Mécanique du solide

Table des matières

Première partie
Introduction

La mécanique consiste à décrire le mouvement et le prédire. La cinématique consiste à décrire le mouvement tandis que la dynamique consiste à le prédire. chap 1 : rappels chap 2 : cinématique chap 3 : dynamique

Définition 1. *un solide est un ensemble de points. On s'interesse plus particulièrement au modèle du solide indéformable.*

0.1 différence entre le mouvement d'un point et le mouvement d'un solide

on ajoute des degrès de liberté dû au fait que le point d'application de la force influe sur le mouvement.

1 Rappels de mécanique du point

1.1 Objectif

On veut décrire et prédire le mouvement d'un point.

1.2 referentiel

Il nous faut alors un réferentiel (repère d'espace et du temps)

1.2.1 repère d'espace

repère d'espace : une origine et une base
- coordonnées cartésiennes $\vec{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$
- coordonnées cylindriques $\vec{OM} = r\vec{u}_r + z\vec{u}_z$
- coodrdonnées sphériques $\vec{OM} = r\vec{u}_r$

1.2.2 repère de temps

on a la même horloge dans tous les réferentiels (on est en mécanique classique)

1.3 degrès de liberté

nombre de données indépendantes nécessaires pour définir de manière univoque la position d'un système. pour déterminer le nombre de degrès de liberté d'un système, on somme les ddl de chaque point auxquels on soustrait le nombre de contraintes.

1.4 cinématique du point

on souhaite décrire le mouvement $\vec{OM}(t)$ la vitesse $v = \frac{d\vec{OM}}{dt}_{\mathscr{R}}$ quantité de mouvement $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$ l'expression de la vitesse dépend du réferentiel. en cartésien : $\vec{v}$ =en cylindrique : $\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z$ en sphérique : $\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{theta}\vec{u}_\theta + r\dot{\varphi}\vec{u}_\varphi$

expression de l'accélération :

On introduit alors la ... : $\vec{d} = m \cdot \vec{a}$

le moment cinétique : moment cinétique du point M par rapport au point A. $\vec{L_A} = \vec{AM} \wedge \vec{p}$

1.5 dynamique du point

principe fonda de la dynamique : $\sum_i F_i = \frac{d\vec{p}}{dt}$ où les forces F_i sont les forces appliquées au point. uniquement quand $\mathscr{R}$ est galiléen

th du moment cinétique : $\frac{d\vec{L_A}}{dt} = \sum_i \vec{\mathscr{M}}_A(\vec{F_i})$

attention, ces équations sont des équations vectorielles quand on peut ne pas projeter, on ne projète pas

remarque : projection d'abord on écrit les équation vectorielles puis dans un second temps, si nécessaire, on projète

remarque : le PFD produit trois équations scalaires un point materiel possède trois degrés de libertés on peut alors décrire le mouvement d'un point avec le PFD

idem pour le th du moment cinétique (qui produit aussi trois équations scalaires)

ramarque : dans le théorème du moment cinétique, on fait aparaitre le moment des force, on peut le décrire formellemnt comme suit : $\vec{\mathscr{M}}_A(\vec{F_i}) = \vec{AM} \wedge \vec{F_i}$

remarque : l'intéret du th du moment cinétique : le moment en A est nul permet de montrer qu'une orbite est contenue dans un plan contenant lui même le centre de gravité.

1.6 l'aspect énergétique de la mécanique du point

$$
\begin{aligned}
\frac{d\vec{p}}{dt} &= \sum_i F_i \\
\vec{v} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} &= \vec{v} \cdot \sum_i F_i \qquad dF_C = \delta W F_C = 1 \\
\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}m\vec{v}^2) &= \cdot \sum_i F_i \cdot \frac{d}{dt}\vec{l} \\
\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}m\vec{v}^2) &= \cdot \sum_i F_i \cdot \frac{d}{dt}\vec{l} \\
\hline
2mv^2 & \qquad \delta W = \sum_i \vec{F_i} d\vec{l}
\end{aligned}
$$

jusqu'à la fin de l'exemple du pendule

2 en mécanique du solide

pour résoudre des problèmes : d'abord, la cinématique puis soit de la dynamique avec le pfd soit un étude énergétique

Deuxième partie

Chapitre 2 : Cinématique du solide

3 Système de points materiels - solide indéformable

Définition 2. *système de points materiels*
avec un système de n points notés $M_i = (x_i, y_i, z_i)$ avec $i \in \{1, n\}$ on veut connaitre le mouvement de chaque points

Exemple. *exemple du modèle terre lune, utilisation du module fictif*

nombre de degrès de liberté = 3n (n points de 3 coordonnées) une contrainte indépendante des précédentes retire un degrès de liberté exemples des points liés

Définition 3. *solide : ensemble continu de points materiels*

Définition 4. *solide indéformable : modèle un solide est dit indéformable si la distance entre deux quelconques de ses points est indépendante du temps.*

Définition 5. *Centre de masse : Soit un système de points matériels :*

$$G : \begin{array}{c} \vec{OG} = \dfrac{\sum_i m_i \vec{OM_i}}{\sum_i m_i} \\ \sum_i m_i \vec{GM_i} = \vec{0} \end{array}$$

Où G est le centre de masse, barycentre, ou centre d'inertie

Remarque 1. *le centre de masse est différent du centre de gravité, qui est le point d'application du poids*

Exemple. *sur un nuage :*

Définition 6. *expression du centre de masse pour un solide :*

$$\vec{OG} = \frac{\iiint \rho(M)\vec{OM}dV}{\iiint \rho(M)dV}$$

où $\rho(M)$ est la masse volumique au point M
la masse totale M_t s'exprimant alors :

$$M_t = \iiint \rho(M)dV$$

Remarque 2. *lien entre intégrale et somme : (en 1D)*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(a + (\frac{b-a}{n})i)(\frac{b-a}{n})$$

Remarque 3. *formule vraie pour tout O :*

$$\iiint \rho(M)\vec{GM}dV = \vec{0}$$

Remarque 4. *G peut ne pas appartenir au solide*

3.1 Résultante cinétique

Définition 7.

$$\vec{P(t)} = \iiint \rho(M)\vec{v}(M,t)_{/R}dV$$

pour un solide

Définition 8. *Champs de vitesses :*
$v(\vec{M},t)$ est la vitesse d'un point situé en M à l'instant t.

Propriété 1. *propriétés de $\vec{P}$:*
Pour un système de points materiels :

$$\begin{aligned}\vec{P} &= \sum_i m_i v(\vec{M}_i)\\ &= \sum_i m_i \frac{d}{dt}\vec{OM}_i\\ &= \frac{d}{dt}\end{aligned}$$

3.2 Moment cinétique, torseur cinétique

Définition 9. *Soit un système de points materiels :*

$$\vec{L_A} = \sum_i \vec{AM}_i \wedge m_i v(\vec{M}_i)$$
$$\vec{L_A} = \iiint \vec{AM} \wedge \rho(M)v(\vec{M})dV$$

$\vec{L_A}$ est alors le moment cinétique en un point A.
A appartient ou pas au solide

$\vec{L_A}$ est un champ de vecteurs, à chaque point A de l'espace, je peux calculer $\vec{L_A}$

Propriété 2. *quelles relations y-a-t'il entre $\vec{L_A}$ et $\vec{L_B}$?*

$$\begin{aligned}\vec{L_B} &= \iiint \vec{BM} \wedge \rho(M)v(\vec{M})dV\\ &= \iiint (\vec{BA}+\vec{AM}) \wedge \rho(M)\vec{v}(M)dV\\ &= \vec{BA}\wedge \iiint \rho(M)v(\vec{M})dV + \iiint \vec{AM}\wedge\rho(M)v(\vec{M})dV\\ &= \vec{BA}\wedge\vec{P}+\vec{L_A}\end{aligned}$$

on a donc les deux formules suivantes (équivalentes, en connaitre une par coeur)

$$\vec{L_B} = \vec{L_A} + \vec{P} \wedge \vec{AB}$$

$$\vec{L_B} = \vec{L_A} + \vec{BA} \wedge \vec{P}$$

On peut calculer $\vec{L_B}$ sur tout les B de l'espace en sachant $\vec{L_A}$ et $\vec{P}$

Définition 10. $(\vec{L_A}, \vec{P})$ *est un torseur cinétique*
un torseur est un champ de vecteurs avec la propriété d'équiprojectivité :

$$\vec{L_A} \cdot \vec{AB} = \vec{L_B} \cdot \vec{AB}$$

$$\exists \vec{P} \ / \ \vec{L_B} = \vec{L_A} + \vec{P} \wedge \vec{AB}$$

3.2.1 Moment cinétique par rapport a un axe

$$L_\Delta = \vec{L_A} \cdot \vec{u_\Delta}$$

avec Δ, un axe orienté,
et $\vec{u_\Delta}$, le vecteur unitaire de cet axe.

3.2.2 Energie cinétique

$$E_c = \iiint \frac{\rho(M)}{2} v(\vec{M})^2 dV$$

Remarque 5. *memo :*

— *barycentre :*

$$\vec{OG} = \frac{\iiint \rho(M)\vec{OM} dV}{\iiint \rho(M) dV}$$

$$\vec{OG} = \iiint \rho(M)\vec{GM} dV$$

— *torseur cinétique :*

$$\vec{P} = \iiint \rho(M) V\vec{(\rho)}$$

$$\vec{L_A} = \iiint \vec{AM} \wedge \rho(M) v(\vec{M}) dV$$

$$\vec{L_B} = \vec{L_A} + \vec{P} \wedge \vec{AB}$$

— *torseur dynamique :*

$$\vec{D} = \iiint \rho M a(\vec{M}) dV$$

$$\vec{\delta_A} \iiint \vec{AM} \wedge \rho(M) a(\vec{M}) dV$$

$$\vec{\delta_B} = \vec{\delta_A} + \vec{D} \wedge \vec{AB}$$

— *passage du torseur cinétique au torseur dynamique :*

$$\vec{D} = \frac{d}{dt}\vec{P}$$

$$\vec{\delta_A} = \frac{d}{dt}\vec{L_A} + \vec{V_A} \wedge \vec{P}$$

4 Réferenciel barycentrique, théorème de Koenig

notion spécifique aux systèmes de points materiels et aux solides .
n'a pas d'intérêt pour un système d'un point materiel.

4.1 Réferentiel Barycentrique

4.1.1 Définitions

Définition 11. *Le réferenciel barycentrique R^* a pour origine, même horloge et même repère d'espace que R (R^*) possédant les mêmes axes que (R), il est en translation par rapport à (R)*

Notation. *La vitesse de M dans le réferenciel (R^*) se note $v^*\vec{(M)} = \frac{d}{dt}(\vec{GM})$*

4.2 Resultante cinétique et dynamique dans (R^*)

Définition 12.

$$\begin{aligned}\vec{P^*} &= \iiint \rho(M) v^*\vec{(M)} dV \\ &= \iiint \rho(M) \frac{d}{dt}\vec{GM} dV \\ &= \frac{d}{dt}(\iiint \rho(M)\vec{GM} dV) \\ &= \vec{0}\end{aligned}$$

Propriété 3. $\vec{P^*} = \vec{0}$

$$\vec{D^*} = \iiint \rho(M) a^*\vec{(M)} dV$$

$$\vec{D^*} = \vec{0}$$

4.3 Moments cinétique et dynamique dans R^*

Définition 13.

$$\vec{L_A} = \iiint \vec{AM} \wedge \rho(M) v^*\vec{(M)} dV$$

$$\vec{\delta_A^*} = \iiint \vec{AM} \wedge \rho(M) a^*\vec{(M)} dV$$

Propriété 4.

$$\vec{L_B^*} = \vec{L_A^*} + \vec{P^*} \wedge \vec{AB}$$

$$\vec{L_B^*} = \vec{L_A^*} = \vec{L^*}$$

le moment cinétique est indépendant du point dans R^*

$$\vec{\delta_B^*} = \vec{\delta_A^*} + \vec{D^*} \wedge \vec{AB}$$

$$\vec{\delta_B^*} = \vec{\delta_A^*} = \vec{\delta^*}$$

le moment dynamique est indépendant du point dans R^*

4.4 Théorèmes de Koenig

Théorème 1. *Relations entre :*

- $L_{\vec{A}|}|_{(R)}$ *et* $\vec{L^*}$
- $L_{\vec{\delta}|}|_{(R)}$ *et* $\vec{\delta^*}$
- $E_c|_{(R)}$ *et* $E_c^* = \iiint \frac{1}{2}\rho(M)\vec{v^*}(M)dV$

4.4.1 Moment cinétique :

$$\vec{L_A}|_{(R)}$$

5 Champ des vitesses dans un solide indéformable

Rappel 1. *Pour connaitre le mouvement d'un solide, il faut connaitre sa trajectoire et sa vitesse en chacuns de ses points.*
On définit alors le champ des vitesses

Définition 14. $v(\vec{M})$*, la vitesse du point situé en M au temps t*

5.1 Degrès de liberté

tout solide (points matériels dont la distance entre eux est fixée) possède 6 degrès de liberté.

on utilise la position du barycentre (qui fixe 3 degrès de liberté) ainsi que trois angles (qui fixe les 3 autres degrès de liberté)
valable uniquement pour les solides indéformables

5.2 Torseur des vitesses

définition du solide indéformable, pour tout points A et B du solide,
la distance AB étant constante, $\vec{AB}^2$ est aussi constant, d'où,

$$\vec{AB} \cdot [v(\vec{B}) - v(\vec{A})] = 0 \Rightarrow v(\vec{B}) \cdot \vec{AB} = v(\vec{A}) \cdot \vec{AB}$$

Le champ des vitesses est équiprojectif, i.e. en trois dimensions, $\exists! \vec{\Omega} \ / \ v(\vec{B}) = v(\vec{A}) + \vec{\Omega} \wedge \vec{AB}$

Définition 15. *On définit alors un couple avec le champs des vitesses et un torseur des vitesses (ou torseur cinématique)*

$$(v(\vec{A}), \vec{\Omega})$$

Remarque 6.

$$v(\vec{B}) = v(\vec{A}) + \vec{\Omega} \wedge \vec{AB}$$

$$v(\vec{B}) \cdot \vec{AB} = v(\vec{A}) \cdot \vec{AB} + (\vec{\Omega} \wedge \vec{AB}) \cdot \vec{AB}$$

Remarque 7. *Le champ des vitesses peut varier en fonction du temps,*
à t donné, $(v(\vec{A}, t), \Omega(\vec{t}))$

Remarque 8. $\vec{\Omega}$ *est homogène à l'inverse d'un temps.*

5.3 Exemples de mouvements de solide

On se donne $(v(\vec{A}), \vec{\Omega})$, on souhaite alors connaitre la nature du mouvement.

5.3.1 $v(\vec{A}) \neq \vec{0}$, $\vec{\Omega} = \vec{0}$, le mouvement est alors une translation

Pour tout point B du solide, $v(\vec{B}) = v(\vec{A})$, il s'agit alors d'une translation

5.3.2 $\exists A \ / \ v(\vec{A}) = \vec{0}$, $\vec{\Omega} \neq \vec{0}$, rotation autour d'un axe fixe

Pour tout point M du solide, $v(\vec{M}) = v(\vec{A}) + \vec{\Omega} \wedge \vec{AM} = \vec{\Omega} \wedge \vec{AM}$

5.3.3 $\vec{\Omega} \neq \vec{0}$, $\exists A \ / \ v(\vec{A}) \neq \vec{0}$ et $v(\vec{A})$ et $\vec{\Omega}$ sont colinéaires, il s'agit alors d'un mouvement hélicoïdal

5.3.4 $\vec{\Omega} \neq \vec{0}$, $v(\vec{A}) \neq \vec{0}$, le mouvement est quelconque

On montre qu'il existe un point P tel que $v(\vec{P})$ et $\vec{\Omega}$ sont colinéaires, de manière à se rapporter à un mouvement hélicoïdal autour d'un axe passant par P appelé axe instantané de rotation.
l'axe instantané de rotation peut varier dans le temps

5.4 Comment déterminer le vecteur rotation d'un solide pour un mouvement donné

On prend deux points quelconques M_1 et M_2.
On s'intéresse alors à $\vec{M_1M_2}(t)$ et $\vec{M_1M_2}(t+dt)$
S'ils sont égaux, il s'agit d'un mouvement de translation

On se place alors dans (R^*),
$\vec{\Omega}$, est le même dans (R) et (R^*) $\vec{v^*(G)} = \vec{0}$ On tante alors de determiner un axe de rotation tel que $\{\Omega \mid \vec{v^*(M)} = \vec{0}\}$
On prend M_1 dans un plan perpendiculaire à l'axe passand par G

$$\vec{GM_1}(t+dt) - \vec{GM_1}(t) = v(\vec{M_1})dt = \vec{\Omega} \wedge \vec{GM_1}dt$$

5.5 Exemples de détermination de $\vec{\Omega}$