

# Algèbre linéaire

## Table des matières

<b>I</b>	<b>Systèmes d'équations linéaires</b>	<b>2</b>
<b>1</b>	<b>Résolution</b>	<b>2</b>
1.1	Équivalence de systèmes . . . . .	2
1.2	Méthode du pivot de Gauss . . . . .	3
<b>II</b>	<b>Chapitre 2 : Espaces vectoriels</b>	<b>6</b>
<b>2</b>	<b>Notion d'espace vectoriel</b>	<b>6</b>
2.1	Définitions . . . . .	6
2.2	Sous-espace vectoriel . . . . .	8
2.3	Sous espace engendré . . . . .	9
2.4	Intersections . . . . .	10
2.5	Somme de sous espaces vectoriels . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Familles libres, génératrices et bases</b>	<b>11</b>
3.1	Familles libres, génératrices . . . . .	11
3.2	Exemples de dimensions (et bases) . . . . .	12
3.3	rang d'une famille de vecteurs . . . . .	13
3.4	Somme directe . . . . .	13
<b>III</b>	<b>Applications linéaires</b>	<b>14</b>
<b>4</b>	<b>Définitions et exemples</b>	<b>14</b>
<b>5</b>	<b>Image, noyau et image d'une famille de vecteurs</b>	<b>15</b>
<b>6</b>	<b>Matrice d'application linéaire</b>	<b>16</b>

## Première partie

# Systèmes d'équations linéaires

Soit  $\mathbb{K}$ , un corps.

**Définition 1.** Un système d'équations linéaires à  $n$  inconnues et  $p$  équations est un système d'équations de la forme :

$$(S) \begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + \dots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{p,1}x_1 + \dots + a_{p,n}x_n = b_p \end{cases}$$

avec  $a_{i,j}$  et  $b_i$  des éléments de  $\mathbb{K}$   
et  $x_j$  sont les inconnues.

**Définition 2.** Une solution est le  $n$ -uplet  $(x_1, \dots, x_n)$  tel que  $x_1, \dots, x_p$  sont solutions de toutes les équations.

**Définition 3.** Les  $b_1, \dots, b_p$  sont appelés seconds membres.

**Remarque 1.** a priori,  $n \neq p$

Les inconnues peuvent être notées différemment  $((x, y, z, t), (\lambda_1, \lambda_2, \dots))$

**Exemple.**

$$(S) \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + 5y = 2 \end{cases}$$

Dont l'unique solution est  $(0, 1)$

**Remarque 2.** Résoudre un système consiste à trouver toutes les solutions ou à montrer qu'il n'y en a aucune.

## 1 Résolution

### 1.1 Équivalence de systèmes

Pour résoudre, on se ramène à un système équivalent plus simple :

$$(S) \Leftrightarrow (S') \begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + \dots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{p,1}x_1 + \dots + a_{p,n}x_n = b_p \end{cases}$$

$(S) \Leftrightarrow (S')$  signifie que les deux systèmes ont les mêmes solutions.

## 1.2 Méthode du pivot de Gauss

On ne change pas les solutions en faisant une des trois opérations suivantes :

- changer l'ordre des équations
- multiplier une équation par un élément  $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$
- Ajouter à une équation un multiple d'une autre

ou toute opération qui peut se décomposer en une série de telles opérations

**Exemple.**

$$\begin{aligned}
 (S) \quad & \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 & L_1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 2 & L_2 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 - 6x_4 = 2 & L_3 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 & L_1 \\ -x_3 + 3x_4 = 0 & L_2 - 2L_1 \rightarrow L_2 \\ 2x_3 - 5x_4 = -1 & L_3 - L_1 \rightarrow L_3 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 & L_1 \\ -x_3 + 3x_4 = 0 & L_2 \\ x_4 = 1 & L_3 + 2L_2 \rightarrow L_3 \end{cases}
 \end{aligned}$$

**Remarque 3.** Erreur possible :

$$(S') \quad \begin{cases} -2x_3 - 5x_4 = 1 & L_1 - L_3 \rightarrow L_1 \\ -x_3 + 3x_4 = 2 & L_2 \\ 2x_3 - 5x_4 = 1 & L_3 - L_1 \rightarrow L_3 \end{cases}$$

*Il n'y a pas ici d'équivalence avec le système précédent, juste une implication :*

*Il n'est ici pas possible de décomposer ces opération en une série d'opérations de Gauss (il n'est plus possible, après ces opération, de retrouver les lignes  $L_1$  et  $L_3$  d'origine)*

Méthode du pivot de Gauss :

1. — Si  $a_{1,1} \neq 0$ , on remplace, pour tout  $i$  supérieur à 1,  $L_i$  par  $L_i - \frac{a_{i,1}L_1}{a_{1,1}}$  (ce qui correspond à l'annulation des coefficients devant  $x_1$  dans les  $L_i$ )

**Notation.**  $a_{1,1}$  est alors appelé le pivot

- Si  $a_{1,1} = 0$ , mais qu'il existe une autre ligne sur laquelle  $a_{i,1} \neq 0$ , alors on échange  $L_1$  et  $L_i$  et on est ramené au cas précédent.
- Si, à toutes les lignes,  $a_{i,1} = 0$ , alors on prend  $j_1$  le plus petit indice tel que  $\exists i / a_{i,j_1} \neq 0$  et on reprend à l'étape précédente.

2. Ensuite, on ne touche plus à la première équation et on résout le système en continuant l'algorithme sur les autres équations.

3. À la fin, on obtient un système dit échelonné, c'est-à-dire de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a'_{1,j_1} x_{j_1} + \dots + a'_{1,n} x_n & = & b'_1 \\ a'_{2,j_2} x_{j_2} + \dots + a'_{2,n} x_n & = & b'_2 \\ & \dots & \\ a'_{r,j_r} x_{j_r} & = & b'_r \\ & \dots & \\ 0 & = & b'_{n-1} \\ 0 & = & b'_n \end{array} \right.$$

avec  $1 \leq j_1 \leq j_2 \leq \dots \leq j_r \leq n$

**Remarque 4.** Les dernières équation dont le premier membre est nul peuvent apparaître si on élimine toutes les inconnues avant d'arriver à la dernière équation.

Plusieurs cas sont alors possibles :

- Si  $r$  est différent de  $n$ , alors :
    - Si  $\exists i > n$ ,  $b'_i \neq 0$ , on est face à une contradiction, le système n'a donc pas de solutions.
    - Si  $\forall i > n$ ,  $b'_i = 0$ , on peut retirer  $b$ , les équations sont inutiles.
  - Si  $r$  et  $n$  sont égaux, alors :
    - Si  $(j_1, \dots, j_n) = (1, \dots, n)$ , le système est dit de Cramer
    - Si pour tout second membre, il existe une unique solution, on réinjecte cette solution à partir de la dernière équation.
    - Si  $(j_1, \dots, j_n) \neq (1, \dots, n)$ , les  $x_{j_1}, \dots, x_{j_n}$  sont appelées les inconnues principales. Les autres variables s'appellent les variables libres dans le second membre, et il reste un système de Cramer avec les inconnues  $(x_{j_1}, \dots, x_{j_n})$ .
- Donc, pour chaque valeurs prisent par les variables libres, on a une unique solution, le système admet alors une infinité de solutions (Seulement si  $\mathbb{K}$  est infini, sinon, il y a  $q^{n-r}$  solutions).

**Exemple.**

$$(S) \left\{ \begin{array}{lcl} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 & = & 1 \\ -x_3 + 3x_4 & = & 0 \\ x_4 & = & 1 \end{array} \right.$$

$x_1, x_2, x_3$  sont les inconnues principales

$j_1 = 1, j_2 = 3, j_3 = 4$

$x_2$  est la variable libre.

$$\begin{aligned} (S) \quad & \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 &= 1 \\ -x_3 + 3x_4 &= 0 \\ x_4 &= 1 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_4 &= 1 - x_2 \\ -x_3 + 3x_4 &= 0 \\ x_4 &= 1 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 &= 1 - x_2 - 6 + 1 = -4 - x_2 \\ x_3 &= 3 \\ x_4 &= 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Les solutions de ce système sont donc les éléments de la forme  $(-4 - \lambda, \lambda, 3, 1)$  avec  $\lambda \in \mathbb{K}$

## Deuxième partie

# Chapitre 2 : Espaces vectoriels

Soit  $\mathbb{K}$ , un corps ( $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$ , ou autre)

## 2 Notion d'espace vectoriel

### 2.1 Définitions

**Définition 4.** (non formelle) Un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel est un ensemble d'éléments appelés vecteurs tels qu'on puisse les additionner entre eux et les multiplier par des scalaires, c'est-à-dire des éléments de  $\mathbb{K}$  avec des relations naturelles de compatibilité.

**Définition 5.** Un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel est un ensemble  $E$  muni de deux lois :

— une loi de composition interne :

$$\begin{aligned} + : E \times E &\rightarrow E \\ (u, v) &\mapsto u + v \end{aligned}$$

— une loi de composition externe :

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{K} \times E &\rightarrow E \\ (\lambda, u) &\mapsto \lambda \cdot u \end{aligned}$$

Ces lois vérifient :

**A1 :**  $\forall u, v, w \in E, (u + v) + w = u + (v + w)$

la loi  $+$  est donc associative

**A2 :**  $\forall u, v \in E, u + v = v + u$

la loi  $+$  est donc commutative

**A3 :**  $\exists 0_E \in E, \forall u \in E, u + 0_E = 0_E + u = u$

la loi  $+$  admet un élément neutre

**A4 :**  $\forall u \in E, \exists v \in E, u + v = v + u = 0_E$

chaque élément de  $E$  admet, par  $+$ , un inverse ou opposé

**B1 :**  $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall u \in E, \lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda \cdot \mu) \cdot u$

la loi  $\cdot$  est associative

**B2 :**  $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall u \in E, (\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u$

la loi  $\cdot$  est distributive à gauche

**B3 :**  $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u, v \in E, (u + v) \cdot \lambda = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$

la loi  $\cdot$  est distributive à droite

**B4 :**  $\forall u \in E, 1 \cdot u = u$

la loi  $\cdot$  admet un élément neutre

**Remarque 5.** Dans l'axiome A3, l'élément neutre est unique.  
 Dans l'axiome A4, le vecteur  $v$  est en fait unique, on le note  $-u$ .

**Proposition 1.** On a également,  $\forall u \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}$  :

1.  $\lambda \cdot 0_E = 0_E$
2.  $0_{\mathbb{K}} \cdot u = 0_E$
3.  $\lambda \cdot u = 0_E \Rightarrow \lambda = 0_{\mathbb{K}} \text{ ou } u = 0_E$
4.  $(-\lambda) \cdot u = \lambda \cdot (-u) = -(\lambda \cdot u)$

*Démonstration.*

1.

$$\begin{aligned}\lambda \cdot 0_E &= \lambda \cdot (0_E + 0_E) \\ &= \lambda \cdot 0_E + \lambda \cdot 0_E \\ &= \lambda \cdot 0_E + 0_E \\ \lambda \cdot 0_E &= 0_E\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}0_{\mathbb{K}} \cdot u &= (0_{\mathbb{K}} + 0_{\mathbb{K}}) \cdot u \\ &= 0_{\mathbb{K}} \cdot u + 0_{\mathbb{K}} \cdot u \\ &= 0_{\mathbb{K}} \cdot u + 0_{\mathbb{K}} \\ 0_{\mathbb{K}} \cdot u &= 0_{\mathbb{K}}\end{aligned}$$

3. Si  $\lambda = 0_{\mathbb{K}}$ , cf. 2

Si  $\lambda \neq 0$ , alors  $\lambda^{-1} \in \mathbb{K}$ ,

$$\begin{aligned}0 &= \lambda^{-1} \cdot 0 \\ &= \lambda^{-1} (\lambda \cdot u) \\ &= (\lambda^{-1} \cdot \lambda) \cdot u \\ &= 1 \cdot u \\ &= u\end{aligned}$$

□

**Notation.** On note souvent :

- $0_E = 0$  et  $0_{\mathbb{K}} = 0$
- $u - v = u + (-v)$

**Lemme 1.**  $\forall u, v, w \in E, u + w = v + w \Rightarrow u = v$

*Démonstration.*

$$\begin{aligned}v &= (u + w) - w \\ &= u + (w - w) \\ &= u + 0_E \\ &= u\end{aligned}$$

donc  $v = u$

□

**Remarque 6.**

- Pour  $\lambda \in \mathbb{K}$  et  $u \in E$   $u \cdot \lambda$  ne veut rien dire.
- Pour  $u, v \in E$   $u \cdot v$  ne veut rien dire

**Exemple.**

1/ Pour les lois de compositions internes et externes usuelles,

- $\mathbb{K}$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel
- $\mathbb{K}^n$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel
- plus généralement, si  $E_1$  et  $E_2$  sont des  $\mathbb{K}$  espaces vectoriels,  $E_1 \times E_2$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

2/ Soit  $E$ , un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $A$ , un ensemble quelconque,

- $\mathcal{F}(A, E)$ , l'ensemble des applications de  $A$  dans  $E$ , est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel

$$\forall f_1, f_2 \in \mathcal{F}(A, E), \forall \lambda \in \mathbb{K},$$

$$f_1 + f_2 : A \rightarrow E$$

$$a \mapsto f_1(a) + f_2(a)$$

$$\lambda \cdot f_1 : A \rightarrow E$$

$$a \mapsto \lambda \cdot f_1(a)$$

- Si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  et  $A = I \subset \mathbb{R}$ , un intervalle, on peut avoir  $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$
- Si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  et  $A = \mathbb{N}$ , on a  $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ , l'ensemble des suites numériques

3/  $\mathbb{K}[X]$ , l'ensemble des polynômes

4/  $M_{n,p}(\mathbb{K})$ , l'ensemble des matrices à coefficient dans  $\mathbb{K}$ , à  $n$  lignes et  $p$  colonnes.

**Remarque 7.**  $\mathbb{R}^2$ , munit de la loi + usuelle et  $\lambda \cdot (x_1, x_2) = (\lambda \cdot x_1, 0)$

n'est pas un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, pourquoi?

**2.2 Sous-espace vectoriel**

**Définition 6.** Soit  $E$ , un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, et  $F \subset E$ .

$F$  est un sous espace vectoriel de  $E$  s'il s'agit d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel pour les lois + et  $\cdot$  de  $E$ .

- $\forall u, v \in F, u + v \in F$
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u \in F, \lambda \cdot u \in F$
- + et  $\cdot$  vérifient les propriétés des lois de composition interne et externe des espaces vectoriels

**Propriété 1.**  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  si :

- $F \neq \emptyset$
- $\forall u, v \in F, u + v \in F$
- $\forall u \in F, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \cdot u \in F$

**Démonstration.** Pour montrer que les sous espaces vectoriels vérifient les axiomes A1 à B4 :

La vérification des axiomes A1, A2, B1, B2, B3 et B4 est immédiate.



Pour A3 :

$$\exists 0_F \subset F, \forall u \in F, u + 0_F = 0_F + u = u$$

Il suffit alors de montrer que  $0_E \in F$ ,  
or,  $F \neq \emptyset$ , donc,  $\exists u \in F, 0 \cdot u = 0_E \in F$

Pour A4 :

Il suffit alors de montrer que  $\forall u \in F, -u \in F$  :  
 $-u = (-1) \cdot u$  où  $-u \in F$  par hypothèse. □

**Remarque 8.** — On a vu que  $0_E \in F$

— Les deux derniers points de la définition de sous-espace vectoriel sont équivalents à :

$$\forall u, v \in F, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \lambda u + \mu v \in F$$

ou encore à :

$$\forall u, v \in F, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda u + v \in F$$

**Remarque 9.** Dans la plupart des cas, pour montrer qu'un ensemble (avec les lois  $+$ ,  $\cdot$ ) est un espace vectoriel, on montre qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel connu.

**Exemple.** —  $\{0\}$  et  $E$  sont des sous-espace vectoriels de  $E$ .

—  $F = \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ , l'ensemble des fonctions continues sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ .

$F$  est sous-espace vectoriel de  $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ , l'ensemble des fonctions de  $I$  sur  $\mathbb{R}$  :

La fonction nulle est continue.

$\forall f, g \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}), \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \lambda f + \mu g$  est continue, donc  $\lambda f + \mu g \in F$ .

—  $E = \mathbb{K}^n$  et  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$

$F = \{(x_1, \dots, x_n) \mid a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0\}$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

—  $\mathbb{K}[X]$ , les suites de  $\mathbb{K}$  nulles à partir d'un certain rang, est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites de  $\mathbb{K}$

## 2.3 Sous espace engendré

**Définition 7.** Une combinaison linéaire de  $v_1, \dots, v_p$  est un élément de la forme  $\sum_{i=1}^p \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p$  avec  $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ .

**Exemple.** Dans  $\mathbb{K}[X]$ , une combinaison linéaire est un polynôme.

**Remarque 10.** Une combinaison linéaire de  $(v_i)_{i \in I}$  est une combinaison linéaire au sens précédent d'une sous famille finie.

**Exemple.** Dans  $\mathbb{K}[X] = \{1, X, X^2, \dots, X^n, \dots\}$ , une combinaison linéaire est un polynôme.

**Définition 8.** Soient  $v_1, \dots, v_p \in E$

$$\text{vect}(v_1, \dots, v_p) = \{\text{combinaisons linéaires de } v_1, \dots, v_p\} = \left\{ \sum_{i=1}^p \lambda_i v_i \mid \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K} \right\}$$

**Proposition 2.**  $\text{vect}(v_1, \dots, v_p)$  est un sous espace vectoriel de  $E$ .

**Exemple.** Cas particulier :

$p = 1$ ,  $\text{vect}(v)$  est alors une droite vectorielle.

$p = 2$ ,

## 2.4 Intersections

**Proposition 3.** Soient  $F_1, F_2$  des sous-espaces vectoriels de  $E$ , alors,  $F_1 \cap F_2$  est un sous espace vectoriel :

$$F_1 \cap F_2 = \{x \in E \mid x \in F_1 \text{ et } x \in F_2\}$$

*Démonstration.* —  $0 \in F_1$  et  $0 \in F_2$ , donc  $0 \in F_1 \cap F_2$

l'intersection est donc non vide

— Soient  $u, v \in F_1 \cap F_2$  et  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$

On montre que  $\lambda u + \mu v \in F_1 \cap F_2$

$\lambda u + \mu v \in F_1$  car  $F_1$  est un sous espace vectoriel

$\lambda u + \mu v \in F_2$  car  $F_2$  est un sous espace vectoriel

□

application :

L'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires homogène (sans second membre) à  $n$  inconnues (et  $p$  équations) est un sous espace vectoriel de  $\mathbb{K}^n$ .

*Démonstration.* Intersection des sous espaces vectoriels est solution de chaque équations □

**Remarque 11.** Attention,

— En général, l'union de sous espaces vectoriels n'est pas un sous espaces vectoriels (sauf cas triviaux)

— Le complémentaire d'un sous-espace vectoriel n'est jamais un sous-espace vectoriel (étant privé du 0)

## 2.5 Somme de sous espaces vectoriels

**Définition 9.** Soient  $F_1, F_2$ , des sous espaces vectoriels, on définit :

$$F_1 + F_2 = \{f_1 + f_2 \mid f_1 \in F_1, f_2 \in F_2\}$$

**Remarque 12.**  $F_1 + F_2$  est un sous-espace vectoriel de  $E$

**Exemple.**

**Proposition 4.** Si  $F_1 = \text{vect}(v_1, \dots, v_{p_1})$  et  $F_2 = \text{vect}(w_1, \dots, w_{p_2})$ , alors,

$$F_1 + F_2 = \text{vect}(v_1, \dots, v_{p_1}, w_1, \dots, w_{p_2})$$

*Démonstration.* Soit  $u \in F_1 + F_2$

$$\exists f_1 \in F_1, \exists f_2 \in F_2, / u = f_1 + f_2$$

$$\exists f_1 \in F_1, \exists f_2 \in F_2, / u = f_1 + f_2$$

□

**Remarque 13.**  $F_1 - F_2$  n'est pas intéressant :  $\{f_1 + (-f_2) / f_1 \in F_1, f_2 \in F_2\} = F_1 + F_2$

**Remarque 14.**  $F_1 + F_2 \neq F_1 \cup F_2$

### 3 Familles libres, génératrices et bases

#### 3.1 Familles libres, génératrices

**Définition 10.** On dit que  $(v_1, \dots, v_p)$  est une famille génératrice de  $E$  si  $\text{vect}(v_1, \dots, v_p) = E$

**Vocabulaire.**  $E$  est dit finiment engendré s'il existe une famille génératrice finie.

**Remarque 15.** intuitivement,  $(v_1, \dots, v_p)$  est génératrice si elle "voit" tous les éléments de  $E$ .

**Remarque 16.** A priori, il peut y avoir plusieurs manières d'écrire un élément de  $E$

**Exemple.** Pour  $E = \mathbb{R}^2$ ,  $e_1 = (1, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1)$ ,  $e_3 = (1, 1)$ , on a  $e_3 = e_1 + e_2$  la famille  $\{e_1, e_2, e_3\}$  est génératrice.

calcul pratique :

trouver une famille génératrice d'un sous espace vectoriel défini par des équations.

**Exemple.**  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0$

On résoud le système

**Proposition 5.** Soit  $E$  de dimension finie, et  $F$  sous espace vectoriel de  $E$ .

1.  $F$  est de dimension finie et  $\dim F \leq \dim E$
2.  $\dim F = \dim E$  si et seulement si  $F = E$

*Démonstration.* 1. Semble évident mais ne l'est pas.

2. Si  $\dim F = \dim E$ ,  
on pose  $\{f_1, \dots, f_n\}$ , base de  $F$ , est aussi une famille libre de  $E$  avec  $n = \dim E$  éléments dans une base de  $E$ .  
Pour la réciproque, si  $\dim F \neq \dim E$ ,  $F \neq E$

□

**Remarque 17.**  $f_1, \dots, f_k$  de  $F$  sous espace vectoriel de  $E$ .

$f_1, \dots, f_k$  est une famille libre de  $F$  si et seulement si c'est une famille libre de  $E$

**Remarque 18.** Le second point est utile en pratique pour montrer que deux espaces vectoriels  $F$  et  $G$  sont égaux, on montre que  $F \subset G$  et que les deux sont de même dimension.

### 3.2 Exemples de dimensions (et bases)

- $\mathbb{K}^n$   
base canonique :  $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$  ou 1 se trouve à la  $i$ -ème place.  
 $(e_1, \dots, e_n)$  est une base avec  $\dim \mathbb{K}^n = n$
- Soient  $E, F$ , deux espaces vecteurs de dimensions finies  
 $E \times F$  est de dimension finie  $\dim E + \dim F$   
Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  base de  $E$   
Soit  $(f_1, \dots, f_n)$  base de  $F$

$$e_i^\sim = (e_i, 0) \in E \times F$$

$$f_j^\sim = (0, f_j) \in E \times F$$

**Exercice.**  $(e_1^\sim, \dots, e_n^\sim, f_1^\sim, \dots, f_m^\sim)$

**Théorème 1.** On considère un système d'équations linéaires homogène à  $n$  inconnues et  $k$  équations.

On suppose que ce système est échelonné, alors l'ensemble des solutions est de dimension  $n - k$ .

*Démonstration.*

**Remarque 19.** Quitte à renommer les inconnues, on peut supposer que les inconnues principales sont  $x_1, \dots, x_k$ , les autres sont des variables libres.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots = 0 \\ a_{22}x_2 + \dots = 0 \\ \dots \\ a_{kk}x_k + \dots = 0 \end{cases}$$

Alors, les solutions sont de la forme  $(x_1, \dots, x_n)$  avec, pour  $j > k$ , on pose arbitrairement  $x_j = \lambda_j \in \mathbb{K}$

$$x_k = \alpha_{k,k+1}\lambda_{k+1} + \dots + \alpha_{kn}\lambda_n$$

...

$$x_1 = \alpha_{1,k+1}\lambda_{k+1} + \dots + \alpha_{1n}\lambda_n$$

Donc,

$$(x_1, \dots, x_n) = \lambda_{k+1}()$$

□

**Théorème 2.** Soient  $F, G$ , deux sous espace vectoriel de  $E$  (de dimensions finies), alors,  $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$

*Démonstration.* "Idée : construire une base sympathique de  $F + G$ "

- $F \cap G$  est de dimension finie ( $F \cap G$  étant sous espace vectoriel de  $F$ )  
on pose alors  $(e_1, \dots, e_n)$  base de  $F \cap G$ .
- $(e_1, \dots, e_n)$  est une famille libre de  $F$   
se complète en une base  $(e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_s)$  de  $F$

□

### 3.3 rang d'une famille de vecteurs

**Définition 11.**

$$rg(v_1, \dots, v_p) = \dim \text{vect}(v_1, \dots, v_p)$$

**Propriété 2.** On a

- $rg(v_1, \dots, v_p) \leq \dim E$
- $rg(v_1, \dots, v_p) \leq p$
- $rg(v_1, \dots, v_p) = \dim E$  si et seulement si la famille est génératrice.
- $rg(v_1, \dots, v_p) = 1$  si et seulement si la famille est libre.

**Démonstration.** —  $\text{vect} v_1, \dots, v_p$  est sous espace vectoriel de  $E$ .

- par définition,  $(v_1, \dots, v_p)$  engendre  $\text{vect}(v_1, \dots, v_p)$
- $\text{vect}(v_1, \dots, v_p) = E$  si et seulement s'ils sont monodimensionnels
- $rg(v_1, \dots, v_p) = 1$  si et seulement si  $v_1, \dots, v_p$  est génératrice d'un sous espace vectoriel de dimension  $p$   
si et seulement si  $v_1, \dots, v_p$  est une base de  $\text{vect}(v_1, \dots, v_p)$   
si et seulement si  $v_1, \dots, v_p$  est libre

□

**Remarque 20.**  $\text{vect}(v_1, \dots, v_p)$  ne change pas (le rang non plus) si :

- on permute deux vecteurs
- on multiplie un vecteur par un scalaire  $\lambda \in \mathbb{K}^*$
- on ajoute à un vecteur un multiple d'un autre

On peut alors appliquer l'algorithme de Gauss au calcul du rang pour des vecteurs de  $\mathbb{K}^n$ .

Tout d'abord, on échelonne une famille de vecteur.

Une fois que la famille est échelonnée, le rang correspond au nombre de vecteurs non nuls.

**Remarque 21.** Cette famille de vecteurs est une base du sous espace vectoriel initial.

### 3.4 Somme directe

Soient  $F$  et  $G$  des sous espaces vectoriels de  $E$

$$F + G = \{f + g \mid f \in F, g \in G\}$$

a priori pour  $u \in F + G$  la paire  $(f, g) \in F \times G \mid u = f + g$  n'est pas nécessairement unique.

**Définition 12.**  $F$  et  $G$  sont en somme directe si et seulement si

$$\forall u \in F + G, \exists!(f, g) \in F \times G, u = f + g$$

**Notation.** On note alors  $F \oplus G$

**Remarque 22.**  $F \oplus G$  désigne à la fois le sous espace vectoriel  $F + G$  et la propriété selon laquelle ils sont en somme directe.

**Proposition 6.** Les énoncés suivants sont équivalents :

- $F$  et  $G$  sont en somme directe
- $0 = f + g$  avec  $f \in F$  et  $g \in G$  implique  $f = g = 0$
- $F \cap G = \{0\}$
- En réunissant une base de  $F$  et une base de  $G$ , on obtient une base de  $F + G$
- $\dim(F + G) = \dim F + \dim G$

(où les deux dernières propositions ne sont vraies qu'en dimension finie)

Démonstration. □

**Définition 13.**  $F$  et  $G$  sont supplémentaires si  $F \oplus G = E$

**Remarque 23.** Il peut être intéressant de "découper" l'espace en sous espaces plus simples.

**Remarque 24.** Tout sous espace vectoriel  $F$  de  $E$  admet un supplémentaire.

**Remarque 25.** Les supplémentaires ne sont pas uniques, on ne parle donc pas "du" supplémentaire.

Cas général :

Soient  $F_1, \dots, F_k$ , sous espaces vectoriels de  $E$ .

$F_1, \dots, F_k$  sont en somme directe si :

$$\forall u \in F_1 + \dots + F_k, \exists!(f_1, \dots, f_k) \in F_1 \times \dots \times F_k / u = f_1 + \dots + f_k$$

**Proposition 7.** Les propositions suivantes sont équivalentes :

- $\bigoplus_{i=1}^k F_i$
- $\forall i \in [1, k], f_i \in F_i, \sum_{i=1}^k f_i = 0 \Rightarrow \forall i, f_i = 0$
- en réunissant une base de chaque  $F_i$ , on obtient une base de la somme
- $\dim \sum F_i = \sum \dim F_i$

## Troisième partie

# Applications linéaires

## 4 Définitions et exemples

**Définition 14.** Soient  $E$  et  $E'$ , deux  $\mathbb{K}$  espaces vectoriels.

$f : E \rightarrow E'$  est linéaire si :

$$\forall u, v \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)$$

**Remarque 26.** Dans ce cas, on a forcément  $f(0) = 0$ .

**Vocabulaire.** — Si  $E = E'$ ,  $f$  est un endomorphisme.  
— Si  $f$  est bijective,  $f$  est un isomorphisme.

**Remarque 27.** Si  $f : E \rightarrow E'$ , linéaire, est bijective,  
 $f^{-1} : E' \rightarrow E$ , est aussi linéaire

**Exemple.**

## 5 Image, noyau et image d'une famille de vecteurs

**Notation.**  $\mathcal{L}(E, E') = \{f : E \rightarrow E', f \text{ linéaire}\}$  est un  $\mathbb{K}$  espace vectoriel.

**Définition 15.** Soit  $f \in \mathcal{L}(E, E')$

- $f(E)$  est un sous espace vectoriel de  $E'$ , noté  $\text{Im } f$ , prononcé image de  $f$ .
- $\{x \in E \mid f(x) = 0\}$  est un sous espace vectoriel de  $E$ , noté  $\text{Ker } f$ , prononcé noyau de  $f$ .
- on note  $\text{rg}(f) = \dim \text{Im } f$  (pour une dimension finie)

*Démonstration.* Soient  $u', v' \in f(E)$  et  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ .

Montrons que  $\lambda u' + \mu v' \in E$  □

**Remarque 28.** Si  $E = \text{vect}(e_1, \dots, e_n)$ , alors  $f(E) = \text{vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$   
Donc  $\text{rg}(f) = \text{rg}(f(e_1), \dots, f(e_n))$

**Proposition 8.**  $f : E \rightarrow E$  est injective si et seulement si  $\text{Ker } f = \{0\}$

**Rappel 1.**  $f : E \rightarrow E'$  est injective si et seulement si  $\forall u, v \in E, f(u) = f(v) \Rightarrow u = v$   
Dont la contraposée est  $\forall u, v \in E, u \neq v \Rightarrow f(u) \neq f(v)$

*Démonstration.* Si  $f$  est injective, □

**Proposition 9.** Caractérisation d'une application linéaire par l'image d'une base.  
Soit  $(e_1, \dots, e_n)$ , une base de  $E$ , soient  $b_1, \dots, b_n \in E'$

$$\exists! f \in \mathcal{L}(E, E'), \forall i, f(e_i) = b_i$$

Par ailleurs :

1.  $(b_1, \dots, b_n)$  est libre si et seulement si  $f$  est injective
2.  $(b_1, \dots, b_n)$  est génératrice si et seulement si  $f$  est surjective
3.  $(b_1, \dots, b_n)$  est une base si et seulement si  $f$  est un isomorphisme

*Démonstration.* Analyse :

Supposons que  $f$  existe : □

## 6 Matrice d'application linéaire

Soit  $f : E \rightarrow E'$ , une application linéaire.

Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ , une base de  $E$

Soit  $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_p)$ , une base de  $E'$

On écrit  $f(e_1), \dots, f(e_n)$  dans la base  $\mathcal{B}'$

$$f(e_1) = a_{11}e'_1 + \dots + a_{p1}e'_p$$

$$f(e_2) = a_{12}e'_1 + \dots + a_{p2}e'_p$$

...

$$f(e_n) = a_{1n}e'_1 + \dots + a_{pn}e'_p$$

On définit la matrice de  $f$  relativement aux bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  par :

$$Mat(f)_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pn} \end{pmatrix}$$

**Exemple.** Pour l'application :

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto (-x + 6y, -x + 4y)$$

$\mathcal{B}_1 = (e_1, e_2) = ((1, 0), (0, 1))$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ .

$\mathcal{B}_2 = (e'_1, e'_2) = ((3, 1), (2, 1))$

Alors :

$$— Mat(f)_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_1} =$$