

Analyse

Table des matières

I Séries numériques

1 Quelques rappels et compléments sur les suites

II Séries numériques

2 Séries à termes positifs

- 2.1 Comparaison entre séries et intégrales généralisées
- 2.2 Critères de comparaison
- 2.3 Comparaison avec une suite géométrique
- 2.4 Séries à termes de signe quelconque
 - 2.4.1 Séries absolument convergentes
 - 2.4.2 Séries alternées
 - 2.4.3 Règle d'Abel

Première partie

1 Séries numériques

1 On considère une suite (réelle ou complexe) $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et on étudie la somme infinie $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

2

Remarque 1. Question :

2 *Est-ce que cette somme est bien définie, c'est-à-dire appartient à \mathbb{R} ou \mathbb{C} .*

2

3 **Exemple.** — $u_n = 1, \sum_{n=0}^{\infty} u_n = +\infty$

3

— $u_n = n, \sum_{n=0}^{\infty} u_n = +\infty$

4

— $u_n = \frac{1}{n}, \sum_{n=0}^{\infty} u_n = +\infty$

4

— $u_n = \frac{1}{n^2}, \sum_{n=0}^{\infty} u_n = \frac{\pi^2}{6}$

5

1 Quelques rappels et compléments sur les suites

Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge s'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - l| < \varepsilon$.

On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy si $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall m \geq N, |u_n - u_m| < \varepsilon$.

Proposition 1. *Toute suite convergente est de Cauchy.*

Proposition 2. *Dans \mathbb{R} ou dans \mathbb{C} , toute suite de Cauchy est convergente.*

On dit que \mathbb{R} (ou \mathbb{C}) est un espace métrique complet.

Équivalents :

Si $u_n = n^2$ et $v_n = n^3$, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.

Cependant, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est plus rapide que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Les équivalents servent à comparer des vitesses de convergence.

Définition 1. *Deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont équivalentes si*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = 1.$$

On note $u_n \sim v_n$

Dans ce cas, les deux suites ont la même vitesse de convergence. Cela n'a aucun intérêt que si (u_n) tend vers 0, $+\infty$ ou $-\infty$

Exemple. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, alors,

- $e^{a_n} - 1 \sim a_n$
- $e^{a_n} - 1 \sim a_n$

Deuxième partie

Séries numériques

On prend une suite réelle (ou complexe) $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
La somme infinie $\sum_{n \geq 0} u_n$ est la série de terme général u_n .

On lui associe la suite des sommes partielles $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$, définie par
 $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

On dit que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge si la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans \mathbb{R} (elle a une limite et cette limite est réelle). Sinon, la série diverge.

Si la série converge, son reste est la suite $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ et $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ est la somme de la série.

On a $S_n + R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.

Notons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = 0$.

Exercice. (*À savoir*), la série géométrique $u_n = a^n$ avec $a \in \mathbb{R}$,

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^n a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$$

- Si $a = 1$, on a $u_n = 1$ pour tout entier naturel n , donc $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.
- Si $a = -1$, $S_n = \frac{1 - (-1)^{n+1}}{2}$ n'a pas de limite et donc $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge.
- Si $-1 < a < 1$ (ou $|a| < 1$), $S_n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$

En résumé, $\sum_{n \geq 0} a^n$ converge si et seulement si $|a| < 1$ et si $|a| < 1$,

$$\text{alors } \sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$$

Proposition 3. *Critère de Cauchy :*

$\sum_{n \geq 0} u_n$ converge si et seulement si la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. c'est-à-dire
 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall m \geq n, |S_n - S_m| < \varepsilon$ ou encore

Application :

La série harmonique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$.

On montre que cette série est divergente.

On note $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

Pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2n}.$$

2 Séries à termes positifs

On suppose que $u_k \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (ou du moins à partir d'un certain rang). Dans ce cas, la suite des sommes partielles $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est positive et croissante. Par conséquent, $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge si et seulement si elle est majorée. Dans le cas contraire, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$.

Théorème 1. $\sum_{k \geq 0} u_n$ converge si et seulement si $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majoré.

2.1 Comparaison entre séries et intégrales généralisées

Théorème 2. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction décroissante et positive. Alors, la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $U_n = \sum_{k=0}^n f(k) - \int_0^n f(t) dt$ converge.

Par conséquent, la série $\sum_{n \geq 0} f(n)$ et l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ ont la même nature.

Démonstration. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$f(k+1) \cdot 1 \leq \int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k) \cdot 1$$

On montre alors que $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée par 0.

On a :

$$\begin{aligned} U_n &= f(n) + \sum_{k=0}^{n-1} f(k) - \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} f(t) dt \\ &= f(n) + \sum_{k=0}^{n-1} (f(k) - \int_k^{k+1} f(t) dt) \end{aligned}$$

avec $f(n) \geq 0$ et $f(k) - \int_k^{k+1} f(t) dt \geq 0$.

Donc, $U_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On montre maintenant que $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

$$\begin{aligned} U_{n+1} - U_n &= \sum_{k=0}^{n+1} f(k) - \int_0^{n+1} f(t) dt - \left(\sum_{k=0}^n f(k) - \int_0^n f(t) dt \right) \\ &= f(n+1) - \int_n^{n+1} f(t) dt \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

Donc $U_{n+1} \leq U_n$.

En résumé, on a :

$$\int_0^n f(t) dt + U_n = \sum_{k=0}^n f(k)$$

avec $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = l \in \mathbb{R}$

Si $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge, alors, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n f(t) dt \in \mathbb{R}$ et donc

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n f(k) \in \mathbb{R}$ Si $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ diverge, alors, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n f(t) dt = +\infty$ et

donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n f(k) = +\infty$

Réciproquement, si la somme converge, alors l'intégrale converge et si la somme diverge, alors l'intégrale diverge. \square

Application :

Pour les séries de Riemann, si $\alpha \in \mathbb{R}$,

$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

2.2 Critères de comparaison

On considère deux suites positives $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Théorème 3. On suppose que $0 \leq u_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors :

- Si $\sum_{n \leq 0} v_n$ converge alors $\sum_{n \leq 0} u_n$ converge
- Si $\sum_{n \leq 0} v_n$ diverge alors $\sum_{n \leq 0} u_n$ diverge

Démonstration.

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k$$

$$S'_n = \sum_{k=0}^n v_k$$

On a $0 \leq S_n \leq S'_n$

\sum

□

Corrolaire 1. S'il existe a et b strictements positifs tels que $a \leq \frac{u_n}{v_n} \leq b$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ ont la même nature.

Démonstration.

$$av_n \leq u_n \leq bv_n$$

□

Corrolaire 2. Si on a $u_n \sim v_n$, alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ ont la même nature.

De plus, si $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ convergent, alors les restes sont équivalents.

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \sim R'_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} v_k$$

Dans le cas où elles divergent, les sommes partielles sont équivalentes :

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k \sim S'_n = \sum_{k=0}^n v_k$$

Démonstration. Si $u_n \sim v_n$, alors, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$

Donc, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \leq N$, $0,5 \leq \frac{u_n}{v_n} \leq 1,5$

D'où $0,5v_n \leq u_n \leq 1,5v_n$

□

Exemple. —

2.3 Comparaison avec une suite géométrique

Rappel 1. Si $a \in \mathbb{R}$ (ou \mathbb{C}), alors $\sum_{n \geq 0} a^n$ converge si et seulement si $|a| < 1$.

Et dans ce cas, on a ;

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$$

On suppose que $u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Théorème 4. Règle de Cauchy On suppose que $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)^{\frac{1}{n}} = l \geq 0$.

Alors :

- Si $l < 1$, alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge
- Si $l > 1$, alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge grossièrement

Remarque 2. Si $l = 1$, tout peut arriver.

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha}$$

$$(u_n)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{1}{n^\alpha}\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$= \frac{1}{n^{\frac{\alpha}{4}}}$$

$$= \frac{1}{e^{\frac{\alpha}{4} \ln n}}$$

$$= e^{-\frac{\alpha}{4} \ln n}$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-\frac{\alpha}{4} \ln n} = e^0 = 1$. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n)^{\frac{1}{n}} = 1$ pour tout α .

mais si $\alpha > 1$, $\sum u_n$ converge

et si $\alpha \leq 1$, $\sum u_n$ diverge

Démonstration. On a $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)^{\frac{1}{n}} = l$, donc,

-
- Si $l > 1$,
On prend $\varepsilon > 0$, tel que $1 < l - \varepsilon$.
Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $1 < l - \varepsilon < (u_n)^{\frac{1}{n}}$
Donc $u_n > (l - \varepsilon)^n$ pour tout $n \geq N$.
Comme $l - \varepsilon > 1$, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} (l - \varepsilon)^n = +\infty$
et donc $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$

□

Théorème 5. Règle de d'Alembert On suppose que $u_n > 0$ à partir d'un certain rang.

On suppose de plus que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$

Alors :

- Si $l < 1$, alors $\sum u_n$ converge
- Si $l > 1$, alors $\sum u_n$ diverge grossièrement

Remarque 3. Si $l = 1$, on ne peut rien dire : $u_n = \frac{1}{n^a}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

Démonstration. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, l - \varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} < l + \varepsilon$$

- Si $l < 1$, on prend $\varepsilon > 0$ tel que $l + \varepsilon < 1$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $0 \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq l + \varepsilon$. Si $n > N$, on a :

$$\prod_{k=N}^{n-1} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{u_n}{u_N} < (l + \varepsilon)^{n-N}$$

On obtient alors

$$0 \leq u_n \leq u_N (l + \varepsilon)^{n-N}$$

— Idem

□

2.4 Séries à termes de signe quelconque

2.4.1 Séries absolument convergentes

Définition 2. On dit que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est absolument convergente si

$\sum_{n \geq 0} |u_n|$ converge.

Théorème 6. Si la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge absolument alors elle converge.

Démonstration. $\sum_{n \geq 0} |u_n|$ convergeant, la série vérifie le critère de Cauchy :

Si on prend $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq N, \forall p \in \mathbb{N}, \left| \sum_{k=n}^{n+p} |u_k| \right| < \varepsilon$$

On a donc, pour tout $n \geq N$, et pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\left| \sum_{k=n}^{n+p} u_k \right| \leq \sum_{k=n}^{n+p} |u_k| < \varepsilon$$

Donc la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ vérifie le critère de Cauchy, donc elle converge. □

Remarque 4. Attention, la réciproque est fautive :

Exemple. $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$

$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge

mais $\sum_{n \geq 1} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right|$ converge

2.4.2 Séries alternées

Ce sont des séries de la forme $\sum_{n \geq 0} (-1)^n a_n$ où $a_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Théorème 7. Si la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers 0, alors $\sum_{n \geq 0} (-1)^n a_n$ converge.

De plus, si on note $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k a_k$, alors on a $|R_n| \leq a_{n+1}$

Démonstration. La preuve sera faite en exercice \square

Exemple. $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge.

2.4.3 Règle d'Abel

Théorème 8. Soient deux suites $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui vérifient :

1. $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est positive, décroissante et converge vers 0.
2. Il existe $M > 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left| \sum_{k=0}^n u_k \right| \leq M$$

Alors $\sum_{n \geq 0} \alpha_n u_n$ converge.

Démonstration. La preuve sera faite en exercice

Exemple. $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos n}{n}$

On a $\frac{\cos n}{n} = \frac{1}{n} \cos n$.

- $(\frac{1}{n})_{n \geq 1}$ est positive, décroissante et converge vers 0.
- On montre qu'il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\left| \sum_{k=1}^n \cos(k) \right| \leq M$$

On écrit $\cos(k) = \Re(e^{ik})$

Donc,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^n \cos(k) \right| &= \left| \sum_{k=1}^n \Re(e^{ik}) \right| \\ &= \left| \Re\left(\sum_{k=1}^n e^{ik}\right) \right| \\ &= \left| \Re\left(\sum_{k=0}^n e^{ik}\right) - 1 \right| \end{aligned}$$

On sait aussi que

$$\sum_{k=0}^n e^{ik} = \sum_{k=0}^n (e^i)^k = \frac{1 - e^{i(n+1)}}{1 - e^i}$$

Rappel 2. Si $z \in \mathbb{C}$, alors, $|\Re(z)| \leq |z|$ et $|\Im(z)| \leq |z|$

On en déduit :

$$\left| \sum_{k=1}^n \cos(k) \right| \leq \left| \Re\left(\sum_{k=0}^n e^{ik}\right) \right| + 1 \leq \left| \sum_{k=0}^n e^{ik} \right| + 1$$

Donc :

$$\left| \sum_{k=1}^n \cos(k) \right| \leq \left| \frac{1 - e^{i(n+1)}}{1 - e^i} \right| + 1 \leq \frac{|1 - e^{i(n+1)}|}{|1 - e^i|} + 1 \leq \frac{|1| + |e^{i(n+1)}|}{|1 - e^i|} + 1$$

\square **Exercice.** Utilisation du Théorème d'Abel pour montrer le théorème des séries alternées :

$$\sum_{n \geq 0} (-1)^n a_n$$

avec $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroissante et converge vers 0.

Il suffit de vérifier qu'il existe $M > 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left| \sum_{k=0}^n (-1)^k \right| \leq M$$

Selon la parité de n , $\left| \sum_{k=0}^n (-1)^k \right|$ vaut 0 ou 1.

Donc $\left| \sum_{k=0}^n (-1)^k \right| \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$