Messfehler

Vorlesung 4, Signale, Systeme und Sensoren

Prof. Dr. M. O. Franz

HTWG Konstanz, Fakultät für Informatik

Übersicht

Übersicht

1. Messfehler
2. Fehlerfortpflanzung
3. Systematische Fehler

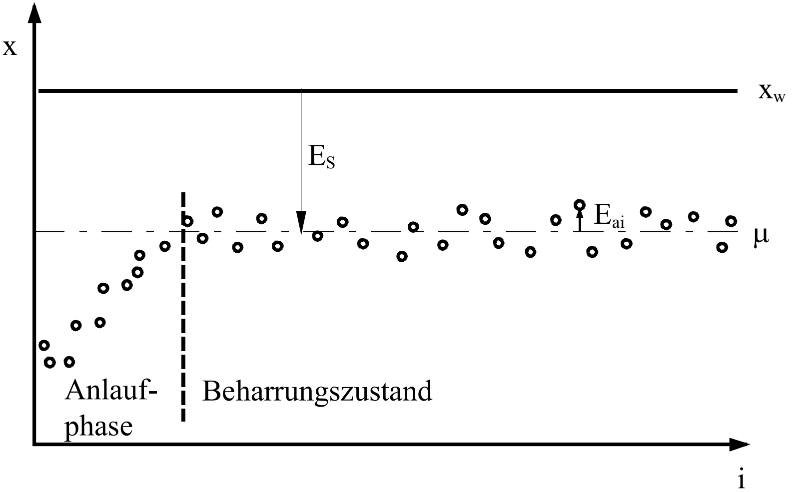
Messfehler

- Eine Messung ist stets mit Unsicherheit behaftet.
- Nach DIN 1319 muss jedes Messergebnis eine Angabe zur Messunsicherheit enthalten.
- Die Differenz zwischen dem wahren Wert x_w und dem gemessenen Wert x wird als **absoluter Fehler** Δx bezeichnet:

  $$\Delta x = x - x_w.$$

  Der absolute Fehler hat die Dimension der Messgröße.
- Der **relative** Fehler ist das Verhältnis $\Delta x / x$ von absolutem Fehler und Messwert (Angabe meist in Prozent).
- Problem: der wahre Wert ist unbekannt, d.h. der Fehler oder der wahre Wert muss geschätzt werden, üblicherweise durch mehrfache Messung.

Beispiel: Häufigkeitsverteilung einer Längenmessung



Quelle: R. Schröter

Systematischer und zufälliger Fehler

- Häufig gibt es eine Anlaufphase, in der sich Messgerät und Messprozess einschwingen bzw. erwärmen. Messwerte aus der Anlaufphase werden verworfen.
- Als Schätzwert für den wahren Wert x_w wird das **arithmetische Mittel** $\overline{x}$ aus den Einzelmesswerten x_i verwendet:

$$\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

- Der Fehler $E_s = \overline{x} - x_w$ wird als **systematischer Fehler** bezeichnet. Die Abweichung wird durch den Sensor verursacht, z.B. durch falsche Eichung, dauernd vorhandene Störung wie Reibung.
- Der Fehler $E_{ai} = x_i - \overline{x}$ ist der **zufällige Fehler**. Die Abweichung wird durch unvermeidbare, regellose Störungen (Rauschen) verursacht.

Schätzung des Messfehlers

Der zufällige Fehler der einzelnen Messwerte x_i um den empirischen Mittelwert $\overline{x}$ lässt sich durch die **empirische Standardabweichung** s der Messreihe schätzen:

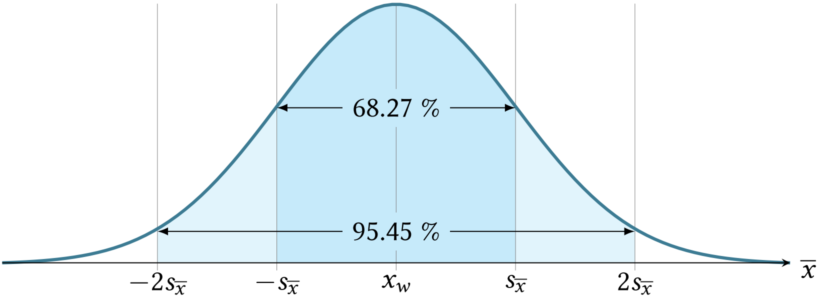
$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\overline{x}-x_i)^2}.$$

Bildet man den arithmetischen Mittelwert $\overline{x}$ aus n Einzelmessungen, so verringert sich die (empirische) **Standardabweichung für den Mittelwert** $s_{\overline{x}}$ gegenüber der des Einzelwertes etwa um den Faktor $\sqrt{n}$:

$$s_{\overline{x}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(\overline{x}-x_i)^2} = \frac{s}{\sqrt{n}}.$$

Gaußverteilung

Man kann beweisen, dass sich die Wahrscheinlichkeitsverteilung für das arithmetische Mittel $\overline{x}$ (d.h. wenn man die Messreihe wiederholt und dann die Häufigkeiten von $\overline{x}$ aufträgt) immer mehr einer **Gaußverteilung** der Breite $s_{\overline{x}}$ nähert, je mehr Einzelmessungen hinzukommen (Zentraler Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitstheorie).



Angabe des Messergebnisses

Geht man davon aus, dass $\overline{x}$ gaußverteilt ist, so gibt $\pm s_{\overline{x}}$ einen **Vertrauensbereich** an, in den der arithmetischen Mittelwerte fallen. Entsprechend gibt $\pm 2 s_{\overline{x}}$ den 95%-Bereich an. Anders gesagt: wir haben eine **Sicherheit** von 68 % bzw. 95 %, dass sich der wahre Wert in dem entsprechenden Vertrauensbereich befindet, sofern keine systematischen Fehler vorliegen.

Wenn wenige Messwerte vorliegen ($n \leq 30$), besteht die Gefahr einer Unterschätzung des Fehlers, da die Schätzung von $s_{\overline{x}}$ selbst fehlerbehaftet ist. Man korrigiert daher die Fehlerschätzung um einen Faktor t nach oben, der von der Anzahl n und der gewünschten Sicherheit P abhängt (s. Tabelle nächste Folie).

Die korrekte Angabe des Messergebnisses erfolgt in der Form

$$x = \overline{x} \pm t \cdot s_{\overline{x}} \ \ [\text{Einheit}].$$

Korrekturfaktoren zur Schätzung der Messunsicherheit

Anzahl Messungen	Sicherheit P = 68,26 %	Sicherheit P = 95 %	Sicherheit P = 99 %
2	1,84	12,71	63,66
3	1,32	4,3	9,93
4	1,2	3,18	5,84
5	1,15	2,78	4,6
6	1,11	2,57	4,03
7	1,09	2,45	3,71
8	1,08	2,37	3,5
9	1,07	2,31	3,36
10	1,06	2,26	3,25
15	1,04	2,15	2,98
20	1,03	2,09	2,86
30	1,02	2,05	2,76
50	1,01	2,01	2,68
80	1,0	1,99	2,64
100	1,0	1,98	2,63
unendlich	1,0	1,96	2,58

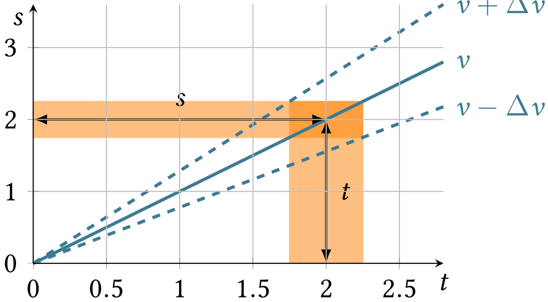
Quelle: http://www.schaltungen.at

Übersicht

Indirekte Messungen

Häufig ist die zu bestimmende Größe nicht direkt messbar, sondern muss indirekt aus einer oder mehreren gemessenen Größen bestimmt werden. Wie wirkt sich der Messfehler dieser Eingangssgrößen auf die Ausgangsgröße aus?

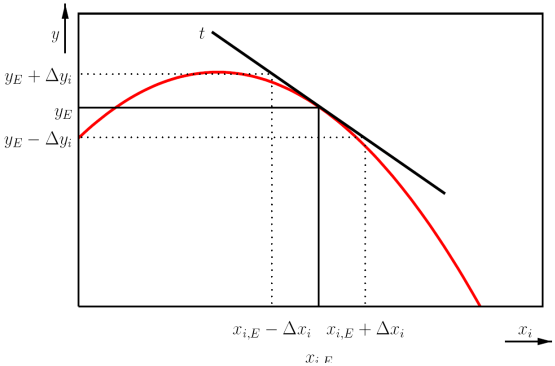
Beispiel: Messung der Geschwindigkeit



Grundidee der Fehlerfortpflanzung: lokale Näherung durch die Tangente

Eindimensionales Beispiel: die Ausgangsgröße y hängt von der Eingangsgröße x über eine Funktion $y = f(x)$ ab. Es gilt näherungsweise:

$$\Delta y \approx f'(x) \cdot \Delta x.$$



Quelle: Aßmuth & Lindner

Erweiterung auf mehrere Eingangsgrößen

Allgemeinerer Fall: Ausgangsgröße hängt von mehreren Eingangsgrößen ab:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_m) = f(\mathbf{x}).$$

Hier gilt das **Gaußsche Fehlerfortpflanzungsgesetz**:

$$\Delta y = \sqrt{\left(\frac{\partial}{\partial x_1} f(\mathbf{x}) \cdot \Delta x_1\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial}{\partial x_m} f(\mathbf{x}) \cdot \Delta x_m\right)^2}$$

mit den partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x_i} f(\mathbf{x})$. Die partiellen Ableitungen stellen Gewichtsfaktoren für die Fortpflanzung der einzelnen Fehler dar.

Beispiel: Geschwindigkeit

Geschwindigkeit: $v = f(s, t) = s/t$ mit der gemessenen Strecke s und Zeit t und den zugehörigen Messunsicherheiten $\Delta s, \Delta t$.

Partielle Ableitungen:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} f(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial s} f(s, t) = \frac{1}{t}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} f(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial t} f(s, t) = -\frac{s}{t^2}$$

Fehlerfortpflanzung:

$$\Delta v = \sqrt{\left(\frac{\partial}{\partial s} f(s, t) \cdot \Delta s\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial t} f(s, t) \cdot \Delta t\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{t} \Delta s\right)^2 + \left(-\frac{s}{t^2} \Delta t\right)^2}$$

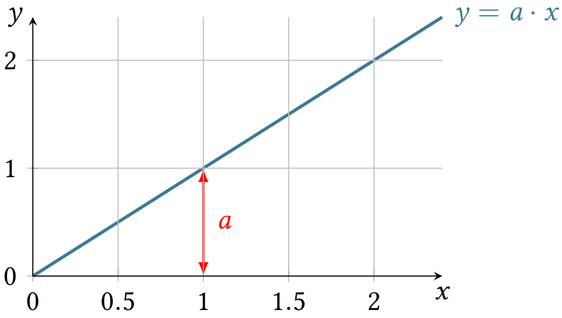
Regeln für die Fehlerfortpflanzung

- **Vorgehensweise:** Die partiellen Ableitungen als Gewichtsfaktoren sollten grundsätzlich vor der Messung berechnet werden. Nur so kann erkannt werden, welche Fehler sich besonders stark auf das Endergebnis auswirken. Die entsprechenden Messwerte müssen dann besonders genau ermittelt werden.
- **Faustregel 1:** Bei Addition und Subtraktion zweier Größen addieren sich deren absolute Fehler. Daher ist es besser, die Differenz zweier nahezu gleich großer Größen direkt zu messen.
- **Faustregel 2:** Bei Multiplikation und Division zweier Größen addieren sich deren relative Fehler. Bei Quadrierung verdoppelt sich daher der relative Fehler, bei Quadratwurzel halbiert er sich.

Übersicht

Übertragungsfunktion eines Sensors

Betrachtet man rein abstrakt die Beziehung zwischen dem Stimulus x_E und dem Ausgangssignal x_A eines Sensors, so spricht man von der **Übertragungsfunktion**. Bei einem idealen Sensor ist die Übertragungsfunktion eine Ursprungsgerade $y = a \cdot x$, d.h. der doppelte Eingangswert ergibt auch den doppelten Ausgangswert usw. Die Steigung a ist die **Sensitivität** des Sensors.

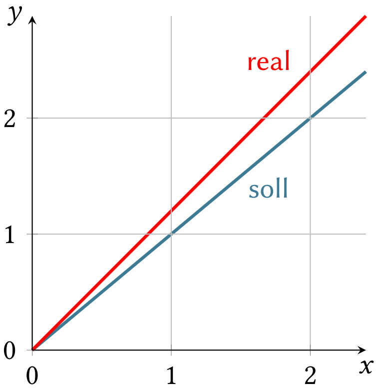


Mess- und Ausgabebereich eines Sensors

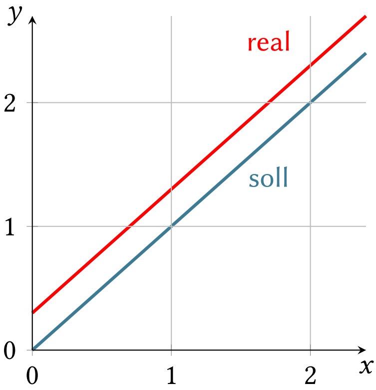
- Der Bereich zwischen dem kleinsten größten und kleinsten Wert eines Stimulus, der von einem Sensor erfasst wird, wird **Messbereich** genannt. Größere Stimuli können den Sensor beschädigen.
- Der Messbereich G wird meist als Verhältnis vom maximalem zum minimalem Eingangswert angegeben, oft logarithmiert in **Dezibel**:
$$G\,[\mathrm{dB}] = 20\log\frac{x_{\mathrm{max}}}{x_{\mathrm{min}}}.$$
- Der **Ausgabebereich** eines Sensors ist das Intervall zwischen dem Ausgangssignal bei kleinstem und größtem angelegten Stimulus.

Ursachen für systematische Fehler (1)

Fehler in der Kennliniensteigung

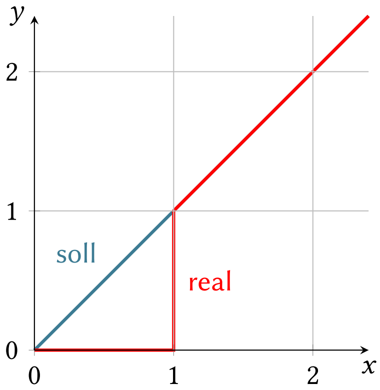


Verschiebung des Nullpunktes

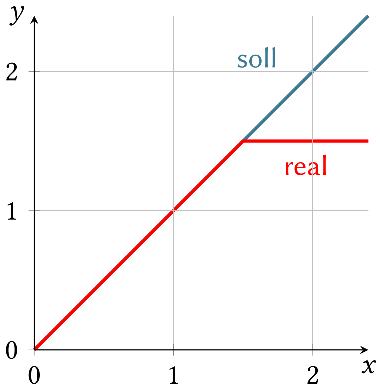


Ursachen für systematische Fehler (2)

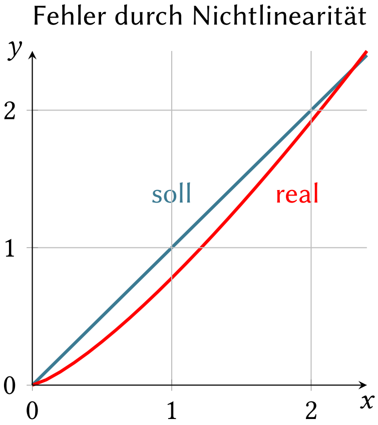
zu geringe Ansprechempfindlichkeit

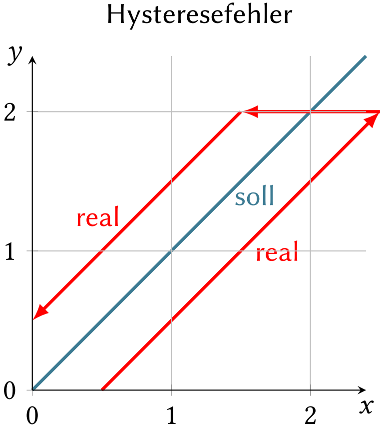


Kappungsfehler



Ursachen für systematische Fehler (3)





Kalibrierung

- Fehler durch zu geringe Ansprechempfindlichkeit und Kappungsfehler lassen sich durch Einhalten des Messbereiches vermeiden.
- Fehler in der Kennliniensteigung, Lage des Nullpunktes und durch eine nichtlineare Kennlinie lassen sich durch eine **Kalibrierung** ausgleichen.

Die Kalibrierung geschieht mithilfe von **Normalen**, d.h. geeichten Messgeräten oder geeignetem Referenzmaterial, mit denen die Übertragungsfunktion des Sensors ausgemessen wird.

Beispiel: Bei einem linearen Sensor kann die Übertragungsfunktion mittels Anlegen zweier genau bekannter Stimuli ermittelt werden. Daraus ergibt sich die Steigung und der Nullpunkt des Sensors. Achtung: um den Einfluss zufälliger Fehler zu minimieren, sollte der Vorgang oft genug wiederholt werden (s.o.).

Lineare Regression

Eine alternative Methode zur Bestimmung der Übertragungsfunktion ist die **lineare Regression**. Hierbei wird von vornherein angenommen, dass die Übertragungsfunktion linear ist, d.h.

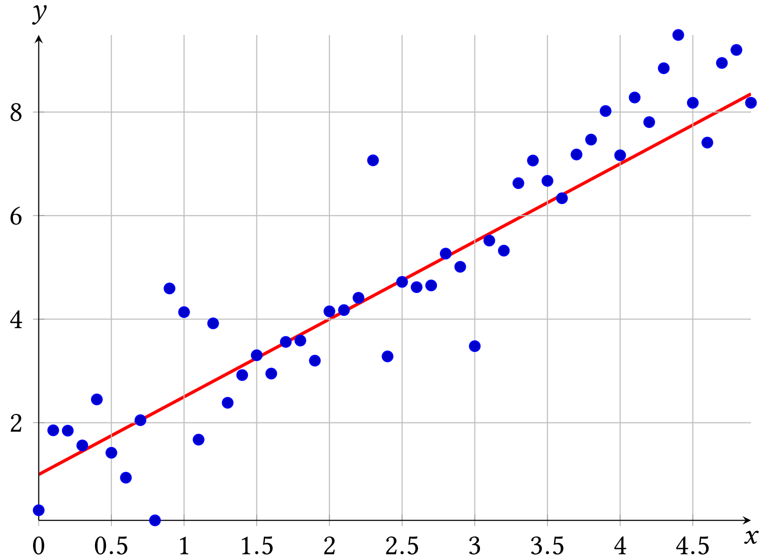
$$y = a \cdot x + b,$$

wobei die Sensitivität a und der Offset b unbekannt sind. Dazu werden mithilfe eines genauen Messgerätes Wertepaare (x_i, y_i) aus Ein- und Ausgangswerten aufgenommen.

Ziel der der linearen Regression ist das Auffinden einer **Ausgleichsgeraden**, die die Summe der quadrierten Abstände zwischen allen n Datenpunkten und der Gerade minimiert:

$$E = \sum_{i=1}^{n} (y_i - (a \cdot x_i + b))^2.$$

Ausgleichsgerade



Herleitung

$$E = \sum_{i=1}^{n} (y_i - (a \cdot x_i + b))^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - 2ay_ix_i - 2y_ib + a^2x_i^2 + 2ax_ib + b^2$$

Ableitung nach b und Nullsetzen:

$$\frac{dE}{db} = \sum_{i=1}^{n} -2y_i + 2ax_i + 2b = -2n\overline{y} + 2an\overline{x} + 2nb = 0 \quad \Rightarrow \quad b = \overline{y} - a\overline{x}$$

Einsetzen in E:

$$E = \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - \overline{y} + a\overline{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \overline{y} - a(x_i - \overline{x}))^2$$

Ableitung nach a und Nullsetzen:

$$\frac{dE}{da} = -2\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) + 2a\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 = 0.$$

Lösung der linearen Regressionsaufgabe

Die Steigung der Ausgleichsgeraden berechnet sich also nach

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}) \cdot (y_i - \overline{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2},$$

der Offset ist

$$b = \overline{y} - a \cdot \overline{x}.$$

Ist der Zusammenhang zwischen Stimulus und Ausgangswert nichtlinear, so gibt es auch Verfahren zur **nichtlinearen Regression**, bei denen z.B. angenommen wird, dass der Zusammenhang eine Parabel oder eine e-Funktion ist.

Mehr zur nichtlinearen Regression: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler*, Band 3, 2001.