Théorème. *Théorème des polynômes annulateurs*

Un endomorphisme f est diagonalisable si et seulement s'il existe un polynôme scindé à racines simples annulant f.

Démonstration.

1 sens direct

Soit f, un endomorphisme de polynôme caractéristique

$$\chi_f(X) = (-1)^n \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$$

En supposant f diagonalisable, il existe une base $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ formée de vecteurs propres de f.

par définition d'une application diagonalisable

Si $\{\lambda_i\}_{i \in [\![1,p]\!]}$ sont **les** valeurs propres de f alors, pour tout vecteur $v \in \mathcal{B}$, il existe $\lambda_j \in \{\lambda_i\}$ telle que $(f - \lambda_j Id)(v) = 0$

Donc, $\forall v \in \mathcal{B}$,
$(f - \lambda_1 Id) \circ ... \circ (f - \lambda_p Id)(v) = 0$ par commutativité des $(f - \lambda_k Id)$
$(f - \lambda_1 Id) \circ ... \circ (f - \lambda_{j-1} Id) \circ (f - \lambda_{j+1} Id) \circ ... \circ (f - \lambda_p Id) \circ (f - \lambda_j Id)(v) = 0$

Remarque 1. *commutativité des polynômes d'endomorphismes :*
Soient $P(X) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i X^i$ *et* $Q(X) = \sum\limits_{j=1}^{m} b_j X^j$

$$\begin{aligned} P(f) \circ Q(f) &= \sum_{i=1}^{n} a_i f^i \circ \sum_{j=1}^{m} b_j f^j \\ &= \sum_{i,j} a_i b_j f^i \circ f^j \\ &= \sum_{i,j} a_i b_j f^{i+j} \\ &= \sum_{i,j} b_j a_i f^j \circ f^i \\ &= \sum_{j=1}^{m} b_j f^j \circ \sum_{i=1}^{n} a_i f^i \\ &= Q(f) \circ P(f) \end{aligned}$$

Comme on a $(f - \lambda_1 Id) \circ ... \circ (f - \lambda_p Id)(v) = 0$ sur la base $\mathcal{B}$, cette égalité se vérifie aussi sur E tout vecteur de E étant une combinaison linéaire de vecteurs de $\mathcal{B}$

$(f - \lambda_1 Id) \circ ... \circ (f - \lambda_p Id)(v) = 0$

Donc $Q(X) = \prod\limits_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)$, qui est scindé et à racines simples, annule f.

2 sens indirect

On peut écrire un polynôme scindé à racines simples sous la forme :

$$Q(X) = \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)$$

où les λ_i sont différents deux à deux. les termes de ce produit sont donc premiers entre eux (les racines étant différentes)

En appliquant Q à un endomorphisme f, on a :

$$Q(f) = \prod_{i=1}^{p} (f - \lambda_i Id)$$

En supposant maintenant que Q annule f, on a, d'après le lemme des noyaux

$$E = \bigoplus_{i=1}^{p} ker(f - \lambda_i Id)$$

le noyau de cet endomorphisme correspond aux vecteurs pour lesquels $f(v) = \lambda_i v$, *i.e.* les vecteurs de E ayant pour valeur propre λ_i

D'où $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}$

f est donc diagonalisable. par le théorème 1 vu dans le cours $\square$