Algèbre linéaire

Table des matières

Première partie
Systèmes d'équations linéaires

Soit $\mathbb{K}$, un corps.

Définition 1. *Un système d'équations linéaires à n inconnues et p équations est un système d'équations de la forme :*

$$(S)\left\{\begin{array}{l} a_{1,1}x_1+\ldots+a_{1,n}x_n=b_1 \\ a_{2,1}x_1+\ldots+a_{2,n}x_n=b_2 \\ \ldots \\ a_{p,1}x_1+\ldots+a_{p,n}x_n=b_p \end{array}\right.$$

avec avec $a_{i,j}$ et b_i des éléments de $\mathbb{K}$
et x_j sont les inconnues.

Définition 2. *Une solution est le n-uplet $(x_1,\ldots,x_n)$ tel que $x_1,\ldots,x_p$ sont solutions de toutes les équations.*

Définition 3. *Les $b_1,\ldots,b_p$ sont appelés seconds membres.*

Remarque 1. *a priori, $n \neq p$*
Les inconnues peuvent être notées différemment ((x,y,z,t), $(\lambda_1,\lambda_2,\ldots)$)

Exemple.

$$(S)\left\{\begin{array}{l} x+2y=1 \\ 2x+5y=2 \end{array}\right.$$

Dont l'unique solution est $(0,1)$

Remarque 2. *Résoudre un système consiste à trouver toutes les solutions ou à montrer qu'il n'y en a aucune.*

1 Résolution

1.1 Équivalence de systèmes

Pour résoudre, on se ramène à un système équivalent plus simple :

$$(S)\Leftrightarrow(S')\left\{\begin{array}{l} a_{1,1}x_1+\ldots+a_{1,n}x_n=b_1 \\ a_{2,1}x_1+\ldots+a_{2,n}x_n=b_2 \\ \ldots \\ a_{p,1}x_1+\ldots+a_{p,n}x_n=b_p \end{array}\right.$$

$(S)\Leftrightarrow(S')$ signifie que les deux systèmes ont les mêmes solutions.

1.2 Méthode du pivot de Gauss

On ne change pas les solutions en faisant une des trois opérations suivantes :
- changer l'ordre des équations
- multiplier une équation par un élément $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$
- Ajouter à une équation un multiple d'une autre

ou toute opération qui peut se décomposer en une série de telles opérations

Exemple.

$$(S)\left\{\begin{array}{rcll} x_1+x_2+2x_3-x_4 & = & 1 & L_1 \\ 2x_1+2x_2+3x_3+x_4 & = & 2 & L_2 \\ x_1+x_2+4x_3-6x_4 & = & 2 & L_3 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} x_1+x_2+2x_3-x_4 & = & 1 & L_1 \\ -x_3+3x_4 & = & 0 & L_2-2L_1 \to L_2 \\ 2x_3-5x_4 & = & -1 & L_3-L_1 \to L_3 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} x_1+x_2+2x_3-x_4 & = & 1 & L_1 \\ -x_3+3x_4 & = & 0 & L_2 \\ x_4 & = & 1 & L_3+2L_2 \to L_3 \end{array}\right.$$

Remarque 3. *Erreur possible :*

$$(S')\left\{\begin{array}{rcll} -2x_3-5x_4 & = & 1 & L_1-L_3 \to L_1 \\ -x_3+3x_4 & = & 2 & L_2 \\ 2x_3-5x_4 & = & 1 & L_3-L_1 \to L_3 \end{array}\right.$$

Il n'y a pas ici d'équivalence avec le système précédent, juste une implication :
Il n'est ici pas possible de décomposer ces opération en une série d'opérations de Gauss (il n'est plus possible, après ces opération, de retrouver les lignes L_1 et L_3 d'origine)

Méthode du pivot de Gauss :

1. - Si $a_{1,1} \neq 0$, on remplace, pour tout i supérieur à 1, L_i par $L_i - \frac{a_{i,1}L_1}{a_{1,1}}$ (ce qui correspond à l'annulation des coefficients devant x_1 dans les L_i)
     Notation. *$a_{1,1}$ est alors appelé le pivot*
   - Si $a_{1,1} = 0$, mais qu'il existe une autre ligne sur laquelle $a_{i,1} \neq 0$, alors on échange L_1 et L_i et on est ramené au cas précédent.
   - Si, à toutes les lignes, $a_{i,1} = 0$, alors on prend j_1 le plus petit indice tel que $\exists i \ / \ q_{j_1} \neq 0$ et on reprend à l'étape précédente.
2. Ensuite, on ne touche plus à la première équation et on résout le système en continuant l'algorithme sur les autres équations.
3. À la fin, on obtient un système dit échelonné, c'est-à-dire de la forme :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a'_{1,j_1}x_{j_1}+...+a'_{1,n}x_n & = & b'_1 \\ a'_{2,j_2}x_{j_2}+...+a'_{2,n}x_n & = & b'_2 \\ ... & & \\ a'_{r,j_r}x_{j_r} & = & b'_r \\ ... & & \\ 0 & = & b'_{n-1} \\ 0 & = & b'_n \end{array}\right.$$

avec $1 \leq j_1 \leq j_2 \leq ... \leq j_r \leq n$

Remarque 4. *Les dernières équation dont le premier membre est nul peuvent apparaître si on élimine toutes les inconnues avant d'arriver à la dernière équation.*

Plusieurs cas sont alors possibles :

- Si r est différent de n, alors :
  - Si $\exists i > n,\ b'_i \neq 0$, on est face à une contradiction, le système n'a donc pas de solutions.
  - Si $\forall i > n,\ b'_i = 0$, on peut retirer b, les équations sont inutiles.
- Si r et n sont égaux, alors :
  - Si $(j_1, ..., j_n) = (1, ..., n)$, le système est dit de Cramer
  - Si pour tout second membre, il existe une unique solution, on réinjecte cette solution à partir de la dernière équation.
  - Si $(j_1, ..., j_n) \neq (1, ..., n)$, les $x_{j_1}, ..., x_{j_n}$ sont appelées les inconnues principales. Les autres variables s'appellent les variables libres dans le second membre, et il reste un système de Cramer avec les inconnues $(x_{j_1}, ..., x_{j_n})$.

    Donc, pour chaque valeurs prisent par les variables libres, on a une unique solution, le système admet alors une infinité de solutions (Seulement si $\mathbb{K}$ est infini, sinon, il y a q^{n-r} solutions).

Exemple.

$$(S)\left\{\begin{array}{rcl} x_1+x_2+2x_3-x_4 & = & 1 \\ -x_3+3x_4 & = & 0 \\ x_4 & = & 1 \end{array}\right.$$

x_1, x_2, x_3 *sont les inconnues principales*

$j_1 = 1, j_2 = 3, j_3 = 4$

x_2 est la variable libre.

$$(S)\left\{\begin{array}{rcl} x_1+x_2+2x_3-x_4 & = & 1 \\ -x_3+3x_4 & = & 0 \\ x_4 & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcl} x_1+2x_3-x_4 & = & 1-x_2 \\ -x_3+3x_4 & = & 0 \\ x_4 & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & 1-x_2-6+1=-4-x_2 \\ x_3 & = & 3 \\ x_4 & = & 1 \end{array}\right.$$

Les solutions de ce système sont donc les éléments de la forme $(-4-\lambda,\lambda,3,1)$ *avec* $\lambda\in\mathbb{K}$

Deuxième partie
Chapitre 2 : Espaces vectoriels

Soit $\mathbb{K}$, un corps ($\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, ou autre)

2 Notion d'espace vectoriel

2.1 Définitions

Définition 4. *(non formelle) Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est un ensemble d'éléments appelés vecteurs tels qu'on puisse les additionner entre eux et les multiplier par des scalaires, c'est-à-dire des éléments de $\mathbb{K}$ avec des relations naturelles de compatibilité.*

Définition 5. *Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est un ensemble E muni de deux lois :*

— *une loi de composition interne :*

$$\begin{aligned} + : E \times E &\to E \\ (u, v) &\mapsto u + v \end{aligned}$$

— *une loi de composition externe :*

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{K} \times E &\to E \\ (\lambda, u) &\mapsto \lambda \cdot v \end{aligned}$$

Ces lois vérifient :

A1 : $\forall u, v, w \in E,\ (u + v) + w = u + (v + w)$
la loi + est donc associative

A2 : $: \forall u, v \in E,\ u + v = v + u$
la loi + est donc commutative

A3 : $\exists 0_E \in E,\ \forall u \in E,\ u + 0_E = 0_E + u = u$
la loi + admet un élément neutre

A4 : $\forall u \in E,\ \exists v \in E,\ u + v = v + u = 0_E$
chaque élément de E admet, par +, un inverse ou opposé

B1 : $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ \forall u \in E,\ \lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda \cdot \mu) \cdot u$
la loi · est associative

B2 : $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ \forall u \in E,\ (\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u$
la loi · est distributive à gauche

B3 : $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall u, v \in E,\ (u + v) \cdot \lambda = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$
la loi · est distributive à droite

B4 : $\forall u \in E,\ 1 \cdot u = u$
la loi · admet un élément neutre

Remarque 5. *Dans l'axiome A3, l'élément neutre est unique.*
Dans l'axiome A4, le vecteur v est en fait unique, on le note $-u$.

Proposition 1. *On a également, $\forall u \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}$:*

1. $\lambda \cdot 0_E = 0_E$
2. $0_\mathbb{K} \cdot u = 0_E$
3. $\lambda \cdot u = 0_E \Rightarrow \lambda = 0_\mathbb{K}$ *ou* $u = 0_E$
4. $(-\lambda) \cdot u = \lambda \cdot (-u) = -(\lambda \cdot u)$

Démonstration.

1. $$\begin{aligned} \lambda \cdot 0_E &= \lambda \cdot (0_E + 0_E) \\ &= \lambda \cdot 0_E + \lambda \cdot 0_E \\ &= \lambda \cdot 0_E + 0_E \end{aligned}$$
$$\lambda \cdot 0_E = O_E$$

2. $$\begin{aligned} 0_\mathbb{K} \cdot u &= (0_\mathbb{K} + 0_\mathbb{K}) \cdot u \\ &= 0_\mathbb{K} \cdot u + 0_\mathbb{K} \cdot u \\ &= 0_\mathbb{K} \cdot u + 0_\mathbb{K} \end{aligned}$$
$$0_\mathbb{K} \cdot u = O_\mathbb{K}$$

3. Si $\lambda = 0_\mathbb{K}$, cf. 2
   Si $\lambda \neq 0$, alors $\lambda^{-1} \in \mathbb{K}$,
$$\begin{aligned} 0 &= \lambda^{-1} \cdot 0 \\ &= \lambda^{-1}(\lambda \cdot u) \\ &= (\lambda^{-1} \cdot \lambda) \cdot u \\ &= 1 \cdot u \\ &= u \end{aligned}$$

□

Notation. *On note souvent :*
- $0_E = 0$ *et* $0_\mathbb{K} = 0$
- $u - v = u + (-v)$

Lemme 1. $\forall u, v, w \in E, u + w = v + w \Rightarrow u = v$

Démonstration.
$$\begin{aligned} v &= (u + w) - w \\ &= u + (w - w) \\ &= u + 0_E \\ &= u \end{aligned}$$
donc $v = u$ □

Remarque 6.

— *Pour* $\lambda \in \mathbb{K}$ *et* $u \in E$ $u \cdot \lambda$ *ne veut rien dire.*
— *Pour* $u, v \in E$ $u \cdot v$ *ne veut rien dire*

Exemple.
1/ Pour les lois de compositions internes et externes usuelles,

— $\mathbb{K}$ *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel*
— $\mathbb{K}^n$ *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel*
— *plus généralement, si* E_1 *et* E_2 *sont des* $\mathbb{K}$ *espaces vectoriels,* $E_1 \times E_2$ *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel.*

2/ Soit E*, un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel et* A*, un ensemble qualconque,*

— $\mathscr{F}(A, E)$*, l'ensemble des applications de* A *dans* E*, est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel*

$$\forall f_1, f_2 \in \mathscr{F}(A, E),\ \forall \lambda \in \mathbb{K},$$

$$\begin{aligned} f_1 + f_2 : A &\to E \\ a &\mapsto f_1(a) + f_2(a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda \cdot f_1 : A &\to E \\ a &\mapsto \lambda \cdot f_1(a) \end{aligned}$$

— *Si* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *et* $A = I \subset \mathbb{R}$*, un intervalle, on peut avoir* $\mathscr{F}(I, \mathbb{R})$
— *Si* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *et* $A = \mathbb{N}$*, on a* $\mathscr{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$*, l'ensemble des suites numériques*

3/ $\mathbb{K}[X]$*, l'ensemble des polynômes*
4/ $M_{n,p}(\mathbb{K})$*, l'ensemble des matrices à coefficient dans* $\mathbb{K}$*, à* n *lignes et* p *colonnes.*

Remarque 7. $\mathbb{R}^2$*, munit de la loi + usuelle et* $\lambda \cdot (x_1, x_2) = (\lambda \cdot x_1, 0)$
n'est pas un $\mathbb{K}$*-espace vectoriel, pourquoi ?*

2.2 Sous-espace vectoriel

Définition 6. *Soit* E*, un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel, et* $F \subset E$*.*
F *est un sous espace vectoriel de* E *s'il s'agit d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel pour les lois + et* $\cdot$ *de* E*.*

— $\forall u, v \in F,\ u + v \in F$
— $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall u \in F,\ \lambda \cdot u \in F$
— *+ et* $\cdot$ *vérifient les propriétés des lois de composition interne et externe des espaces vectoriels*

Propriété 1. F *est un sous-espace vectoriel de* E *si :*

— $F \neq \emptyset$
— $\forall u, v \in F,\ u + v \in F$
— $\forall u \in F,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda \cdot u \in F$

Démonstration. Pour montrer que les sous espaces vectoriels vérifient les axiomes A1 à B4 :
La vérification des axiomes A1, A2, B1, B2, B3 et B4 est immédiate.

Pour A3 :

$$\exists 0_F \subset F,\ \forall u \in F,\ u + 0_F = 0_F + u = u$$

Il suffit alors de montrer que $0_E \in F$,
or, $F \neq \emptyset$, donc, $\exists u \in F,\ 0 \cdot u = 0_E \in F$

Pour A4 :
Il suffit alors de montrer que $\forall u \in F,\ -u \in F$:
$-u = (-1) \cdot u$ où $-u \in F$ par hypothèse. $\square$

Remarque 8. — *On a vu que* $0_E \in F$

— *Les deux derniers points de la définition de sous-espace vectoriel sont équivalents à :*

$$\forall u, v \in F,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ \lambda u + \mu v \in F$$

ou encore à :

$$\forall u, v \in F,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda u + v \in F$$

Remarque 9. *Dans la plupart des cas, pour montrer qu'un ensemble (avec les lois* $+, \cdot$*) est un espace vectoriel, on montre qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel connu.*

Exemple. — $\{0\}$ *et* E *sont des sous-espace vectoriels de* E.

— $F = \mathscr{C}(I, \mathbb{R})$*, l'ensemble des fonctions continues sur un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$.
F est sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(I, \mathbb{R})$*, l'ensemble des fonctions de* I *sur* $\mathbb{R}$ *:*
La fonction nulle est continue.
$\forall f, g \in \mathscr{C}(I, \mathbb{R}),\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \lambda f + \mu g$ *est continue, donc* $\lambda f + \mu g \in F$.

— $E = \mathbb{K}^n$ *et* $a_1, ..., a_n \in \mathbb{K}$
$F = \{(x_1, ..., x_n) \mid a_1 x_1 + ... + a_n x_n = 0\}$ *est un sous-espace vectoriel de* E.

— $\mathbb{K}[X]$*, les suites de* $\mathbb{K}$ *nulles à partir d'un certain rang, est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites de* $\mathbb{K}$

2.3 Sous espace engendré

Définition 7. *Une combinaison linéaire de* $v_1, ..., v_p$ *est un élément de la forme* $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_p v_p$ *avec* $\lambda_1, ..., \lambda_p \in \mathbb{K}$.

Exemple. *Dans* $\mathbb{K}[X]$*, une combinaison linéaire est un polynôme.*

Remarque 10. *Une combinaison linéaire de* $(v_i)_{i \in I}$ *est une combinaison linéaire au sens précédent d'une sous famille finie.*

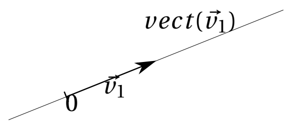
Exemple. *Dans* $\mathbb{K}[X] = \{1, X, X^2, ..., X^n, ...\}$*, une combinaison linaire est un polynôme.*

Définition 8. *Soient* $v_1, ..., v_p \in E$

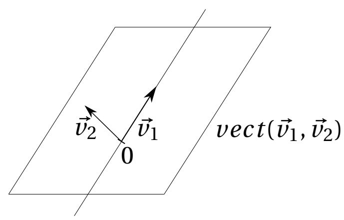
$vect(v_1, ..., v_p) = \{$*combinaisons linéaires de* $v_1, ..., v_p\} = \{\sum_{i=1}^{p} \lambda_i v_i \ / \ \lambda_1, ..., \lambda_p \in \mathbb{K}\}$

Proposition 2. *$vect(v_1, ..., v_p)$ est un sous espace vectoriel de E.*

Exemple. *Cas particulier :*
$p = 1$, $vect(v_1)$ est alors une droite vectorielle.



$p = 2$, si v_2 n'appartient pas à $vect(v_1)$, alors $vect(v_1, v_2)$ est un plan vectoriel



Proposition 3. *$vect(v_1, ..., v_p)$ est un sous espace vectoriel de E.*

2.4 Intersections

Proposition 4. *Soient F_1, F_2 des sous-espaces vectoriels de E, alors, $F_1 \cap F_2$ est un sous espace vectoriel :*

$$F_1 \cap F_2 = \{x \in E \ / \ x \in F_1 \ \ et \ \ x \in F_2\}$$

Démonstration.
- $0 \in F_1$ et $0 \in F_2$, donc $0 \in F_1 \cap F_2$
  l'intersection est donc non vide
- Soient $u, v \in F_1 \cap F_2$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$
  On montre que $\lambda u + \mu v \in F_1 \cap F_2$
  $\lambda u + \mu v \in F_1$ car F_1 est un sous espace vectoriel
  $\lambda u + \mu v \in F_2$ car F_2 est un sous espace vectoriel

□

application :
L'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires homogène (sans second membre) à n inconnues (et p équations) est un sous espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.

Démonstration. Intersection des sous espaces vectoriels est solution de chaque équations □

Remarque 11. *Attention,*

- *En général, l'union de sous espaces vectoriels n'est pas un sous espaces vectoriels (sauf cas triviaux)*

— *Le complémentaire d'un sous-espace vectoriel n'est jamais un sous-espace vectoriel (étant privé du* 0*)*

2.5 Somme de sous espaces vefctoriels

Définition 9. *Soient F_1, F_2, des sous espaces vectoriels, on définit :*

$$F_1 + F_2 = \{f_1 + f_2 \ / \ f_1 \in F_1, \ f_2 \in F_2\}$$

Remarque 12. *$F_1 + F_2$ est un sous-espace vectoriel de E*

Exemple.

Proposition 5. *Si $F_1 = vect(v_1, ..., v_{p_1})$ et $F_2 = vect(w_1, ..., w_{p_2})$, alors,*

$$F_1 + F_2 = vect(v_1, ..., v_{p_1}, w_1, ..., w_{p_2})$$

Démonstration. Soit $u \in F_1 + F_2$

$$\exists f_1 \in F_1, \exists f_2 \in F_2, \ / \ u = f_1 + f_2$$
$$\exists f_1 \in F_1, \exists f_2 \in F_2, \ / \ u = f_1 + f_2$$

□

Remarque 13. *$F_1 - F_2$ n'est pas intéressant : $\{f_1 + (-f_2) \ / \ f_1 \in F_1, \ f_2 \in F_2\} = F_1 + F_2$*

Remarque 14. *$F_1 + F_2 \neq F_1 \cup F_2$*

3 Familles libres, génératrices et bases

3.1 Familles libres, génératrices

Définition 10. *On dit que $(v_1, ..., v_p)$ est une famille génératrice de E si $vect(v_1, ..., v_p) = E$*

Vocabulaire. *E est dit finiement engendré s'il existe une famille génératrice finie.*

Remarque 15. *intuitivement, $(v_1, ..., v_p)$ est génératrice si elle "voit" tous les éléments de E.*

Remarque 16. *A priori, il peut y avoir plusieurs manières d'écrire un élément de E*

Exemple. *Pour $E = \mathbb{R}^2$, $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$, $e_3 = (1,1)$,*
on a $e_3 = e_1 + e_2$ la famille $\{e_1, e_2, e_3\}$ est génératrice.

calcul pratique :
trouver une famille génératrice d'un sous espace vectoriel défini par des équations.

Exemple. $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y + z = 0$
On résoud le système

Proposition 6. *Soit E de dimension finie, et F sous espace vectoriel de E.*

1. *F est de dimension finie et* $\dim F \leq \dim E$
2. $\dim F = \dim E$ *si et seulement si* $F = E$

Démonstration.

1. Semble évident mais ne l'est pas.
2. Si $\dim F = \dim E$,
   on pose $\{f_1, ..., f_n\}$, base de F, est aussi une famille libre de E avec $n = \dim E$ éléments dans une base de E.
   Pour la réciproque, si $\dim F \neq \dim F$, $E \neq F$

□

Remarque 17. *$f_1, ..., f_k$ de F sous espace vectoriel de E.*
$f_1, ..., f_k$ est une famille libre de F si et seulement si c'est une famille libre de E

Remarque 18. *Le second point est utile en pratique pour montrer que deux espaces vectoriels F et G sont égaux, on montre que $F \subset G$ et que les deux sont de même dimension.*

3.2 Exemples de dimensions (et bases)

— $\mathbb{K}^n$
  base canonique : $e_i = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$ ou 1 se trouve à la i-ème place.
  $(e_1, ..., e_n)$ est une base avec $\dim \mathbb{K}^n = n$

— Soient E, F, deux espaces vecteurs de dimensions finies
  $E \times F$ est de dimension finie $\dim E + \dim F$
  Soit $(e_1, ..., e_n)$ base de E
  Soit $(f_1, ..., f_n)$ base de F

$$e_i^{\sim} = (e_i, 0) \in E \times F$$

$$f_j^{\sim} = (0, f_j) \in E \times F$$

  Exercice. $(e_1^{\sim}, ..., e_n^{\sim}, f_1^{\sim}, ..., f_m^{\sim})$

Théorème 1. *On considère un système d'équations linéaires homogène à n inconnues et k équations.*
On suppose que ce système est échelonné, alors l'ensemble des solutions est de dimension $n - k$.

Démonstration.

Remarque 19. *Quitte à renommer les inconnues, on peut supposer que les inconnues principales sont $x_1, ..., x_k$, les autres sont des variables libres.*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + ... = 0 \\ a_{22}x_2 + ... = 0 \\ ... \\ a_{kk}x_k + ... = 0 \end{cases}$$

Alors, les solutions sont de la forme $(x_1, ..., x_n)$ *avec, pour* $j > k$*, on pose arbitrairement* $x_j = \lambda_j \in \mathbb{K}$

$$x_k = \alpha_{kk+1}\lambda_{k+1} + ... + \alpha_{kn}\lambda_n$$

$$...$$

$$x_1 = \alpha_{1,k+1}\lambda_{k+1} + ... + \alpha_{1n}\lambda_n$$

Donc,

$$(x_1, ..., x_n) = \lambda_{k+1}()$$

□

Théorème 2. *Soient F, G, deux sous espace vectoriel de E (de dimensions finies), alors,* $\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$

Démonstration. "Idée : construire une base sympathique de $F+G$"

— $F \cap G$ est de dimension finie ($F \cap G$ étant sous espace vectoriel de F) on pose alors $(e_1, ..., e_n)$ base de $F \cap G$.

— $(e_1, ..., e_n)$ est une famille libre de F se complète en une base $(e_1, ..., e_n, f_1, ..., f_s)$ de F

□

3.3 rang d'une famille de vecteurs

Définition 11.

$$rg(v_1, ..., v_p) = \dim vect(v_1, ..., v_p)$$

Propriété 2. *On a*

— $rg(v_1, ..., v_p) \leq dimE$

— $rg(v_1, ..., v_p) \leq p$

— $rg(v_1, ..., v_p) = dimE$ *si et seulement si la famille est génératrice.*

— $rg(v_1, ..., v_p) = 1$ *si et seulement si la famille est libre.*

Démonstration. — $vect v_1, ..., v_p$ est sous espace vectoriel de E.

— par définition, $(v_1, ..., v_p)$ engendre $vect(v_1, ..., v_p)$

— $vect(v_1, ..., v_p) = E$ si et seulement s'ils sont monodimensionels

— $rg(v_1, ..., v_p) = 1$ si et seulement si $v_1, ..., v_p$ est génératrice d'un sous espace vectoriel de dimension p
si et seulement si $v_1, ..., v_p$ est une base de $vect(v_1, ..., v_p)$
si et seulement si $v_1, ..., v_p$ est libre

□

Remarque 20. $vect(v_1,...,v_p)$ *ne change pas (le rang non plus) si :*

— *on permute deux vecteurs*
— *on multiplie un vecteur par un scalaire* $\lambda \in \mathbb{K}^*$
— *on ajoute à un vecteur un multiple d'un autre*

On peut alors appliquer l'algorithme de Gauss au calcul du rang pour des vecteurs de $\mathbb{K}^n$.
Tout d'abord, on échelonne une famille de vecteur.
Une fois que la famille est échelonnée, le rang correspond au nombre de vecteurs non nuls.

Remarque 21. *Cette famille de vecteurs est une base du sous espace vectoriel initial.*

3.4 Somme directe

Soient F et G des sous espaces vectoriels de E

$$F + G = \{f + g \mid f \in F,\ g \in G\}$$

a priori pour $u \in F + G$ la paire $(f, g) \in F \times G$ / $u = f + g$ n'est pas nécessairement unique.

Définition 12. *F et G sont en somme directe si et seulement si*

$$\forall u \in F + G,\ \exists!(f, g) \in F \times G,\ u = f + g$$

Notation. *On note alors $F \oplus G$*

Remarque 22. *$F \oplus G$ désigne à la fois le sous espace vectoriel $F + G$ et la propriété selon laquelle ils sont en somme directe.*

Proposition 7. *Les énoncés suivants sont équivalents :*

— *F et G sont en somme directe*
— $0 = f + g$ *avec $f \in F$ et $g \in G$ implique* $f = g = 0$
— $F \cap G = \{0\}$
— *En réunissant une base de F et une base de G, on obtient une base de $F + G$*
— $\dim(F + G) = \dim F + \dim G$

(où les deux dernières propositions ne sont vraies qu'en dimension finie)

Démonstration. □

Définition 13. *F et G sont supplémentaire si $F \oplus G = E$*

Remarque 23. *Il peut être intéressant de "découper" l'espace en sous espaces plus simples.*

Remarque 24. *Tout sous espace vectoriel F de E admet un supplémentaire.*

Remarque 25. *Les supplémentaires ne sont pas uniques, on ne parle donc pas "du" supplémentaire.*

Cas général :
Soient $F_1, ..., F_k$, sous espaces vectoriels de E.
$F_1, ..., F_k$ sont en somme directe si :

$$\forall u \in F_1 + ... + F_k,\ \exists!(f_1, ..., f_k) \in F_1 \times ... \times F_k\ /\ u = f_1 + ... + f_k$$

Proposition 8. *Les propositions suivantes sont équivalentes :*

— $\bigoplus_{i=1}^{k} F_i$
— $\forall i \in [1, k],\ f_i \in F_i,\ \sum_{i=1}^{k} f_i = 0 \Rightarrow \forall i,\ f_i = 0$
— *en réunissant un base de chaque F_i, on obtient une base de la somme*
— $\dim \sum F_i = \sum \dim F_i$

Troisième partie
Applications linéaires

4 Définitions et exemples

Définition 14. *Soient E et E', deux $\mathbb{K}$ espaces vectoriels.*
$f : E \to E'$ est linéaire si :

$$\forall u, v \in E,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)$$

Remarque 26. *Dans ce cas, on a forcement $f(0) = 0$.*

Vocabulaire. — *Si $E = E'$, f est un endomorphisme.*
— *Si f est bijective, f est un isomorphisme.*

Remarque 27. *Si $f : E \to E'$, linéaire, est bijective,*
$f^{-1} : E' \to E$, est aussi linéaire

Exemple.

5 Image, noyau et image d'une famille de vecteurs

Notation. *$\mathscr{L}(E, E') = \{f : E \to E',\ f$ linéaire$\}$ est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel.*

Définition 15. *Soit $f \in \mathscr{L}(E, E')$*

— *$f(E)$ est un sous espace vectoriel de E', noté $Im\ f$, prononcé image de f.*
— *$\{x \in E\ /\ f(x) = 0\}$ est un sous espace vectoriel de E, noté $Ker\ f$, prononcé noyau de f.*

— *on note $rg(f) = dim\ Im\ f$ (pour une dimension finie)*

Démonstration. Soient $u', v' \in f(E)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.
Montrons que $\lambda u' + \mu v' \in E$ □

Remarque 28. *Si $E = vect(e_1, ..., e_n)$, alors $f(E) = vect(f(e_1), ..., f(e_n))$*
Donc $rg(f) = rg(f(e_1), ..., f(e_n))$

Proposition 9. *$f : E \to E$ est injective si et seulement si $Ker\ f = \{0\}$*

Rappel 1. *$f : E \to E'$ est injective si et seulement si $\forall u, v \in E,\ f(u) = f(v) \Rightarrow u = v$*
Dont la contraposée est $\forall u, v \in E,\ u \neq v \Rightarrow f(u) \neq f(v)$

Démonstration. Si f est injective , □

Proposition 10. *Caractérisation d'une application linéaire par l'image d'une base.*
Soit $(e_1, ..., e_n)$, une base de E, soient $b_1, ..., b_n \in E'$

$$\exists! f \in \mathscr{L}(E, E'),\ \forall i,\ f(e_i) = b_i$$

Par ailleurs :

1. *$(b_1, ..., b_n)$ est libre si et seulement si f est injective*
2. *$(b_1, ..., b_n)$ est génératrice si et seulement si f est surjective*
3. *$(b_1, ..., b_n)$ est une base si et seulement si f est un isomorphisme*

Démonstration. Analyse :
Supposons que f existe :

□

6 Matrice d'application linéaire

Soit $f : E \to E'$, une application linéaire.
Soit $\mathscr{B} = (e_1, ..., e_n)$, une base de E
Soit $\mathscr{B}' = (e'_1, ..., e'_p)$, une base de E'

On écrit $f(e_1), ..., f(e_n)$ dans la base $\mathscr{B}'$

$$\begin{aligned} f(e_1) &= a_{11}e'_1 + ... + a_{p1}e'_p \\ f(e_2) &= a_{12}e'_2 + ... + a_{p2}e'_p \\ &... \\ f(e_n) &= a_{1n}e'_n + ... + a_{pn}e'_p \end{aligned}$$

On définit la matrice de f relativement aux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ par :

$$Mat(f)_{\mathscr{B}\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & & & \\ a_{p1} & a_{p2} & ... & a_{pn} \end{pmatrix}$$

Exemple. *Pour l'application :*

$$f : \quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) \mapsto (-x+6y, -x+4y)$$

$\mathscr{B}_1 = (e_1, e_2) = ((1,0),(0,1))$ *est la base canonique de* $\mathbb{R}^2$.
$\mathscr{B}_2 = (e'_1, e'_2) = ((3,1),(2,1))$

Alors :

— $Mat(f)_{\mathscr{B}_1\mathscr{B}_1} =$

7 calcul de l'inverse d'une matrice

7.1 Systèmes linéaires

Proposition 11. *Si* A *est inversible, alors* $AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$.

Donc on trouve A^{-1} en résolvant un système d'équations linéaires d'inconnues $x_1, \ldots, x_n$ et de seconds membres génériques $b_1, \ldots, b_n$.

$$X =$$

Exemple.

7.2 Méthode "magique"

Quatrième partie
Déterminants

8 Volume orienté du parallélogramme dans le plan

Proposition 12. —

9 Définitions et propriétés

9.1 Définition par récurrence

Définition 16. *définition du déterminent d'une matrice par récurrence (la définition est facile mais la preuve est pénible)*

9.2 définition par forme multilinéaire alternée

Rappel 2. *Une permutation de* $\{1,...,n\}$ *est une bijection de* $\{1,...,n\}$ *dans lui-même.*

Exemple.

$$1 \to 2$$
$$2 \to 1$$
$$3 \to 3$$

est une permutation.

Notation. S_n *est l'ensemble des permutations de* $\{1,...,n\}$

Remarque 29. S_n *contient* $n!$ *éléments*

Définition 17. *une transposition* $(i\,j)$ *est la permutation qui échange* i *et* j*.*

Remarque 30. *toute permutation est une composée de transpositions.*

Définition 18. *La signature* $\varepsilon(\sigma)$ *pour* $\sigma \subset S_n$ *est le nombre de transpositions pour avoir* σ*.*

Définition 19. *Soit* $A = \left[a_{ij}\right]_{i,j\in\{1,...,n\}}$ *une matrice dans* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*.*
On pose le déterminant

$$det(A) = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma_{1,1}}$$

Remarque 31. *Pour* $n = 2$ *ou* $n = 3$*, on obtient les formules usuelles.*

Définition 20. *Soit* E*, un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension* n *et*

$$\begin{aligned} f : \quad & E^n \to \mathbb{K} \\ (v_1,...,v_n) & \mapsto f(v_1,...,v_n) \end{aligned}$$

f *est multilinéaire si elle est linéaire par rapport à chaque* v_i *(quand les autres termes sont constants)*

Remarque 32. $det(Id) = 1$ *Étant donné que la seule manière d'avoir des termes non nuls dans le produit (de la formule du déterminant) est de prendre* $\sigma = Id$

Proposition 13. *Soit* $f : E^n \to \mathbb{K}$*, une application multilinéaire.*
Alors, si $\mathbb{K}$ *est tel que* $1+1 = 2 \neq 0$*,* f *est alternée si et seulement si* f *est antisymétrique.*

Démonstration. On prend $n = 2$ pour simplifier les notations.
Si f est antisymétrique,
$f(v,v) = -f(v,v)$ (on permute les v)
Donc $2f(v,v) = 0$
donc $f(v,v) = 0$ car $2 \neq 0$.

Si f est alternée, alors,

$$\begin{aligned} 0 &= f(v_1+v_2, v_1+v_2) \\ &= f(v_1, v_1+v_2) + f(v_2, v_1+v_2) \\ &= f(v_1,v_1) + f(v_1,v_2) + f(v_2,v_1) + f(v_2,v_2) \\ &= 0 + f(v_1,v_2) + f(v_2,v_1) + 0 \end{aligned}$$

D'où

$$f(v_1, v_2) = -f(v_2, v_1)$$

□

Théorème 3. *$A \mapsto det(A)$ est multilinéaire et alternée par rapport aux volumes de la matrice.*

Démonstration. — $A \mapsto a_{\sigma(1)1} \ldots a$

□

Corrolaire 1. *Conséquences pratiques*

- *Le déterminant ne change pas quand on ajoute à une colonne un multiple d'une autre.*
- *le déterminant est multiplié par -1 si on permute deux colonnes.*

Théorème 4. *Soient $A = \left[a_{ij}\right](i,j)$ et sa transposée $\ {}^tA = \left[a_{ji}\right]_{(i,j)}$*
$det(A) = det(\ {}^tA)$
$det(\ {}^tA) = \sum\limits_{\sigma} \varepsilon(\sigma) \prod\limits_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$

Lemme 2. $det\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)$

Rappel 3. *Soit A, une matrice,*
on note A_{ij}, la matrice obtenue en ne considérant ni la i-ème ligne ni la j-ème colonne.
On a alors le cofacteur :

$$C_{ij}(A) = (-1)^{i+j} det(A_{ij})$$

La comatrice $Com(A)$ est alors la matrice des cofacteurs

$$Com(A) = \left[(-1)^{i+j} det(A_{ij})\right]$$

Proposition 14.

$$A \cdot {}^t comA = {}^t comA \cdot A = detA \cdot I_n$$

ainsi, si le déterminant, $A^{-1} = \frac{1}{detA}({}^t comA)$

Remarque 33. *cette formule est utile si $n = 2$, bof pour $n = 3$ et à fuir si $n > 3$*
Mais elle possède un intérêt théorique.

Démonstration. ne pas oublier la démo □

10 Applications

10.1 Systèmes linéaires

Dans un système de n équations et n inconnues pouvant être rapporté à une équation matricielle $AX = B$

Proposition 15. *Il existe une unique solution si et seulement si $detA$ est non nul.*

Dans le cas où $detA \neq 0$,
on a les formules de Cramer :

$$x_i = \frac{1}{detA} detA_i$$

où A_i est la matrice obtenue en remplaçant la i-ème colonne de A par B.

Démonstration. Si $detA \neq 0$, A est inversible donc $X = AB^{-1}$
Sinon : $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$... □

10.2 Endomorphisme

Définition 21. *Soit E, un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension n.*
Soient de plus $f \in \mathscr{L}(E)$ et $\mathscr{B}$ une base de E. Alors, $det(Mat(f)_{\mathscr{B}})$ ne dépend pas du choix de $\mathscr{B}$, on l'appelle déterminant de f.

Démonstration. $M = Mat(f)_{\mathscr{B}}$
$\mathscr{B}'$, une autre base
$M' = Mat(f)'_{\mathscr{B}}$
alors $M' = P^{-1}MP$ avec P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.
or $detM' = detP^{-1}detMdetP = detM$ ($\frac{detP^{-1}=1}{detP}$) □

Remarque 34. *Un autre invariant de f est la trace de f :*

$$Tr(f) = Tr(Mat_{\mathscr{B}} f)$$

La trace ne dépend pas du choix de $\mathscr{B}$

10.3 Rang

Définition 22. *Soit A, une matrice $A \subset M_{np}(\mathbb{K})$*
Une mineur d'ordre n de A est le déterminant d'une sous matrice carrée de A de taille r.
Un bordant d'un mineur δ d'ordre r est un mineur d'ordre $r+1$ qui contient δ.

Exemple.

Théorème 5. *Soit A, une matrice*
alors

$$rgA = r$$

si et seulement s'il existe $r \neq 0$ et tous les mineurs d'ordre $n+1$ sont nuls.
si et seulement s'il existe un mineur δ d'ordre r non nul et tous les bordants de δ sont nuls

exemples d'application

Cinquième partie
Diagonalisation

Théorème 6. *Soit $f \in \mathscr{L}(E)$,*
f est diagonalisable si :

- *$_f$ est scindé*
- *pour toute valeur propre λ, la dimension de $E_\lambda(f)$ est la multiplicité de λ dans khi_f.*

Rappel 4. *Soit $P \in \mathbb{K}[X]$,*
P est scindé si

$$\exists a_1, ..., a_n \in \mathbb{K} \text{ et } \exists \alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{N}^*, \ / \ P = k \prod_{i=1}^{n} (X - a_i)^{\alpha_i}$$

avec k, une constante

Démonstration. Si f est diagonalisable, on a

$$\exists \mathscr{B} \ / \ A = Mat_{\mathscr{B}}(f) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda & ... & 0 \\ ... & & & \\ 0 & 0 & ... & \lambda \end{bmatrix}$$

Alors $_f = (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$, avec α_i, la multiplicité

Lemme 3. *Les sous espaces vectoriels propres sont en somme directe.*

Démonstration. Pour tout i, soit $x_i \in E_{\lambda_i}$
on suppose $x_1 + x_2 + ... + x_n = 0$
on applique f, ainsi :

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... +_n x_n = 0$$

$$(\lambda_1 - \lambda_n)x_1 + (\lambda_2 - \lambda_n)x_2 + ... + (_n - \lambda_n)x_n = 0$$

□

□

Remarque 35. *En particulier, pour diagonaliser, on trouve une base pour chaque sous espace propre avant de réunir les bases.*

Proposition 16. *Pour tout i, $1 \leq dim E_{\lambda_i}(f) \leq \alpha_i$*
($_i$ étant la multiplicité de λ_i dans $_f$)