Zeitkontinuierliche Fouriertransformation

Vorlesung 8, Signale, Systeme und Sensoren

Prof. Dr. M. O. Franz

HTWG Konstanz, Fakultät für Informatik

Übersicht

1. Konvergenz von Fourierreihen

2. Spektren nichtperiodischer Signale

3. Zeitkontinuierliche Fouriertransformation

Übersicht

1. Konvergenz von Fourierreihen
2. Spektren nichtperiodischer Signale
3. Zeitkontinuierliche Fouriertransformation

Stimmt die Fouriersche Hypothese?

- Fourierreihen bestehen aus Sinus- und Cosinusfunktionen, d.h. stetigen Funktionen. Erstaunlicherweise können wir damit trotzdem unstetige periodische Funktionen (z.B. Rechteckschwingungen) annähern.
- **Frage 1:** Stimmt die Fouriersche Hypothese, d.h. können *alle* periodischen Funktionen durch Fourierreihen beschrieben werden?
- **Frage 2:** Können wir mit endlichen Fourierreihen beliebig nahe an jede periodische Funktion herankommen?
- Streng genommen ist bei beiden Fragen die Antwort leider nein.
- Erst 1829 konnte durch Dirichlet bewiesen werden, unter welchen Bedingungen eine Fourierreihe existiert, und in welchem Sinn endliche Fourierreihen gegen das originale Signal konvergieren.

Dirichlet-Bedingungen

Ein periodisches Signal ist überall gleich zu seiner Fourierreihe (außer an Unstetigkeiten), wenn gilt:

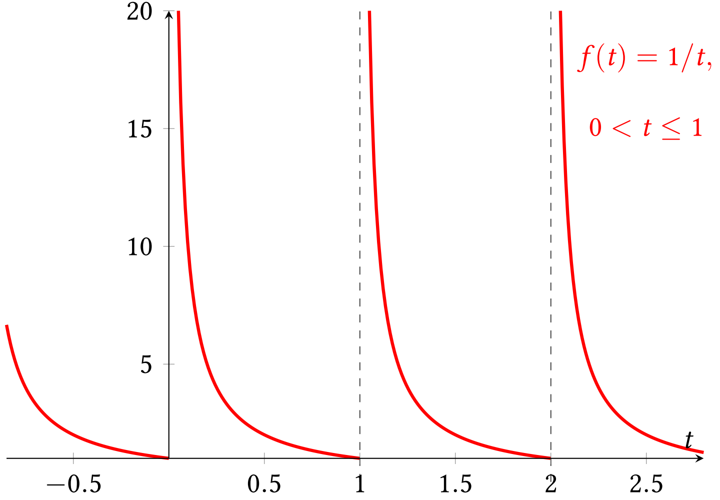
1. $f(t)$ muss über eine Periode absolut integrierbar sein:

$$\int_0^T |f(t)|\, dt < \infty.$$

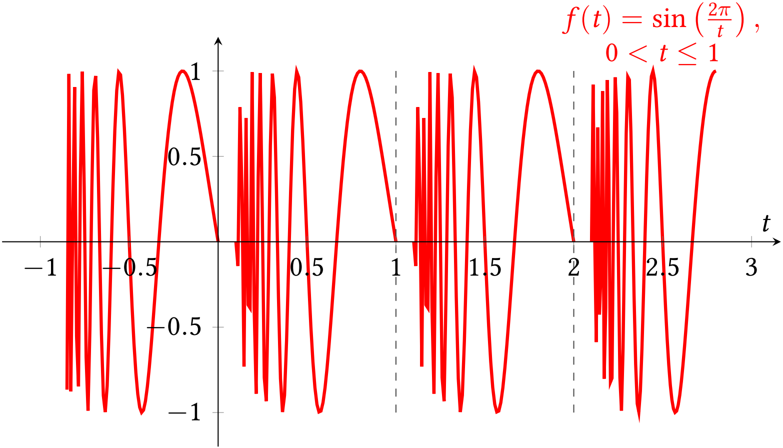
2. In jeder einzelnen Periode dürfen nur endlich viele Maxima und Minima vorkommen.
3. In jeder einzelnen Periode dürfen nur endlich viele und endliche Unstetigkeiten vorkommen.

Fazit: Diese Einschränkungen spielen bei technischen Signalen und Systemen praktisch keine Rolle, da alle realen periodischen Signale diese Bedingungen erfüllen. Damit ist die Fouriersche Hypothese für praktische Signale gültig.

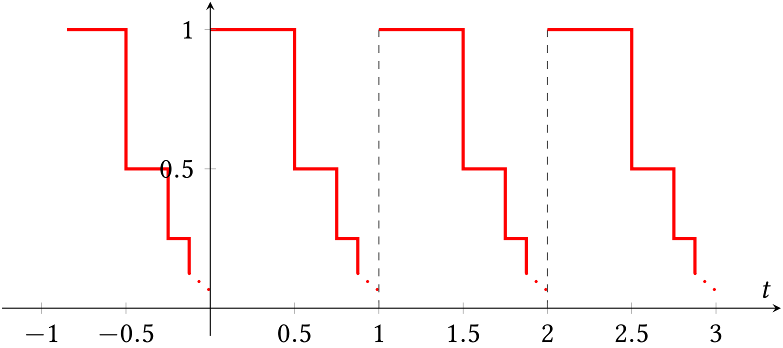
Beispiel für ein Signal, das die 1. Dirichlet-Bedingung verletzt



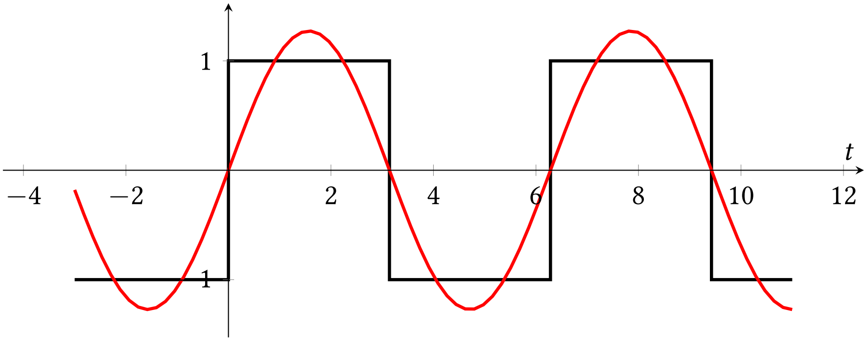
Beispiel für ein Signal, das die 2. Dirichlet-Bedingung verletzt



Beispiel für ein Signal, das die 3. Dirichlet-Bedingung verletzt

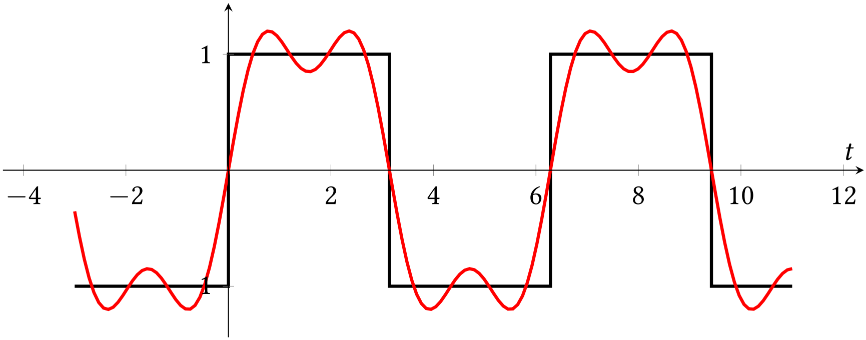


Näherung der Rechteckwelle durch Fourierreihe mit 1 Harmonischen



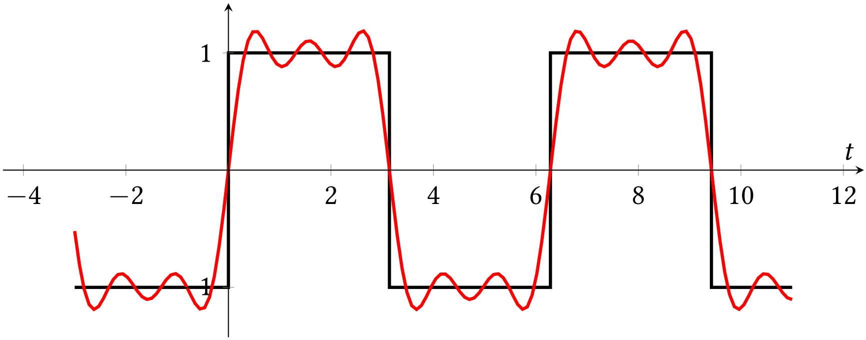
$$f(t) \approx \frac{4}{\pi} \sin t$$

Näherung der Rechteckwelle durch Fourierreihe mit 2 Harmonischen



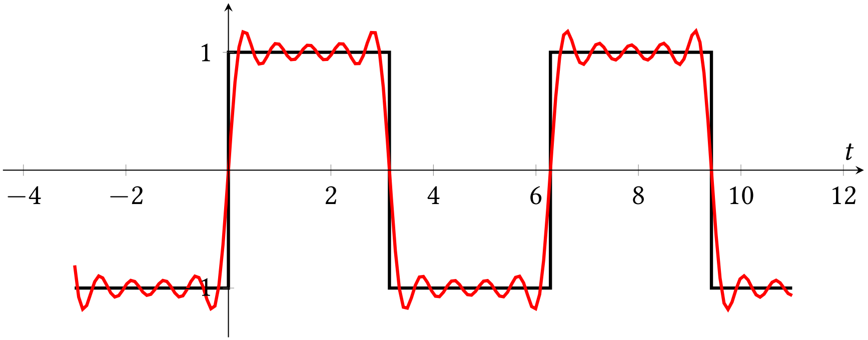
$$f(t) \approx \frac{4}{\pi}\left(\sin t + \frac{1}{3}\sin 3t\right)$$

Näherung der Rechteckwelle durch Fourierreihe mit 3 Harmonischen



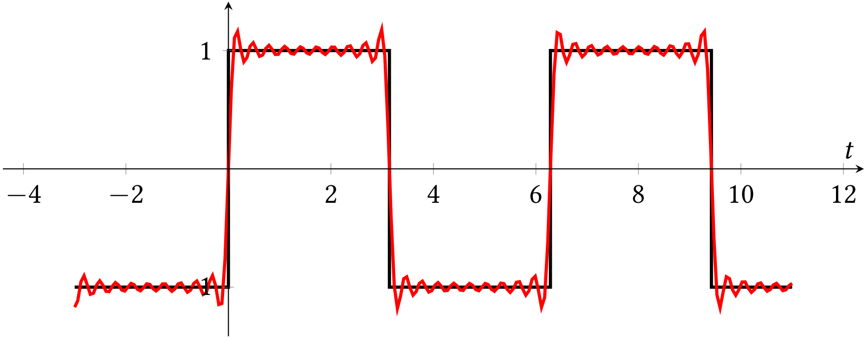
$$f(t) \approx \frac{4}{\pi}\left(\sin t + \frac{1}{3}\sin 3t + \frac{1}{5}\sin 5t\right)$$

Näherung der Rechteckwelle durch Fourierreihe mit 5 Harmonischen



$$f(t) \approx \frac{4}{\pi}\left(\sin t + \frac{1}{3}\sin 3t + \frac{1}{5}\sin 5t + \frac{1}{7}\sin 7t + \frac{1}{9}\sin 9t\right)$$

Näherung der Rechteckwelle durch Fourierreihe mit 10 Harmonischen



$$f(t) \approx \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{9} \frac{1}{2k+1} \sin(2k+1)t$$

Gibbs-Phänomen

- In den glatten Signalabschnitten konvergiert die endliche Fourierreihe gleichmäßig zum Originalsignal.
- Nahe der Unstetigkeitsstellen entstehen sogenannte **Gibbsche Über- und Unterschwinger**, deren Amplitude (bei Rechteckwelle 9%) nicht kleiner wird, egal wie viele Terme man zur Fourierreihe hinzunimmt.
- Die Gibbschen Über- und Unterschwinger verschwinden erst, wenn unendlich viele Terme in der Fourierreihe sind.
- An den Unstetigkeitsstellen selbst konvergiert die Reihe zum Halbwert der Unstetigkeit.
- **Gibbs-Phänomen:** der maximale Abstand zwischen endlichen Fourierreihen und Zielsignal konvergiert bei unstetigen Signalen nicht.

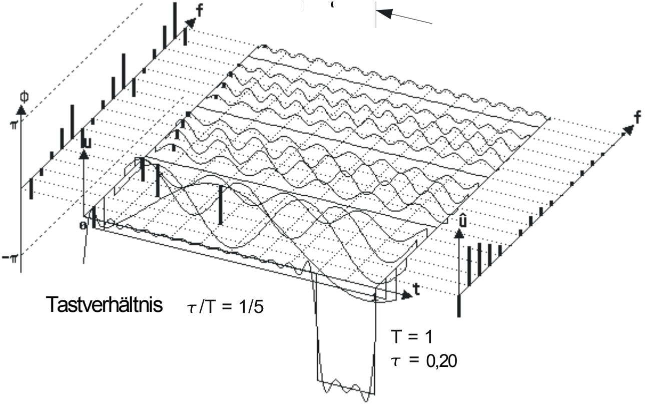
Gibbs-Phänomen bei starker JPEG-Komprimierung

Bei der JPEG-Komprimierung wird das Originalbild durch eine abgeschnittene 2-D-Fourierreihe dargestellt. An Kanten (d.h. Unstetigkeitsstellen) ergeben sich Gibbsche Unter- und Überschwinger.

Übersicht

Wiederholung: Spektren von periodischen Signalen

- Das Spektrum eines periodischen Signals mit Periode T besteht aus Linien im Abstand $\Delta f = 1/T$.
- Jede Linie repräsentiert die Amplitude (oder Phase) eine Sinus-Komponente der Schwingung mit einer Frequenz, die ein ganzzahliges Vielfaches der Grundfrequenz ist.



Wiederholung: Berechnung des Spektrums

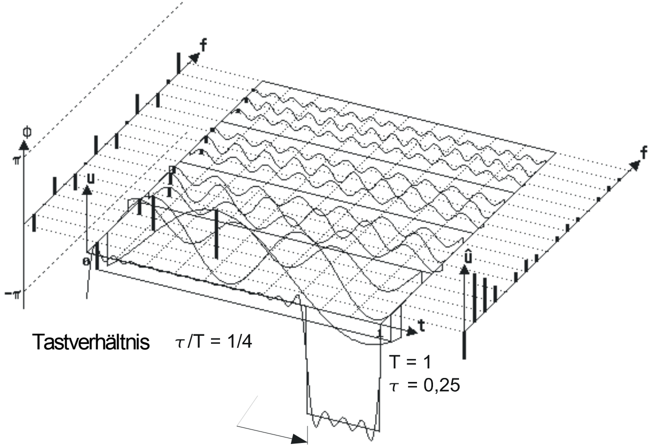
- Die Amplitude und die Phase lassen sich aus der Analysegleichung der komplexen Fourierreihe berechnen:

$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cdot e^{-ik\omega_0 t}\, dt$$

$$r_0 = |c_0|, r_k = 2\sqrt{c_k c_k^*} \quad \text{und} \quad \varphi_k = \mathrm{atan}_2\left(i(c_k - c_k^*), c_k + c_k^*\right)$$

- Andere Frequenzen als ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz können nicht vorkommen, da sich sonst das resultierende Gesamtsignal nicht nach der Zeit T exakt wiederholen könnte.
- Umgekehrt muss also gelten: bei nichtperiodischen Signalen müssen Frequenzen in unterschiedlichen Abständen vorkommen, sonst würde sich das Signal ja wiederholen!

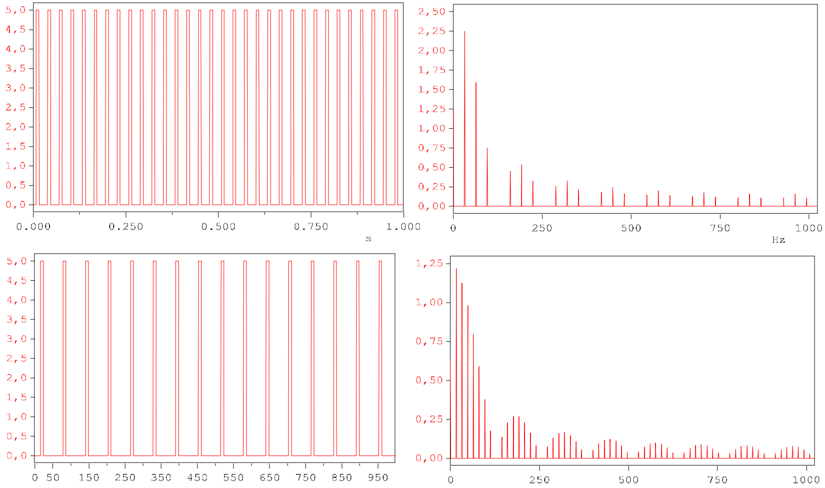
Experiment 1: Rechteckschwingung mit unterschiedlicher Impulsdauer



Quelle: Karrenberg, 2012

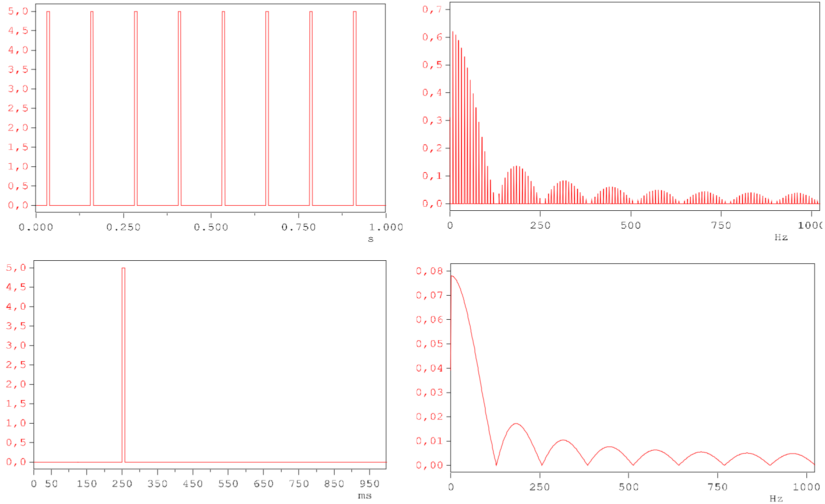
Der Kehrwert der Impulsdauer τ entspricht dem Abstand der Nullstellen im Spektrum.

Experiment 2: Rechteckschwingung mit fester Impulsdauer und wachsender Periode (1)



Quelle: Karrenberg, 2012

Experiment 2: Rechteckschwingung mit fester Impulsdauer und wachsender Periode (2)



Quelle: Karrenberg, 2012

Spektren nichtperiodischer Signale

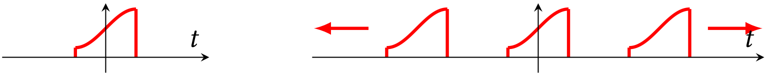
- Das Experiment zeigt: wird die Periodendauer T (bei gleichbleibender Impulsdauer) größer, so wird der Abstand der Linien $1/T$ notwendigerweise immer enger.
- Geht die Periodendauer gegen unendlich (d.h. das Signal wird nichtperiodisch), verschmelzen die einzelnen Linien zu einem durchgehenden, d.h. kontinuierlichen Spektrum.
- Allgemein gilt: periodische Signale besitzen ein **diskretes Linienspektrum**, nichtperiodische Signale dagegen ein **kontinuierliches Spektrum**.
- Im Prinzip genügt also ein Blick auf das Spektrum, um festzustellen, ob ein Signal periodisch oder nichtperiodisch ist. Leider ist der Übergang nicht immer scharf. Viele Signale (z.B. Musik und Sprache) sind **fastperiodisch**, d.h. sie bestehen aus Abschnitten unterschiedlicher Zeitdauer, innerhalb derer das Signal periodisch ist.

Übersicht

1. Konvergenz von Fourierreihen
2. Spektren nichtperiodischer Signale
3. Zeitkontinuierliche Fouriertransformation

Näherung eines aperiodischen Signals durch ein periodisches Signal

Wie im vorigen Experiment gezeigt, können wir ein aperiodisches Signal $f(t)$ durch ein periodisches Signal $\tilde{f}(t)$ annähern, das über eine Periode mit dem aperiodischen Signal übereinstimmt, und dann die Periodendauer gegen unendlich laufen lassen:



Die Linien des Spektrums

$$c_k = c(k\omega_0) = \frac{1}{T}\int_T f(t) \cdot e^{-ik\omega_0 t}\, dt = \frac{1}{T}F(k\omega_0)$$

rücken dadurch immer näher zusammen und werden schließlich kontinuierlich, d.h.

$$k\omega_0 \to \omega \quad \text{und} \quad F(k\omega_0) \to F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t}\, dt$$

Zeitkontinuierliche Fouriertransformation

Einsetzen in die Fourierreihe mit $1/T = \omega_0/2\pi$

$$\tilde{f}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} F(k\omega_0) e^{ik\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\omega_0}{2\pi} F(k\omega_0) e^{ik\omega_0 t}$$

führt mit $k\omega_0 \to \omega$, $\tilde{f}(t) \to f(t)$, $\sum \to \int$ und $\omega_0 \to d\omega$ auf das **Fourierintegral**:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot e^{i\omega t}\, d\omega,$$

d.h. die **Synthesegleichung der kontinuierlichen Fouriertransformation**.

$F(\omega)$ ist das Spektrum des aperiodischen Signals und berechnet sich über die **Analysegleichung**:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t}\, dt$$

Vergleich Fourierreihe und Fouriertransformation

	Fourierreihe	Fouriertransformation
Signaltyp	periodisch	aperiodisch
Spektrum	diskret	kontinuierlich
Synthese-gleichung	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega_0 t}$	$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\cdot e^{i\omega t}\,d\omega$
Analyse-gleichung	$\frac{1}{T}\int_T f(t)\cdot e^{-ik\omega_0 t}\,dt$	$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot e^{-i\omega t}\,dt$

Das Signal und sein Spektrum bilden ein **Transformationspaar**.
Schreibweise:

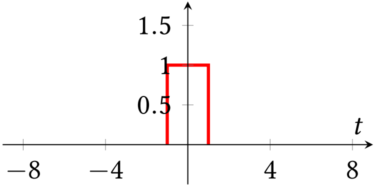
$$f(t) \quad \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad F(\omega)$$

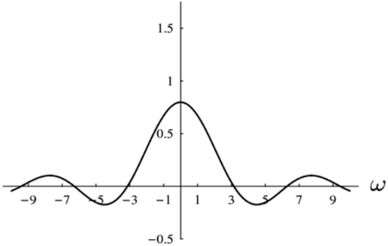
Beispiel: Rechteckimpuls

Zeitbereich

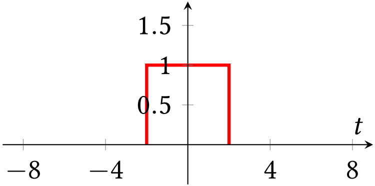
Frequenzbereich

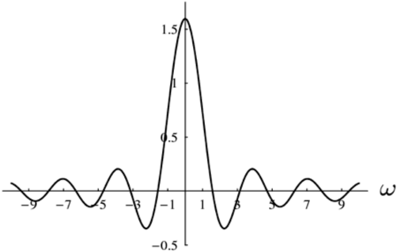
Rechteckimpuls ($b = 1$)





Rechteckimpuls ($b = 2$)





Dirichlet-Bedingungen für die Fouriertransformation

Ähnlich wie bei der Fourierreihe gibt es nicht für jedes beliebige Signal eine Fouriertransformierte. Die Bedingungen dafür sind in den einschlägigen Dirichlet-Bedingungen festgehalten:

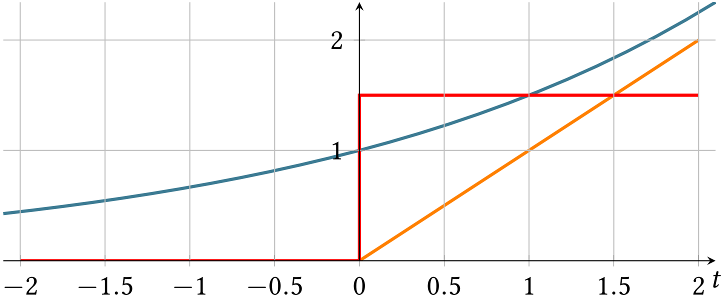
1. $f(t)$ muss absolut integrierbar sein:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \, dt < \infty$$

2. In jedem endlichen Intervall dürfen nur endlich viele Maxima und Minima vorkommen.
3. In jedem endlichen Intervall dürfen nur endlich viele und endlich große unstetige Sprünge vorkommen.

Auch hier spielen die letzten beiden Einschränkungen in der Praxis eine geringe Rolle, die erste aber schon.

Beispiele für Signale, die nicht absolut integrierbar sind



Die Rampen- und die Sprungfunktion spielen eine wichtige Rolle in der Signalverarbeitung, die Exponentialfunktion beschreibt die Antwort instabiler Systeme. Zur Behandlung solcher Signale ist eine Erweiterung der Fouriertransformation notwendig, die **Laplacetransformation**.