Algèbre linéaire

Table des matières

Première partie

Systèmes d'équations linéaires

Soit $\mathbb{K}$, un corps.

Définition 1. *Un système d'éqution linéaires à n inconnues et p équations est un système d'équations de la forme :*

$$(S)\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \ldots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ \ldots \\ a_{n,1}x_{n,1} + \ldots + a_{n,n}x_{n,n} = b_n \end{cases}$$

avec avec $a_{i,j}$ et b_i des éléments de $\mathbb{K}$
et x_j sont les inconnues.

Définition 2. *Une solution est le n-uplet $(x_1, \ldots, x_n)$ tel que x... sont solutions de toutes les équations.*

Définition 3. *Les $b_1, \ldots, b_p$ sont appelés seconds membres.*

Remarque 1. *à priori, $n \neq p$*

1 Résolution

1.1 Équivalence de systèmes

Pour résoudre, on se ramène à un système équivalent plus simple :

$$(S) \Leftrightarrow (S')$$

$(S) \Leftrightarrow (S')$ signifie que les deux systèmes ont les mêmes solutions.

1.2 Méthode du pivot de Gauss

On ne change pas les solutions en faisant une des trois opérations suivantes :
- changer l'ordre des équations
- multiplier une équation par un élément $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$
- Ajouter à une équation un multiple d'une autre

ou toute opération qui peut se décomposer en une série de telles opérations

Méthode du pivot de Gauss :

- Si $a_{1,1} \neq 0$

  Notation. *$a_{1,1}$ est alors appelé le pivot*
  pour tout i strictement supérieur à 1, on remplace la ligne L_i par $L_i - \frac{a_{i,1}}{a_{1,1}}$

À la fin, on obtient un système dit échelonné, c'est-à-dire de la forme :

$$\begin{cases} a'_{1,j_1}x_{j_1} + \ldots + a'_{1,n}x_n = b'1 \end{cases}$$

Deuxième partie

Chapitre 2 : Espaces vectoriels

Soit $\mathbb{K}$, un corps ($\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, ou autre)

2 Notion d'espace vectoriel

2.1 Définitions

Définition 4. *vague Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est un ensemble d'éléments appelés vecteurs tels qu'on puisse les additionner entre eux et les multiplier par des scalaires, c'est-à-dire des éléments de $\mathbb{K}$ avec des relations naturelles de compatibilité*

Définition 5. *Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est un ensemble E muni de deux lois :*

— *une loi de composition interne :*

$$\begin{aligned} + : E \times E &\to E \\ (u, v) &\mapsto u + v \end{aligned}$$

— *une loi de composition externe :*

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{K} \times E &\to E \\ (\lambda, u) &\mapsto \lambda \cdot v \end{aligned}$$

Ces lois vérifient :

— $\forall u, v, w \in E,\ (u + v) + w = u + (v + w)$
la loi $+$ est donc associative

— $\forall u, v \in E,\ u + v = v + u$
la loi $+$ est donc commutative

— $\exists 0_E \in E,\ \forall u \in E,\ u + 0_E = 0_E + u = u$
la loi $+$ admet un élément neutre

— $\forall u \in E,\ \exists v \in E,\ u + v = v + u = 0_E$
chaque élément de E admet, par $+$, un inverse ou opposé

— $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ \forall u \in E,\ \lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda \cdot \mu) \cdot u$
la loi $\cdot$ est associative

— $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ \forall u \in E,\ (\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u$
la loi $\cdot$ est distributive à gauche

— $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall u, v \in E,\ (u + v) \cdot \lambda = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$
la loi $\cdot$ est distributive à droite

— $\forall u \in E,\ 1 \cdot u = u$
la loi $\cdot$ admet un élément neutre

Remarque 2. *Dans le troisième axiome, l'élément neutre est unique.*
Dans le quatrième axiome, le vecteur v est en fait unique, on le note $-u$.

Proposition 1. *On a également,* $\forall u \in E, \ \forall \lambda \in \mathbb{K}$ *:*

1. $\lambda \cdot 0_E = 0_E$
2. $0_{\mathbb{K}} \cdot u = 0_E$
3. $\lambda \cdot u = 0_E \Rightarrow \lambda = 0_{\mathbb{K}}$ *ou* $u = 0_E$
4. $(-\lambda) \cdot u = \lambda \cdot (-u) = -(\lambda \cdot u)$

Démonstration. 1.

$$\begin{aligned}\lambda \cdot 0_E &= \lambda \cdot (0_E + 0_E) \\ &= \lambda \cdot 0_E + \lambda \cdot 0_E \\ &= \lambda \cdot 0_E + 0_E\end{aligned}$$

$$\lambda \cdot 0_E = O_E$$

2.

$$\begin{aligned}0_{\mathbb{K}} \cdot u &= (0_{\mathbb{K}} + 0_{\mathbb{K}}) \cdot u \\ &= 0_{\mathbb{K}} \cdot u + 0_{\mathbb{K}} \cdot u \\ &= 0_{\mathbb{K}} \cdot u + 0_{\mathbb{K}}\end{aligned}$$

$$0_{\mathbb{K}} \cdot u = O_{\mathbb{K}}$$

3. Si $\lambda = 0_{\mathbb{K}}$, cf. 2
   Si $\lambda \neq 0$, alors $\lambda^{-1} \in \mathbb{K}$,

$$0 = \lambda^{-1} \cdot 0 = \lambda^{-1}(\lambda \cdot u) = (\lambda^{-1} \cdot \lambda) \cdot u = 1 \cdot u = u$$

□

Notation. *On note souvent :*

— $0_E = 0$ *et* $0_{\mathbb{K}} = 0$
— $u - v = u + (-v)$

Lemme 1. $\forall u, v, w \in E, u + w = v + w \Rightarrow u = v$

Démonstration.

$$\begin{aligned}v &= (u + w) - w \\ &= u + (w - w) \\ &= u + 0_E \\ &= u\end{aligned}$$

donc $v = u$ □

Remarque 3. — *Pour* $\lambda \in \mathbb{K}$ *et* $u \in E$ $u \cdot \lambda$ *ne veut rien dire.*
— *Pour* $u, v \in E$ $u \cdot v$ *ne veut rien dire*

Exemple. *1/ Pour les lois de compositions internes et externes usuelles,*

— $\mathbb{K}$ *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel*
— $\mathbb{K}^n$ *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel*
— *plus généralement, si* E_1 *et* E_2 *sont des* $E_1 \times E_2$ *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel*

2/ Soit E*, un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel et* A*, un ensemble qualconque,*

— *$\mathscr{F}(A,E)$, l'ensemble des applications de A dans E, est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel*

$$\forall f_1, f_2 \in \mathscr{F}(A,E),\ \forall \lambda \in \mathbb{K},$$

$$\begin{aligned} f_1 + f_2 : A &\to E \\ a &\mapsto f_1(a) + f_2(a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda \cdot f_1 : A &\to E \\ a &\mapsto \lambda \cdot f_1(a) \end{aligned}$$

— *Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $A = I \subset \mathbb{R}$, un intervalle, on peut avoir $\mathscr{F}(I,\mathbb{R})$*

— *Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $A = \mathbb{N}$, on a $\mathscr{F}(\mathbb{N},\mathbb{R})$, l'ensemble des suites numériques*

3/ $\mathbb{K}[X]$, l'ensemble des polynômes

4/ $M_{n,p}(\mathbb{K})$, l'ensemble des matrices à coefficient dans $\mathbb{K}$, à n lignes et p colonnes.

Remarque 4. *$\mathbb{R}^2$, munit de la loi + usuelle et $\lambda \cdot (x_1, x_2) = (\lambda \cdot x_1, 0)$ n'est pas un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, pourquoi ?*

2.2 Sous-espace vectorel

Définition 6. *Soit E, un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et $F \subset E$. F est un sous espace vectoriel de E s'il s'agit d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les lois + et $\cdot$ de E.*

— $\forall u, v \in F,\ u + v \in F$

— $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall u \in F,\ \lambda \cdot u \in F$

— *+ et $\cdot$ vérifient les propriétés des lois de composition interne et externe des espaces vectoriels*

Proposition 2. *F est un sous-espace vectoriel de E si :*

— $F \neq \emptyset$

— $\forall u, v \in F,\ u + v \in F$

— $\forall u \in F,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda \cdot u \in F$

En pratique, pour montrer qu'un ensemble est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on montre qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel connu.