Algèbre linéaire

Table des matières

Première partie
Systèmes d'équations linéaires

Soit $\mathbb{K}$, un corps.

Définition 1. *Un système d'équtions linéaires à n inconnues et p équations est un système d'équations de la forme :*

$$(S)\begin{cases} a_{1,1}x_1 + ... + a_{1,n}x_n = b_1 \\ ... \\ a_{n,1}x_{n,1} + ... + a_{n,n}x_{n,n} = b_n \end{cases}$$

avec avec $a_{i,j}$ et b_i des éléments de $\mathbb{K}$
et x_j sont les inconnues.

Définition 2. *Une solution est le n-uplet $(x_1, ..., x_n)$ tel que x... sont solutions de toutes les équations.*

Définition 3. *Les $b_1, ..., b_p$ sont appelés seconds membres.*

Remarque 1. *à priori, $n \neq p$*

1 Résolution

1.1 Équivalence de systèmes

Pour résoudre, on se ramène à un système équivalent plus simple :

$$(S) \Leftrightarrow (S')$$

$(S) \Leftrightarrow (S')$ signifie que les deux systèmes ont les mêmes solutions.

1.2 Méthode du pivot de Gauss

On ne change pas les solutions en faisant une des trois opérations suivantes :
— changer l'ordre des équations
— multiplier une équation par un élément $\lambda \in \mathbb{K}\setminus\{0\}$
— Ajouter à une équation un multiple d'une autre
ou toute opération qui peut se décomposer en une série de telles opérations
Méthode du pivot de Gauss :

— Si $a_{1,1} \neq 0$

Notation. *$a_{1,1}$ est alors appelé le pivot*
pour tout i strictement supérieur à 1, on remplace la ligne L_i par $L_i - \frac{a_{i,1}}{a_{1,1}}$

À la fin, on obtient un système dit échelonné, c'est-à-dire de la forme :

$$\begin{cases} a'_{1,j_1}x_{j_1} + ... + a'_{1,n}x_n = b'1 \end{cases}$$

Deuxième partie

Chapitre 2 : Espaces vectoriels

Soit $\mathbb{K}$, un corps ($\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, ou autre)

2 Notion d'espace vectoriel

2.1 Définitions

Définition 4. *vague Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est un ensemble d'éléments appelés vecteurs tels qu'on puisse les additionner entre eux et les multiplier par des scalaires, c'est-à-dire des éléments de $\mathbb{K}$ avec des relations naturelles de compatibilité*

Définition 5. *Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est un ensemble E muni de deux lois :*

— *une loi de composition interne :*

$$\begin{aligned} + : E \times E &\to E \\ (u, v) &\mapsto u + v \end{aligned}$$

— *une loi de composition externe :*

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{K} \times E &\to E \\ (\lambda, u) &\mapsto \lambda \cdot v \end{aligned}$$

Ces lois vérifient :

— $\forall u, v, w \in E,\ (u + v) + w = u + (v + w)$
  la loi + est donc associative

— $\forall u, v \in E,\ u + v = v + u$
  la loi + est donc commutative

— $\exists 0_E \in E,\ \forall u \in E,\ u + 0_E = 0_E + u = u$
  la loi + admet un élément neutre

— $\forall u \in E,\ \exists v \in E,\ u + v = v + u = 0_E$
  chaque élément de E admet, par +, un inverse ou opposé

— $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ \forall u \in E,\ \lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda \cdot \mu) \cdot u$
  la loi $\cdot$ est associative

— $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ \forall u \in E,\ (\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u$
  la loi $\cdot$ est distributive à gauche

— $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall u, v \in E,\ (u + v) \cdot \lambda = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$
  la loi $\cdot$ est distributive à droite

— $\forall u \in E,\ 1 \cdot u = u$
  la loi $\cdot$ admet un élément neutre

Remarque 2. *Dans le troisième axiome, l'élément neutre est unique.*
Dans le quatrième axiome, le vecteur v est en fait unique, on le note $-u$.

Proposition 1. *On a également,* $\forall u \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}$ *:*

1. $\lambda \cdot 0_E = 0_E$
2. $0_{\mathbb{K}} \cdot u = 0_E$
3. $\lambda \cdot u = 0_E \Rightarrow \lambda = 0_{\mathbb{K}}$ *ou* $u = 0_E$
4. $(-\lambda) \cdot u = \lambda \cdot (-u) = -(\lambda \cdot u)$

Démonstration. 1.

$$\begin{aligned} \lambda \cdot 0_E &= \lambda \cdot (0_E + 0_E) \\ &= \lambda \cdot 0_E + \lambda \cdot 0_E \\ &= \lambda \cdot 0_E + 0_E \end{aligned}$$

$$\lambda \cdot 0_E = O_E$$

2.

$$\begin{aligned} 0_{\mathbb{K}} \cdot u &= (0_{\mathbb{K}} + 0_{\mathbb{K}}) \cdot u \\ &= 0_{\mathbb{K}} \cdot u + 0_{\mathbb{K}} \cdot u \\ &= 0_{\mathbb{K}} \cdot u + 0_{\mathbb{K}} \end{aligned}$$

$$0_{\mathbb{K}} \cdot u = O_{\mathbb{K}}$$

3. Si $\lambda = 0_{\mathbb{K}}$, cf. 2
   Si $\lambda \neq 0$, alors $\lambda^{-1} \in \mathbb{K}$,

$$0 = \lambda^{-1} \cdot 0 = \lambda^{-1}(\lambda \cdot u) = (\lambda^{-1} \cdot \lambda) \cdot u = 1 \cdot u = u$$

□

Notation. *On note souvent :*

— $0_E = 0$ *et* $0_{\mathbb{K}} = 0$
— $u - v = u + (-v)$

Lemme 1. $\forall u, v, w \in E, u + w = v + w \Rightarrow u = v$

Démonstration.

$$\begin{aligned} v &= (u + w) - w \\ &= u + (w - w) \\ &= u + 0_E \\ &= u \end{aligned}$$

donc $v = u$ □

Remarque 3. — *Pour* $\lambda \in \mathbb{K}$ *et* $u \in E$ $u \cdot \lambda$ *ne veut rien dire.*
— *Pour* $u, v \in E$ $u \cdot v$ *ne veut rien dire*

Exemple. *1/ Pour les lois de compositions internes et externes usuelles,*

— $\mathbb{K}$ *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel*
— $\mathbb{K}^n$ *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel*
— *plus généralement, si* E_1 *et* E_2 *sont des* $E_1 \times E_2$ *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel*

2/ Soit E*, un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel et* A*, un ensemble qualconque,*

— $\mathcal{F}(A, E)$, *l'ensemble des applications de* A *dans* E, *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel*

$$\forall f_1, f_2 \in \mathcal{F}(A, E),\ \forall \lambda \in \mathbb{K},$$

$$\begin{aligned} f_1 + f_2 : A &\to E \\ a &\mapsto f_1(a) + f_2(a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda \cdot f_1 : A &\to E \\ a &\mapsto \lambda \cdot f_1(a) \end{aligned}$$

— *Si* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *et* $A = I \subset \mathbb{R}$, *un intervalle, on peut avoir* $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$

— *Si* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *et* $A = \mathbb{N}$, *on a* $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, *l'ensemble des suites numériques*

3/ $\mathbb{K}[X]$, *l'ensemble des polynômes*

4/ $M_{n,p}(\mathbb{K})$, *l'ensemble des matrices à coefficient dans* $\mathbb{K}$, *à* n *lignes et* p *colonnes.*

Remarque 4. $\mathbb{R}^2$, *munit de la loi + usuelle et* $\lambda \cdot (x_1, x_2) = (\lambda \cdot x_1, 0)$
n'est pas un $\mathbb{K}$*-espace vectoriel, pourquoi ?*

2.2 Sous-espace vectorel

Définition 6. *Soit* E, *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel, et* $F \subset E$.
F *est un sous espace vectoriel de* E *s'il s'agit d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel pour les lois* $+$ *et* $\cdot$ *de* E.

— $\forall u, v \in F,\ u + v \in F$

— $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall u \in F,\ \lambda \cdot u \in F$

— $+$ *et* $\cdot$ *vérifient les propriétés des lois de composition interne et externe des espaces vectoriels*

Propriété 1. F *est un sous-espace vectoriel de* E *si :*

— $F \neq \emptyset$

— $\forall u, v \in F,\ u + v \in F$

— $\forall u \in F,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda \cdot u \in F$

Remarque 5. — *On a vu que* $0_E \in F$

— *Les deux derniers points de la définition de sous-espace vectoriel sont équivalents à :*

$$\forall u, v \in F,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ \lambda u + \mu v \in F$$

ou encore à :

$$\forall u, v \in F,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda u + v \in F$$

Remarque 6. *Dans la plupart des cas, pour montrer qu'un ensemble (avec les lois* $+, \cdot$*) est un espace vectoriel, on montre qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel connu.*

Exemple. — $E = \mathbb{K}^n$ *et* $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$
$F = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n = 0\}$ *est un sous-espace vectoriel de* E.

— $\mathbb{K}[X]$, *les suites de* $\mathbb{K}$ *nulles à partir d'un certain rang, est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites de* $\mathbb{K}$

2.3 Sous espace engendré

Définition 7. *Une combinaison linéaire de* $v_1,...,v_p$ *est un élément de la forme* $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_p v_p$ *avec* $\lambda_1,...,\lambda_p \in \mathbb{K}$.

Remarque 7. *Une combinaison linéaire de* $(v_i)_{i\in I}$ *est une combinaison linéaire au sens précédent d'une sous famille finie.*

Exemple. *Dans* $\mathbb{K}[X] = \{1, X, X^2,..., X^n,...\}$*, une combinaison linaire est un polynôme.*

Définition 8. *Soient* $v_1,...,v_p \in E$
$vect(v_1,...,v_p) = \{$*combinaisons linéaires de* $v_1,...,v_p\} = \{\sum_{i=1}^{p} \lambda_i v_i \ / \ \lambda_1,...,\lambda_p \in \mathbb{K}\}$

Proposition 2. $vect(v_1,...,v_p)$ *est un sous espace vectoriel de* E.

Exemple. *Cas particulier :*
$p = 1$, $vect(v)$ *est alors une droite vectorielle.*
$p = 2$,

2.4 Intersections

Proposition 3. *Soient* F_1, F_2 *des sous-espaces vectoriels de* E*, alors,* $F_1 \cap F_2$ *est un sous espace vectoriel :*

$$F_1 \cap F_2 = \{x \in E \ / \ x \in F_1 \ \text{ et } \ x \in F_2\}$$

Démonstration.
- $0 \in F_1$ et $0 \in F_2$, donc $0 \in F_1 \cap F_2$
  l'intersection est donc non vide
- Soient $u, v \in F_1 \cap F_2$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$
  On montre que $\lambda u + \mu v \in F_1 \cap F_2$
  $\lambda u + \mu v \in F_1$ car F_1 est un sous espace vectoriel
  $\lambda u + \mu v \in F_2$ car F_2 est un sous espace vectoriel

□

application :
L'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires homogène (sans second membre) à n inconnues (et p équations) est un sous espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.

Démonstration. Intersection des sous espaces vectoriels est solution de chaque équations □

Remarque 8. *Attention,*

- *En général, l'union de sous espaces vectoriels n'est pas un sous espaces vectoriels (sauf cas triviaux)*
- *Le complémentaire d'un sous-espace vectoriel n'est jamais un sous-espace vectoriel (étant privé du* 0*)*

2.5 Somme de sous espaces vefctoriels

Définition 9. *Soient F_1, F_2, des sous espaces vectoriels, on définit :*

$$F_1 + F_2 = \{f_1 + f_2 \ / \ f_1 \in F_1, \ f_2 \in F_2\}$$

Remarque 9. *$F_1 + F_2$ est un sous-espace vectoriel de E*

Exemple.

Proposition 4. *Si $F_1 = vect(v_1, ..., v_{p_1})$ et $F_2 = vect(w_1, ..., w_{p_2})$, alors,*

$$F_1 + F_2 = vect(v_1, ..., v_{p_1}, w_1, ..., w_{p_2})$$

Démonstration. Soit $u \in F_1 + F_2$

$$\exists f_1 \in F_1, \exists f_2 \in F_2, \ / \ u = f_1 + f_2$$
$$\exists f_1 \in F_1, \exists f_2 \in F_2, \ / \ u = f_1 + f_2$$

□

Remarque 10. *$F_1 - F_2$ n'est pas intéressant : $\{f_1 + (-f_2) \ / \ f_1 \in F_1, \ f_2 \in F_2\} = F_1 + F_2$*

Remarque 11. *$F_1 + F_2 \neq F_1 \cup F_2$*

3 Familles libres, génératrices et bases

3.1 Familles libres, génératrices

Définition 10. *On dit que $(v_1, ..., v_p)$ est une famille génératrice de E si $vect(v_1, ..., v_p) = E$*

Vocabulaire. *E est dit finiement engendré s'il existe une famille génératrice finie.*

Remarque 12. *intuitivement, $(v_1, ..., v_p)$ est génératrice si elle "voit" tous les éléments de E.*

Remarque 13. *A priori, il peut y avoir plusieurs manières d'écrire un élément de E*

Exemple. *Pour $E = \mathbb{R}^2$, $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$, $e_3 = (1,1)$,
on a $e_3 = e_1 + e_2$ la famille $\{e_1, e_2, e_3\}$ est génératrice.*

calcul pratique :
trouver une famille génératrice d'un sous espace vectoriel défini par des équations.

Exemple. $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y + z = 0$
On résoud le système