Calcul différentiel

Table des matières

1 informations utiles

Première partie

Rappels sur les espaces vectoriels normés

2 Rappels de topologie

Soit E, un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Définition 1. *Une norme sur E est une application* $||||_E : E \to \mathbb{R}$ *vérifiant :*
- $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ ||\lambda x||_E = |\lambda|||x||_E$
- $\forall x, y \in E,\ ||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$, *il s'agit de l'inégalité triangulaire*
- $\forall x \in E,\ ||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$

Exemple. *Pour* $E = \mathbb{R}^n$,

$$||x||_2 = \sqrt{\sum_i x_i^2}$$

$$||x||_\Delta = \sum_i |x_i|$$

$$||x||_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$$

2.1 Distance associée à la norme

Définition 2. *La distance associée à cette norme est :*

$$\begin{aligned} E \times E &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto d(x, y) := ||x - y|| \end{aligned}$$

Exemple. *Pour* $A = (1,0)$, $B = (0,1)$,

$$d_2 = \sqrt{2}$$

$$d_\Delta = 2$$

$$d_\infty = 1$$

Définition 3. *Deux normes* $||\cdot||$ *et* $||\cdot||'$ *sont dites équivalentes s'il existe deux constantes* $C > 0$ *et* $C' > 0$ *telles que :*

$$\forall x \in E,\ C'||x|| \leq ||x||' \leq C||x||$$

Exercice. *Montrer qu'il s'agit effectivement d'une relation d'équivalence.*

Théorème 1. *Si* $\dim E < +\infty$,
toutes les normes sont équivalentes.

Exemple. *Sur* $\mathbb{R}^2$,

$$||x$$

Rappel 1.

$$< x, y >= ||x||_2||y||_2$$

Sur les espaces de dimension infinie, les choses peuvent être plus compliquées.

Exemple. *Dans* $E = C^0([0,1],\mathbb{R})$*, pour* $f \in E$*, on note,*

$$||f||_2 = \sqrt{\int_0^1 f^2(t)dt}$$

$$||f|| = \int_0^1 f(t)dt$$

$$||f||_\infty = \sup_{0\leq t\leq 1} |f(t)|$$

Soit

$$f_n : \begin{array}{c} [0,1] \to \mathbb{R} \\ t \mapsto t^n \end{array}$$

$$||f_n||_1 = \int_0^1 t^n dt$$

$$||f_n||_\infty = 1$$

Si $||\cdot||_1$ *et* $||\cdot||_\infty$ *étaient équivalents, on aurait une constate* C *telle que :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ ||f_n||_\infty \leq C||f_n||_1$$

or,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ ||f_n||_\infty = 1\ et\, C||f_n||_1 = 0$$

On arrive donc à une contradiction.

2.2 rappels de topologie des espaces vectoriels normés

Définition 4. *Une boule ouverte est un ensemble* $B_{(x,r)}$ *de la forme :*

$$B_{(x,r)} = \{y \in E \mid ||x - y|| < r\}$$

Définition 5. *Un sous-ensemble* Ω *est un ouvert si :*

$$\forall x \in \Omega,\ \exists r > 0,\ \mid B_{(x,r)} \subset \Omega$$

Remarque 1. *Une conséquence de cette définition est que $\emptyset$ est un ouvert.*

Définition 6. *Une partie $V \subset E$ est un voisinage de $x_0 \in E$ si :*

$$\exists r > 0 \mid B_{(x_0,r)} \subset V$$

Définition 7. *Une partie $F \subset E$ est dite fermée si le complémentaire de F $E \backslash F$ est un ouvert.*

Exemple. *Dans $\mathbb{R}^2$,*
$O = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ *est un ouvert*
$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\}$ *est un fermé*

Définition 8. *Pour E de dimension finie ($\dim E < +\infty$), une partie $X \subset E$ est un compact si elle est fermée et bornée.*

2.3 Norme d'opérateur

$(E, ||\cdot||_E)$ est un espace vectoriel normé de dimension finie ;
$(F, ||\cdot||_F)$ est un espace vectoriel normé de dimension finie ;
$\mathscr{L}(E,F)$ est aussi un espace vectoriel normé
Pour $u \in \mathscr{L}(E,F)$, on définit la norme triple :

$$|||u||| = \sup_{u \in \mathscr{L}(E,F)} \frac{||u(x)||_F}{||x||_E}$$

Proposition 1. *En dimension finie,*

$$\forall u \in \mathscr{L}(E,F),\ |||u||| < +\infty$$

Remarque 2.

$$\begin{aligned} \frac{||u(x)||}{||x||} &= \frac{1}{||x||}||u(x)|| \\ &= ||\frac{1}{||x||}u(x)|| \\ &= ||u(\frac{x}{||x||})|| \end{aligned}$$

Par conséquent, $|||u||| = \sup \frac{u(x)}{x}$

Proposition 2. $|||\cdot||| : \mathscr{L}(E,F) \to \mathbb{R}$ *est une norme*

Propriété 1. — $\forall u \in \mathscr{L}(E,F),\ \forall x \in E$

$$||u(x)|| \leq |||u||| \cdot ||x||$$

— $\forall u \in \mathscr{L}(E,F),\ \forall v \in \mathscr{L}(F,G),$

$$|||v \circ u||| \leq |||v||| \cdot |||u|||$$

Remarque 3. *$\mathscr{L}(E,E)$ est une algèbre, i.e. possède un produit :*

$$(u,v) \mapsto u \circ v$$

et

$$|||u \cdot v||| \le |||u||| \cdot |||v|||$$

On dit que $|||\cdot|||$ est une norme d'algèbre

Exercice.

3 Limite et continuité

Définition 9. *Soit x_n, une suite de E, soit $l \in E$,*
on dit que (x_n) converge vers l et on note $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$ si

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \ge N,\ ||x_n - l|| < \epsilon$$

Rappel 2. *Les notions d'ouverts, de fermés, etc... se caractérisent en terme de suites convergentes.*

Exemple.
- *$\Omega \in E$ est un ouvert si et seulement si $\forall\, l \in \Omega$, $\forall (x_n)$, suite de E, / $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = l$, on a :*
  $\exists N \in \mathbb{N}$ / $\forall n > N$, $x_n \in \Omega$
- *$F \subset E$ est fermée si : $\forall (x_n)$ suite de F , $\forall\, l \in E$, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = l$, on a $l \in F$ (i.e. F contient toutes les limites de ses suites)*
- *$K \subset E$ est compact si toute suite de K a une valeur d'adhérence dans K.*

Rappel 3. *Une valeur d'adhérence de (x_n) est une limite d'une suite extraite.*
Une suite extraite de (x_n) est une suite de la forme $(x_{\phi(n)})_{x\in\mathbb{N}}$ où $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante

Définition 10. *Soit $\Omega \in E$, un ouvert.*
Soit f, une application telle que $f : \Omega \to \mathbb{R}$,
Soit $x_0 \in E$ et $l \in F$
On dit que f a pour limite sur x_0 si : $\forall \epsilon > 0$, $\exists r > 0$, $\forall x \in \Omega$, $||x - x_0|| < r \Rightarrow ||f(x) - f(x_0)|| < \varepsilon$ On note alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$

Définition 11. *Soit $f : \Omega \to F$, et $x_0 \in \Omega$*
f est continue en x_0 si f a pour limite $f(x_0)$ quand x tend vers x_0 (i.e. f est continue en x_0 si $\lim\limits_{x\to x_0}$ existe et $\lim\limits_{x\to x_0} = f(x_0)$)

Remarque 4. *Avec la définition de la limite,*
si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ existe, alors cette limite est nécessairement $f(x_0)$

Définition 12. *f est continue si f est continue sur Ω si f est continue en tout point de Ω*

Exemple.

$$f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} \; si \; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \; si \; (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}$$

Deuxième partie
Différentiabilité

Rappel 4. *Rappels en dimension 1 :*
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est dérivable en* $x_0 \in \mathbb{R}$ *de dérivée* λ
$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lambda$

Une définition équivalente est la suivante :
f *est dérivable en* x_0 *de dérivée* λ *s'il existe une fonction* $\varepsilon(h)$ *telle que :*

— $f(x) = f(x_0) + \lambda(x - x_0)\varepsilon(x - x_0)$
— $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$

Il suffit alors de poser $\varepsilon(h) = \frac{f(x-h)-f(x_0)}{h}$ *Où on a alors la pente de* Δ_{x_1} *s'exprimant* $\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$
On peut aussi voir Δ_{x_1} *comme le graphe d'une application affine :*

$$u(x) = f(x_0) + \tau(x - x_0)$$

$$u(x_0 + h) = f(x_0) + \tau h$$

Ces deux points de vue induisent deux points de vue si la dérivée $f'(x_0) \in \mathbb{R}$ *est la pente de la tangente :*

$$f'(x_0) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$f'(x_0) : h \mapsto f'(x_0)h$$

Le second point se généralise aux dimensions superieures à 1.

4 Applications différentiables

$$f : \Omega \subset E \to F$$

$$p_0 \in \Omega$$

Définition 13. f *est différentiable en* p_0 *s'il existe une application linéaire* $l : E \to F$ *est une fonction* $\varepsilon : \Omega \to F$ *telle que :*
— $f(p_0 + h) = f(p_0) + l(h) + ||h||\varepsilon(h)$
— $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$

Proposition 3. *Si* f *est différentiable en* p_0*, l'application linéaire de la différentielle est unique. On l'appelle différentielle de* f *en* p_0 *et on la note* $L = D_{p_0} f$

Démonstration. Si L_1 et L_2 conviennent :

$$\begin{array}{l} f(p_0 + h) = f(p_0) + L_1 h + ||h||\varepsilon_1(h) \\ f(p_0 + h) = f(p_0) + L_2 h + ||h||\varepsilon_2(h) \end{array} \Rightarrow 0 = 0 + (L_1 - L_2)h + ||h||(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(h)$$

fixons h, pour $t \in [0,1]$:

$$\begin{aligned}&(L_1 - L_2)(th) + ||th||(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(th)\\&= t((L_1 - L_2)(h) + ||h||(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(h))\\&= t0\\&= 0\end{aligned}$$

D'où $\lim_{t\to 0}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(th) = 0$,
Par conséquent $(L_1 - L_2)(h) = 0$
Donc, pour tout h tel que $(p_0 + h) \in \Omega$, $L_1(h) = L_2(h)$
Donc $L_1 = L_2$ sur une petite boule $B(0,1)$.
On peut alors généraliser à $L_1 = L_2$ □

Définition 14. *Si f est différentiable en tout point de Ω, on dit que f est différentiable sur Ω.*
Si de plus, $\begin{array}{l}\Omega \to \mathscr{L}(E,F)\\ p \mapsto D_p f\end{array}$ *est continue, ont dit que f est de classe $\mathscr{C}^1$.*

Exemple. — $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *linéaire :*

$$\begin{aligned}f(p_0 + h) &= f(p_0) + f(h)\\&= f(p_0) + f(h) + ||h||\varepsilon(h)\end{aligned}$$

f est différentiable, et $D_p f = f$

— $\begin{array}{l}f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\\ (x,y) \mapsto x^2 + y^2\end{array}$ $p_0 = (x_0, y_0)$
$h = (u, v)$

5 Immersions, submersions et sous-variétés

5.1 Motivations

5.1.1 Dans le monde linéaire

soit E un espace vectoriel, soit de plus Σ, un sous espace vectoriel,
Σ peut être donné par

— des équations de la forme

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \ldots + a_{1,n}x_n = 0\\ \ldots\\ a_{k,1}x_1 + \ldots + a_{k,n}x_n = 0\end{cases}$$

avec des équations linéairement indépendantes

— une représentation paramétrique

$$\sigma = \{\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n\}_{\lambda_i \in \mathbb{K}}$$

on choisi alors $\{v_i\}$ libre.
alors $dim(\Sigma) = k$

5.1.2 Dans le monde du calcul différentiel

Σ peut être donnée par
— des équations (locales)
— des paramétrages (locaux)
On se demande alors à quelles conditions :

— des équations $F : E \to \mathbb{R}^k, \ / \ F = 0$ définissent un ensemble "lisse" ?

— un paramétrage $\varphi : \mathbb{R}^k \to E$ a une image "lisse" ?

Comment passer d'une représentation à l'autre ?

Remarque 5. *Dans le monde linéaire, comment se traduit le fait que des équations sont linéairement indépendantes ?*

$$\begin{cases} a_{1,1} x_1 + ... + a_{1,n} x_n = 0 \\ ... \\ a_{k,1} x_1 + ... + a_{k,n} x_n = 0 \end{cases}$$

On s'intéresse à l'application

$$\begin{aligned} F : \quad & \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-k} \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \sum_i a_{1i} x_i \\ \vdots \\ \sum_i a_{ki} x_i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Les équations du système sont linéairement indépendantes si et seulement si l'application F est surjective.

Remarque 6. *Dans le monde linéaire, comment se traduit le fait qu'un paramétrage $\Sigma = \{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i, \ \lambda_i \in \mathbb{R}\}$ soit associé au choix d'une famille de vecteurs $\{v_i\}$ libres.*

$$\begin{aligned} & \varphi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n \\ & \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix} \mapsto \sum_i \lambda_i v_i \end{aligned}$$

Alors, la famille $\{v_i\}$ est libre si et seulement si φ est injective.

5.1.3 En résumé

Dans le monde linéaire, un sous espace vectoriel de dimension k est donné soit comme $Ker(F)$ avec $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-k}$ surjective, soit comme $Im(\varphi)$ avec $\varphi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ injective.

Définition 15.

- *Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-k}$,*
  on dit que f est une submersion si et seulement si la différentielle est partout surjective.
  $$\forall x \in \Omega,\ D_x f \text{ est surjective}$$
- *Soit $\varphi : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-k}$,*
  on dit que f est une immersion si et seulement si la différentielle est partout injective.
  $$\forall x \in D,\ D_x\varphi \text{ est injective}$$

Proposition 4. *Soit $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ et $x_0 \in \Sigma$, $k \in \mathbb{N}$,*
les deux affirmations suivantes sont équivalentes :

—

—

Exemple. *On prend $\Sigma \subset \mathbb{R}^2$, le cercle unité $\{z \in \mathbb{C} \ / \ |z| = 1\}$*
On considère alors $x_0 = 1 = (1,0)$
$\Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 - 1 = 0\}$

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 1$$

$D_{(x,y)}F = 2xdx + 2ydy$
$Jac_{(x,y)}F = (2x, 2y)$

$$D_{(x,y)}F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto 2xu + 2yv$$

$D_{(x,y)}F$ est surjective dès lors que $(x, y) \neq (0,0)$
$F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ est une submersion.

$$\varphi :]-\pi, \pi[\to \mathbb{R}^2$$
$$\theta \mapsto \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\Sigma \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{(-1,0)\} \text{ voisinage de } x_0 = \varphi(]-\pi,\pi[)$$

Démonstration. Pour U, voisinage de x_0, telle que $\Sigma \cap U = \{F = 0\}$.
Par translation, on se ramène à $x_0 = 0$
$D_{x_0}F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-k}$

soit $T = Ker(D_{x_0}F)$, on a $dim(T) = k$
Soit N, un supplémentaire de T dans $\mathbb{R}^n$:

$$\mathbb{R}^n = T \oplus N$$

Pour $x \in \mathbb{R}^n,\ x = x_T + x_N$

$$\begin{aligned} F : T \times N &\to \mathbb{R}^{n-k} \\ (x_T, x_N) &\mapsto F(x_T + x_N) \end{aligned}$$

Soit $(e_1, ..., e_k)$, une base de T, et $(e_{k+1}, ..., e_n)$, une base de N
Donc $\mathscr{B} = (e_1, ..., e_n)$
$Jac_{(x_0)|\mathscr{B}}F = (0 \ \ A)$ avec $A \in \mathscr{M}_{n-k,k-n}(\mathbb{R})$
$D_{x_0}F$ est donc surjective et A est surjective.
$rg(A) = (n-k)$
Donc A est surjective et $dim(Ker(A)) = (n-k) - (k-n) = 0$
donc A est inversible
Donc $\frac{\partial F}{\partial x_N}(x_0) = D_{x_0}F_{|N}$ est inversible. Donc, par le théorème des fonctions implicites :
Il existe U' un voisinage de 0 dans T
et V, un voisinage de V dans N □

Théorème 2. *Soit $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$,*
les deux affirmations suivantes sont équivalentes :

1. *Il existe un voisinage U de x tel que $\Sigma \cap U$ est le niveau d'une submersion de $\Omega \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$.*
2. *Il existe un voisinage U de x tel que $\Sigma \cap U$ est l'image d'une immersion injective de $\Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-d}$.*

Démonstration. — $1 \Rightarrow 2$ voir autre cours
— $2 \Rightarrow 1$ Soit φ, un plongement d'un voisinage U_0 de 0 dans $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ tel que $\Sigma \cap U = \varphi(U_0)$.
Soit $T = ImD_0\varphi \subset \mathbb{R}^n$
Soit N un supplémentaire de T dans $\mathbb{R}^n$: $\mathbb{R}^n = T \oplus N$
Soit $F : \begin{aligned} U_0 \times N &\to \mathbb{R}^n \\ (t,n) &\mapsto \varphi(t) + n \end{aligned}$ On s'interesse alors à $D_{(t,n)}F$
On choisit une base $\mathscr{B}_{\mathbb{R}^d}$ de $\mathbb{R}^d$.
On choisit une base $\mathscr{B}_T$ de T.
On choisit une base $\mathscr{B}_N$ de N.

$$\mathscr{B} = \mathscr{B}_T \cup \mathscr{B}_N$$

$$Jac_0F_{(|\mathscr{B}_{\mathbb{R}^d} \cup \mathscr{B}_N, \mathscr{B}_T \cup \mathscr{B}_N)} = \left(Jac_0(\varphi)_{(\mathscr{B}_{\mathbb{R}^d}, \mathscr{B}_T)} \right)$$

□