



**11. Übungsblatt zur Vorlesung  
OPTIMIERUNG B**  
Abgabe spätestens in der Übung am 27.01.12

**Aufgabe 1:**

**2 Punkte**

Es sei  $A := (a_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$  die Inzidenzmatrix eines ungerichteten Graphens  $G$ , also

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{falls } v_i \text{ mit } e_j \text{ inzidiert,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeige:  $A$  ist genau dann total unimodular, wenn  $G$  bipartit ist.

**Aufgabe 2:**

**1 Punkte**

Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  und  $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Zeige, dass das System  $Ax \leq b$  nicht TDI ist, aber dass das System TDI wird, falls man noch die redundante Ungleichung  $x_1 \leq 0$  zu  $Ax \leq b$  hinzufügt.

Hinweis: Betrachte den Zielfunktionsvektor  $c = (1, 0)^t$ .

**Aufgabe 3:**

**1.5+1.5 Punkte**

Sei  $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{Q}^m$  und  $\beta \in \mathbb{Q}$ .

- $Ax \leq b$  sei ein TDI System und die Ungleichung  $a^t x \leq \beta$  mit  $a \in \mathbb{Q}^n$  folge aus  $Ax \leq b$ . Zeige, dass dann das System  $Ax \leq b, a^t x \leq \beta$  ebenfalls TDI ist.
- Das System  $Ax \leq b, a^t x \leq \beta$  mit  $a \in \mathbb{Z}^n$  sei TDI. Zeige, dass dann das System  $Ax \leq b, a^t x = \beta$  ebenfalls TDI ist.

**Aufgabe 4:**

**2 Punkte**

Es sei  $Ax \leq b, x \geq 0$  ein Ungleichungssystem mit  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  und  $b \in \mathbb{R}^m$ . Angenommen für alle  $c \in \mathbb{Z}^m$ , für die  $\min\{y^T b \mid y^T A \geq c, y \geq 0\}$  eine optimale Lösung besitzt, existiert eine optimale Lösung  $y^*$  derart, dass genau die Zeilen  $a_i$  von  $A$ , für die gilt  $y_i^* \neq 0$ , eine vollständig unimodulare Matrix formen. Zeige, dass dann  $Ax \leq b, x \geq 0$  TDI ist.

**Aufgabe 5:**

**2 Punkte**

Es sei  $A := [a_1 \ a_2 \ A']$  eine ganzzahlige  $(m \times n)$ -Matrix und  $b \in \mathbb{R}^m$ , desweiteren sei  $A' := [a_1 + a_2 \ A']$  eine  $(m \times (n-1))$ -Matrix. Zeige:

$A'x' \leq b$  ist genau dann TDI, wenn  $Ax \leq b, x = (x_1, x_2, \dots, x_n), x_1 - x_2 = 0$  ebenfalls TDI ist.

**Viel Erfolg!**