Analyse

Table des matières

Première partie
Relation d'équivalence et relation d'ordre

1 Relation d'équivalence

Soit E un ensemble (théorie ZF).

Définition 1 (Produit cartésien)**.** *On définit le produit cartésien de deux ensembles A et B tel que :*

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A,\ y \in B\}$$

Définition 2 (Relation d'équivalence)**.** *Une relation d'équivalence sur E est une partie du produit cartésien $E \times E$, notée $\mathscr{R}$.*
Lorsqu'un couple $(x, y) \in E$ est en relation par $\mathscr{R}$, on écrit $x\mathscr{R}y$.
Une relation d'équivalence répond aux conditions suivantes :
- *$\mathscr{R}$ est réflexive : $\forall x \in E,\ x\mathscr{R}x$*
- *$\mathscr{R}$ est symétrique : $\forall (x, y) \in E^2,\ x\mathscr{R}y \Rightarrow y\mathscr{R}x$*
- *$\mathscr{R}$ est transitive : $\forall (x, y, z) \in E^3,\ x\mathscr{R}y$ et $y\mathscr{R}z \Rightarrow x\mathscr{R}z$*

Exemple.

- *Sur n'importe quel ensemble, la relation d'égalité est une relation d'équivalence.*
- *Dans l'ensemble des entiers relatifs, $\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2$, on pose la relation d'équivalence suivante : $x\mathscr{R}y \Leftrightarrow 2|x - y$.*

  Démonstration.

  Soit $x \in \mathbb{Z}$.
  $x - x = 0$ est divisible par 2.
  $\mathscr{R}$ est donc réflexive.

  Soient $x, y \in \mathbb{Z}$ tels que $x\mathscr{R}y$,
  On a donc $x - y$ divisible par 2.
  $\exists k \in \mathbb{Z}\ /\ x - y = 2k$
  Donc, $y - x = -(y - x) = -2k$
  Donc, $2|y - x$
  Donc, $y\mathscr{R}x$
  Donc, $\mathscr{R}$ est donc symétrique

  Soient $x, y, z \in \mathbb{Z}$ tels que $x\mathscr{R}y$ et $y\mathscr{R}z$
  $x - z = x - y + y - z$
  Or, $\exists k \in \mathbb{Z},\ x - y = 2k$
  et, $\exists k' \in \mathbb{Z},\ y - z = 2k'$
  Donc, $x - y + y - z = 2(k + k')$ est divisible par 2, par conséquent, $x\mathscr{R}z$ et $\mathscr{R}$ est transitive. □

Définition 3 (Classe d'équivalence)**.** *Soit $\mathscr{R}$ une relation d'équivalence sur E.*
Soit $x \in E$, on appelle classe d'équivalence l'ensemble $\mathscr{C}(x) = \{y \in E \mid x\mathscr{R}y\}$

Exemple. *Sur $\mathbb{Z}$, $x\mathscr{R}y \Leftrightarrow 2|x - y$*

- $\mathscr{C}(0) = \{y \in \mathbb{Z} \mid 0\mathscr{R}y\}$

— $\mathscr{C}(0) = \{y \in \mathbb{Z} \mid -y \textit{ divisible par } 2\}$
— $\mathscr{C}(0) = \{\textit{nombres pairs}\}$
— $\mathscr{C}(2) = \{y \in \mathbb{Z} \mid 2\mathscr{R}y\}$
— $\mathscr{C}(2) = \{y \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z},\ 2 - y = 2k\}$
— $\mathscr{C}(2) = \{\textit{nombres pairs}\}$
— $\mathscr{C}(1) = \{y \in \mathbb{Z} \mid 1\mathscr{R}y\}$
— $\mathscr{C}(1) = \{y \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z},\ 1 - y = 2k\}$
— $\mathscr{C}(1) = \{\textit{nombres impairs}\}$

Proposition 1. $\forall (x, y) \in E^2$,

— $x\mathscr{R}y \Rightarrow \mathscr{C}(x) = \mathscr{C}(y)$

Démonstration. Supposons $x\mathscr{R}y$,
Montrons que $\mathscr{C}(x) \cap \mathscr{C}(y)$
Soit $z \in \mathscr{C}(x)$, on a donc $x\mathscr{R}z$
Or $y\mathscr{R}x$ (par symétrie de $\mathscr{R}$)
Donc $y\mathscr{R}z$ (par transitivité de $\mathscr{R}$)
Donc $z \in \mathscr{C}(y)$
Donc $\mathscr{C}(x) \subset \mathscr{C}(y)$
On montre de la même manière que $\mathscr{C}(y) \subset \mathscr{C}(x)$ Par conséquent, $x\mathscr{R}y \Rightarrow \mathscr{C}(x) = \mathscr{C}(y)$ □

— $(\mathscr{C}(x) \cup \mathscr{C}(y) = \emptyset) \Rightarrow \mathscr{C}(x) = \mathscr{C}(y)$

Démonstration. Soit $z \in \mathscr{C}(x) \cup \mathscr{C}(y)$
On a $x\mathscr{R}z$ et $z\mathscr{R}y$
Donc, par transitivité, $x\mathscr{R}y$
Par conséquent, $\mathscr{C}(x) = \mathscr{C}(y)$ □

— *Les classes d'équivalence forment une partition de E.*

Définition 4 (Ensemble quotient)**.** *Soit $\mathscr{R}$, une relation d'équivalence sur E.*
L'ensemble quotient, noté $\frac{E}{\mathscr{R}}$ est l'ensemble dont les éléments sont les classes d'équivalence.
Il existe une application de passage au quotient :

$$\Pi : \begin{cases} E \to \frac{E}{\mathscr{R}} \\ x \mapsto \mathscr{C}(x) \end{cases}$$

Exemple. $(x, y) \in \mathbb{Z}^2,\ x\mathscr{R}y \Leftrightarrow 2 \mid x - y$
$\frac{\mathbb{Z}}{\mathscr{R}} = \{\mathscr{C}(0), \mathscr{C}(1)\} = \{\bar{0}, \bar{1}\} = \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$

2 Relations d'ordre

Définition 5 (Relation d'ordre)**.** *Une relation d'ordre $\prec$ sur E est une partie de $E \times E$ qui vérifie les propriétés suivantes :*
— *Réflexivité :* $\forall x \in E,\ x \prec x$
— *Anti-symétrie :* $\forall x, y \in E,\ (x \prec y)$ *et* $(y \prec x) \Rightarrow x = y$
— *Transitivité :* $\forall x, y, z \in E,\ (x \prec y)$ *et* $(y \prec z) \Rightarrow (x \prec z)$

Définition 6. *Une relation d'ordre est dite totale lorsque* $\forall (x, y) \in E^2,\ x \prec y$ *ou* $y \prec x$

Définition 7. *Soit A une partie de $(E, \prec)$,*
— *Un majorant de A est un élément $M \in E$ tel que $\forall a \in A,\ a \prec M$*
— *Un minorant de A est un élément $m \in E$ tel que $\forall a \in A,\ m \prec a$*
— *A est bornée lorsqu'elle admet à la fois un majorant et un minorant.*

— *On dit que A admet un plus grand élément (ou maximum) s'il existe un majorant M de A tel que* $M \in A$.
— *On dit que A admet un plus petit élément (ou minimum) s'il existe un minorant m de A tel que* $m \in A$.
— *A admet une borne supérieure* $B \in E$ *si B est un majorant de A et si pour tout majorant de A, on a* $B \prec M$
Remarque 1. *Quand il existe, B est le plus petit des majorants.*
— *A admet une borne inférieure* $b \in E$ *si b est un minorant de A et si pour tout minorant de A, on a* $m \prec b$
Remarque 2. *Quand il existe, b est le plus grand des minorants.*

Exemple.

$E = \mathbb{R}$, *doté de l'ordre standard* $\leq$
$A = [0;1[$
A est bornée par -42 (en tant que minorant) et 1,1 (en tant que majorant)
A admet un plus petit élément 0
A n'admet pas de plus grand élément mais admet en revanche une borne supérieure 1.

$E = \mathbb{Q}$, *doté de l'ordre standard* $\leq$
$A = \{x \in \mathbb{Q} |\ x^2 < 2\}$
A est majorée par 24 mais n'a pas de borne supérieure car $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

$E = \mathbb{N}^*$, *doté de la relation d'ordre* $\prec$ *telle que* $\forall a \prec b \Leftrightarrow a|b$
On montre qu'il s'agit d'une relation d'ordre :

— $\forall a \in \mathbb{N}^{*2},\ a|a$
Par conséquent, $a \prec a$ *et* $\prec$ *est transitive.*
— *Soient* $a \in \mathbb{N}^*$ *et* $b \in \mathbb{N}^*$
$a|b \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N},\ ka = b$
$b|a \Rightarrow \exists k' \in \mathbb{N},\ kb = a$
Donc, $a = kk'a$
Donc, $kk' = 1$
Donc, $k = k' = 1$
Donc, $a = b$
Par conséquent, $\prec$ *est anti-symétrique.*
— *Soient* $a, b, c \in \mathbb{N}^*$
$a|b \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N},\ ka = b$
$b|c \Rightarrow \exists k' \in \mathbb{N},\ k'b = c$
Donc, $c = k'ka$
Donc $a|c$,
$\prec$ *est par conséquent transitive.*

Pour cette même relation d'ordre,
On pose $A = \{2;3;5\}$. *120 est un majorant de A.*
A n'a pas de plus grand élément.
A admet 30 comme borne supérieure (avec $30 = PPCM(2;3;5)$*) A admet pour minorant 1. A admet aussi 1 comme borne inférieure*
Remarque 3. $\prec$ *n'est pas un ordre total.*

3 Construction de $\mathbb{R}$

Axiome 1. *Il existe un ensemble $\mathbb{N}$ muni d'une relation d'ordre $\leq$ telle que :*

1. *$\leq$ est totale.*
2. *Toute partie non vide admet un plus petit élément.*
3. *Toute partie majorée non vide admet un plus grand élément.*
4. *L'ensemble n'a pas de plus grand élément.*

Théorème 1. *Soit $(\mathscr{N}, \prec)$, un ensemble munit d'une relation d'ordre vérifiant les propriétés précédentes, alors, il existe une bijection croissante de $\mathscr{N}$ dans $\mathbb{N}$.*

$$(\forall x, y \in \mathscr{N},\ x \prec y \Rightarrow f(x) \leq f(y))$$

Qui est $\mathbb{Z}$? On définit sur $\mathbb{N}^2$ la relation d'équivalence $\mathscr{R}$ définie par

$$(m, n)\mathscr{R}(m', n') \Leftrightarrow m + n' = m' + n$$

Ainsi, on définit alors l'ensemble des entiers relatifs tel que :

$$\mathbb{Z} = \frac{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}{\mathscr{R}}$$

Qui est $\mathbb{Q}$? On définit sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ la relation d'équivalence $\mathscr{R}'$ définie par :

$$(p, q)\mathscr{R}'(p', q') \Leftrightarrow pq' = p'q$$

Ainsi, on définit alors l'ensemble des rationnels tel que :

$$\mathbb{Q} = \frac{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*}{\mathscr{R}'}$$

Qui est $\mathbb{R}$? Soit $\mathscr{P}_M(\mathbb{Q})$, l'ensemble des parties majorées non vides de $\mathbb{Q}$. On le munit de la relation d'équivalence $\mathscr{R}''$ définie par :

$$A\mathscr{R}''B \Leftrightarrow \text{A et B ont le même ensemble de majorants dans} \mathbb{Q}$$

Ainsi, on définit alors l'ensemble des réels tel que :

$$\mathbb{R} = \frac{\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}}{\mathscr{R}''}$$

Exemple.
$A = \{1\}$
$B = \{-2, 0, 1\}$
$A\mathscr{R}''B$

$A = \{x \in \mathbb{Q} | x^2 \leq 2\}$
On appelle $\sqrt{2}$ la classe d'équivalence de A

4 Caractérisation de $\mathbb{R}$

Théorème 2. *Tout corps totalement ordonné, complet et archémédien est isomorphe à $\mathbb{R}$.*

Théorème 3 (de la borne supérieure)**.** *Toutes parties de $\mathbb{R}$ majorée et non vide admet une borne supérieure.*

Deuxième partie
Suites réelles

Définition 8. *Une suite numérique est une fonction de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{R}$.

Notation. *On la note* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *plutôt que*

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

$$f : n \mapsto f(n)$$

Définition 9. *L'ensemble* $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ *est appelé ensemble image de la suite.*

Définition 10. *Lorsque l'ensemble image est majoré, minoré, ou borné dans une partie de* $(\mathscr{R}, \leq)$, *on dit que la suite est majorée, minorée, ou bornée.*

Définition 11. *On dit de plus que* (u_n) *est convergente si :*

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}\ /\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow |u_n - \lambda| < \varepsilon$$

5 Théorèmes fondamentaux

Théorème 4. *Toute suite convergente est bornée.*

Démonstration. On sait qu'il existe un réel l tel que :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N},\ n \geq N_\varepsilon$$

Prenons $\varepsilon = 1$
$\exists N_1 \in \mathbb{N},\ n \geq N_1 \Rightarrow |u_n - l| < 1$
Posons $M = \max\{\{u_0, \ldots, u_{N_\varepsilon - 1}\} \cup \{1 + l\}\}$
et $m = \max\{\{u_0, \ldots, u_{N_\varepsilon}\} \cup \{l - 1\}\}$
Soit $n \in \mathbb{N}$
Nous procédons alors par disjonction de cas.

- Pour $n < N_1$,
  Alors $u_n \leq \max\{u_0, \ldots, u_{N_1 - 1}\}$
  Par conséquent, $u_n \leq M$.
- pour $n \geq N_1$,
  $|u_n - l| \leq 1$
  Donc, $-1 \leq u_n - l \leq 1$
  $\Rightarrow l - 1 \leq u_n \leq l + 1 \leq M$
  Par conséquent, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq M$, et (u_n) est majorée par M.

On montre de la même manière que (u_n) est minorée par m. Ainsi, la suite (u_n) est bornée. □

Théorème 5. *Si la limite existe, elle est unique.*

Démonstration. On démontre ce théorème par l'absurde.
Soit l et l' deux limites distinctes.
Prenons $\varepsilon = \frac{|l - l'|}{4}$
$\exists N_l \in \mathbb{N},\ n \geq N_l \Rightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon$
$\exists N_{l'} \in \mathbb{N},\ n \geq N_{l'} \Rightarrow |u_n - l'| \leq \varepsilon$

Soit $N = \max\{N_l, N_{l'}\}$

$$\begin{aligned}
|l - l'| &= |l - u_N + u_N - l'| && (1)\\
&\leq |l - u_N| + |u_N - l'| && (2)\\
&\leq \varepsilon + \varepsilon && (3)\\
&\leq 2\varepsilon && (4)\\
&= \frac{|l - l'|}{2} && (5)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow |l - l'| \leq \frac{|l - l'|}{2}$$

Cette affirmation étant absurde, la limite d'une suite ne peut être qu'unique. □

Théorème 6. *Toute suite croissante et majorée converge.*

Démonstration. Soit $A = \{u_n | n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$
A est majorée et non vide, par conséquent elle admet une borne supérieure que nous noterons l.
Soit $\varepsilon > 0$,
$l - \varepsilon$ n'est donc pas un majorant de A,

$$\exists N \in \mathbb{N},\ l - \varepsilon \leq u_N$$

$$\forall n > N,\ u_n \geq u_N$$

$$\forall n > N,\ l + \varepsilon \geq l \geq u_n \geq u_N \geq l - \varepsilon$$

$$\forall n > N,\ \varepsilon \geq u_n - l \geq -\varepsilon$$

$$\forall n > N,\ |u_n - l| \leq \varepsilon$$

Par conséquent, (u_n) converge vers l. □

6 Valeurs d'adhérence

Définition 12. *Une extraction Φ est une fonction strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.*
Soit (u_n), une suite. On appelle suite extraite (ou sous-suite) de (u_n), une suite (v_n) de la forme :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{\Phi(n)}$$

Exemple.

Définition 13. *Soit (u_n) une suite.*
On dit qu'un réel λ est une valeur d'adhérence de (u_n) s'il existe une suite extraite de (u_n) convergeant vers λ.

Exemple. $(u_n = (-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$
admet deux valeurs d'adhérence 1 *et* -1

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ v_n = u_{2n} = 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} v_n = 1$$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ w_n = u_{2n+1} = -1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} w_n = -1$$

Théorème 7. *Si (u_n) converge vers $l \in \mathbb{R}$, alors toute suite extraite converge vers l.*

Proposition 2 (Contraposée du théorème précédent)**.** *Si une suite admet deux valeurs d'adhérence distinctes, alors elle diverge.*

Théorème 8 (de Bolzano-Weierstrass)**.** *Toute suite (u_n) bornée admet au moins une valeur d'adhérence.*

Démonstration. Soient m et M respectivement un minorant et un majorant de (u_n).
On a $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [m; M]$
On va construire deux suites (a_n) et (b_n) telles que $\forall n \in \mathbb{N}[a_n, b_n]$ contient une infinité de termes de la suite.

— On prend $a_0 = m$ et $b_0 = M$.
— Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons a_n et b_n construites.

Comme $[a_n, b_n]$ contient une infinité de termes de la suite, alors l'un des intervalles $[a_n, \frac{a_n+b_n}{2}]$ ou $[\frac{a_n+b_n}{2}, b_n]$ contient une infinité de termes :

S'il s'agit de $[a_n, \frac{a_n+b_n}{2}]$, on pose :

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n \\ b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} \end{cases}$$

Sinon, on prend :

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} \\ b_{n+1} = b_n \end{cases}$$

On a : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leq b_n \leq b_0$
donc (a_n) est majorée.
De plus, $\forall n \in NN,\ a_0 \leq a_n \leq b_n$
donc, (b_n) est minorée.
Ainsi, (a_n) converge vers l et (b_n) converge vers l'.
Mais $\lim\limits_{n\to+\infty} (a_n - b_n) = 0$
et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n - \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = l - l'$
Par conséquent, $l = l'$

On montre maintenant que l est une valeur d'adhérence.
On pose $\Phi(0) = 0$, puis on suppose $\Phi(n)$ construit.

$$\exists k \in \mathbb{N},\ k > \Phi(n) \text{ et } u_k \in [a_{n+1}, b_n + 1]$$

On pose $\Phi(n+1) = k$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leq u_{\Phi(n)} \leq b_n$$

Comme (a_n) et (b_n) tendent toutes les deux vers l, par le théorème des gendarmes, on a :
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_{\Phi(n)} = l$
La suite (u_n) admet donc une valeur d'adhérence. □

Proposition 3.

— $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leq b_n$
— *(a_n) est croissante.*

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+1} - a_n = \begin{cases} 0 \geq 0 \\ \frac{a_n+b_n}{2} \geq 0 \end{cases}$$

□

— *(b_n) est décroissante.*
— $\forall n \in \mathbb{N},\ |a_n - b_n| = \frac{|m-M|}{2^n}$

Démonstration.

- $|a_0 - b_0| = |m - M| = \frac{|m-M|}{2^0}$
- $|a_{n+1} - b_{n+1}| = \begin{cases} |a_n - \frac{a_n+b_n}{2}| = |\frac{a_n-b_n}{2}| \\ |\frac{a_n+b_n}{2} - b_n| = |\frac{a_n-b_n}{2}| \end{cases}$

  Par conséquent, $|a_{n+1} - b_{n+1}| = |\frac{m-M}{2^n}|$

□

- $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n - b_n = 0$

7 Suites de Cauchy

Définition 14. *Une suite est dite de Cauchy si :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ (\forall p \geq N \text{ et } \forall q \mathbb{N}),\ |u_p - u_q| < \varepsilon$$

Théorème 9. *Toute suite réelle de Cauchy est convergente.*

Démonstration. Soit λ, la limite de (u_n)
Soit $\varepsilon > 0$

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n > N,\ |u_n - \lambda| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Soient $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p > N$ et $q > N$.

$$\begin{aligned} |u_p - u_q| &= |u_p - \lambda - u_q + \lambda| \\ &\leq |u_p - \lambda| + |u_q - \lambda| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \\ \Rightarrow |u_p - u_q| &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

(u_n) est donc convergente. □

Théorème 10. *Toute suite convergente est de Cauchy.*

Démonstration. Pour $\varepsilon = 1$, $\exists N_1 \in \mathbb{N},\ \forall p, q \geq N_1,\ |u_p - u_q| \leq 1$
D'où $|u_p| - |u_q| \leq 1$
ou encore $|u_p| \leq 1 + |u_q|$
On a donc, $\forall p \geq N_1,\ |u_p| \leq 1 + |u_{N_1}|$
On pose $M = \max(\{|u_k|; 0 \leq k \leq N_1; 1 + |u_{N_1}|\})$
Donc $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq M$
Du fait qu'elle soit bornée et d'après le théorème de Bolzano-Weirstrass, la suite (u_n) admet au moins une valeur d'adhérence.
Par conséquent, il existe une extraction ϕ telle que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{\phi(n)} = \lambda$
Soit $\varepsilon > 0$,

$$\exists N_2 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N_2,\ |u_{\Phi(n)} - \lambda| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\exists N_3 \in \mathbb{N},\ \forall p, q \geq N_3,\ |u_p - u_q| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

On pose $N = \max(N_2, N_3)$
Alors, pour $n \geq N$,

$$
\begin{aligned}
|u_p - \lambda| &= |u_n - u_{\Phi(N)} + u_{\Phi(N)} - \lambda| \\
&\leq |u_n - u_{\Phi(N)}| + |u_{\Phi(N)} - \lambda| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}
$$

(u_n) est donc de Cauchy. □

8 Équivalence de suites

Définition 15. *Soient (a_n) et (b_n), deux suites.*
On dit que (a_n) et (b_n) sont équivalentes lorsque $a_n - b_n = o(a_n)$

Remarque 4. *Si (a_n) ne s'annule pas, on peut remplacer cette définitions par la vérification de la condition suivante :*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{b_n}{a_n} = 1$$

Notation. *Lorsque deux suites (a_n) et (b_n) sont équivalentes, on note $(a_n) \sim (b_n)$*

Exemple.

$$n + 34 \sim n$$
$$\frac{n^2 + e^n}{n \ln(n) + \sqrt{n}} \sim \frac{e^n}{n \ln(n)}$$
$$n! \sim \left(\frac{n}{e}^n\right) \sqrt{2\pi n}$$

Remarque 5.

- *Rien n'est équivalent à 0.*
- *On ne peut pas ajouter les équivalences entre elles :*
  $n + 1 \sim n$ *et* $-n + 1 \sim -n$
  Mais on n'a pas $2 \sim 0$
- *On ne peut pas composer les équivalences entre elles :*
  $n + 1 \sim n$
  Mais on n'a pas $e^{n+1} \sim e^n$
  car $\lim_{n \to +\infty} \frac{e^{n+1}}{e^n} = e \neq 1$

Théorème 11.
Si, $a_n \sim b_n$ et $c_n \sim d_n$,
alors, $a_n c_n \sim b_n d_n$

Troisième partie
Théorie d'intégration au sens de Riemann

9 Intégration des fonctions constantes par morceaux

Soit $I = [a, b]$ un intervalle compact (i.e. fermé borné) de $\mathbb{R}$.

Définition 16. *Une subdivision de I est la donnée d'un N+1-uplet* $(t_0, t_1, ..., t_N)$ *tel que :*
$a = t_0 < t_1 < ... < t_{N-1} < t_N = b$

Définition 17. *Une fonction $g : I \to \mathbb{R}$ est dite constante par morceaux lorsqu'il existe une subdivision de I en $(t_0, t_1, ..., t_N)$ adaptée à g telle que :*

$$\forall i \in [0, N-1],\ \exists k \in \mathbb{R},\ g_{|[t_i, t_{i+1}[}(x) = g_i(x) = k$$

Remarque 6. *Dès qu'il y a une subdivision adaptée à g, on a la certitude que g admet plusieurs subdivisions adaptées.*

Définition 18. *Si g est une fonction constante par morceaux dans I,*
la quantité $\sum g_i \cdot (t_{i+1} - t_i)$ est notée :

$$\int_a^b g(x)dx$$

Preuve de la consistence de la définition. On doit s'assurer que $\sum g_i \cdot (t_{i+1} - t_i)$ ne dépende pas de la subdivision choisie.

On raisonne alors par récurrence sur $\mathbb{N}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$.
On souhaite montrer $\mathscr{P}(n)$ vraie :
$\mathscr{P}(n)$: S'il existe une subdivision de I en n intervalles, alors, $\sum_{i=0}^{n-1} g_i \cdot (t_{i+1} - t_i)$ ne dépend pas de l'intervalle choisi de la subdivision.

Pour $n = 1$,
On a $t_0 = a$ et $t_1 = b$,
Par conséquent la fonction g est constante sur $[a, b[$,
Soit $k \in \mathbb{R}$ tel $g(x) = k$,

$$\sum_{i=0}^{0} g_i(a-b) = k(a-b)$$

Considérons une autre subdivision adaptée à g :
$a = \tau_0 < \tau_1 < ... < \tau_p = b$

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{p-1} g_{|[\tau_i, \tau_{i+1}[} \cdot (\tau_{i+1} - \tau_i) &= \sum_{i=0}^{p-1} k \cdot (\tau_{i+1} - \tau_i) \\ &= k \cdot \sum_{i=0}^{p-1} (\tau_{i+1} - \tau_i) \\ &= k \cdot (\tau_p - \tau_0) \text{ la somme étant télescopique} \\ &= k \cdot (b-a)\end{aligned}$$

$\mathscr{P}(1)$ est donc vraie.

Supposons maintenant, pour un N fixé, la propriété $\mathscr{P}(N-1)$ vraie.
On considère une subdivision adaptée à g :

$$(a = t_0 < t_1 < ... < t_{N-1} < t_N = b)$$

Soit $(a=\tau_0<\tau_1<...<\tau_{N-1}<\tau_N=b)$, une autre subdivision adaptée à g.
Il existe un indice $0\leq i_0\leq p-1$ tel que : $\tau_{i_0}\leq t_{N-1}<\tau_{i_0+1}$

La fonction $g_{|[a,t_{N-1}]}$ étant constante par morceaux,
les subdivision $(a=t_0<t_1<...<t_{N-1})$
et $(a=\tau_0<\tau_1<...<\tau_{i_0}<t_{N-1})$
ou $(a=\tau_0<\tau_1<...<\tau_{i_0}=t_{N-1})$
sont adaptées.

La fonction $g_{|[t_{N-1},t_N]}$ étant constante par morceaux,
les subdivision $(t_{N-1}<t_N)$
et $(t_{N-1}<\tau_{i_0}<...<\tau_p=b)$
ou $(t_{N-1}<\tau_{i_0}=\tau_p=b)$
sont adaptées.

On a ainsi,

$$\sum_{i=0}^{n-1} g_{|[t_i,t_{i+1}[}\cdot(t_{i+1}-t_i)$$
$$=\left(\sum_{i=0}^{n-1} g_{|[t_i,t_{i+1}[}\cdot(t_{i+1}-t_i)\right)+\left(g_{|[t_{n-1},t_n[}\cdot(t_n-t_{n-1})\right)$$

Où le premier terme découle de l'hypothèse de récurrence tandis que le second découle de l'initialisation

$$=\left(\sum_{i=0}^{i_0-1} g_{|[\tau_i,\tau_{i+1}[}\cdot(\tau_{i+1}-\tau_i)\right)+\left(g_{|[\tau_{i_0},t_{n-1}[}\cdot(t_{n-1}-\tau_{i_0})\right)+\left(g_{|[t_{n-1},\tau_{i_0+1}[}\cdot(\tau_{i_0+1}-t_{n-1})\right)+\left(\sum_{i=i_0+1}^{p-1} g_{|[\tau_{i_0},\tau_{i_0+1}[}\cdot(\tau_{i_0+1}-\tau_{i_0})\right)$$
$$=\left(\sum_{i=0}^{i_0-1} g_{|[\tau_i,\tau_{i+1}[}\cdot(\tau_{i+1}-\tau_i)\right)+\left(g_{|[\tau_{i_0},\tau_{i_0+1}[}\cdot(\tau_{i_0+1}-\tau_{i_0})\right)+\left(\sum_{i=i_0+1}^{p-1} g_{|[\tau_{i_0},\tau_{i_0+1}[}\cdot(\tau_{i_0+1}-\tau_{i_0})\right)$$

Le second terme découlant du fait que g est constante sur $[\tau_{i_0},\tau_{i_0+1}]$

$$=\sum_{i=0}^{p-1} g_{|[\tau_i,\tau_{i+1}[}\cdot(\tau_{i+1}-\tau_i)$$

$\mathscr{P}(N)$ est donc vraie.
Par récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier n non nul, la quantité $\int_a^b g(x)dx$ est donc bien définie. □

Théorème 12. *Soient f et g, deux fonctions constantes par morceaux et soit $\alpha\in\mathbb{R}$,*
la fonction $\alpha f+g$ est alors constante par morceaux, et :

$$\int_a^b \alpha f+g=\alpha\int_a^b f+\int_a^b g$$

L'opérateur intégral est donc un opérateur linéaire.

Démonstration. Soient $\{a=t_0<t_1<...<t_n=b\}$ et $\{autresubdivision\}$, deux subdivisions adaptées respectivement à f et g.
On considère la subdivision suivante :

$$\{a=T_0<T_1<...<T-n\}$$

obtenue en superposant les deux subdivisions précédentes.
Cette subdivision est alors adaptée à la fois à f et à g.

$$\forall i\in[0,n[,\ f_{|[T_i,T_{i+1}]} \text{ et } g_{|[T_i,T_{i+1}]} \quad \text{sont constantes}$$

$\alpha f + g$ est donc constant par morceaux sur $[a,b]$.

$$\begin{aligned}\int_a^b \alpha f + g &= \sum_i (\alpha f + g)_{|[T_i,T_{i+1}[} \cdot (T_{i+1} - T_i)\\ &= \alpha \sum_i (f_{|[T_i,T_{i+1}[} + g_{|[T_i,T_{i+1}[}) \cdot (T_{i+1} - T_i)\\ &= \alpha \sum_i f_{|[T_i,T_{i+1}[} \cdot (T_{i+1} - T_i) + g_{|[T_i,T_{i+1}[} \cdot (T_{i+1} - T_i)\\ &= \alpha \int_a^b f + \int_a^b g\end{aligned}$$

□

10 Fonctions Riemann-intégrables

Notation. *Soit f, une fonction sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.*
Soient, de plus, $\mathscr{C}^+(f) = \{\Phi : [a,b] \to \mathbb{R},$ constante par morceaux $\mid \forall x \in [a,b],\ f(x) \leq \Phi(x)\}$
et, $\mathscr{C}^-(f) = \{\Phi : [a,b] \to \mathbb{R},$ constante par morceaux $\mid \forall x \in [a,b],\ f(x) \geq \Phi(x)\}$

Définition 19. *f est Riemann-intégrable si et seulement si :*

1. *$\mathscr{C}^+(f)$ et $\mathscr{C}^-(f)$ sont non vides.*
2. $\sup \int_a^b \Phi^- = \inf \int_a^b \Phi^+$
   Avec $\Phi^- \in \mathscr{C}^-(f)$ et $\Phi^+ \in \mathscr{C}^+(f)$

Quand elle est définie, on note cette grandeur $\int_a^b f$

Exemple (de fonctions non Riemann-intégrables)**.**

$$\begin{aligned}\mathbb{1}_{\mathbb{Q}} &: [0,1] \to \{0,1\}\\ &: x \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ si } x \notin \mathbb{Q}\end{cases}\end{aligned}$$

$\Phi \in \mathscr{C}^-(\mathbb{1}_{\mathbb{Q}})$

Démonstration.

On montre maintenant l'autre implication.
Soit $\varepsilon > 0$,
Soient $\Phi^+ \in \mathscr{C}^+$ et $\Phi^- \in \mathscr{C}^-$ telles que

$$\int_a^b \Phi^+ - \Phi^- \leq \varepsilon$$

$\forall \Phi \in \mathscr{C}^-(f)$,
$\Phi \leq f \leq \Phi^+$
Donc, $\int \Phi \leq \int \Phi^+$ L'ensemble $\{\int \Phi : \Phi \in \mathscr{C}^-(f)\}$ est une partie majorée de $\mathbb{R}$.
Cet ensemble admet donc une borne supérieure :

$$B = \sup\{\int \Phi : \Phi \in \mathscr{C}^-(f)\}$$

De la même manière,
$\forall \Phi \in \mathscr{C}^+(f)$,
$\int \Phi \geq \int \Phi^-$ L'ensemble $\{\int \Phi : \Phi \in \mathscr{C}^+(f)\}$ est une partie minorée de $\mathbb{R}$.
Cet ensemble admet donc une borne inférieure :

$$b = \inf\{\int \Phi : \Phi \in \mathscr{C}^+(f)\}$$

Comme $\int \Phi^+ \geq B$ et $\int \Phi^- \leq b$
On a : $\int \Phi^+ \int \Phi^- = B - b$
D'où : $B - b \leq \int \Phi^+ - \Phi^- \leq \varepsilon$

Cette assertion étant valable pour tout $\varepsilon > 0$, on a $b = B$.
f est donc Riemann-intégrable. □

Proposition 4. *L'intégrale de Riemann :*
- *est positive :* $f \geq 0 \Rightarrow \int f \geq 0$
- *est linéaire :* $\forall \alpha \in K$, $\int \alpha f + g = \alpha \int f + \int g$
- *vérifie* $|\int f| \leq \int |f|$
- *vérifie la relation de Chasle.*

Théorème 13. *Toute fonction continue sur l'intervalle* $[a,b]$ *est Riemann-intégrable.*

Rappel 1. f *est continue en* $x \in [a,b]$ *si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Définition 20. f *est continue sur* $[a,b]$

$$\forall x \in [a,b],\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Lemme 1. *Toute fonction continue sur un compact* $[a,b]$ *est uniformémeent continue sur* $[a,b]$.

Définition 21.

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0, \forall x \in [a,b],\ |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Démonstration. Ce lemme est démontré par l'absurde.

$$\exists > 0,\ \forall \delta > 0,\ \exists x, y \in [a,b],$$
$$|x - y| < \delta \text{ et } |f(x) - f(y)| > \varepsilon$$

Prenons un ε fixé.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\delta = \frac{1}{n}$,
puis, $x_n \in [a,b]$ et $y_n \in [a,b]$ tels que
$|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ et $|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in [a,b]$,
La suite (x_n) est bornée,
donc, d'après le théorème de Bolzano-Weirstrass, il existe une suite extraite $(x_{\varphi(n)})$ qui converge vers $x_\infty = [a,b]$.

$$\begin{aligned} |y_{\varphi(n) - x_\infty}| &= |y_{\varphi(n)} - x_{\varphi(n)} + x_\varphi(n) - x_\infty| \\ &= |y_{\varphi(n)} - x_{\varphi(n)}| + |x_\varphi(n) - x_\infty| \\ &= \frac{1}{\varphi(n)} + |x_\varphi(n) - x_\infty| \end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\varphi(n)} = 0$
et $\lim\limits_{n\to+\infty} |x_{\varphi(n)-x_\infty}| = 0$
on a $\lim\limits_{n\to+\infty} y_{\varphi(n)} = x_\infty$

Mais f est continue en x_∞,
Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(y_{\varphi(n)} = f(x_\infty))$
donc $\lim\limits_{n\to+\infty} |f(y_{\varphi(n)}) - f(x_\infty)| = 0$
donc $\lim\limits_{n\to+\infty} |f(y_{\varphi(n)}) - f(x_{\varphi(n)})| = 0$

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow |f(y_{\varphi(n)}) - f(x_{\varphi(n)})| < \varepsilon$$

□

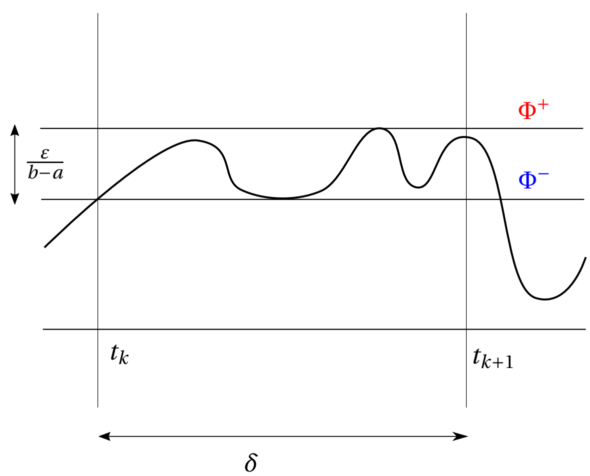
Théorème 14. *Toute fonction continue sur* $[a,b]$ *est Riemann-intégrable.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$,
Comme f est uniformément continue sur $[a,b]$,

$$\exists \delta > 0,\ |x-y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{b-a}{N} = \delta$
Considérons la subdivision suivante :

Représentation d'une portion de la subdivision :



On pose les deux fonctions suivantes :

$$\Phi^+_{|[t_k,t_{k+1}[} = \sup(f(x))$$
$$\Phi^-_{|[t_k,t_{k+1}[} = \inf(f(x))$$

Ainsi,

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} |\Phi^+ - \Phi^-| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$$

D'où,

$$\int_a^b |\Phi^+ - \Phi^-| \leq \varepsilon$$

f est donc Riemann-intégrable. $\square$

11 Propriétés des fonctions Riemann-intégrables

Théorème 15. *Soit f, une fonction Riemann-intégrable sur $[a,b]$, Alors, pour tout réel α, la fonction qui à t associe $\int_\alpha^t f$ est continue.*

Démonstration. Soit f, une fonction Riemann-intégrable sur $[a,b]$,
$\forall \alpha \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \varphi : [a,b] &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \int_\alpha^t f \end{aligned}$$

Soit $t_0 \in [a,b]$,
On souhaite montrer que φ est continue. i.e. :
$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$,

$$|t - t_0| < \delta \Rightarrow |\varphi(t) - \varphi(t_0)| < \varepsilon$$

Autrement dit :

$$|t - t_0| < \delta \Rightarrow \left| \int_\alpha^t f - \int_\alpha^{t_0} f \right| < \varepsilon$$

Soit $\varepsilon > 0$,
f étant Riemann-intégrable, il existe deux fonctions Φ^- et Φ^+ constantes par morceaux telles que $\Phi^- \leq f \leq \Phi^+$.
f est donc bornée et :

$$\exists M > 0 \ / \ \forall x \in [a,b],\ f(x) < M$$

On pose alors $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$, ainsi,
$\forall t \in [a,b]$, $|t - t_0| < \delta \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \left| \int_\alpha^t f - \int_\alpha^{t_0} f \right| &= \left| \int_{t_0}^t f \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t M \right| \\ &\leq M|t - t_0| \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

$\square$

Théorème 16. *Si f est une fonction continue sur $[a,b]$, Alors la fonction qui à t associe $\int_\alpha^t f$ est dérivable et sa dérivée est f. (i.e. $\int_\alpha^t f$ est une primitive de f).*

Théorème 17 (théorème fondammental du calcul intégral)**.** *Soit f, une fonction Riemann-intégrable sur $[a,b]$. Si f admet une primitive F sur $[a,b]$,
alors,*

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)$$

Définition 22 (Somme de Riemann)**.** *Soit f, une fonction définie sur $[a,b]$,
Soit $\{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}$, une subdivision de $[a,b]$.
Soit $\{c_i \in [t_i, t_{i+1}] \mid 0 \leq i < n\}$.*

On appelle somme de Riemann associée, le nombre $R(f) = \sum_{i=0}^{n-1} f(c_i)(t_{i+1} - t_i)$

Théorème 18. *Si f est Riemann-intégrable sur $[a,b]$,*
alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n(f) = \int_a^b f(t)dt$

12 Intégration sur un intervalle quelconque

Définition 23. *f, est localement intégrable sir $I \subset \mathbb{R}$ lorsque pour tout segment $[c,d] \subset I$, f est Riemann intégrable sur $[c,d]$*

Définition 24. *Soit $f : [a,b[\to \mathbb{R}$, une fonction localement intégrable.*
L'intégrale impropre $\int_a^b f$ est convergente lorsque $\int_a^X f$ admet une limite finie quand X tend vers b.

Exemple. *On cherche à déterminer $\int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt$*

$$\int_0^X \lambda e^{-\lambda t} dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^X = -e^{-\lambda X} + 1$$

$$\lim_{X\to+\infty} -e^{-\lambda X} + 1 = 1$$

Théorème 19. *Soit $f : [a,b[\to \mathbb{R}^+$, une fonction positive localement intégrable,*
alors, $\int_a^b f$ est convergente si et seulement si $\exists M \in \mathbb{R}$, $\forall c \geq a$, $\int_a^c f \leq M$

Heuristique. On pose $\begin{array}{l} \Phi : [a,+\infty[\to \mathbb{R} \\ c \mapsto \int_a^c f \end{array}$ est convergente et majorée. □

Corollaire 1. *Soient f et g, deux fonctions positives telles que $f \leq g$,*
alors la convergence de $\int_a^b g$ implique la convergence de $\int_a^b f$.

Théorème 20. *Si $\int_a^b |f|$ converge, alors $\int_a^b f$ converge.*
On dit alors que f est absolument convergente.

Contre exemple.

$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ *converge tandis que*
$\int_0^{+\infty} |\frac{\sin(t)}{t}| dt$ *diverge.*

- *En 0, il n'y a pas de problème car* $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{\sin(t)}{t} = 0$
  et la fonction $\begin{array}{l} f :]0,+\infty[\to \mathbb{R} \\ t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t} \end{array}$ *est prolongeable par continuité en* 0 *en posant* $f(0) = 0$.
- *En* $+\infty$,
  on intègre par parties $\int_1^X \frac{\sin(t)}{t} dt$ *en posant :* $u = \frac{1}{t}$, $u' = -\frac{1}{t^2}$ *et* $v = -\cos(t)$, $v' = \sin(t)$ *:*

$$\int_1^X \frac{\sin(t)}{t} dt = \left[-\frac{\cos(t)}{t}\right]_1^X - \int_1^X \frac{\cos(t)}{t^2} dt$$

- $\int_1^X |\frac{\cos(t)}{t^2}| dt \leq \int_1^X \frac{1}{t^2} dt$
  Le second membre étant convergent, on a : $\int_1^X \frac{\cos(t)}{t^2} dt$ *converge.*
- $\frac{-1}{X} \leq \frac{-\cos(X)}{X} \leq \frac{1}{X}$, *par conséquent :*

$$\lim_{X\to+\infty} \left[\frac{-\cos(t)}{t}\right]_1^X = \cos(1)$$

— $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ *étant convergente, montrons que* $\int_0^{+\infty} |\frac{\sin(t)}{t}| dt$ *diverge.*
Soit $N \geq 4$,

$$\int_1^N |\frac{\sin(t)}{t}| dt \geq \sum_{k=1}^{E(\frac{N-\frac{3\pi}{2}}{\pi})} \int_{k\pi+\frac{\pi}{4}}^{k\pi+\frac{3\pi}{4}} |\frac{\sin(t)}{t}| dt$$

$$\geq \sum_{k=1}^{E(\frac{N-\frac{3\pi}{2}}{\pi})} \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{k\pi+\frac{\pi}{4}}^{k\pi+\frac{3\pi}{4}} \frac{1}{t} dt \quad \lim N \to +\infty \sum_{k=1}^{E(\frac{N-\frac{3\pi}{2}}{\pi})} \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{\pi+\frac{\pi}{4}}^{\pi+\frac{3\pi}{4}} \frac{1}{t} dt = +\infty$$

$$\geq \sum_{k=1}^{E(\frac{N-\frac{3\pi}{2}}{\pi})} \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{\pi+\frac{\pi}{4}}^{\pi+\frac{3\pi}{4}} \frac{1}{t} dt$$

Théorème 21. *Si* $\int_a^b g$ *converge et si* $|f| \sim_b g$, *(ou si* $|f| =_b o(g)$*)*
alors $\int_a^b |f|$ *converge.*

Démonstration. $|f| \sim_b g \Rightarrow \lim\limits_{X\to b} \frac{|f|}{g} = 1$
$|f| =_b o(g) \Rightarrow \lim\limits_{X\to b} \frac{|f|}{g} = 0.$ □