BAB 2

FUNGSI NUMERIK & RELASI REKURENSI

A. Fungsi Numerik

Sebuah fungsi adalah sebuah relasi biner yang secara unik menugaskan kepada setiap anggota domain, satu dan hanya satu elemen kodomain. Fungsi diskrit numerik, atau singkatnya disebut fungsi numerik, adalah sebuah fungsi dengan himpunan bilangan cacah sebagai domain dan himpunan bilangan riil sebagai kodomainnya. Fungsi numerik ini sering digunakan dalam komputasi digital.

Penyajian fungsi numerik pada prinsipnya bisa dilakukan dengan menuliskan daftar panjang harga-harganya, namun pada prakteknya dibutuhkan penyajian dalam bentuk yang tidak terlalu panjang. Contoh berikut menampilkan beberapa bentuk penyajian dari fungsi numerik.

Contoh:

$a_n = 7n^3 + 1,\ n \geq 0.$

$$b_n = \begin{cases} 2n & 0 \leq n \leq 11 \\ 3^n - 1 & n \geq 12 \end{cases}$$

$$c_n = \begin{cases} 2+n, & 0 \leq n \leq 5 \\ 2-n, & n > 5,\ n\ \textit{ganjil} \\ \dfrac{2}{n}, & n > 5, n\ \textit{genap} \end{cases}$$

B. Manipulasi Fungsi Numerik

Jumlah dari dua fungsi numerik adalah sebuah fungsi numerik yang harganya pada n tertentu sama dengan jumlah harga-harga dari kedua fungsi numerik pada n.

Contoh:

Jika diketahui: $a_n = 2^n, n \geq 0$

$b_n = 5, n \geq 0$

Ditanya: $c_n = a_n + b_n$?

Jawab: $c_n = 2^n + 5 , n \geq 0.$

Hasil kali (produk) dari dua fungsi numerik adalah sebuah fungsi numerik yang harganya pada n tertentu sama dengan hasil kali harga-harga dari kedua fungsi numerik pada n.

Contoh:

Jika diketahui: $a_n = 2^n, n \geq 0$

$b_n = 5, n \geq 0$

Ditanya: $d_n = a_n \cdot b_n$?

Jawab: $d_n = (2^n)5 , n \geq 0.$

Misalkan a_n adalah sebuah fungsi numerik dan i adalah sebuah integer positif. Kita gunakan $S^i a$ untuk menyatakan fungsi numerik yang nilainya 0 pada n = 0,1,…, (i-1) dan nilainya sama dengan **a_{n-i} pada $n \geq i$**.

$$S^i a = \begin{cases} 0 & , \quad 0 \leq n \leq (i-1) \\ a_{n-i} & , \quad n \geq i \end{cases}$$

Contoh:

Jika diketahui: $b_n = 2^n, n \geq 0$

$c_n = S^4 b$

Ditanya: c_n =…?

Jawab: $c_n = \begin{cases} 0 & , \quad 0 \leq n \leq 3 \\ 2^{n-4} & , \quad n \geq 4 \end{cases}$

Misalkan a_n adalah sebuah fungsi numerik dan i adalah sebuah integer positif. Kita gunakan $S^{-i}a$ untuk menyatakan fungsi numerik yang nilainya sama dengan $\mathbf{a_{n+i}}$ **pada** $\mathbf{n \geq 0}$.

$$S^{-i}a = a_{n+i} \quad , \quad n \geq 0$$

Contoh:

Jika diketahui: $b_n = 2^n, n \geq 0$

$d_n = S^{-5}b$

Ditanya: d_n =…?

Jawab: $d_n = 2^{n+5}$, $n \geq 0$

Beda maju (*forward difference*) dari sebuah fungsi numerik a_n adalah sebuah fungsi numerik yang dinyatakan dengan Δa , dimana harga Δa pada n sama dengan harga $a_{n+1} - a_n$.

$$\Delta a = a_{n+1} - a_n \ , \quad n \geq 0$$

Contoh:

Jika diketahui: $b_n = 2^n, n \geq 0$

$e_n = \Delta b$

Ditanya: $e_n =\ldots?$

Jawab: $e_n = 2^n \ , \ n \geq 0$

Beda ke belakang (*backward difference*) dari sebuah fungsi numerik a_n adalah sebuah fungsi numerik dinyatakan dengan ∇a , dimana harga ∇a pada n = 0 sama dengan harga a_0 dan harga ∇a pada $n \geq 1$ sama dengan $a_n - a_{n-1}$.

$$\nabla a = \begin{cases} 0 & , \quad n = 0 \\ a_n - a_{n-1} & , \quad n \geq 1 \end{cases}$$

Contoh:

Jika diketahui: $b_n = 2^n, n \geq 0$

$f_n = \nabla b$

Ditanya: f_n =…?

Jawab: $f_n = \begin{cases} 0 & , \quad n = 0 \\ 2^{n-1} & , \quad n \geq 1 \end{cases}$

Latihan Soal

1. Jika diketahui $Yn = 5^n$ dan $Zn = 6$ untuk $n \geq 0$ dan $Xn = Yn + Zn$, maka Xn = …
2. Jika diketahui $Yn = 7^n$ dan $Zn = 2$ untuk $n \geq 0$ dan $Xn = Yn \,.\, Zn$, maka Xn = ...
3. Jika $Xn = 6^n$ dan $Yn = S^{-2}$ untuk $n \geq 0$, maka Yn = ...
4. Jika $An = 3^n$ dan $Bn = \Delta A$ untuk $n \geq 0$,maka Bn = ...