Théorie des groupes

Table des matières

Première partie

Séries numériques

On considère une suite (réelle ou complexe) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on étudie la somme infinie $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Remarque 1. *Question :*
Est-ce que cette somme est bien définie, c'est-à-dire appartient à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exemple.
- $u_n = 1$, $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = +\infty$
- $u_n = n$, $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = +\infty$
- $u_n = \frac{1}{n}$, $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = +\infty$
- $u_n = \frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \frac{\pi^2}{6}$

1 Quelques rappels et compléments sur les suites

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge s'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N$, $|u_n - l| < \varepsilon$.
On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy si $\forall \epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N$, $\forall m \geq N$, $|u_n - u_m| < \epsilon$.

Proposition 1. *Toute suite convergente est de Cauchy.*

Proposition 2. *Dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$, toute suite de Cauchy est convergente.*

On dit que $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) est un espace métrique complet.

Équivalents :
Si $u_n = n^2$ et $v_n = n^3$, on a $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
Cependant, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est plus rapide que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Les équivalents servent à comparer des vitesses de convergence.

Définition 1. *Deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont équivalentes si $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$.*
On note $u_n \sim v_n$

Dans ce cas, les deux suites ont la même vitesse de convergence.
Cela n'a qucun intérêt que si (u_n) tend vers 0, $+\infty$ ou $-\infty$

Exemple. *Si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, alors,*

— $e^{a_n} - 1 \sim a_n$
— $e^{a_n} - 1 \sim a_n$

Deuxième partie
Séries numériques

On prend une suite réelle (ou complexe) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
La somme infinie $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ est la série de terme général u_n.

On lui associe la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.
On dit que la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$ (elle a une limite et cette limite est réelle). Sinon, la série diverge.

Si la série converge, son reste est la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ et $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}$ est la somme de la série.
On a $S_n + R_n = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k$.
Notons que $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n = 0$.

Exercice. *(Á savoir), la série géométrique $u_n = a^n$ avec $a \in \mathbb{R}$,*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$$

— *Si $a = 1$, on a $u_n = 1$ pour tout entier naturel n, donc $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge.*
— *Si $a = -1$, $S_n = \frac{1-(-1)^{n+1}}{2}$ n'a pas de limite et donc $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ diverge.*
— *Si $-1 < a < 1$ (ou $|a| < 1$), $S_n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$*

En résumé, $\sum\limits_{n\geq 0} a^n$ converge si et seulement si $|a| < 1$ et si $|a| < 1$, alors $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$

Proposition 3. *Critère de Cauchy :*
$\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge si et seulement si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. c'est-à-dire $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N, \forall$, $\forall m \geq N$, $|S_n - S_m| < \varepsilon$ ou encore

Application :
La série harmonique $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n}$.
On montre que cette série est divergente.
On note $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

Pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2n}..$$

2 Séries à termes positifs

On suppose que $u_k \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (ou du moins à partir d'un certain rang). Dans ce cas, la suite des sommes partiels $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive et croissante. Par conséquent, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si elle est majorée. Dans le cas contraire, on a $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$.

Théorème 1. $\sum\limits_{k\geq 0} u_n$ *converge si et seulement si* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est majoré.*

2.1 Comparaison entre séries et intégrales généralisées

Théorème 2. *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, une fonction décroissante et positive. Alors, la suite* $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $U_n = \sum\limits_{k=0}^{n} f(k) - \int_0^n f(t)dt$ *converge.*
Par conséquent, la série $\sum\limits_{n\geq 0} f(n)$ *et l'intégrale* $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ *ont la même nature.*

Démonstration. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$f(k+1)\cdot 1 \leq \int_k^{k+1} f(t)dt \leq f(k)\cdot 1$$

On montre alors que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0.
On a :

$$\begin{aligned} U_n &= f(n) + \sum_{k=0}^{n-1} f(k) - \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} f(t)dt \\ &= f(n) + \sum_{k=0}^{n-1} (f(k) - \int_k^{k+1} f(t)dt) \end{aligned}$$

avec $f(n) \geq 0$ et $f(k) - \int_k^{k+1} f(t)dt \geq 0$.
Donc, $U_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On montre maintenant que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

$$\begin{aligned} U_{n+1} - U_n &= \sum_{k=0}^{n+1} f(k) - \int_0^{n+1} f(t)dt - \sum_{k=0}^{n} f(k) \\ &= f(n+1) - \int_n^{n+1} f(t)dt \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

Donc $U_{n+1} \leq U_n$.

En résumé, on a :

$$\int_0^n f(t)dt + U_n = \sum_{k=0}^{n} f(k)$$

avec $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = l \in \mathbb{R}$

Si $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge, alors, $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^n f(t)dt \in \mathbb{R}$ et donc $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} f(k) \in \mathbb{R}$ Si $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ diverge, alors, $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^n f(t)dt = +\infty$ et donc $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} f(k) = +\infty$

Réciproquement, si la somme converge, alors l'intégrale converge et si la somme diverge, alors l'intégrale diverge.

□

Application :
Pour les séries de Riemann, si $\alpha \in \mathbb{R}$,
$\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

2.2 Critères de comparaison

On considère deux suites poritives $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Théorème 3. *On suppose que* $0 \leq u_n \leq v_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *alors :*

— *Si* $\sum_{n\leq 0} v_n$ *converge alors* $\sum\limits_{n\leq 0} u_n$ *converge*

— *Si* $\sum_{n\leq 0} v_n$ *diverge alors* $\sum\limits_{n\leq 0} u_n$ *diverge*

Démonstration.

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

$$S'_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$$

On a $0 \leq S_n \leq S'_n$

$$\sum$$

□

Corrolaire 1. *S'il existe a et b strictements positifs tels que* $a \leq \frac{u_n}{v_n} \leq b$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *alors* $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ *et* $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ *ont la même nature.*

Démonstration.

$$av_n \leq u_n \leq bv_n$$

□

Corrolaire 2. *Si on a* $u_n \sim v_n$*, alors* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *et* $\sum_{n\geq 0} v_n$ *ont la même nature.*

De plus, si $\sum_{n\geq 0} u_n$ *et* $\sum_{n\geq 0} v_n$ *convergent, alors les restes sont équivalents.*
$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \sim R'_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} v_k$
Dans le cas où elles divergent, les sommes partielles sont équivalentes :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \sim S'_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$$

Démonstration. Si $u_n \sim v_n$, alors, $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$
Donc, $\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \leq N,\ 0,5 \leq \frac{u_n}{v_n} \leq 1,5$
D'où $0,5 v_n \leq u_n \leq 1,5 v_n$ □

Exemple. —