Calcul différentiel

Table des matières

1 informations utiles

Première partie
Rappels sur les espaces vectoriels normés

2 Rappels de topologie

Soit E, un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Définition 1. *Une norme sur E est une application* $||||_E : E \to \mathbb{R}$ *vérifiant :*
- $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ ||\lambda x||_E = |\lambda| ||x||_E$
- $\forall x, y \in E,\ ||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$, *il s'agit de l'inégalité triangulaire*
- $\forall x \in E,\ ||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$

Exemple. *Pour* $E = \mathbb{R}^n$,

$$||x||_2 = \sqrt{\sum_i x_i^2}$$
$$||x||_\Delta = \sum_i |x_i|$$
$$||x||_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

2.1 Distance associée à la norme

Définition 2. *La distance associée à cette norme est :*

$$\begin{aligned} E \times E &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto d(x, y) := ||x - y|| \end{aligned}$$

Exemple. *Pour* $A = (1, 0)$, $B = (0, 1)$,

$$d_2 = \sqrt{2}$$
$$d_\Delta = 2$$
$$d_\infty = 1$$

Définition 3. *Deux normes* $||\cdot||$ *et* $||\cdot||'$ *sont dites équivalentes s'il existe deux constantes* $C > 0$ *et* $C' > 0$ *telles que :*

$$\forall x \in E,\ C'||x|| \leq ||x||' \leq C||x||$$

Exercice. *Montrer qu'il s'agit effectivement d'une relation d'équivalence.*

Théorème 1. *Si* $\dim E < +\infty$,
toutes les normes sont équivalentes.

Exemple. *Sur* $\mathbb{R}^2$,

$$||x$$

Rappel 1.

$$< x, y >= ||x||_2||y||_2$$

Sur les espaces de dimension infinie, les choses peuvent être plus compliquées.

Exemple. *Dans* $E = C^0([0,1],\mathbb{R})$, *pour* $f \in E$, *on note,*

$$||f||_2 = \sqrt{\int_0^1 f^2(t)dt}$$

$$||f|| = \int_0^1 f(t)dt$$

$$||f||_\infty = \sup_{0\leq t\leq 1} |f(t)|$$

Soit

$$f_n : \begin{array}{c} [0,1] \to \mathbb{R} \\ t \mapsto t^n \end{array}$$

$$||f_n||_1 = \int_0^1 t^n dt$$

$$||f_n||_\infty = 1$$

Si $||\cdot||_1$ *et* $||\cdot||_\infty$ *étaient équivalents, on aurait une constate* C *telle que :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ ||f_n||_\infty \leq C||f_n||_1$$

or,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ ||f_n||_\infty = 1 \ et\ C||f_n||_1 = 0$$

On arrive donc à une contradiction.

2.2 rappels de topologie des espaces vectoriels normés

Définition 4. *Une boule ouverte est un ensemble* $B_{(x,r)}$ *de la forme :*

$$B_{(x,r)} = \{y \in E \mid ||x-y|| < r\}$$

Définition 5. *Un sous-ensemble* Ω *est un ouvert si :*

$$\forall x \in \Omega,\ \exists r > 0,\ \mid B_{(x,r)} \subset \Omega$$

Remarque 1. *Une conséquence de cette définition est que $\emptyset$ est un ouvert.*

Définition 6. *Une partie $V \subset E$ est un voisinage de $x_0 \in E$ si :*

$$\exists r > 0 \mid B_{(x_0,r)} \subset V$$

Définition 7. *Une partie $F \subset E$ est dite fermée si le complémentaire de F $E \backslash F$ est un ouvert.*

Exemple. *Dans $\mathbb{R}^2$,*
$O = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ *est un ouvert*
$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\}$ *est un fermé*

Définition 8. *Pour E de dimension finie ($\dim E < +\infty$), une partie $X \subset E$ est un compact si elle est fermée et bornée.*

2.3 Norme d'opérateur

$(E, ||\cdot||_E)$ est un espace vectoriel normé de dimension finie;
$(F, ||\cdot||_F)$ est un espace vectoriel normé de dimension finie;
$\mathscr{L}(E, F)$ est aussi un espace vectoriel normé
Pour $u \in \mathscr{L}(E, F)$, on définit la norme triple :

$$|||u||| = \sup_{u \in \mathscr{L}(E,F)} \frac{||u(x)||_F}{||x||_E}$$

Proposition 1. *En dimension finie,*

$$\forall u \in \mathscr{L}(E, F),\ |||u||| < +\infty$$

Remarque 2.

$$\begin{aligned} \frac{||u(x)||}{||x||} &= \frac{1}{||x||}||u(x)|| \\ &= ||\frac{1}{||x||}u(x)|| \\ &= ||u(\frac{x}{||x||})|| \end{aligned}$$

Par conséquent, $|||u||| = \sup \frac{u(x)}{x}$

Proposition 2. $|||\cdot||| : \mathscr{L}(E, F) \to \mathbb{R}$ *est une norme*

Propriété 1. — $\forall u \in \mathscr{L}(E, F),\ \forall x \in E$

$$||u(x)|| \leq |||u||| \cdot ||x||$$

— $\forall u \in \mathscr{L}(E, F),\ \forall v \in \mathscr{L}(F, G),$

$$|||v \circ u||| \leq |||v||| \cdot |||u|||$$

Remarque 3. *$\mathscr{L}(E,E)$ est une algèbre, i.e. possède un produit :*

$$(u,v) \mapsto u \circ v$$

et

$$|||u \cdot v||| \leq |||u||| \cdot |||v|||$$

On dit que $|||\cdot|||$ est une norme d'algèbre

Exercice.

3 Limite et continuité

Définition 9. *Soit x_n, une suite de E, soit $l \in E$,*
on dit que (x_n) converge vers l et on note $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$ si

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ ||x_n - l|| < \epsilon$$

Rappel 2. *Les notions d'ouverts, de fermés, etc... se caractérisent en terme de suites convergentes.*

Exemple.

- *$\Omega \in E$ est un ouvert si et seulement si $\forall l \in \Omega$, $\forall (x_n)$, suite de E, / $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = l$, on a :*
  $\exists N \in \mathbb{N}$ / $\forall n > N$, $x_n \in \Omega$
- *$F \subset E$ est fermée si : $\forall (x_n)$ suite de F , $\forall l \in E$, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = l$, on a $l \in F$ (i.e. F contient toutes les limites de ses suites)*
- *$K \subset E$ est compact si toute suite de K a une valeur d'adhérence dans K.*

Rappel 3. *Une valeur d'adhérence de (x_n) est une limite d'une suite extraite.*
Une suite extraite de (x_n) est une suite de la forme $(x_{\phi(n)})_{x\in\mathbb{N}}$ où $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante

Définition 10. *Soit $\Omega \in E$, un ouvert.*
Soit f, une application telle que $f : \Omega \to \mathbb{R}$,
Soit $x_0 \in E$ et $l \in F$
On dit que f a pour limite sur x_0 si : $\forall \epsilon > 0$, $\exists r > 0$, $\forall x \in \Omega$, $||x - x_0|| < r \Rightarrow ||f(x) - f(x_0)|| < \varepsilon$ On note alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$

Définition 11. *Soit $f : \Omega \to F$, et $x_0 \in \Omega$*
f est continue en x_0 si f a pour limite $f(x_0)$ quand x tend vers x_0 (i.e. f est continue en x_0 si $\lim\limits_{x\to x_0}$ existe et $\lim\limits_{x\to x_0} = f(x_0)$)

Remarque 4. *Avec la définition de la limite,*
si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ existe, alors cette limite est nécessairement $f(x_0)$

Définition 12. *f est continue si f est continue sur Ω si f est continue en tout point de Ω*

Exemple.

$$f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} \; si \; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \; si \; (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}$$

Deuxième partie
Différentiabilité

Rappel 4. *Rappels en dimension 1 :*
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est dérivable en* $x_0 \in \mathbb{R}$ *de dérivée* λ
$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lambda$

Une définition équivalente est la suivante :
f *est dérivable en* x_0 *de dérivée* λ *s'il existe une fonction* $\varepsilon(h)$ *telle que :*

— $f(x) = f(x_0) + \lambda(x - x_0)\varepsilon(x - x_0)$
— $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$

Il suffit alors de poser $\varepsilon(h) = \frac{f(x-h)-f(x_0)}{h}$ *Où on a alors la pente de* Δ_{x_1} *s'exprimant* $\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$
On peut aussi voir Δ_{x_1} *comme le graphe d'une application affine :*

$$u(x) = f(x_0) + \tau(x - x_0)$$

$$u(x_0 + h) = f(x_0) + \tau h$$

Ces deux points de vue induisent deux points de vue si la dérivée $f'(x_0) \in \mathbb{R}$ *est la pente de la tangente :*

$$f'(x_0) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$f'(x_0) : h \mapsto f'(x_0)h$$

Le second point se généralise aux dimensions superieures à 1.

4 Applications différentiables

$$f : \Omega \subset E \to F$$

$$p_0 \in \Omega$$

Définition 13. f *est différentiable en* p_0 *s'il existe une application linéaire* $l : E \to F$ *est une fonction* $\varepsilon : \Omega \to F$ *telle que :*
— $f(p_0 + h) = f(p_0) + l(h) + ||h||\varepsilon(h)$
— $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$

Proposition 3. *Si* f *est différentiable en* p_0*, l'application linéaire de la différentielle est unique. On l'appelle différentielle de* f *en* p_0 *et on la note* $L = D_{p_0} f$

Démonstration. Si L_1 et L_2 conviennent :

$$\begin{matrix} f(p_0 + h) = f(p_0) + L_1 h + ||h||\varepsilon_1(h) \\ f(p_0 + h) = f(p_0) + L_2 h + ||h||\varepsilon_2(h) \end{matrix} \Rightarrow 0 = 0 + (L_1 - L_2)h + ||h||(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(h)$$

fixons h, pour $t \in [0,1]$:

$$\begin{aligned}
&(L_1 - L_2)(th) + ||th||(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(th) \\
&= t((L_1 - L_2)(h) + ||h||(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(h)) \\
&= t0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

D'où $\lim_{t \to 0} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(th) = 0$,
Par conséquent $(L_1 - L_2)(h) = 0$
Donc, pour tout h tel que $(p_0 + h) \in \Omega$, $L_1(h) = L_2(h)$
Donc $L_1 = L_2$ sur une petite boule $B(0,1)$.
On peut alors généraliser à $L_1 = L_2$ □

Définition 14. *Si f est différentiable en tout point de Ω, on dit que f est différentiable sur Ω.*
Si de plus, $\begin{array}{l} \Omega \to \mathscr{L}(E,F) \\ p \mapsto D_p f \end{array}$ *est continue, ont dit que f est de classe $\mathscr{C}^1$.*

Exemple. — *$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linéaire :*

$$\begin{aligned}
f(p_0 + h) &= f(p_0) + f(h) \\
&= f(p_0) + f(h) + ||h||\varepsilon(h)
\end{aligned}$$

f est différentiable, et $D_p f = f$

— $\begin{array}{l} f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto x^2 + y^2 \end{array}$