

Algèbre linéaire

Table des matières

I	Systèmes d'équations linéaires	3
1	Résolution	3
1.1	Équivalence de systèmes	3
1.2	Méthode du pivot de Gauss	4
II	Chapitre 2 : Espaces vectoriels	7
2	Notion d'espace vectoriel	7
2.1	Définitions	7
2.2	Sous-espace vectoriel	9
2.3	Sous espace engendré	10
2.4	Intersections	11
2.5	Somme de sous espaces vectoriels	12
3	Familles libres, génératrices et bases	12
3.1	Familles libres, génératrices	12
3.2	Exemples de dimensions (et bases)	13
3.3	rang d'une famille de vecteurs	14
3.4	Somme directe	15
III	Applications linéaires	16
4	Définitions et exemples	16
5	Image, noyau et image d'une famille de vecteurs	16
6	Matrice d'application linéaire	17
7	calcul de l'inverse d'une matrice	18
7.1	Systèmes linéaires	18
7.2	Méthode "magique"	18
IV	Déterminants	18

8	Volume orienté du parallélogramme dans le plan	18
9	Définitions et propriétés	18
9.1	Définition par récurrence	18
9.2	définition par forme multilinéaire alternée	19

Première partie

Systèmes d'équations linéaires

Soit \mathbb{K} , un corps.

Définition 1. Un système d'équations linéaires à n inconnues et p équations est un système d'équations de la forme :

$$(S) \begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + \dots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{p,1}x_1 + \dots + a_{p,n}x_n = b_p \end{cases}$$

avec $a_{i,j}$ et b_i des éléments de \mathbb{K}
et x_j sont les inconnues.

Définition 2. Une solution est le n -uplet (x_1, \dots, x_n) tel que x_1, \dots, x_p sont solutions de toutes les équations.

Définition 3. Les b_1, \dots, b_p sont appelés seconds membres.

Remarque 1. *a priori*, $n \neq p$

Les inconnues peuvent être notées différemment $((x, y, z, t), (\lambda_1, \lambda_2, \dots))$

Exemple.

$$(S) \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + 5y = 2 \end{cases}$$

Dont l'unique solution est $(0, 1)$

Remarque 2. Résoudre un système consiste à trouver toutes les solutions ou à montrer qu'il n'y en a aucune.

1 Résolution

1.1 Équivalence de systèmes

Pour résoudre, on se ramène à un système équivalent plus simple :

$$(S) \Leftrightarrow (S') \begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + \dots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{p,1}x_1 + \dots + a_{p,n}x_n = b_p \end{cases}$$

$(S) \Leftrightarrow (S')$ signifie que les deux systèmes ont les mêmes solutions.

1.2 Méthode du pivot de Gauss

On ne change pas les solutions en faisant une des trois opérations suivantes :

- changer l'ordre des équations
- multiplier une équation par un élément $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$
- Ajouter à une équation un multiple d'une autre

ou toute opération qui peut se décomposer en une série de telles opérations

Exemple.

$$\begin{aligned}
 (S) \quad & \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 & L_1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 2 & L_2 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 - 6x_4 = 2 & L_3 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 & L_1 \\ -x_3 + 3x_4 = 0 & L_2 - 2L_1 \rightarrow L_2 \\ 2x_3 - 5x_4 = -1 & L_3 - L_1 \rightarrow L_3 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 & L_1 \\ -x_3 + 3x_4 = 0 & L_2 \\ x_4 = 1 & L_3 + 2L_2 \rightarrow L_3 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Remarque 3. Erreur possible :

$$(S') \quad \begin{cases} -2x_3 - 5x_4 = 1 & L_1 - L_3 \rightarrow L_1 \\ -x_3 + 3x_4 = 2 & L_2 \\ 2x_3 - 5x_4 = 1 & L_3 - L_1 \rightarrow L_3 \end{cases}$$

Il n'y a pas ici d'équivalence avec le système précédent, juste une implication :

Il n'est ici pas possible de décomposer ces opération en une série d'opérations de Gauss (il n'est plus possible, après ces opération, de retrouver les lignes L_1 et L_3 d'origine)

Méthode du pivot de Gauss :

1. — Si $a_{1,1} \neq 0$, on remplace, pour tout i supérieur à 1, L_i par $L_i - \frac{a_{i,1}L_1}{a_{1,1}}$ (ce qui correspond à l'annulation des coefficients devant x_1 dans les L_i)

Notation. $a_{1,1}$ est alors appelé le pivot

- Si $a_{1,1} = 0$, mais qu'il existe une autre ligne sur laquelle $a_{i,1} \neq 0$, alors on échange L_1 et L_i et on est ramené au cas précédent.
- Si, à toutes les lignes, $a_{i,1} = 0$, alors on prend j_1 le plus petit indice tel que $\exists i / a_{i,j_1} \neq 0$ et on reprend à l'étape précédente.

2. Ensuite, on ne touche plus à la première équation et on résout le système en continuant l'algorithme sur les autres équations.

3. À la fin, on obtient un système dit échelonné, c'est-à-dire de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a'_{1,j_1} x_{j_1} + \dots + a'_{1,n} x_n & = & b'_1 \\ a'_{2,j_2} x_{j_2} + \dots + a'_{2,n} x_n & = & b'_2 \\ & \dots & \\ a'_{r,j_r} x_{j_r} & = & b'_r \\ & \dots & \\ 0 & = & b'_{n-1} \\ 0 & = & b'_n \end{array} \right.$$

avec $1 \leq j_1 \leq j_2 \leq \dots \leq j_r \leq n$

Remarque 4. Les dernières équation dont le premier membre est nul peuvent apparaître si on élimine toutes les inconnues avant d'arriver à la dernière équation.

Plusieurs cas sont alors possibles :

- Si r est différent de n , alors :
 - Si $\exists i > n, b'_i \neq 0$, on est face à une contradiction, le système n'a donc pas de solutions.
 - Si $\forall i > n, b'_i = 0$, on peut retirer b , les équations sont inutiles.
- Si r et n sont égaux, alors :
 - Si $(j_1, \dots, j_n) = (1, \dots, n)$, le système est dit de Cramer
 - Si pour tout second membre, il existe une unique solution, on réinjecte cette solution à partir de la dernière équation.
 - Si $(j_1, \dots, j_n) \neq (1, \dots, n)$, les x_{j_1}, \dots, x_{j_n} sont appelées les inconnues principales. Les autres variables s'appellent les variables libres dans le second membre, et il reste un système de Cramer avec les inconnues $(x_{j_1}, \dots, x_{j_n})$.

Donc, pour chaque valeurs prisent par les variables libres, on a une unique solution, le système admet alors une infinité de solutions (Seulement si \mathbb{K} est infini, sinon, il y a q^{n-r} solutions).

Exemple.

$$(S) \left\{ \begin{array}{lcl} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 & = & 1 \\ -x_3 + 3x_4 & = & 0 \\ x_4 & = & 1 \end{array} \right.$$

x_1, x_2, x_3 sont les inconnues principales

$j_1 = 1, j_2 = 3, j_3 = 4$

x_2 est la variable libre.

$$\begin{aligned} (S) \quad & \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 &= 1 \\ -x_3 + 3x_4 &= 0 \\ x_4 &= 1 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_4 &= 1 - x_2 \\ -x_3 + 3x_4 &= 0 \\ x_4 &= 1 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 &= 1 - x_2 - 6 + 1 = -4 - x_2 \\ x_3 &= 3 \\ x_4 &= 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Les solutions de ce système sont donc les éléments de la forme $(-4 - \lambda, \lambda, 3, 1)$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$

Deuxième partie

Chapitre 2 : Espaces vectoriels

Soit \mathbb{K} , un corps (\mathbb{R} , \mathbb{C} , ou autre)

2 Notion d'espace vectoriel

2.1 Définitions

Définition 4. (non formelle) Un \mathbb{K} -espace vectoriel est un ensemble d'éléments appelés vecteurs tels qu'on puisse les additionner entre eux et les multiplier par des scalaires, c'est-à-dire des éléments de \mathbb{K} avec des relations naturelles de compatibilité.

Définition 5. Un \mathbb{K} -espace vectoriel est un ensemble E muni de deux lois :

— une loi de composition interne :

$$\begin{aligned} + : E \times E &\rightarrow E \\ (u, v) &\mapsto u + v \end{aligned}$$

— une loi de composition externe :

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{K} \times E &\rightarrow E \\ (\lambda, u) &\mapsto \lambda \cdot u \end{aligned}$$

Ces lois vérifient :

A1 : $\forall u, v, w \in E, (u + v) + w = u + (v + w)$
la loi $+$ est donc associative

A2 : $\forall u, v \in E, u + v = v + u$
la loi $+$ est donc commutative

A3 : $\exists 0_E \in E, \forall u \in E, u + 0_E = 0_E + u = u$
la loi $+$ admet un élément neutre

A4 : $\forall u \in E, \exists v \in E, u + v = v + u = 0_E$
chaque élément de E admet, par $+$, un inverse ou opposé

B1 : $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall u \in E, \lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda \cdot \mu) \cdot u$
la loi \cdot est associative

B2 : $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall u \in E, (\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u$
la loi \cdot est distributive à gauche

B3 : $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u, v \in E, (u + v) \cdot \lambda = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$
la loi \cdot est distributive à droite

B4 : $\forall u \in E, 1 \cdot u = u$
la loi \cdot admet un élément neutre

Remarque 5. Dans l'axiome A3, l'élément neutre est unique.
 Dans l'axiome A4, le vecteur v est en fait unique, on le note $-u$.

Proposition 1. On a également, $\forall u \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}$:

1. $\lambda \cdot 0_E = 0_E$
2. $0_{\mathbb{K}} \cdot u = 0_E$
3. $\lambda \cdot u = 0_E \Rightarrow \lambda = 0_{\mathbb{K}} \text{ ou } u = 0_E$
4. $(-\lambda) \cdot u = \lambda \cdot (-u) = -(\lambda \cdot u)$

Démonstration.

1.

$$\begin{aligned}\lambda \cdot 0_E &= \lambda \cdot (0_E + 0_E) \\ &= \lambda \cdot 0_E + \lambda \cdot 0_E \\ &= \lambda \cdot 0_E + 0_E \\ \lambda \cdot 0_E &= 0_E\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}0_{\mathbb{K}} \cdot u &= (0_{\mathbb{K}} + 0_{\mathbb{K}}) \cdot u \\ &= 0_{\mathbb{K}} \cdot u + 0_{\mathbb{K}} \cdot u \\ &= 0_{\mathbb{K}} \cdot u + 0_{\mathbb{K}} \\ 0_{\mathbb{K}} \cdot u &= 0_{\mathbb{K}}\end{aligned}$$

3. Si $\lambda = 0_{\mathbb{K}}$, cf. 2

Si $\lambda \neq 0$, alors $\lambda^{-1} \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned}0 &= \lambda^{-1} \cdot 0 \\ &= \lambda^{-1} (\lambda \cdot u) \\ &= (\lambda^{-1} \cdot \lambda) \cdot u \\ &= 1 \cdot u \\ &= u\end{aligned}$$

□

Notation. On note souvent :

- $0_E = 0$ et $0_{\mathbb{K}} = 0$
- $u - v = u + (-v)$

Lemme 1. $\forall u, v, w \in E, u + w = v + w \Rightarrow u = v$

Démonstration.

$$\begin{aligned}v &= (u + w) - w \\ &= u + (w - w) \\ &= u + 0_E \\ &= u\end{aligned}$$

donc $v = u$

□

Remarque 6.

- Pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $u \in E$ $u \cdot \lambda$ ne veut rien dire.
- Pour $u, v \in E$ $u \cdot v$ ne veut rien dire

Exemple.

1/ Pour les lois de compositions internes et externes usuelles,

- \mathbb{K} est un \mathbb{K} -espace vectoriel
- \mathbb{K}^n est un \mathbb{K} -espace vectoriel
- plus généralement, si E_1 et E_2 sont des \mathbb{K} espaces vectoriels, $E_1 \times E_2$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel.

2/ Soit E , un \mathbb{K} -espace vectoriel et A , un ensemble quelconque,

- $\mathcal{F}(A, E)$, l'ensemble des applications de A dans E , est un \mathbb{K} -espace vectoriel

$$\forall f_1, f_2 \in \mathcal{F}(A, E), \forall \lambda \in \mathbb{K},$$

$$f_1 + f_2 : A \rightarrow E$$

$$a \mapsto f_1(a) + f_2(a)$$

$$\lambda \cdot f_1 : A \rightarrow E$$

$$a \mapsto \lambda \cdot f_1(a)$$

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $A = I \subset \mathbb{R}$, un intervalle, on peut avoir $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$
- Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $A = \mathbb{N}$, on a $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, l'ensemble des suites numériques

3/ $\mathbb{K}[X]$, l'ensemble des polynômes

4/ $M_{n,p}(\mathbb{K})$, l'ensemble des matrices à coefficient dans \mathbb{K} , à n lignes et p colonnes.

Remarque 7. \mathbb{R}^2 , munit de la loi + usuelle et $\lambda \cdot (x_1, x_2) = (\lambda \cdot x_1, 0)$

n'est pas un \mathbb{K} -espace vectoriel, pourquoi?

2.2 Sous-espace vectoriel

Définition 6. Soit E , un \mathbb{K} -espace vectoriel, et $F \subset E$.

F est un sous espace vectoriel de E s'il s'agit d'un \mathbb{K} -espace vectoriel pour les lois + et \cdot de E .

- $\forall u, v \in F, u + v \in F$
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u \in F, \lambda \cdot u \in F$
- + et \cdot vérifient les propriétés des lois de composition interne et externe des espaces vectoriels

Propriété 1. F est un sous-espace vectoriel de E si :

- $F \neq \emptyset$
- $\forall u, v \in F, u + v \in F$
- $\forall u \in F, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \cdot u \in F$

Démonstration. Pour montrer que les sous espaces vectoriels vérifient les axiomes A1 à B4 :

La vérification des axiomes A1, A2, B1, B2, B3 et B4 est immédiate.

Pour A3 :

$$\exists 0_F \subset F, \forall u \in F, u + 0_F = 0_F + u = u$$

Il suffit alors de montrer que $0_E \in F$,
or, $F \neq \emptyset$, donc, $\exists u \in F, 0 \cdot u = 0_E \in F$

Pour A4 :

Il suffit alors de montrer que $\forall u \in F, -u \in F$:
 $-u = (-1) \cdot u$ où $-u \in F$ par hypothèse. □

Remarque 8. — On a vu que $0_E \in F$

— Les deux derniers points de la définition de sous-espace vectoriel sont équivalents à :

$$\forall u, v \in F, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \lambda u + \mu v \in F$$

ou encore à :

$$\forall u, v \in F, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda u + v \in F$$

Remarque 9. Dans la plupart des cas, pour montrer qu'un ensemble (avec les lois $+$, \cdot) est un espace vectoriel, on montre qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel d'un \mathbb{K} -espace vectoriel connu.

Exemple. — $\{0\}$ et E sont des sous-espace vectoriels de E .

— $F = \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions continues sur un intervalle I de \mathbb{R} .

F est sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions de I sur \mathbb{R} :

La fonction nulle est continue.

$\forall f, g \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}), \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \lambda f + \mu g$ est continue, donc $\lambda f + \mu g \in F$.

— $E = \mathbb{K}^n$ et $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$

$F = \{(x_1, \dots, x_n) \mid a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de E .

— $\mathbb{K}[X]$, les suites de \mathbb{K} nulles à partir d'un certain rang, est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites de \mathbb{K}

2.3 Sous espace engendré

Définition 7. Une combinaison linéaire de v_1, \dots, v_p est un élément de la forme $\sum_{i=1}^p \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$.

Exemple. Dans $\mathbb{K}[X]$, une combinaison linéaire est un polynôme.

Remarque 10. Une combinaison linéaire de $(v_i)_{i \in I}$ est une combinaison linéaire au sens précédent d'une sous famille finie.

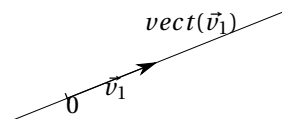
Exemple. Dans $\mathbb{K}[X] = \{1, X, X^2, \dots, X^n, \dots\}$, une combinaison linéaire est un polynôme.

Définition 8. Soient $v_1, \dots, v_p \in E$

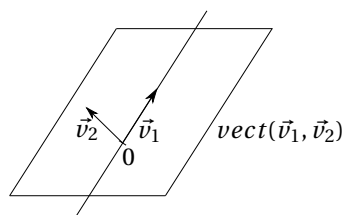
$$\text{vect}(v_1, \dots, v_p) = \{\text{combinaisons linéaires de } v_1, \dots, v_p\} = \left\{ \sum_{i=1}^p \lambda_i v_i \mid \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K} \right\}$$

Proposition 2. $\text{vect}(v_1, \dots, v_p)$ est un sous espace vectoriel de E .

Exemple. Cas particulier :
 $p = 1$, $\text{vect}(v_1)$ est alors une droite vectorielle.



$p = 2$, si v_2 n'appartient pas à $\text{vect}(v_1)$, alors $\text{vect}(v_1, v_2)$ est un plan vectoriel



Proposition 3. $\text{vect}(v_1, \dots, v_p)$ est un sous espace vectoriel de E .

2.4 Intersections

Proposition 4. Soient F_1, F_2 des sous-espaces vectoriels de E , alors, $F_1 \cap F_2$ est un sous espace vectoriel :

$$F_1 \cap F_2 = \{x \in E \mid x \in F_1 \text{ et } x \in F_2\}$$

Démonstration. — $0 \in F_1$ et $0 \in F_2$, donc $0 \in F_1 \cap F_2$

l'intersection est donc non vide

— Soient $u, v \in F_1 \cap F_2$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$

On montre que $\lambda u + \mu v \in F_1 \cap F_2$

$\lambda u + \mu v \in F_1$ car F_1 est un sous espace vectoriel

$\lambda u + \mu v \in F_2$ car F_2 est un sous espace vectoriel

□

application :

L'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires homogène (sans second membre) à n inconnues (et p équations) est un sous espace vectoriel de \mathbb{K}^n .

Démonstration. Intersection des sous espaces vectoriels est solution de chaque équations □

Remarque 11. Attention,

— En général, l'union de sous espaces vectoriels n'est pas un sous espaces vectoriels (sauf cas triviaux)

— Le complémentaire d'un sous-espace vectoriel n'est jamais un sous-espace vectoriel (étant privé du 0)

2.5 Somme de sous espaces vectoriels

Définition 9. Soient F_1, F_2 , des sous espaces vectoriels, on définit :

$$F_1 + F_2 = \{f_1 + f_2 \mid f_1 \in F_1, f_2 \in F_2\}$$

Remarque 12. $F_1 + F_2$ est un sous-espace vectoriel de E

Exemple.

Proposition 5. Si $F_1 = \text{vect}(v_1, \dots, v_{p_1})$ et $F_2 = \text{vect}(w_1, \dots, w_{p_2})$, alors,

$$F_1 + F_2 = \text{vect}(v_1, \dots, v_{p_1}, w_1, \dots, w_{p_2})$$

Démonstration. Soit $u \in F_1 + F_2$

$$\exists f_1 \in F_1, \exists f_2 \in F_2, \mid u = f_1 + f_2$$

$$\exists f_1 \in F_1, \exists f_2 \in F_2, \mid u = f_1 + f_2$$

□

Remarque 13. $F_1 - F_2$ n'est pas intéressant : $\{f_1 + (-f_2) \mid f_1 \in F_1, f_2 \in F_2\} = F_1 + F_2$

Remarque 14. $F_1 + F_2 \neq F_1 \cup F_2$

3 Familles libres, génératrices et bases

3.1 Familles libres, génératrices

Définition 10. On dit que (v_1, \dots, v_p) est une famille génératrice de E si $\text{vect}(v_1, \dots, v_p) = E$

Vocabulaire. E est dit finiment engendré s'il existe une famille génératrice finie.

Remarque 15. intuitivement, (v_1, \dots, v_p) est génératrice si elle "voit" tous les éléments de E .

Remarque 16. A priori, il peut y avoir plusieurs manières d'écrire un élément de E

Exemple. Pour $E = \mathbb{R}^2$, $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$, $e_3 = (1, 1)$, on a $e_3 = e_1 + e_2$ la famille $\{e_1, e_2, e_3\}$ est génératrice.

calcul pratique :
trouver une famille génératrice d'un sous espace vectoriel défini par des équations.

Exemple. $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0$

On résoud le système

Proposition 6. Soit E de dimension finie, et F sous espace vectoriel de E .

1. F est de dimension finie et $\dim F \leq \dim E$
2. $\dim F = \dim E$ si et seulement si $F = E$

Démonstration. 1. Semble évident mais ne l'est pas.

2. Si $\dim F = \dim E$,
on pose $\{f_1, \dots, f_n\}$, base de F , est aussi une famille libre de E avec $n = \dim E$
éléments dans une base de E .
Pour la réciproque, si $\dim F \neq \dim E$, $F \neq E$

□

Remarque 17. f_1, \dots, f_k de F sous espace vectoriel de E .

f_1, \dots, f_k est une famille libre de F si et seulement si c'est une famille libre de E

Remarque 18. Le second point est utile en pratique pour montrer que deux espaces vectoriels F et G sont égaux, on montre que $F \subset G$ et que les deux sont de même dimension.

3.2 Exemples de dimensions (et bases)

- \mathbb{K}^n
base canonique : $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ ou 1 se trouve à la i -ème place.
 (e_1, \dots, e_n) est une base avec $\dim \mathbb{K}^n = n$
- Soient E, F , deux espaces vecteurs de dimensions finies
 $E \times F$ est de dimension finie $\dim E + \dim F$
Soit (e_1, \dots, e_n) base de E
Soit (f_1, \dots, f_m) base de F

$$e_i^\sim = (e_i, 0) \in E \times F$$

$$f_j^\sim = (0, f_j) \in E \times F$$

Exercice. $(e_1^\sim, \dots, e_n^\sim, f_1^\sim, \dots, f_m^\sim)$

Théorème 1. On considère un système d'équations linéaires homogène à n inconnues et k équations.

On suppose que ce système est échelonné, alors l'ensemble des solutions est de dimension $n - k$.

Démonstration.

Remarque 19. Quitte à renommer les inconnues, on peut supposer que les inconnues principales sont x_1, \dots, x_k , les autres sont des variables libres.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots = 0 \\ a_{22}x_2 + \dots = 0 \\ \dots \\ a_{kk}x_k + \dots = 0 \end{cases}$$

Alors, les solutions sont de la forme (x_1, \dots, x_n) avec, pour $j > k$, on pose arbitrairement $x_j = \lambda_j \in \mathbb{K}$

$$x_k = \alpha_{k,k+1}\lambda_{k+1} + \dots + \alpha_{kn}\lambda_n$$

...

$$x_1 = \alpha_{1,k+1}\lambda_{k+1} + \dots + \alpha_{1n}\lambda_n$$

Donc,

$$(x_1, \dots, x_n) = \lambda_{k+1}()$$

□

Théorème 2. Soient F, G , deux sous espace vectoriel de E (de dimensions finies), alors, $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$

Démonstration. "Idée : construire une base sympathique de $F + G$ "

- $F \cap G$ est de dimension finie ($F \cap G$ étant sous espace vectoriel de F)
on pose alors (e_1, \dots, e_n) base de $F \cap G$.
- (e_1, \dots, e_n) est une famille libre de F
se complète en une base $(e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_s)$ de F

□

3.3 rang d'une famille de vecteurs

Définition 11.

$$rg(v_1, \dots, v_p) = \dim vect(v_1, \dots, v_p)$$

Propriété 2. On a

- $rg(v_1, \dots, v_p) \leq \dim E$
- $rg(v_1, \dots, v_p) \leq p$
- $rg(v_1, \dots, v_p) = \dim E$ si et seulement si la famille est génératrice.
- $rg(v_1, \dots, v_p) = 1$ si et seulement si la famille est libre.

Démonstration. — $vect v_1, \dots, v_p$ est sous espace vectoriel de E .

- par définition, (v_1, \dots, v_p) engendre $vect(v_1, \dots, v_p)$
- $vect(v_1, \dots, v_p) = E$ si et seulement s'ils sont monodimensionnels
- $rg(v_1, \dots, v_p) = 1$ si et seulement si v_1, \dots, v_p est génératrice d'un sous espace vectoriel de dimension p
si et seulement si v_1, \dots, v_p est une base de $vect(v_1, \dots, v_p)$
si et seulement si v_1, \dots, v_p est libre

□

Remarque 20. $\text{vect}(v_1, \dots, v_p)$ ne change pas (le rang non plus) si :

- on permute deux vecteurs
- on multiplie un vecteur par un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}^*$
- on ajoute à un vecteur un multiple d'un autre

On peut alors appliquer l'algorithme de Gauss au calcul du rang pour des vecteurs de \mathbb{K}^n .

Tout d'abord, on échelonne une famille de vecteur.

Une fois que la famille est échelonnée, le rang correspond au nombre de vecteurs non nuls.

Remarque 21. Cette famille de vecteurs est une base du sous espace vectoriel initial.

3.4 Somme directe

Soient F et G des sous espaces vectoriels de E

$$F + G = \{f + g \mid f \in F, g \in G\}$$

a priori pour $u \in F + G$ la paire $(f, g) \in F \times G \mid u = f + g$ n'est pas nécessairement unique.

Définition 12. F et G sont en somme directe si et seulement si

$$\forall u \in F + G, \exists!(f, g) \in F \times G, u = f + g$$

Notation. On note alors $F \oplus G$

Remarque 22. $F \oplus G$ désigne à la fois le sous espace vectoriel $F + G$ et la propriété selon laquelle ils sont en somme directe.

Proposition 7. Les énoncés suivants sont équivalents :

- F et G sont en somme directe
- $0 = f + g$ avec $f \in F$ et $g \in G$ implique $f = g = 0$
- $F \cap G = \{0\}$
- En réunissant une base de F et une base de G , on obtient une base de $F + G$
- $\dim(F + G) = \dim F + \dim G$

(où les deux dernières propositions ne sont vraies qu'en dimension finie)

Démonstration. □

Définition 13. F et G sont supplémentaire si $F \oplus G = E$

Remarque 23. Il peut être intéressant de "découper" l'espace en sous espaces plus simples.

Remarque 24. Tout sous espace vectoriel F de E admet un supplémentaire.

Remarque 25. Les supplémentaires ne sont pas uniques, on ne parle donc pas "du" supplémentaire.

Cas général :

Soient F_1, \dots, F_k , sous espaces vectoriels de E .

F_1, \dots, F_k sont en somme directe si :

$$\forall u \in F_1 + \dots + F_k, \exists!(f_1, \dots, f_k) \in F_1 \times \dots \times F_k / u = f_1 + \dots + f_k$$

Proposition 8. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- $\bigoplus_{i=1}^k F_i$
- $\forall i \in [1, k], f_i \in F_i, \sum_{i=1}^k f_i = 0 \Rightarrow \forall i, f_i = 0$
- en réunissant une base de chaque F_i , on obtient une base de la somme
- $\dim \sum F_i = \sum \dim F_i$

Troisième partie

Applications linéaires

4 Définitions et exemples

Définition 14. Soient E et E' , deux \mathbb{K} espaces vectoriels.

$f : E \rightarrow E'$ est linéaire si :

$$\forall u, v \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)$$

Remarque 26. Dans ce cas, on a forcément $f(0) = 0$.

Vocabulaire. — Si $E = E'$, f est un endomorphisme.

— Si f est bijective, f est un isomorphisme.

Remarque 27. Si $f : E \rightarrow E'$, linéaire, est bijective,

$f^{-1} : E' \rightarrow E$, est aussi linéaire

Exemple.

5 Image, noyau et image d'une famille de vecteurs

Notation. $\mathcal{L}(E, E') = \{f : E \rightarrow E', f \text{ linéaire}\}$ est un \mathbb{K} espace vectoriel.

Définition 15. Soit $f \in \mathcal{L}(E, E')$

- $f(E)$ est un sous espace vectoriel de E' , noté $\text{Im } f$, prononcé image de f .
- $\{x \in E / f(x) = 0\}$ est un sous espace vectoriel de E , noté $\text{Ker } f$, prononcé noyau de f .

— on note $\text{rg}(f) = \dim \text{Im } f$ (pour une dimension finie)

Démonstration. Soient $u', v' \in f(E)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

Montrons que $\lambda u' + \mu v' \in E$ □

Remarque 28. Si $E = \text{vect}(e_1, \dots, e_n)$, alors $f(E) = \text{vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$
Donc $\text{rg}(f) = \text{rg}(f(e_1), \dots, f(e_n))$

Proposition 9. $f : E \rightarrow E$ est injective si et seulement si $\text{Ker } f = \{0\}$

Rappel 1. $f : E \rightarrow E'$ est injective si et seulement si $\forall u, v \in E, f(u) = f(v) \Rightarrow u = v$
Dont la contraposée est $\forall u, v \in E, u \neq v \Rightarrow f(u) \neq f(v)$

Démonstration. Si f est injective, □

Proposition 10. Caractérisation d'une application linéaire par l'image d'une base.
Soit (e_1, \dots, e_n) , une base de E , soient $b_1, \dots, b_n \in E'$

$$\exists! f \in \mathcal{L}(E, E'), \forall i, f(e_i) = b_i$$

Par ailleurs :

1. (b_1, \dots, b_n) est libre si et seulement si f est injective
2. (b_1, \dots, b_n) est génératrice si et seulement si f est surjective
3. (b_1, \dots, b_n) est une base si et seulement si f est un isomorphisme

Démonstration. Analyse :

Supposons que f existe : □

6 Matrice d'application linéaire

Soit $f : E \rightarrow E'$, une application linéaire.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, une base de E

Soit $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_p)$, une base de E'

On écrit $f(e_1), \dots, f(e_n)$ dans la base \mathcal{B}'

$$f(e_1) = a_{11}e'_1 + \dots + a_{p1}e'_p$$

$$f(e_2) = a_{12}e'_1 + \dots + a_{p2}e'_p$$

...

$$f(e_n) = a_{1n}e'_1 + \dots + a_{pn}e'_p$$

On définit la matrice de f relativement aux bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' par :

$$\text{Mat}(f)_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pn} \end{pmatrix}$$

Exemple. Pour l'application :

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto (-x + 6y, -x + 4y)$$

$\mathcal{B}_1 = (e_1, e_2) = ((1, 0), (0, 1))$ est la base canonique de \mathbb{R}^2 .
 $\mathcal{B}_2 = (e'_1, e'_2) = ((3, 1), (2, 1))$

Alors :

$$— \text{Mat}(f)_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1} =$$

7 calcul de l'inverse d'une matrice

7.1 Systèmes linéaires

Proposition 11. Si A est inversible, alors $AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$.

Donc on trouve A^{-1} en résolvant un système d'équations linéaires d'inconnues x_1, \dots, x_n et de seconds membres génériques b_1, \dots, b_n .

$$X =$$

Exemple.

7.2 Méthode "magique"

Quatrième partie

Déterminants

8 Volume orienté du parallélogramme dans le plan

Proposition 12. —

9 Définitions et propriétés

9.1 Définition par récurrence

Définition 16. définition du déterminant d'une matrice par récurrence (la définition est facile mais la preuve est pénible)

9.2 définition par forme multilinéaire alternée

Rappel 2. Une permutation de $\{1, \dots, n\}$ est une bijection de $\{1, \dots, n\}$ dans lui-même.

Exemple.

$$\begin{aligned}1 &\rightarrow 2 \\2 &\rightarrow 1 \\3 &\rightarrow 3\end{aligned}$$

est une permutation.

Notation. S_n est l'ensemble des permutations de $\{1, \dots, n\}$

Remarque 29. S_n contient $n!$ éléments

Définition 17. une transposition $(i j)$ est la permutation qui échange i et j .

Remarque 30. toute permutation est une composée de transpositions.

Définition 18. La signature $\varepsilon(\sigma)$ pour $\sigma \in S_n$ est le nombre de transpositions pour avoir σ .

Définition 19. Soit $A = [a_{ij}]_{i,j \in \{1, \dots, n\}}$ une matrice dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On pose le déterminant

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1}$$

Remarque 31. Pour $n = 2$ ou $n = 3$, on obtient les formules usuelles.

Définition 20. Soit E , un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n et

$$\begin{aligned}f: E^n &\rightarrow \mathbb{K} \\(v_1, \dots, v_n) &\mapsto f(v_1, \dots, v_n)\end{aligned}$$

f est multilinéaire si elle est linéaire par rapport à chaque v_i (quand les autres termes sont constants)

Remarque 32. $\det(\text{Id}) = 1$ Étant donné que la seule manière d'avoir des termes non nuls dans le produit (de la formule du déterminant) est de prendre $\sigma = \text{Id}$

Proposition 13. Soit $f: E^n \rightarrow \mathbb{K}$, une application multilinéaire.

Alors, si \mathbb{K} est tel que $1+1 = 2 \neq 0$, f est alternée si et seulement si f est antisymétrique.

Démonstration. On prend $n = 2$ pour simplifier les notations.

Si f est antisymétrique,

$$f(v, v) = -f(v, v) \text{ (on permute les } v)$$

$$\text{Donc } 2f(v, v) = 0$$

$$\text{donc } f(v, v) = 0 \text{ car } 2 \neq 0.$$

Si f est alternée, alors,

$$\begin{aligned} 0 &= f(v_1 + v_2, v_1 + v_2) \\ &= f(v_1, v_1 + v_2) + f(v_2, v_1 + v_2) \\ &= f(v_1, v_1) + f(v_1, v_2) + f(v_2, v_1) + f(v_2, v_2) \\ &= 0 + f(v_1, v_2) + f(v_2, v_1) + 0 \end{aligned}$$

D'où

$$f(v_1, v_2) = -f(v_2, v_1)$$

□

Théorème 3. $A \mapsto \det(A)$ est multilinéaire et alternée par rapport aux volumes de la matrice.

Démonstration. — $A \mapsto a_{\sigma(1)} \dots a_{\sigma(n)}$

□

Corrolaire 1. Conséquences pratiques

- Le déterminant ne change pas quand on ajoute à une colonne un multiple d'une autre.
- le déterminant est multiplié par -1 si on permute deux colonnes.

Théorème 4. Soient $A = [a_{ij}] (i, j)$ et sa transposée ${}^t A = [a_{ji}]_{(i,j)}$

$$\det(A) = \det({}^t A)$$

$$\det({}^t A) = \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)}$$

Lemme 2. $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Rappel 3. Soit A , une matrice,

on note A_{ij} , la matrice obtenue en ne considérant ni la i -ème ligne ni la j -ème colonne.

On a alors le cofacteur :

$$C_{ij}(A) = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$$

La comatrice $\text{Com}(A)$ est alors la matrice des cofacteurs

$$\text{Com}(A) = \left[(-1)^{i+j} \det(A_{ij}) \right]$$

Proposition 14.

$$A \cdot {}^t \text{com} A = {}^t \text{com} A \cdot A = \det A \cdot I_n$$

ainsi, si le déterminant, $A^{-1} = \frac{1}{\det A} ({}^t \text{com} A)$

Remarque 33. cette formule est utile si $n = 2$, bof pour $n = 3$ et à fuir si $n > 3$
Mais elle possède un intérêt théorique.

Démonstration. ne pas oublier la démo

□

10 Applications

10.1 Systèmes linéaires

Dans un système de n équations et n inconnues pouvant être rapporté à une équation matricielle $AX = B$

Proposition 15. *Il existe une unique solution si et seulement si $\det A$ est non nul.*

Dans le cas où $\det A \neq 0$,
on a les formules de Cramer :

$$x_i = \frac{1}{\det A} \det A_i$$

où A_i est la matrice obtenue en remplaçant la i -ème colonne de A par B .

Démonstration. Si $\det A \neq 0$, A est inversible donc $X = AB^{-1}$

Sinon : $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n \dots$

□

10.2 Endomorphisme

Définition 21. Soit E , un \mathbb{K} espace vectoriel de dimension n .

Soient de plus $f \in \mathcal{L}(E)$ et \mathcal{B} une base de E . Alors, $\det(\text{Mat}(f)_{\mathcal{B}})$ ne dépend pas du choix de \mathcal{B} , on l'appelle déterminant de f .

Démonstration. $M = \text{Mat}(f)_{\mathcal{B}}$

\mathcal{B}' , une autre base

$$M' = \text{Mat}(f)_{\mathcal{B}'}$$

alors $M' = P^{-1}MP$ avec P la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' .

$$\text{or } \det M' = \det P^{-1} \det M \det P = \det M \left(\frac{\det P^{-1}}{\det P} = 1 \right)$$

□

Remarque 34. Un autre invariant de f est la trace de f :

$$\text{Tr}(f) = \text{Tr}(\text{Mat}_{\mathcal{B}} f)$$

La trace ne dépend pas du choix de \mathcal{B}

10.3 Rang

Définition 22. Soit A , une matrice $A \in M_{np}(\mathbb{K})$

Une mineur d'ordre n de A est le déterminant d'une sous matrice carrée de A de taille r .

Un bordant d'un mineur δ d'ordre r est un mineur d'ordre $r + 1$ qui contient δ .

Exemple.

Théorème 5. Soit A , une matrice
alors

$$\operatorname{rg} A = r$$

si et seulement s'il existe $r \neq 0$ et tous les mineurs d'ordre $n + 1$ sont nuls.

si et seulement s'il existe un mineur δ d'ordre r non nul et tous les bordants de δ sont nuls

exemples d'application