Électromagnétisme

Table des matières

1 informations utiles

Première partie

Charge élémentaire, densité de charges

2 Introductions

Proposition 1.

— *les corps électrisés exercent des forces*
— *l'électrisation peut être transféré d'un corps à l'autre*
— *par convention, l'électron possède un charge négative*
— *deux corps de même électrisation se repoussent*
— *deux corps d'électrisation différente s'attirent*
— *la charge électrique est une grandeur extensive*
— *invariance de la charge électrique*
— *la charge est conservative*

3 Répartition de charges, densité de charges

Dans la matière, des quantités astronomiques de charges impliquent qu'on introduise la notion de densité de charges densités de charges volumiques, surfaciques, linéiques, ponctuelles

3.1 Densité volumique de charges

Le volume dV contient dQ charges
Soit ρ_c, le nombre de charges par unité de volume
on a donc $[\rho_c] = C \cdot m^{-3}$
$dQ = \rho_c dV$ On appelle ρ_c la densité volumique de charges

$$Q \int dQ = \iiint_V \rho_c dV$$

Si ρ_c est constant, alors $Q = \rho_c \cdot V$ avec V, le volume de système total.
En général, ρ_c varie dans l'espace :

$$\rho_c = \rho_c(x, y, z)$$
$$\rho_c = \rho_c(r, \vartheta, \varphi)$$
$$\rho_c = \rho_c(\rho, \varphi, z)$$

3.2 Densité surfacique de charges

Les charges sont ici distribuées sur une surface.
On introduit la densité surfacique de charges, notée σ Soit dQ, les charges sur dS
$dQ = \sigma dS$

$$Q = \iint \sigma dS$$

vaut σS si σ est constant
sinon il faudra connaitre $\sigma(x, y, z)$ et l'intégrer

$$[\sigma] = C \cdot m^{-2}$$

3.3 Densité linéique de charges

Les charges sont ici distribuées sur une ligne (système dont deux des dimensions sont négligeables devant la troisième)
On introduit la densité linéique de charges, notée λ
Soit dQ, les charges sur dL

$$dQ = \lambda dL$$
$$Q = \int \lambda dL$$

vaut λL si λ est constant
sinon il faudra intégrer $\lambda(x, y, z)$

$$[\lambda] = C \cdot m^{-1}$$

3.4 Charges ponctuelles

Pour les charges ponctuelles, on ne définit pas de densité de charges.

Deuxième partie

Loi de coulomb et champs et potentiels électrostatiques

4 Loi de Coulomb

dans la charge ponctuelle : décrit la relation entre le potentiel, la charge et la force de manière empirique : on s'aperçoit que la force qui s'exerce entre les deux charges est inversement proportionnelle au carré de la distance la force est portée par la droite donnée par les deux charges additivité vectorielle des forces si deux charges de même nature, elles s'attirent de nature différentes, elle se repoussent

vrai truc : repose sur des constatations expérimentales :

— on a additivité vectorielle des actions entre charges ponctuelles :
Si $F_{A\to C}$ est la force exercée par q_A sur q_C
Si $F_{B\to C}$ est la force exercée par q_B sur q_C
alors $F_{A\to C} + \vec{F_{B\to C}}$ est l'action simultanée de q_A et q_B sur q_C

— on a opposition des actions réciproques

$$\vec{F_{A\to B}} = -\vec{F_{B\to A}}$$

— expérimentalement, on met en évidence que $||\vec{F_{A\to B}}|| = \frac{\varphi(AB)}{AB^2}$ où $\varphi(AB)$ est un scalaire indépendant des positions de A et B

— expérimentalement, on met en évidence que $\vec{F_{A\to B}}$ est porté par $\vec{AB}$

$$\vec{F_{A\to B}} = \frac{\varphi(AB)}{AB^2}\frac{\vec{AB}}{||\vec{AB}||}$$

le dernier rapport est alors $\vec{u}$, vecteur unitaire de $\vec{AB}$

— on montre expérimentalement que

$$\frac{F_{A\to B}}{q_A} = \frac{F_{A'\to B}}{q'_A}$$

La comparaison des forces permet la mesure des charges

— on a l'expression de la force de Coulomb, force électrostatique qui s'exerce entre deux charges q_A et q_B placées dans le vide aux points A et B :

$$\vec{F_{A\to B}} = \frac{q_A \cdot q_B}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{u}}{AB^2}$$

où ε_0 est la permittivité électrique du vide
$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \approx 9\cdot 10^9$ dans le SI

La force électrique est très grande devant la force gravitationnelle à très petite échelle

5 Champs électrostatique

5.1 Champs créé par une charge ponctuelle

Soit q_A au point A, si on approche $q_{B_1}, q_{B_2}, \ldots$ du point B :

$$\frac{F_{A \vec{\to} B_1}}{q_{B_1}} = \frac{F_{A \vec{\to} B_2}}{q_{B_2}} = \ldots$$

Ce rapport dépend de q_A et du point B.
Ce rapport est appelé champs électrostatique (ou champs électrique) créé par la charge q_A au point B.

$$\vec{E}_A(\vec{B}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_A}{AB^2} \vec{u}$$

est l'expression du champs électrostatique, son unité est le $V \cdot m^{-1}$

$$[E] = V \cdot m^{-1}$$

en général, on a la notation suivante :
avec P, le point où se trouve la charge
et M, le point dans lequel on observe le champ

$$\vec{E}_P(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{PM}}{PM^3}$$

avec $\frac{\vec{PM}}{PM^3} = \frac{1}{PM^2} \frac{\vec{PM}}{PM}$

Remarque 1. *Si q_M se trouve en M*
et $F_{P \vec{\to} M} = q_M \vec{E}_P(M)$, l'expression de la loi de Coulomb
La mesure de la force correspond à la mesure du champs électrostatique

Remarque 2. *$E_P(M)$ n'est pas définit en sa source car $\frac{1}{PM^2} \to \infty$ Correspond à la limite de validité du concept de charge ponctuelle*

5.2 Champ créé par un ensemble de charges ponctuelles

q en M est soumis à l'action de N charges q_i aux points P_i :

$$F(\vec{M}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} q_i \frac{\vec{P_i M}}{P_i M^3}$$

$$\Rightarrow E(\vec{M}) = \frac{F(\vec{M})}{q} = \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{P_i M}}{P_i M^3}$$

5.3 Champ créé par une distribution quelconque de charges

Soit Σ, une distribution de charges volumique de charges de densité volumique ρ_c située dans un volume V.
Soit M, un point de l'espace situé assez loin de la distribution Σ de charges.
dq, la charge élémentaire dans dV est égale à $dq = \rho_c dV$.
Le champ élémentaire $d\vec{E(M)}$ créé par dq au point P s'écrit :

$$\begin{aligned} d\vec{E(M)} &= \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{PM}}{PM^3} \\ &= \frac{\rho_c(P)dV(P)}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{PM}}{PM^3} \end{aligned}$$

Le champ $\vec{E(M)}$ créé par la distribution Σ s'écrit :

$$\vec{E(M)} = \int d\vec{E(M)} = \iiint_V \frac{\rho_c(P)dV}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{PM}}{PM^3}$$

L'intégration porte sur les variables qui caractérisent le point P (appelé point potentiant ; M, fixe, étant le point potentié).
Si $\vec{OM} = \vec{r}$ et $\vec{OP} = \vec{r'}$, alors :

$$\vec{E(M)} = \iiint_V \frac{\vec{r} - \vec{r'}}{4\pi\varepsilon_0 ||\vec{r} - \vec{r'}||^3}\rho_c(\vec{r'})dV(\vec{r'})$$

De même, si la distribution de charges est surfacique :

$$\vec{E(M)} = \int d\vec{E(M)} = \iint_S \frac{\sigma(P)dS}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{PM}}{PM^3}$$

De même, si la distribution de charges est linéique :

$$\vec{E(M)} = \int d\vec{E(M)} = \int_l \frac{\lambda(P)dl}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{PM}}{PM^3}$$

5.4 Lignes de champ

Le champ est un vecteur que l'on peut visualiser à l'aide de lignes de champ.
Ces lignes de champ correspondent à l'ensemble des courbes orientées telles que leur tangente en chaque point ait la même direction et le même sens que le champ.

Troisième partie

Énergie potentielle et Potentiel

6 Énergie potentielle d'interaction d'une particule chargée avec un système de charges

Soit q_i, des charges aux points p_i, elles exercent sur la charge q placée en M, une force $\vec{F}$ telle que :

$$\vec{F} = q \sum_i \frac{q_i \vec{P_i M}}{4\pi\varepsilon_0 P_i M^3}$$

6.1 Travail élémentaire de la force électrostatique

Le travail $\delta\tau$ élémentaire de la force $\vec{F}$ au cours d'un déplacement $d\vec{r}$ de q qui se situe en M s'écrit :

$$\delta\tau = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \sum_i \frac{q_i \vec{P_i M}}{P_i M^3} \cdot d\vec{r}$$

6.2 Énergie potentielle associée

Le travail élémentaire de la force électrostatique apparaît comme l'opposé de la différentielle d'une fonction notée ε_{p_e} et appelée énergie potentielle d'interaction de la charge q avec le système $\{q_i\}$
On écrit $\delta\tau = -de\varepsilon_{p_e}$ avec $\varepsilon_{p_e}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{||\vec{r}-\vec{r}_i||} + C$ où C est une constante.

Par conséquent, le travail apparaît comme la variation d'une fonction de la position.
Le travail τ ne dépend pas des différents chemins suivis par la particule entre les positions initiales et finales.

Remarque 3. *On dit que le force est à "circulation" conservative.*
On dit aussi que cette force dérive d'une énergie potentielle.

Il en résulte que $\oint_{\mathscr{C}} \vec{F} d\vec{r} = 0$ Pour tout chemin $\mathscr{C}$ emprunté.

$$\varepsilon_{p_e} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{||\vec{r} - \vec{r}_i} + C$$

7 Potentiel créé par un ensemble de charges

7.1 Potentiel créé par un ensemble de charges ponctuelles

Par définition, le potentiel créé par le système de charges $\{q_i\}$ aux points P_i en un point M est l'énergie potentielle par unité de charge en $M(\vec{r})$.

On le note V (plus précisément $V(M)$ ou $V(\vec{r})$).

$$\begin{aligned} V(\vec{r}) &= \frac{\varepsilon_{p_e}(\vec{r})}{q} \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{||\vec{r}-\vec{r}_i||} \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{P_iM} \end{aligned}$$

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{PM}$$

Remarque 4. *Contrairement à la mécanique du point, ε_{p_e} et V ne sont pas toujours du même signe (la charge peut être négative).*
L'unité de potentiel est le Volt.

7.2 Cas de distribution continue de charges

$$V(M) = \iiint \frac{\rho_c d\mathcal{V}}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{PM}$$

Si on a une distribution volumique de charges de densité ρ_c

$$V(M) = \iint \frac{\sigma dS}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{PM}$$

Si on a une distribution surfacique de charges de densité σ

$$V(M) = \int \frac{\lambda dl}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{PM}$$

Si on a une distribution linéique de charges de densité λ

8 Surfaces équipotentielles

Il s'agit de l'ensemble des points de l'espace tels que $V(\vec{r})$ est constant.
Par exemple, pour une charge ponctuelle, les surfaces équipotentielles sont des sphères.

On peut noter que les lignes de champs sont perpendiculaires aux surfaces équipotentielles le champ E est perpendiculaire aux surfaces équipotentielles et que le champ est dirigé selon les potentiels décroissants

9 Relations entre $\vec{E}$ et V

9.1 Forme intégrale

On a vu que $\delta\tau = \vec{F}d\vec{r} = -d\varepsilon_{p_e}$
Le long d'un chemin entre deux points A et B : $\varepsilon_{p_e}(A) - \varepsilon_{p_e}(B) = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r}$. En introduisant le fait que $V = \frac{\varepsilon_{pe}}{q}$ et $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$, on a :

$$V(A) - V(B) \neq \int_B^A dV = \int_B^A -\vec{E}d\vec{r} = \int_A^B \vec{E}d\vec{r}$$

$$\Rightarrow V(A) - V(B) = \int_B^A -\vec{E}d\vec{r}$$

Remarque 5. *Si $A = B$, $\oint_{\mathscr{C}} \vec{E}d\vec{l} = 0$ où $\mathscr{C}$ est une courbe fermée.*
$\vec{E}$ est alors dit à circulation conservative.

Théorème 1. *de Stoke*

$$\iint r\vec{o}t\vec{E}dS = \oint_{\mathscr{C}} \vec{E}d\vec{l}$$

ici : $\oint_{\mathscr{C}} \vec{E}d\vec{l} = 0 \Rightarrow R\vec{o}t\vec{E} = 0$

9.2 Forme locale

On a vu $U = V(A) - V(B) = \int_B^A \vec{E}d\vec{r}$
D'où $dV = -\vec{E}d\vec{r}$

$$\vec{E}\left|\begin{array}{l} E_x \\ E_y \\ E_z \end{array}\right.$$

$$\vec{l}\left|\begin{array}{l} dx \\ dy \\ dz \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow dV = -E_x dx - E_y dy - E_z dz = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz$$

$$\Rightarrow \left|\begin{array}{l} E_x \\ E_y \\ E_z \end{array}\right. = \left|\begin{array}{l} -\frac{\partial V}{\partial x} \\ -\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} \end{array}\right. = -gra\vec{d}(V)$$

$$\Rightarrow \vec{E} = -gra\vec{d}(V)$$

Remarque 6. *Soit deux points A et B très proches*

$$\int_B^A dV = \int_B^A -\vec{E}d\vec{r}$$

appartient au même équipotentiel que $V(A) = V(B)$

$$\begin{aligned} dV &= -\vec{E}d\vec{r} \\ &= -\vec{E}\cdot\vec{AB} \\ &= 0 \end{aligned}$$

On en déduit que $\vec{E}$ et $\vec{AB}$ sont orthogonaux.

Quatrième partie

Propriétés de symétrie de $\vec{E}$

10 Invariance des lois de l'électrostatique au cours d'un déplacement

L'espace considéré sera homogène et isotrope.
Soit Σ, un système physique (ici, on considère un ensemble de charges)
Σ crée $E(\vec{M})$ en tout point M de l'espace.
L'espace étant homogène homogène et isotrope, si l'on fait subir une transformation géométrique T à Σ (rotation, translation, symétrie), les effets effets subissent la même transformation.
Si Σ crée $E(\vec{M})$ en M,
alors $\Sigma' = T(\Sigma)$ créera $E'(\vec{M'})$ en M' où $M' = T(M)$
On écrit $E'(\vec{M'}) = T(E(\vec{M}))$.
En général, $E'(\vec{M'}) \neq E(\vec{M})$

11 Influence de la symétrie de la source

11.1 Principe de Curie :

Théorème 2. *"Les effets ont au moins la symétrie des causes."*

— Dans le cas général précédent, T ne laissait pas le système invariant :
$\Sigma' = T(\Sigma)$ ne coïncide pas avec Σ.

— En revanche, si le système T laisse le système invariant, alors :
$\Sigma' = \Sigma$ et les effets de Σ et Σ' se recouvrent :

$$\begin{cases} \forall M,\ E'(\vec{M}) = E(\vec{M}) \\ E'(\vec{M'}) = E(\vec{M'}) \end{cases}$$

11.2 invariances des sources par translation

Il s'agit d'une distribution idéalisée :
Dans la réalité , une translation ne peut pas être une opération de recouvrement.

Exemple. *Soit un fil rectiligne infini d'axe Oz chargé avec une densité volumique de charge* ρ_c
On translate cette distribution de charges parallèlement à l'axe Oz d'un vecteur $\vec{T}$ *quelconque.*
Le fil étant infiniment long suivant Oz et la translation étant parallèle à l'axe Oz, les deux distributions se recouvrent.
Ainsi, $\rho'_c(I) = \rho_c(I)$
$M \mapsto M'$ *et* $\vec{MM'} = \vec{T}$
$E(\vec{M'}) = E(\vec{M})$
Par conséquent, on a que pour tout z_0, $E(x, \vec{y, z} + z_0) = E(\vec{x, y}, z)$ $\vec{E}$ *ne dépend donc pas de la variable z*

11.3 invariance des sources par rotation autour d'un axe

Soit une distribution Σ de charges uniformément réparties telle que toute section perpendiculaire à une direction est circulaire.
Effectuons une rotation d'angle φ autour d'un axe.
$\rho'(I) = \rho(I)$
d'où $E'(\vec{M'}) = E(\vec{M})$
Par conséquent, $\forall \varphi_0,\ E(r, \vec{\theta}, \varphi) = E(r, \theta, \vec{\varphi} + \varphi_0)$
$\vec{E}$ est donc indépendant de la variable φ par le principe de Curie.

11.4 Lois physiques et symétries par rapport à un plan

Soit une opération de symétrie par rapport à un plan.
Soit une charge q, placée au point P et une charge M où je regarde le champ.
Faisons un symétrie par rapport au plan (xOy)

$$E(\vec{M'}))\frac{q'}{4\pi\varepsilon_0}\frac{P'\vec{M'}}{P'M'^3}$$

$$P'\vec{M'}_{x \text{ ou } y} = P\vec{M}_{x \text{ ou } y}$$

$$P'\vec{M'}_z = P\vec{M}_z$$

Ainsi :

$$E'_y(M') = E_y(M)$$

$$E'_z(M') = -E_z(M)$$

11.5 Distribution ayant un plan de symétrie de charges

Soit une distribution de charges ayant un plan de symétrie.
alors,

$$\rho'(P) = \rho(P)$$

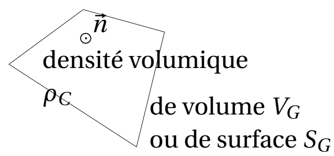
Si alors $Em(M) = 0$, le champ en un point M d'un plan de symétrie de Σ est contenu dans le plan.

11.6 Distribution de charges dans un plan d'antisymétrie

Par un raisonnement identique au précédent, on montre que $E(\vec{M} \in P) \subset P$
En un point d'un plan d'antisymétrie, le champ est perpendiculaire au plan.

12 Théorème de Gauss local (équation locale de Maxwell-Gauss)

Soit une surface fermée S_G (nommée surface de Gauss)



$$Q_{int_{V_G}} = \iiint_{V_G} \rho_C d\mathcal{V}$$

Or, d'après le théorème de Gauss, $\oiint_{S_G} \vec{E}\vec{n}dS = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$

Théorème 3. *Ostrogradsky Théorème de la divergence Pour tout $\vec{F}$, on a*

$$\iiint_{\mathcal{V}} div\vec{F}d\mathcal{V} = \oiint \vec{F}d\vec{S}$$

D'où

$$\oiint_{S_G} \vec{E}\vec{n}dS = \iiint_{\mathcal{V}} div\vec{F}d\mathcal{V} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\rho_C}{\varepsilon_0}\vec{F}d\mathcal{V}$$

On obtient alors l'equation de Maxwell-Gauss (seconde équation de Maxwell)

$$dev\vec{E} = \frac{\rho_C}{\varepsilon_0}$$

On a en particulier $r\vec{o}t\vec{E} = \vec{0}$ (dans le vide en régime statique)

Remarque 7. $div\vec{E} = \frac{\rho_C}{\varepsilon_0}$
or $\vec{E} = -gr\vec{a}dV$
D'où $-div(gr\vec{a}dV) = \frac{\rho_C}{\varepsilon_0} = -(\frac{\partial^2 V}{x^2})$

Cinquième partie
Courant et conduction

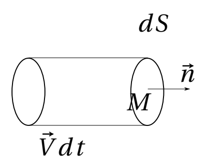
13 Introduction

Notions :

— d’isolant et de conducteurs.
— mouvements désordonné des porteurs de charges de vitesse vectorielle moyenne nulle.
— mouvement d’ensemble de porteurs de charges sous l’effet d’un champ électrique.

14 Vecteurs de densité de courant

Soit un conducteur.
Soit de plus, une surface élémentaire dS du conducteur soit $\vec{V}$, la vitesse moyenne des porteurs qui parcourent le conducteur.



La charge électrique qui traverse dS entre les instants t et $t+dt$ est entièrement contenue dans le cylindre de base ds et de génératrice $\vec{V}dt$

Soit dq_m, cette charge.
dq_m est alors le produit du nombre de charges "libres" par unité de volume par le volume du cylindre
Soit n, le nombre de porteurs par unité de volume.
On a donc que $dq_m = (nq)(\vec{V}dt\vec{n}dS)$
L’intensité dI du courant qui traverse dS pendant le temps dt :

$$dI = \frac{dq_m}{dt} = \frac{nq\vec{V}dt\vec{n}dS}{dt} = nq\vec{V}\vec{n}dS = \vec{J}\cdot\vec{n}dS$$

On a par conséquent, $dI = \vec{J}\cdot\vec{n}dS$ avec $\vec{J} = nq\vec{V} = \rho_C\vec{V}$, la densité volumique de courant.

15 Intensité du courant électrique

L’intensité du courant électrique traversant une surface orientée S est définie par le flux de $\vec{J}$ à travers cette surface.

$$I = \iint_S \vec{J}\vec{n}dS$$

avec I en A et J en $A\cdot m^{-2}$

16 Conservation de la charge

La charge électrique est une grandeur qui se conserve.
La variation de charges dQ entre t et $t+dt$ contenue dans une surface fermée provient uniquement d'échanges avec l'extérieur.

On peut montrer l'équation locale de conservation de la charge

$$\frac{d\rho_C}{dt} + div\vec{J} = 0$$

avec ρ_C, la densité volumique de charges,
et $\vec{J}$, la densité volumique de courant.

16.1 Conducteurs en rédime stationnaire

16.1.1 Milieux conducteurs

Un milieu conducteur est un milieu qui contient des charges susceptibles de se mouvoir.

16.1.2 Distribution surfacique et linéique de courant

Soit un conducteur (ayant la forme d'une feuille) d'épaisseur e où e est faible devant les dimensions latérales de la feuille.
L'intensité dI qui traverse $dS = edl$ s'écrit $dI = \vec{J}\vec{n}dS$
Si $e << 1$, on note $J_S = J_e$
d'où $dI = \vec{J_S}\vec{n}dl$
Le courant surfacique qui parcourt la fauille par unité de longueur perpendiculaire à $\vec{J}$

16.2 La loi d'Ohm

$$\vec{J} = \gamma e$$