# Théorie des groupes

## Table des matières

**1 Groupe opérant sur un ensemble (action de groupe) 2**

# 1 Groupe opérant sur un ensemble (action de groupe)

**Définition 1.** *Soient G, un groupe et X, un ensemble.*
*On appelle action (ou opération) à gauche de G sur X toute application :*

$$\begin{aligned} \cdot : G \times X &\to X \\ (g,x) &\mapsto g\cdot x \end{aligned}$$

*qui satisfait les deux conditions suivantes :*

— $\forall g,h \in G,\ \forall x \in X,\ g\cdot(h\cdot x) = (g\cdot h)\cdot x$
— $\forall x \in X,\ e\cdot x = x$

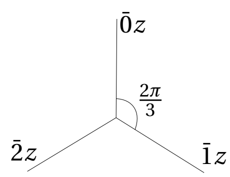
**Définition 2.** *Opération à droite*

$$\begin{aligned} \cdot : G \times X &\to X \\ (g,x) &\mapsto g\cdot x \end{aligned}$$

*avec :*

— $\forall g,h \in G,\ \forall x \in X,\ g\cdot(h\cdot x) = (g\cdot h)\cdot x$
— $\forall x \in X,\ e\cdot x = x$

**Exemple.**
— $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ *agit par rotation sur* $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$.
  $\forall z = re^{i\phi} \in \mathbb{C},\ \forall \bar{k} \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z},\ \bar{k}\cdot z = re^{i\phi+\frac{2\pi k}{3}}$




— $\mathbb{R}$ *agit par translation sur* $\mathbb{R}^2$
  $\forall r \in \mathbb{R},\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ r\cdot(x,y) = (x+r,y)$
— $\mathbb{R}^2$ *agit par translation sur* $\mathbb{R}^2$
  $\forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2,\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (\alpha,\beta)\cdot(x,y) = (\alpha+x,\beta+y)$
— *Si G et un groupe et X = G, alors on a l'opération de G sur lui-même :*

1. *par translation à gauche :*

$$\begin{aligned} \cdot : G \times G &\to G \\ (g,x) &\mapsto g\cdot x \end{aligned}$$

2. *par conjugaison :*

$$\begin{aligned} \cdot : G \times G &\to G \\ (g,x) &\mapsto g\cdot x\cdot g^{-1} \end{aligned}$$

— *L'action triviale de $G$ sur $X$ est donnée par :*
$g \cdot x = x, \ \forall g \in G, \forall x \in X$

**Proposition 1.** *Soit $G$, un groupe et $X$, un ensemble.*
*Il y a une correspondance bijective et naturelle entre les actions (à gauche) de $G$ sur $X$ et les morphisme de $G$ vers $Bij(X)$.*

*Démonstration.* — Soit $\diamond$, une action de $G$ sur $X$.
$\forall g \in G$, on considère l'application

$$\begin{aligned} \sigma_g : X &\to X \\ x &\mapsto g \diamond x \end{aligned}$$

Étant donné que :

$$\begin{aligned} g^{-1} \diamond (g \diamond x) &= (g^{-1} g) \diamond x \\ &= x \\ &= (g g^{-1}) \diamond x \\ &= g \diamond (g^{-1} \diamond x) \end{aligned}$$

On a :

$$\sigma_{g^{-1}} \circ \sigma_g = Id_X = \sigma_g \circ \sigma_{g^{-1}}$$

Donc $\sigma_g \in Bij(X)$
De plus, étant donné que $g_1 \diamond (g_2 \diamond x) = (g_1 g_2) \diamond x$,
on a $\sigma_{g_1} \circ \sigma_{g_2} = \sigma_{g_1 g_2}$

Donc l'application :

$$\begin{aligned} \sigma_\diamond : G &\to Bij(X) \\ g &\mapsto \sigma_g \end{aligned}$$

est un morphisme.

— Soit $\Psi : G \to Bij(X)$, un morphisme.
On obtient l'action $\diamond_\Psi$ de $G$ sur $X$ pour $g \diamond_\Psi x = \Psi(g)(x)$ On vérifie que c'est une action de groupe.
La correspondance bijective vient de $\Psi_{\diamond_\Psi} = \Psi$ et $\diamond_{\Psi_\diamond} = \diamond$

□

**Définition 3.** *Soit $G$ opérant sur $X$ et $x \in X$.*
*L'orbite de $x$ sous $G$ est :*

$$Orb(x) = \{g \cdot x \mid g \in G\} \subset X$$

**Proposition 2.** *Soit $G$ opérant sur $X$.*
*Soit $\sim$, la relation sur $X$ définie par*

$$x \sim y \Leftrightarrow x \in Orb(y)$$

*Alors $\sim$ est une relation d'équivalence sur $X$ dont les classes d'équivalences sont les orbites.*

**Corrolaire 1.** *Les orbites des éléments de $X$ sous l'action de $G$ forment une partition de $X$.*
*On note $G \backslash X$ l'ensemble quotient $X / \sim$*

*Démonstration.* On montre que $\sim$ est une relation d'équivalence :

- Réflexivité : $\forall x \in X,\ e \cdot x = x$, par conséquent, $x \in Orb(x)$ et $x \sim x$.
- Symétrie : Supposons $x \sim y$, *i.e.* $\exists g \in G \ / \ x = g \cdot y \Leftrightarrow x \in Orb(y)$
  Donc $g^{-1} \cdot x = g^{-1} \cdot (g \cdot y)^{-1} = (g^{-1} g) \cdot y = e \cdot y = y$
  par conséquent, $y = Orb(x)$
  Ainsi $y \sim x$
- transitivité : Supposons $x \sim y$ et $y \sim z$, *i.e.* $\exists g, h \in G \ / \ x = g \cdot y$ et $y = h \cdot z$
  Donc $x = g \cdot y = g \cdot (h \cdot z) = (gh) \cdot z$
  par conséquent, $x \in Orb(z)$,
  ainsi, $x \sim z$

La classé d'équivalence d'un $z \in X$ est $Orb(z)$ □

**Exemple.**

- *Les orbites pour $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ opérant sur $\mathbb{C}$ par rotation :*

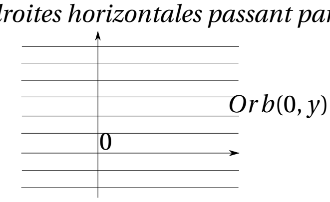
$$Orb(z) = \{z, e^{\frac{2\pi}{3}} z, e^{\frac{4\pi}{3}} z\}$$

  *Comporte* 3 *éléments si $z \neq 0$*
  *Sinon (pour $z = 0$), $Orb(0) = \{0\}$*
- *Pour $\mathbb{R}$ opérant sur $\mathbb{R}^2$,*

$$r \cdot (x, y) \rightarrow (x + r, y)$$

$$Orb((x, y)) = \{r \cdot (x, y) \mid r \in \mathbb{R}\} = \{(x + r, y) \mid r \in \mathbb{R}\} = \{(\lambda, y) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

  *Ce qui correspond aux droites horizontales passant par $(0, y)$*




- $\mathbb{R}^2$ *opérant par translation sur $\mathbb{R}^2$, i.e. $\exists(\alpha, \beta), (x, y) \in \mathbb{R}^2$*

$$Orb(x, y) = \{(\alpha + x, \beta + y) \mid (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\} = \{(s, t) \mid (s, t) \in \mathbb{R}^2\} = \mathbb{R}^2$$

  *On a donc qu'une seule orbite*
- *$G$ opérant par translation sur $G$ tel que $g \cdot x$*

$$Orb(e) = \{g \cdot e \mid g \in G\} = \{g | g \in G\} = G$$

  *Donc, $\forall h \in G,\ Orb(h) = Orb(e) = G$.*
  *Il n'y a donc qu'une seule orbite.*

**Définition 4.** *L'action $G$ opérant sur $X$ est transitive s'il existe exactement une orbite dans $X$.*

**Définition 5.** *Soit G opérant sur $X$, une action de groupe.*

— *Le stabilisateur de $x \in X$ dans G est le sous groupe*

$$Stab(x) = \{g \in G \mid g \cdot x = x\} \subset G$$

— *Les points fixés par $g \in G$ sont définis par :*

$$Fig(g) = \{x \in X \mid g \cdot x = x\}$$

— *$x \in X$ est un point fixe sous l'action de G si $\forall g \in G,\ g \cdot x = x (\Leftrightarrow Stab(x) = G \Leftrightarrow Orb(x) = \{x\})$*

**Proposition 3.** *Soit G opérant sur $X$, une action de groupe.*
*Si x et y sont dans la même orbite, i.e. $Orb(x) = Orb(y)$, alors $Stab(x)$ et $Stab(y)$ sont conjugués.*

*Démonstration.* Supposons $y = g \cdot x$. Alors

$$g^{-1} \cdot y = g^{-1} \cdot (g \cdot x) = (g^{-1} g) \cdot x = e \cdot x = x$$

On va montrer que $gStab(x)g^{-1} = Stab(y)$.

— Soit $h \in Stab(x)$, i.e. $ghg^{-1} \in gStab(x)g^{-1}$
  On souhaite montrer que $ghg^{-1} \in Stab(y)$

$$(ghg^{-1}) \cdot y = g \cdot (h \cdot (g^{-1} \cdot y)) = g \cdot (h \cdot x) = g \cdot x = y$$

  Donc $ghg^{-1} \in Stab(y)$ et donc $gStab(y)g^{-1} \subseteq Stab(y)$
— L'argument précédent, en échangeant $x$ par $y$ et $g$ par $g^{-1}$, nous donne :

$$g^{-1}Stab(y)g \subseteq Stab(x)$$
$$Stab(y) \subseteq gStab(x)g^{-1}$$

□

**Théorème 1.** *Soit G opérant sur $X$ une action de groupe.*
*Soit, de plus, $x \in X$.*
*Il y a une bijection entre $Orb(x)$ et $G/Stab(x)$ (les classes d'équivalence à gauche de $Stab(x)$). En particulier, si $Orb(x)$ est fini, alors $Stab(x)$ est d'indice fini dans G et $|Orb(x)| = [G \cdot Stab(x)]$*

*Démonstration.* On veut définir la fonction :

$$f : \quad Orb(x) \to G/Stab(x) = \{gStab(x) \mid g \in G\} g \cdot x \quad \mapsto gStab(x)$$

— $f$ est en effet une fonction.
Soient $g, h \in G$

$$\begin{aligned} g \cdot x = h \cdot x &\Leftrightarrow h^{-1} \cdot (g \cdot x) = h^{-1} \cdot (h \cdot x) \\ &\Leftrightarrow (h^{-1} \cdot g) \cdot x = (h^{-1} \cdot h) \cdot x \\ &\Leftrightarrow (h^{-1} \cdot g) \cdot x = x \\ &\Leftrightarrow h^{-1} \cdot g \in Stab(x) \\ &\Leftrightarrow \exists s \in Stab(x),\ h^{-1} g = s \text{ autrement dit } g = hs \\ &\Leftrightarrow gStab(x) = hStab(x) \end{aligned}$$

— $f$ est injective car $gStab(x) = hStab(x) \Rightarrow gx = hx$
— $f$ est surjective car $\forall gStab(x) \in G/Stab(x),\ f(g \cdot x) = gStab(x)$

□

**Corrolaire 2.** *Formule de classes Si G est un groupe fini, alors*

$$\forall x \in X,\ |G| = |Stab(x)| \cdot |Orb(x)|$$

*Démonstration.* Si $G$ est fini, alors $Orb(x)$ est fini et

$$|orb(x)| = [G : Stab(x)] = \frac{|G|}{|Stab(x)|}$$

□