Algèbre linéaire

Table des matières

Première partie
Algèbre

1 Matrices

1.1 Coefficients binomiaux

$$C_p^k = \frac{p!}{k!(p-k)!}$$

2 Espaces vectoriels

l'intersection d'espaces vectoriels est un espace vectoriel mais pas la réunion.

Deuxième partie

Chapitre 2 : Espaces vectoriels

Soit $\mathbb{K}$, un corps ($\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, ou autre)

3 Notion d'espace vectoriel

3.1 Définitions

Définition 1. *(non formelle) Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est un ensemble d'éléments appelés vecteurs tels qu'on puisse les additionner entre eux et les multiplier par des scalaires, c'est-à-dire des éléments de $\mathbb{K}$ avec des relations naturelles de compatibilité.*

Définition 2. *Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est un ensemble E muni de deux lois :*

— *une loi de composition interne :*

$$\begin{aligned} + : E \times E &\to E \\ (u, v) &\mapsto u + v \end{aligned}$$

— *une loi de composition externe :*

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{K} \times E &\to E \\ (\lambda, u) &\mapsto \lambda \cdot v \end{aligned}$$

Ces lois vérifient :

A1 : $\forall u, v, w \in E,\ (u + v) + w = u + (v + w)$
la loi + est donc associative

A2 : *:* $\forall u, v \in E,\ u + v = v + u$
la loi + est donc commutative

A3 : $\exists 0_E \in E,\ \forall u \in E,\ u + 0_E = 0_E + u = u$
la loi + admet un élément neutre

A4 : $\forall u \in E, \exists v \in E,\ u + v = v + u = 0_E$
chaque élément de E admet, par +, un inverse ou opposé

B1 : $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ \forall u \in E,\ \lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda \cdot \mu) \cdot u$
la loi · est associative

B2 : $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ \forall u \in E,\ (\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u$
la loi · est distributive à gauche

B3 : $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall u, v \in E,\ (u + v) \cdot \lambda = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$
la loi · est distributive à droite

B4 : $\forall u \in E,\ 1 \cdot u = u$
la loi · admet un élément neutre

Remarque 1. *Dans l'axiome A3, l'élément neutre est unique.*
Dans l'axiome A4, le vecteur v est en fait unique, on le note $-u$.

Proposition 1. *On a également,* $\forall u \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}$ *:*

1. $\lambda \cdot 0_E = 0_E$
2. $0_{\mathbb{K}} \cdot u = 0_E$
3. $\lambda \cdot u = 0_E \Rightarrow \lambda = 0_{\mathbb{K}}$ *ou* $u = 0_E$
4. $(-\lambda) \cdot u = \lambda \cdot (-u) = -(\lambda \cdot u)$

Démonstration.

1.
$$\begin{aligned}\lambda \cdot 0_E &= \lambda \cdot (0_E + 0_E)\\ &= \lambda \cdot 0_E + \lambda \cdot 0_E\\ &= \lambda \cdot 0_E + 0_E\end{aligned}$$
$$\lambda \cdot 0_E = O_E$$

2.
$$\begin{aligned}0_{\mathbb{K}} \cdot u &= (0_{\mathbb{K}} + 0_{\mathbb{K}}) \cdot u\\ &= 0_{\mathbb{K}} \cdot u + 0_{\mathbb{K}} \cdot u\\ &= 0_{\mathbb{K}} \cdot u + 0_{\mathbb{K}}\end{aligned}$$
$$0_{\mathbb{K}} \cdot u = O_{\mathbb{K}}$$

3. Si $\lambda = 0_{\mathbb{K}}$, cf. 2
   Si $\lambda \neq 0$, alors $\lambda^{-1} \in \mathbb{K}$,
$$\begin{aligned}0 &= \lambda^{-1} \cdot 0\\ &= \lambda^{-1}(\lambda \cdot u)\\ &= (\lambda^{-1} \cdot \lambda) \cdot u\\ &= 1 \cdot u\\ &= u\end{aligned}$$

□

Notation. *On note souvent :*
- $0_E = 0$ *et* $0_{\mathbb{K}} = 0$
- $u - v = u + (-v)$

Lemme 1. $\forall u, v, w \in E, u + w = v + w \Rightarrow u = v$

Démonstration.
$$\begin{aligned}v &= (u + w) - w\\ &= u + (w - w)\\ &= u + 0_E\\ &= u\end{aligned}$$
donc $v = u$ □

Remarque 2.

- *Pour* $\lambda \in \mathbb{K}$ *et* $u \in E$ $u \cdot \lambda$ *ne veut rien dire.*
- *Pour* $u, v \in E$ $u \cdot v$ *ne veut rien dire*

Exemple.
1/ Pour les lois de compositions internes et externes usuelles,

- $\mathbb{K}$ *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel*
- $\mathbb{K}^n$ *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel*
- *plus généralement, si* E_1 *et* E_2 *sont des* $\mathbb{K}$ *espaces vectoriels,* $E_1 \times E_2$ *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel.*

2/ Soit E*, un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel et* A*, un ensemble qualconque,*

- $\mathscr{F}(A,E)$*, l'ensemble des applications de* A *dans* E*, est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel*

$$\forall f_1, f_2 \in \mathscr{F}(A,E),\ \forall \lambda \in \mathbb{K},$$

$$\begin{aligned} f_1 + f_2 : A &\to E \\ a &\mapsto f_1(a) + f_2(a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda \cdot f_1 : A &\to E \\ a &\mapsto \lambda \cdot f_1(a) \end{aligned}$$

- *Si* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *et* $A = I \subset \mathbb{R}$*, un intervalle, on peut avoir* $\mathscr{F}(I,\mathbb{R})$
- *Si* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *et* $A = \mathbb{N}$*, on a* $\mathscr{F}(\mathbb{N},\mathbb{R})$*, l'ensemble des suites numériques*

3/ $\mathbb{K}[X]$*, l'ensemble des polynômes*
4/ $M_{n,p}(\mathbb{K})$*, l'ensemble des matrices à coefficient dans* $\mathbb{K}$*, à* n *lignes et* p *colonnes.*

Remarque 3. $\mathbb{R}^2$*, munit de la loi + usuelle et* $\lambda \cdot (x_1, x_2) = (\lambda \cdot x_1, 0)$
n'est pas un $\mathbb{K}$*-espace vectoriel, pourquoi ?*

3.2 Sous-espace vectoriel

Définition 3. *Soit* E*, un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel, et* $F \subset E$*.*
F *est un sous espace vectoriel de* E *s'il s'agit d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel pour les lois + et* $\cdot$ *de* E*.*

- $\forall u, v \in F,\ u + v \in F$
- $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall u \in F,\ \lambda \cdot u \in F$
- *+ et* $\cdot$ *vérifient les propriétés des lois de composition interne et externe des espaces vectoriels*

Propriété 1. F *est un sous-espace vectoriel de* E *si :*

- $F \neq \emptyset$
- $\forall u, v \in F,\ u + v \in F$
- $\forall u \in F,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda \cdot u \in F$

Démonstration. Pour montrer que les sous espaces vectoriels vérifient les axiomes A1 à B4 :
La vérification des axiomes A1, A2, B1, B2, B3 et B4 est immédiate.

Pour A3 :

$$\exists 0_F \subset F,\ \forall u \in F,\ u + 0_F = 0_F + u = u$$

Il suffit alors de montrer que $0_E \in F$,
or, $F \neq \emptyset$, donc, $\exists u \in F,\ 0 \cdot u = 0_E \in F$

Pour A4 :
Il suffit alors de montrer que $\forall u \in F,\ -u \in F$:
$-u = (-1) \cdot u$ où $-u \in F$ par hypothèse. □

Remarque 4.
- *On a vu que* $0_E \in F$
- *Les deux derniers points de la définition de sous-espace vectoriel sont équivalents à :*
$$\forall u, v \in F,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ \lambda u + \mu v \in F$$
ou encore à :
$$\forall u, v \in F,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda u + v \in F$$

Remarque 5. *Dans la plupart des cas, pour montrer qu'un ensemble (avec les lois $+, \cdot$) est un espace vectoriel, on montre qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel connu.*

Exemple.
- $\{0\}$ *et E sont des sous-espace vectoriels de E.*
- $F = \mathscr{C}(I, \mathbb{R})$*, l'ensemble des fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.*
F est sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(I, \mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions de I sur $\mathbb{R}$:
La fonction nulle est continue.
$\forall f, g \in \mathscr{C}(I, \mathbb{R}),\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \lambda f + \mu g$ *est continue, donc* $\lambda f + \mu g \in F$.
- $E = \mathbb{K}^n$ *et* $a_1, ..., a_n \in \mathbb{K}$
$F = \{(x_1, ..., x_n) \mid a_1 x_1 + ... + a_n x_n = 0\}$ *est un sous-espace vectoriel de E.*
- $\mathbb{K}[X]$*, les suites de $\mathbb{K}$ nulles à partir d'un certain rang, est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites de $\mathbb{K}$*

3.3 Sous espace engendré

Définition 4. *Une combinaison linéaire de $v_1, ..., v_p$ est un élément de la forme $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_p v_p$ avec $\lambda_1, ..., \lambda_p \in \mathbb{K}$.*

Exemple. *Dans $\mathbb{K}[X]$, une combinaison linéaire est un polynôme.*

Remarque 6. *Une combinaison linéaire de $(v_i)_{i \in I}$ est une combinaison linéaire au sens précédent d'une sous famille finie.*

Exemple. *Dans $\mathbb{K}[X] = \{1, X, X^2, ..., X^n, ...\}$, une combinaison linaire est un polynôme.*

Définition 5. *Soient $v_1, ..., v_p \in E$*

$vect(v_1, ..., v_p) = \{$*combinaisons linéaires de* $v_1, ..., v_p\} = \{\sum_{i=1}^{p} \lambda_i v_i\ /\ \lambda_1, ..., \lambda_p \in \mathbb{K}\}$

Proposition 2. *$vect(v_1, ..., v_p)$ est un sous espace vectoriel de E.*

Exemple. *Cas particulier :*
$p = 1$, $vect(v)$ est alors une droite vectorielle.
$p = 2$,

3.4 Intersections

Proposition 3. *Soient F_1, F_2 des sous-espaces vectoriels de E, alors, $F_1 \cap F_2$ est un sous espace vectoriel :*

$$F_1 \cap F_2 = \{x \in E \ / \ x \in F_1 \ \ et \ \ x \in F_2\}$$

Démonstration.

- $0 \in F_1$ et $0 \in F_2$, donc $0 \in F_1 \cap F_2$
  l'intersection est donc non vide
- Soient $u, v \in F_1 \cap F_2$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$
  On montre que $\lambda u + \mu v \in F_1 \cap F_2$
  $\lambda u + \mu v \in F_1$ car F_1 est un sous espace vectoriel
  $\lambda u + \mu v \in F_2$ car F_2 est un sous espace vectoriel

□

application :
L'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires homogène (sans second membre) à n inconnues (et p équations) est un sous espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.

Démonstration. Intersection des sous espaces vectoriels est solution de chaque équations □

Remarque 7. *Attention,*

- *En général, l'union de sous espaces vectoriels n'est pas un sous espaces vectoriels (sauf cas triviaux)*
- *Le complémentaire d'un sous-espace vectoriel n'est jamais un sous-espace vectoriel (étant privé du 0)*

3.5 Somme de sous espaces vefctoriels

Définition 6. *Soient F_1, F_2, des sous espaces vectoriels, on définit :*

$$F_1 + F_2 = \{f_1 + f_2 \ / \ f_1 \in F_1, \ f_2 \in F_2\}$$

Remarque 8. *$F_1 + F_2$ est un sous-espace vectoriel de E*

Exemple.

Proposition 4. *Si $F_1 = vect(v_1, ..., v_{p_1})$ et $F_2 = vect(w_1, ..., w_{p_2})$, alors,*

$$F_1 + F_2 = vect(v_1, ..., v_{p_1}, w_1, ..., w_{p_2})$$

Démonstration. Soit $u \in F_1 + F_2$

$$\exists f_1 \in F_1, \exists f_2 \in F_2, \ / \ u = f_1 + f_2$$
$$\exists f_1 \in F_1, \exists f_2 \in F_2, \ / \ u = f_1 + f_2$$

□

Remarque 9. *$F_1 - F_2$ n'est pas intéressant :* $\{f_1 + (-f_2) \ / \ f_1 \in F_1, \ f_2 \in F_2\} = F_1 + F_2$

Remarque 10. $F_1 + F_2 \neq F_1 \cup F_2$

4 Familles libres, génératrices et bases

4.1 Familles libres, génératrices

Définition 7. *On dit que $(v_1, ..., v_p)$ est une famille génératrice de E si $vect(v_1, ..., v_p) = E$*

Vocabulaire. *E est dit finiement engendré s'il existe une famille génératrice finie.*

Remarque 11. *intuitivement, $(v_1, ..., v_p)$ est génératrice si elle "voit" tous les éléments de E.*

Remarque 12. *A priori, il peut y avoir plusieurs manières d'écrire un élément de E*

Exemple. *Pour $E = \mathbb{R}^2$, $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$, $e_3 = (1,1)$,*
on a $e_3 = e_1 + e_2$ la famille $\{e_1, e_2, e_3\}$ est génératrice.

calcul pratique :
trouver une famille génératrice d'un sous espace vectoriel défini par des équations.

Exemple. $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y + z = 0$
On résoud le système

Proposition 5. *Soit E de dimension finie, et F sous espace vectoriel de E.*

1. *F est de dimension finie et* $\dim F \leq \dim E$
2. $\dim F = \dim E$ *si et seulement si* $F = E$

Démonstration.

1. Semble évident mais ne l'est pas.
2. Si $\dim F = \dim E$,
   on pose $\{f_1, ..., f_n\}$, base de F, est aussi une famille libre de E avec $n = \dim E$ éléments dans une base de E.
   Pour la réciproque, si $\dim F \neq \dim F$, $E \neq F$

□

Remarque 13. *$f_1, ..., f_k$ de F sous espace vectoriel de E.*
$f_1, ..., f_k$ est une famille libre de F si et seulement si c'est une famille libre de E

Remarque 14. *Le second point est utile en pratique pour montrer que deux espaces vectoriels F et G sont égaux, on montre que $F \subset G$ et que les deux sont de même dimension.*

4.2 Exemples de dimensions (et bases)

— $\mathbb{K}^n$
  base canonique : $e_i = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$ ou 1 se trouve à la i-ème place.
  $(e_1, ..., e_n)$ est une base avec $\dim \mathbb{K}^n = n$
— Soient E, F, deux espaces vecteurs de dimensions finies
  $E \times F$ est de dimension finie $\dim E + \dim F$
  Soit $(e_1, ..., e_n)$ base de E
  Soit $(f_1, ..., f_n)$ base de F

$$e_i^{\sim} = (e_i, 0) \in E \times F$$
$$f_j^{\sim} = (0, f_j) \in E \times F$$

Exercice. $(e_1^{\sim}, ..., e_n^{\sim}, f_1^{\sim}, ..., f_m^{\sim})$

Théorème 1. *On considère un système d'équations linéaires homogène à n inconnues et k équations.*
On suppose que ce système est échelonné, alors l'ensemble des solutions est de dimension $n - k$.

Démonstration.

Remarque 15. *Quitte à renommer les inconnues, on peut supposer que les inconnues principales sont $x_1, ..., x_k$, les autres sont des variables libres.*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + ... = 0 \\ a_{22}x_2 + ... = 0 \\ \quad ... \\ a_{kk}x_k + ... = 0 \end{cases}$$

Alors, les solutions sont de la forme $(x_1, ..., x_n)$ avec, pour $j > k$, on pose arbitrairement $x_j = \lambda_j \in \mathbb{K}$

$$x_k = \alpha_{kk+1}\lambda_{k+1} + ... + \alpha_{kn}\lambda_n$$
$$...$$
$$x_1 = \alpha_{1,k+1}\lambda_{k+1} + ... + \alpha_{1n}\lambda_n$$

Donc,

$$(x_1, ..., x_n) = \lambda_{k+1}()$$

□

Théorème 2. *Soient F, G, deux sous espace vectoriel de E (de dimensions finies), alors,* $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$

Démonstration. "Idée : construire une base sympathique de $F + G$"
— $F \cap G$ est de dimension finie ($F \cap G$ étant sous espace vectoriel de F)
  on pose alors $(e_1, ..., e_n)$ base de $F \cap G$.
— $(e_1, ..., e_n)$ est une famille libre de F
  se complète en une base $(e_1, ..., e_n, f_1, ..., f_s)$ de F

□

4.3 rang d'une famille de vecteurs

Définition 8.

$$rg(v_1,...,v_p) = \dim vect(v_1,...,v_p)$$

Propriété 2. *On a*

- $rg(v_1,...,v_p) \leq dimE$
- $rg(v_1,...,v_p) \leq p$
- $rg(v_1,...,v_p) = dimE$ *si et seulement si la famille est génératrice.*
- $rg(v_1,...,v_p) = 1$ *si et seulement si la famille est libre.*

Démonstration. — $vect v_1,...,v_p$ est sous espace vectoriel de E.

- par définition, $(v_1,...,v_p)$ engendre $vect(v_1,...,v_p)$

- $vect(v_1,...,v_p) = E$ si et seulement s'ils sont monodimensionels
- $rg(v_1,...,v_p) = 1$ si et seulement si $v_1,...,v_p$ est génératrice d'un sous espace vectoriel de dimension p
  si et seulement si $v_1,...,v_p$ est une base de $vect(v_1,...,v_p)$
  si et seulement si $v_1,...,v_p$ est libre

□

Remarque 16. $vect(v_1,...,v_p)$ *ne change pas (le rang non plus) si :*

- *on permute deux vecteurs*
- *on multiplie un vecteur par un scalaire* $\lambda \in \mathbb{K}^*$
- *on ajoute à un vecteur un multiple d'un autre*

On peut alors appliquer l'algorithme de Gauss au calcul du rang pour des vecteurs de $\mathbb{K}^n$.
Tout d'abord, on échelonne une famille de vecteur.
Une fois que la famille est échelonnée, le rang correspond au nombre de vecteurs non nuls.

Remarque 17. *Cette famille de vecteurs est une base du sous espace vectoriel initial.*

4.4 Somme directe

Soient F et G des sous espaces vectoriels de E

$$F + G = \{f + g \mid f \in F,\ g \in G\}$$

a priori pour $u \in F + G$ la paire $(f, g) \in F \times G\ /\ u = f + g$ n'est pas nécessairement unique.

Définition 9. *F et G sont en somme directe si et seulement si*

$$\forall u \in F + G,\ \exists!(f, g) \in F \times G,\ u = f + g$$

Notation. *On note alors $F \oplus G$*

Remarque 18. *$F \oplus G$ désigne à la fois le sous espace vectoriel $F+G$ et la propriété selon laquelle ils sont en somme directe.*

Proposition 6. *Les énoncés suivants sont équivalents :*
- *F et G sont en somme directe*
- *$0 = f + g$ avec $f \in F$ et $g \in G$ implique $f = g = 0$*
- *$F \cap G = \{0\}$*
- *En réunissant une base de F et une base de G, on obtient une base de $F+G$*
- *$\dim(F+G) = \dim F + \dim G$*

(où les deux dernières propositions ne sont vraies qu'en dimension finie)

Démonstration. □

Définition 10. *F et G sont supplémentaire si $F \oplus G = E$*

Remarque 19. *Il peut être intéressant de "découper" l'espace en sous espaces plus simples.*

Remarque 20. *Tout sous espace vectoriel F de E admet un supplémentaire.*

Remarque 21. *Les supplémentaires ne sont pas uniques, on ne parle donc pas "du" supplémentaire.*

Cas général :
Soient $F_1, ..., F_k$, sous espaces vectoriels de E.
$F_1, ..., F_k$ sont en somme directe si :

$$\forall u \in F_1 + ... + F_k,\ \exists!(f_1, ..., f_k) \in F_1 \times ... \times F_k \ /\ u = f_1 + ... + f_k$$

Proposition 7. *Les propositions suivantes sont équivalentes :*
- $\bigoplus_{i=1}^{k} F_i$
- $\forall i \in [1,k],\ f_i \in F_i,\ \sum_{i=1}^{k} f_i = 0 \Rightarrow \forall i,\ f_i = 0$
- *en réunissant un base de chaque F_i, on obtient une base de la somme*
- $\dim \sum F_i = \sum \dim F_i$

Troisième partie
Applications linéaires

5 Définitions et exemples

Définition 11. *Soient E et E', deux $\mathbb{K}$ espaces vectoriels.*
$f : E \to E'$ est linéaire si :

$$\forall u, v \in E,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)$$

Remarque 22. *Dans ce cas, on a forcement $f(0) = 0$.*

Vocabulaire. — *Si $E = E'$, f est un endomorphisme.*
— *Si f est bijective, f est un isomorphisme.*

Remarque 23. *Si $f : E \to E'$, linéaire, est bijective,*
$f^{-1} : E' \to E$, est aussi linéaire

Exemple.

6 Image, noyau et image d'une famille de vecteurs

Notation. *$\mathscr{L}(E,E') = \{f : E \to E',\ f$ linéaire$\}$ est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel.*

Définition 12. *Soit $f \in \mathscr{L}(E,E')$*

— *$f(E)$ est un sous espace vectoriel de E', noté $Im\ f$, prononcé image de f.*
— *$\{x \in E\ /\ f(x) = 0\}$ est un sous espace vectoriel de E, noté $Ker\ f$, prononcé noyau de f.*
— *on note $rg(f) = dim\ Im\ f$ (pour une dimension finie)*

Démonstration. Soient $u', v' \in f(E)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.
Montrons que $\lambda u' + \mu v' \in E$ □

Remarque 24. *Si $E = vect(e_1, ..., e_n)$, alors $f(E) = vect(f(e_1), ..., f(e_n))$*
Donc $rg(f) = rg(f(e_1), ..., f(e_n))$

Proposition 8. *$f : E \to E$ est injective si et seulement si $Ker\ f = \{0\}$*

Rappel 1. *$f : E \to E'$ est injective si et seulement si $\forall u, v \in E,\ f(u) = f(v) \Rightarrow u = v$*
Dont la contraposée est $\forall u, v \in E,\ u \neq v \Rightarrow f(u) \neq f(v)$

Démonstration. Si f est injective , □

Proposition 9. *Caractérisation d'une application linéaire par l'image d'une base.*
Soit $(e_1, ..., e_n)$, une base de E, soient $b_1, ..., b_n \in E'$

$$\exists! f \in \mathscr{L}(E,E'),\ \forall i,\ f(e_i) = b_i$$

Par ailleurs :

1. *$(b_1, ..., b_n)$ est libre si et seulement si f est injective*
2. *$(b_1, ..., b_n)$ est génératrice si et seulement si f est surjective*
3. *$(b_1, ..., b_n)$ est une base si et seulement si f est un isomorphisme*

Démonstration. Analyse :
Supposons que f existe :

□