Algèbre linéaire

Table des matières

Première partie
Systèmes d'équations linéaires

Soit $\mathbb{K}$, un corps.

Définition 1. *Un système d'équtions linéaires à n inconnues et p équations est un système d'équations de la forme :*

$$(S)\left\{\begin{array}{l} a_{1,1}x_1 + \ldots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ \ldots \\ a_{n,1}x_{n,1} + \ldots + a_{n,n}x_{n,n} = b_n \end{array}\right.$$

avec avec $a_{i,j}$ et b_i des éléments de $\mathbb{K}$
et x_j sont les inconnues.

Définition 2. *Une solution est le n-uplet $(x_1, \ldots, x_n)$ tel que x... sont solutions de toutes les équations.*

Définition 3. *Les $b_1, \ldots, b_p$ sont appelés seconds membres.*

Remarque 1. *à priori, $n \neq p$*

1 Résolution

1.1 Équivalence de systèmes

Pour résoudre, on se ramène à un système équivalent plus simple :

$$(S) \Leftrightarrow (S')$$

$(S) \Leftrightarrow (S')$ signifie que les deux systèmes ont les mêmes solutions.

1.2 Méthode du pivot de Gauss

On ne change pas les solutions en faisant une des trois opérations suivantes :
- changer l'ordre des équations
- multiplier une équation par un élément $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$
- Ajouter à une équation un multiple d'une autre

ou toute opération qui peut se décomposer en une série de telles opérations

Méthode du pivot de Gauss :

- Si $a_{1,1} \neq 0$

  Notation. *$a_{1,1}$ est alors appelé le pivot*
  pour tout i strictement supérieur à 1, on remplace la ligne L_i par $L_i - \frac{a_{i,1}}{a_{1,1}}$

À la fin, on obtient un système dit échelonné, c'est-à-dire de la forme :

$$\left\{ a'_{1,j_1} x_{j_1} + \ldots + a'_{1,n} x_n = b'1 \right.$$

Deuxième partie

Chapitre 2 : Espaces vectoriels

Soit $\mathbb{K}$, un corps ($\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, ou autre)

2 Notion d'espace vectoriel

2.1 Définitions

Définition 4. *vague Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est un ensemble d'éléments appelés vecteurs tels qu'on puisse les additionner entre eux et les multiplier par des scalaires, c'est-à-dire des éléments de $\mathbb{K}$ avec des relations naturelles de compatibilité*

Définition 5. *Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est un ensemble E muni de deux lois :*

— *une loi de composition interne :*

$$\begin{aligned} + : E \times E &\to E \\ (u, v) &\mapsto u + v \end{aligned}$$

— *une loi de composition externe :*

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{K} \times E &\to E \\ (\lambda, u) &\mapsto \lambda \cdot v \end{aligned}$$

Ces lois vérifient :

— $\forall u, v, w \in E,\ (u+v)+w = u+(v+w)$
la loi + est donc associative

— $\forall u, v \in E,\ u+v = v+u$
la loi + est donc commutative

— $\exists 0_E \in E,\ \forall u \in E,\ u+0_E = 0_E+u = u$
la loi + admet un élément neutre

— $\forall u \in E,\ \exists v \in E,\ u+v = v+u = 0_E$
chaque élément de E admet, par +, un inverse ou opposé

— $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ \forall u \in E,\ \lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda \cdot \mu) \cdot u$
la loi $\cdot$ est associative

— $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ \forall u \in E,\ (\lambda+\mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u$
la loi $\cdot$ est distributive à gauche

— $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall u, v \in E,\ (u+v) \cdot \lambda = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$
la loi $\cdot$ est distributive à droite

— $\forall u \in E,\ 1 \cdot u = u$
la loi $\cdot$ admet un élément neutre

Remarque 2. *Dans le troisième axiome, l'élément neutre est unique.*
Dans le quatrième axiome, le vecteur v est en fait unique, on le note $-u$.

Proposition 1. *On a également,* $\forall u \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}$ *:*

1. $\lambda \cdot 0_E = 0_E$
2. $0_{\mathbb{K}} \cdot u = 0_E$
3. $\lambda \cdot u = 0_E \Rightarrow \lambda = 0_{\mathbb{K}}$ *ou* $u = 0_E$
4. $(-\lambda) \cdot u = \lambda \cdot (-u) = -(\lambda \cdot u)$

Démonstration. 1.

$$\begin{aligned} \lambda \cdot 0_E &= \lambda \cdot (0_E + 0_E) \\ &= \lambda \cdot 0_E + \lambda \cdot 0_E \\ &= \lambda \cdot 0_E + 0_E \end{aligned}$$

$$\lambda \cdot 0_E = O_E$$

2.

$$\begin{aligned} 0_{\mathbb{K}} \cdot u &= (0_{\mathbb{K}} + 0_{\mathbb{K}}) \cdot u \\ &= 0_{\mathbb{K}} \cdot u + 0_{\mathbb{K}} \cdot u \\ &= 0_{\mathbb{K}} \cdot u + 0_{\mathbb{K}} \end{aligned}$$

$$0_{\mathbb{K}} \cdot u = O_{\mathbb{K}}$$

3. Si $\lambda = 0_{\mathbb{K}}$, cf. 2
   Si $\lambda \neq 0$, alors $\lambda^{-1} \in \mathbb{K}$,

$$0 = \lambda^{-1} \cdot 0 = \lambda^{-1}(\lambda \cdot u) = (\lambda^{-1} \cdot \lambda) \cdot u = 1 \cdot u = u$$

□

Notation. *On note souvent :*
- $0_E = 0$ *et* $0_{\mathbb{K}} = 0$
- $u - v = u + (-v)$

Lemme 1. $\forall u, v, w \in E, u + w = v + w \Rightarrow u = v$

Démonstration.

$$\begin{aligned} v &= (u + w) - w \\ &= u + (w - w) \\ &= u + 0_E \\ &= u \end{aligned}$$

donc $v = u$ □

Remarque 3.
- *Pour* $\lambda \in \mathbb{K}$ *et* $u \in E$ $u \cdot \lambda$ *ne veut rien dire.*
- *Pour* $u, v \in E$ $u \cdot v$ *ne veut rien dire*

Exemple. *1/ Pour les lois de compositions internes et externes usuelles,*
- $\mathbb{K}$ *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel*
- $\mathbb{K}^n$ *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel*
- *plus généralement, si* E_1 *et* E_2 *sont des* $E_1 \times E_2$ *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel*

2/ Soit E*, un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel et* A*, un ensemble qualconque,*

— *$\mathscr{F}(A,E)$, l'ensemble des applications de A dans E, est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel*

$$\forall f_1, f_2 \in \mathscr{F}(A,E),\ \forall \lambda \in \mathbb{K},$$

$$\begin{aligned} f_1 + f_2 : A &\to E \\ a &\mapsto f_1(a) + f_2(a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda \cdot f_1 : A &\to E \\ a &\mapsto \lambda \cdot f_1(a) \end{aligned}$$

— *Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $A = I \subset \mathbb{R}$, un intervalle, on peut avoir $\mathscr{F}(I,\mathbb{R})$*

— *Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $A = \mathbb{N}$, on a $\mathscr{F}(\mathbb{N},\mathbb{R})$, l'ensemble des suites numériques*

3/ $\mathbb{K}[X]$, l'ensemble des polynômes

4/ $M_{n,p}(\mathbb{K})$, l'ensemble des matrices à coefficient dans $\mathbb{K}$, à n lignes et p colonnes.

Remarque 4. *$\mathbb{R}^2$, munit de la loi + usuelle et $\lambda \cdot (x_1, x_2) = (\lambda \cdot x_1, 0)$ n'est pas un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, pourquoi ?*

2.2 Sous-espace vectorel

Définition 6. *Soit E, un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et $F \subset E$.*
F est un sous espace vectoriel de E s'il s'agit d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les lois + et $\cdot$ de E.

— $\forall u, v \in F,\ u + v \in F$

— $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall u \in F,\ \lambda \cdot u \in F$

— *+ et $\cdot$ vérifient les propriétés des lois de composition interne et externe des espaces vectoriels*

Propriété 1. *F est un sous-espace vectoriel de E si :*

— $F \neq \emptyset$

— $\forall u, v \in F,\ u + v \in F$

— $\forall u \in F,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda \cdot u \in F$

Remarque 5. — *On a vu que $0_E \in F$*

— *Les deux derniers points de la définition de sous-espace vectoriel sont équivalents à :*

$$\forall u, v \in F,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ \lambda u + \mu v \in F$$

ou encore à :

$$\forall u, v \in F,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda u + v \in F$$

Remarque 6. *Dans la plupart des cas, pour montrer qu'un ensemble (avec les lois $+, \cdot$) est un espace vectoriel, on montre qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel connu.*

Exemple. — *$E = \mathbb{K}^n$ et $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$*
$F = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de E.

— *$\mathbb{K}[X]$, les suites de $\mathbb{K}$ nulles à partir d'un certain rang, est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites de $\mathbb{K}$*

2.3 Sous espace engendré

Définition 7. *Une combinaison linéaire de $v_1, ..., v_p$ est un élément de la forme* $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_p v_p$ *avec* $\lambda_1, ..., \lambda_p \in \mathbb{K}$.

Remarque 7. *Une combinaison linéaire de $(v_i)_{i\in I}$ est une combinaison linéaire au sens précédent d'une sous famille finie.*

Exemple. *Dans* $\mathbb{K}[X] = \{1, X, X^2, ..., X^n, ...\}$, *une combinaison linaire est un polynôme.*

Définition 8. *Soient* $v_1, ..., v_p \in E$
$vect(v_1, ..., v_p) = \{$*combinaisons linéaires de* $v_1, ..., v_p\} = \{\sum_{i=1}^{p} \lambda_i v_i \ / \ \lambda_1, ..., \lambda_p \in \mathbb{K}\}$

Proposition 2. $vect(v_1, ..., v_p)$ *est un sous espace vectoriel de E.*

Exemple. *Cas particulier :*
$p = 1$, $vect(v)$ *est alors une droite vectorielle.*
$p = 2$,

2.4 Intersections

Proposition 3. *Soient F_1, F_2 des sous-espaces vectoriels de E, alors, $F_1 \cap F_2$ est un sous espace vectoriel :*

$$F_1 \cap F_2 = \{x \in E \ / \ x \in F_1 \ \text{ et } \ x \in F_2\}$$

Démonstration.

— $0 \in F_1$ et $0 \in F_2$, donc $0 \in F_1 \cap F_2$
l'intersection est donc non vide
— Soient $u, v \in F_1 \cap F_2$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$
On montre que $\lambda u + \mu v \in F_1 \cap F_2$
$\lambda u + \mu v \in F_1$ car F_1 est un sous espace vectoriel
$\lambda u + \mu v \in F_2$ car F_2 est un sous espace vectoriel

□

application :
L'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires homogène (sans second membre) à n inconnues (et p équations) est un sous espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.

Démonstration. Intersection des sous espaces vectoriels est solution de chaque équations □

Remarque 8. *Attention,*

— *En général, l'union de sous espaces vectoriels n'est pas un sous espaces vectoriels (sauf cas triviaux)*
— *Le complémentaire d'un sous-espace vectoriel n'est jamais un sous-espace vectoriel (étant privé du* 0*)*

2.5 Somme de sous espaces vefctoriels

Définition 9. *Soient F_1, F_2, des sous espaces vectoriels, on définit :*

$$F_1 + F_2 = \{f_1 + f_2 \ / \ f_1 \in F_1,\ f_2 \in F_2\}$$

Remarque 9. *$F_1 + F_2$ est un sous-espace vectoriel de E*

Exemple.

Proposition 4. *Si $F_1 = vect(v_1, ..., v_{p_1})$ et $F_2 = vect(w_1, ..., w_{p_2})$, alors,*

$$F_1 + F_2 = vect(v_1, ..., v_{p_1}, w_1, ..., w_{p_2})$$

Démonstration. Soit $u \in F_1 + F_2$

$$\exists f_1 \in F_1, \exists f_2 \in F_2, \ / \ u = f_1 + f_2$$
$$\exists f_1 \in F_1, \exists f_2 \in F_2, \ / \ u = f_1 + f_2$$

□

Remarque 10. *$F_1 - F_2$ n'est pas intéressant : $\{f_1 + (-f_2) \ / \ f_1 \in F_1,\ f_2 \in F_2\} = F_1 + F_2$*

Remarque 11. *$F_1 + F_2 \neq F_1 \cup F_2$*

3 Familles libres, génératrices et bases

3.1 Familles libres, génératrices

Définition 10. *On dit que $(v_1, ..., v_p)$ est une famille génératrice de E si $vect(v_1, ..., v_p) = E$*

Vocabulaire. *E est dit finiement engendré s'il existe une famille génératrice finie.*

Remarque 12. *intuitivement, $(v_1, ..., v_p)$ est génératrice si elle "voit" tous les éléments de E.*

Remarque 13. *A priori, il peut y avoir plusieurs manières d'écrire un élément de E*

Exemple. *Pour $E = \mathbb{R}^2$, $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$, $e_3 = (1,1)$,*
on a $e_3 = e_1 + e_2$ la famille $\{e_1, e_2, e_3\}$ est génératrice.

calcul pratique :
trouver une famille génératrice d'un sous espace vectoriel défini par des équations.

Exemple. $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y + z = 0$
On résoud le système

Proposition 5. *Soit E de dimension finie, et F sous espace vectoriel de E.*

1. *F est de dimension finie et* $\dim F \leq \dim E$
2. $\dim F = \dim E$ *si et seulement si* $F = E$

Démonstration. 1. Semble évident mais ne l'est pas.

2. Si $\dim F = \dim E$,
   on pose $\{f_1, ..., f_n\}$, base de F, est aussi une famille libre de E avec $n = \dim E$ éléments dans une base de E.
   Pour la réciproque, si $\dim F \neq \dim F$, $E \neq F$

□

Remarque 14. *$f_1, ..., f_k$ de F sous espace vectoriel de E.*
$f_1, ..., f_k$ est une famille libre de F si et seulement si c'est une famille libre de E

Remarque 15. *Le second point est utile en pratique pour montrer que deux espaces vectoriels F et G sont égaux, on montre que $F \subset G$ et que les deux sont de même dimension.*

3.2 Exemples de dimensions (et bases)

— $\mathbb{K}^n$
  base canonique : $e_i = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$ ou 1 se trouve à la i-ème place.
  $(e_1, ..., e_n)$ est une base avec $\dim \mathbb{K}^n = n$

— Soient E, F, deux espaces vecteurs de dimensions finies
  $E \times F$ est de dimension finie $\dim E + \dim F$
  Soit $(e_1, ..., e_n)$ base de E
  Soit $(f_1, ..., f_n)$ base de F

$$e_i^{\sim} = (e_i, 0) \in E \times F$$

$$f_j^{\sim} = (0, f_j) \in E \times F$$

  Exercice. $(e_1^{\sim}, ..., e_n^{\sim}, f_1^{\sim}, ..., f_m^{\sim})$

Théorème 1. *On considère un système d'équations linéaires homogène à n inconnues et k équations.*
On suppose que ce système est échelonné, alors l'ensemble des solutions est de dimension $n-k$.

Démonstration.

Remarque 16. *Quitte à renommer les inconnues, on peut supposer que les inconnues principales sont $x_1, ..., x_k$, les autres sont des variables libres.*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + ... = 0 \\ a_{22}x_2 + ... = 0 \\ \qquad\qquad ... \\ a_{kk}x_k + ... = 0 \end{cases}$$

Alors, les solutions sont de la forme $(x_1,...,x_n)$ *avec, pour* $j > k$*, on pose arbitrairement* $x_j = \lambda_j \in \mathbb{K}$

$$x_k = \alpha_{kk+1}\lambda_{k+1} + ... + \alpha_{kn}\lambda_n$$

$$...$$

$$x_1 = \alpha_{1,k+1}\lambda_{k+1} + ... + \alpha_{1n}\lambda_n$$

Donc,

$$(x_1,...,x_n) = \lambda_{k+1}()$$

□

Théorème 2. *Soient F, G, deux sous espace vectoriel de E (de dimensions finies), alors,* $\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$

Démonstration. "Idée : construire une base sympathique de $F+G$"
- $F \cap G$ est de dimension finie ($F \cap G$ étant sous espace vectoriel de F)
  on pose alors $(e_1,...,e_n)$ base de $F \cap G$.
- $(e_1,...,e_n)$ est une famille libre de F
  se complète en une base $(e_1,...,e_n, f_1,..., f_s)$ de F

□

3.3 rang d'une famille de vecteurs

Définition 11.

$$rg(v_1,...,v_p) = \dim vect(v_1,...,v_p)$$

Propriété 2. *On a*
- $rg(v_1,...,v_p) \leq dimE$
- $rg(v_1,...,v_p) \leq p$
- $rg(v_1,...,v_p) = dimE$ *si et seulement si la famille est génératrice.*
- $rg(v_1,...,v_p) = 1$ *si et seulement si la famille est libre.*

Démonstration. — $vect v_1,...,v_p$ est sous espace vectoriel de E.
- par définition, $(v_1,...,v_p)$ engendre $vect(v_1,...,v_p)$

- $vect(v_1,...,v_p) = E$ si et seulement s'ils sont monodimensionels
- $rg(v_1,...,v_p) = 1$ si et seulement si $v_1,...,v_p$ est génératrice d'un sous espace vectoriel de dimension p
  si et seulement si $v_1,...,v_p$ est une base de $vect(v_1,...,v_p)$
  si et seulement si $v_1,...,v_p$ est libre

□

Remarque 17. $vect(v_1,...,v_p)$ *ne change pas (le rang non plus) si :*
- *on permute deux vecteurs*
- *on multiplie un vecteur par un scalaire* $\lambda \in \mathbb{K}^*$
- *on ajoute à un vecteur un multiple d'un autre*

On peut alors appliquer l'algorithme de Gauss au calcul du rang pour des vecteurs de $\mathbb{K}^n$.
Tout d'abord, on échelonne une famille de vecteur.
Une fois que la famille est échelonnée, le rang correspond au nombre de vecteurs non nuls.

Remarque 18. *Cette famille de vecteurs est une base du sous espace vectoriel initial.*

3.4 Somme directe

Soient F et G des sous espaces vectoriels de E

$$F + G = \{f + g \mid f \in F,\ g \in G\}$$

a priori pour $u \in F + G$
la paire $(f, g) \in F \times G \ / \ u = f + g$ n'est pas nécessairement unique.

Définition 12. *F et G sont en somme directe si et seulement si*

$$\forall u \in F + G,\ \exists!(f, g) \in F \times G,\ u = f + g$$

Notation. *On note alors $F \oplus G$*

Remarque 19. *$F \oplus G$ désigne à la fois le sous espace vectoriel $F + G$ et la propriété selon laquelle ils sont en somme directe.*

Proposition 6. *Les énoncés suivants sont équivalents :*
- *F et G sont en somme directe*
- *$o = f + g$ avec $f \in F$ et $g \in G$ implique $f = g = 0$*
- *$F \cap G = \{0\}$*
- *En réunissant une base de F et une base de G, on obtient une base de $F + G$*
- *$\dim(F + G) = \dim F + \dim G$*

(où les deux dernières propositions ne sont vraies qu'en dimension finie)

Démonstration. □