

# Théorie des groupes

## Table des matières

1	Groupe opérant sur un ensemble (action de groupe)	2
---	---	---

# 1 Groupe opérant sur un ensemble (action de groupe)

**Définition 1.** Soient  $G$ , un groupe et  $X$ , un ensemble.

On appelle action (ou opération) à gauche de  $G$  sur  $X$  toute application :

$$\begin{aligned} \cdot : G \times X &\rightarrow X \\ (g, x) &\mapsto g \cdot x \end{aligned}$$

qui satisfait les deux conditions suivantes :

- $\forall g, h \in G, \forall x \in X, g \cdot (h \cdot x) = (g \cdot h) \cdot x$
- $\forall x \in X, e \cdot x = x$

**Définition 2.** Opération à droite

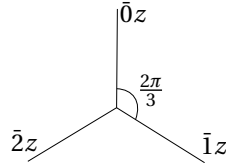
$$\begin{aligned} \cdot : G \times X &\rightarrow X \\ (g, x) &\mapsto g \cdot x \end{aligned}$$

avec :

- $\forall g, h \in G, \forall x \in X, g \cdot (h \cdot x) = (g \cdot h) \cdot x$
- $\forall x \in X, e \cdot x = x$

**Exemple.**

- $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  agit par rotation sur  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ .
- $\forall z = re^{i\phi} \in \mathbb{C}, \forall \bar{k} \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \bar{k} \cdot z = re^{i\phi + \frac{2\pi k}{3}}$



- $\mathbb{R}$  agit par translation sur  $\mathbb{R}^2$   
 $\forall r \in \mathbb{R}, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, r \cdot (x, y) = (x + r, y)$
- $\mathbb{R}^2$  agit par translation sur  $\mathbb{R}^2$   
 $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (\alpha, \beta) \cdot (x, y) = (\alpha + x, \beta + y)$
- Si  $G$  est un groupe et  $X = G$ , alors on a l'opération de  $G$  sur lui-même :

1. par translation à gauche :

$$\begin{aligned} \cdot : G \times G &\rightarrow G \\ (g, x) &\mapsto g \cdot x \end{aligned}$$

2. par conjugaison :

$$\begin{aligned} \cdot : G \times G &\rightarrow G \\ (g, x) &\mapsto g \cdot x \cdot g^{-1} \end{aligned}$$

— L'action triviale de  $G$  sur  $X$  est donnée par :  
 $g \cdot x = x, \forall g \in G, \forall x \in X$

**Proposition 1.** Soit  $G$ , un groupe et  $X$ , un ensemble.  
 Il y a une correspondance bijective et naturelle entre les actions (à gauche) de  $G$  sur  $X$  et les morphisme de  $G$  vers  $\text{Bij}(X)$ .

*Démonstration.* — Soit  $\diamond$ , une action de  $G$  sur  $X$ .  
 $\forall g \in G$ , on considère l'application

$$\begin{aligned}\sigma_g : X &\rightarrow X \\ x &\mapsto g \diamond x\end{aligned}$$

Étant donné que :

$$\begin{aligned}g^{-1} \diamond (g \diamond x) &= (g^{-1}g) \diamond x \\ &= x \\ &= (gg^{-1}) \diamond x \\ &= g \diamond (g^{-1} \diamond x)\end{aligned}$$

On a :

$$\sigma_{g^{-1}} \circ \sigma_g = \text{Id}_X = \sigma_g \circ \sigma_{g^{-1}}$$

Donc  $\sigma_g \in \text{Bij}(X)$

De plus, étant donné que  $g_1 \diamond (g_2 \diamond x) = (g_1 g_2) \diamond x$ ,

on a  $\sigma_{g_1} \circ \sigma_{g_2} = \sigma_{g_1 g_2}$

Donc l'application :

$$\begin{aligned}\sigma_\diamond : G &\rightarrow \text{Bij}(X) \\ g &\mapsto \sigma_g\end{aligned}$$

est un morphisme.

— Soit  $\Psi : G \rightarrow \text{Bij}(X)$ , un morphisme.

On obtient l'action  $\diamond_\Psi$  de  $G$  sur  $X$  pour  $g \diamond_\Psi x = \Psi(g)(x)$  On vérifie que c'est une action de groupe.

La correspondance bijective vient de  $\Psi_{\diamond_\Psi} = \Psi$  et  $\diamond_{\Psi_\diamond} = \diamond$

□

**Définition 3.** Soit  $G$  opérant sur  $X$  et  $x \in X$ .  
 L'orbite de  $x$  sous  $G$  est :

$$\text{Orb}(x) = \{g \cdot x \mid g \in G\} \subset X$$

**Proposition 2.** Soit  $G$  opérant sur  $X$ .  
 Soit  $\sim$ , la relation sur  $X$  définie par

$$x \sim y \Leftrightarrow x \in \text{Orb}(y)$$

Alors  $\sim$  est une relation d'équivalence sur  $X$  dont les classes d'équivalences sont les orbites.

**Corrolaire 1.** Les orbites des éléments de  $X$  sous l'action de  $G$  forment une partition de  $X$ .

On note  $G \backslash X$  l'ensemble quotient  $X / \sim$

*Démonstration.* On montre que  $\sim$  est une relation d'équivalence :

- Réflexivité :  $\forall x \in X, e \cdot x = x$ , par conséquent,  $x \in Orb(x)$  et  $x \sim x$ .
- Symétrie : Supposons  $x \sim y$ , i.e.  $\exists g \in G / x = g \cdot y \Leftrightarrow x \in Orb(y)$   
Donc  $g^{-1} \cdot x = g^{-1} \cdot (g \cdot y) = (g^{-1}g) \cdot y = e \cdot y = y$   
par conséquent,  $y \in Orb(x)$   
Ainsi  $y \sim x$
- transitivité : Supposons  $x \sim y$  et  $y \sim z$ , i.e.  $\exists g, h \in G / x = g \cdot y$  et  $y = h \cdot z$   
Donc  $x = g \cdot y = g \cdot (h \cdot z) = (gh) \cdot z$   
par conséquent,  $x \in Orb(z)$ ,  
ainsi,  $x \sim z$

La classé d'équivalence d'un  $z \in X$  est  $Orb(z)$

□

**Exemple.** — Les orbites pour  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  opérant sur  $\mathbb{C}$  par rotation :

$$Orb(z) = \{z, e^{\frac{2\pi}{3}} z, e^{\frac{4\pi}{3}} z\}$$

Comporte 3 éléments si  $z \neq 0$

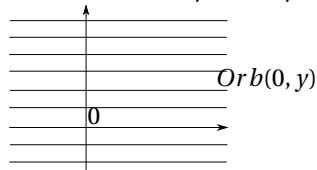
Sinon (pour  $z = 0$ ),  $Orb(0) = \{0\}$

— Pour  $\mathbb{R}$  opérant sur  $\mathbb{R}^2$ ,

$$r \cdot (x, y) \rightarrow (x + r, y)$$

$$Orb((x, y)) = \{r \cdot (x, y) \mid r \in \mathbb{R}\} = \{(x + r, y) \mid r \in \mathbb{R}\} = \{(\lambda, y) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Ce qui correspond aux droites horizontales passant par  $(0, y)$



—  $\mathbb{R}^2$  opérant par translation sur  $\mathbb{R}^2$ , i.e.  $\exists (\alpha, \beta), (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$Orb(x, y) = \{(\alpha + x, \beta + y) \mid (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\} = \{(s, t) \mid (s, t) \in \mathbb{R}^2\} = \mathbb{R}^2$$

On a donc qu'une seule orbite

—  $G$  opérant par translation sur  $G$  tel que  $g \cdot x$

$$Orb(e) = \{g \cdot e \mid g \in G\} = \{g \mid g \in G\} = G$$

Donc,  $\forall h \in G, Orb(h) = Orb(e) = G$ .

Il n'y a donc qu'une seule orbite.

**Définition 4.** L'action  $G$  opérant sur  $X$  est transitive s'il existe exactement une orbite dans  $X$ .

**Définition 5.** Soit  $G$  opérant sur  $X$ , une action de groupe.

— Le stabilisateur de  $x \in X$  dans  $G$  est le sous groupe

$$\text{Stab}(x) = \{g \in G \mid g \cdot x = x\} \subset G$$

— Les points fixés par  $g \in G$  sont définis par :

$$\text{Fig}(g) = \{x \in X \mid g \cdot x = x\}$$

—  $x \in X$  est un point fixe sous l'action de  $G$  si  $\forall g \in G, g \cdot x = x (\Leftrightarrow \text{Stab}(x) = G \Leftrightarrow \text{Orb}(x) = \{x\})$

**Proposition 3.** Soit  $G$  opérant sur  $X$ , une action de groupe.

Si  $x$  et  $y$  sont dans la même orbite, i.e.  $\text{Orb}(x) = \text{Orb}(y)$ , alors  $\text{Stab}(x)$  et  $\text{Stab}(y)$  sont conjugués.

*Démonstration.* Supposons  $y = g \cdot x$ . Alors

$$g^{-1} \cdot y = g^{-1} \cdot (g \cdot x) = (g^{-1}g) \cdot x = e \cdot x = x$$

On va montrer que  $g\text{Stab}(x)g^{-1} = \text{Stab}(y)$ .

— Soit  $h \in \text{Stab}(x)$ , i.e.  $ghg^{-1} \in g\text{Stab}(x)g^{-1}$   
On souhaite montrer que  $ghg^{-1} \in \text{Stab}(y)$

$$(ghg^{-1}) \cdot y = g \cdot (h \cdot (g^{-1} \cdot y)) = g \cdot (h \cdot x) = g \cdot x = y$$

Donc  $ghg^{-1} \in \text{Stab}(y)$  et donc  $g\text{Stab}(x)g^{-1} \subseteq \text{Stab}(y)$

— L'argument précédent, en échangeant  $x$  par  $y$  et  $g$  par  $g^{-1}$ , nous donne :

$$g^{-1}\text{Stab}(y)g \subseteq \text{Stab}(x)$$

$$\text{Stab}(y) \subseteq g\text{Stab}(x)g^{-1}$$

□

**Théorème 1.** Soit  $G$  opérant sur  $X$  une action de groupe.

Soit, de plus,  $x \in X$ .

Il y a une bijection entre  $\text{Orb}(x)$  et  $G/\text{Stab}(x)$  (les classes d'équivalence à gauche de  $\text{Stab}(x)$ ). En particulier, si  $\text{Orb}(x)$  est fini, alors  $\text{Stab}(x)$  est d'indice fini dans  $G$  et  $|\text{Orb}(x)| = [G : \text{Stab}(x)]$

*Démonstration.* On veut définir la fonction :

$$f : \text{Orb}(x) \rightarrow G/\text{Stab}(x) = \{g\text{Stab}(x) \mid g \in G\} \quad g \cdot x \mapsto g\text{Stab}(x)$$

—  $f$  est en effet une fonction.

Soient  $g, h \in G$

$$\begin{aligned}
 g \cdot x = h \cdot x &\Leftrightarrow h^{-1} \cdot (g \cdot x) = h^{-1} \cdot (h \cdot x) \\
 &\Leftrightarrow (h^{-1} \cdot g) \cdot x = (h^{-1} \cdot h) \cdot x \\
 &\Leftrightarrow (h^{-1} \cdot g) \cdot x = x \\
 &\Leftrightarrow h^{-1} \cdot g \in \text{Stab}(x) \\
 &\Leftrightarrow \exists s \in \text{Stab}(x), h^{-1}g = s \text{ autrement dit } g = hs \\
 &\Leftrightarrow g\text{Stab}(x) = h\text{Stab}(x)
 \end{aligned}$$

—  $f$  est injective car  $g\text{Stab}(x) = h\text{Stab}(x) \Rightarrow gx = hx$

—  $f$  est surjective car  $\forall g\text{Stab}(x) \in G/\text{Stab}(x), f(g \cdot x) = g\text{Stab}(x)$

□

**Corrolaire 2.** *Formule de classes* Si  $G$  est un groupe fini, alors

$$\forall x \in X, |G| = |\text{Stab}(x)| \cdot |\text{Orb}(x)|$$

*Démonstration.* Si  $G$  est fini, alors  $\text{Orb}(x)$  est fini et

$$|\text{orb}(x)| = [G : \text{Stab}(x)] = \frac{|G|}{|\text{Stab}(x)|}$$

□