Komplexe Fourierreihen

Vorlesung 7, Signale, Systeme und Sensoren

Prof. Dr. M. O. Franz

HTWG Konstanz, Fakultät für Informatik

Übersicht

Übersicht

Eine Asymmetrie in der trigonometrischen Fourierreihe

Trigonometrische Form der Fourierreihe für periodische Signale:

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos k\,\omega_0 t + B_k \sin k\,\omega_0 t$$

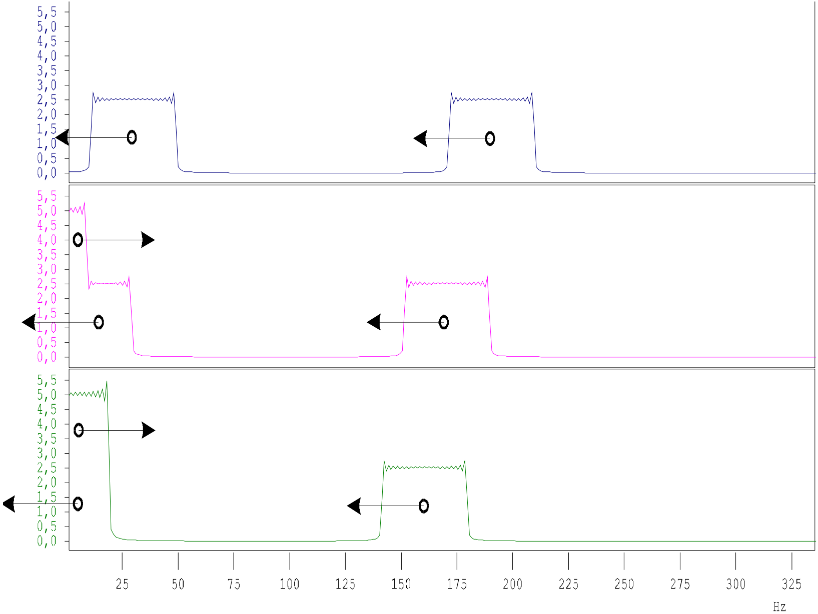
mit den Fourierkoeffizienten

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\,dt, \quad A_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \cos k\,\omega_0 t\,dt,$$

$$B_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \sin k\,\omega_0 t\,dt.$$

Die Berechnung der Koeffizienten weist eine seltsame Asymmetrie auf: das Gleichglied A_0 hat das Gewicht $\frac{1}{T}$, alle anderen Koeffizienten haben das Gewicht $\frac{2}{T}$ vor dem Integral. Warum haben alle Frequenzen größer 0 das doppelte Gewicht in der Fourierreihe?

Experiment: Sinc-Welle mit fallender Tonhöhe



Quelle: Karrenberg, 2012

Die trigonometrische Fourierreihe als Mischung von postiven und negativen Frequenzen

Beobachtung: Der Teil des Frequenzblocks, der jenseits der Frequenz 0 verschwindet, kommt an der y-Achse gespiegelt wieder heraus!

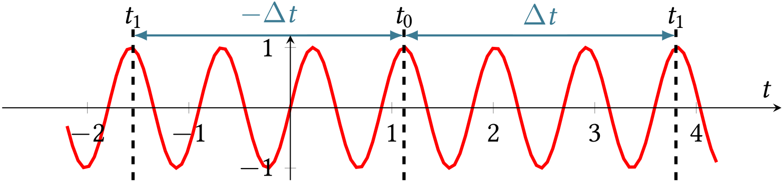
Eine mögliche Erklärung dafür ist, dass es neben den positiven Frequenzen und 0 auch **negative Frequenzen** gibt. Die trigonometrische Darstellung der Fourierreihe würde demnach positive und negative Sinus-Komponenten auf eine bestimmte Weise mischen.

Mit der Einführung von negativen Frequenzen würde auch die Unsymmetrie zwischen den Darstellungen im Zeit- und Frequenzbereich verschwinden: im Zeitbereich sind alle, auch negative Zeitpunkte erlaubt, im Frequenzbereich bisher nur positive Frequenzen.

Problem: wie interpretiert man negative Frequenzen?

Positive und negative Frequenzen

Definition der Frequenz: $f = n/\Delta t$,
d.h. Anzahl der Schwingungen n pro *Zeitraum* Δt. Δt hat immer einen Bezugspunkt t_0, von dem aus der Zeitraum gemessen wird. Das Ende des Zeitraums t_1 liegt normalerweise hinter t_0 (d.h. positives Δt), kann aber genauso gut vor t_0 liegen (d.h. negatives Δt)!



Misst man also Δt vom Bezugszeitpunkt aus in Richtung Vergangenheit, so erhält man eine negative Frequenz, in Richtung Zukunft eine positive Frequenz. Beide haben bis auf das Vorzeichen den gleichen Wert.

Negative Frequenzen bei Cosinus und Sinus

Bei einer Cosinus-Schwingung ändert sich nichts, wenn man von $t_0 = 0$ in die Zukunft oder in die Vergangenheit misst. Dies liegt an der altbekannten Spiegelsymmetrie des Cosinus:

$$\cos(-t) = \cos t \quad \Rightarrow \quad \cos(-\omega t) = \cos \omega t.$$

Man kann sich also jede Cosinus-Schwingung als (z.B. zur Hälfte) zusammengesetzt aus einer Schwingung mit positiver und negativer Frequenz denken:

$$\cos \omega t = \tfrac{1}{2} \cos \omega t + \tfrac{1}{2} \cos(-\omega t).$$

Bei einer Sinus-Schwingung führt aufgrund der Punktsymmetrie eine negative Frequenz zu einem Wechsel des Vorzeichens:

$$\sin(-t) = -\sin t \quad \Rightarrow \quad \sin(-\omega t) = -\sin \omega t.$$

Es gilt daher:

$$\sin \omega t = \tfrac{1}{2} \sin \omega t - \tfrac{1}{2} \sin(-\omega t).$$

Zweiseitige Fourierreihe

Setzt man vorige Zerlegung in positive und negative Frequenzen in die trigonometrische Fourierreihe ein, so erhält man:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cos k\,\omega_0 t + b_k \sin k\,\omega_0 t$$

mit negativen und positiven $k \in \mathbb{Z}$ und den Koeffizienten

$$a_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\cdot \cos k\,\omega_0 t\,dt, \quad b_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\cdot \sin k\,\omega_0 t\,dt.$$

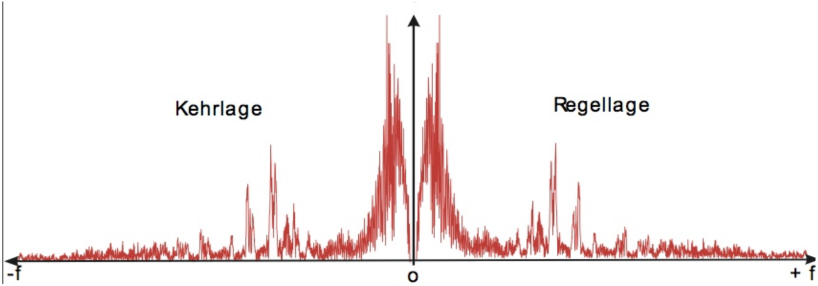
Die Sonderrolle für a_0 entfällt durch Einführung negativer Frequenzen!

Koeffizienten für positive und negative Frequenzen sind nicht frei wählbar, sondern es gelten die Symmetrien

$$a_{-k} = a_k \quad \text{und} \quad b_{-k} = -b_k.$$

Zweiseitiges Amplitudenspektrum

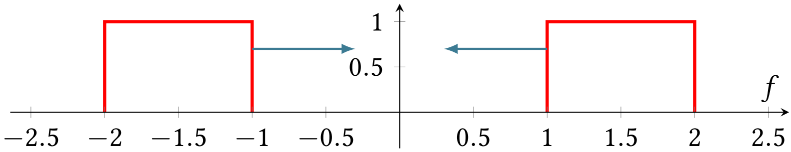
Aufgrund dieser Symmetrien ist das **zweiseitige Amplitudenspektrum** $r_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ für positive und negative Frequenzen immer spiegelsymmetrisch zur y-Achse. Die negative Seite des Spektrums heisst daher **Kehrlage**, die positive **Regellage**.

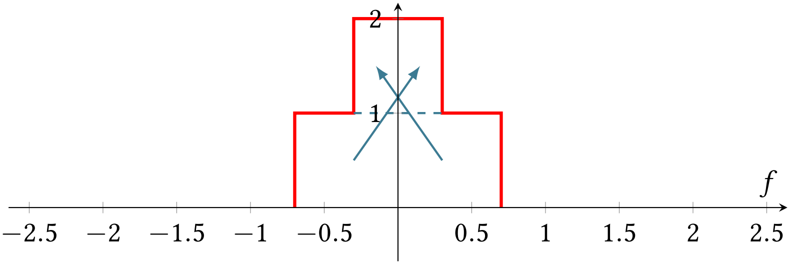


Quelle: Karrenberg, 2012

Achtung: Die Regellage ist nicht identisch zum einseitigen Amplitudenspektrum. Die zweiseitigen Koeffizienten für Frequenzen größer 0 müssen dafür verdoppelt werden.

Sinc-Welle mit fallender Tonhöhe im zweiseitigen Amplitudenspektrum





Übersicht

1. Negative Frequenzen
2. Komplexe Zahlen und Sinussignale
3. Komplexe Fourierreihe

Warum komplexe Zahlen in der Signalverarbeitung?

- Die Fourierreihe mit negativen Frequenzen führt zu einer einheitlichen Behandlung aller Fourierkomponenten und einer sinnvollen Interpretation der spektralen Phänomene in der Nähe des Nullpunkts. Ein letzter "uneleganter" Punkt bleibt: für jede Harmonische müssen 2 Koeffizienten berechnet und verwaltet werden, der Cosinus-Anteil a_k und der Sinus-Anteil b_k. Ziel ist es nun, beide Anteile in einem einheitlichen Term zusammenzufassen.
- Der Schlüssel dazu sind die **komplexen Zahlen**. Diese haben von Natur aus 2 Freiheitsgrade, Real- und Imaginärteil, die sich zu einer eleganten Darstellung der Fourierreihe eignen.
- Viele physikalische und technische Phänomene des Bereiches Signale und Systeme sind heute undenkbar ohne komplexe Zahlen. Die Bindung an diesen Zahlenbereich geht so weit, dass man komplexe Rechnung als wesentlichen Teil der "Sprache der Natur" ansehen muss.

Wiederholung: komplexe Zahlen

- Die komplexe Zahlen $\mathbb{C}$ sind *zweidimensionale Vektoren*. Wie bei jedem Vektor können sie addiert, subtrahiert und mit reellen Zahlen multipliziert werden. Zusätzlich zu den Vektoreigenschaften können sie auch noch miteinander multipliziert und dividiert werden, so dass wieder eine komplexe Zahl herauskommt.
- **Kartesische Form** einer komplexen Zahl: $z = a + bi \quad a, b \in \mathbb{R}$ mit $i = \sqrt{-1}$ und **Realteil** a, **Imaginärteil** b.
- Zwei Zahlen z und z^* sind **komplex konjugiert**, wenn gilt

$$z = a + bi \quad \text{und} \quad z^* = a - bi.$$

- Der **Betrag** einer komplexen Zahl ist definiert als

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{bzw.} \quad |z|^2 = a^2 + b^2 = (a + bi)(a - bi) = z \cdot z^*.$$

- Alle sonstigen Rechenregeln sind wie gewohnt.

Eulersche Formel

- Taylorentwicklung von e^x:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \quad \text{mit} \quad n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$$

- Einsetzen der rein imaginären Zahl ix:

$$\begin{aligned} e^{ix} &= 1 + ix + \frac{i^2 x^2}{2} + \frac{i^3 x^3}{3!} + \cdots = 1 + ix - \frac{x^2}{2} - \frac{ix^3}{3!} + \cdots \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\right) \end{aligned}$$

- Vgl. Taylorreihe von $\cos x$ und $\sin x$:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \quad \text{und} \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

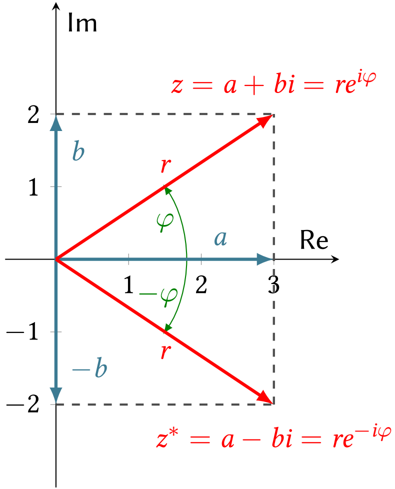
- **Eulersche Formel:** $e^{ix} = \cos x + i \sin x$

Geometrische Interpretation komplexer Zahlen

- Komplexe Zahlen können als Punkte in der **komplexen** oder **Gaußschen Zahlenebene** dargestellt werden: Realteil = x-Wert, Imaginärteil: y-Wert.
- **Kartesische Koordinaten:** Repräsentation als x-y-Paar

$$z = (a, b) = a + ib$$

- **Polarkoordinaten:** Repräsentation als Betrag und Phasenwinkel



$$z = (r, \varphi) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi} \quad \text{mit} \quad r = |z|.$$

Komplexe Zahlen und Sinus-Schwingungen

In Vorlesung 4 haben wir gesehen, dass sich ein beliebiges Sinussignal, d.h. eine Linearkombination von Cosinus- und Sinussignalen gleicher Frequenz

$$r\cos(\omega t - \varphi) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

wie ein zweidimensionaler Vektor verhält, mit dem Cosinusanteil als x-Wert und dem Sinusanteil als y-Wert.

Wie die geometrische Interpretation der komplexen Zahlen und die Eulersche Formel zeigt, kann man genauso gut sagen, dass sich das Sinussignal wie eine komplexe Zahl verhält:

$$r\cos(\omega t - \varphi) = A\,\mathrm{re}\,e^{i\omega t} + B\,\mathrm{im}\,e^{i\omega t}$$

Der Cosinusanteil entspricht hier dem Realteil, der Sinusanteil dem Imaginärteil von $e^{i\omega t}$.

Übersicht

1. Negative Frequenzen
2. Komplexe Zahlen und Sinussignale
3. Komplexe Fourierreihe

Term der Fourierreihe in komplexer Schreibweise

Aufgrund der Eulerschen Formel $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ kann man Real- und Imaginärteil von $e^{ik\omega t}$ wie folgt berechnen:

$$\cos k\omega_0 t = \operatorname{re} e^{ik\omega_0 t} = \tfrac{1}{2}(e^{ik\omega_0 t} + e^{-ik\omega_0 t})$$

$$\sin k\omega_0 t = \operatorname{im} e^{ik\omega_0 t} = \tfrac{i}{2}(e^{-ik\omega_0 t} - e^{ik\omega_0 t})$$

Eingesetzt in den Term $a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t$ der Fourierreihe ergibt sich

$$\tfrac{1}{2}(a_k - ib_k)e^{ik\omega_0 t} + \tfrac{1}{2}(a_k + ib_k)e^{-ik\omega_0 t}.$$

Für den Term der entsprechenden negativen Frequenz $a_{-k} \cos(-k\omega_0 t) + b_{-k} \sin(-k\omega_0 t)$ erhalten wir

$$\tfrac{1}{2}(a_{-k} - ib_{-k})e^{-ik\omega_0 t} + \tfrac{1}{2}(a_{-k} + ib_{-k})e^{ik\omega_0 t}.$$

Mit den Symmetrien $a_{-k} = a_k$ und $b_{-k} = -b_k$ ergibt sich aus beiden Termen zusammen

$$(a_k - ib_k)e^{ik\omega_0 t} + (a_k + ib_k)e^{-ik\omega_0 t}.$$

Komplexe Fourierreihe

Wir können also die zweiseitige Fourierreihe

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cos k\,\omega_0 t + b_k \sin k\,\omega_0 t$$

in komplexer Notation schreiben als

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k - ib_k) e^{ik\omega_0 t} + (a_k + ib_k) e^{-ik\omega_0 t}$$

Wir definieren die beiden **komplexen Fourierkoeffizienten** als

$$c_k = a_k - ib_k \quad \text{und} \quad c_{-k} = a_k + ib_k = c_k^*$$

und erhalten so die elegante **komplexe Fourierreihe**

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega_0 t}.$$

Analyse- und Synthesegleichung der komplexen Fourierreihe

Aus den Analysegleichungen der zweiseitigen Fourierreihe ergibt sich

$$c_k = a_k - ib_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\cdot\cos k\omega_0 t\,dt - \frac{i}{T}\int_0^T f(t)\cdot\sin k\omega_0 t\,dt$$
$$= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\cdot(\cos k\omega_0 t - i\sin k\omega_0 t)\,dt$$

und damit aus der Eulerschen Formel die **Analysegleichung der komplexen Fourierreihe**:

$$c_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\cdot e^{-ik\omega_0 t}\,dt.$$

Die Fourierreihe

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega_0 t}$$

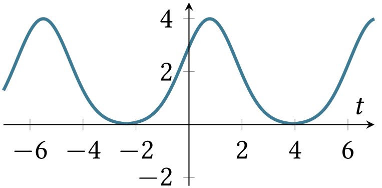
beschreibt den umgekehrten Vorgang und wird auch **Synthesegleichung** bezeichnet.

Darstellung komplexer Spektren

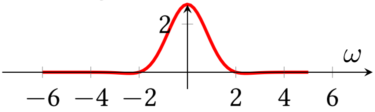
Wie bisher auch besteht das komplexe Spektrum aus zwei Funktionen über die Frequenz, die als zwei Kurven dargestellt werden: Realteil der c_k bzw. Cosinus-Anteil der zweiseitigen Fourierreihe und Imaginärteil bzw. Sinus-Anteil.

Beispiel: Gaußimpulsfolge

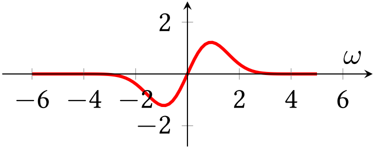
Zeitbereich:



Frequenzbereich Realteil:
(immer gerade)



Frequenzbereich Imaginärteil:
(immer ungerade)

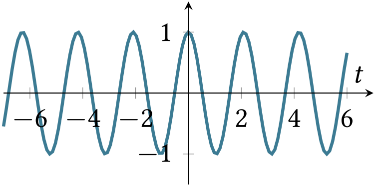


Zwei einfache Beispiele: Sinus und Cosinus (1)

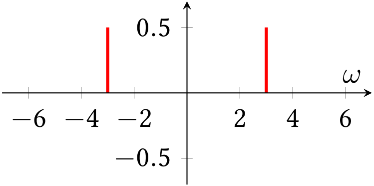
Zeitbereich

Frequenzbereich

$f(t) = \cos 3t = \frac{1}{2}(e^{i3t} + e^{-i3t})$

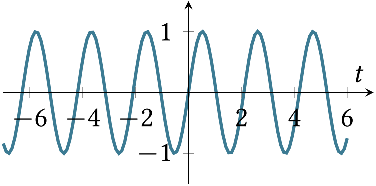


Realteil:



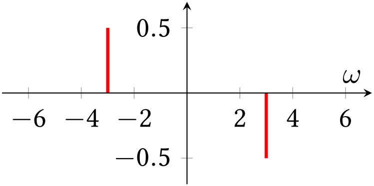
Imaginärteil: 0 (gerades Signal)

$f(t) = \sin 3t = \frac{i}{2}(e^{-i3t} - e^{i3t})$



Realteil: 0 (ungerades Signal)

Imaginärteil:

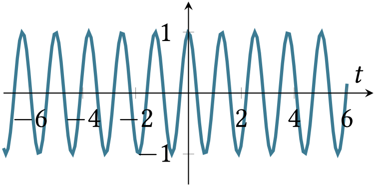


Zwei einfache Beispiele: Sinus und Cosinus (2)

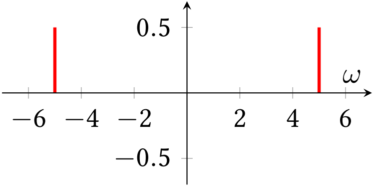
Zeitbereich

Frequenzbereich

$f(t) = \cos 5t = \frac{1}{2}(e^{i5t} + e^{-i5t})$

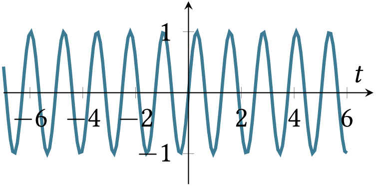


Realteil:



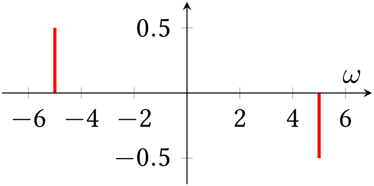
Imaginärteil: 0 (gerades Signal)

$f(t) = \sin 5t = \frac{i}{2}(e^{-i5t} - e^{i5t})$



Realteil: 0 (ungerades Signal)

Imaginärteil:



Beispiel: $f(t) = 1 + \sin t + 2\cos 2t + \cos(2t + \frac{\pi}{4})$ (1)

Das Signal ist weder gerade noch ungerade. Somit sind sowohl Real- als auch Imaginärteil ungleich 0.

Mittelwert: $c_0 = 1$, Periode: $T = 2\pi \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = 1$

Erste Harmonische:

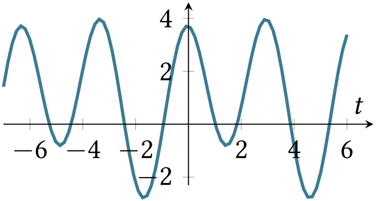
$$\sin t = \frac{i}{2}(e^{-it} - e^{it}) \quad \Rightarrow \quad c_1 = -\frac{1}{2}i,\ c_{-1} = \frac{1}{2}i$$

Zweite Harmonische: $2\cos 2t = 2 \cdot \frac{1}{2}(e^{i2t} + e^{-i2t})$

$$\begin{aligned}
\cos(2t + \tfrac{\pi}{4}) &= \tfrac{1}{2}(e^{i2t+i\pi/4} + e^{-i2t-i\pi/4}) = \tfrac{1}{2}(e^{i\pi/4}e^{i2t} + e^{-i\pi/4}e^{-i2t}) \\
&= \tfrac{1}{2\sqrt{2}}((1+i)e^{i2t} + (1-i)e^{-i2t}) \text{ mit } e^{\pm i\pi/4} = \tfrac{1}{2\sqrt{2}}(1 \pm i) \\
&\Rightarrow \quad c_2 = 1 + \tfrac{1}{2\sqrt{2}}(1+i),\ c_{-2} = 1 + \tfrac{1}{2\sqrt{2}}(1-i)
\end{aligned}$$

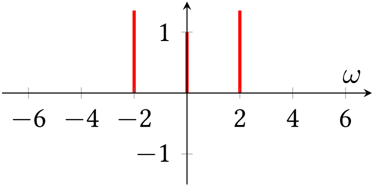
Beispiel: $f(t) = 1 + \sin t + 2\cos 2t + \cos\left(2t + \frac{\pi}{4}\right)$ (2)

Zeitbereich:

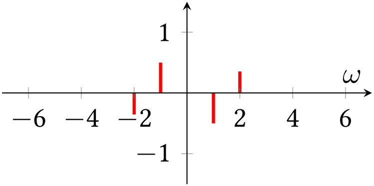


Frequenzbereich

Realteil:



Imaginärteil:



Umrechnung in andere Darstellungen der Fourierreihe

Die komplexe Fourierreihe ist die moderne Standardnotation. Fast die gesamte Literatur, Tabellenwerke und Numerikpakete basieren heute auf dieser Schreibweise.

Die Koeffizienten der älteren Darstellungen lassen sich wie folgt aus den komplexen Fourierkoeffizienten c_k berechnen:

- Zweiseitige Fourierreihe: $a_k = \frac{1}{2}(c_k + c_k^*)$ und $b_k = \frac{i}{2}(c_k^* - c_k)$
- Trigonometrische Fourierreihe:

$$A_k = c_k + c_k^* \quad und \quad B_k = i(c_k - c_k^*) \quad \text{für} \quad k > 0, A_0 = c_0$$

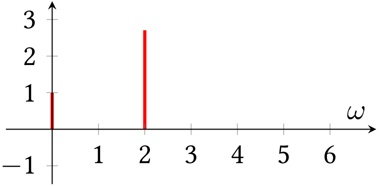
- Harmonische Fourierreihe:

$$r_0 = |c_0|, r_k = 2\sqrt{c_k c_k^*} \quad \text{und} \quad \varphi_k = \operatorname{atan}_2\left(i(c_k - c_k^*), c_k + c_k^*\right)$$

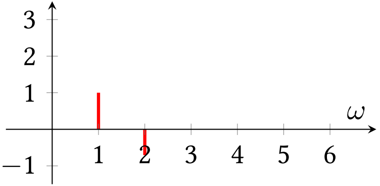
Beispiel: $f(t) = 1 + \sin t + 2\cos 2t + \cos(2t + \frac{\pi}{4})$ (3)

Trigonometrische Fourierreihe:

Cosinusanteil:

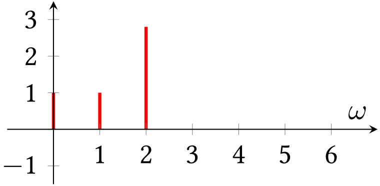


Sinusanteil:

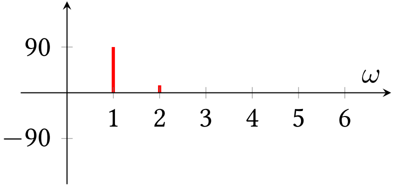


Harmonische Fourierreihe

Amplitude:



Phase:



Kleine Hausaufgabe

- Berechnen Sie die komplexe Fourierreihe von $f(t) = \sin^2 t + \sin t$.
- Rechnen Sie die komplexe Fourierreihe in ihre einseitige trigonometrische und harmonische Darstellung um.