BAB 1
RELASI & FUNGSI

A. Relasi

Relasi biner menggambarkan ada tidaknya interaksi atau koneksi antara elemen-elemen dari 2 atau lebih himpunan dalam urutan tertentu.

Contoh 1:

Dua orang yaitu Harlan dan Herlian memiliki hubungan sebagai berikut; “Harlan adalah kakak kandung Herlian” jadi relasinya adalah hubungan famili.

Contoh 2:

Dalam himpunan program komputer, mungkin didefinisikan bahwa 2 program komputer berelasi jika keduanya mengakses data yang sama atau menghasilkan keluaran yang sama.

Relasi

- Relasi biner R antara himpunan A dan B adalah himpunan bagian dari $A \times B$.
- Notasi: $R \subseteq (A \times B)$.
- $a \; R \; b$ adalah notasi untuk $(a, b) \in R$, yang artinya a dihubunganKan dengan b oleh R
- $a \; \not R \; b$ adalah notasi untuk $(a, b) \notin R$, yang artinya a tidak dihubungkan dengan b oleh relasi R.
- Himpunan A disebut daerah asal (*domain*) dari R, dan himpunan B disebut daerah hasil (*range*) dari R.

Contoh 3: Misalkan $P = \{2, 3, 4\}$ dan $Q = \{2, 4, 8, 9, 15\}$. Jika kita definisikan relasi R dari P ke Q dengan

$$(p, q) \in R \text{ jika } p \text{ habis membagi } q$$

maka kita peroleh

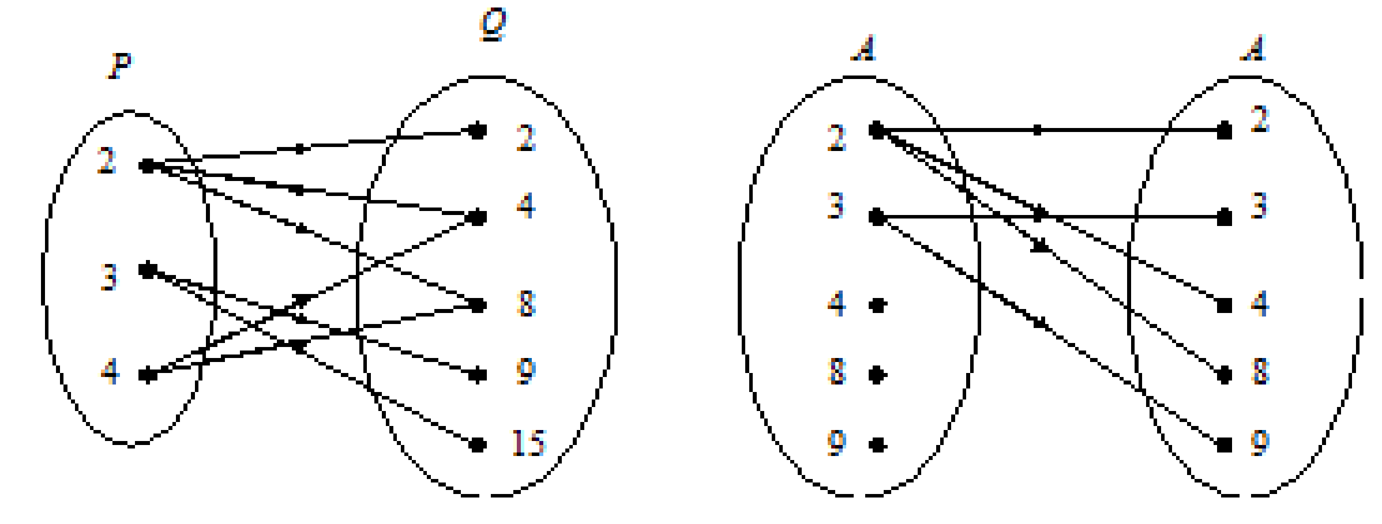
$$R = \{(2, 2), (2, 4), (2, 8), (3, 9), (3, 15), (4, 4), (4, 8)\}$$

Contoh 4: Misalkan R adalah relasi pada $A = \{2, 3, 4, 8, 9\}$ yang didefinisikan oleh $(x, y) \in R$ jika x adalah faktor prima dari y. Maka

$$R = \{(2, 2), (2, 4), (2, 8), (3, 3), (3, 9)\}$$

Representasi Relasi

1. Representasi Relasi dengan Diagram Panah



2. Representasi relasi dengan pasangan terurut

Relasi *R* pada Contoh 3 dapat dinyatakan dengan pasangan terurut.
R = {(2, 2), (2, 4), (2, 8), (3, 9), (3, 15), (4, 4), (4, 8)}

3. Representasi Relasi dengan Tabel

- Kolom pertama tabel menyatakan daerah asal, sedangkan kolom kedua menyatakan daerah hasil.

Tabel 1

P	Q
2	2
2	4
2	8
3	9
3	15
4	4
4	8

Tabel 2

A	A
2	2
2	4
2	8
3	3
3	9

4. Representasi Relasi dengan Matriks

- Misalkan R adalah relasi dari $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ dan $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$.
- Relasi R dapat disajikan dengan matriks $M = [m_{ij}]$,

$$M = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} b_1 & b_2 & \ldots & b_n \end{array} \\ \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{array} & \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{m1} & m_{m2} & \cdots & m_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$

yang dalam hal ini

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & (a_i, b_j) \in R \\ 0, & (a_i, b_j) \notin R \end{cases}$$

Relasi R pada Contoh 3 dapat dinyatakan dengan matriks

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

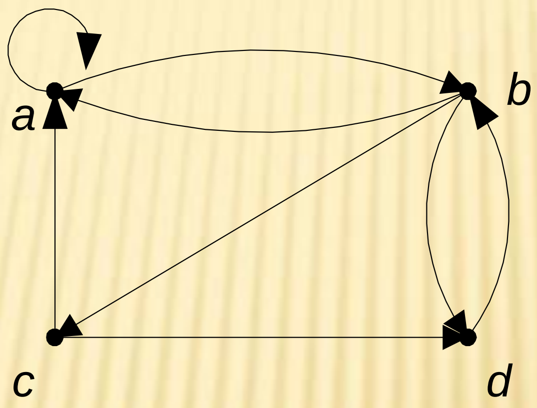
yang dalam hal ini, $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 4$, dan $b_1 = 2$, $b_2 = 4$, $b_3 = 8$, $b_4 = 9$, $b_5 = 15$.

5. *Representasi Relasi dengan Graf Berarah*

- Relasi pada sebuah himpunan dapat direpresentasikan secara grafis dengan **graf berarah** (*directed graph* atau *digraph*)
- Graf berarah tidak didefinisikan untuk merepresentasikan relasi dari suatu himpunan ke himpunan lain.
- Tiap elemen himpunan dinyatakan dengan sebuah titik (disebut juga simpul atau *vertex*), dan tiap pasangan terurut dinyatakan dengan busur (*arc*)
- Jika $(a, b) \in R$, maka sebuah busur dibuat dari simpul *a* ke simpul *b*. Simpul *a* disebut **simpul asal** (*initial vertex*) dan simpul *b* disebut **simpul tujuan** (*terminal vertex*).
- Pasangan terurut (a, a) dinyatakan dengan busur dari simpul *a* ke simpul *a* sendiri. Busur semacam itu disebut **gelang** atau **kalang** (*loop*).

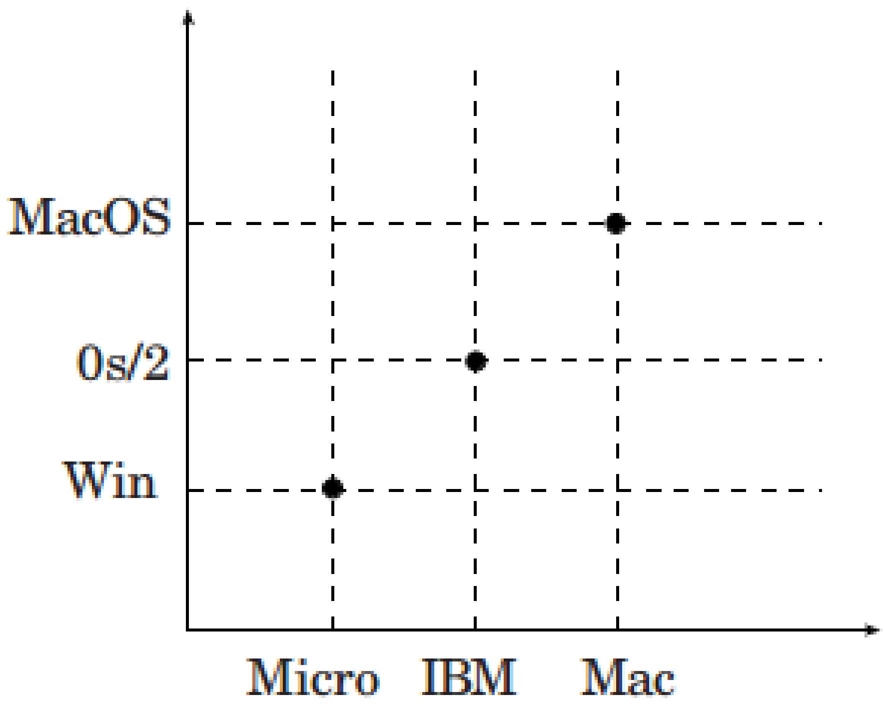
Contoh 5: Misalkan $R = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, c), (b, d), (c, \mathrm{a}), (c, d), (d, b)\}$ adalah relasi pada himpunan $\{a, b, c, d\}$.

R direpresentasikan dengan graf berarah sbb:



6. Representasi relasi dengan sistem koordinat

R = {(Microsoft, Windows), (IBM, 0s/2), (Macintosh, MacOS)}



Sifat Relasi

1. Refleksif

Relasi R pada himpunan A disebut ***refleksif*** jika $(a,a) \in R$ untuk setiap anggota $a \in A$.

Apakah relasi berikut pada {1, 2, 3, 4} refleksif?

R = {(1, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 3), (4, 4)} Tidak.

R = {(1, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 3), (4, 4)} Tidak.

R = {(1, 1), (2, 2), (3, 3)} **Ya.**

Contoh 6:

Misalkan A = {1, 2, 3, 4}, dan relasi R adalah relasi '≤' yang didefinisikan pada himpunan A, maka

R = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 4)}

Terlihat bahwa (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4) merupakan

Unsur dari R. Dengan demikian R dinamakan bersifat **refleksif**.

Contoh 7:

Misalkan A = {2, 3, 4, 8, 9, 15}.

Jika kita definisikan relasi R pada himpunan A dengan aturan:

$(a, b) \in R$ jika a faktor prima dari b

Perhatikan bahwa $(4, 4) \notin R$.

Jadi, jelas bahwa R **tidak** bersifat refleksif.

2. Simetris

- Relasi R pada himpunan A disebut ***simetris*** jika $(b,a) \in R$ setiap kali $(a,b) \in R$ untuk setiap $a,b \in A$.

- Relasi R pada himpunan A disebut ***antisimetris*** jika $a = b$ setiap kali $(a,b) \in R$ dan $(b,a) \in R$.

Apakah relasi berikut pada {1, 2, 3, 4} simetris atau antisimetris?

R = {(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 3), (4, 4)}	simetris
R = {(1, 1)}	simetris & antisimetris
R = {(1, 3), (3, 2), (2, 1)}	antisimetris
R = {(4, 4), (3, 3), (1, 4)}	antisimetris

Contoh 8:

Misalkan R merupakan relasi pada sebuah himpunan Riil, yang dinyatakan oleh:

$a\ R\ b$ jika dan hanya jika $a - b \in Z$. Periksa apakah relasi R bersifat simetris!

Misalkan $a\ R\ b$ maka $(a - b) \in Z$, Sementara itu jelas bahwa $(b - a) \in Z$.

Dengan demikian R bersifat **simetris**.

Contoh 9:

Tunjukan bahwa relasi '≤' merupakan pada himpunan Z bersifat antisimetris.

Jelas bahwa jika $a \leq b$ dan $b \leq a$ berarti $a = b$.

Jadi relasi '≤' bersifat **antisimetris**.

3. Transitif

Relasi R pada himpunan A disebut ***transitif*** jika setiap kali $(a,b) \in R$ dan $(b,c) \in R$, maka $(a,c) \in R$ untuk $a,b,c \in A$.

Apakah relasi berikut pada {1, 2, 3, 4} transitif?

R = {(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 1), (3, 3)} **Ya.**

R = {(1, 3), (3, 2), (2, 1)} Tidak.

R = {(2, 4), (4, 3), (2, 3), (4, 1)} Tidak.

Contoh 10:

Misalkan A = { 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, dan relasi R

Didefinisikan oleh:

$a\ R\ b$ jika dan hanya jikan a membagi b, dimana $a, b \in A$,

Dengan memperhatikan definisi relasi R pada himpunan A, maka :

R = {(2, 2), (2, 4), (2, 6), (2, 8), (3, 3), (3, 6), (3, 9), (4, 4), (4, 8)}

Ketika (2, 4) ∈ R dan (4, 8) ∈ R terlihat bahwa (2, 8) ∈ R.

Dengan demikian R bersifat **transitif**.

Contoh 11:

R merupakan relasi pada himpunan bilangan asli **N** yang didefinisikan oleh:

$R : a + b = 5,\ a, b \in A,$

Dengan memperhatikan definisi relasi *R* pada himpunan *A*, maka:

$R = \{(1, 4), (4, 1), (2, 3), (3, 2)\}$

Perhatika bawa $(1, 4) \in R$ dan $(4, 1) \in R$, tetapi $(1, 1) \notin R.$

Dengan demikian *R* ***tidak*** bersifat transitif.

LATIHAN

Tuliskan pasangan berurutan dalam relasi R dari $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ Ke $B = \{0, 1, 2, 3\}$ dimana $(a, b) \in R$ bila dan hanya bila:

a. $a = b$
b. $a + b = 4$
c. $a > b$