Algèbre linéaire

Table des matières

Première partie
Systèmes d'équations linéaires

Soit $\mathbb{K}$, un corps.

Définition 1. *Un système d'équtions linéaires à n inconnues et p équations est un système d'équations de la forme :*

$$(S)\left\{\begin{array}{l} a_{1,1}x_1+...+a_{1,n}x_n=b_1 \\ ... \\ a_{n,1}x_{n,1}+...+a_{n,n}x_{n,n}=b_n \end{array}\right.$$

avec avec $a_{i,j}$ et b_i des éléments de $\mathbb{K}$
et x_j sont les inconnues.

Définition 2. *Une solution est le n-uplet $(x_1,...,x_n)$ tel que x... sont solutions de toutes les équations.*

Définition 3. *Les $b_1,...,b_p$ sont appelés seconds membres.*

Remarque 1. *à priori, $n \neq p$*

1 Résolution

1.1 Équivalence de systèmes

Pour résoudre, on se ramène à un système équivalent plus simple :

$$(S) \Leftrightarrow (S')$$

$(S) \Leftrightarrow (S')$ signifie que les deux systèmes ont les mêmes solutions.

1.2 Méthode du pivot de Gauss

On ne change pas les solutions en faisant une des trois opérations suivantes :
- changer l'ordre des équations
- multiplier une équation par un élément $\lambda \in \mathbb{K}\setminus\{0\}$
- Ajouter à une équation un multiple d'une autre

ou toute opération qui peut se décomposer en une série de telles opérations

Méthode du pivot de Gauss :

- Si $a_{1,1} \neq 0$

  Notation. *$a_{1,1}$ est alors appelé le pivot*
  pour tout i strictement supérieur à 1, on remplace la ligne L_i par $L_i - \frac{a_{i,1}}{a_{1,1}}$

À la fin, on obtient un système dit échelonné, c'est-à-dire de la forme :

$$\left\{ a'_{1,j_1}x_{j_1}+...+a'_{1,n}x_n=b'1 \right.$$

Deuxième partie

Chapitre 2 : Espaces vectoriels

Soit $\mathbb{K}$, un corps ($\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, ou autre)

2 Notion d'espace vectoriel

2.1 Définitions

Définition 4. *vague Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est un ensemble d'éléments appelés vecteurs tels qu'on puisse les additionner entre eux et les multiplier par des scalaires, c'est-à-dire des éléments de $\mathbb{K}$ avec des relations naturelles de compatibilité*

Définition 5. *Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est un ensemble E muni de deux lois :*

— *une loi de composition interne :*

$$\begin{aligned} + : E \times E &\to E \\ (u, v) &\mapsto u + v \end{aligned}$$

— *une loi de composition externe :*

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{K} \times E &\to E \\ (\lambda, u) &\mapsto \lambda \cdot v \end{aligned}$$

Ces lois vérifient :

— $\forall u, v, w \in E,\ (u + v) + w = u + (v + w)$
la loi $+$ est donc associative

— $\forall u, v \in E,\ u + v = v + u$
la loi $+$ est donc commutative

— $\exists 0_E \in E,\ \forall u \in E,\ u + 0_E = 0_E + u = u$
la loi $+$ admet un élément neutre

— $\forall u \in E,\ \exists v \in E,\ u + v = v + u = 0_E$
chaque élément de E admet, par $+$, un inverse ou opposé

— $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ \forall u \in E,\ \lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda \cdot \mu) \cdot u$
la loi $\cdot$ est associative

— $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ \forall u \in E,\ (\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u$
la loi $\cdot$ est distributive à gauche

— $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall u, v \in E,\ (u + v) \cdot \lambda = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$
la loi $\cdot$ est distributive à droite

— $\forall u \in E,\ 1 \cdot u = u$
la loi $\cdot$ admet un élément neutre

Remarque 2. *Dans le troisième axiome, l'élément neutre est unique.*
Dans le quatrième axiome, le vecteur v est en fait unique, on le note $-u$.

Proposition 1. *On a également,* $\forall u \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}$ *:*

1. $\lambda \cdot 0_E = 0_E$
2. $0_{\mathbb{K}} \cdot u = 0_E$
3. $\lambda \cdot u = 0_E \Rightarrow \lambda = 0_{\mathbb{K}}$ *ou* $u = 0_E$
4. $(-\lambda) \cdot u = \lambda \cdot (-u) = -(\lambda \cdot u)$

Démonstration. 1.

$$\begin{aligned} \lambda \cdot 0_E &= \lambda \cdot (0_E + 0_E) \\ &= \lambda \cdot 0_E + \lambda \cdot 0_E \end{aligned}$$

□

Notation. *On note souvent :*
- $0_E = 0$ *et* $0_{\mathbb{K}} = 0$
- $u - v = u + (-v)$

Lemme 1. $\forall u, v, w \in E, u + w = v + w \Rightarrow u = v$

Démonstration.

$$\begin{aligned} v &= (u + w) - w \\ &= u + (w - w) \\ &= u + 0_E \\ &= u \end{aligned}$$

donc $v = u$ □

Remarque 3.
- *Pour* $\lambda \in \mathbb{K}$ *et* $u \in E$ $u \cdot \lambda$ *ne veut rien dire.*
- *Pour* $u, v \in E$ $u \cdot v$ *ne veut rien dire*

Exemple. *1/ Pour les lois de compositions internes et externes usuelles,*
- $\mathbb{K}$ *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel*
- $\mathbb{K}^n$ *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel*
- *plus généralement, si* E_1 *et* E_2 *sont des* $E_1 \times E_2$ *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel*

2/ Soit E*, un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel et* A*, un ensemble qualconque,*
- $\mathscr{F}(A, E)$*, l'ensemble des applications de* A *dans* E*, est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel*
-

2.2 Sous-espace vectorel

Définition 6. *Soit* E*, un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel, et* $F \subset E$*.*
F *est un sous espace vectoriel de* E *s'il s'agit d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel pour les lois* $+$ *et* $\cdot$ *de* E*.*
- $\forall u, v \in F,\ u + v \in F$
- $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall u \in F,\ \lambda \cdot u \in F$
- $+$ *et* $\cdot$ *vérifient les propriétés des lois de composition interne et externe des espaces vectoriels*