

Théorie des groupes

Table des matières

1	Groupe opérant sur un ensemble (action de groupe)	2
---	---	---

1 Groupe opérant sur un ensemble (action de groupe)

Définition 1. Soient G , un groupe et X , un ensemble.

On appelle action (ou opération) à gauche de G sur X toute application :

$$\begin{aligned} \cdot : G \times X &\rightarrow X \\ (g, x) &\mapsto g \cdot x \end{aligned}$$

qui satisfait les deux conditions suivantes :

- $\forall g, h \in G, \forall x \in X, g \cdot (h \cdot x) = (g \cdot h) \cdot x$
- $\forall x \in X, e \cdot x = x$

Définition 2. Opération à droite

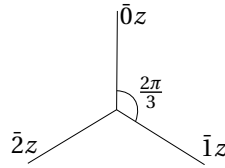
$$\begin{aligned} \cdot : G \times X &\rightarrow X \\ (g, x) &\mapsto g \cdot x \end{aligned}$$

avec :

- $\forall g, h \in G, \forall x \in X, g \cdot (h \cdot x) = (g \cdot h) \cdot x$
- $\forall x \in X, e \cdot x = x$

Exemple.

- $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ agit par rotation sur $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$.
 $\forall z = re^{i\phi} \in \mathbb{C}, \forall \bar{k} \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \bar{k} \cdot z = re^{i\phi + \frac{2\pi k}{3}}$



- \mathbb{R} agit par translation sur \mathbb{R}^2
 $\forall r \in \mathbb{R}, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, r \cdot (x, y) = (x + r, y)$
- \mathbb{R}^2 agit par translation sur \mathbb{R}^2
 $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (\alpha, \beta) \cdot (x, y) = (\alpha + x, \beta + y)$
- Si G est un groupe et $X = G$, alors on a l'opération de G sur lui-même :

1. par translation à gauche :

$$\begin{aligned} \cdot : G \times G &\rightarrow G \\ (g, x) &\mapsto g \cdot x \end{aligned}$$

2. par conjugaison :

$$\begin{aligned} \cdot : G \times G &\rightarrow G \\ (g, x) &\mapsto g \cdot x \cdot g^{-1} \end{aligned}$$

— L'action triviale de G sur X est donnée par :
 $g \cdot x = x, \forall g \in G, \forall x \in X$

Proposition 1. Soit G , un groupe et X , un ensemble.
 Il y a une correspondance bijective et naturelle entre les actions (à gauche) de G sur X et les morphisme de G vers $\text{Bij}(X)$.

Démonstration. — Soit \diamond , une action de G sur X .
 $\forall g \in G$, on considère l'application

$$\begin{aligned} \sigma_g : X &\rightarrow X \\ x &\mapsto g \diamond x \end{aligned}$$

Étant donné que :

$$\begin{aligned} g^{-1} \diamond (g \diamond x) &= (g^{-1}g) \diamond x \\ &= x \\ &= (gg^{-1}) \diamond x \\ &= g \diamond (g^{-1} \diamond x) \end{aligned}$$

On a :

$$\sigma_{g^{-1}} \circ \sigma_g = \text{Id}_X = \sigma_g \circ \sigma_{g^{-1}}$$

Donc $\sigma_g \in \text{Bij}(X)$

De plus, étant donné que $g_1 \diamond (g_2 \diamond x) = (g_1 g_2) \diamond x$,

on a $\sigma_{g_1} \circ \sigma_{g_2} = \sigma_{g_1 g_2}$

Donc l'application :

$$\begin{aligned} \sigma_\diamond : G &\rightarrow \text{Bij}(X) \\ g &\mapsto \sigma_g \end{aligned}$$

est un morphisme.

— Soit $\Psi : G \rightarrow \text{Bij}(X)$, un morphisme.

On obtient l'action \diamond_Ψ de G sur X pour $g \diamond_\Psi x = \Psi(g)(x)$ On vérifie que c'est une action de groupe.

La correspondance bijective vient de $\Psi_{\diamond_\Psi} = \Psi$ et $\diamond_{\Psi_\diamond} = \diamond$

□

Définition 3. Soit G opérant sur X et $x \in X$.
 L'orbite de x sous G est :

$$\text{Orb}(x) = \{g \cdot x \mid g \in G\} \subset X$$

Proposition 2. Soit G opérant sur X .
 Soit \sim , la relation sur X définie par

$$x \sim y \Leftrightarrow x \in \text{Orb}(y)$$

Alors \sim est une relation d'équivalence sur X dont les classes d'équivalences sont les orbites.

Corrolaire 1. Les orbites des éléments de X sous l'action de G forment une partition de X .

On note $G \backslash X$ l'ensemble quotient X / \sim

Démonstration. On montre que \sim est une relation d'équivalence :

- Réflexivité : $\forall x \in X, e \cdot x = x$, par conséquent, $x \in Orb(x)$ et $x \sim x$.
- Symétrie : Supposons $x \sim y$, i.e. $\exists g \in G / x = g \cdot y \Leftrightarrow x \in Orb(y)$
Donc $g^{-1} \cdot x = g^{-1} \cdot (g \cdot y) = (g^{-1}g) \cdot y = e \cdot y = y$
par conséquent, $y \in Orb(x)$
Ainsi $y \sim x$
- transitivité : Supposons $x \sim y$ et $y \sim z$, i.e. $\exists g, h \in G / x = g \cdot y$ et $y = h \cdot z$
Donc $x = g \cdot y = g \cdot (h \cdot z) = (gh) \cdot z$
par conséquent, $x \in Orb(z)$,
ainsi, $x \sim z$

La classé d'équivalence d'un $z \in X$ est $Orb(z)$

□

Exemple. — Les orbites pour $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ opérant sur \mathbb{C} par rotation :

$$Orb(z) = \{z, e^{\frac{2\pi}{3}} z, e^{\frac{4\pi}{3}} z\}$$

Comporte 3 éléments si $z \neq 0$

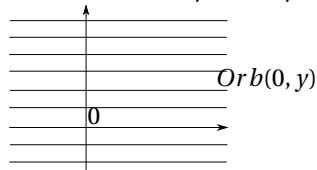
Sinon (pour $z = 0$), $Orb(0) = \{0\}$

— Pour \mathbb{R} opérant sur \mathbb{R}^2 ,

$$r \cdot (x, y) \rightarrow (x + r, y)$$

$$Orb((x, y)) = \{r \cdot (x, y) \mid r \in \mathbb{R}\} = \{(x + r, y) \mid r \in \mathbb{R}\} = \{(\lambda, y) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Ce qui correspond aux droites horizontales passant par $(0, y)$



— \mathbb{R}^2 opérant par translation sur \mathbb{R}^2 , i.e. $\exists (\alpha, \beta), (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$Orb(x, y) = \{(\alpha + x, \beta + y) \mid (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\} = \{(s, t) \mid (s, t) \in \mathbb{R}^2\} = \mathbb{R}^2$$

On a donc qu'une seule orbite

— G opérant par translation sur G tel que $g \cdot x$

$$Orb(e) = \{g \cdot e \mid g \in G\} = \{g \mid g \in G\} = G$$

Donc, $\forall h \in G, Orb(h) = Orb(e) = G$.

Il n'y a donc qu'une seule orbite.

Définition 4. L'action G opérant sur X est transitive s'il existe exactement une orbite dans X .

Définition 5. Soit G opérant sur X , une action de groupe.

— Le stabilisateur de $x \in X$ dans G est le sous groupe

$$\text{Stab}(x) = \{g \in G \mid g \cdot x = x\} \subset G$$

— Les points fixés par $g \in G$ sont définis par :

$$\text{Fig}(g) = \{x \in X \mid g \cdot x = x\}$$

— $x \in X$ est un point fixe sous l'action de G si $\forall g \in G, g \cdot x = x (\Leftrightarrow \text{Stab}(x) = G \Leftrightarrow \text{Orb}(x) = \{x\})$

Proposition 3. Soit G opérant sur X , une action de groupe.

Si x et y sont dans la même orbite, i.e. $\text{Orb}(x) = \text{Orb}(y)$, alors $\text{Stab}(x)$ et $\text{Stab}(y)$ sont conjugués.

Démonstration. Supposons $y = g \cdot x$. Alors

$$g^{-1} \cdot y = g^{-1} \cdot (g \cdot x) = (g^{-1}g) \cdot x = e \cdot x = x$$

On va montrer que $g\text{Stab}(x)g^{-1} = \text{Stab}(y)$.

— Soit $h \in \text{Stab}(x)$, i.e. $ghg^{-1} \in g\text{Stab}(x)g^{-1}$
On souhaite montrer que $ghg^{-1} \in \text{Stab}(y)$

$$(ghg^{-1}) \cdot y = g \cdot (h \cdot (g^{-1} \cdot y)) = g \cdot (h \cdot x) = g \cdot x = y$$

Donc $ghg^{-1} \in \text{Stab}(y)$ et donc $g\text{Stab}(x)g^{-1} \subseteq \text{Stab}(y)$

— L'argument précédent, en échangeant x par y et g par g^{-1} , nous donne :

$$g^{-1}\text{Stab}(y)g \subseteq \text{Stab}(x)$$

$$\text{Stab}(y) \subseteq g\text{Stab}(x)g^{-1}$$

□

Théorème 1. Soit G opérant sur X une action de groupe.

Soit, de plus, $x \in X$.

Il y a une bijection entre $\text{Orb}(x)$ et $G/\text{Stab}(x)$ (les classes d'équivalence à gauche de $\text{Stab}(x)$). En particulier, si $\text{Orb}(x)$ est fini, alors $\text{Stab}(x)$ est d'indice fini dans G et $|\text{Orb}(x)| = [G : \text{Stab}(x)]$

Démonstration. On veut définir la fonction :

$$f : \text{Orb}(x) \rightarrow G/\text{Stab}(x) = \{g\text{Stab}(x) \mid g \in G\} \quad g \cdot x \mapsto g\text{Stab}(x)$$

— f est en effet une fonction.

Soient $g, h \in G$

$$\begin{aligned}
 g \cdot x = h \cdot x &\Leftrightarrow h^{-1} \cdot (g \cdot x) = h^{-1} \cdot (h \cdot x) \\
 &\Leftrightarrow (h^{-1} \cdot g) \cdot x = (h^{-1} \cdot h) \cdot x \\
 &\Leftrightarrow (h^{-1} \cdot g) \cdot x = x \\
 &\Leftrightarrow h^{-1} \cdot g \in \text{Stab}(x) \\
 &\Leftrightarrow \exists s \in \text{Stab}(x), h^{-1}g = s \text{ autrement dit } g = hs \\
 &\Leftrightarrow g\text{Stab}(x) = h\text{Stab}(x)
 \end{aligned}$$

— f est injective car $g\text{Stab}(x) = h\text{Stab}(x) \Rightarrow gx = hx$

— f est surjective car $\forall g\text{Stab}(x) \in G/\text{Stab}(x), f(g \cdot x) = g\text{Stab}(x)$

□

Corrolaire 2. *Formule de classes* Si G est un groupe fini, alors

$$\forall x \in X, |G| = |\text{Stab}(x)| \cdot |\text{Orb}(x)|$$

Démonstration. Si G est fini, alors $\text{Orb}(x)$ est fini et

$$|\text{orb}(x)| = [G : \text{Stab}(x)] = \frac{|G|}{|\text{Stab}(x)|}$$

□