Analyse

Table des matières

Première partie
Séries numériques

On considère une suite (réelle ou complexe) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on étudie la somme infinie $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Remarque 1. *Question :*
Est-ce que cette somme est bien définie, c'est-à-dire appartient à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exemple.
— $u_n = 1$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n = +\infty$
— $u_n = n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n = +\infty$
— $u_n = \frac{1}{n}$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n = +\infty$
— $u_n = \frac{1}{n^2}$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n = \frac{\pi^2}{6}$

1 Quelques rappels et compléments sur les suites

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge s'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N$, $|u_n - l| < \varepsilon$.
On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy si $\forall \epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N$, $\forall m \geq N$, $|u_n - u_m| < \epsilon$.

Proposition 1. *Toute suite convergente est de Cauchy.*

Proposition 2. *Dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$, toute suite de Cauchy est convergente.*

On dit que $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) est un espace métrique complet.

Équivalents :
Si $u_n = n^2$ et $v_n = n^3$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
Cependant, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est plus rapide que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Les équivalents servent à comparer des vitesses de convergence.

Définition 1. *Deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont équivalentes si $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$.*
On note $u_n \sim v_n$

Dans ce cas, les deux suites ont la même vitesse de convergence.
Cela n'a aucun intérêt que si (u_n) tend vers 0, $+\infty$ ou $-\infty$

Exemple. *Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, alors,*

— $e^{a_n} - 1 \sim a_n$
— $e^{a_n} - 1 \sim a_n$

Deuxième partie
Séries numériques

On prend une suite réelle (ou complexe) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
La somme infinie $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ est la série de terme général u_n.

On lui associe la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.
On dit que la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$ (elle a une limite et cette limite est réelle). Sinon, la série diverge.

Si la série converge, son reste est la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ et $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}$ est la somme de la série.
On a $S_n + R_n = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k$.
Notons que $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n = 0$.

Exercice. *(Á savoir), la série géométrique $u_n = a^n$ avec $a \in \mathbb{R}$,*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$$

— *Si $a = 1$, on a $u_n = 1$ pour tout entier naturel n, donc $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge.*
— *Si $a = -1$, $S_n = \frac{1-(-1)^{n+1}}{2}$ n'a pas de limite et donc $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ diverge.*
— *Si $-1 < a < 1$ (ou $|a| < 1$), $S_n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$*

En résumé, $\sum\limits_{n\geq 0} a^n$ converge si et seulement si $|a| < 1$ et si $|a| < 1$, alors $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$

Proposition 3. *Critère de Cauchy :*
$\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge si et seulement si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. c'est-à-dire $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N, \forall$, $\forall m \geq N$, $|S_n - S_m| < \varepsilon$ ou encore

Application :
La série harmonique $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n}$.
On montre que cette série est divergente.
On note $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

Pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2n}..$$

2 Séries à termes positifs

On suppose que $u_k \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (ou du moins à partir d'un certain rang). Dans ce cas, la suite des sommes partiels $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive et croissante. Par conséquent, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si elle est majorée. Dans le cas contraire, on a $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$.

Théorème 1. $\sum\limits_{k\geq 0} u_n$ *converge si et seulement si* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est majoré.*

2.1 Comparaison entre séries et intégrales généralisées

Théorème 2. *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, une fonction décroissante et positive. Alors, la suite* $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $U_n = \sum\limits_{k=0}^{n} f(k) - \int_0^n f(t)dt$ *converge.*
Par conséquent, la série $\sum\limits_{n\geq 0} f(n)$ *et l'intégrale* $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ *ont la même nature.*

Démonstration. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$f(k+1)\cdot 1 \leq \int_k^{k+1} f(t)dt \leq f(k)\cdot 1$$

On montre alors que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0.
On a :

$$\begin{aligned} U_n &= f(n) + \sum_{k=0}^{n-1} f(k) - \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} f(t)dt \\ &= f(n) + \sum_{k=0}^{n-1} (f(k) - \int_k^{k+1} f(t)dt) \end{aligned}$$

avec $f(n) \geq 0$ et $f(k) - \int_k^{k+1} f(t)dt \geq 0$.
Donc, $U_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On montre maintenant que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

$$\begin{aligned} U_{n+1} - U_n &= \sum_{k=0}^{n+1} f(k) - \int_0^{n+1} f(t)dt - \sum_{k=0}^{n} f(k) \\ &= f(n+1) - \int_n^{n+1} f(t)dt \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

Donc $U_{n+1} \leq U_n$.

En résumé, on a :

$$\int_0^n f(t)dt + U_n = \sum_{k=0}^{n} f(k)$$

avec $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = l \in \mathbb{R}$

Si $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge, alors, $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^n f(t)dt \in \mathbb{R}$ et donc $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} f(k) \in \mathbb{R}$ Si $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ diverge, alors, $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^n f(t)dt = +\infty$ et donc $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} f(k) = +\infty$

Réciproquement, si la somme converge, alors l'intégrale converge et si la somme diverge, alors l'intégrale diverge.

□

Application :
Pour les séries de Riemann, si $\alpha \in \mathbb{R}$,
$\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

2.2 Critères de comparaison

On considère deux suites positives $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Théorème 3. *On suppose que* $0 \leq u_n \leq v_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*,*
alors :

- *Si* $\sum_{n\leq 0} v_n$ *converge alors* $\sum\limits_{n\leq 0} u_n$ *converge*
- *Si* $\sum_{n\leq 0} v_n$ *diverge alors* $\sum\limits_{n\leq 0} u_n$ *diverge*

Démonstration.

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

$$S'_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$$

On a $0 \leq S_n \leq S'_n$

$$\sum$$

□

Corrolaire 1. *S'il existe a et b strictements positifs tels que* $a \leq \frac{u_n}{v_n} \leq b$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, alors* $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ *et* $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ *ont la même nature.*

Démonstration.

$$av_n \leq u_n \leq bv_n$$

□

Corrolaire 2. *Si on a* $u_n \sim v_n$*, alors* $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ *et* $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ *ont la même nature.*

De plus, si $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ *et* $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ *convergent, alors les restes sont équivalents.*
$R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k \sim R'_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} v_k$
Dans le cas où elles divergent, les sommes partielles sont équivalentes :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \sim S'_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$$

Démonstration. Si $u_n \sim v_n$, alors, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$
Donc, $\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \leq N,\ 0,5 \leq \frac{u_n}{v_n} \leq 1,5$
D'où $0,5 v_n \leq u_n \leq 1,5 v_n$ □

Exemple. —

2.3 Comparaison avec une suite géométrique

Rappel 1. *Si $a \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), alors $\sum\limits_{n\geq 0} a^n$ converge si et seulement si $|a| < 1$.*
Et dans ce cas, on a;

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$$

On suppose que $u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Théorème 4. *Règle de Cauchy On suppose que $\lim\limits_{n\to\infty} (u_n)^{\frac{1}{n}} = l \geq 0$.*
Alors :

— *Si $l < 1$, alors $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge*
— *Si $l > 1$, alors $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ diverge grossièrement*

Remarque 2. *Si $l = 1$, tout peut arriver.*
$u_n = \frac{1}{n^\alpha}$

$$\begin{aligned}(u_n)^{\frac{1}{4}} &= (\frac{1}{n^\alpha})^{\frac{1}{4}} \\ &= \frac{1}{n^{\frac{\alpha}{n}}} \\ &= \frac{1}{e^{\frac{\alpha}{n}} \ln n} \\ &= e^{-\frac{\alpha}{n} \ln n =}\end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$
On a $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-\frac{\alpha}{n}\ln n} = e^0 = 1$. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n)^{\frac{1}{n}} = 1$ pour tout α.
mais si $\alpha > 1$, $\sum u_n$ converge
et si $\alpha \leq 1$, $\sum u_n$ diverge

Démonstration. On a $\lim\limits_{n\to\infty} (u_n)^{\frac{1}{n}} = l$, donc,

—
— Si $l > 1$,
On prend $\varepsilon > 0$, tel que $1 < l - \varepsilon$.
Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N,\ 1 < l - \varepsilon < (u_n)^{\frac{1}{n}}$
Donc $u_n > (l-\varepsilon)^n$ pour tout $n \geq N$.

Comme $l-\varepsilon > 1$, on a $\lim_{n\to\infty} (l-\varepsilon)^n = +\infty$
et donc $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$

□

Théorème 5. *Règle de d'Alembert On suppose que $u_n > 0$ à partir d'un certain rang.*
On suppose de plus que $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$
Alors :

- *Si $l < 1$, alors $\sum u_n$ converge*
- *Si $l > 1$, alors $\sum u_n$ diverge grossièrement*

Remarque 3. *Si $l = 1$, on ne peut rien dire : $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

Démonstration. $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ l-\varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} < l+\varepsilon$$

- Si $l < 1$, on prend $\varepsilon > 0$ tel que $l+\varepsilon < 1$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N,\ 0 \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq l+\varepsilon$. Si $n > N$, on a :
$$\prod_{k=N}^{n-1} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{u_n}{u_N} < (l+\varepsilon)^{n-N}$$
On obtient alors
$$0 \leq u_n \leq u_N$$
$$(l+\varepsilon)^{n-N}$$
- Idem

□

2.4 Séries à termes de signe quelconque

2.4.1 Séries absolument convergentes

Définition 2. *On dit que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est absolument convergente si $\sum_{n\geq 0} |u_n|$ converge.*

Théorème 6. *Si la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge absolument alors elle converge.*

Démonstration. $\sum_{n\geq 0} |u_n|$ convergeant, la série vérifie le critère de Cauchy :
Si on prend $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq N,\ \forall p \in \mathbb{N},\ \left|\sum_{k=n}^{n+p} |u_k|\right| < \varepsilon$$

On a donc, pour tout $n \geq N$, et pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p} u_k\right| \leq \sum_{k=n}^{n+p} |u_k| < \varepsilon$$

Donc la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ vérifie le critère de Cauchy, donc elle converge. □

Remarque 4. *Attention, la réciproque est fausse :*

Exemple. $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$
$\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ *converge*
mais $\sum\limits_{n\geq 1} \left|\frac{(-1)^n}{n}\right|$ *converge*

2.4.2 Séries alternées

Ce sont des séries de la forme $\sum\limits_{n\geq 0} (-1)^n a_n$ où $a_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Théorème 7. *Si la suite* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante et converge vers* 0*, alors* $\sum\limits_{n\geq 0} (-1)^n a_n$ *converge.*
De plus, si on note $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k a_k$*, alors on a* $|R_n| \leq a_{n+1}$

Démonstration. La preuve sera faite en exercice □

Exemple. $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ *converge.*

2.4.3 Règle d'Abel

Théorème 8. *Soient deux suites* $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *qui vérifient :*

1. $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est positive, décroissante et converge vers* 0.
2. *Il existe* $M > 0$ *tel que*
$$\forall n \in \mathbb{N}, \left|\sum_{k=0}^{n} u_k\right| \leq M$$

Alors $\sum\limits_{n\geq 0} \alpha_n u_n$ *converge.*

Démonstration. La preuve sera faite en exercice □

Exemple. $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{\cos n}{n}$
On a $\frac{\cos n}{n} = \frac{1}{n}\cos n$.

— $(\frac{1}{n})_{n\geq 1}$ *est positive, décroissante et converge vers* 0.
— *On montre qu'il existe* $M > 0$ *tel que pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$*, on a :*
$$\left|\sum_{k=1}^{n} \cos(k)\right| \leq M$$

On écrit $\cos(k) = \Re(e^{ik})$
Donc,

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{n}\cos(k)\right| &= \left|\sum_{k=1}^{n}\Re(e^{ik})\right| \\ &= \left|\Re(\sum_{k=1}^{n}e^{ik})\right| \\ &= \left|\Re(\sum_{k=0}^{n}e^{ik})-1\right|\end{aligned}$$

On sait aussi que

$$\sum_{k=0}^{n}e^{ik} = \sum_{k=0}^{n}(e^{i})^{k} = \frac{1-e^{i(n+1)}}{1-e^{i}}$$

Rappel 2. *Si* $z \in \mathbb{C}$, *alors,* $|\Re(z)| \leq |z|$ *et* $|\Im(z)| \leq |z|$
On en déduit :

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\cos(k)\right| \leq \left|\Re(\sum_{k=0}^{n}e^{ik})\right| + 1 \leq \left|\sum_{k=0}^{n}e^{ik}\right| + 1$$

Donc :

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\cos(k)\right| \leq \left|\frac{1-e^{i(n+1)}}{1-e^{i}}\right| + 1 \leq \frac{|1-e^{i(n+1)}|}{|1-e^{i}|} + 1 \leq \frac{|1|+|e^{i(n+1)}|}{|1-e^{i}|} + 1 \leq \frac{2}{|1-e^{i}|} + 1$$

Exercice. *Utilisation du Théorème d'Abel pour montrer le théorème des séries alternées :*

$$\sum_{n\geq 0}(-1)^{n}a_{n}$$

avec $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *décroissante et converge vers* 0.

Il suffit de vérifier qu'il existe $M > 0$ *tel que*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \left|\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\right| \leq M$$

Selon la parité de n, $\left|\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\right|$ *vaut* 0 *ou* 1.
Donc $\left|\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\right| \leq 1$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$