Théorie des groupes

Table des matières

1 Groupe opérant sur un ensemble (action de groupe)

Définition 1. *Soient G, un groupe et X, un ensemble.*
On appelle action (ou opération) à gauche de G sur X toute application :

$$\begin{aligned} \cdot : G \times X &\to X \\ (g, x) &\mapsto g \cdot x \end{aligned}$$

qui satisfait les deux conditions suivantes :

— $\forall g, h \in G,\ \forall x \in X,\ g \cdot (h \cdot x) = (g \cdot h) \cdot x$
— $\forall x \in X,\ e \cdot x = x$

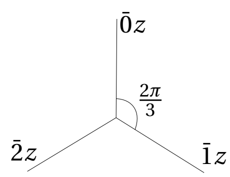
Définition 2. *Opération à droite*

$$\begin{aligned} \cdot : G \times X &\to X \\ (g, x) &\mapsto g \cdot x \end{aligned}$$

avec :

— $\forall g, h \in G,\ \forall x \in X,\ g \cdot (h \cdot x) = (g \cdot h) \cdot x$
— $\forall x \in X,\ e \cdot x = x$

Exemple.
— $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ *agit par rotation sur* $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$.
$\forall z = re^{i\phi} \in \mathbb{C},\ \forall \bar{k} \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z},\ \bar{k} \cdot z = re^{i\phi + \frac{2\pi k}{3}}$



— $\mathbb{R}$ *agit par translation sur* $\mathbb{R}^2$
$\forall r \in \mathbb{R},\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ r \cdot (x, y) = (x + r, y)$
— $\mathbb{R}^2$ *agit par translation sur* $\mathbb{R}^2$
$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ (\alpha, \beta) \cdot (x, y) = (\alpha + x, \beta + y)$
— *Si G et un groupe et $X = G$, alors on a l'opération de G sur lui-même :*

1. *par translation à gauche :*

$$\begin{aligned} \cdot : G \times G &\to G \\ (g, x) &\mapsto g \cdot x \end{aligned}$$

2. *par conjugaison :*

$$\begin{aligned} \cdot : G \times G &\to G \\ (g, x) &\mapsto g \cdot x \cdot g^{-1} \end{aligned}$$

— *L'action triviale de G sur X est donnée par :*
$g \cdot x = x, \ \forall g \in G, \forall x \in X$

Proposition 1. *Soit G, un groupe et X, un ensemble.*
Il y a une correspondance bijective et naturelle entre les actions (à gauche) de G sur X et les morphisme de G vers $Bij(X)$.

Démonstration. — Soit $\diamond$, une action de G sur X.
$\forall g \in G$, on considère l'application

$$\begin{aligned} \sigma_g : X &\to X \\ x &\mapsto g \diamond x \end{aligned}$$

Étant donné que :

$$\begin{aligned} g^{-1} \diamond (g \diamond x) &= (g^{-1} g) \diamond x \\ &= x \\ &= (g g^{-1}) \diamond x \\ &= g \diamond (g^{-1} \diamond x) \end{aligned}$$

On a :

$$\sigma_{g^{-1}} \circ \sigma_g = Id_X = \sigma_g \circ \sigma_{g^{-1}}$$

Donc $\sigma_g \in Bij(X)$
De plus, étant donné que $g_1 \diamond (g_2 \diamond x) = (g_1 g_2) \diamond x$,
on a $\sigma_{g_1} \circ \sigma_{g_2} = \sigma_{g_1 g_2}$

Donc l'application :

$$\begin{aligned} \sigma_\diamond : G &\to Bij(X) \\ g &\mapsto \sigma_g \end{aligned}$$

est un morphisme.

— Soit $\Psi : G \to Bij(X)$, un morphisme.
On obtient l'action $\diamond_\Psi$ de G sur X pour $g \diamond_\Psi x = \Psi(g)(x)$ On vérifie que c'est une action de groupe.
La correspondance bijective vient de $\Psi_{\diamond_\Psi} = \Psi$ et $\diamond_{\Psi_\diamond} = \diamond$

□

Définition 3. *Soit G opérant sur X et $x \in X$.*
L'orbite de x sous G est :

$$Orb(x) = \{g \cdot x \mid g \in G\} \subset X$$

Proposition 2. *Soit G opérant sur X.*
Soit ∼, la relation sur X définie par

$$x \sim y \Leftrightarrow x \in Orb(y)$$

Alors ∼ est une relation d'équivalence sur X dont les classes d'équivalences sont les orbites.

Corrolaire 1. *Les orbites des éléments de X sous l'action de G forment une partition de X.*
On note $G\backslash X$ l'ensemble quotient $X/\sim$

Démonstration. On montre que $\sim$ est une relation d'équivalence :

— Réflexivité : $\forall x \in X,\ e \cdot x = x$, par conséquent, $x \in Orb(x)$ et $x \sim x$.
— Symétrie : Supposons $x \sim y$, *i.e.* $\exists g \in G \ / \ x = g \cdot y \Leftrightarrow x \in Orb(y)$
  Donc $g^{-1} \cdot x = g^{-1} \cdot (g \cdot y)^{-1} = (g^{-1} g) \cdot y = e \cdot y = y$
  par conséquent, $y = Orb(x)$
  Ainsi $y \sim x$
— transitivité : Supposons $x \sim y$ et $y \sim z$, *i.e.* $\exists g, h \in G \ / \ x = g \cdot y$ et $y = h \cdot z$
  Donc $x = g \cdot y = g \cdot (h \cdot z) = (gh) \cdot z$
  par conséquent, $x \in Orb(z)$,
  ainsi, $x \sim z$

La classé d'équivalence d'un $z \in X$ est $Orb(z)$ □

Exemple. — *Les orbites pour $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ opérant sur $\mathbb{C}$ par rotation :*

$$Orb(z) = \{z, e^{\frac{2\pi}{3}} z, e^{\frac{4\pi}{3}} z\}$$

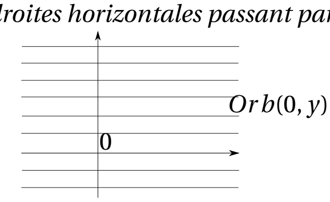
Comporte 3 *éléments si $z \neq 0$*
Sinon (pour $z = 0$), $Orb(0) = \{0\}$

— *Pour $\mathbb{R}$ opérant sur $\mathbb{R}^2$,*

$$r \cdot (x, y) \to (x + r, y)$$

$$Orb((x, y)) = \{r \cdot (x, y) \mid r \in \mathbb{R}\} = \{(x + r, y) \mid r \in \mathbb{R}\} = \{(\lambda, y) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Ce qui correspond aux droites horizontales passant par $(0, y)$



— $\mathbb{R}^2$ *opérant par translation sur $\mathbb{R}^2$, i.e. $\exists(\alpha, \beta), (x, y) \in \mathbb{R}^2$*

$$Orb(x, y) = \{(\alpha + x, \beta + y) \mid (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\} = \{(s, t) \mid (s, t) \in \mathbb{R}^2\} = \mathbb{R}^2$$

On a donc qu'une seule orbite

— *G opérant par translation sur G tel que $g \cdot x$*

$$Orb(e) = \{g \cdot e \mid g \in G\} = \{g | g \in G\} = G$$

Donc, $\forall h \in G,\ Orb(h) = Orb(e) = G$.
Il n'y a donc qu'une seule orbite.

Définition 4. *L'action G opérant sur X est transitive s'il existe exactement une orbite dans X.*

Définition 5. *Soit G opérant sur X, une action de groupe.*

— *Le stabilisateur de $x \in X$ dans G est le sous groupe*

$$Stab(x) = \{g \in G \mid g \cdot x = x\} \subset G$$

— *Les points fixés par $g \in G$ sont définis par :*

$$Fig(g) = \{x \in X \mid g \cdot x = x\}$$

— *$x \in X$ est un point fixe sous l'action de G si $\forall g \in G,\ g \cdot x = x (\Leftrightarrow Stab(x) = G \Leftrightarrow Orb(x) = \{x\})$*

Proposition 3. *Soit G opérant sur X, une action de groupe.*
Si x et y sont dans la même orbite, i.e. $Orb(x) = Orb(y)$, alors $Stab(x)$ et $Stab(y)$ sont conjugués.

Démonstration. Supposons $y = g \cdot x$. Alors

$$g^{-1} \cdot y = g^{-1} \cdot (g \cdot x) = (g^{-1} g) \cdot x = e \cdot x = x$$

On va montrer que $gStab(x)g^{-1} = Stab(y)$.

— Soit $h \in Stab(x)$, i.e. $ghg^{-1} \in gStab(x)g^{-1}$
On souhaite montrer que $ghg^{-1} \in Stab(y)$

$$(ghg^{-1}) \cdot y = g \cdot (h \cdot (g^{-1} \cdot y)) = g \cdot (h \cdot x) = g \cdot x = y$$

Donc $ghg^{-1} \in Stab(y)$ et donc $gStab(y)g^{-1} \subseteq Stab(y)$

— L'argument précédent, en échangeant x par y et g par g^{-1}, nous donne :

$$g^{-1} Stab(y) g \subseteq Stab(x)$$
$$Stab(y) \subseteq gStab(x)g^{-1}$$

□

Théorème 1. *Soit G opérant sur X une action de groupe.*
Soit, de plus, $x \in X$.
Il y a une bijection entre $Orb(x)$ et $G/Stab(x)$ (les classes d'équivalence à gauche de $Stab(x)$). En particulier, si $Orb(x)$ est fini, alors $Stab(x)$ est d'indice fini dans G et $|Orb(x)| = [G \cdot Stab(x)]$

Démonstration. On veut définir la fonction :

$$f : \quad Orb(x) \to G/Stab(x) = \{gStab(x) \mid g \in G\} g \cdot x \quad \mapsto gStab(x)$$

— f est en effet une fonction.
Soient $g, h \in G$

$$\begin{aligned} g \cdot x = h \cdot x &\Leftrightarrow h^{-1} \cdot (g \cdot x) = h^{-1} \cdot (h \cdot x) \\ &\Leftrightarrow (h^{-1} \cdot g) \cdot x = (h^{-1} \cdot h) \cdot x \\ &\Leftrightarrow (h^{-1} \cdot g) \cdot x = x \\ &\Leftrightarrow h^{-1} \cdot g \in Stab(x) \\ &\Leftrightarrow \exists s \in Stab(x),\ h^{-1} g = s \text{ autrement dit } g = hs \\ &\Leftrightarrow gStab(x) = hStab(x) \end{aligned}$$

— f est injective car $gStab(x) = hStab(x) \Rightarrow gx = hx$
— f est surjective car $\forall gStab(x) \in G/Stab(x),\ f(g \cdot x) = gStab(x)$

□

Corrolaire 2. *Formule de classes Si G est un groupe fini, alors*

$$\forall x \in X,\ |G| = |Stab(x)| \cdot |Orb(x)|$$

Démonstration. Si G est fini, alors $Orb(x)$ est fini et

$$|orb(x)| = [G : Stab(x)] = \frac{|G|}{|Stab(x)|}$$

□