

Calcul différentiel

Table des matières

1	informations utiles	2
I	Rappels sur les espaces vectoriels normés	2
2	Rappels de topologie	2
2.1	Distance associée à la norme	2
2.2	rappels de topologie des espaces vectoriels normés	3
2.3	Norme d'opérateur	4
3	Limite et continuité	5

1 informations utiles

Première partie

Rappels sur les espaces vectoriels normés

2 Rappels de topologie

Soit E , un \mathbb{R} -espace vectoriel.

Définition 1. Une norme sur E est une application $||\cdot||_E : E \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

- $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, ||\lambda x||_E = |\lambda| ||x||_E$
- $\forall x, y \in E, ||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$, il s'agit de l'inégalité triangulaire
- $\forall x \in E, ||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$

Exemple. Pour $E = \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} ||x||_2 &= \sqrt{\sum_i x_i^2} \\ ||x||_\Delta &= \sum_i |x_i| \\ ||x||_\infty &= \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \end{aligned}$$

2.1 Distance associée à la norme

Définition 2. La distance associée à cette norme est :

$$\begin{aligned} E \times E &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto d(x, y) := ||x - y|| \end{aligned}$$

Exemple. Pour $A = (1, 0)$, $B = (0, 1)$,

$$\begin{aligned} d_2 &= \sqrt{2} \\ d_\Delta &= 2 \\ d_\infty &= 1 \end{aligned}$$

Définition 3. Deux normes $||\cdot||$ et $||\cdot||'$ sont dites équivalentes s'il existe deux constantes $C > 0$ et $C' > 0$ telles que :

$$\forall x \in E, C' ||x|| \leq ||x||' \leq C ||x||$$

Exercice. Montrer qu'il s'agit effectivement d'une relation d'équivalence.

Théorème 1. Si $\dim E < +\infty$,
toutes les normes sont équivalentes.

Exemple. Sur \mathbb{R}^2 ,

$$\|x\|$$

Rappel 1.

$$\langle x, y \rangle = \|x\|_2 \|y\|_2$$

Sur les espaces de dimension infinie, les choses peuvent être plus compliquées.

Exemple. Dans $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$, pour $f \in E$, on note,

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 f^2(t) dt}$$

$$\|f\| = \int_0^1 f(t) dt$$

$$\|f\|_\infty = \sup_{0 \leq t \leq 1} |f(t)|$$

Soit

$$f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$t \mapsto t^n$$

$$\|f_n\|_1 = \int_0^1 t^n dt$$

$$\|f_n\|_\infty = 1$$

Si $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ étaient équivalents, on aurait une constante C telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|f_n\|_\infty \leq C \|f_n\|_1$$

or,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|f_n\|_\infty = 1 \text{ et } C \|f_n\|_1 = 0$$

On arrive donc à une contradiction.

2.2 rappels de topologie des espaces vectoriels normés

Définition 4. Une boule ouverte est un ensemble $B_{(x,r)}$ de la forme :

$$B_{(x,r)} = \{y \in E \mid \|x - y\| < r\}$$

Définition 5. Un sous-ensemble Ω est un ouvert si :

$$\forall x \in \Omega, \exists r > 0, \mid B_{(x,r)} \subset \Omega$$

Remarque 1. Une conséquence de cette définition est que \emptyset est un ouvert.

Définition 6. Une partie $V \subset E$ est un voisinage de $x_0 \in E$ si :

$$\exists r > 0 \mid B_{(x_0, r)} \subset V$$

Définition 7. Une partie $F \subset E$ est dite fermée si le complémentaire de F $E \setminus F$ est un ouvert.

Exemple. Dans \mathbb{R}^2 ,

$O = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ est un ouvert

$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\}$ est un fermé

Définition 8. Pour E de dimension finie ($\dim E < +\infty$), une partie $X \subset E$ est un compact si elle est fermée et bornée.

2.3 Norme d'opérateur

$(E, \|\cdot\|_E)$ est un espace vectoriel normé de dimension finie ;

$(F, \|\cdot\|_F)$ est un espace vectoriel normé de dimension finie ;

$\mathcal{L}(E, F)$ est aussi un espace vectoriel normé

Pour $u \in \mathcal{L}(E, F)$, on définit la norme triple :

$$\|u\| = \sup_{x \in \mathcal{L}(E, F)} \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E}$$

Proposition 1. En dimension finie,

$$\forall u \in \mathcal{L}(E, F), \|u\| < +\infty$$

Remarque 2.

$$\begin{aligned} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} &= \frac{1}{\|x\|} \|u(x)\| \\ &= \left\| \frac{1}{\|x\|} u(x) \right\| \\ &= \left\| u\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| \end{aligned}$$

Par conséquent, $\|u\| = \sup \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}$

Proposition 2. $\|\cdot\| : \mathcal{L}(E, F) \rightarrow \mathbb{R}$ est une norme

Propriété 1. — $\forall u \in \mathcal{L}(E, F), \forall x \in E$

$$\|u(x)\| \leq \|u\| \cdot \|x\|$$

— $\forall u \in \mathcal{L}(E, F), \forall v \in \mathcal{L}(F, G),$

$$\|v \circ u\| \leq \|v\| \cdot \|u\|$$

Remarque 3. $\mathcal{L}(E, E)$ est une algèbre, i.e. possède un produit :

$$(u, v) \mapsto u \circ v$$

et

$$|||u \cdot v||| \leq |||u||| \cdot |||v|||$$

On dit que $|||\cdot|||$ est une norme d'algèbre

Exercice.

3 Limite et continuité

Définition 9. Soit x_n , une suite de E , soit $l \in E$, on dit que (x_n) converge vers l et on note $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$ si

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, ||x_n - l|| < \epsilon$$

Rappel 2. Les notions d'ouverts, de fermés, etc... se caractérisent en terme de suites convergentes.

Exemple. — $\Omega \in E$ est un ouvert si et seulement si $\forall l \in \Omega, \forall (x_n)$, suite de E , / $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = l$, on a :

$$\exists N \in \mathbb{N} / \forall n > N, x_n \in \Omega$$

— $F \subset E$ est fermée si : $\forall (x_n)$ suite de F , $\forall l \in E$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = l$, on a $l \in F$ (i.e. F contient toutes les limites de ses suites)

— $K \subset E$ est compact si toute suite de K a une valeur d'adhérence dans K .

Rappel 3. Une valeur d'adhérence de (x_n) est une limite d'une suite extraite. Une suite extraite de (x_n) est une suite de la forme $(x_{\phi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ où $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est strictement croissante

Définition 10. Soit $\Omega \in E$, un ouvert.

Soit f , une application telle que $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$,

Soit $x_0 \in E$ et $l \in F$

On dit que f a pour limite sur x_0 si : $\forall \epsilon > 0, \exists r > 0, \forall x \in \Omega, ||x - x_0|| < r \Rightarrow ||f(x) - f(x_0)|| < \epsilon$ On note alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$

Définition 11. Soit $f : \Omega \rightarrow F$, et $x_0 \in \Omega$

f est continue en x_0 si f a pour limite $f(x_0)$ quand x tend vers x_0 (i.e. f est continue en x_0 si $\lim_{x \rightarrow x_0}$ existe et $\lim_{x \rightarrow x_0} = f(x_0)$)

Remarque 4. Avec la définition de la limite,

si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existe, alors cette limite est nécessairement $f(x_0)$

Définition 12. f est continue si f est continue sur Ω si f est continue en tout point de Ω

Example.

$$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$
$$f: (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$