Algèbre linéaire

Table des matières

Première partie
Systèmes d'équations linéaires

Soit $\mathbb{K}$, un corps.

Définition 1. *Un système d'équations linéaires à n inconnues et p équations est un système d'équations de la forme :*

$$(S)\left\{\begin{array}{l} a_{1,1}x_1+\ldots+a_{1,n}x_n=b_1\\ a_{2,1}x_1+\ldots+a_{2,n}x_n=b_2\\ \ldots\\ a_{p,1}x_1+\ldots+a_{p,n}x_n=b_p\end{array}\right.$$

avec avec $a_{i,j}$ et b_i des éléments de $\mathbb{K}$
et x_j sont les inconnues.

Définition 2. *Une solution est le n-uplet $(x_1,\ldots,x_n)$ tel que $x_1,\ldots,x_p$ sont solutions de toutes les équations.*

Définition 3. *Les $b_1,\ldots,b_p$ sont appelés seconds membres.*

Remarque 1. *a priori, $n\neq p$*
Les inconnues peuvent être notées différemment ((x,y,z,t), $(\lambda_1,\lambda_2,\ldots)$)

Exemple.

$$(S)\left\{\begin{array}{l} x+2y=1\\ 2x+5y=2\end{array}\right.$$

Dont l'unique solution est $(0,1)$

Remarque 2. *Résoudre un système consiste à trouver toutes les solutions ou à montrer qu'il n'y en a aucune.*

1 Résolution

1.1 Équivalence de systèmes

Pour résoudre, on se ramène à un système équivalent plus simple :

$$(S)\Leftrightarrow(S')\left\{\begin{array}{l} a_{1,1}x_1+\ldots+a_{1,n}x_n=b_1\\ a_{2,1}x_1+\ldots+a_{2,n}x_n=b_2\\ \ldots\\ a_{p,1}x_1+\ldots+a_{p,n}x_n=b_p\end{array}\right.$$

$(S)\Leftrightarrow(S')$ signifie que les deux systèmes ont les mêmes solutions.

1.2 Méthode du pivot de Gauss

On ne change pas les solutions en faisant une des trois opérations suivantes :

— changer l'ordre des équations

— multiplier une équation par un élément $\lambda \in \mathbb{K}\setminus\{0\}$

— Ajouter à une équation un multiple d'une autre

ou toute opération qui peut se décomposer en une série de telles opérations

Exemple.

$$(S)\left\{\begin{array}{rcll} x_1+x_2+2x_3-x_4 &=& 1 & L_1\\ 2x_1+2x_2+3x_3+x_4 &=& 2 & L_2\\ x_1+x_2+4x_3-6x_4 &=& 2 & L_3\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcll} x_1+x_2+2x_3-x_4 &=& 1 & L_1\\ -x_3+3x_4 &=& 0 & L_2-2L_1\to L_2\\ 2x_3-5x_4 &=& -1 & L_3-L_1\to L_3\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcll} x_1+x_2+2x_3-x_4 &=& 1 & L_1\\ -x_3+3x_4 &=& 0 & L_2\\ x_4 &=& 1 & L_3+2L_2\to L_3\end{array}\right.$$

Remarque 3. *Erreur possible :*

$$(S')\left\{\begin{array}{rcll} -2x_3-5x_4 &=& 1 & L_1-L_3\to L_1\\ -x_3+3x_4 &=& 2 & L_2\\ 2x_3-5x_4 &=& 1 & L_3-L_1\to L_3\end{array}\right.$$

Il n'y a pas ici d'équivalence avec le système précédent, juste une implication :
Il n'est ici pas possible de décomposer ces opération en une série d'opérations de Gauss (il n'est plus possible, après ces opération, de retrouver les lignes L_1 et L_3 d'origine)

Méthode du pivot de Gauss :

1. — Si $a_{1,1} \neq 0$, on remplace, pour tout i supérieur à 1, L_i par $L_i - \frac{a_{i,1}L_1}{a_{1,1}}$ (ce qui correspond à l'annulation des coefficients devant x_1 dans les L_i)
   Notation. *$a_{1,1}$ est alors appelé le pivot*
   — Si $a_{1,1} = 0$, mais qu'il existe une autre ligne sur laquelle $a_{i,1} \neq 0$, alors on échange L_1 et L_i et on est ramené au cas précédent.
   — Si, à toutes les lignes, $a_{i,1} = 0$, alors on prend j_1 le plus petit indice tel que $\exists i \ / \ q_{j_1} \neq 0$ et on reprend à l'étape précédente.
2. Ensuite, on ne touche plus à la première équation et on résout le système en continuant l'algorithme sur les autres équations.
3. À la fin, on obtient un système dit échelonné, c'est-à-dire de la forme :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a'_{1,j_1}x_{j_1}+\ldots+a'_{1,n}x_n & = & b'_1 \\ a'_{2,j_2}x_{j_2}+\ldots+a'_{2,n}x_n & = & b'_2 \\ \ldots & & \\ a'_{r,j_r}x_{j_r} & = & b'_r \\ \ldots & & \\ 0 & = & b'_{n-1} \\ 0 & = & b'_n \end{array}\right.$$

avec $1 \le j_1 \le j_2 \le \ldots \le j_r \le n$

Remarque 4. *Les dernières équation dont le premier membre est nul peuvent apparaître si on élimine toutes les inconnues avant d'arriver à la dernière équation.*

Plusieurs cas sont alors possibles :

- Si r est différent de n, alors :
  - Si $\exists i > n,\ b'_i \neq 0$, on est face à une contradiction, le système n'a donc pas de solutions.
  - Si $\forall i > n,\ b'_i = 0$, on peut retirer b, les équations sont inutiles.
- Si r et n sont égaux, alors :
  - Si $(j_1, \ldots, j_n) = (1, \ldots, n)$, le système est dit de Cramer
  - Si pour tout second membre, il existe une unique solution, on réinjecte cette solution à partir de la dernière équation.
  - Si $(j_1, \ldots, j_n) \neq (1, \ldots, n)$, les $x_{j_1}, \ldots, x_{j_n}$ sont appelées les inconnues principales. Les autres variables s'appellent les variables libres dans le second membre, et il reste un système de Cramer avec les inconnues $(x_{j_1}, \ldots, x_{j_n})$.

    Donc, pour chaque valeurs prisent par les variables libres, on a une unique solution, le système admet alors une infinité de solutions (Seulement si $\mathbb{K}$ est infini, sinon, il y a q^{n-r} solutions).

Exemple.

$$(S)\left\{\begin{array}{rcl} x_1+x_2+2x_3-x_4 & = & 1 \\ -x_3+3x_4 & = & 0 \\ x_4 & = & 1 \end{array}\right.$$

x_1, x_2, x_3 *sont les inconnues principales*

$j_1 = 1, j_2 = 3, j_3 = 4$

x_2 est la variable libre.

$$(S)\left\{\begin{array}{rcl} x_1+x_2+2x_3-x_4 & = & 1\\ -x_3+3x_4 & = & 0\\ x_4 & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcl} x_1+2x_3-x_4 & = & 1-x_2\\ -x_3+3x_4 & = & 0\\ x_4 & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcl} x_1 & = & 1-x_2-6+1=-4-x_2\\ x_3 & = & 3\\ x_4 & = & 1 \end{array}\right.$$

Les solutions de ce système sont donc les éléments de la forme $(-4-\lambda,\lambda,3,1)$ *avec* $\lambda\in\mathbb{K}$

Deuxième partie
Chapitre 2 : Espaces vectoriels

Soit $\mathbb{K}$, un corps ($\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, ou autre)

2 Notion d'espace vectoriel

2.1 Définitions

Définition 4. *(non formelle) Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est un ensemble d'éléments appelés vecteurs tels qu'on puisse les additionner entre eux et les multiplier par des scalaires, c'est-à-dire des éléments de $\mathbb{K}$ avec des relations naturelles de compatibilité.*

Définition 5. *Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est un ensemble E muni de deux lois :*

— *une loi de composition interne :*

$$\begin{aligned} + : E \times E &\to E \\ (u, v) &\mapsto u + v \end{aligned}$$

— *une loi de composition externe :*

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{K} \times E &\to E \\ (\lambda, u) &\mapsto \lambda \cdot v \end{aligned}$$

Ces lois vérifient :

A1 : $\forall u, v, w \in E,\ (u + v) + w = u + (v + w)$
la loi + est donc associative

A2 : *:* $\forall u, v \in E,\ u + v = v + u$
la loi + est donc commutative

A3 : $\exists 0_E \in E,\ \forall u \in E,\ u + 0_E = 0_E + u = u$
la loi + admet un élément neutre

A4 : $\forall u \in E, \exists v \in E,\ u + v = v + u = 0_E$
chaque élément de E admet, par +, un inverse ou opposé

B1 : $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ \forall u \in E,\ \lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda \cdot \mu) \cdot u$
la loi · est associative

B2 : $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ \forall u \in E,\ (\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u$
la loi · est distributive à gauche

B3 : $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall u, v \in E,\ (u + v) \cdot \lambda = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$
la loi · est distributive à droite

B4 : $\forall u \in E,\ 1 \cdot u = u$
la loi · admet un élément neutre

Remarque 5. *Dans l'axiome A3, l'élément neutre est unique.*
Dans l'axiome A4, le vecteur v est en fait unique, on le note $-u$.

Proposition 1. *On a également,* $\forall u \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}$ *:*

1. $\lambda \cdot 0_E = 0_E$
2. $0_{\mathbb{K}} \cdot u = 0_E$
3. $\lambda \cdot u = 0_E \Rightarrow \lambda = 0_{\mathbb{K}}$ *ou* $u = 0_E$
4. $(-\lambda) \cdot u = \lambda \cdot (-u) = -(\lambda \cdot u)$

Démonstration.

1.
$$\begin{aligned} \lambda \cdot 0_E &= \lambda \cdot (0_E + 0_E) \\ &= \lambda \cdot 0_E + \lambda \cdot 0_E \\ &= \lambda \cdot 0_E + 0_E \end{aligned}$$
$$\lambda \cdot 0_E = O_E$$

2.
$$\begin{aligned} 0_{\mathbb{K}} \cdot u &= (0_{\mathbb{K}} + 0_{\mathbb{K}}) \cdot u \\ &= 0_{\mathbb{K}} \cdot u + 0_{\mathbb{K}} \cdot u \\ &= 0_{\mathbb{K}} \cdot u + 0_{\mathbb{K}} \end{aligned}$$
$$0_{\mathbb{K}} \cdot u = O_{\mathbb{K}}$$

3. Si $\lambda = 0_{\mathbb{K}}$, cf. 2
   Si $\lambda \neq 0$, alors $\lambda^{-1} \in \mathbb{K}$,
$$\begin{aligned} 0 &= \lambda^{-1} \cdot 0 \\ &= \lambda^{-1}(\lambda \cdot u) \\ &= (\lambda^{-1} \cdot \lambda) \cdot u \\ &= 1 \cdot u \\ &= u \end{aligned}$$

□

Notation. *On note souvent :*
- $0_E = 0$ *et* $0_{\mathbb{K}} = 0$
- $u - v = u + (-v)$

Lemme 1. $\forall u, v, w \in E, u + w = v + w \Rightarrow u = v$

Démonstration.
$$\begin{aligned} v &= (u + w) - w \\ &= u + (w - w) \\ &= u + 0_E \\ &= u \end{aligned}$$
donc $v = u$ □

Remarque 6.

— *Pour* $\lambda \in \mathbb{K}$ *et* $u \in E$ $u \cdot \lambda$ *ne veut rien dire.*

— *Pour* $u, v \in E$ $u \cdot v$ *ne veut rien dire*

Exemple.

1/ Pour les lois de compositions internes et externes usuelles,

— $\mathbb{K}$ *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel*

— $\mathbb{K}^n$ *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel*

— *plus généralement, si* E_1 *et* E_2 *sont des* $\mathbb{K}$ *espaces vectoriels,* $E_1 \times E_2$ *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel.*

2/ Soit E*, un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel et* A*, un ensemble qualconque,*

— $\mathscr{F}(A,E)$*, l'ensemble des applications de* A *dans* E*, est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel*

$$\forall f_1, f_2 \in \mathscr{F}(A,E),\ \forall \lambda \in \mathbb{K},$$

$$\begin{aligned} f_1 + f_2 : A &\to E \\ a &\mapsto f_1(a) + f_2(a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda \cdot f_1 : A &\to E \\ a &\mapsto \lambda \cdot f_1(a) \end{aligned}$$

— *Si* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *et* $A = I \subset \mathbb{R}$*, un intervalle, on peut avoir* $\mathscr{F}(I,\mathbb{R})$

— *Si* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *et* $A = \mathbb{N}$*, on a* $\mathscr{F}(\mathbb{N},\mathbb{R})$*, l'ensemble des suites numériques*

3/ $\mathbb{K}[X]$*, l'ensemble des polynômes*

4/ $M_{n,p}(\mathbb{K})$*, l'ensemble des matrices à coefficient dans* $\mathbb{K}$*, à* n *lignes et* p *colonnes.*

Remarque 7. $\mathbb{R}^2$*, munit de la loi* $+$ *usuelle et* $\lambda \cdot (x_1, x_2) = (\lambda \cdot x_1, 0)$
n'est pas un $\mathbb{K}$*-espace vectoriel, pourquoi ?*

2.2 Sous-espace vectoriel

Définition 6. *Soit* E*, un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel, et* $F \subset E$*.*
F *est un sous espace vectoriel de* E *s'il s'agit d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel pour les lois* $+$ *et* $\cdot$ *de* E*.*

— $\forall u, v \in F,\ u + v \in F$

— $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall u \in F,\ \lambda \cdot u \in F$

— $+$ *et* $\cdot$ *vérifient les propriétés des lois de composition interne et externe des espaces vectoriels*

Propriété 1. F *est un sous-espace vectoriel de* E *si :*

— $F \neq \emptyset$

— $\forall u, v \in F,\ u + v \in F$

— $\forall u \in F,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda \cdot u \in F$

Démonstration. Pour montrer que les sous espaces vectoriels vérifient les axiomes A1 à B4 :
La vérification des axiomes A1, A2, B1, B2, B3 et B4 est immédiate.

Pour A3 :

$$\exists 0_F \subset F,\ \forall u \in F,\ u + 0_F = 0_F + u = u$$

Il suffit alors de montrer que $0_E \in F$,
or, $F \neq \emptyset$, donc, $\exists u \in F,\ 0 \cdot u = 0_E \in F$

Pour A4 :
Il suffit alors de montrer que $\forall u \in F,\ -u \in F$:
$-u = (-1) \cdot u$ où $-u \in F$ par hypothèse. □

Remarque 8. — *On a vu que* $0_E \in F$

— *Les deux derniers points de la définition de sous-espace vectoriel sont équivalents à :*

$$\forall u, v \in F,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ \lambda u + \mu v \in F$$

ou encore à :

$$\forall u, v \in F,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda u + v \in F$$

Remarque 9. *Dans la plupart des cas, pour montrer qu'un ensemble (avec les lois* $+, \cdot$*) est un espace vectoriel, on montre qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel connu.*

Exemple. — $\{0\}$ *et* E *sont des sous-espace vectoriels de* E.

— $F = \mathscr{C}(I, \mathbb{R})$*, l'ensemble des fonctions continues sur un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$.
F est sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(I, \mathbb{R})$*, l'ensemble des fonctions de* I *sur* $\mathbb{R}$ *:*
La fonction nulle est continue.
$\forall f, g \in \mathscr{C}(I, \mathbb{R}),\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda f + \mu g$ *est continue, donc* $\lambda f + \mu g \in F$.

— $E = \mathbb{K}^n$ *et* $a_1, ..., a_n \in \mathbb{K}$
$F = \{(x_1, ..., x_n) \mid a_1 x_1 + ... + a_n x_n = 0\}$ *est un sous-espace vectoriel de* E.

— $\mathbb{K}[X]$*, les suites de* $\mathbb{K}$ *nulles à partir d'un certain rang, est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites de* $\mathbb{K}$

2.3 Sous espace engendré

Définition 7. *Une combinaison linéaire de* $v_1, ..., v_p$ *est un élément de la forme* $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_p v_p$ *avec* $\lambda_1, ..., \lambda_p \in \mathbb{K}$.

Exemple. *Dans* $\mathbb{K}[X]$*, une combinaison linéaire est un polynôme.*

Remarque 10. *Une combinaison linéaire de* $(v_i)_{i \in I}$ *est une combinaison linéaire au sens précédent d'une sous famille finie.*

Exemple. *Dans* $\mathbb{K}[X] = \{1, X, X^2, ..., X^n, ...\}$*, une combinaison linaire est un polynôme.*

Définition 8. *Soient* $v_1, ..., v_p \in E$

$vect(v_1, ..., v_p) = \{$*combinaisons linéaires de* $v_1, ..., v_p\} = \{\sum_{i=1}^{p} \lambda_i v_i \ / \ \lambda_1, ..., \lambda_p \in \mathbb{K}\}$

Proposition 2. *$vect(v_1,...,v_p)$ est un sous espace vectoriel de E.*

Exemple. *Cas particulier :*
$p = 1$, $vect(v)$ est alors une droite vectorielle.
$p = 2$,

2.4 Intersections

Proposition 3. *Soient F_1, F_2 des sous-espaces vectoriels de E, alors, $F_1 \cap F_2$ est un sous espace vectoriel :*

$$F_1 \cap F_2 = \{x \in E \ / \ x \in F_1 \ \ et \ \ x \in F_2\}$$

Démonstration.

— $0 \in F_1$ et $0 \in F_2$, donc $0 \in F_1 \cap F_2$
  l'intersection est donc non vide
— Soient $u, v \in F_1 \cap F_2$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$
  On montre que $\lambda u + \mu v \in F_1 \cap F_2$
  $\lambda u + \mu v \in F_1$ car F_1 est un sous espace vectoriel
  $\lambda u + \mu v \in F_2$ car F_2 est un sous espace vectoriel

□

application :
L'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires homogène (sans second membre) à n inconnues (et p équations) est un sous espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.

Démonstration. Intersection des sous espaces vectoriels est solution de chaque équations □

Remarque 11. *Attention,*

— *En général, l'union de sous espaces vectoriels n'est pas un sous espaces vectoriels (sauf cas triviaux)*
— *Le complémentaire d'un sous-espace vectoriel n'est jamais un sous-espace vectoriel (étant privé du 0)*

2.5 Somme de sous espaces vefctoriels

Définition 9. *Soient F_1, F_2, des sous espaces vectoriels, on définit :*

$$F_1 + F_2 = \{f_1 + f_2 \ / \ f_1 \in F_1, \ f_2 \in F_2\}$$

Remarque 12. *$F_1 + F_2$ est un sous-espace vectoriel de E*

Exemple.

Proposition 4. *Si $F_1 = vect(v_1,...,v_{p_1})$ et $F_2 = vect(w_1,...,w_{p_2})$, alors,*

$$F_1 + F_2 = vect(v_1,...,v_{p_1}, w_1,...,w_{p_2})$$

Démonstration. Soit $u \in F_1 + F_2$

$$\exists f_1 \in F_1, \exists f_2 \in F_2, \ / \ u = f_1 + f_2$$
$$\exists f_1 \in F_1, \exists f_2 \in F_2, \ / \ u = f_1 + f_2$$

□

Remarque 13. *$F_1 - F_2$ n'est pas intéressant :* $\{f_1 + (-f_2) \ / \ f_1 \in F_1, \ f_2 \in F_2\} = F_1 + F_2$

Remarque 14. $F_1 + F_2 \neq F_1 \cup F_2$

3 Familles libres, génératrices et bases

3.1 Familles libres, génératrices

Définition 10. *On dit que $(v_1, ..., v_p)$ est une famille génératrice de E si $vect(v_1, ..., v_p) = E$*

Vocabulaire. *E est dit finiement engendré s'il existe une famille génératrice finie.*

Remarque 15. *intuitivement, $(v_1, ..., v_p)$ est génératrice si elle "voit" tous les éléments de E.*

Remarque 16. *A priori, il peut y avoir plusieurs manières d'écrire un élément de E*

Exemple. *Pour $E = \mathbb{R}^2$, $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$, $e_3 = (1,1)$,*
on a $e_3 = e_1 + e_2$ la famille $\{e_1, e_2, e_3\}$ est génératrice.

calcul pratique :
trouver une famille génératrice d'un sous espace vectoriel défini par des équations.

Exemple. $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y + z = 0$
On résoud le système

Proposition 5. *Soit E de dimension finie, et F sous espace vectoriel de E.*

1. *F est de dimension finie et* $\dim F \leq \dim E$
2. $\dim F = \dim E$ *si et seulement si* $F = E$

Démonstration.
1. Semble évident mais ne l'est pas.
2. Si $\dim F = \dim E$,
   on pose $\{f_1, ..., f_n\}$, base de F, est aussi une famille libre de E avec $n = \dim E$ éléments dans une base de E.
   Pour la réciproque, si $\dim F \neq \dim F$, $E \neq F$

□

Remarque 17. *$f_1, ..., f_k$ de F sous espace vectoriel de E.*
$f_1, ..., f_k$ est une famille libre de F si et seulement si c'est une famille libre de E

Remarque 18. *Le second point est utile en pratique pour montrer que deux espaces vectoriels F et G sont égaux, on montre que $F \subset G$ et que les deux sont de même dimension.*

3.2 Exemples de dimensions (et bases)

— $\mathbb{K}^n$
base canonique : $e_i = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$ ou 1 se trouve à la i-ème place.
$(e_1, ..., e_n)$ est une base avec $\dim \mathbb{K}^n = n$

— Soient E, F, deux espaces vecteurs de dimensions finies
$E \times F$ est de dimension finie $\dim E + \dim F$
Soit $(e_1, ..., e_n)$ base de E
Soit $(f_1, ..., f_n)$ base de F

$$e_i^{\sim} = (e_i, 0) \in E \times F$$
$$f_j^{\sim} = (0, f_j) \in E \times F$$

Exercice. $(e_1^{\sim}, ..., e_n^{\sim}, f_1^{\sim}, ..., f_m^{\sim})$

Théorème 1. *On considère un système d'équations linéaires homogène à n inconnues et k équations.*
On suppose que ce système est échelonné, alors l'ensemble des solutions est de dimension $n - k$.

Démonstration.

Remarque 19. *Quitte à renommer les inconnues, on peut supposer que les inconnues principales sont $x_1, ..., x_k$, les autres sont des variables libres.*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + ... = 0 \\ a_{22}x_2 + ... = 0 \\ \qquad\qquad ... \\ a_{kk}x_k + ... = 0 \end{cases}$$

Alors, les solutions sont de la forme $(x_1, ..., x_n)$ avec, pour $j > k$, on pose arbitrairement $x_j = \lambda_j \in \mathbb{K}$

$$x_k = \alpha_{kk+1}\lambda_{k+1} + ... + \alpha_{kn}\lambda_n$$
$$...$$
$$x_1 = \alpha_{1,k+1}\lambda_{k+1} + ... + \alpha_{1n}\lambda_n$$

Donc,

$$(x_1, ..., x_n) = \lambda_{k+1}()$$

□

Théorème 2. *Soient F, G, deux sous espace vectoriel de E (de dimensions finies), alors,* $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$

Démonstration. "Idée : construire une base sympathique de $F + G$"

— $F \cap G$ est de dimension finie ($F \cap G$ étant sous espace vectoriel de F)
on pose alors $(e_1, ..., e_n)$ base de $F \cap G$.

— $(e_1, ..., e_n)$ est une famille libre de F
se complète en une base $(e_1, ..., e_n, f_1, ..., f_s)$ de F

□

3.3 rang d'une famille de vecteurs

Définition 11.

$$rg(v_1,...,v_p) = \dim vect(v_1,...,v_p)$$

Propriété 2. *On a*

- $rg(v_1,...,v_p) \leq dimE$
- $rg(v_1,...,v_p) \leq p$
- $rg(v_1,...,v_p) = dimE$ *si et seulement si la famille est génératrice.*
- $rg(v_1,...,v_p) = 1$ *si et seulement si la famille est libre.*

Démonstration.

- $vect v_1,...,v_p$ est sous espace vectoriel de E.
- par définition, $(v_1,...,v_p)$ engendre $vect(v_1,...,v_p)$
- $vect(v_1,...,v_p) = E$ si et seulement s'ils sont monodimensionels
- $rg(v_1,...,v_p) = 1$ si et seulement si $v_1,...,v_p$ est génératrice d'un sous espace vectoriel de dimension p
  si et seulement si $v_1,...,v_p$ est une base de $vect(v_1,...,v_p)$
  si et seulement si $v_1,...,v_p$ est libre

□

Remarque 20. $vect(v_1,...,v_p)$ *ne change pas (le rang non plus) si :*

- *on permute deux vecteurs*
- *on multiplie un vecteur par un scalaire* $\lambda \in \mathbb{K}^*$
- *on ajoute à un vecteur un multiple d'un autre*

On peut alors appliquer l'algorithme de Gauss au calcul du rang pour des vecteurs de $\mathbb{K}^n$.
Tout d'abord, on échelonne une famille de vecteur.
Une fois que la famille est échelonnée, le rang correspond au nombre de vecteurs non nuls.

Remarque 21. *Cette famille de vecteurs est une base du sous espace vectoriel initial.*

3.4 Somme directe

Soient F et G des sous espaces vectoriels de E

$$F + G = \{f + g \mid f \in F,\ g \in G\}$$

a priori pour $u \in F + G$ la paire $(f, g) \in F \times G$ / $u = f + g$ n'est pas nécessairement unique.

Définition 12. *F et G sont en somme directe si et seulement si*

$$\forall u \in F + G,\ \exists!(f, g) \in F \times G,\ u = f + g$$

Notation. *On note alors* $F \oplus G$

Remarque 22. *$F \oplus G$ désigne à la fois le sous espace vectoriel $F+G$ et la propriété selon laquelle ils sont en somme directe.*

Proposition 6. *Les énoncés suivants sont équivalents :*

- *F et G sont en somme directe*
- $0 = f + g$ *avec* $f \in F$ *et* $g \in G$ *implique* $f = g = 0$
- $F \cap G = \{0\}$
- *En réunissant une base de F et une base de G, on obtient une base de $F+G$*
- $\dim(F+G) = \dim F + \dim G$

(où les deux dernières propositions ne sont vraies qu'en dimension finie)

Démonstration. □

Définition 13. *F et G sont supplémentaire si $F \oplus G = E$*

Remarque 23. *Il peut être intéressant de "découper" l'espace en sous espaces plus simples.*

Remarque 24. *Tout sous espace vectoriel F de E admet un supplémentaire.*

Remarque 25. *Les supplémentaires ne sont pas uniques, on ne parle donc pas "du" supplémentaire.*

Cas général :
Soient $F_1, ..., F_k$, sous espaces vectoriels de E.
$F_1, ..., F_k$ sont en somme directe si :

$$\forall u \in F_1 + ... + F_k,\ \exists!(f_1, ..., f_k) \in F_1 \times ... \times F_k \ / \ u = f_1 + ... + f_k$$

Proposition 7. *Les propositions suivantes sont équivalentes :*

- $\bigoplus\limits_{i=1}^{k} F_i$
- $\forall i \in [1,k],\ f_i \in F_i,\ \sum\limits_{i=1}^{k} f_i = 0 \Rightarrow \forall i,\ f_i = 0$
- *en réunissant un base de chaque F_i, on obtient une base de la somme*
- $\dim \sum F_i = \sum \dim F_i$

Troisième partie
Applications linéaires

4 Définitions et exemples

Définition 14. *Soient E et E', deux $\mathbb{K}$ espaces vectoriels.*
$f : E \to E'$ est linéaire si :

$$\forall u, v \in E,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)$$

Remarque 26. *Dans ce cas, on a forcement* $f(0) = 0$.

Vocabulaire.
— *Si* $E = E'$, f *est un endomorphisme.*
— *Si* f *est bijective,* f *est un isomorphisme.*

Remarque 27. *Si* $f : E \to E'$, *linéaire, est bijective,*
$f^{-1} : E' \to E$, *est aussi linéaire*

Exemple.

5 Image, noyau et image d'une famille de vecteurs

Notation. $\mathscr{L}(E, E') = \{f : E \to E',\ f \text{ linéaire}\}$ *est un* $\mathbb{K}$ *espace vectoriel.*

Définition 15. *Soit* $f \in \mathscr{L}(E, E')$

— $f(E)$ *est un sous espace vectoriel de* E', *noté* $Im\ f$, *prononcé image de* f.
— $\{x \in E \ / \ f(x) = 0\}$ *est un sous espace vectoriel de* E, *noté* $Ker\ f$, *prononcé noyau de* f.
— *on note* $rg(f) = dim\ Im\ f$ *(pour une dimension finie)*

Démonstration. Soient $u', v' \in f(E)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.
Montrons que $\lambda u' + \mu v' \in E$ □

Remarque 28. *Si* $E = vect(e_1, ..., e_n)$, *alors* $f(E) = vect(f(e_1), ..., f(e_n))$
Donc $rg(f) = rg(f(e_1), ..., f(e_n))$

Proposition 8. $f : E \to E$ *est injective si et seulement si* $Ker\ f = \{0\}$

Rappel 1. $f : E \to E'$ *est injective si et seulement si* $\forall u, v \in E,\ f(u) = f(v) \Rightarrow u = v$
Dont la contraposée est $\forall u, v \in E,\ u \neq v \Rightarrow f(u) \neq f(v)$

Démonstration. Si f est injective , □

Proposition 9. *Caractérisation d'une application linéaire par l'image d'une base.*
Soit $(e_1, ..., e_n)$, *une base de* E, *soient* $b_1, ..., b_n \in E'$

$$\exists! f \in \mathscr{L}(E, E'),\ \forall i,\ f(e_i) = b_i$$

Par ailleurs :

1. $(b_1, ..., b_n)$ *est libre si et seulement si* f *est injective*
2. $(b_1, ..., b_n)$ *est génératrice si et seulement si* f *est surjective*
3. $(b_1, ..., b_n)$ *est une base si et seulement si* f *est un isomorphisme*

Démonstration. Analyse :
Supposons que f existe :

□

6 Matrice d'application linéaire

Soit $f : E \to E'$, une application linéaire.
Soit $\mathscr{B} = (e_1, ..., e_n)$, une base de E
Soit $\mathscr{B}' = (e'_1, ..., e'_p)$, une base de E'

On écrit $f(e_1), ..., f(e_n)$ dans la base $\mathscr{B}'$

$$\begin{aligned}
f(e_1) &= a_{11}e'_1 + ... + a_{p1}e'_p \\
f(e_2) &= a_{12}e'_2 + ... + a_{p2}e'_p \\
&... \\
f(e_n) &= a_{1n}e'_n + ... + a_{pn}e'_p
\end{aligned}$$

On définit la matrice de f relativement aux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ par :

$$Mat(f)_{\mathscr{B}\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & & & \\ a_{p1} & a_{p2} & ... & a_{pn} \end{pmatrix}$$

Exemple. *Pour l'application :*

$$\begin{aligned} f : \quad & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ & (x, y) \mapsto (-x + 6y, -x + 4y) \end{aligned}$$

$\mathscr{B}_1 = (e_1, e_2) = ((1, 0), (0, 1))$ *est la base canonique de* $\mathbb{R}^2$.
$\mathscr{B}_2 = (e'_1, e'_2) = ((3, 1), (2, 1))$

Alors :

— $Mat(f)_{\mathscr{B}_1\mathscr{B}_1} =$