

# Algèbre linéaire

## Table des matières

<b>I</b>	<b>Systèmes d'équations linéaires</b>	<b>2</b>
<b>1</b>	<b>Résolution</b>	<b>2</b>
1.1	Équivalence de systèmes . . . . .	2
1.2	Méthode du pivot de Gauss . . . . .	2
<b>II</b>	<b>Chapitre 2 : Espaces vectoriels</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Notion d'espace vectoriel</b>	<b>3</b>
2.1	Définitions . . . . .	3
2.2	Sous-espace vectoriel . . . . .	5

## Première partie

# Systèmes d'équations linéaires

Soit  $\mathbb{K}$ , un corps.

**Définition 1.** Un système d'équations linéaires à  $n$  inconnues et  $p$  équations est un système d'équations de la forme :

$$(S) \begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ \dots \\ a_{n,1}x_{n,1} + \dots + a_{n,n}x_{n,n} = b_n \end{cases}$$

avec  $a_{i,j}$  et  $b_i$  des éléments de  $\mathbb{K}$   
et  $x_j$  sont les inconnues.

**Définition 2.** Une solution est le  $n$ -uplet  $(x_1, \dots, x_n)$  tel que  $x_i$  sont solutions de toutes les équations.

**Définition 3.** Les  $b_1, \dots, b_p$  sont appelés seconds membres.

**Remarque 1.** à priori,  $n \neq p$

## 1 Résolution

### 1.1 Équivalence de systèmes

Pour résoudre, on se ramène à un système équivalent plus simple :

$$(S) \Leftrightarrow (S')$$

$(S) \Leftrightarrow (S')$  signifie que les deux systèmes ont les mêmes solutions.

### 1.2 Méthode du pivot de Gauss

On ne change pas les solutions en faisant une des trois opérations suivantes :

- changer l'ordre des équations
- multiplier une équation par un élément  $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$
- Ajouter à une équation un multiple d'une autre

ou toute opération qui peut se décomposer en une série de telles opérations

Méthode du pivot de Gauss :

- Si  $a_{1,1} \neq 0$

**Notation.**  $a_{1,1}$  est alors appelé le pivot

pour tout  $i$  strictement supérieur à 1, on remplace la ligne  $L_i$  par  $L_i - \frac{a_{i,1}}{a_{1,1}}$

À la fin, on obtient un système dit échelonné, c'est-à-dire de la forme :

$$\begin{cases} a'_{1,j_1}x_{j_1} + \dots + a'_{1,n}x_n = b'_1 \end{cases}$$

## Deuxième partie

# Chapitre 2 : Espaces vectoriels

Soit  $\mathbb{K}$ , un corps ( $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$ , ou autre)

## 2 Notion d'espace vectoriel

### 2.1 Définitions

**Définition 4.** vague Une  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel est un ensemble d'éléments appelés vecteurs tels qu'on puisse les additionner entre eux et les multiplier par des scalaires, c'est-à-dire des éléments de  $\mathbb{K}$  avec des relations naturelles de compatibilité

**Définition 5.** Une  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel est un ensemble  $E$  muni de deux lois :

— une loi de composition interne :

$$\begin{aligned} + : E \times E &\rightarrow E \\ (u, v) &\mapsto u + v \end{aligned}$$

— une loi de composition externe :

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{K} \times E &\rightarrow E \\ (\lambda, u) &\mapsto \lambda \cdot u \end{aligned}$$

Ces lois vérifient :

- $\forall u, v, w \in E, (u + v) + w = u + (v + w)$   
la loi  $+$  est donc associative
- $\forall u, v \in E, u + v = v + u$   
la loi  $+$  est donc commutative
- $\exists 0_E \in E, \forall u \in E, u + 0_E = 0_E + u = u$   
la loi  $+$  admet un élément neutre
- $\forall u \in E, \exists v \in E, u + v = v + u = 0_E$   
chaque élément de  $E$  admet, par  $+$ , un inverse ou opposé
- $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall u \in E, \lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda \cdot \mu) \cdot u$   
la loi  $\cdot$  est associative
- $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall u \in E, (\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u$   
la loi  $\cdot$  est distributive à gauche
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u, v \in E, (u + v) \cdot \lambda = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$   
la loi  $\cdot$  est distributive à droite
- $\forall u \in E, 1 \cdot u = u$   
la loi  $\cdot$  admet un élément neutre

**Remarque 2.** Dans le troisième axiome, l'élément neutre est unique.  
Dans le quatrième axiome, le vecteur  $v$  est en fait unique, on le note  $-u$ .

**Proposition 1.** On a également,  $\forall u \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}$  :

1.  $\lambda \cdot 0_E = 0_E$
2.  $0_{\mathbb{K}} \cdot u = 0_E$
3.  $\lambda \cdot u = 0_E \Rightarrow \lambda = 0_{\mathbb{K}} \text{ ou } u = 0_E$
4.  $(-\lambda) \cdot u = \lambda \cdot (-u) = -(\lambda \cdot u)$

*Démonstration.* 1.

$$\begin{aligned}\lambda \cdot 0_E &= \lambda \cdot (0_E + 0_E) \\ &= \lambda \cdot 0_E + \lambda \cdot 0_E \\ &= \lambda \cdot 0_E + 0_E \\ \lambda \cdot 0_E &= 0_E\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}0_{\mathbb{K}} \cdot u &= (0_{\mathbb{K}} + 0_{\mathbb{K}}) \cdot u \\ &= 0_{\mathbb{K}} \cdot u + 0_{\mathbb{K}} \cdot u \\ &= 0_{\mathbb{K}} \cdot u + 0_{\mathbb{K}} \\ 0_{\mathbb{K}} \cdot u &= 0_{\mathbb{K}}\end{aligned}$$

3. Si  $\lambda = 0_{\mathbb{K}}$ , cf. 2  
Si  $\lambda \neq 0$ , alors  $\lambda^{-1} \in \mathbb{K}$ ,

$$0 = \lambda^{-1} \cdot 0 = \lambda^{-1}(\lambda \cdot u) = (\lambda^{-1} \cdot \lambda) \cdot u = 1 \cdot u = u$$

□

**Notation.** On note souvent :

- $0_E = 0$  et  $0_{\mathbb{K}} = 0$
- $u - v = u + (-v)$

**Lemme 1.**  $\forall u, v, w \in E, u + w = v + w \Rightarrow u = v$

*Démonstration.*

$$\begin{aligned}v &= (u + w) - w \\ &= u + (w - w) \\ &= u + 0_E \\ &= u\end{aligned}$$

donc  $v = u$

□

**Remarque 3.** — Pour  $\lambda \in \mathbb{K}$  et  $u \in E$   $u \cdot \lambda$  ne veut rien dire.

- Pour  $u, v \in E$   $u \cdot v$  ne veut rien dire

**Exemple.** 1/ Pour les lois de compositions internes et externes usuelles,

- $\mathbb{K}$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel
- $\mathbb{K}^n$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel
- plus généralement, si  $E_1$  et  $E_2$  sont des  $E_1 \times E_2$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel

2/ Soit  $E$ , un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $A$ , un ensemble quelconque,

—  $\mathcal{F}(A, E)$ , l'ensemble des applications de  $A$  dans  $E$ , est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel

$$\forall f_1, f_2 \in \mathcal{F}(A, E), \forall \lambda \in \mathbb{K},$$

$$f_1 + f_2 : A \rightarrow E$$

$$a \mapsto f_1(a) + f_2(a)$$

$$\lambda \cdot f_1 : A \rightarrow E$$

$$a \mapsto \lambda \cdot f_1(a)$$

— Si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  et  $A = I \subset \mathbb{R}$ , un intervalle, on peut avoir  $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$

## 2.2 Sous-espace vectoriel

**Définition 6.** Soit  $E$ , un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, et  $F \subset E$ .

$F$  est un sous espace vectoriel de  $E$  s'il s'agit d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel pour les lois  $+$  et  $\cdot$  de  $E$ .

—  $\forall u, v \in F, u + v \in F$

—  $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u \in F, \lambda \cdot u \in F$

—  $+$  et  $\cdot$  vérifient les propriétés des lois de composition interne et externe des espaces vectoriels