

Algèbre linéaire

Table des matières

I	Systèmes d'équations linéaires	2
1	Résolution	2
1.1	Équivalence de systèmes	2
1.2	Méthode du pivot de Gauss	2
II	Chapitre 2 : Espaces vectoriels	3
2	Notion d'espace vectoriel	3
2.1	Définitions	3
2.2	Sous-espace vectoriel	5

Première partie

Systèmes d'équations linéaires

Soit \mathbb{K} , un corps.

Définition 1. Un système d'équations linéaires à n inconnues et p équations est un système d'équations de la forme :

$$(S) \begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ \dots \\ a_{n,1}x_{n,1} + \dots + a_{n,n}x_{n,n} = b_n \end{cases}$$

avec $a_{i,j}$ et b_i des éléments de \mathbb{K}
et x_j sont les inconnues.

Définition 2. Une solution est le n -uplet (x_1, \dots, x_n) tel que x_i sont solutions de toutes les équations.

Définition 3. Les b_1, \dots, b_p sont appelés seconds membres.

Remarque 1. à priori, $n \neq p$

1 Résolution

1.1 Équivalence de systèmes

Pour résoudre, on se ramène à un système équivalent plus simple :

$$(S) \Leftrightarrow (S')$$

$(S) \Leftrightarrow (S')$ signifie que les deux systèmes ont les mêmes solutions.

1.2 Méthode du pivot de Gauss

On ne change pas les solutions en faisant une des trois opérations suivantes :

- changer l'ordre des équations
- multiplier une équation par un élément $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$
- Ajouter à une équation un multiple d'une autre

ou toute opération qui peut se décomposer en une série de telles opérations

Méthode du pivot de Gauss :

- Si $a_{1,1} \neq 0$

Notation. $a_{1,1}$ est alors appelé le pivot

pour tout i strictement supérieur à 1, on remplace la ligne L_i par $L_i - \frac{a_{i,1}}{a_{1,1}}$

À la fin, on obtient un système dit échelonné, c'est-à-dire de la forme :

$$\begin{cases} a'_{1,j_1}x_{j_1} + \dots + a'_{1,n}x_n = b'_1 \end{cases}$$

Deuxième partie

Chapitre 2 : Espaces vectoriels

Soit \mathbb{K} , un corps (\mathbb{R} , \mathbb{C} , ou autre)

2 Notion d'espace vectoriel

2.1 Définitions

Définition 4. vague Un \mathbb{K} -espace vectoriel est un ensemble d'éléments appelés vecteurs tels qu'on puisse les additionner entre eux et les multiplier par des scalaires, c'est-à-dire des éléments de \mathbb{K} avec des relations naturelles de compatibilité

Définition 5. Un \mathbb{K} -espace vectoriel est un ensemble E muni de deux lois :

— une loi de composition interne :

$$\begin{aligned} + : E \times E &\rightarrow E \\ (u, v) &\mapsto u + v \end{aligned}$$

— une loi de composition externe :

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{K} \times E &\rightarrow E \\ (\lambda, u) &\mapsto \lambda \cdot u \end{aligned}$$

Ces lois vérifient :

- $\forall u, v, w \in E, (u + v) + w = u + (v + w)$
la loi $+$ est donc associative
- $\forall u, v \in E, u + v = v + u$
la loi $+$ est donc commutative
- $\exists 0_E \in E, \forall u \in E, u + 0_E = 0_E + u = u$
la loi $+$ admet un élément neutre
- $\forall u \in E, \exists v \in E, u + v = v + u = 0_E$
chaque élément de E admet, par $+$, un inverse ou opposé
- $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall u \in E, \lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda \cdot \mu) \cdot u$
la loi \cdot est associative
- $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall u \in E, (\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u$
la loi \cdot est distributive à gauche
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u, v \in E, (u + v) \cdot \lambda = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$
la loi \cdot est distributive à droite
- $\forall u \in E, 1 \cdot u = u$
la loi \cdot admet un élément neutre

Remarque 2. Dans le troisième axiome, l'élément neutre est unique.
Dans le quatrième axiome, le vecteur v est en fait unique, on le note $-u$.

Proposition 1. On a également, $\forall u \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}$:

1. $\lambda \cdot 0_E = 0_E$
2. $0_{\mathbb{K}} \cdot u = 0_E$
3. $\lambda \cdot u = 0_E \Rightarrow \lambda = 0_{\mathbb{K}} \text{ ou } u = 0_E$
4. $(-\lambda) \cdot u = \lambda \cdot (-u) = -(\lambda \cdot u)$

Démonstration. 1.

$$\begin{aligned}\lambda \cdot 0_E &= \lambda \cdot (0_E + 0_E) \\ &= \lambda \cdot 0_E + \lambda \cdot 0_E \\ &= \lambda \cdot 0_E + 0_E \\ \lambda \cdot 0_E &= 0_E\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}0_{\mathbb{K}} \cdot u &= (0_{\mathbb{K}} + 0_{\mathbb{K}}) \cdot u \\ &= 0_{\mathbb{K}} \cdot u + 0_{\mathbb{K}} \cdot u \\ &= 0_{\mathbb{K}} \cdot u + 0_{\mathbb{K}} \\ 0_{\mathbb{K}} \cdot u &= 0_{\mathbb{K}}\end{aligned}$$

3. Si $\lambda = 0_{\mathbb{K}}$, cf. 2
Si $\lambda \neq 0$, alors $\lambda^{-1} \in \mathbb{K}$,

$$0 = \lambda^{-1} \cdot 0 = \lambda^{-1}(\lambda \cdot u) = (\lambda^{-1} \cdot \lambda) \cdot u = 1 \cdot u = u$$

□

Notation. On note souvent :

- $0_E = 0$ et $0_{\mathbb{K}} = 0$
- $u - v = u + (-v)$

Lemme 1. $\forall u, v, w \in E, u + w = v + w \Rightarrow u = v$

Démonstration.

$$\begin{aligned}v &= (u + w) - w \\ &= u + (w - w) \\ &= u + 0_E \\ &= u\end{aligned}$$

donc $v = u$

□

Remarque 3. — Pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $u \in E$ $u \cdot \lambda$ ne veut rien dire.

- Pour $u, v \in E$ $u \cdot v$ ne veut rien dire

Exemple. 1/ Pour les lois de compositions internes et externes usuelles,

- \mathbb{K} est un \mathbb{K} -espace vectoriel
- \mathbb{K}^n est un \mathbb{K} -espace vectoriel
- plus généralement, si E_1 et E_2 sont des $E_1 \times E_2$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel

2/ Soit E , un \mathbb{K} -espace vectoriel et A , un ensemble quelconque,

— $\mathcal{F}(A, E)$, l'ensemble des applications de A dans E , est un \mathbb{K} -espace vectoriel

$$\forall f_1, f_2 \in \mathcal{F}(A, E), \forall \lambda \in \mathbb{K},$$

$$f_1 + f_2 : A \rightarrow E$$

$$a \mapsto f_1(a) + f_2(a)$$

$$\lambda \cdot f_1 : A \rightarrow E$$

$$a \mapsto \lambda \cdot f_1(a)$$

— Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $A = I \subset \mathbb{R}$, un intervalle, on peut avoir $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$

— Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $A = \mathbb{N}$, on a $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, l'ensemble des suites numériques

3/ $\mathbb{K}[X]$, l'ensemble des polynômes

4/ $M_{n,p}(\mathbb{K})$, l'ensemble des matrices à coefficient dans \mathbb{K} , à n lignes et p colonnes.

Remarque 4. \mathbb{R}^2 , munit de la loi + usuelle et $\lambda \cdot (x_1, x_2) = (\lambda \cdot x_1, 0)$
n'est pas un \mathbb{K} -espace vectoriel, pourquoi ?

2.2 Sous-espace vectoriel

Définition 6. Soit E , un \mathbb{K} -espace vectoriel, et $F \subset E$.

F est un sous espace vectoriel de E s'il s'agit d'un \mathbb{K} -espace vectoriel pour les lois + et \cdot de E .

$$\text{— } \forall u, v \in F, u + v \in F$$

$$\text{— } \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u \in F, \lambda \cdot u \in F$$

— + et \cdot vérifient les propriétés des lois de composition interne et externe des espaces vectoriels

Propriété 1. F est un sous-espace vectoriel de E si :

$$\text{— } F \neq \emptyset$$

$$\text{— } \forall u, v \in F, u + v \in F$$

$$\text{— } \forall u \in F, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \cdot u \in F$$

Remarque 5. — On a vu que $0_E \in F$

— Les deux derniers points de la définition de sous-espace vectoriel sont équivalents à :

$$\forall u, v \in F, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \lambda u + \mu v \in F$$

ou encore à :

$$\forall u, v \in F, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda u + v \in F$$

Remarque 6. Dans la plupart des cas, pour montrer qu'un ensemble (avec les lois +, \cdot) est un espace vectoriel, on montre qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel d'un \mathbb{K} -espace vectoriel connu.

Exemple. — $E = \mathbb{K}^n$ et $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$

$F = \{(x_1, \dots, x_n) \mid a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de E .

— $\mathbb{K}[X]$, les suites de \mathbb{K} nulles à partir d'un certain rang, est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites de \mathbb{K}