Fouriertransformierte von Sinus-Schwingungen (Folie 10 - 11)*

Interessanterweise lässt sich zeigen, dass umgekehrt das Integral über ein komplexes Sinus-Signal gerade wieder den Dirac-Impuls ergibt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\, dt = 2\pi \cdot \delta(\omega).$$

Die Fouriertransformierte eines komplexen Sinus-Signales ist also:

$$\mathcal{F}\{e^{i\omega_0 t}\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_0 t} \cdot e^{-i\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega-\omega_0)t}\, dt = 2\pi\delta(\omega-\omega_0).$$

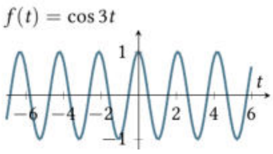
Obwohl periodische Signale nicht absolut integrierbar sind, kann man so eine Fouriertransformierte für Sinus-Schwingungen berechnen:

$$\mathcal{F}\{\cos\omega_0 t\} = \mathcal{F}\{\tfrac{1}{2}(e^{-i\omega_0 t} + e^{i\omega_0 t})\} = \pi(\delta(\omega+\omega_0) + \delta(\omega-\omega_0))$$

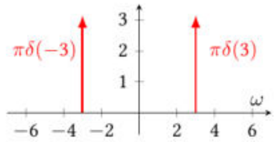
$$\mathcal{F}\{\sin\omega_0 t\} = \mathcal{F}\{\tfrac{i}{2}(e^{-i\omega_0 t} - e^{i\omega_0 t})\} = i\pi(\delta(\omega+\omega_0) - \delta(\omega-\omega_0))$$

Das mit der Fouriertransformation berechnete Spektrum einer Sinusschwingung sieht also genauso aus wie bei der Fourierreihe, allerdings stehen statt der Koeffizienten an derselben Stelle Delta-Impulse skaliert mit 2π. Damit lassen sich zeitkontinuierliche periodische und aperiodische Signale mit dem gleichen Formalismus behandeln.

Zeitbereich



Frequenzbereich (Realteil)



8.5 *Grundlegende Symetrien (Folie 13)*

- Die Fouriertransformierte eines reellen Signals ist symmetrisch zum Ursprung (**hermitesch**): $F(\omega) = F^*(-\omega)$,
  d.h. der Realteil des Spektrums ist immer spiegelsymmetrisch zur y-Achse bzw. gerade, der Imaginärteil immer punktsymmetrisch zum Ursprung bzw. ungerade.
- Ein reelles und gerades Signal hat eine rein reelle, gerade Fouriertransformierte.
- Ein reelles und ungerades Signal hat eine rein imaginäre, ungerade Fouriertransformierte.

9 11_Sprache

9.1 *Vokale (Folie 7)*

- Vokale sind fastperiodische Signalabschnitte in Sprachsignalen.
- Je länger der Vokal gesprochen wird, desto klarer kann er wahrgenommen werden, desto präziser kann unser Gehör die Tonhöhe der Vokalfrequenzen bestimmen. Desto kürzer er ausfällt, desto unverständlicher wird er (s. Zeit-Frequenz-Komplementarität). Die Vokalerkennung entspricht also einer Frequenzmessung.
- Betrachtet man das Spektrum über das ganze Signal, so werden die Spektren der einzelnen fastperiodischen Abschnitte einfach gemischt und können so in ihrer zeitlichen Abfolge nicht mehr unterschieden werden. Um eine Folge von Vokalen erkennen zu können, benötigt man eine lokale Form der Fourieranalyse innerhalb eines gleitenden Zeitfensters.
- Eine ähnliche Analyse wäre auch sinnvoll für Konsonanten, obwohl diese nicht fastperiodisch sind, sondern aus Rausch-, Explosiv- oder Reibelauten entstehen.

9.2 *Was ist ein Phon/Phoneme? (Folie 9)*

Phon (auch: Laut, Sprachlaut): die kleinste unterscheidbare Lauteinheit im Lautkontinuum“ - ein minimales Schallsegment, das noch als selbständig wahrgenommen wird.
Jedes Phon besitzt einige charakteristische Frequenzen, die - ähnlich wie ein Fingerabdruck - nahezu unverwechselbare, denkbar einfache Muster sind.

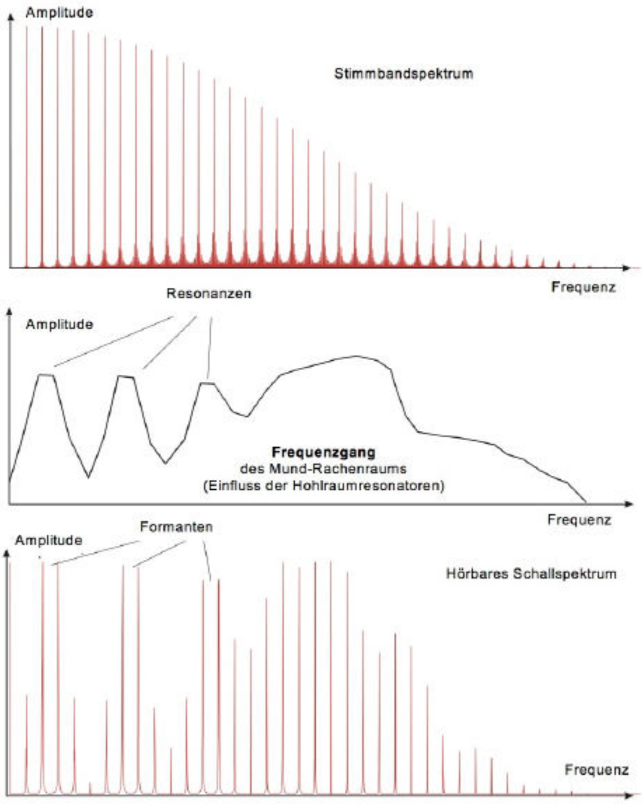
Phoneme: die Menge aller Phone, die in einer gesprochenen Sprache die gleiche bedeutungsunterscheidende Funktion haben z.B. gerolltes “r” und Rachen-“r”).

9.3 *?? Was ist ein Sonogramm? (Folie 13 - 16)*

9.4 *Was sind Formanten? (Folie 18)*

- Baut sich an den Stimmbändern durch den Luftstrom aus den Lungen ein Überdruck auf, so öffnen sich diese, der Druck baut sich ruckartig ab, sie schließen sich wieder usw. Bei Vokalen geschieht dies fastperiodisch, bei Konsonanten nichtperiodisch. Sprachgrundfrequenz: ca. 240 Hz (Frau), 130 Hz (Mann).
- Im komplexen Hohlraumsystem des Mund- und Rachenraums entstehen bei bestimmten Anregungsfrequenzen stehende Wellen ähnlich wie in Orgelpfeifen oder Flöten).
- Dieser Hohlraumresonator verstärkt diejenigen Frequenzen, bei denen sich in seinem Inneren stehende Wellen bilden können und schwächt diejenigen, für die das nicht gilt, er wirkt also als frequenzselektiver Verstärker und Filter.
- Diejenigen Frequenzbereiche, bei denen die relative Verstärkung am höchsten ist, bezeichnet man als **Formanten**. Die ersten beiden Formanten f_1 und f_2 charakterisieren die Vokale, der dritte und vierte Formant f_3 und f_4 sind für das Sprachverständnis nicht mehr wesentlich.

9.5 *Erkennung von Formanten am Spektrum (Folie 19)*



9.6 *Was bedeutet Kovariieren und Kovarianz? (Folie 25- 28)*

Kovariieren:
Wenn f (t) und g(t) ähnlich zueinander sind, dann sind sie oft gleichzeitig positiv oder gleichzeitig negativ (sie **kovariieren**). Somit ist ihr Produkt oft groß und damit ihre Korrelation.

Kovarianz:
Allgemein gilt: die Korrelation ist umso höher, je größer die Mittelwerte der Signale sind, unabhängig davon, ob sie zusätzlich kovariieren oder nicht, d.h. Signale mit hohem Mittelwert sind immer ähnlicher" bzw. stärker korreliert. Dieser Nachteil wird vermieden, wenn bei beiden Signalen vorher der Mittelwert abgezogen wird (**Kovarianz**):

$$\sigma_{fg} = \int_{-\infty}^{\infty}(f(t) - \mu_f) * (g(t) - \mu_g)dt$$

mit

$$\mu_f = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt \quad \underline{\textbf{und}} \quad \mu_g = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)dt$$

Für diskrete Signale ist die Kovarianz mit $\mu_f = (\frac{1}{n})\sum_k f_k$ und $\mu_g = (\frac{1}{n})\sum_k g_k$ definiert als:

$$\sigma_{fg} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(f_k - \mu_f) * (g_k - \mu_g)$$

9.7 *Korrelationskoeffizient nach Bravias-Pearson (Folie 27)*

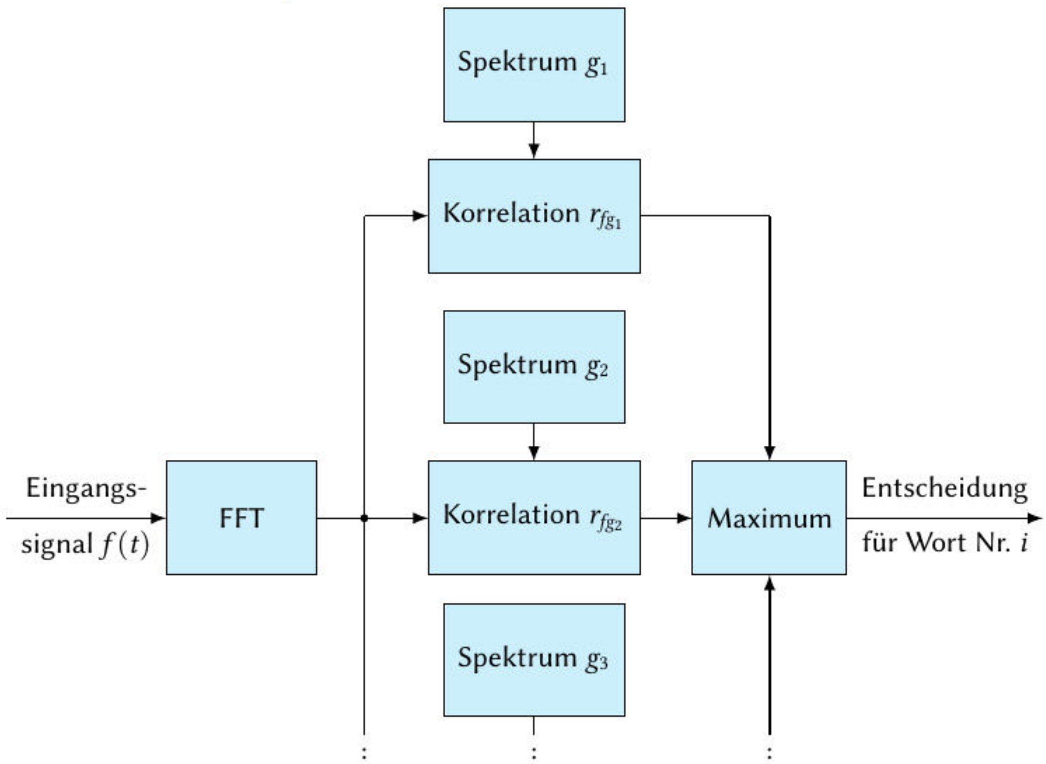
Je höher die Standardabweichung der beiden Signale, desto höher ist ihre Kovarianz. Man teilt daher die Kovarianz durch die Standardabweichungen σ_f und σ_g und erhält so den **Korrelationskoeffizienten** nach Bravais-Pearson:

$$r_{fg} = \frac{\sigma_{fg}}{\sigma_f \cdot \sigma_g} \quad \text{mit}$$

$$\sigma_f^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (f(t) - \mu_f)^2 \, dt \quad \text{bzw.} \quad \sigma_f^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n} (f_k - \mu_f)^2$$

- r_{fg} nahe an 1 bedeutet eine hohe Ähnlichkeit (**positive Korrelation**).
- r_{fg} nahe an 0 bedeutet keine Ähnlichkeit (**keine Korrelation**).
- r_{fg} nahe an −1 bedeutet eine "Anti-Ähnlichkeit" (**negative Korrelation**).

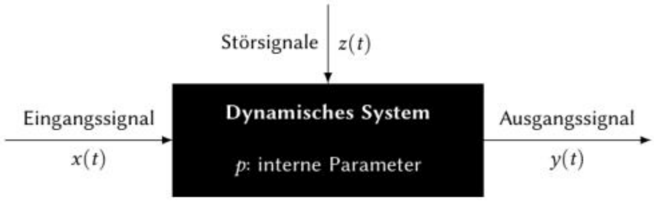
9.8 *Architektur des Spracherkenners (Folie 28)*



10 12_Lineare_Systeme

10.1 *Was ist ein Dynamisches System? (Folie 4)*

Ein dynamisches System ist eine Black Box, die zeitabhängige Eingangssignale x(t) in zeitabhängige Ausgangssignale y(t) umwandelt, z.B. Schaltkreise, Neuronen, Programme, etc.



Die Ausgangsgrößen können zusätzlich von externen, nicht beeinflussbaren Störgrößen z(t) und von internen Parametern p x abhängen.

Systemtypen

Durch den hohen Abstraktionsgrad des Systembegriffs kann man das Verhalten äußerst unterschiedlicher Systeme modellieren, z.B. Tiere, Herden, Fahrzeuge, Märkte, Unternehmen, Gesellschaften.

- **Zeitinvariante** oder **stationäre Systeme:** die Umwandlung von Eingangssignalen in Ausgangssignale ändert sich zeitlich nicht (d.h. die internen Parameter bleiben konstant).
- **Eingrößensysteme:** Systeme mit nur einem Eingangs- und einem Ausgangssignal.
- **Kausale Systeme:** Ein System ist kausal, wenn das Ausgangssignal nur vom momentanen Eingangswert und von vergangenen Eingangswerten abhängt.
- **Speicherfreie Systeme:** das Ausgangssignal hängt nur vom momentanen Eingangssignal ab. Bei Systemen mit Speicher hängt das Ausgangssignal auch von vergangenen Werten des Eingangssignal ab.

Lineare Systeme

Definition: Wird auf den Eingang (oder die Eingänge) eines Systems ein sinusförmiges Signal beliebiger Frequenz gegeben und erscheint am Ausgang lediglich ein sinusförmiges Signal genau dieser Frequenz, so ist der Prozess **linear**, anderenfalls **nichtlinear**.

- Ob eine oder mehrere neue Frequenzen hinzu gekommen sind, erkennt man exakt nur im Frequenzbereich.
- Die Sinus-Schwingung des Ausgangssignals darf sich jedoch in Amplitude und Phase ändern. Die Amplitude kann also größer werden (Verstärkung) oder kleiner (Dämpfung). Die Phasenverschiebung ist eine zeitliche Verschiebung der Ausgangs-Sinus-Schwingung gegenüber der Eingangs-Sinus-Schwingung.

Beispiele: Leitung für elektrische Signale, Vakuum für elektromagnetische Strahlung, Luft für Schall, Kamerabild, Schaltungen aus Widerständen, Kondensatoren und Spulen.

Lineare und nichtlineare Systeme

- Nichtlineare Systeme erzeugen Verformungen des Sinussignals, die im Frequenzbereich zusätzliche Frequenzen, also nichtlineare Verzerrungen hervorrufen.
- Soll der Frequenzbereich eines Signals verändert - z.B. in einen anderen Bereich verschoben - werden, so gelingt dies nur durch nichtlineare Systeme.
- Sollen die in einem Signal enthaltenen Frequenzen auf keinen Fall verändert oder keinesfalls neue hinzugefügt werden, so gelingt dies nur durch lineare Systeme.
- Lineare Systeme sind das „Arbeitspferd“ der Signalverarbeitung. Sie lassen sich sehr genau analysieren.
- Das Verhalten linearer Systeme lässt sich durchweg leichter verstehen als das nichtlinearer Systeme. Diese können sogar zu chaotischem, d.h. prinzipiell nicht vorhersagbarem Verhalten führen.

Proportionalsysteme

Interessanterweise lassen sich alle real vorkommenden linearen Systeme aus wenigen elementaren Systemen zusammensetzen. Das einfachste lineare System ist das **Proportionalsystem**: den Ausgangswert erhält man durch Multiplikation des Eingangssignals mit einer Konstanten:

$$y(t) = K \cdot x(t).$$

- Das Proportionalsystem erfüllt die Linearitätsbedingung: die Amplitude jeder eingehende Sinusschwingung wird um den gleichen Faktor K verstärkt oder gedämpft, andere Frequenzen entstehen nicht.
- Proportionalsysteme sind speicherlos.
- Eine exakt lineare Verstärkung lässt sich technisch immer nur über einen bestimmten Wertebereich realisieren, im Analogen beliebig aufwendig, im Digitalen sehr einfach.

Verzögerungsglieder

- **Verzögerungsglieder** (auch Totzeitglieder) verschieben das Eingangssignal auf der Zeitachse um die Totzeit T_t nach rechts:

$$y(t) = x(t - T_t)$$

- Das Ausgangssignal ist phasenverschoben, d.h. zeitlich verzögert gegenüber dem Eingangssignal. Nach dem ersten Verschiebungssatz (s. Vorlesung 8) gilt mit $x(t) = \cos(\omega t - \varphi)$:

$$y(t) = \cos(\omega t - \varphi - T_t) = e^{-i\omega T_t} \cdot \cos(\omega t - \varphi)$$

  d.h. die Amplitude und Frequenz der Eingangs-Sinus-Schwingung bleibt unverändert, nur die Phase ändert sich um den Phasenfaktor $e^{-i\omega T_t}$. Damit ist auch dieses System linear.
- Während es in der Analogtechnik kaum möglich ist, beliebige Signale präzise um einen gewünschten Wert zu verzögern, gelingt dies mit der digitalen Signalverarbeitung sehr einfach.

Addition zweier Signale

- Auch die Addition zweier Signale ist ein linearer Prozess:

  $$y(t) = x_1(t) + x_2(t).$$

  Werden zwei Sinus-Schwingungen addiert, so enthält das Ausgangssignal genau diese beiden Frequenzen. Es sind keine neuen hinzugekommen, und damit ist der Prozess linear.
- Durch Addition, Verzögerung und Multiplikation mit einer Konstanten kann man aus diesen Elementarsystemen komplexere lineare Eingrößensysteme zusammensetzen:

  $$y(t) = K_1 \cdot x(t) + K_2 \cdot x(t - T_2) + K_3 \cdot x(t - T_3) + \cdots$$

- Man kann zeigen, dass jedes praktisch realisierbare digitale System so zusammengesetzt werden kann. Bei analogen System kommen noch zwei Grenzfälle hinzu: Differenzierer und Integrierer.

Differenzierer

Das Ausgangssignal eines **Differenzierers** ist die Ableitung des Eingangssignals nach der Zeit:

$$y(t) = \frac{d}{dt}x(t).$$

Auch Differenzierer sind lineare Systeme, denn es gilt:

$$\frac{d}{dt}\cos\omega t = -\omega \sin\omega t \quad \text{und} \quad \frac{d}{dt}\sin\omega t = \omega \cos\omega t$$

d.h. die Frequenz einer Sinusschwingung ändert sich nicht, nur ihr Betrag um ω und ihre Phase um $-\frac{\pi}{2}$.

Allgemein gilt (**Differentiationseigenschaft** der Fouriertransformation):

$$\frac{d}{dt}f(t) \quad \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad i\omega \cdot F(\omega).$$

Eigenschaften des Differenzierers

- Die Ableitung ist groß, wenn sich das Eingangssignal schnell ändert, und klein, wenn sich wenig verändert. Differenzierer eignen sich daher zur Detektion von plötzlichen Ereignissen (z.B. Sprünge oder Kanten im Signal) und zur Unterdrückung eines langsam veränderlichen Hintergrundsignals.
- Beispiele für analoge Differenzierer: Spule (je größer die Stromänderung, desto größer die Induktionsspannung), Kondensatoren (je größer die Spannungsänderung, desto größer der Lade- bzw. Entladestrom).
- Der Differenzierer ist speicherlos.
- Die Ableitung im Frequenzbereich ist besonders einfach: simple Multiplikation um den Faktor $i\omega$!

Integrierer

Das Ausgangssignal eines **Integrierers** ist das Integral des Eingangssignals über die Zeit:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau.$$

Für $y(t_0) = 0$ (Bedingung der anfänglichen Ruhe) verhalten sich Integrierer ebenfalls als lineare Systeme, da in diesem Fall

$$\int_{t_0}^{t} \cos\omega\tau\, d\tau = \tfrac{1}{\omega}\sin\omega t \quad \text{und} \quad \int_{t_0}^{t} \sin\omega\tau\, d\tau = -\tfrac{1}{\omega}\cos\omega t.$$

Allgemein gilt für ein integrierbares Signal $f(t)$ mit Mittelwert 0 die **Integrationseigenschaft** der Fouriertransformation:

$$\int_{-\infty}^{t} f(t)\, dt \quad \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad -\frac{i}{\omega}\cdot F(\omega).$$

Wirkung eines linearen Systems in der Fourierdomäne

- Ein beliebiges Eingangssignal besteht in komplexer Schreibweise aus einzelnen Sinusschwingungen $X(\omega)e^{i\omega t}$:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t}\, d\omega.$$

- Wirkung des Systems auf eine einzelne Sinusschwingung:

$$X(\omega)e^{i\omega t} \quad \rightarrow \quad H(\omega) \cdot X(\omega) e^{i\omega t}.$$

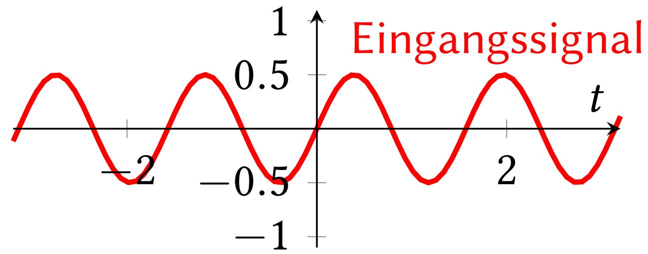
- Das Ausgangssignal ist daher:

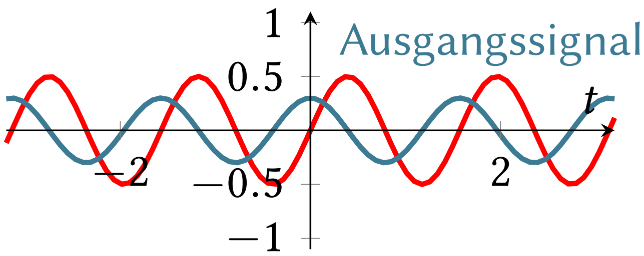
$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) \cdot X(\omega) \cdot e^{i\omega t}\, d\omega.$$

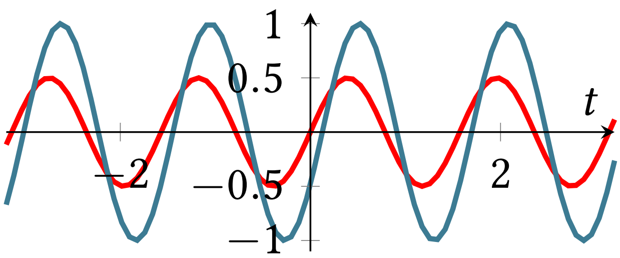
- Die Wirkung eines Systems in der Fourierdomäne ist somit

$$Y(\omega) = H(\omega) \cdot X(\omega).$$

Betrag und Phase des Frequenzgangs







Polardarstellung des Frequenzgangs:

$$H(\omega) = |H(\omega)|e^{i\angle H(\omega)}$$

Amplitudengang: gibt für jede Frequenz an, wie die einzelnen Sinusschwingungen verstärkt oder abgeschwächt werden.

Phasengang: gibt für jede Frequenz an, wie stark die Phase der Sinusschwingungen verschoben wird. Der Phasengang ist meistens negativ, d.h. der Ausgang folgt verzögert dem Eingang.

Frequenzgang des Proportionalsystems und Verzögerungsgliedes

Proportionalsystem: $H(\omega) = K = K \cdot e^{i \cdot 0}$

- Jede Frequenz wird um den gleichen Faktor K verändert, d.h. der Amplitudengang $|(H(\omega)|$ ist konstant K.
- Die Phase der Eingangsschwingung bleibt unverändert, d.h. der Phasengang $\angle H(\omega)$ ist konstant 0.

Verzögerungsglied: $H(\omega) = e^{-i\omega T_t} = 1 \cdot e^{i(-\omega T_t)}$

- Die Amplitude bleibt bei jeder Frequenz unverändert, d.h. der Amplitudengang ist konstant 1.
- Die Phase ist $\angle H(\omega) = -\omega T_t$, d.h. eine Ursprungsgerade mit Steigung $-T_t$.

Frequenzgang des Differenzierers

Differenzierer: $H(\omega) = i\omega = \omega e^{i(-\frac{3}{2}\pi)}$

- Jede Sinussignal wird proportional zu seiner Frequenz verstärkt, d.h. der Amplitudengang ist eine Gerade mit Steigung 1.
- Die Phase der Eingangsschwingung wird um $\frac{3}{2}\pi$ verschoben, d.h. der Phasengang ist konstant $-\frac{3}{2}\pi$.

Integrierer:

Hier lässt sich kein Frequenzgang angeben. Grund: Sinusschwingungen erstrecken sich unendlich weit in die Vergangenheit. Dadurch konvergiert das Integral

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} \sin \omega\tau \, d\tau = -\tfrac{1}{\omega} \cos \omega\tau |_{-\infty}^{t} = -\tfrac{1}{\omega} \cos \omega t + ?$$

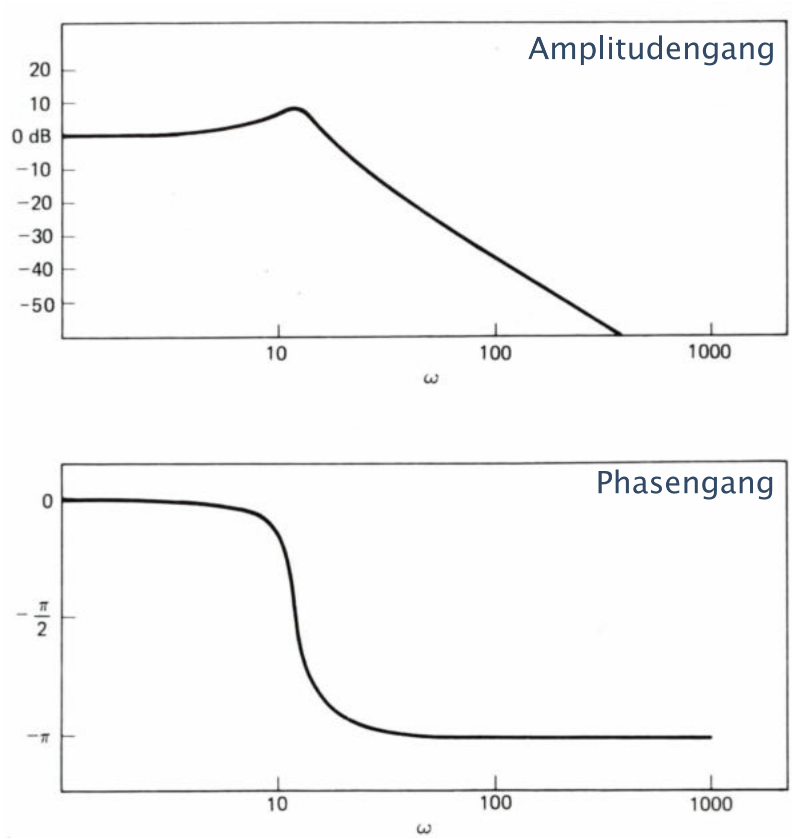
nicht, d.h. der Integrierer hat für Sinus-Input keinen definierten Ausgangswert.

Bode-Diagramme

Bode-Diagramm: Darstellung des Frequenzgangs anhand der Größen $\angle H(\omega)$ und $20\log_{10}|H(\omega)|$ in Abhängigkeit von der logarithmierten Frequenz.

Der Amplitudengang wird in **Dezibel** (dB) gemessen:

- 0 dB = 1
- 20 dB = 10
- 40 dB = 100 usw.
- -20 dB = 0.1
- -40 dB = 0.01 usw.



[Quelle: Oppemheim & Willsky]

11 13_Systemanalyse

Systemanalyse mit Sinusschwingungen

- Messprinzip: Sinusgenerator, Frequenz einstellbar, und 2-Kanal-Oszilloskop
- Ein- und Ausgangsspannung werden gleichzeitig auf dem Bildschirm dargestellt.
- Der Amplitudengang ergibt sich aus dem Verhältnis von Ausgangs- und Eingangsamplitude: $|H(\omega)| = U_{\text{out}}/U_{\text{in}}$.
- Der Phasengang (in rad) berechnet sich aus der zeitlichen Verschiebung Δt beider Kurven als

$$\angle H(\omega) = \omega \cdot \Delta t = 2\pi \cdot f \cdot \Delta t.$$

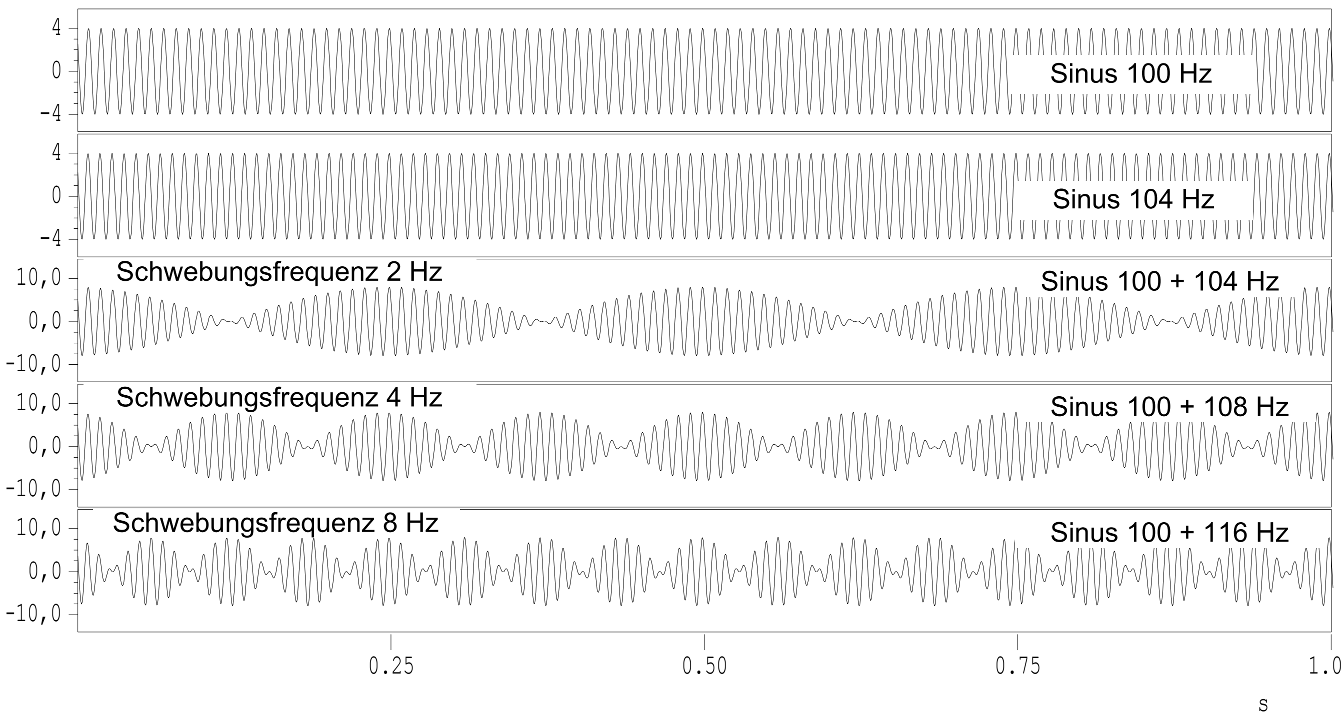
- Wählen Sie zur Messung der Amplituden eine so große Zeitbasis, dass die Wechselspannung als „Balken“ auf dem Bildschirm erscheint.
- Zur Messung der Phasendifferenz stellen Sie genau eine halbe Periode des Eingangssignals mit Hilfe des beliebig einstellbaren Zeitbasisreglers ein und lesen die zeitliche Verschiebung ab.

Einschwingvorgänge bei der Systemanalyse

- Viele Systeme sind selbst schwingungsfähig (z.B. Schwingkreise, Brücken, etc.) und schwingen mit ihrer **Eigenfrequenz**, wenn sie von außen angeregt werden. Ohne äußere Anregung klingt diese Eigenschwingung wieder exponentiell ab.
- In einer realen Messung kann die Eingangsschwingung nicht unendlich weit in die Vergangenheit reichen, sondern muss irgendwann eingeschaltet werden.
- Der Einschaltvorgang erzeugt zusätzlich zur Testfrequenz ein ganzes Band weiterer Frequenzen, die die Eigenschwingungen des Systems anstoßen können.
- Zur Messung der Systemantwort muss daher abgewartet werden, bis die Eigenschwingungen abklingen und das System einen **stationären Zustand** erreicht hat.
- Liegen Anregungs- und Eigenfrequenz nahe beieinander, zeigen sich schwebungsartige Interferenzerscheinungen beider Frequenzen.

Beispiel: Schwebung

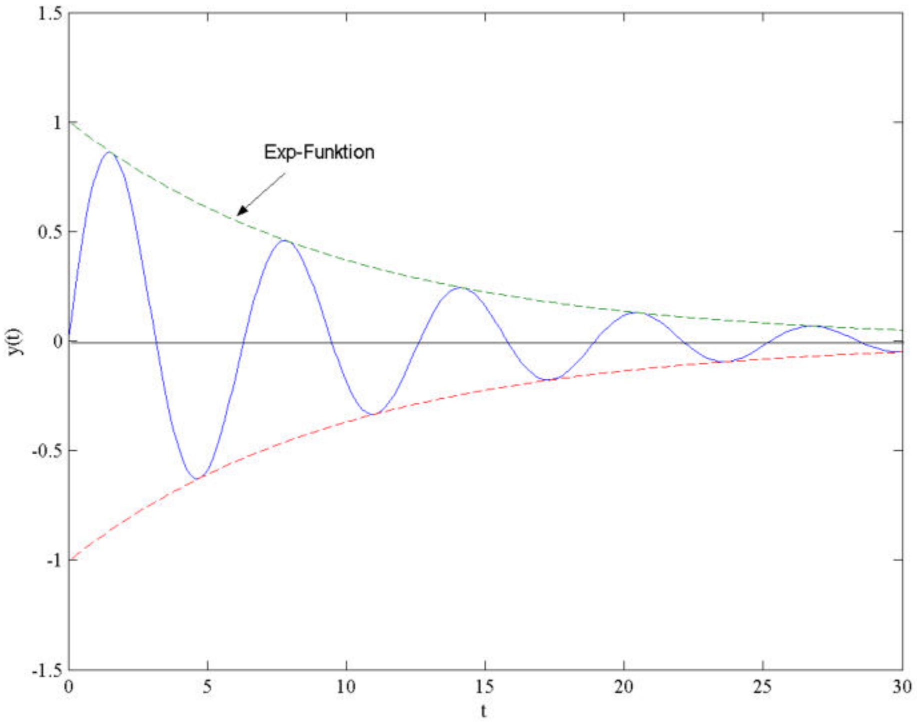
Eine Schwebung entsteht durch Überlagerung zweier Sinusschwingungen annähernd gleicher Frequenz. Sie äußert sich in einer periodischen Verstärkung und Abschwächung mit der Schwebungsfrequenz $\omega_S = \frac{1}{2}|\omega_1 - \omega_2|$.



Impulsantwort

Die Antwort $h(t)$ eines Systems auf den Dirac-Impuls als Eingangsgröße heißt **Impulsantwort** oder **Gewichtsfunktion** des Systems.

Beispiel: Fahrzeugfederung bei Schlagloch



Systemanalyse mit dem Dirac-Impuls

- Wie in Vorlesung 8–20 gezeigt, enthält der Dirac-Impuls alle Frequenzen gleichzeitig und mit gleicher Amplitude:

$$\delta(t) \quad \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad 1.$$

- Die Fouriertransformierte der Impulsantwort berechnet sich also nach Vorlesung 10–23 als

$$Y(\omega) = H(\omega) \cdot X(\omega) = H(\omega) \cdot \mathcal{F}\{\delta(t)\} = H(\omega) \cdot 1 = H(\omega),$$

  d.h. **die Fouriertransformierte der Impulsantwort ist der Frequenzgang!**

- Damit ergibt sich eine ganz einfache Messvorschrift für den Frequenzgang: 1. Impulsantwort messen; 2. Impulsantwort numerisch in den Frequenzbereich transformieren. Statt einem Zeitaufwand im Stundenbereich ist das im Minutenbereich erledigt und deutlich genauer.

Impulsantwort als Testsignal

- Ähnlich wie der Frequenzgang im Frequenzbereich charakterisiert die Impulsantwort ein lineares System vollständig im Zeitbereich, da beide ein Transformationspaar bilden:

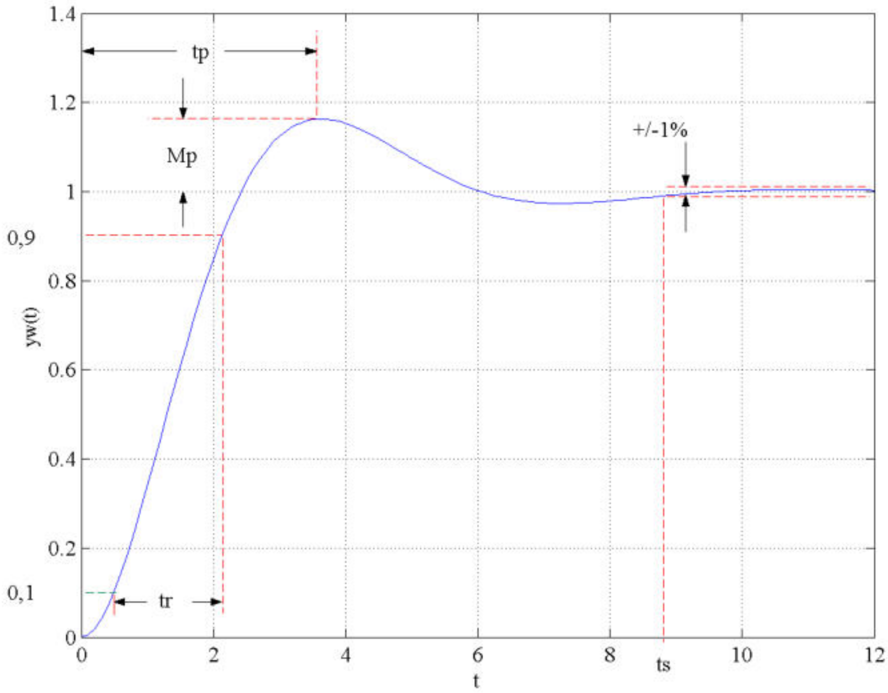
$$h(t) \quad \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad H(\omega).$$

- Der Nachteil des Dirac-Impulses als Testsignal ist seine geringe Energie, weil er so kurz andauert. Sie lässt sich nur vergrößern, indem seine Höhe vergrößert wird (z.B. 100 V). Ein solcher Spannungsimpuls könnte jedoch das System (z.B. Lautsprecher, Eingangs-Mikroelektronik) zerstören.
- Achtung: der korrekte Phasengang ergibt sich nur, wenn der Dirac-Impuls genau bei 0 liegt. In der Praxis hat der Impuls aber eine endliche Dauer und ist so leicht um seine Halbwertsbreite Δt verschoben. Dies führt nach dem Verschiebungssatz zu einem zusätzlichen Phasenfaktor $e^{-i\omega\Delta t}$, der rechnerisch kompensiert werden muss.

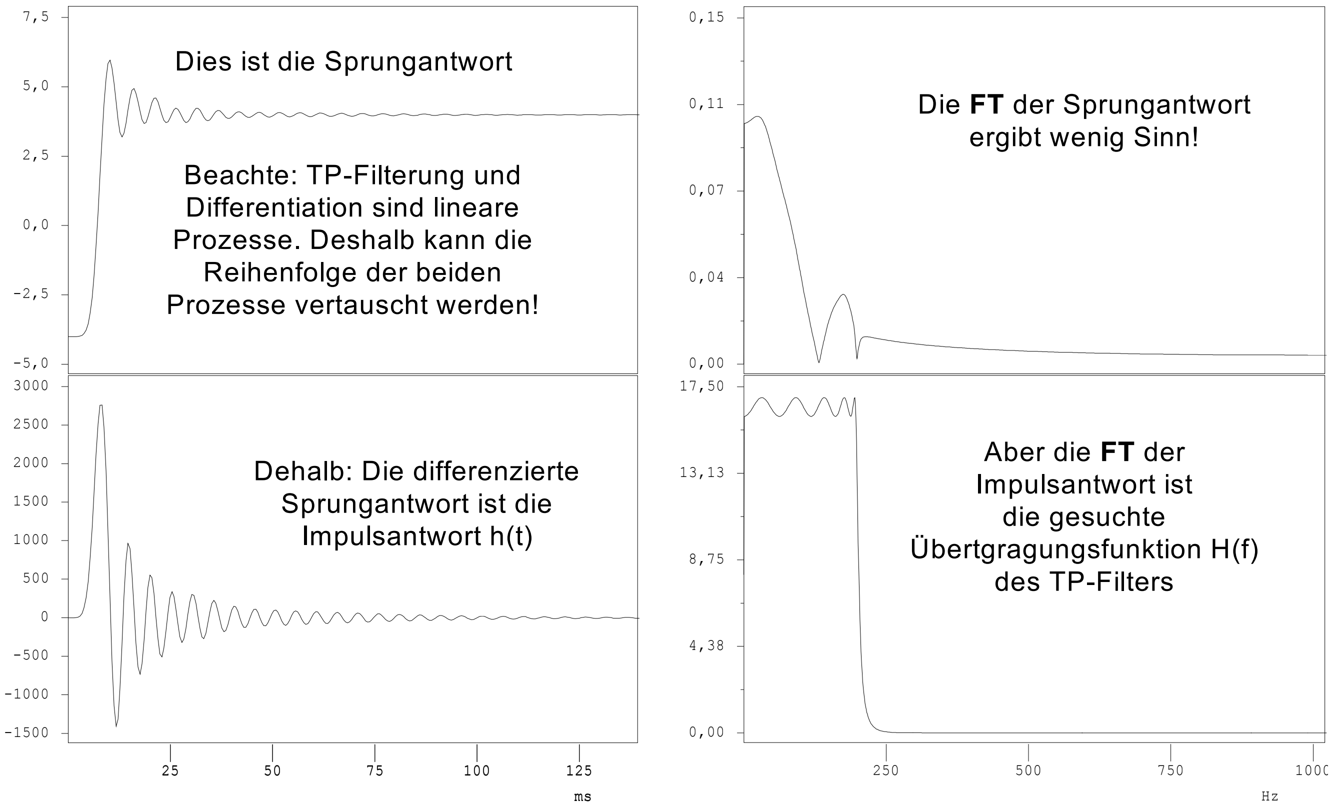
Sprungantwort

Die Antwort eines Systems $g(t)$ auf die Sprungfunktion $\sigma(t)$ als Eingangsgröße heißt **Sprungantwort** oder **Übergangsfunktion** des Systems.

Beispiel: Fahrzeugfederung an Bordsteinkante



Berechnung der Impulsantwort aus der Sprungantwort



Quelle: Karrenberg, 2012

Systemanalyse mit der Sprungantwort

1. Sprungantwort messen
2. Sprungantwort numerisch differenzieren ergibt Impulsantwort
3. Impulsantwort numerisch in den Frequenzbereich transformieren ergibt den Frequenzgang.

Vorteile:

- Zeitaufwand ist genauso kurz wie bei der Systemanalyse mit der Impulsantwort.
- Die Sprungfunktion besitzt genügend Energie auch bei kleiner Sprunghöhe - sie zerstört also nicht die Mikroelektronik eines empfindlichen Systems.
- Ein Sprungsignal ist extrem leicht zu erzeugen.

Bedeutung der Impulsantwort

- Der Frequenzgang charakterisiert ein lineares System vollständig: man weiß für jede Eingangs- Sinusschwingung, um welchen komplexen Faktor sie verändert wird. Da jedes technisch realisierbare Signal aus Sinusschwingungen zusammengesetzt werden kann, weiß man so die Systemantwort auf jedes beliebige Signal.
- Die Impulsantwort ist die Darstellung der Frequenzgangs im Zeitbereich. Da bei der Fouriertransformation keine Information verloren geht, muss auch die Impulsantwort das lineare System vollständig charakterisieren. Damit ist die Impulsantwort ebenso grundlegend wichtig wie der Frequenzgang.
- Lässt sich jedes beliebige Signal statt aus Sinusschwingungen auch aus Dirac-Impulsen zusammensetzen?

Darstellung eines Signals als gewichtete Summe von Dirac-Impulsen

Siebeigenschaft des Dirac-Impulses am Ursprung (s. Vorlesung 8):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) \cdot f(\tau)\, d\tau = f(0).$$

Um t verschobener Impuls:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau - t) \cdot f(\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau') \cdot f(\tau' + t)\, d\tau' = f(t)$$

Mit $\delta(\tau - t) = \delta(t - \tau)$ (Spiegelsymmetrie, $\delta(-\tau) = \delta(\tau)$):

$$\boxed{f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot \delta(t - \tau)\, d\tau} \quad \text{(vgl.} \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot e^{i\omega t}\, d\omega).$$

Jedes Signal ist also eine gewichtete Summe von an die Stelle τ verschobenen Dirac-Impulsen mit dem Gewicht $f(\tau)$.

Faltungsintegral

- Die Zerlegung in Dirac-Impulse als Elementarsignale ist also eine Alternative zur Zerlegung in Sinus- Schwingungen in der Fouriertransformation.
- Es gilt genauso: **kennt man die Antwort des Systems auf jeden zeitverschobenen Dirac-Impuls, so weiß man die Systemantwort auf jedes beliebige Signal**.
- Bei einem zeitinvarianten System bleibt die Impulsantwort immer gleich, d.h. die Antwort auf einen um τ zeitverschobenen Dirac-Impuls ist einfach die zeitverschobene Impulsantwort:

$$\delta(t-\tau) \quad \rightarrow \quad h(t-\tau).$$

- Die Systemantwort auf ein beliebiges Eingangssignal $x(t)$ ist also

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot h(t-\tau)\, d\tau \quad \textbf{(Faltungsintegral)}$$

Berechnung der Systemantwort

Es gibt also zwei alternative Wege zur Berechnung der Systemantwort $y(t)$ auf ein beliebiges Eingangssignal $x(t)$:

- Fouriertransformation $x(t) \quad \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad X(\omega)$ in den Frequenzbereich, dann Multiplikation mit dem Frequenzgang $H(\omega)$:

$$Y(\omega) = H(\omega) \cdot X(\omega);$$

  Rücktransformation in den Zeitbereich $Y(\omega) \quad \bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\circ \quad y(t)$.

- **Faltung** des Eingangssignals mit der Impulsantwort $h(t)$ des Systems:

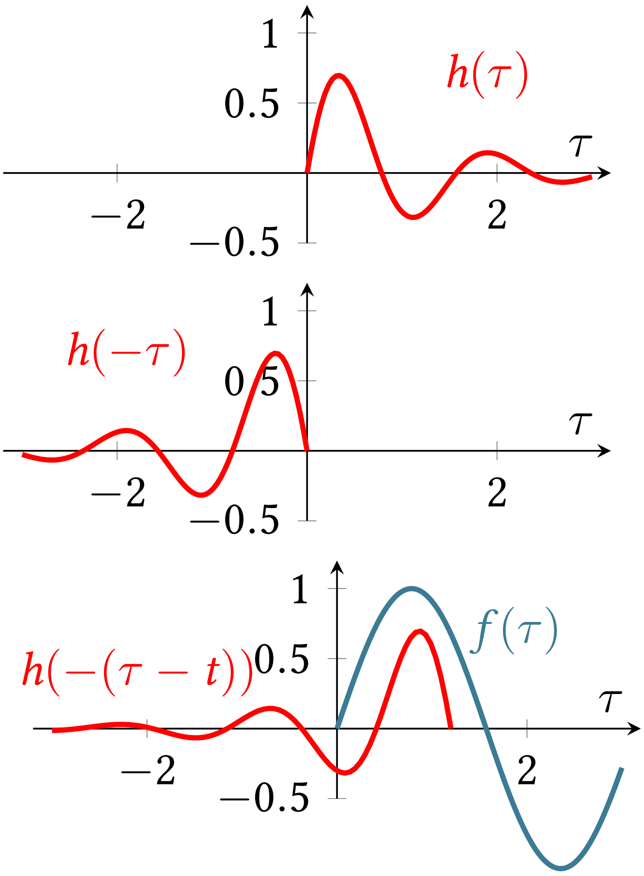
$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot h(t-\tau)\, d\tau$$

$$\text{Kurzform:} \quad y(t) = h(t) * f(t).$$

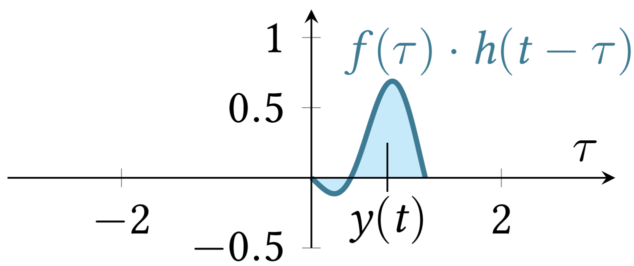
Je nach Anwendung ist der eine oder der andere Weg vorteilhafter.

12 14_Filter

Interpretation der Faltung $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot h(t-\tau)\, d\tau$



1. Impulsantwort $h(\tau)$ um t nach links verschieben.
2. Verschobene Impulsantwort an y-Achse spiegeln.
3. Punktweise mit dem Signal $f(\tau)$ multiplizieren.
4. Integral ergibt Ausgangswert $y(t)$.



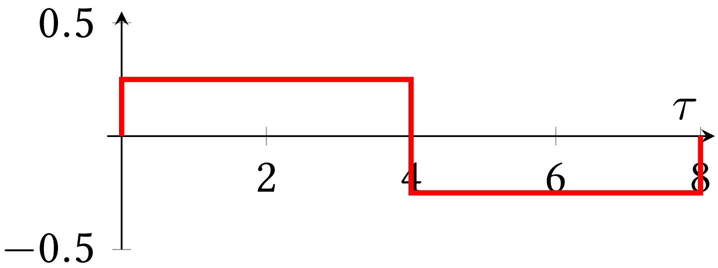
[Tafel]

Wie wirkt das System auf das Eingangssignal?

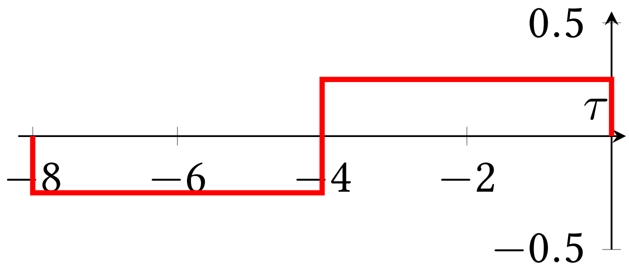
- Die gespiegelte Impulsantwort wird wie ein Fenster (s. Windowing, Vorl. 7) über das Signal geschoben, d.h. sie wirkt wie eine Fensterfunktion ("Flip and Slide") [Video].
- Im Unterschied zum Windowing liegen die einzelnen Fenster aber unendlich dicht beieinander - für jeden Zeitpunkt gibt es ein Fenster.
- In jedem Fenster wird die gespiegelte Impulsantwort mit dem dortigen Signal **korreliert** (s. Vorl. 9).
- Sind sich Signal und gespiegelte Impulsantwort ähnlich, so ist die Korrelation hoch und damit ergibt sich eine hohe Amplitude des Ausgangssignals, ansonsten ist die Ausgangsamplitude niedrig.
- Das System wirkt also wie ein Detektor für das Vorkommen der gespiegelten Impulsantwort.

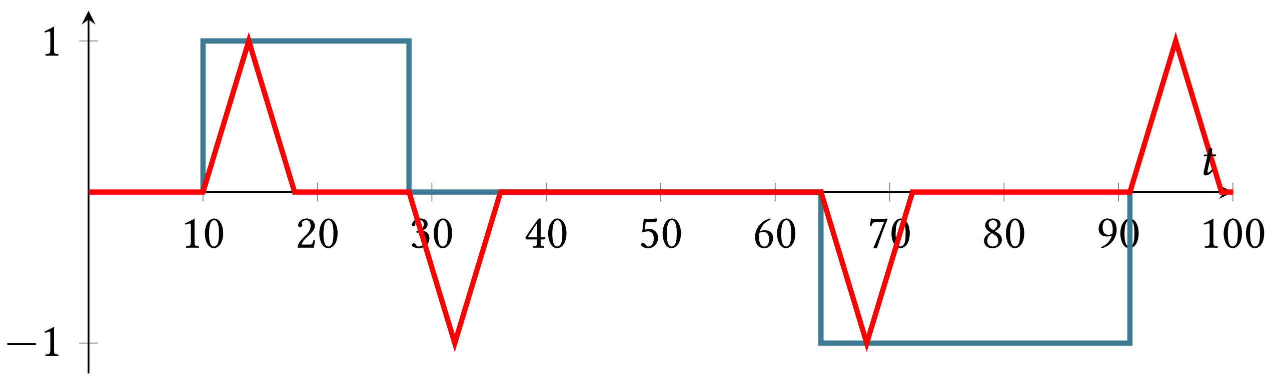
Beispiel: Kantenfilter

Impulsantwort:



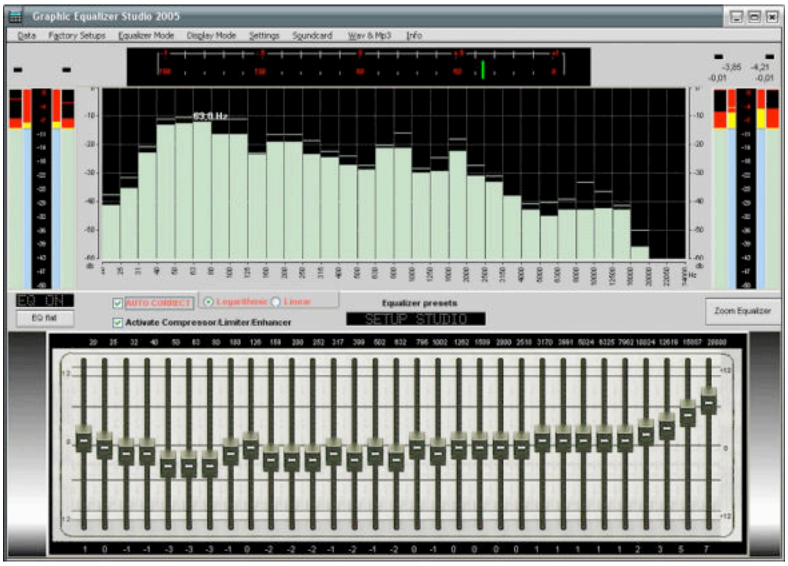
Gespiegelte Impulsantwort:





Filterung

- Die Wirkung eines Systems im Frequenzbereich ist rein multiplikativ.
- Bei vielen Anwendungen möchte man die relativen Amplituden der Frequenzkomponenten in einem Signal verändern oder einige ganz ausschalten.



- Dieser Prozess wird als **Filterung** bezeichnet.
- Je nach Anwendung kann die gewünschte Wirkung des Filters durch Anpassung des Frequenzgangs, d.h. des Faktors $H(\omega)$ erreicht werden.

Tiefpass

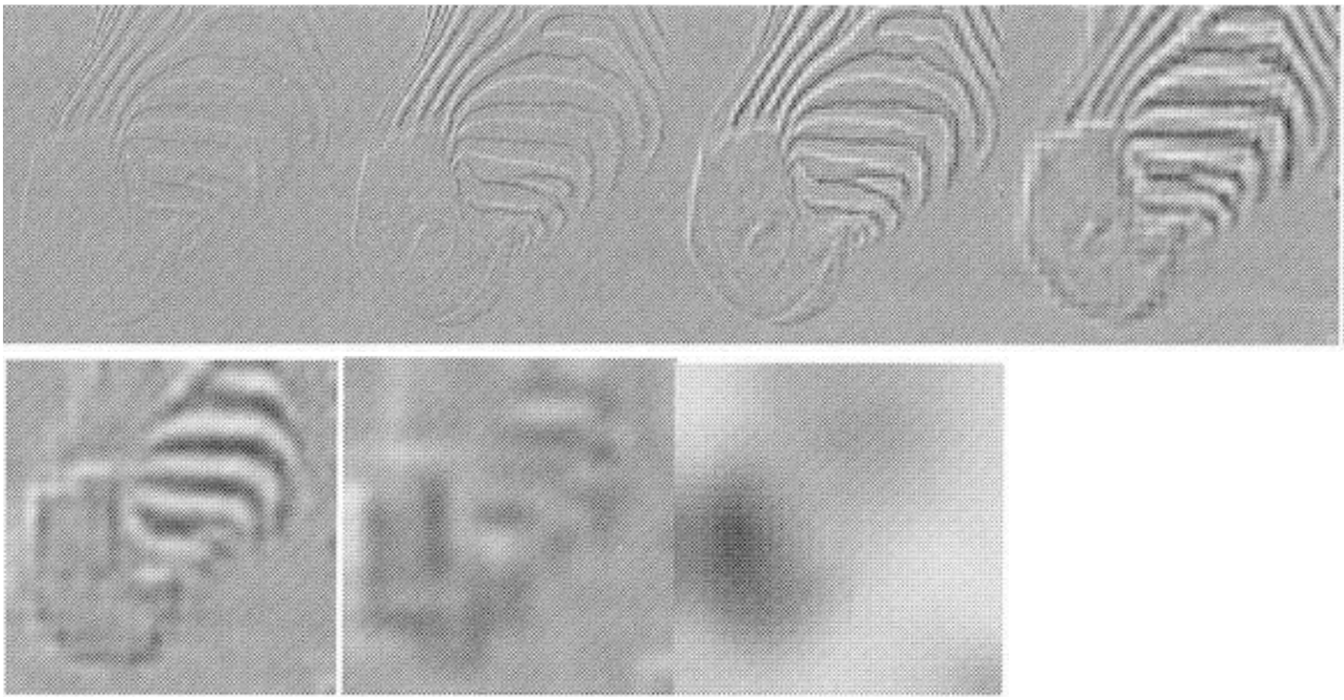
[Quelle: Burger & Burge]

Tiefpässe unterdrücken hohe Frequenzen (d.h. schnell veränderliche Signalanteile) und lassen tiefe Frequenzen durch.

Hochpass

Hochpässe unterdrücken niedrige Frequenzen (d.h. langsam veränderliche Signalanteile) und lassen hohe Frequenzen durch.

Bandpass



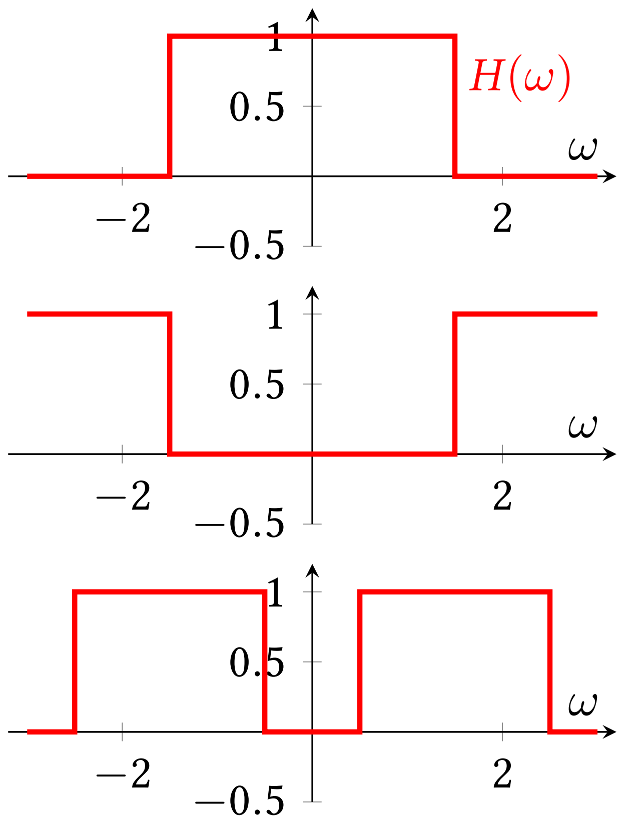
Bandpässe lassen nur einen bestimmten Ausschnitt (d.h. ein Band) des Spektrums durch.

Ideale frequenzselektive Filter

Bei idealen frequenzselektiven Filtern werden bestimmte Frequenzen werden unverändert durchgelassen (d.h. $H(\omega) = 1$), andere vollständig ausgeblendet (d.h. $H(\omega) = 0$).

Man spricht vom **Durchlassbereich** und **Sperrbereich** des Filters. Den Übergang von Sperr- zu Durchlassbereich markiert die **Grenzfrequenz**.

Ideale Filter sind extrem scharf im Frequenzbereich lokalisiert. Nach der Unschärferelation führt dies zu einer weiträumigen "Verschmierung" im Zeitbereich.



Bandpass und Bandsperre lassen sich aus Tief- und Hochpässen zusammensetzen.

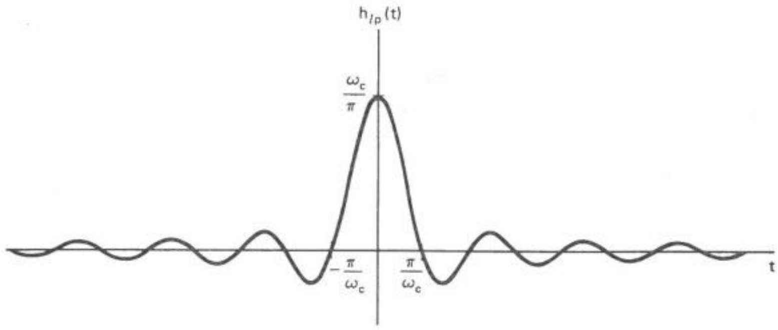
Ideale Filter im Zeitbereich

Eigenschaften;

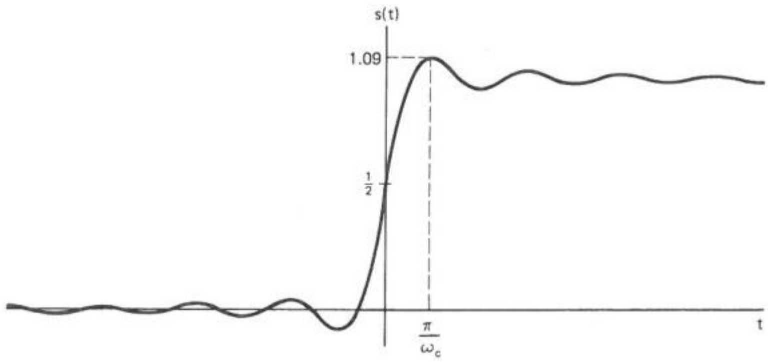
- Nichtkausal
- Unendlich große Impulsantwort (Sinc-Funktion)
- Überschwingen
- Oszillierendes Einschwingen.

Ein solches Verhalten ist im Zeitbereich oft unerwünscht, daher werden Filter häufig mit einem graduellen Übergang von Durchlass- zu Sperrbereich entworfen.

Impulsantwort:



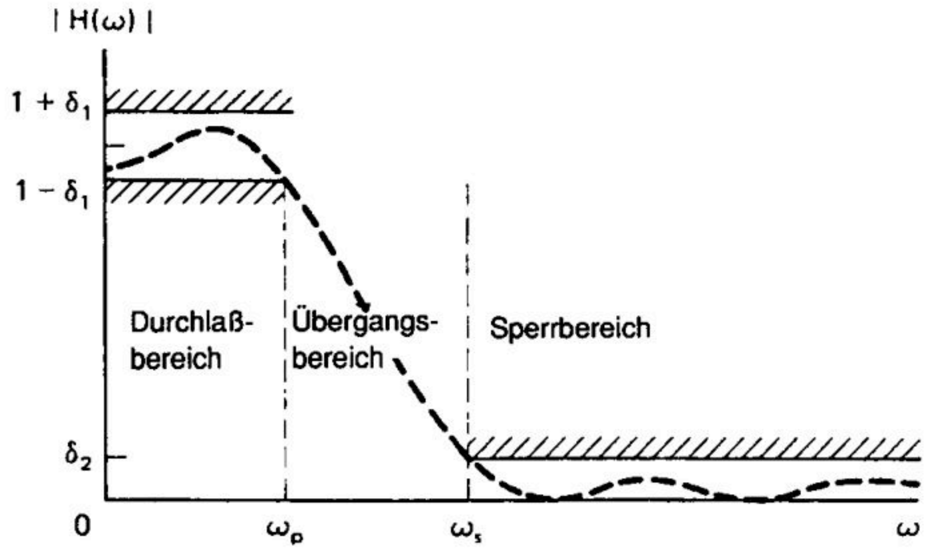
Sprungantwort:



Nichtideale frequenzselektive Filter

Um Überschwinger und Oszillationen zu vermeiden, lässt man Toleranzen im Durchlass- und Sperrbereich und einen Übergangsbereich zu.

- δ_1: Welligkeit im Durchlassbereich
- δ_2: Welligkeit im Sperrbereich
- ω_p: Durchlasskante
- ω_s: Sperrkante



[Quelle: Oppenheim & Willsky.]

Da ideale Filter nichtkausal sind, werden sie für Echtzeitanwendungen oft durch nichtideale, aber kausale Filter angenähert.

Beispiel: Butterworth-Filter

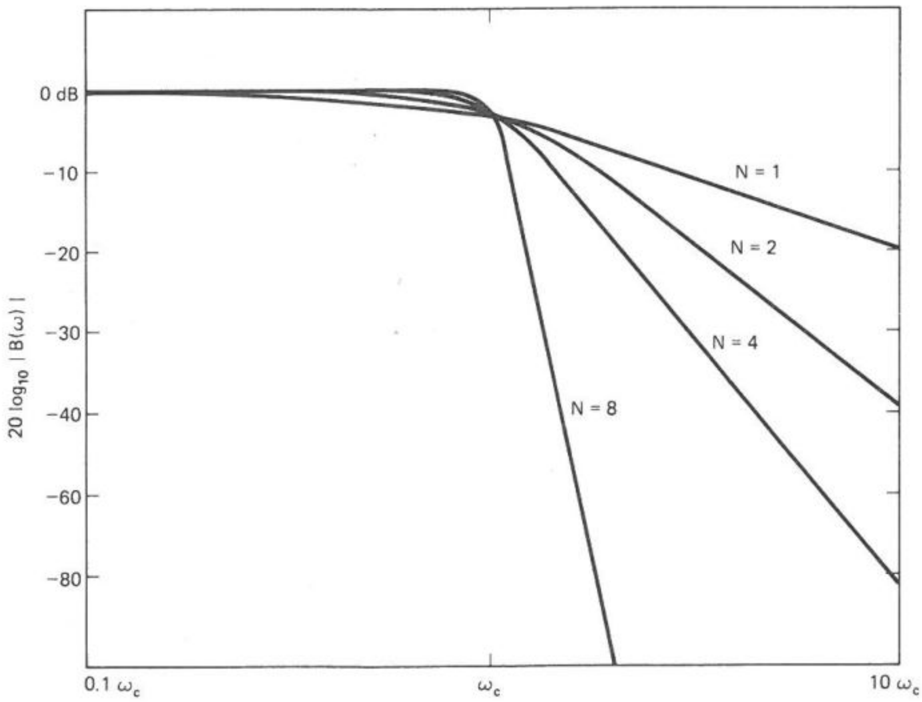
Impulsantwort:

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\omega/\omega_c)^{2N}}$$

N: Ordnung des Filters.

Merkmale:

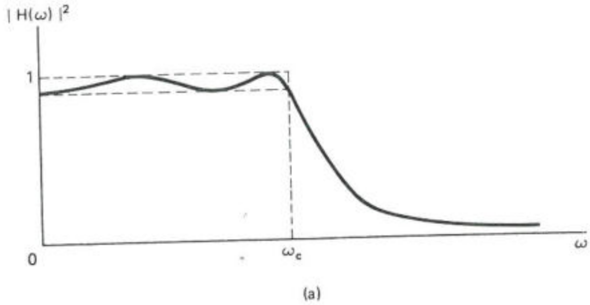
- Monotone Betragskurve
- Maximal flacher Frequenzgang



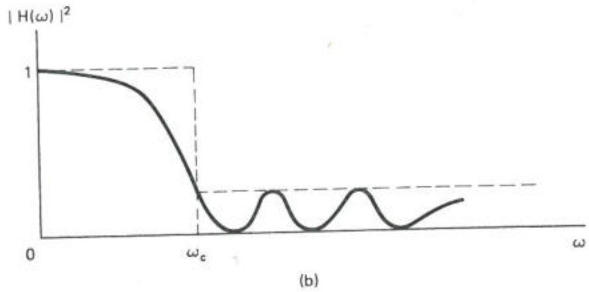
Je höher die Ordnung, desto aufwändiger wird die Implementierung des Filters im Zeitbereich.

Beispiel: Tschebyscheff- und elliptische Filter

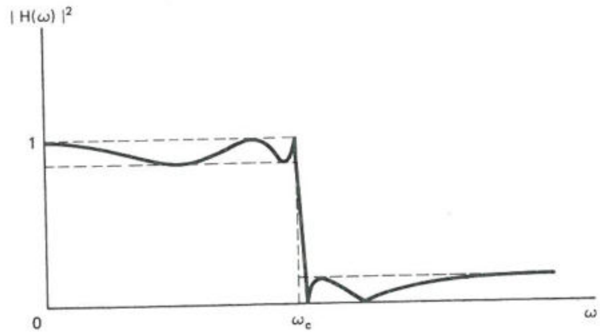
Tschebyscheff: gleiche Welligkeit im Durchlassbereich



Tschebyscheff: gleiche Welligkeit im Sperrbereich



Elliptisch: gleiche Welligkeit im Durchlass- und Sperrbereich



13 16_Digitalisierung

Zeitliche Abtastung

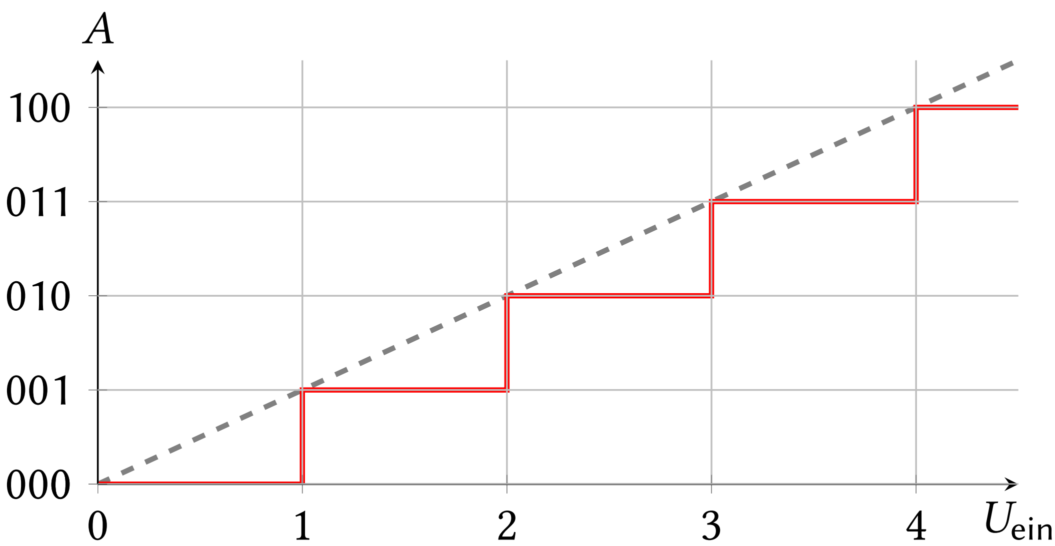
- Für die digitale Signalverarbeitung müssen die von den Sensoren gelieferten analogen Spannungen in eine digitale Form, d.h. in eine binäre Zahlenkette umgewandelt werden. Dies geschieht durch einen **Analog-Digital-(A/D)-Wandler**.
- Das Signal wird dazu in regelmäßigen Abständen zeitlich abgetastet. Jeder A/D-Wandler braucht dazu eine bestimmte Zeit. Je kürzer diese ist, desto höher kann die **Abtastfrequenz**, gemessen in Abtastwerten (Samples) pro Sekunde bzw. Hz, sein.
- Im Idealfall findet die A/D-Wandlung in immer exakt gleichen Zeitabständen statt. Durch zufällige Variationen der Abstände tritt jedoch **Jitter** auf, der zu einer Verfälschung des digitalen Signals führt.

Quantisierung des Abtastwertes

- Die zeitlich abgetasteten Signale müssen auch in ihren Werten quantisiert werden. Dies begrenzt durch die Anzahl der Quantisierungsstufen die Auflösung des Eingangssignals.
- Beim Ausgangssignal zeigt sie sich im Ziffernschritt auf der niederwertigsten Stelle (**Least Significant Bit – LSB**). Die infolge der Quantisierung entstehende Abweichung nennt man **Quantisierungsfehler**. Hinzu kommt auch noch das Wärmerauschen der Elektronik.
- Der Jitter führt zu weiteren Fehlern, die die Quantisierungsstufe nicht überschreiten sollten. So darf z.B. der Jitter bei einem 1 kHz-Signal und 8-Bit-Abtastung nicht mehr als 1.2 ms betragen, bei 16-Bit-Abtastung nicht mehr als 4.9 µs.
- **Dynamikumfang:** Quotient aus dem größten und kleinsten darstellbaren Wert., üblicherweise in Dezibel angegeben. Beispiele: 8-Bit-A/D-Wandler - 48 dB (entspricht Audiocassette), CD mit 16 Bit - 96 dB.

Quantisierungskennlinie

Die **Quantisierungskennlinie** beschreibt den Zusammenhang zwischen der Eingangsspannung U_{ein}und dem Ausgangssignal A eines Quantisierers. Ihr Verlauf ist treppenförmig.



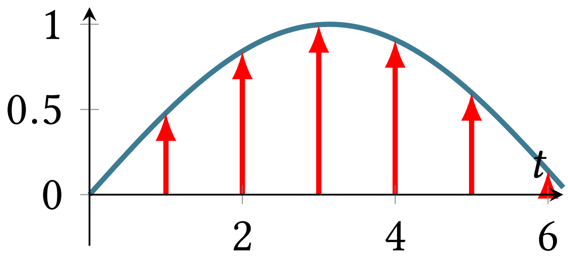
Der Messbereich des Eingangssignals wird durch den Quantisierer in Intervalle unterteilt. Die **Quantisierungsstufe** ist der Ausgabewert, auf den alle Werte aus einem Intervall abgebildet werden.

Lineare und nichtlineare Quantisierung

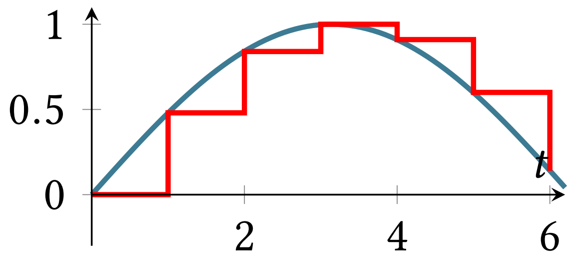
- Eine **lineare Quantisierungskennlinie** hat gleiche breite Stufen über den gesamten Eingangsbereich; im Grenzfall extrem kleiner Stufen erscheint sie als Gerade. Solche Kennlinien werden in der Messtechnik und in der Telekommunikation bei hochwertigen Signalen genutzt.
- Eine **nichtlineare Quantisierungskennlinie** hat innerhalb ihres Wertebereiches eine unterschiedlich feine Stufung. Solche Kennlinien werden bei Audio- und Videosignalen verwendet, um diese zu komprimieren. Das menschliche Gehör nimmt durch eine feinere Stufung bei leisen Signalen diese in geringerem Umfang wahr als bei linearer Kennlinie.
- Fehler in der Quantisierungskennlinie sind eine weitere Fehlerquelle in digitalen Signalen, z.B. Nullpunktfehler, Verstärkungsfehler, ungewollte Nichtlinearitäten, unterschiedlich breite und hohe Stufen.

Pulsabtastung und “Sample and Hold”

Pulsabtastung:



Sample and hold:

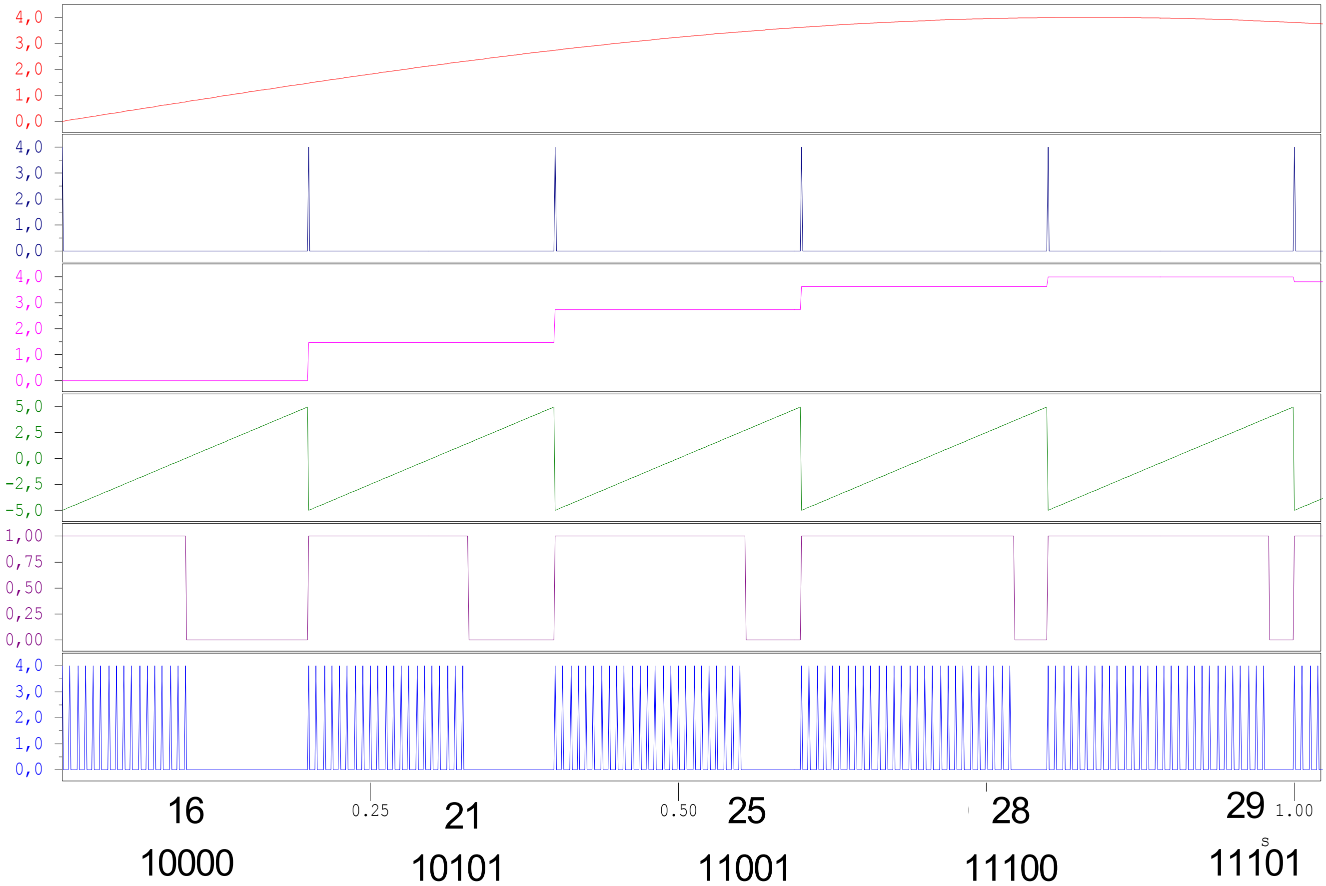


- **Pulsabtastung:** Bei der Abtastung ist man nur an Signalwerten an diskreten Zeitpunkten interessiert. Die Pulsabtastung dient v.a. als theoretisches Modell.
- **Sample and hold:** In der Praxis lassen sich enge Pulse nur schwer erzeugen und übertragen. Es ist oft bequemer, das abgetastete Signal als Haltewert zu erzeugen. Der Zeitraum, in dem der Wert gehalten wird, wir meist von der Auswerteelektronik des A/D-Wandlers gebraucht.

Verfahren der A/D-Wandlung

- **Zählverfahren:** es wird abgezählt, wie oft man eine dem LSB entsprechende Referenzspannung addieren muss, um die Eingangsspannung zu erhalten. Die Zahl der Schritte ist gleich dem Ergebnis. Es geht dementsprechend langsam, der Aufwand dafür ist aber klein.
- **Parallelverfahren:** man vergleicht die Eingangsspannung gleichzeitig mit n Referenzspannungen und stellt fest, zwischen welchen beiden sie liegt. Man braucht dafür nur einen Schritt, der Aufwand ist aber sehr groß.
- **Wägeverfahren:** man vergleicht zuerst die Eingangsspannung mit einer Referenzspannung, die die Hälfte des Wertebereiches markiert (bestimmt die höchste Stelle der Binärzahl). Ist die Spannung größer, setzt man die höchste Stelle auf Eins und subtrahiert die Referenzspannung. Den Rest vergleicht man mit der nächstniedrigeren Stelle usw. Man benötigt also so viele Vergleichsschritte, wie die Zahl Stellen besitzt und ebenso viele Referenzspannungen.

Beispiel für ein Zählverfahren: Sägezahnverfahren



Quelle: Karrenberg, 2012

Hilfsmittel: Modulationseigenschaft der Fouriertransformation

Beispiel: Verschiebungssätze

$$f(t-a) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad e^{-i\omega a} \cdot F(\omega)$$

$$f(t) \cdot e^{iat} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(\omega - a)$$

Die gleiche Verschiebungsoperation im Zeit- wie im Frequenzbereich führt zum gleichen Effekt im jeweils anderen Bereich.

Für die Faltung haben wir gesehen, dass gilt:

$$h(t) * f(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad H(\omega) \cdot F(\omega).$$

Auch hier gilt die Umkehrung (**Modulationseigenschaft**):

$$h(t) \cdot f(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad H(\omega) * F(\omega),$$

d.h. Multiplikation im Zeitbereich führt zur Faltung im Frequenzbereich!

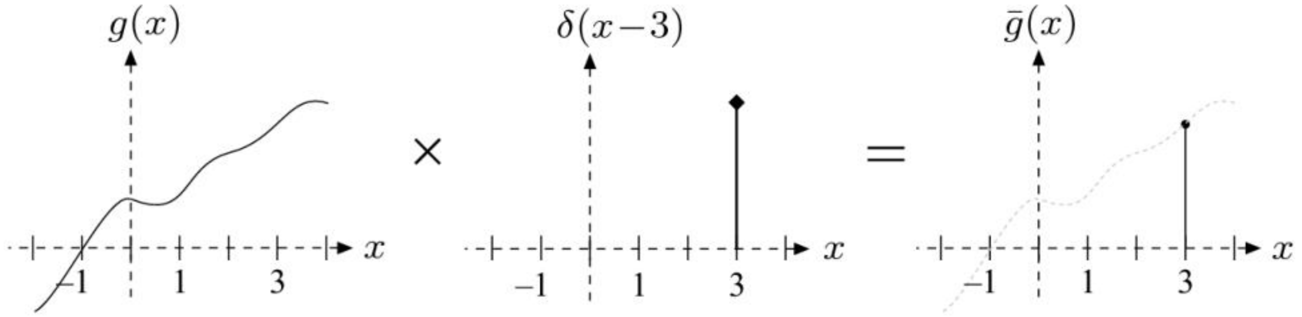
Abtastung mit dem Dirac-Impuls

Wird ein kontinuierliches Signal $f(t)$ punktweise mit dem Dirac-Impuls multipliziert, so erhält man

$$\bar{f}(t) = f(t) \cdot \delta(t) = \begin{cases} f(0) & \text{für} \quad t = 0 \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

d.h. einen einzelnen, **diskreten Abtastwert** bei 0. Durch Verschiebung von $\delta(t)$ an t_0 kann $f(t)$ an *beliebigen Stellen* abgetastet werden:

$$\bar{f}(t) = f(t) \cdot \delta(t - t_0) = \begin{cases} f(t_0) & \text{für} \quad t = t_0 \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$



Quelle: Burger & Burge, 2005

Modellierung der Pulsabtastung

Um eine Funktion an mehreren Stellen abzutasten (z.B. t_1 und t_2), werden zuerst 2 verschobene Exemplare von $\delta(t)$ mit $f(t)$ multipliziert und dann addiert:

$$\begin{aligned}\bar{f}(t) &= f(t)\delta(t-t_1) + f(t)\delta(t-t_2) \\ &= f(t)[\delta(t-t_1) + \delta(t-t_2)] \\ &= \begin{cases} f(t_1) & \text{für} \quad t = t_1 \\ f(t_2) & \text{für} \quad t = t_2 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}\end{aligned}$$

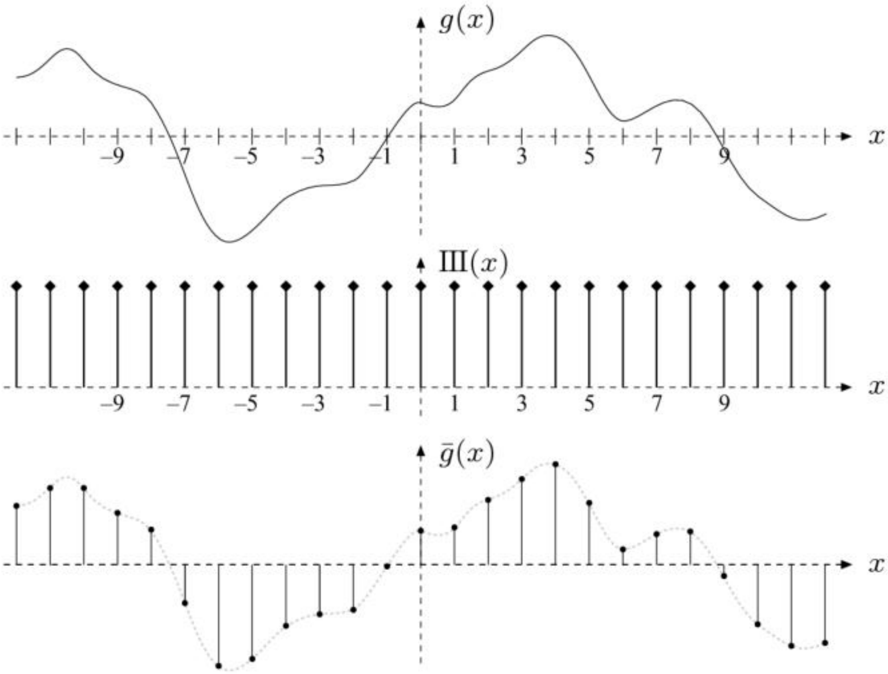
Die Abtastung einer Funktion an einer *Folge* von n Zeitpunkten $t_i = 1, 2, \ldots, n$ kann daher als Summe von n Einzelabtastungen dargestellt werden:

$$\begin{aligned}\bar{f}(t) &= f(t)[\delta(t-1) + \delta(t-2) + \ldots + \delta(t-n)] \\ &= f(t)\sum_{i=1}^{n} \delta(t-i)\end{aligned}$$

Abtastung mit der Kammfunktion

Kammfunktion: Verlängerung der Pulsfolge nach ∞ und $-\infty$

$$\text{III}(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(t - i)$$



Abtastung:

$$\bar{f}(t) = f(t) \cdot \text{III}(t)$$

Abtastung im Abstand τ:

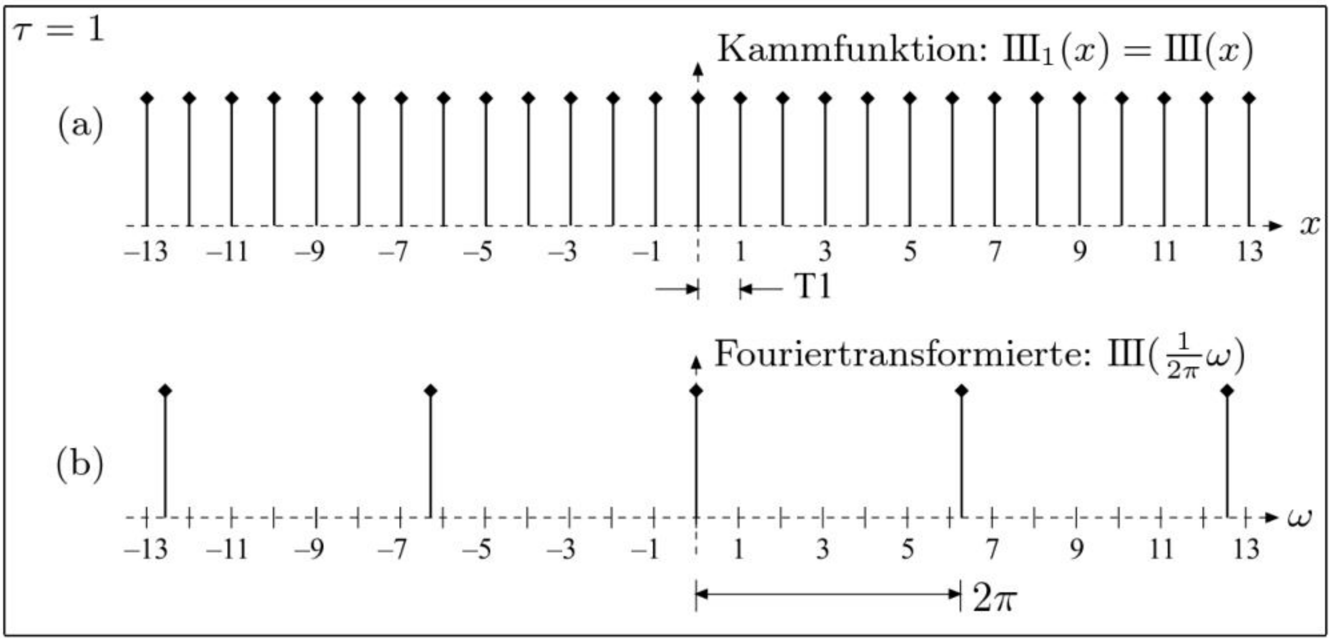
$$\bar{f}(t) = f(t) \cdot \text{III}\left(\frac{t}{\tau}\right)$$

Quelle: Burger & Burge, 2005

Fouriertransformierte der Kammfunktion (1)

Die Fouriertransformierte der Kammfunktion ist wieder eine Kammfunktion:

$$\text{III}(x) \quad \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad \text{III}\left(\frac{1}{2\pi}\omega\right)$$

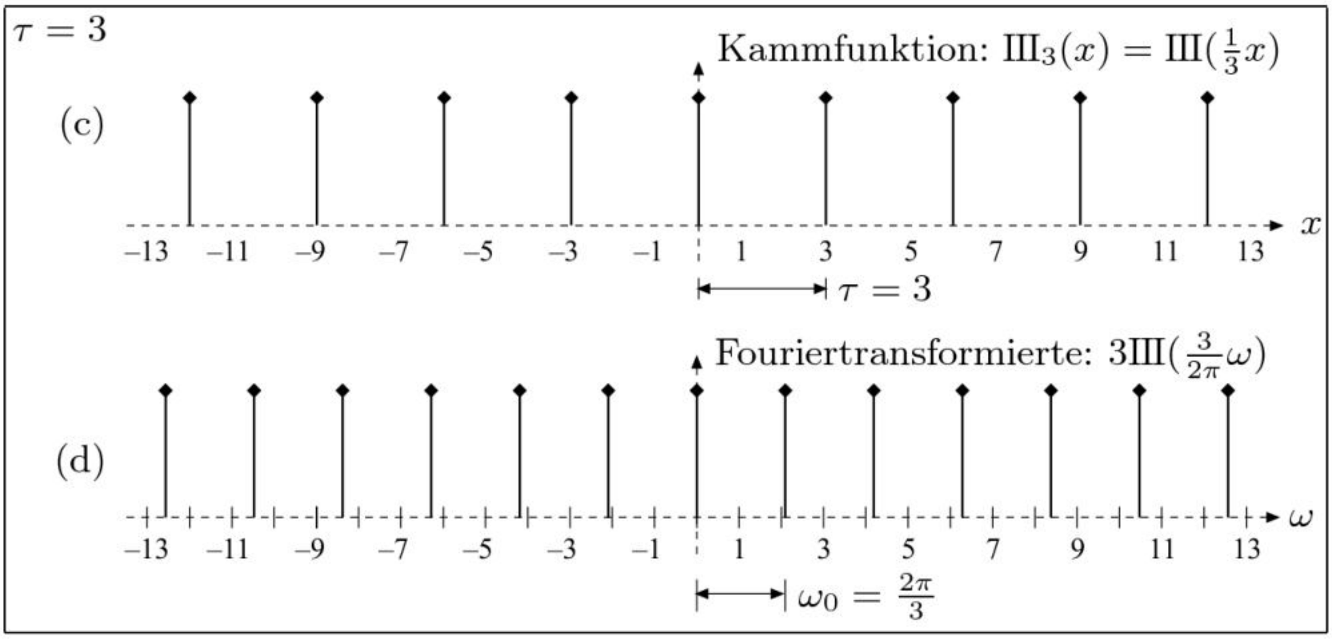


Quelle: Burger & Burge, 2005

Fouriertransformierte der Kammfunktion (2)

Kammfunktion mit Abtastinterval τ:

$$\mathrm{III}\left(\frac{t}{\tau}\right) \quad \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad \tau\,\mathrm{III}\left(\frac{\tau}{2\pi}\omega\right)$$



Quelle: Burger & Burge, 2005

Fouriertransformierte einer abgetasteten Funktion (1)

- Dem Produkt im Ortsraum entspricht die Faltung im Spektralraum (Modulationseigenschaft):

$$f(t) \cdot \text{III}\left(\frac{t}{\tau}\right) \quad \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad F(\omega) * \tau\, \text{III}\left(\frac{\tau}{2\pi}\omega\right)$$

- Faltung mit der Impulsfunktion ergibt wieder die Originalfunktion:

$$F(\omega) * \delta(\omega) = F(\omega)$$

- Faltung mit einem um d verschobenen Impuls reproduziert ebenfalls die Funktion, aber verschoben um Distanz d :

$$F(\omega) * \delta(\omega - d) = F(\omega - d)$$

- Fouriertransformierte einer abgetasteten Funktion: **Spektrum des ursprünglichen, nicht abgetasteten Signals wird unendlich oft an jedem Puls der Kammfunktion repliziert.** Das resultierende Spektrum ist also **periodisch** mit Periode $\omega_s = \frac{2\pi}{\tau}$ (Abtastfrequenz).

Abtasttheorem

- Solange sich die replizierten Spektren des Originalsignals nicht überlappen, kann das ursprüngliche Signal **ohne Verlust** aus einer der Kopien im Spektrum bzw. aus dem abgetasteten Signal rekonstruiert werden.
- Spektrum muss dafür bandbegrenzt sein: Maximalfrequenz ω_{max} darf also die halbe Abtastfrequenz $\frac{\omega_s}{2}$ (**Nyquistfrequenz**) nicht überschreiten:

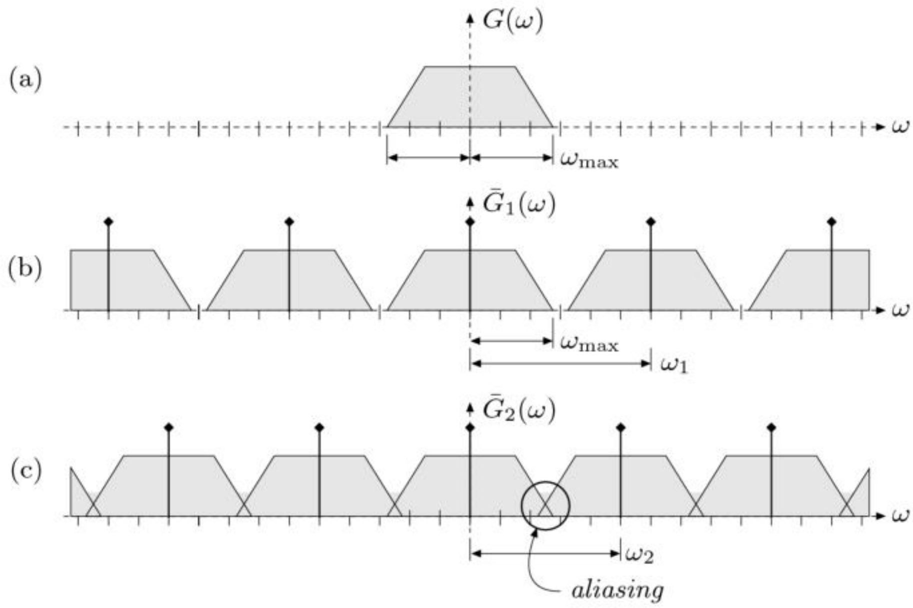
  $$\omega_{\text{max}} \leq \frac{1}{2}\omega_s \quad \text{bzw.} \quad \omega_s \geq 2\omega_{\text{max}}$$

  Die Abtastfrequenz muss mindestens das Doppelte der Bandbreite betragen (**Abtasttheorem**).
- Wird diese Bedingung nicht eingehalten, kann das kontinuierliche Signal nicht mehr fehlerfrei aus dem abgetasteten Signal rekonstruiert werden: **Aliasing**.

Aliasing

Ist die Abtastfrequenz kleiner als die doppelte Grenzfrequenz des Signals, so überlappen die Kopien des Spektrums.

Folge: **Aliasing** bzw. Überlappung



Damit ein analoges Signal unverfälscht digital verarbeitet werden kann, muss sein Spektrum bandbegrenzt sein. Bevor ein analoges Signal digitalisiert wird, sollte es daher über einen analogen Tiefpass (**Anti-Aliasing-Filter**) bandbegrenzt werden.

14 16_DFT

Periodische diskrete Sinussignale

- Als Grundsignale, aus denen periodische Digitalsignale aufgebaut werden können, kommen also nur Sinusschwingungen in Betracht, die eine ganzzahlige Periodenlänge N haben, oder die eine ganzzahlige Anzahl von Schwingungen k innerhalb der Periodenlänge N haben.
- Schreibweise:

$$C_k^N[n] = \cos\left(k\frac{2\pi}{N}n\right) \qquad S_k^N[n] = \sin\left(k\frac{2\pi}{N}n\right)$$

  Der Ausdruck $\omega_0 = \frac{2\pi}{N}$ ist wie bisher die Grundfrequenz der diskreten Schwingung, die Wellenzahl k ist die k-te Harmonische. Der diskrete Index n übernimmt dabei die Rolle der Zeit t mit $\Delta t = 1$:

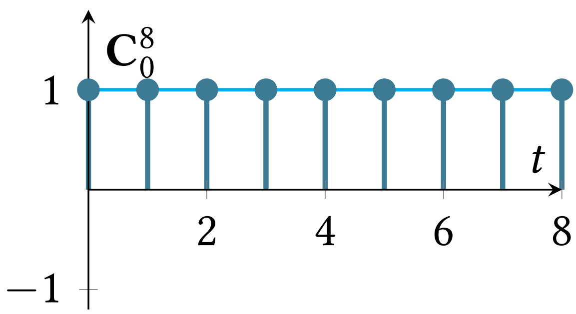
$$t = n \cdot \Delta t.$$

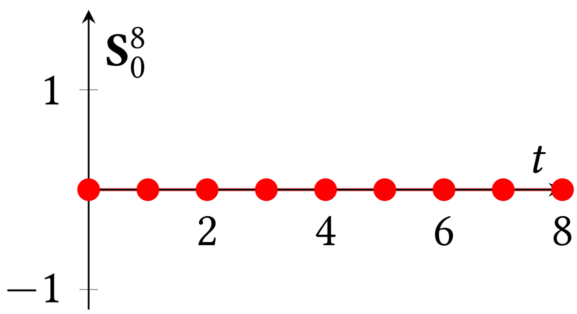
- Komplexe Schreibweise:

$$W_k^N[n] = e^{ik\frac{2\pi}{N}n} = C_k^N[n] + iS_k^N[n]$$

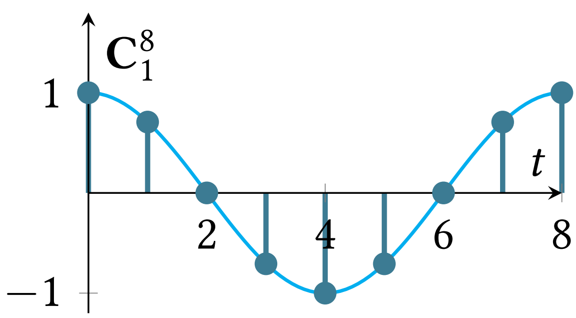
Beispiel: Diskrete periodische Grundsignale (1)

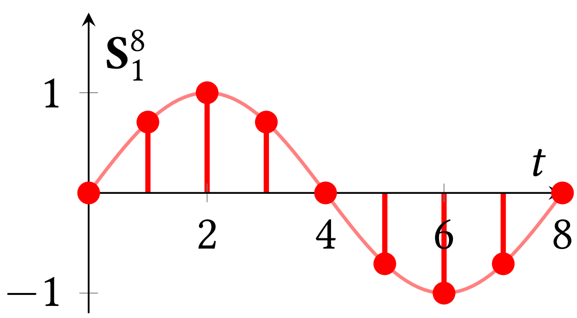
Länge $N = 8$, Wellenzahl $k = 0$:





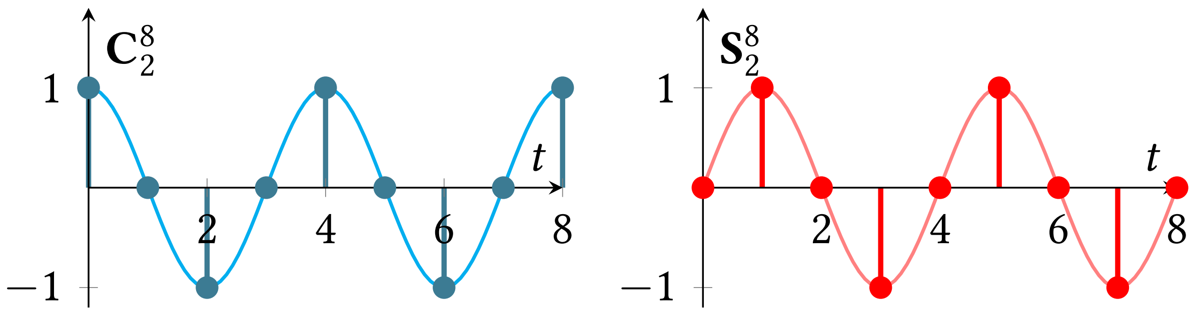
Wellenzahl $k = 1$:



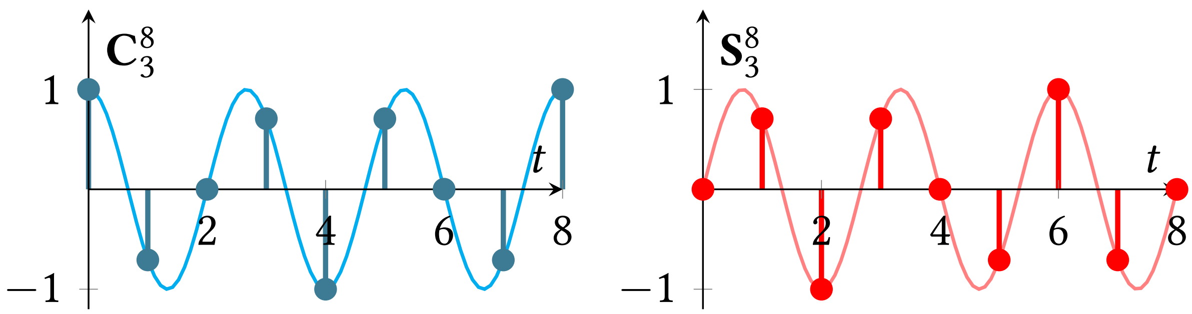


Beispiel: Diskrete periodische Grundsignale (2)

Wellenzahl $k = 2$:

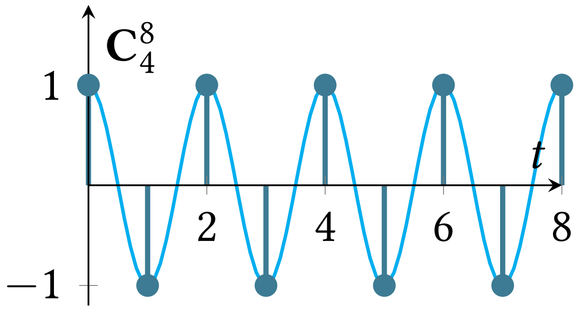


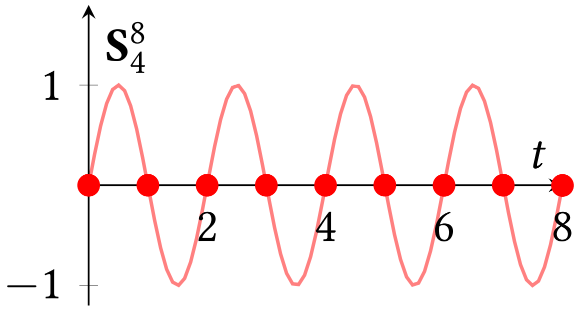
Wellenzahl $k = 3$:



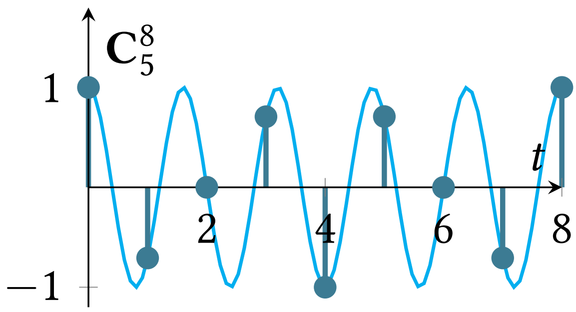
Beispiel: Diskrete periodische Grundsignale (3)

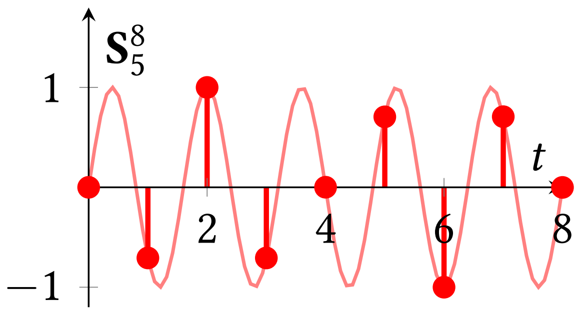
Wellenzahl $k = 4$:





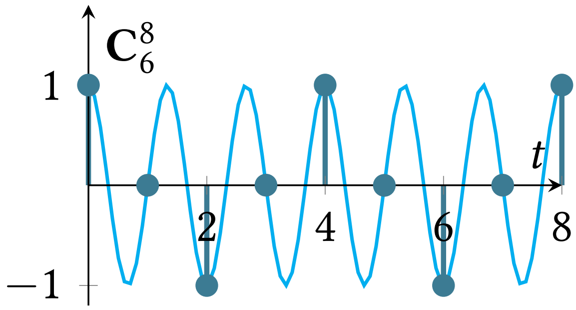
Wellenzahl $k = 5$:

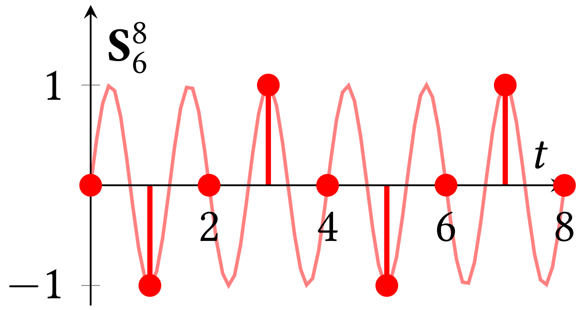




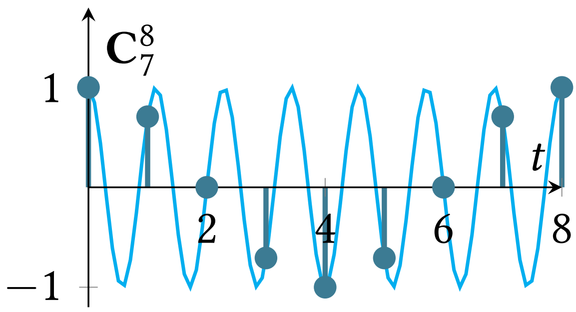
Beispiel: Diskrete periodische Grundsignale (4)

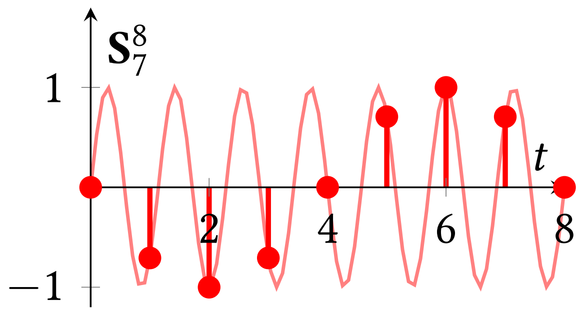
Wellenzahl $k = 6$:





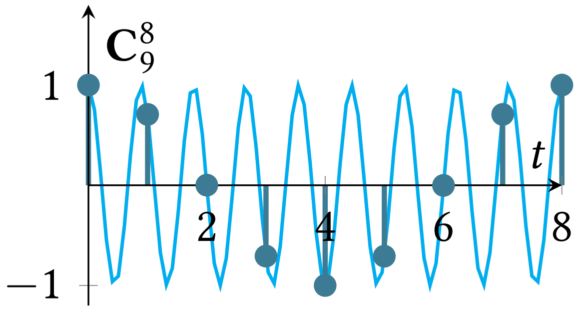
Wellenzahl $k = 7$:

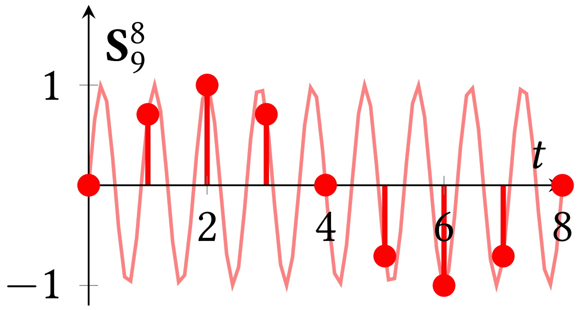




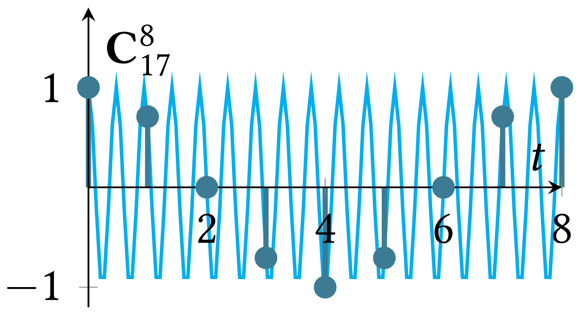
Beispiel: Diskrete periodische Grundsignale (5)

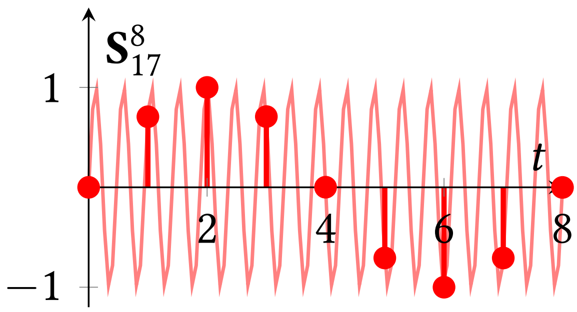
Wellenzahl $k = 9$:





Wellenzahl $k = 17$:





Identische diskrete periodische Grundsignale

- Für Wellenzahlen oberhalb der Nyquistfrequenz (hier $k = 4$) wiederholen sich die abgetasteten Sinusschwingungen, obwohl die kontinuierlichen Originalsignale unterschiedlich sind!
- Insbesondere gilt, dass diskrete Cosinus- und Sinusschwingungen identisch sind, deren Wellenzahlen sich um ganzzahlige Vielfache von N (**Oktaven**) unterscheiden:

$$S_k^N[n] = S_{k+m\cdot N}^N[n] \quad \text{und} \quad C_k^N[n] = C_{k+m\cdot N}^N[n], \quad m \in \mathbb{Z}$$

- Innerhalb einer Oktave gibt es weitere Identitäten:

$$S_k^N[n] = -S_{m\cdot N-k}^N[n] \quad \text{und} \quad C_k^N[n] = C_{m\cdot N-k}^N[n], \quad m \in \mathbb{Z}$$

- **Es gibt also bei einer Grundperiode von N nur N unterschiedliche diskrete, periodische Sinusschwingungen**.

Zeitdiskrete Fourierreihe

- Für ein diskretes, periodisches Signal mit der Periode N gibt es nur N verschiedene periodische Grundsignale

$$S_k^N[n] \quad \text{und} \quad C_k^N[n], \quad k = 0, 1, 2, \ldots, N/2.$$

- In komplexer Schreibweise gibt es ebenfalls N verschiedene periodische Grundsignale

$$W_k^N[n] = e^{ik\frac{2\pi}{N}n}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, N-1.$$

- Die Fourierreihe dieser Signale besteht daher nur aus N Termen (mit $F[k] = c_k$):

$$f[n] = \sum_{k=0}^{N-1} F[k] W_k^N[n] = \sum_{k=0}^{N-1} F[k] e^{ik\frac{2\pi}{N}n},$$

d.h. **die Fourierreihe eines zeitdiskreten periodischen Signals ist immer endlich**.

Fouriertransformation eines diskreten periodischen Signals

Abgetastetes periodisches Signal über eine Periode:

$$f(t) = f[0] \cdot \delta(t) + f[1] \cdot \delta(t-1) + \cdots + f[N-1] \cdot \delta(t-(N-1))$$

Eingesetzt in Analysegleichung der komplexen Fourierreihe ($T = N$)

$$F[k] = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cdot e^{-ik\omega_0 t}\, dt = f[0] e^{-ik\frac{2\pi}{N}0} + f[1] e^{-ik\frac{2\pi}{N}1} + \cdots$$

ergibt sich die **Analysegleichung für diskrete periodische Signale**:

$$F[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f[n] e^{-ik\frac{2\pi}{N}n}, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1,$$

gilt für beliebige k, aber $F[k] = F[k+N]$ (d.h. $F[k]$ hat die Periode N).

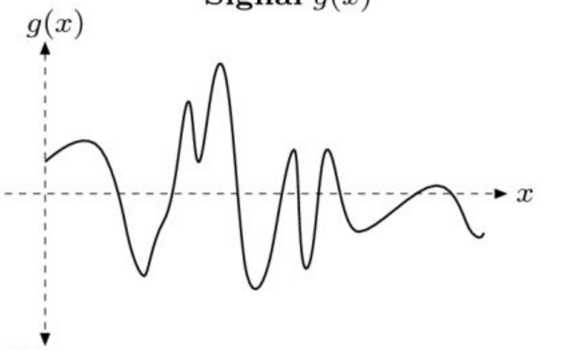
Vergleich kontinuierliche und diskrete Fourierreihe

	Diskret	Kontinuierlich
Synthese-gleichung	$f[n] = \sum_{k=0}^{N-1} F[k] e^{ik\frac{2\pi}{N}n}$	$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega_0 t}$
Analyse-gleichung	$F[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f[n] e^{-ik\frac{2\pi}{N}n}$	$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cdot e^{-ik\omega_0 t}\, dt$
Reihe	endlich (Teilmenge der Größe N)	unendlich
Fourier-koeffi-zienten	periodisch mit Periode N	aperiodisch

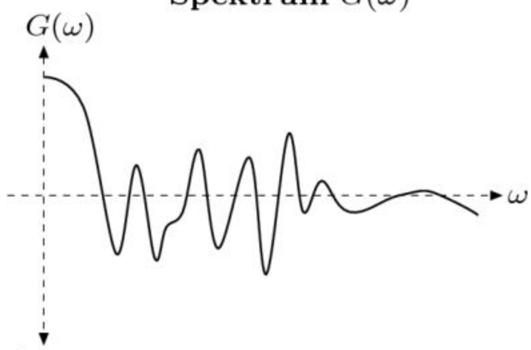
Übersicht (1)

Signal $g(x)$

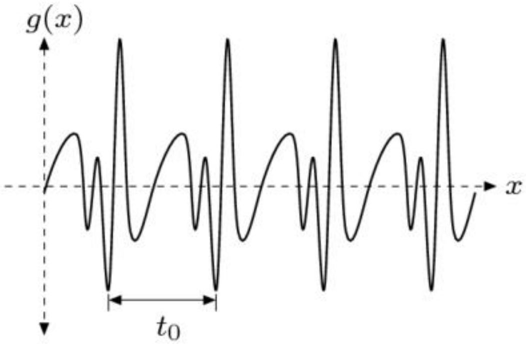
Spektrum $G(\omega)$



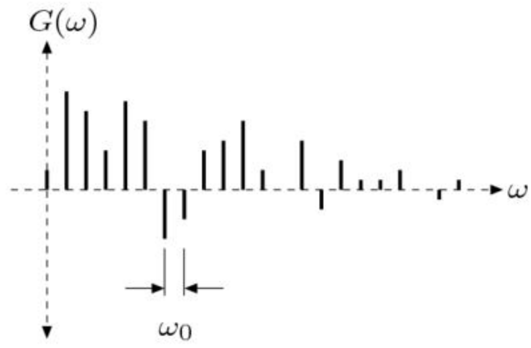
(a) Kontinuierliches, nicht periodisches Signal.



(b) Kontinuierliches, nicht periodisches Spektrum.

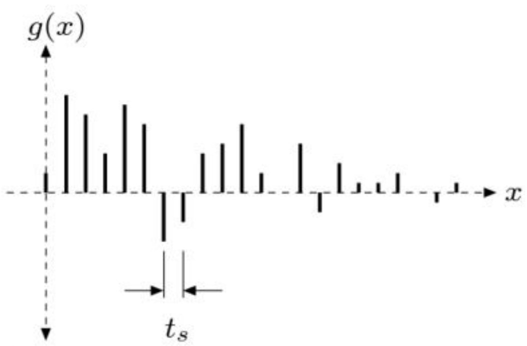


(c) Kontinuierliches, periodisches Signal mit Periodenlänge t_0.

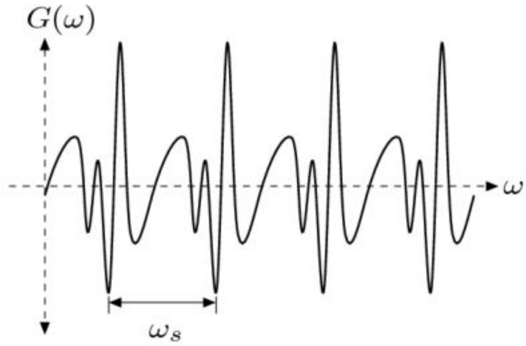


(d) Diskretes, nicht periodisches Spektrum mit Werten im Abstand $\omega_0 = 2\pi / t_0$.

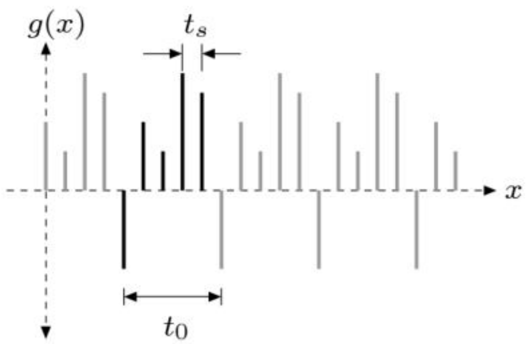
Übersicht (2)



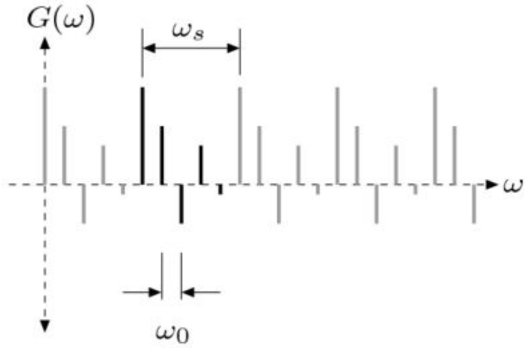
(e) Diskretes, nicht periodisches Signal mit Abtastwerten im Abstand t_s.



(f) Kontinuierliches, periodisches Spektrum mit der Periodenlänge $\omega_s = 2\pi/t_s$.



(g) Diskretes, periodisches Signal, abgetastet im Abstand t_s mit der Periodenlänge $t_0 = t_s M$.



(h) Diskretes, periodisches Spektrum mit Werten im Abstand $\omega_0 = 2\pi/t_0$ und Periodenlänge $\omega_s = 2\pi/t_s = \omega_0 M$.

Diskrete Fouriertransformation (DFT)

Geg.: diskretes Signal $f[n]$ der Länge N.

Vorwärtstransformation (DFT):

$$F[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f[n]\, e^{-ik\frac{2\pi}{N}n} \quad \text{für} \quad 0 \leq k < N$$

Inverse Transformation (DFT^{-1}):

$$f[n] = \sum_{k=0}^{N-1} F[k]\, e^{ik\frac{2\pi}{N}n} \quad \text{für} \quad 0 \leq n < N$$

- Die $N \times N$ komplexen Koeffizienten $e^{-ik\frac{2\pi}{N}n}$ können im voraus berechnet und die DFT als Matrix-Vektor-Multiplikation in $O(N^2)$ implementiert werden (vgl. FFT: $O(N \log N)$).
- In vielen Implementierungen ist der Faktor $1/N$ in der inversen DFT oder als $1/\sqrt{N}$ in beiden Gleichungen.

DFT - Beispiel

u	$g(u)$ Re	$g(u)$ Im	$G(m)$ Re	$G(m)$ Im	m
0	1.0000	0.0000	14.2302	0.0000	0
1	3.0000	0.0000	−5.6745	−2.9198	1
2	5.0000	0.0000	*0.0000	*0.0000	2
3	7.0000	0.0000	−0.0176	−0.6893	3
4	9.0000	0.0000	*0.0000	*0.0000	4
5	8.0000	0.0000	0.3162	0.0000	5
6	6.0000	0.0000	*0.0000	*0.0000	6
7	4.0000	0.0000	−0.0176	0.6893	7
8	2.0000	0.0000	*0.0000	*0.0000	8
9	0.0000	0.0000	−5.6745	2.9198	9

DFT $\longrightarrow$ DFT^{-1} $\longleftarrow$

Quelle: Burger & Burge, 2005

Umrechnung des DFT-Spektrums in physikalische Einheiten

- Die Wellenzahl $k = 1$ entspricht der Grundfrequenz des Signals, d.h. einer Schwingung während N Abtastpunkten. Wird das Signal im Zeitabstand Δt abgetastet, entspricht das einer Periode von $T = N \cdot \Delta t$. Die Grundfrequenz ist also

$$f_1 = \frac{1}{N \cdot \Delta t} \quad \text{bzw.} \quad \omega_1 = 2\pi f_1 = \frac{2\pi}{N \cdot \Delta t}.$$

- Die Wellenzahl k entspricht der Frequenz

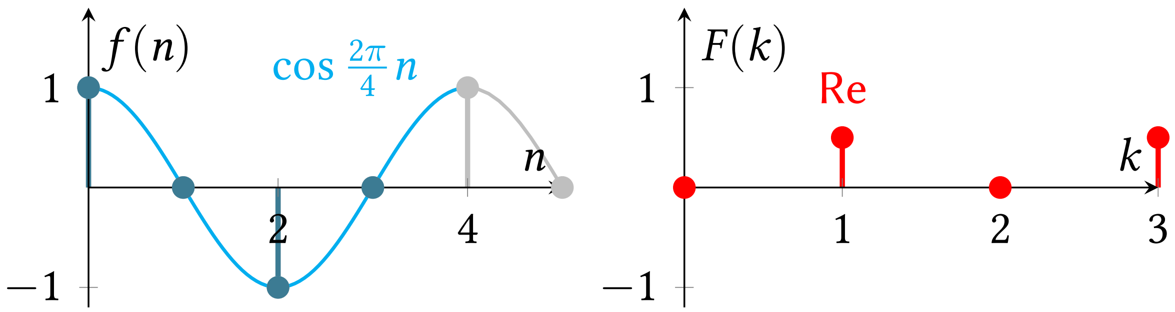
$$f_k = k \cdot \frac{1}{N \cdot \Delta t} = k \cdot f_1 \quad \text{bzw.} \quad \omega_k = 2\pi f_k = k \frac{2\pi}{N \cdot \Delta t} = k \cdot \omega_1.$$

- Die Abtastfrequenz $f_s = 1/\Delta t = N f_1$ entspricht der Wellenzahl $k_s = N$, die Nyquistfrequenz

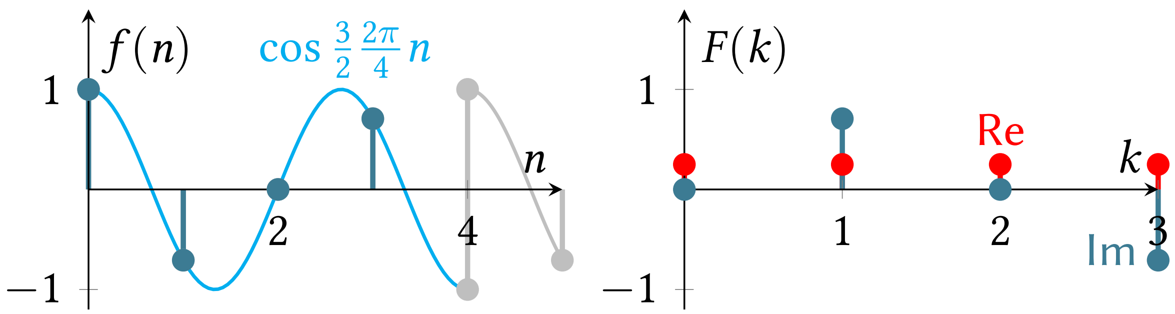
$$k_\nu = \frac{N}{2} = \frac{k_s}{2}$$

Abschneidefehler aufgrund der periodischen Fortsetzung

Ohne Abschneidefehler ($N = 4$):

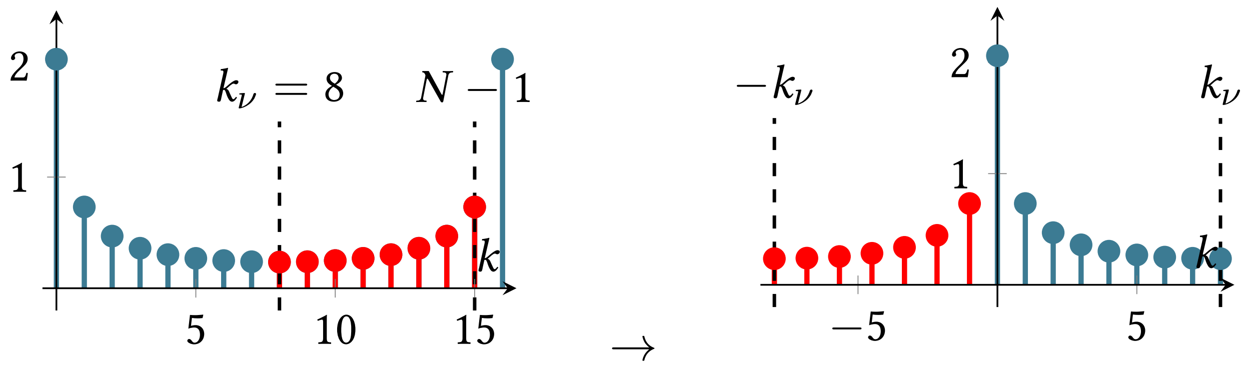


Mit maximalem Abschneidefehler:



Zentriertes Spektrum

Beispiel $N = 16$:



Die DFT liefert ein Spektrum für die Wellenzahlen 0 bis $N - 1$, wobei die Nyquistfrequenz bei $k_\nu = N/2$ liegt. Das normalerweise dargestellte, **zentrierte Spektrum** von $k = -N/2..N/2$ erhält man durch Kopieren der oberen Hälfte in die negativen Wellenzahlen, was aufgrund der Periodizität kein Problem darstellt.

15 17_Digitale_Filter

Diskrete lineare Systeme

Diskrete lineare Systeme werden analog zu den kontinuierlichen linearen Systemen definiert: Wird auf den Eingang ein diskretes Sinussignal beliebiger Frequenz gegeben, so darf am Ausgang lediglich ein diskretes Sinussignal genau dieser Frequenz erscheinen, das mit einem komplexen Faktor multipliziert wird.

$$e^{ik\frac{2\pi}{N}n} \quad \longrightarrow \quad C \cdot e^{ik\frac{2\pi}{N}n} \text{ mit } C \in \mathbb{C}.$$

Genau wie im kontinuierlichen Fall berechnet sich auch hier das diskrete Spektrum (bei Wellenzahl k) des Ausgangssignals $Y[k]$ als Produkt des diskreten Frequenzgangs des Systems $H[k]$ mit dem diskreten Spektrum $X[k]$ des Eingangssignals:

$$Y[k] = H[k] \cdot X[k].$$

erst fftdann punktweise multiplizieren dann inverse fft und dann hat man sein filter

Diskrete lineare Systeme lassen sich auf sehr einfache Weise als (oft nur wenige Zeilen langes) Programm realisieren.

Impulsantwort eines zeitdiskreten linearen Systems

Ist der Output $h_k[n]$ des linearen Systems für jeden um k verschobenen Einheitsimpuls bekannt, so kann die Systemantwort auf jedes beliebige Inputsignal ausgedrückt werden als

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] \quad \longrightarrow \quad y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h_k[n].$$

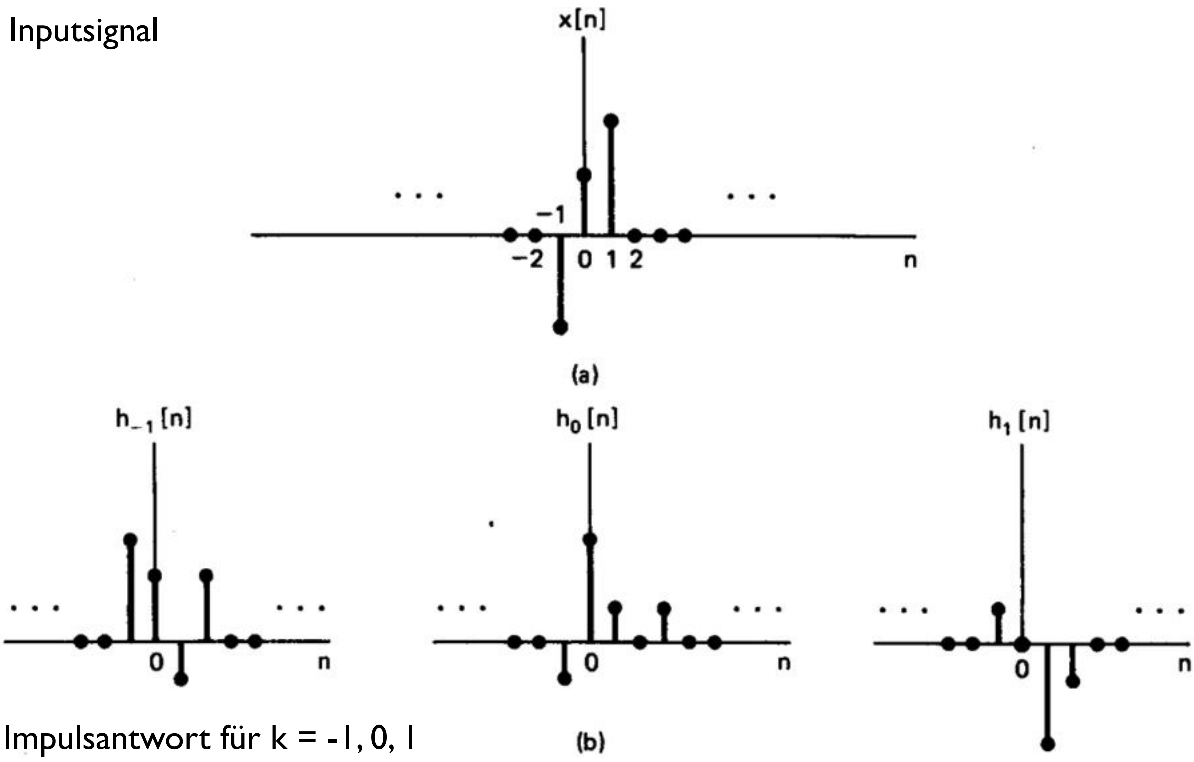
Bei einem zeitinvarianten System gilt

$$h_k[n] = h_0[n-k],$$

d.h. der Output $h_k[n]$ ist eine um k zeitverschobene Version von $h_0[n]$. Daher reicht auch im diskreten Fall die Angabe der Impulsantwort $h[n] = h_0[n]$, um die Systemantwort für jeden beliebigen Input zu charakterisieren.

Beispiel: Diskrete Systemantwort (1)

Inputsignal



Impulsantwort für k = -1, 0, 1

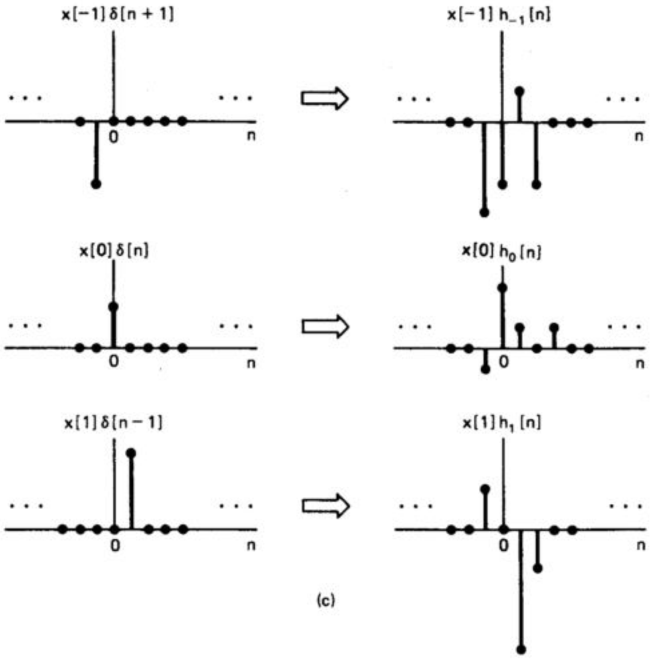
[Quelle: Oppemheim & Willsky]

Beispiel: Diskrete Systemantwort (2)

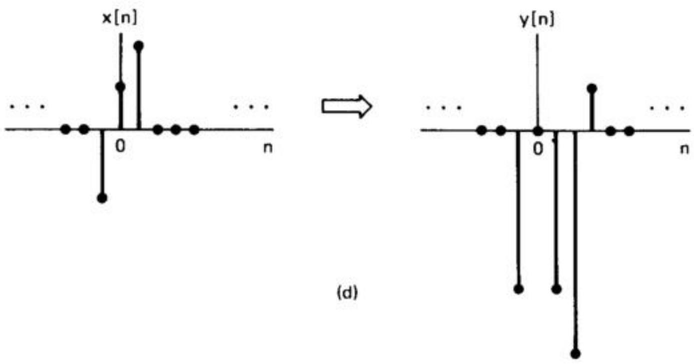
Hauptsignal in Pulsen

Impulsantwort auf von den Impulsen

summe der Impulsantwo



(c)



(d)

[Quelle: Oppemheim & Willsky]

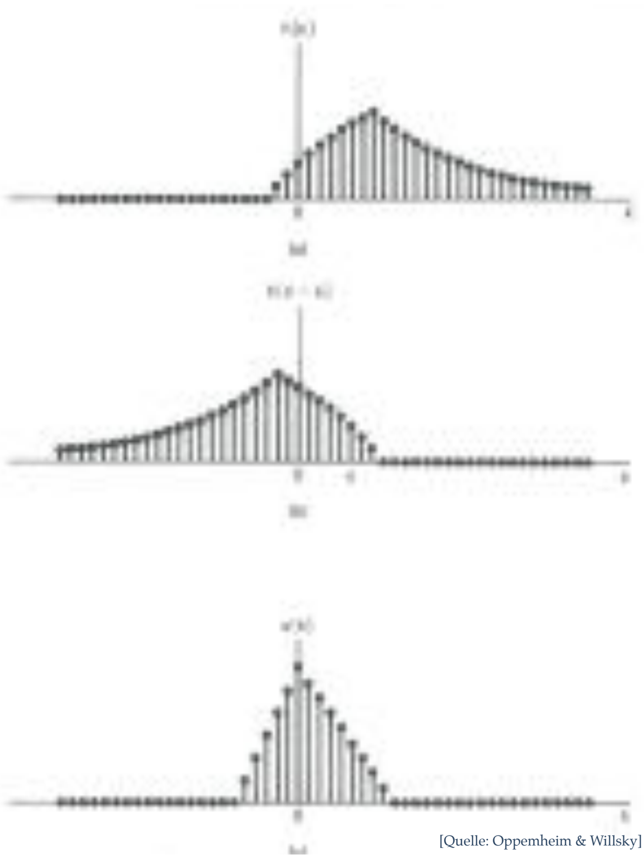
Faltungssumme

Bei zeitinvarianten Systemen vereinfacht sich die Systemantwort zu

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = x[n] * h[n]$$

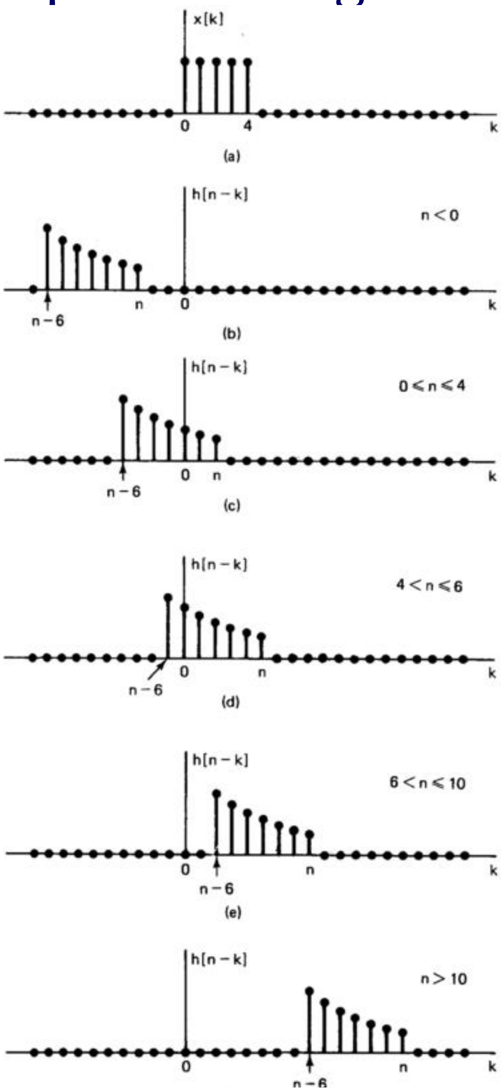
(**Faltungssumme**, diskrete Faltung):

1. Impulsantwort an den Zeitpunkt n verschieben.
2. An y-Achse spiegeln.
3. Punktweise Multiplikation mit dem Inputsignal.
4. Aufsummieren ergibt den momentanen Output des Systems.

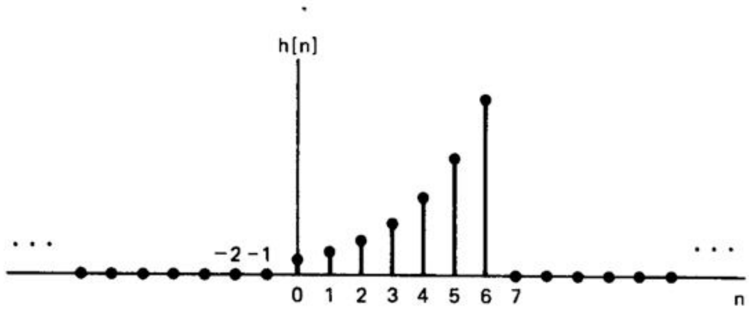


[Quelle: Oppemheim & Willsky]

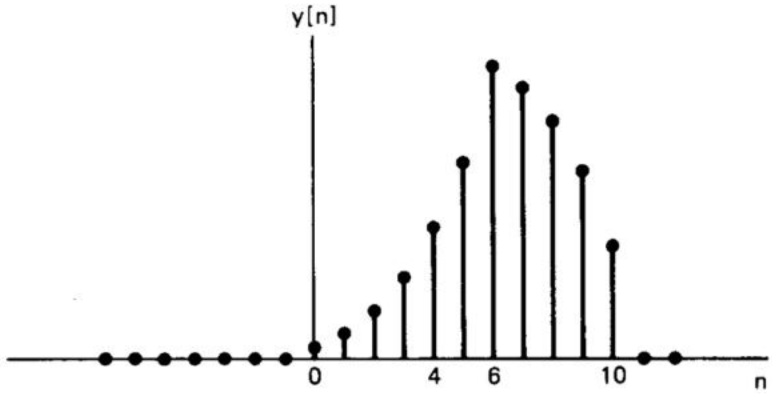
Beispiel: Faltungssumme



Impulsantwort:



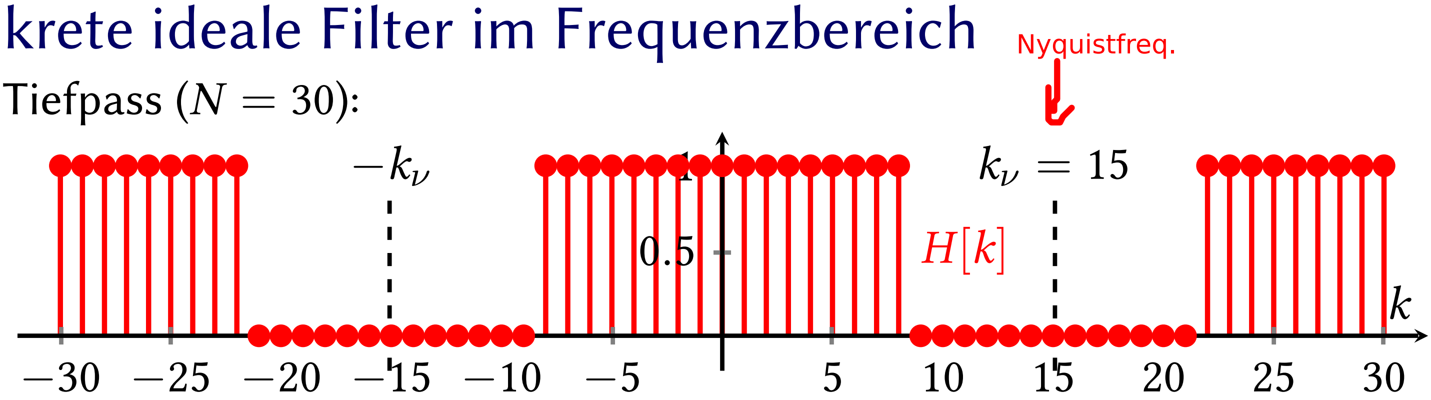
Systemantwort:



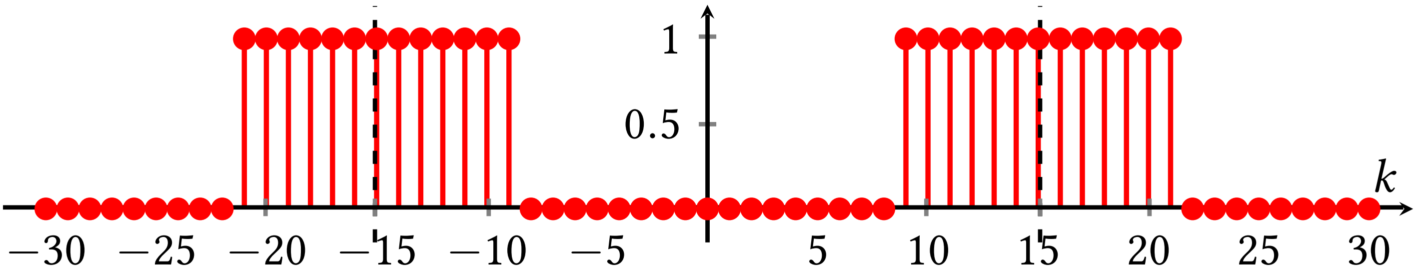
es wird Signal für signal berechnet:
System antwort 1. ist wenn der erste wert vom Imp.antwort
umgekehrt auf dem ersten wert des Signals Liegt
das zweite ist der erste Wert vom Signal Mal denzweiten von rechts v
plus dem Produkt aus dem 2. Wert des Signals und dem ersten von re

Diskrete ideale Filter im Frequenzbereich

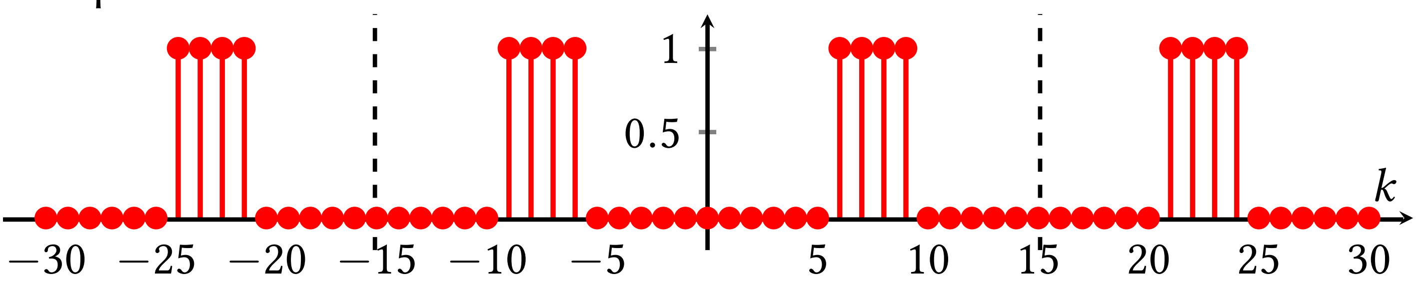
Tiefpass ($N = 30$):



Hochpass:



Bandpass:



FFT-Filter

- **Prinzip:** Signal über FFT in den Frequenzbereich transformieren, unerwünschte Frequenzbereiche auf Null setzen (Real-und Imaginärteil, dabei Symmetrien beachten!), über IFFT wieder in den Zeitbereich zurücktransformieren.
- Beinahe perfekte Filtereigenschaften: die Flankensteilheit liegt an der physikalisch durch die Unschärferelation bezeichneten Grenze (z.B. Sprung von 0 auf 1 innerhalb einer Bandbreite von 1 Hz bei einer Signallänge von 1 s). Die Flankensteilheit des Filters hängt also lediglich von der Zeitdauer des Signals bzw. Datenblocks ab!
- Absolute Phasenlinearität, d.h. die Form bzw. Symmetrie der Signale im Zeitbereich wird nicht verändert.
- Nachteile: hoher Rechenaufwand, lang andauernde Signale müssen in Blöcke zerlegt werden, Filter kann nicht in Echtzeit mitlaufen.

Digitale Implementierung von elementaren Systemen

- Proportionalsysteme können auf einfache Weise durch eine Multiplikation realisiert werden:

$$y(t) = K \cdot x(t) \quad \longrightarrow \quad y[n] = K \cdot x[n].$$

- Verzögerungsglieder über einen Ringpuffer der Länge N:

$$y(t) = x(t - T_t) \quad \longrightarrow \quad y[n] = x[n - N]$$

- Zusammen mit der Addition zweier Signale können daraus beliebige digitale lineare Systeme realisiert werden:

Filter-Koeffizient

$$y[n] = c_0 \cdot x[n] + c_1 \cdot x[n-1] + c_2 \cdot x[n-2] + c_3 \cdot x[n-3] + \cdots$$

- Differenzierer und Integrierer können digital nicht exakt realisiert werden, sondern nur näherungsweise.

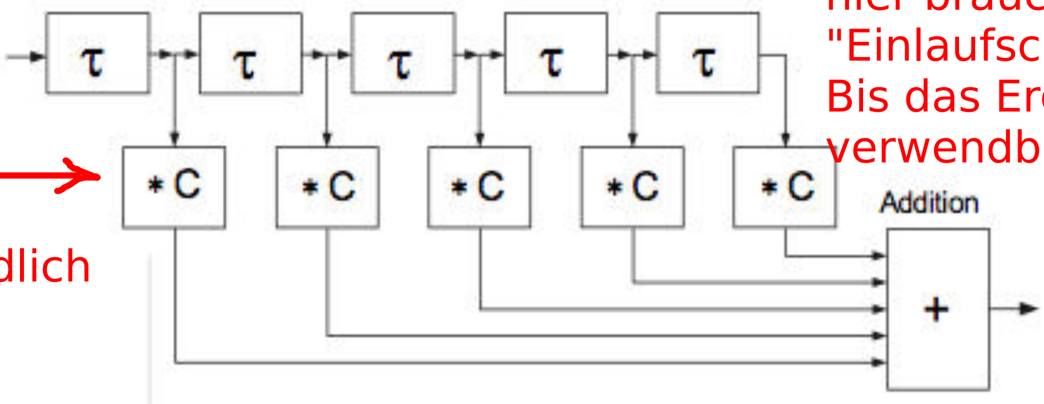
FIR-Filter

Prinzip: durch eine Serie von N Verzögerungsgliedern τ stehen die letzten N Eingangswerte zur Verfügung, die mit den **Filterkoeffizienten** c_k multipliziert und dann aufsummiert werden. Die Werte der Filterkoeffizienten sind die Impulsantwort, d.h. $c_k = h[k],\ k = 0, \ldots, N$.

Signal läuft von Links nach rechts durch

hier braucht es 5 "Einlaufschritte" Bis das Ergebnis verwendbar ist

alle unterschiedlich



Finite Impulse Response: Der Ausgangswert berechnet sich aus nur endlich vielen Eingangswerten.

Beispiel: gleitender Mittelwert und Differenz

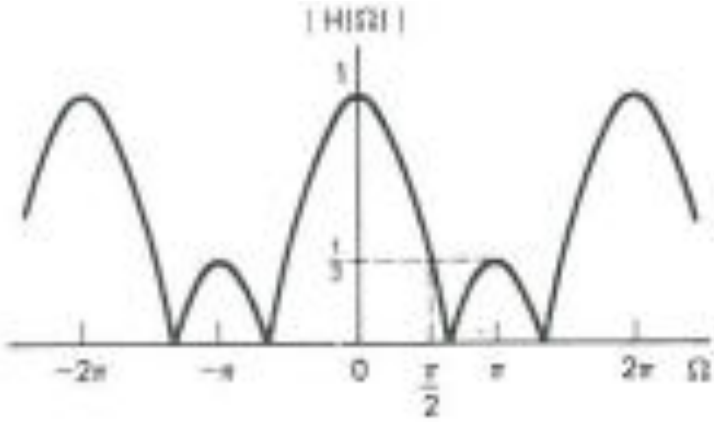
Gleitender Mittelwert:

1/3 wäre nicht sooo wichtig

$$y[n] = \frac{1}{3}(x[n-1] + x[n] + x[n+1])$$

(einfacher Tiefpass)

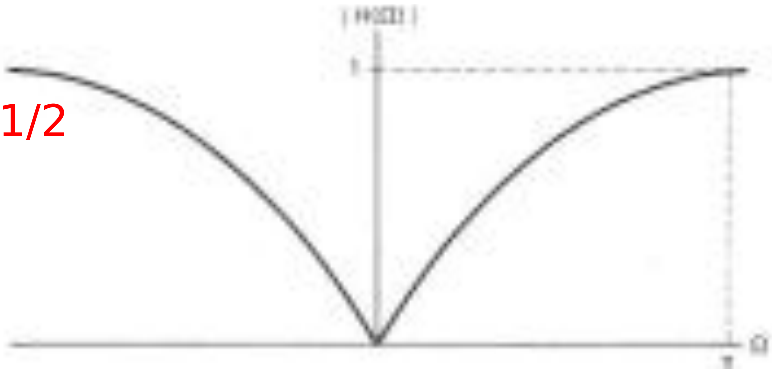
Selber Filter als Kausal:
1/3(x[n-2] + x[n-1] + x[n])



Differenz: das vorherige Signal abziehen und alles mal 1/2

$$y[n] = \frac{1}{2}(x[n] - x[n-1])$$

(einfacher Hochpass)

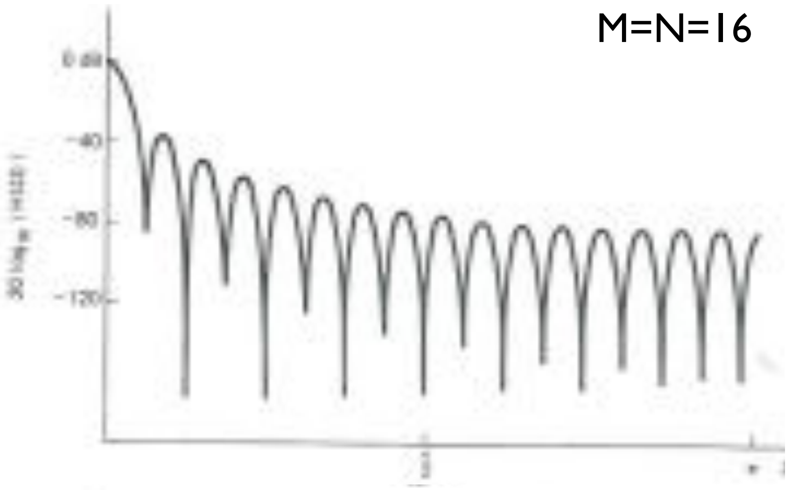


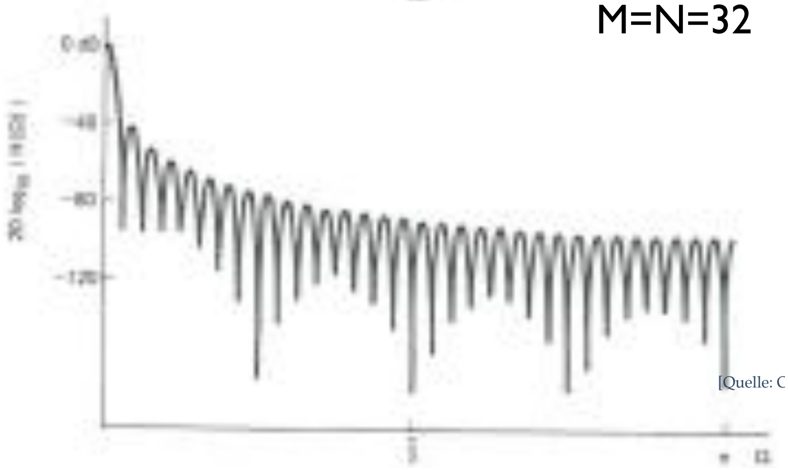
Quelle: Oppenheim & Willsky

Allgemeiner Mittelwertfilter

Allgemeiner Mittelwert:

$$y[n] = \frac{1}{N+M+1} \sum_{k=-N}^{M} x[n-k]$$





Quelle: Oppenheim & Willsky

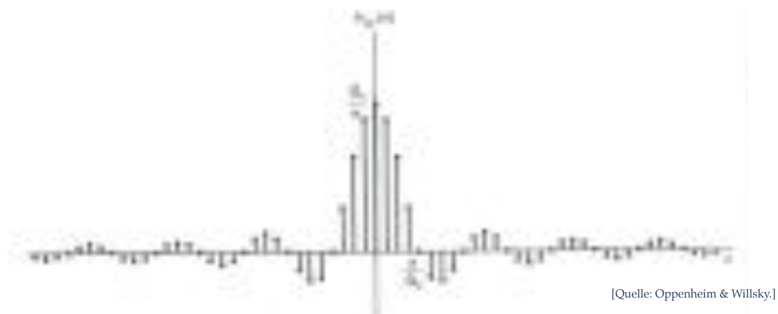
Diskrete ideale Filter im Zeitbereich

Gleiche Eigenschaften wie im kontinuierlichen Fall:

- Nichtkausal
- Unendlich große Impulsantwort (Sinc-Funktion)
- Überschwingen
- Oszillierendes Einschwingen.

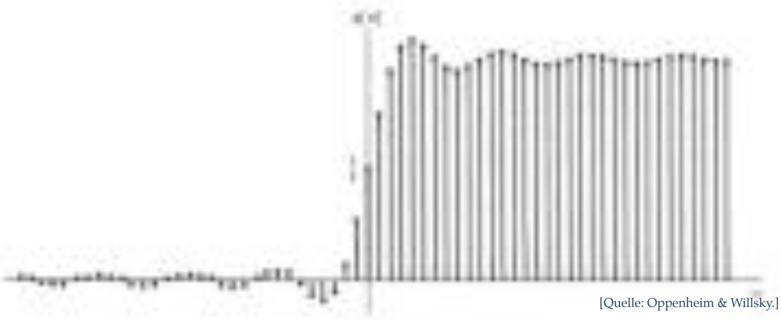
Auch bei digitalen Filtern müssen Kompromisse gemacht werden.

Impulsantwort:



[Quelle: Oppenheim & Willsky.]

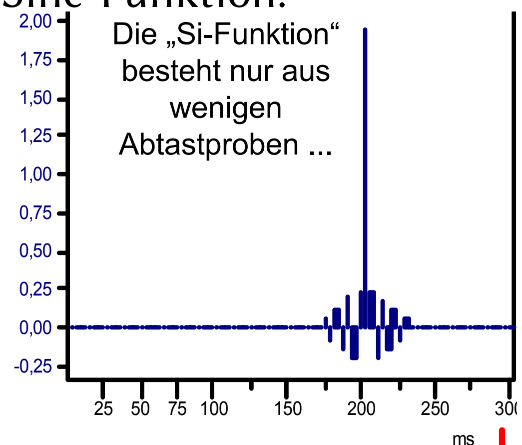
Sprungantwort:

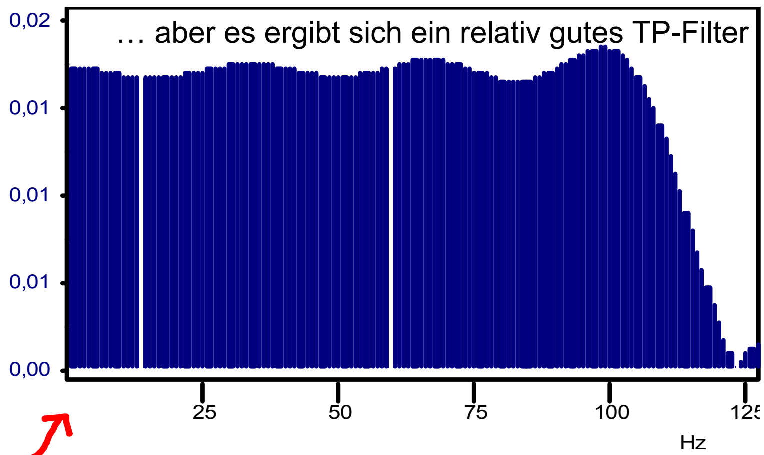


[Quelle: Oppenheim & Willsky.]

Kompromiss: genäherte idealer Tiefpass

- Grenzfrequenz festlegen, daraus den Amplitudengang als diskrete, um die Frequenz 0 zentrierte Rechteckfunktion berechnen.
- Inverse FFT (Phasengang gleich 0 setzen) ergibt eine Sinc-Funktion im Zeitbereich als Impulsantwort.
- Sinc-Funktion so weit verschieben, dass die höchsten Peaks rechts des Nullpunktes liegen.
- Nichtkausale Koeffizienten und kleine Koeffizienten rechts abschneiden ergibt eine genäherte, zeitverschobene Sinc-Funktion.

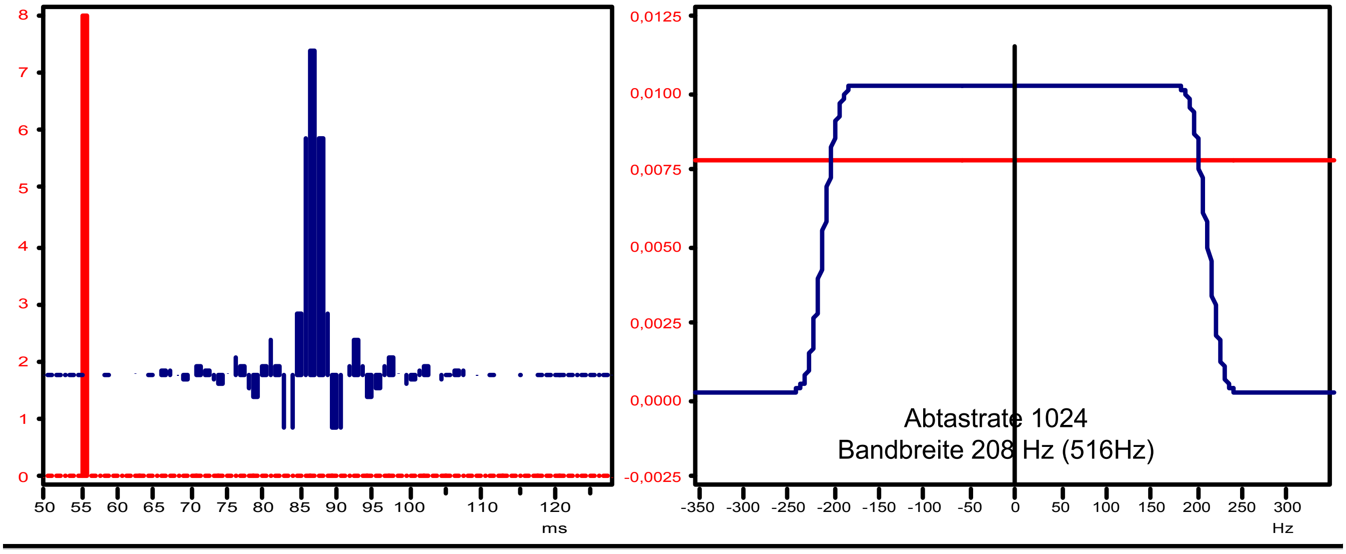




Fouriertransformiert

Welligkeit im Durchlassbereich vermeiden

- Multiplikation der genäherten Impulsantwort mit einer geeigneten Fensterfunktion (z.B. Hammingfenster): damit beginnt und endet die Sinc-Funktion “sanft”.
- Dadurch wird der Verlauf im Durchlassbereich geradliniger, allerdings nimmt die Flankensteilheit etwas ab.



Merkmale des genäherten idealen Tiefpasses

- Im Gegensatz zum FFT-Filter streng kausal, genau wie ein analoger Filter.
- Der Filterprozess geschieht im Zeitbereich und ist vergleichsweise wenig rechenintensiv linear mit der Filtergröße.
- Es kann kontinuierlich - also nicht blockweise - gefiltert werden. Dadurch entfallen alle Probleme, die durch die überlappenden Fensterung (siehe Vorl. 8) von Signalabschnitten auftreten.
- Empfohlene Anzahl Filterkoeffizienten: ab $n = 24$ für Tiefpässe, ab $n = 256$ für Bandpässe. Je schmaler der Frequenzbereich des Filters und dessen Steilheit, desto länger muss nach der Unschärferelation die Impulsantwort dauern, desto mehr Koeffizienten werden benötigt.
- Mit dieser Designmethode lassen sich digitale Tiefpässe beliebiger Güte (durch entsprechend große Koeffizientenzahl und entsprechendem Rechenaufwand) entwickeln.

Vom Tiefpass zum Bandpass

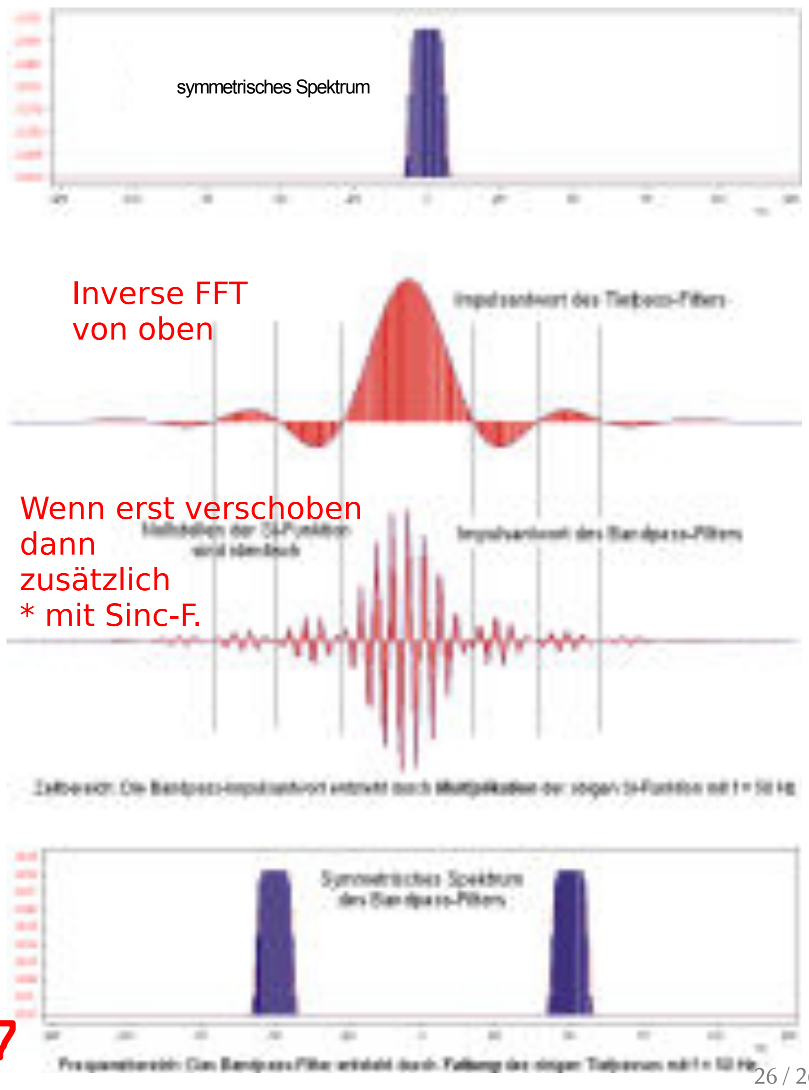
2. Verschiebungssatz:

$$f(t) \cdot e^{iat} \quad \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad F(\omega - a)$$

d.h. durch Multiplikation der Impulsantwort mit einem Sinus oder Cosinus der gewünschten Mittenfrequenz des Bandpasses erreicht man eine Verschiebung der Tiefpasscharakteristik an diese Frequenz.

Empfehlenswert ist eine Amplitude von 1 für den Sinus, damit der Bandpass das gefilterte Signal nicht verstärkt.

Spektrum Tiefpass



Aus dem Tiefpass wurde ein
Bandpass erzeugt

16 Fragenkatalog

16.1 Fragenkatalog Testat 1

- ***Welche elektrische Größe misst ein Drehspul-Messwerk?***
  - Amper
- ***Wie funktioniert ein Drehspulinstrument?***
  - Eine stromdurchflossene Drahtspule dreht sich im Feld eines Dauermagneten
  - Durch den Stromfluss verhält sich die Spule wie ein Magnet mit Nord- und Südpol, die von den Polen des Dauermagneten angezogen bzw. abgestoßen werden.
  - Je größer der Strom desto stärker die Magnete
  - Damit der Zeiger nicht sofort an den Anschlag geht, muss eine Gegenkraft aufgebracht werden, meistens durch eine Spiralfeder
- ***Was leistet die lineare Regression?***
  - Bei vielen Messungen kann man die lineare Regression anwenden um die Ausgleichsgerade zu bestimmen (Vorausgesetzt wir nehmen an, dass die Werte eigentlich eine lineare Abhängigkeit haben) somit hat man eine ungefähre wahre wert
- ***Kann man die lineare Regression auch bei Kennlinien anwenden, die einem Gesetz der Form $y=x^a$ folgen?***
  - Nein da es keine lineare Abbildung ist (dafür gibt es eine nicht lineare Reg.)
- ***Sie haben in Python eine 5 x 5 - Matrix a angelegt. Wie greifen Sie auf das zweite Element der dritten Zeile zu?***
  - a[2][1]
- ***Ein Messinstrument hat einen Anzeigefehler von 1% und einen Skalenendwert von 5 A. Im Moment zeigt das Instrument einen Strom von 2 A an. In welchem Bereich liegt der wahre Wert des Stroms?***
  - Zwischen 1,95A und 2.05A
- ***Auf der Anzeige Ihres analogen Messinstrumentes steht "KL 1.5". Was bedeutet das?***
  - Messabweichung vom wahren Messwert um 1.5%
- ***Wie schätzt man den wahren Wert einer Messgröße, wenn mehrere fehlerbehaftete Messungen vorliegen?***
  - Als Schätzwert für den wahren Wert wird das arithmetische Mittel aus den einzelnen Messwerten verwendet.
- ***Warum muss man jede Messung mit dem größten Messbereich beginnen?***
  - Weil die Spule nicht beliebig viel Strom verträgt und dadurch Zerstört werden kann, beginnt man mit dem größten Messbereich und steigt weiter ab um sicher zu gehen

- ***Warum kann ein Drehspulinstrument nicht beliebig schnell veränderliche Ströme oder Spannungen anzeigen?***
  - Jede Zeigerstellung entspricht einem Gleichgewichtszustand zwischen Magnet- und Rückstellkraft. Daher benötigt das Gerät eine gewisse Zeit zum Einschwingen und kann so nicht beliebig schnell veränderliche Größen anzeigen.
- ***Was ist der Parallaxenfehler?***
  - Je nach Blickwinkel auf den Zeiger liest man einen leicht unterschiedlichen Wert ab (Parallaxenfehler)
- ***Welches Messprinzip liegt dem im Praktikum eingesetzten Abstandssensor zugrunde?***
  - Infrarotmessprinzip
- ***Zu was benutzt man ein Oszilloskop?***
  - Das Oszilloskop (= "Schwingung ansehen") ist ein Spannungsmessgerät, mit dem zeitabhängige (und insbesondere schnellveränderliche) Größen gemessen werden können.
- ***Wie funktioniert ein analoges Oszilloskop?***
  - Siehe Brain Abitur Physik
- ***Was ist der Unterschied zwischen einem Sensor und einem Messgerät?***
  - Ein Messgerät besteht aus einem oder mehreren Sensoren, das allein oder in Verbindung mit anderen Einrichtungen für die Messung einer Messgröße vorgesehen ist.
  - Ein Sensor ist ein technisches Bauteil, das physikalische Eigenschaften oder die stoffliche Beschaffenheit seiner Umgebung erfassen kann
- ***Was für ein Sensortyp ist der im Praktikum eingesetzte Abstandssensor?***
  - Aktiver
- ***Wie funktioniert die Triggerung beim Oszilloskop?***
  - Triggerung: Bei jedem Durchlauf die Ablenkung solange angehalten, bis das zu messende Signal einen definierten Spannungswert erreicht. Dadurch werden die Perioden eines periodischen Signals stets genau übereinander gezeichnet.

Nicht beantwortete Fragen:

- Eine indirekte Messgröße A berechnet sich als Differenz zweier direkt gemessener Eingangsgrößen B und C mit absolutem Messfehler ΔB bzw. ΔC, d.h. A = B - C. Wie groß schätzen Sie den absoluten Messfehler ΔA?
- Sie haben eine indirekt gemessene Größe A, die von mehreren Eingangsgrößen B, C, D, ... abhängt, die alle den gleichen Messfehler haben. Welche der Eingangsgrößen hat den größten Einfluss auf den Messfehler von A?
- Sie haben 20 Einzelmessungen mit einer Standardabweichung des Mittelwertes von s. Wie groß ist das Vertrauensintervall, in das der wahre Wert der Messgröße mit einer Wahrscheinlichkeit von 95,5% fällt?

16.2 Fragenkatalog Testat 2

- ***Wofür braucht man ein Dunkelbild?***
  - Ein Dunkelbild (engl. Darkframe) ist eine Aufnahme mit einer abgedeckten CCD- oder CMOS-Kamera bei gleicher Belichtungszeit und Betriebstemperatur wie das Rohbild. Es dient besonders bei Langzeitaufnahmen (z. B. in der Astrofotografie) dazu, zuerst das aus dem Dunkelstrom hervorgegangene Bildrauschen zu entfernen. Dazu wird das Dunkelbild vom Rohbild abgezogen (Dunkelbild- oder Dark-Frame-Korrektur)
- ***Was bedeutet Vignettierung?***
  - Als Vignettierung (frz. vignette „Randverzierung", „Abzeichen") bezeichnet man in der Fototechnik eine Abschattung zum Bildrand hin, die durch eine axiale Anordnung zweier Öffnungen hervorgerufen wird.
- ***Wie findet man die "dead pixelsëiner Kamera?***
  - Sind einzelne Pixel auf dem Kamerachip, die sich nicht „normal" verhalten. Deadpixel sind, wie der Name schonsagt, tote pixel. Das heißt sie nehmen keine Bildinformationen auf. Deadpixel wirken sich im Bild als weiße Punkte aus.
- ***Wie sehen die Fourierkoeffizienten der zweiseitigen trigonometrischen Fourierreihe für x(t) = a cos(2 Ωt) aus?***
  - $a_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(t) * cosk\omega_0 t\ dt$
  - $a_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(t) * cosk\omega_0 t\ dt$
- ***Wie viele Terme hat die zweiseitige trigonometrische Fourierreihe von 1 + sin t + 3 cos 2t?***
  - 5?
- ***Welche Symmetrien hat die zweiseitige Fourierreihe?***
  - Punkt- oder Achsen-symmetrisch an der Y-Achse
- ***Aus welchen Grundsignalen besteht die komplexe Fourierreihe?***
  - Aus der Eulersche Formel welches cos und sin beinhaltet (Eulersche Formel: $e^{ix} = \cos x + i \sin x$)
- ***Aus welchen Summentermen besteht die harmonische Form der Fourierreihe?***
  - $f(t) = A0 + \sum_{k=1}^{\infty} r_k cos(k * \omega_0 t - \phi_k)$
- ***Welchen Vorteil hat die trigonometrische Form der Fourierreihe gegenüber der harmonischen Form?***
  - Den Vorteil dass man die Phase und die Amplitude nicht kompliziert berechnen muss
- ***Was ist der Unterschied zwischen der Menge der zweidimensionalen Vektoren und den komplexen Zahlen?***

- Die komplexe Zahlen C sind zweidimensionale Vektoren. Wie bei jedem Vektor können sie addiert, subtrahiert und mit reellen Zahlen multipliziert werden. Zusätzlich zu den Vektoreigenschaen können sie auch noch miteinander multipliziert und dividiert werden, so dass wieder eine komplexe Zahl herauskommt.

- ***Was ist die Phase einer Sinusschwingung?***
  - Verschiebung ϕ der Schwingung entlang der t-Achse
- ***Was haben komplexe Zahlen mit Sinusschwingungen zu tun?***
  - Sinussignal verhält sich wie eine Komplexe Zahl
- ***Was ist ein gerades Signal?***
  - Ein Signal welches Achsensymmetrisch an der y-Achse ist
- ***Was ist eine δ-Impulsfolge?***
  - Ist ein Rechtecksignal mit unendlicher Amplitude welches sein Tastverhältnis gegen null geht
  - Der resultierende Impuls ist gleichzeitig unendlich steil und unendlich hoch, hat aber immer noch dieselbe Fläche wie das ursprüngliche Rechteck. Beim δ-Impuls ist diese Fläche auf 1 normiert
  - Der periodische δ-Impuls enthält im Abstand $\Delta f = \frac{1}{T}$ alle ganzzahligen Vielfache der Grundfrequenz von Null bis Unendlich mit stets gleicher Amplitude.
- ***Wie unterscheidet sich das Spektrum periodischer Rechteckimpulse von einer Gauß-Impulsfolge und warum?***
  - Signale, die keine schnellen Übergänge aufweisen.
  - Signale können sich nicht schneller ändern als ihre Sinuskomponente mit der höchsten Frequenz.
- ***Was ist die Regellage?***
  - Die positive Seite des Spektrums eines zweiseitigen Amplitudenspektrums
- ***Wie unterscheiden sich die Spektren von schnell und langsam veränderlichen Signalen?***
  - Signale, die keine schnellen Übergänge aufweisen, enthalten auch keine hohen Frequenzen.
  - Signale können sich nicht schneller ändern als ihre Sinuskomponente mit der höchsten Frequenz.
  - Signale mit Sprüngen (Übergänge in unendlich kurzer Zeit) enthalten daher auch Sinus-Schwingungen unendlich hoher Frequenz.
  - Die Differenz zwischen dem idealen Sägezahn und der Summenkurve dort am größten, wo die schnellsten Übergänge bzw. Sprünge sind.

Nicht beantwortete Fragen:

- Was ist der Unterschied zwischen dem Skalarprodukt in einem zweidimensionalen Vektorraum und der Multiplikation zweier komplexer Zahlen?

- Wie berechnet sich die Frequenz einer Sinusschwingung, dass aus der Summe einer Sinus- und einer Cosinusfunktion gleicher Frequenz entsteht?
- Welches der unten aufgeführten Signale enthält keine unendlich hohen Frequenzen?

16.3 Fragenkatalog Testat 3

- ***Wie verändert sich das Spektrums einer Rechteckschwingung mit fester Impulsdauer, bei der die Periode immer weiter erhöht wird?***
  - Es entstehen mehr Linien im Spektrum, da wenn die Periodendauer T größer wird, so wird der Abstand der Linien im diskreten Linienspektrum 1/T notwendigerweise immer enger.
- ***Was ist ein fastperiodisches Signal?***
  - Eine Periodische Wiederholung im Spektrum
  - Ein endliches Signal, das für eine bestimmte Zeit periodisch ist. Linienähnliches Spektrum; nur ganzzahlige vielfachen der Grundfrequenz
- ***Sie beobachten ein Spektrum aus mehreren Linien bei 100 Hz, 200 Hz, 270 Hz, 400 Hz und 800 Hz. Um was für einen Signaltyp handelt es sich?***
  - Quasi Periodisch
- ***Welche Signale lassen sich als Fourierreihe darstellen?***
  - Aperiodische Signale (endlicher Dauer?)
  - Die Darstellung (fast) beliebiger zeitkontinuierlicher Signale gelingt mit dem Fourier integral bzw. der zeitkontinuierlichen Fourier Transformation
  - Periodische Signale mit den folgenden Eigenschaften:
  - 1. f(t) muss über eine Periode absolut integrierbar sein
  - 2. In jeder einzelnen Periode dürfen nur endlich viele Maxi/Mini-ma vorkommen
  - 3.In jeder einzelnen Periode dürfen nur endlich viele Unstetigkeiten vorkommen
- ***Wie sieht das Spektrum eines einzelnen Rechteckimpulses aus?***
  - Umso größer der Impuls, umso höher der Peak des Spektrums, z.B. Breite des Impulses 1 = Peak im Spektrum 0,75. Breite des Impulses 2 = Peak im Spektrum 1,5
- ***Wie sieht die Fouriertransformierte des mit 2 skalierten Einheitsimpulses aus?***
  - 1 * 2 = 2
- ***Wie kann man am besten die wechselnde Tonhöhe in der Aufnahme eines Solo-Musikstückes bestimmen?***
  - Im Spektrum kann man die Harmonischen ablesen welche angeben was für eine Tonhöhe gespielt wird.
- ***Sie zerlegen ein relativ glattes, periodisches Signal in mehrere Abschnitte und bestimmen in jedem Abschnitt die lokale Fourier Transformation. Wie unterscheiden sich die lokalen Spektra vom Gesamtspektrum und warum?***
  - Durch die den senkrechten Ausschnitt entstehen steile Übergänge. Im Spektrum sind diese als hohe Frequenzen sichtbar. Diese sind natürlich im Original Signal nicht vorhanden.
- ***Was bedeutet die Komplementarität von Frequenz und Zeit?***

- Komplementarität von Frequenz und Zeit: Eine zeitliche Eingrenzung der Signaldauer Δt bedeutet eine Ausweitung des Frequenzbandes Δf. Umgekehrt gilt: Je eingeschränkter das Frequenzband eines Signals ist, desto größer muss zwangsläufig die Zeitdauer des Signals sein.

- ***Wie berechnet man die Frequenzunschärfe eines Signals?***
  - Halbwertsbreite oder die Standartabweichung
- ***Was besagt die Frequenz-Zeit-Unschärferelation?***
  - Oft ist Beginn und Ende der Zeitdauer oder des Frequenzbandes eines Signals nicht scharf definiert. Man nimmt daher zur Schätzung von Δt und Δf oft die Halbwertsbreite (die Breite bei 50% des Maximalwertes) oder die Standardabweichungen σt und $\sigma\omega$.(EHER IN 10!)
  - Dauer*Frequenzbreite >= 0,88
- ***Bei welchem Signal ist das Produkt aus Zeit- und Frequenzunschärfe genau gleich 1?***
  - Man kann niemals gleichzeitig Zeitdauer und Frequenz genauer als ot * ow = 1 angeben. Dies ist eine fundamentale Grenze der Fourieranalysis und damit auch der Physik
- ***Was ist der Unterschied zwischen der Fourierreihe und dem Spektrum eines periodischen Signals?***
  - Fourierreihe ist ein diskretes Spektrum
- ***Was ist die des Dirac-Impulses?***
  - $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) * f(t)\ dt \ = \ f(0)$
- ***Bei dem Spektrum eines Signals ist der Realteil gerade und der Imaginär teil ungerade. Um was für einen Signaltyp handelt es sich?***
  - Ein Reelles und ungerades Signal.
- ***Die Fouriertransformierte von $f_1(t)$ sei $F_1(\omega)$, die Fouriertransformierte von $f_2(t)$ sei $F_2(\omega)$. Wie sieht die Fouriertransformierte von f(t) = 3$f_1(t)$ - 0.7$f_2(t)$ aus, und welche Eigenschaft macht man sich dabei zunutze?***
  - $F(t) = 3F_1(\omega) - 0.7F_2(\omega)$
  - Sie macht sich die **Linearität** zu nutze
- ***Was passiert mit dem Spektrum eines Signals, wenn man es in zeitlicher Richtung verschiebt?***
  - Spektrum bleibt gleich wird aber mit dem Phasenfaktor multipliziert
- ***Wie sieht das Spektrum eines Signals aus, das um den Faktor 2 im Zeitbereich gestreckt wird?***
  - um Faktor 2 amplifiziert und die Frequenzen sum Faktor 2 multipliziert.
  - $f(2 * \omega) = \frac{1}{2} * F(\frac{\omega}{2})$

- ***Was passiert mit dem Spektrum eines Signals, wenn man es mit einem konstanten Phasenfaktor mit dem Phasenwinkel a multipliziert?***
  - Dan verscheibt sich das spektrum um den betrag im phasenfaktor
- ***Was ist das Gibbs-Phänomen?***
  - Trotz unendlich vieler Harmonischen konvergiert die Reihe an der Unstetigkeitsstelle nicht und nähert sich auch nicht weiter.
  - Das Gibbs-Phänomen zeigt, das solange nicht unendlich viele Terme in der Fourierreihe sind, man an Unstettigkeitsstellen immer Über/Unter Schwingungen hat. Der maximale Abstand zwischen endlichen Fourierreihen und Zielsignal konvergiert bei unstetigen Signalen nicht.

16.4 Fragenkatalog Testat 4 (Beantwortet von Daniel)

- ***Wie wirkt die Differentiation auf das Spektrum eines Signals?***
  - Die Freuquenz bleibt gleich, nur ihr Betrag ω verändert sich und ihre Phase verschiebt sich um $-\frac{\pi}{2}$.

- ***Wie funktioniert die Faltung, um das Ausgangssignal eines Systems zur Zeit t zu berechnen?***
  1. Impulsantwort h(τ) um t nach links verschieben.
  2. Verschobene Impulsantwort an y-Achse spiegeln.
  3. Punktweise mit dem Signal f(τ) multiplizieren.
  4. Integral ergibt Ausgangswert y(t).

- ***Wie sieht der Amplitudengang eines Differenzierers aus?***
  - Es ist eine Gerade mit Steigung 1.

- ***Wie wirkt ein lineares System auf das Spektrum eines Signals?***
  - Wird auf den Eingang (oder die Eingänge) eines Systems ein sinusförmiges Signal beliebiger Frequenz gegeben und erscheint am Ausgang lediglich ein sinusförmiges Signal genau dieser Frequenz, so ist der Prozess linear, anderenfalls nichtlinear Bsp.: . die Amplitude und Frequenz der Eingangs-SinusSchwingung bleibt unverändert, nur die Phase ändert sich um den Phasenfaktor e$^{-i\omega Tt}$

- ***Was ist ein Bode-Diagramm?***
  - Unter Bode-Diagramm versteht man eine Darstellung von zwei Funktionsgraphen: ein Graph für den Betrag (Amplitudenverstärkung) und einen für das Argument (Phasenverschiebung) einer komplexwertigen Funktion in Abhängigkeit von der Frequenz.

- ***Wie verändert der Phasengang eines linearen Systems die Phase des Eingangssignals?***
  - $Y(\omega) \;=\; H(\omega)\Delta X(\omega)$ **??**
    Oder:
  - $H(\delta) \;=\; A\Delta e^{\text{-i}\omega}$
    (A = Faktor der Amplituden Veränderung ω = zeitliche Verschiebung.)

- ***Welche Eigenschaften haben ideale frequenzselektive Filter im Zeitbereich?***
  - Ideale Filter sind extrem scharf im Frequenzbereich lokalisiert. Nach der Unschärferelation führt dies zu einer weiträumigen "Verschmierung" im Zeitbereich
    Eigenschaffen:
    * Nichtkausal
    * Unendlich große
  - Impulsantwort (Sinc-Funktion)
    * Überschwingen
    * Oszillierendes Einschwingen

- ***Wie kann man einen Vokal in einem Sprachsignal erkennen?***
  - Die Vokalerkennung entspricht also einer Frequenzmessung. Betrachtet man das Spektrum über das ganze Signal, so werden die Spektren der einzelnen fastperiodischen Abschnitte einfach gemischt und können so in ihrer zeitlichen Abfolge nicht mehr unterschieden werden. Um eine Folge von Vokalen erkennen zu können, benötigt man eine lokale Form der Fourieranalyse innerhalb eines gleitenden Zeitfensters.
- ***Welche Eigenschaften hat die Sprungantwort eines idealen frequenzselektiven Filters?***
  - Die Springantwort hat die Form einer sinc-Funktion, d.h. ein Sinus, dessen Amplitude nach beiden Seiten hin abfällt.
- ***Was sind Formanten?***
  - Der Hohlraumresonator des Mund- und Rachenraumes verstärkt Frequenzen, bei denen sich in seinem Inneren stehende Wellen bilden können. Die Frequenzbereiche, bei denen die relative Verstärkung am höchsten ist, bezeichnet man als Formanten.
- ***Wie Funktioniert ein Nächste-Nachbar-Klassifikator?***
  - Das zu klassifizierende Signal wird mit den jeweiligen Prototypen der Klassen verglichen. Der Klassifikator entscheidet sich für die Klasse, zu deren Prototyp das Signal am ähnlichsten ist.
- ***Wie muss man den Frequenzgang eines Filters im Spektralraum verändern, damit sich die Impulsantwort in der Zeitdomäne verschiebt?***
  - Durch Multiplikation mit einer komplexen Zahl mit Betrag 1 (lineare Phasengang, Translationseigenschaft).
- ***Welches System eignet sich zur Detektion von plötzlichen Übergängen in einem Signal?***
  - Der Differenzierer
- ***Ein System liefert für eine Sinusschwingung als Eingangssignal zwei Sinusschwingungen, davon eine mit der gleichen Frequenz, die andere mit einer höheren Frequenz und einer Verzoögerung von 0.5 s. Um welche Art von System handelt es sich?***
  - Um ein kausales nichtlineares System mit Speicher.
- ***Ein System liefert für eine Sinusschwingung als Eingangssignal eine doppelt so große Sinusschwingung gleicher Frequenz als Ausgangssignal, das um 10 ms verzögert ist. Um welche Art von System handelt es sich?***
  - Um ein lineares kausales System mit Speicher.
- ***Was muss man bei der Wahl des Fensters bei der Kurzzeit-Fouriertransformation beachten?*** [Skript 11-4/Skript 9-8]
  - Wird ein kurzes Zeitfenster gewählt, lässt sich relativ genau zeitlich lokalisieren, wann ein relativ breites Band benachbarter Frequenzen wahrnehmbar war.

- ***Was ist ein Faltungssignal?*** [Skript 13-19]
  - Das Faltungsintegral gibt an, wie für ein beliebiges Eingangssignal das zugehörige Ausgangssignal eines linearen Systems mithilfe des Frequenzgangs berechnet werden kann.
- ***Welche Eigenschaften hat ein Proportionalsystem NICHT?***
  - Bei einem Proportionalsystem wird eine Sinusschwingung als Eingangssignal proportional zur Amplitude phasenverschoben.
- ***Welche Aussage über das Wobbelsignal ist falsch?***
  - Theoretisch sollte die Hüllkurve des Ausgangssignals bei einem Wobbelsignal als Input genau den Phasengang des Systems wiedergeben. (sondern den Amplitudengang)
- ***Welche Unterschiede bestehen zwischen dem Korrelationskoeffizient und der Kovarianz als Ähnlichkeitsmaß?***
  - Beim Korrelationskoeffizient wird zusätzlich durch die Standardabweichungen beider Signale geteilt, um ein streuungsunabhängiges Ähnlichkeitsmaß zu erhalten.
- ***Was ist ein Phonem?***
  - Die Menge aller Lauteinheiten, die in einer Sprache die gleiche bedeutungsunterscheidende Funktion haben.
- ***Wie kann man die Systemantwort auf ein Eingangssignal NICHT berechnen?***
  - Durch Faltung des Spektrums mit dem Frequenzgang
- ***Was ist Filterung?***
  - Die Veränderung oder Ausschaltung einzelner Frequenzkomponenten eines Signals.
- ***Wie funktioniert die Kurzzeit-Fouriertransformation?***
  - Das Signal wird in eine Folge überlappender Fenster zerlegt, die mit einer geeigneten Fensterfunktion multipliziert werden. In jedem Fenster Wird eine lokale Fourieranalyse durchgeführt.
- ***Was ist eine Schwebung?***
  - Eine Periodische Verstärkung und abschwächung einer Sinusschwingung.
- ***Was bedeutet ein Korrelationskoeffizient zweier Signal nahe am Wert 1?***
  - Beide Signale sind zueinander sehr ähnlich.
- ***Wie misst man die Ähnlichkeit zweier Signale NICHT?***
  - Durch Lineare Regression
- ***Was ist ein kausales System?***
  - Ein System, bei dem der Output nur von momentanen ud vergangenen Inputs abhängt.
- ***Welche der unten aufgeführten Nachteile bei der Systemidentifikation treffen NICHT auf den Dirac-Impuls zu?***

- Ein Dirac-Impuls enthält nicht alle Frequenzen des Spektrums.(Achtung)

- ***Warum verwendet man meist nichtideale Filter mit welligen Durchlass- und Sperrbereichen und einem Übergangsbereich statt idealen frequenzselektiven Filtern?***
  - Um Überschwinger und Oszillationen zu vermeiden, und um eine endliche kausale Impulsantwort zu erhalten.

- ***Wie viel Dezibel entspricht ein Verstärkungsfaktor von 100?***
  - 40 dB

- ***Wie wird die momentane Frequenz eines akustischen Eingangssignals in der Basilarmembran des Innenohrs codiert?***
  - Aufgrund ihrer variierenden Breite und Dicke hat die Basilarmembran ein Erregungsmaximum, dessen Ort von der Frequenz abhängt. Frequenz wird also durch den Ort codiert.

- ***Wie unterscheiden sich Korrelation und Kovarianz als Ähnlichkeitsmaß?***[Skript 11-27]
  - Bei der Korrelation wird zusätzlich zur Kovarianz durch die Standardabweichungen geteilt. Dadurch wird das Ähnlichkeitsmaß unabhängig von Signalstreuung.

- ***Wie wirkt ein lineares System auf das Spektrum eines Signals?***
  - Das Spektrum wird mit dem Frequenzgang multipliziert.

- ***Welche der unten aufgeführten Systeme haben eine Impulsantwort, die nicht aus einem Dirac-Impuls besteht?***
  - Der Integrierer.

- ***Welcher der unten aufgeführten Systeme haben einen Speicher?***
  - Das Verzögerungsglied

- ***Welches der unten aufgeführten Eigenschaften beschreibt ein lineares System nur unvollständig?***
  - Der Amplitudengang

- ***Warum muss man zur Messung der Systemantwort warten, bis das System einen stationären Zustand erreicht hat?***
  - Weil die durch den Einschaltvorgang angeregten Eigenschwingungen des Systems erst abklingen müssen.

16.5 Fragenkatalog Testat 5

- ***Wie beschreibt man mathematisch die Abtastung eines Signals g(t) zum Zeitpunkt t1?***
  Wählen Sie eine Antwort:
  - a. Durch Multiplikation von g(t) mit einer verschobenen Deltafunktion δ(t - t1).
- ***Wie sieht das Spektrum einer mit Abtastintervall 1 abgetasteten Funktion mit Spektrum G(ω) aus?***
  Wählen Sie eine Antwort:
  - a. Das ursprüngliche Spektrum des kontinuierlichen Signals wird unendlich oft wiederholt, im Abstand 1.
- ***Wie sieht ein idealer zeitdiskreter Tiefpass im Spektralraum aus?***
  Wählen Sie eine Antwort:
  - a. Eine achsensymmetrische Sinc-Funktion.
- ***Ist eine zeitdiskrete Sinusschwingung immer periodisch?***
  Wählen Sie eine Antwort:
  - Nein, nur wenn die Periode oder ganzzahlige Vielfache der Periode ein ganzzahliges Vielfaches des Abtastintervalls darstellen.
- ***Was ist ein FFT-Filter?***
  Wählen Sie eine Antwort:
  a. Ein Filter, bei dem das Eingangssignal zuerst fouriertransformiert wird, dann mit dem Frequenzgang gefaltet und wieder in den Zeitbereich rücktransformiert wird.
  b. Ein Filter, bei dem das Eingangssignal zuerst fouriertransformiert wird, dann mit der Impulsantwort multipliziert und wieder in den Zeitbereich rücktransformiert wird.
  c. Ein Filter, bei dem das Eingangssignal zuerst fouriertransformiert wird, dann mit dem Frequenzgang multipliziert und wieder in den Zeitbereich rücktransformiert wird.
  ==> ?? (Skript 17, Folie 14) Kommentar: (B) Wenn man mit der Impulsantwort nur an den Frequenzen multipliziert, die man beibehalten möchte, hat man doch auch gefiltert. (C) Es ist wahrscheinlich C, weil der Frequenzgang die Fouriertransformierte einer Impulsantwort ist. Somit filtert man ja für jede Frequenz, oder?
- ***Unter welchen Bedingungen entsteht Aliasing?***
  Wählen Sie eine Antwort:
  - a. Wenn die Abtastfrequenz kleiner als die doppelte Maximalfrequenz des Signals ist.
- ***Welche scheinbare Frequenz hat ein Sinussignal der Frequenz f0, wobei f0 größer als die Nyquistfrequenz, aber kleiner als die Abtastfrequenz f1 ist?***
  Wählen Sie eine Antwort:
  - a. Die Frequenz erscheint kleiner als die Nyquistfrequenz, und zwar f1 - f0.
- ***Warum reicht bei diskreten linearen Systemen die Antwort auf einen Einheitsimpuls zum Zeitpunkt 0, um es vollständig zu charakterisieren?***
  Wählen Sie eine Antwort:

a Jedes Signal lässt sich als gewichtete Summe von zeitverschobenen Dirac-Impulsen darstellen. Aufgrund der Superpositionseigenschaft reicht daher die Impulsantwort, um ein solches System vollständig zu charakterisieren.

b. Aufgrund der Linearität ist die Angabe der Systemantwort auf alle zeitverschobenen Dirac-Impulse notwendig. Aus der Zeitinvarianz folgt zusätzlich, dass diese alle gleich sind und somit nur einer (zum Zeitpunkt 0) zur vollständigen Charakterisierung ausreicht.

==> A oder B? (Skript 15, Folie 18) Kommentar: Könnte A richtiger sein? Folie 14...

- ***Warum braucht man bei diskreten periodischen Signalen nur endliche Fourierreihen zu ihrer Darstellung?***
  Wählen Sie eine Antwort:
  - a. Weil es nur endlich viele harmonisch verwandte diskrete Sinus-Signale gibt.
- ***Was sind die Unterschiede zwischen den Analysegleichungen der diskreten und kontinuierlichen Fourierreihe?***
  Wählen Sie eine Antwort:
  - a. Das Integral ist durch eine Summe ersetzt, der Normierungsfaktor ist unterschiedlich.
- ***Wie viele Fourierkoeffizienten hat die Fourierreihe eines diskreten Signals, das aus 8 Abstastpunkten besteht?***
  Wählen Sie eine Antwort:
  - Aus 8.
- ***Wie verändert sich das Spektrum einer Kammfunktion, wenn man das Abtastintervall verdreifacht?***
  Wählen Sie eine Antwort:
  - a. Die Impulse des Spektrums rücken um das Dreifache näher zusammen.
- ***Ist die diskrete Fouriertransformation und die Fouriertransformation bei zeitdiskreten Signalen das Gleiche?***
  Wählen Sie eine Antwort:
  - a. Nein. Die diskrete Fouriertransformation führt auf endliches Spektrum, die Fouriertransformierte eines zeitdiskreten Signals hat ein unendliches Spektrum.
- ***Wie berechnet man die Systemantwort eines diskreten linearen Systems?***
  Wählen Sie eine Antwort:
  - a. Die Impulsantwort wird an der y-Achse gespiegelt, punktweise mit dem Signal multipliziert und alles aufsummiert.
- ***Wie schafft man es, die Fouriertransformierte eines diskreten Signals im Computer zu berechnen, obwohl seine Fouriertransformierte kontinuierlich ist?***
  Wählen Sie eine Antwort:
  - a. Das Eingangssignal wird periodisch fortgesetzt. Das resultierende diskrete periodische Spektrum wird im Rechner nur durch eine Periode repräsentiert.
- ***Was ist der Hauptunterschied zwischen dem Spektrum eines aperiodischen kontinuierlichen Signals und dem eines aperiodischen diskreten Signals?***
  Wählen Sie eine Antwort:

- a. Das Spektrum des diskreten Signals ist periodisch, das des kontinuierlichen Signals nicht.

- ***Wie funktioniert das Sägezahnverfahren bei der A/D-Wandlung?***
  Wählen Sie eine Antwort:
  - a. Man zählt solange die Anzahl der regelmäßig getakteten Impulse, bis eine Sägezahnspannung den Sample-and-Hold-Wert überschreitet. Die Zahl der Impulse ist das quantisierte Ergebnis.

- ***Was ist Aliasing?***
  Wählen Sie eine Antwort:
  - a. Aliasing tritt auf, wenn ein Signal mit mehr als der doppelten Nyquistfrequenz abgetastet wird.

Externer Fragenkatalog:

- ***Welche Fehler können bei der Quantisierung eines analogen Signals NICHT auftreten?***
  Wählen Sie eine Antwort:
  - a. Fehler durch ein falsch gewähltes LSB.

- ***Wie vermeidet man die Welligkeit im Durchlassbereich eines genäherten digitalen Tiefpasses?***
  Wählen Sie eine Antwort:
  - a. Durch Multiplikation der Impulsantwort mit einer Fensterfunktion.

- ***Wodurch unterscheidet sich die Synthesegleichung der diskreten und der kontinuierlichen Fouriertransformation?***
  Wählen Sie eine Antwort:
  - a. Bei der diskreten Fouriertransformation gibt es in der Summe nur endlich viele Terme, bei den kontinuierlichen unendlich vielen Termen.

- ***Wie wird die Abtastung im Zeitabstand T einer zeitkontinuierlichen Funktion mathematisch modelliert?***
  Wählen Sie eine Antwort:
  - a. Durch Multiplikation mit einer unendlichen Pulsfolge mit Abtastintervall 1/T.

- ***Wie viele unterschiedliche zeitdiskrete Sinus- und Cosinus-Signale der Länge 6 gibt es?***
  Wählen Sie eine Antwort:
  - a. 6: 3 Cosinus- und 3 Sinussignale.
  - b. 7: ein konstantes, 3 Cosinus- und 3 Sinussignale.
  - c. 6: ein konstantes, 3 Cosinus- und 2 Sinussignale.

  ==> ? Vielleicht B?

- ***Welches der drei untenstehenden Sinussignale ist nicht periodisch mit der Grundperiode N (sqrt(x) bedeutet Wurzel aus x)?***
  Wählen Sie eine Antwort:
  - $\mathrm{e}^{i\sqrt{2}\frac{2\pi}{Nn}}$
- ***Gegeben ist ein zeitdiskretes Sinussignal der Länge 8 mit 2 Perioden innerhalb des gesamten Abtastintervalls (Wellenzahl = 2). Welches andere Sinussignal unterschiedlicher Wellenzahl ist NICHT identisch zu diesem Sinussignal?*** Wählen Sie eine Antwort:
  a. Das Sinussignal mit der Wellenzahl 6.
  b. Das Sinussignal mit der Wellenzahl 4.
  c. Das Sinussignal mit der Wellenzahl 10.
- ***Welches der unten aufgeführten Verfahren der A/D-Wandlung hat den geringsten Zeitaufwand?***
  Wählen Sie eine Antwort:
  - a. Das Parallelverfahren.
- ***Was passiert, wenn ein Sinussignal mit der Frequenz f0 mit der genau gleichen Frequenz f0 abgetastet wird?***
  Wählen Sie eine Antwort:
  - a. Man erhält ein konstantes Signal.
- ***Kann ein ideales Rechtecksignal vollständig aus seinen Abtastpunkten rekonstruiert werden, sofern diese hinreichend dicht liegen?***
  Wählen Sie eine Antwort:
  a. Ja, insofern die Abtastfrequenz größer als die doppelte Nyquistfrequenz ist.
  b. Nein, das Rechtecksignal ist nicht bandbegrenzt und zeigt daher immer Aliasing.
  c. Ja, falls die Abtastfrequenz größer als die doppelte Maximalfrequenz des Rechtecksignals ist.

16.6 Notizen