

修士研究論文

サンプル値 H^∞ 制御理論による マルチレートディジタル信号処理

指導教官

教授 山本 裕

助教授 藤岡 久也

複雑系科学専攻知能化システム分野 平成 10 年入学

永原 正章

平成 12 年 1 月 28 日

摘要

マルチレートデジタル信号処理とはデジタル信号の処理過程において複数のサンプル周期のもとで処理を実行する手法であり、単一レートでの信号処理に比べ多様な処理が可能であり、応用範囲も広い。例えば、信号を複数の周波数帯域に分割し、その帯域ごとに処理を行うことにより、低いサンプルレートによる伝送やデータ圧縮を行う。また商用規格において複数のレート (例えば CD における 44.1kHz と DAT における 48kHz) が存在する場合、それらの間の変換なども重要な基礎技術となっている。

従来、このマルチレート処理を含むデジタル信号処理では、処理すべき元の連続時間信号が完全に帯域制限されているものと仮定し、離散時間領域において議論がなされている。しかし完全帯域制限という条件は現実にはあり得ず、従来の信号処理の手法では元の連続時間信号の特性を考慮に入れることはできない。これに対し、制御理論においては連続時間特性と離散時間特性を同時に扱うサンプル値 H^∞ 制御理論が従来より研究されている。本研究では、このサンプル値 H^∞ 制御理論をマルチレート信号処理に応用し、完全帯域制限の条件を仮定せずにデジタル信号処理システムの設計を行う。また具体的な設計例を示し、従来の設計手法に比べて本提案手法が有効であることを示す。

目次

第 1 章 はじめに	1
第 2 章 デジタル信号処理とサンプル値制御理論	3
2.1 マルチレート信号処理システム	3
2.1.1 マルチレート信号処理におけるサンプルレート変換	3
2.1.2 インターポレータとデシメータ	4
2.1.3 離散時間リフティング	8
2.2 サンプル値 H^∞ 制御理論	9
2.2.1 リフティング	9
2.2.2 リフティングによるサンプル値制御系の記述	9
2.2.3 サンプル値制御系の周波数応答と H^∞ 制御理論	12
第 3 章 マルチレート信号処理システムの設計	14
3.1 インターポレーションフィルタの設計	14
3.1.1 問題設定	14
3.1.2 離散時間有限次元系への変換	15
3.1.3 ファストサンプルファストホールドによる近似	17
3.2 デシメーションフィルタの設計	19
3.2.1 問題設定	19

3.2.2	離散時間有限次元系への変換	21
3.2.3	ファーストサンプルファーストホールドによる近似	22
3.3	サンプルレート変換器の構成	24
第 4 章	提案手法による設計例と従来法との比較	27
4.1	インターポレータの設計	27
4.2	デシメータの設計	29
4.3	サンプルレート変換器の設計	32
4.4	設計例に対する考察	36
第 5 章	おわりに	37
第 6 章	謝辞	41
付 録 A		42
A.1	インターポレータおよびデシメータ設計の FSFH 近似公式	42
A.1.1	インターポレータ設計の FSFH 離散時間近似	42
A.1.2	デシメータ設計の FSFH 離散時間近似	44

第1章 はじめに

マルチレート信号処理とはデジタル信号の処理過程において、複数のサンプル周期のもとで処理を実行する手法であり、単一レートでの信号処理に比べ多様な処理が可能であり、応用範囲も広い [4, 16]. 例えば、信号を複数の周波数帯域に分割し、その帯域ごとに処理を行うことにより、低いサンプルレートによる伝送やデータ圧縮を行うサブバンドコーディングがある. また商用規格において複数のレート (例えば CD における 44.1kHz と DAT における 48kHz) が存在する場合、それらの間の変換なども重要な基礎技術となっている. サブバンドコーディングもその基礎をサンプルレート変換に置いている. その他にも適応信号処理やスペクトル推定などへの応用があり、また理論的にも短時間フーリエ変換やウェーブレット解析と関連が深いことが知られている [14].

さて、デジタル信号処理において処理すべき元信号は連続時間信号である. そのため処理を行なうには、この連続時間の信号を離散時間の信号に変換しなければならない. Whittaker-Shannon のサンプリング定理 [8, 22] によれば、連続時間信号の周波数成分がナイキスト周波数 (サンプリング周波数の $1/2$) 以下に完全に帯域制限されていれば、サンプリングによるエイリアシングが生じず、元の連続時間信号は完全に復元される. 従来のデジタル信号処理では、この完全帯域制限という条件を仮定し、もっぱら離散時間領域での議論がなされている. この仮定を採用すれば信号処理システムは差分方程式で記述されるので、 z 変換や離散時間フーリエ変換などの手法を用いてシステムの解析・設計が容易に行える利点がある.

しかし現実には存在する連続時間信号には必ずナイキスト周波数以上の周波数成分が含まれる. すなわち完全帯域制限という条件は現実には満たされることはあり得ない. したがって連続時間信号の特性までを考慮して信号処理システムを捉えた場合、従来の信号処理の手法、すなわち離散時間領域に限った解析・設計手法は適切でないことがわかる. では、完全帯域制限という条件を課すことなくデジタル信号処理システムの解析・設計を行うことは可能

であろうか.

信号処理に関連するものとして, 制御理論においては, 連続時間で動作する制御対象を, 離散時間で動作する制御器によって制御するサンプル値制御系の研究が従来より行われている. 特にリフティングの概念を導入した近年の研究 [17] により, 連続時間と離散時間が混在するハイブリッドシステムに対する解析や設計を厳密に行なうことが可能となった. ここでリフティングとは, $L^2[0, \infty)$ の連続時間信号を時刻 h ごとに区切り $L^2[0, h)$ の関数列として扱う手法であり, これによりサンプル点間の情報を含んだままサンプル値制御系を線形時不変離散時間系として記述することができる. この概念の導入により, 従来には考えられなかったサンプル値系の周波数応答や伝達関数の概念が明快に定義できる [17, 19]. 特にサンプル値 H^∞ 制御理論 [1, 10] はサンプル値系の連続時間入出力の L^2 誘導ノルムを最小化する手法であり, 最悪の外乱が加わったときの応答に関して所望の性能を保証するという意味を持つ.

本論文ではマルチレート信号処理システムの設計にこのサンプル値制御理論を応用することによって, 連続時間と離散時間の信号を同時に扱い, 完全帯域制限という条件を課すことなく信号処理システムの最適設計が可能であることを示す. 最適設計の評価関数としては, 信号処理システムにおける連続時間を含めた信号復元誤差系の H^∞ ノルムを用いる. この設計問題はサンプル値 H^∞ 制御系設計問題に帰着される. また具体的な設計例を示し, 従来の設計手法に比べて本提案手法が有効であることを示す.

第2章 デジタル信号処理とサンプル値制御理論

2.1 マルチレート信号処理システム

2.1.1 マルチレート信号処理におけるサンプルレート変換

マルチレート信号処理とはデジタル信号の処理過程において、複数のサンプル周期のもとで処理を実行する手法であり、単一レートでの信号処理に比べ多様な処理が可能であり、応用範囲も広い [4, 16].

このマルチレート信号処理において基本となる処理はサンプルレート変換である。サンプルレート変換は、サンプルレートを上げるインターポレータとサンプルレートを下げるデシメータにより構成される。インターポレータはデジタル信号のサンプル点の間に新たに信号を補間しサンプルレートを上げる。周波数領域では、インターポレータはデジタル信号の周波数帯域を広げる働きがある。これは、デジタル信号の持つ情報量を仮想的に増加することに相当する。このインターポレータの設計では、信号をどのように補間するか、信号の周波数帯域をどのように広げるかが問題となる。一方、デシメータはデジタル信号をある比率で間引きサンプルレートを下げる。周波数領域では、デジタル信号の周波数帯域を狭める働きがある。これはデジタル信号の持つ情報量を減少することに相当する。そのかわり伝送回路や記憶デバイスの負荷を減少させることができる。デシメータ設計では、どのように信号を間引くか、周波数帯域をどのように狭めるかが問題となる。

図 2.1 に示すシステムはマルチレートフィルタバンクであり、マルチレート信号処理システムの一つである。マルチレートフィルタバンクにおいては、信号を複数の周波数帯域に分割し、その帯域ごとに処理を行うことにより、低いサンプルレートによる伝送やデータ圧縮を行う（サブバンドコーディングと呼ばれている）。

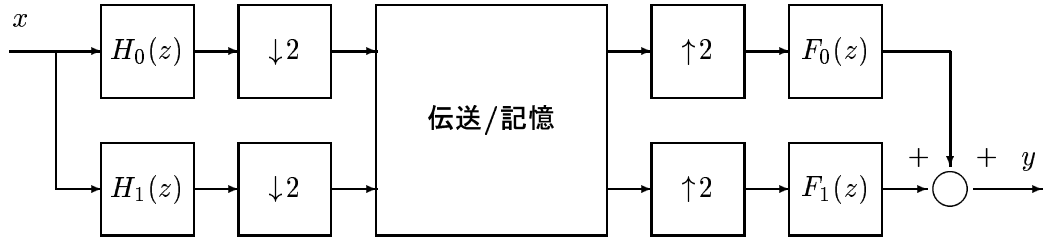


図 2.1: マルチレートフィルタバンクによるサブバンドコーディング

次節で、インターポレータおよびデシメータの数学的な定義を与える。

2.1.2 インターポレータとデシメータ

インターポレータとデシメータには、それぞれアップサンプラ $\uparrow M$ とダウンサンプラ $\downarrow M$ が用いられる。

定義 1 離散時間信号 $\{v[k]\}_{k=0}^{\infty}$ に対してアップサンプラ $\uparrow M$ とダウンサンプラ $\downarrow M$ を次式で定義する。

$$\begin{aligned}\uparrow M : \{v[k]\}_{k=0}^{\infty} &\mapsto \{v[0], \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{M-1 \text{ 個}}, v[1], 0, \dots\} \\ \downarrow M : \{v[k]\}_{k=0}^{\infty} &\mapsto \{v[0], v[M], v[2M], \dots\}\end{aligned}$$

アップサンプラ $\uparrow M$ は時刻 k と時刻 $k+1$ の間に $M-1$ 個の 0 を挿入し、サンプルレートを M 倍する (図 2.2)。ダウンサンプラ $\downarrow M$ は時刻 $k = Mi$ ($i = 0, 1, \dots$) 以外の信号を除去し、サンプルレートを $1/M$ 倍する (図 2.3)。

インターポレータはアップサンプラおよびデジタルフィルタを用いて図 2.4 に示すブロック線図で構成される。ここで $K(z)$ はインターポレーションフィルタであり、アップサンプラによって挿入された 0 を、元の信号の補間となるように処理する (図 2.5)。周波数領域では、インターポレーションフィルタはアップサンプルすることによって生じたイメージング成分を除去する働きがある (図 2.6)。デシメータはダウンサンプラおよびデジタルフィルタを用いて図 2.7 に示すブロック線図で構成される。ここで $H(z)$ はデシメーションフィルタであり、ダウンサンプルすることによって生じるエリアシング (図 2.8) を回避する。こ

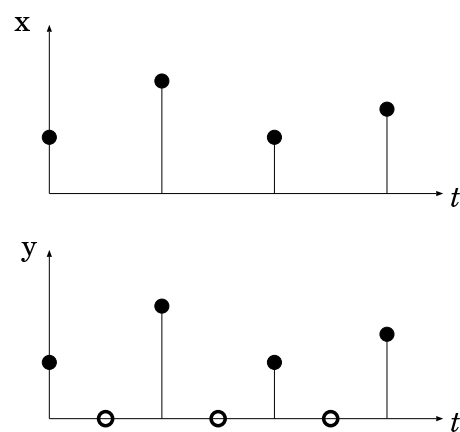
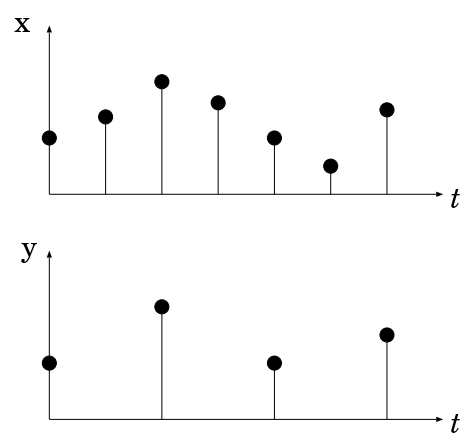
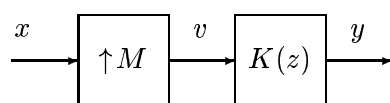
図 2.2: アップサンプル $y = (\uparrow 2)x$ 図 2.3: ダウンサンプル $y = (\downarrow 2)x$ 

図 2.4: インターポレータの構成

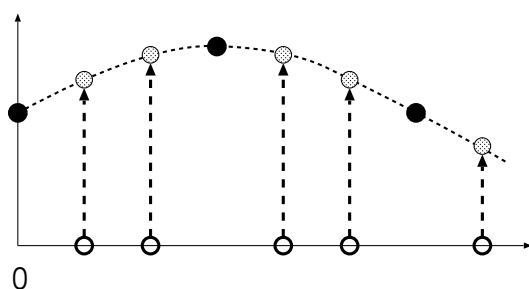


図 2.5: インターポレータによる信号の補間

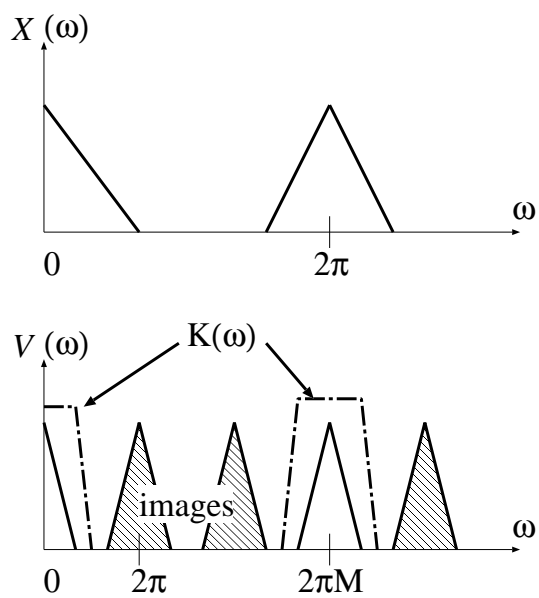


図 2.6: アップサンプリングによるイメージングとその除去

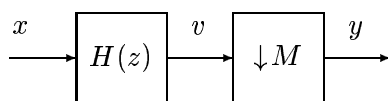


図 2.7: デシメータの構成

これはダウンサンプルする前の信号の高周波数成分を除去することによって可能となる.

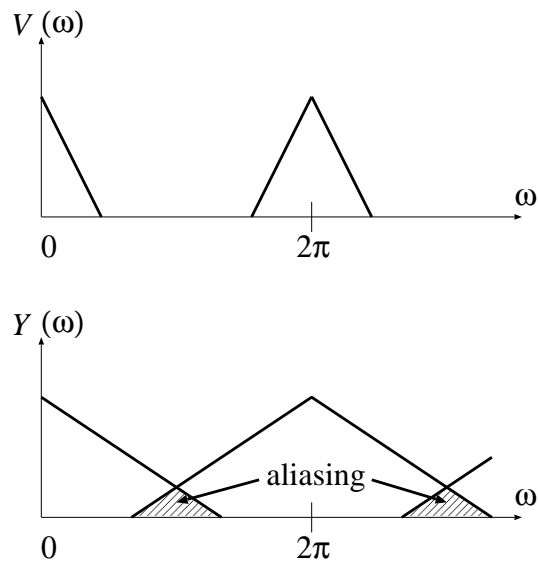


図 2.8: ダウンサンプルによるエリアシング

インターポレーションフィルタ $K(z)$ およびデシメーションフィルタ $H(z)$ は理想的には図 2.9 に示す周波数特性を持つ. 従来の信号処理におけるこれらのデジタルフィルタの設

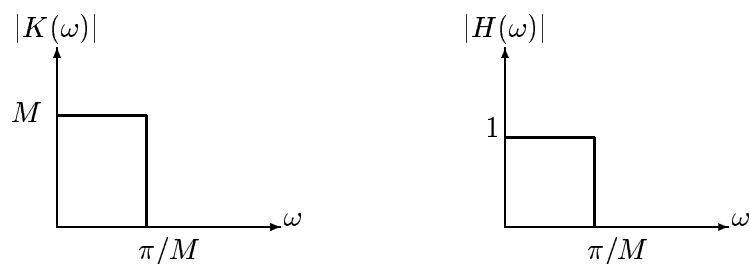


図 2.9: インターポレーションフィルタ $K(z)$ およびデシメーションフィルタ $H(z)$ の理想周波数特性

計には, 図 2.9 の理想特性を近似する手法が用いられる. これは, システムを純粋に離散時間領域のみで考えた場合, すなわち元アナログ信号の周波数特性がナイキスト周波数以下に完全に帯域制限されていると仮定した場合での議論である. しかし, 現実には存在するアナログ信号にはナイキスト周波数以上の周波数成分が含まれるため, 実際には図 2.9 の理想周波

数特性が最適であるとは言えない。

2.1.3 離散時間リフティング

マルチレートシステムを扱う際、有用な概念として離散時間リフティング [12] がある。

定義 2 離散時間リフティング \mathbf{L}_M および離散時間逆リフティング \mathbf{L}_M^{-1} は次式で定義される。

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_M : l^2 &\longrightarrow (l^2)^M \\ &: \{v[0], v[1], \dots\} \mapsto \left\{ \begin{bmatrix} v[0] \\ v[1] \\ \vdots \\ v[M-1] \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} v[M] \\ v[M+1] \\ \vdots \\ v[2M-1] \end{bmatrix}, \dots \right\} \\ \mathbf{L}_M^{-1} : (l^2)^M &\longrightarrow l^2 \\ &: \left\{ \begin{bmatrix} v_0[0] \\ v_1[0] \\ \vdots \\ v_{M-1}[0] \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} v_0[1] \\ v_1[1] \\ \vdots \\ v_{M-1}[1] \end{bmatrix}, \dots \right\} \mapsto \{v_0[0], v_1[0], \dots, v_{M-1}[0], v_0[1], v_1[1], \dots\} \end{aligned}$$

離散時間リフティング \mathbf{L}_M は、離散時間信号を M 個ごとにまとめサンプル周期を M 倍する変換である。この手法により、離散時間信号のサンプルレートを変換することによってマルチレートシステムを単一レートシステムに等価変換することができ、マルチレートシステムの設計や解析が容易になる。また離散時間リフティングはアップサンブラとダウンサンブラを用いて次式で表される。

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_M &:= (\downarrow M) \begin{bmatrix} 1 \\ z \\ \vdots \\ z^{M-1} \end{bmatrix} \\ \mathbf{L}_M^{-1} &:= \begin{bmatrix} 1 & z^{-1} & \dots & z^{-M+1} \end{bmatrix} (\uparrow M) \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

2.2 サンプル値 H^∞ 制御理論

2.2.1 リフティング

連続時間で動作する制御対象に対して，離散時間で動作する制御器を用いて制御するシステムをサンプル値制御系と呼ぶ．このサンプル値制御系は連続時間と離散時間の二つの時間が混在し，周期時変系となる．したがって，時不変系のように伝達関数や周波数応答の概念が定義できず，解析や設計は困難となる．従来このような系に対しては，連続時間信号を離散時間信号で近似する手法が用いられた．この手法により系は時不変の離散時間系となるが，そのかわりサンプル点間の応答は無視される．この問題に対し，リフティングの概念を用いてサンプル値制御系を等価的に時不変離散時間系として記述する手法が提案された [17, 18]．

定義 3 連続時間信号 $\{f(t)\}_{t \in \mathbf{R}_+}$ に対してリフティング \mathcal{L} を次のように定義する．

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : L^2[0, \infty) &\longrightarrow l^2_{L^2[0, h)} : \{f(t)\}_{t \in \mathbf{R}_+} \longmapsto \{\tilde{f}[k](\theta)\}_{k=0}^\infty, \quad \theta \in [0, h) \\ \tilde{f}[k](\theta) &:= f(kh + \theta) \in L^2[0, h) \end{aligned}$$

このリフティングの導入により $L^2[0, \infty)$ の連続時間信号を， $L^2[0, h)$ に値を持つ離散時間信号として扱うことが可能となり，サンプル値制御系は時不変の離散時間系として記述できる．時不変離散時間系が得られれば，サンプル値制御系に対して伝達関数や周波数応答などの概念が導入でき，系の設計や解析が厳密に可能となる．

2.2.2 リフティングによるサンプル値制御系の記述

図 2.10 のサンプル値制御系を考える．ここで P は連続時間一般化制御対象であり，状態方程式および出力方程式は次式であらわされるとする．

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} \end{aligned}$$

信号 w は目標入力，外乱入力など外部から加わる連続時間の外生信号であり，一方 z は制御偏差や制御入力などの評価すべき連続時間の制御量を表す．また K_d は離散時間で動作す

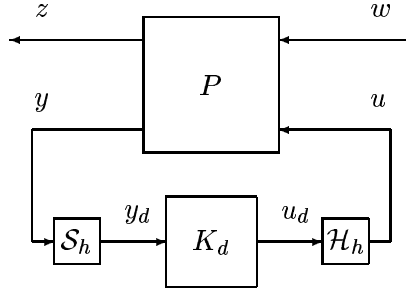


図 2.10: サンプル値制御系

る制御器である．ここで，連続時間制御対象と離散時間制御器を接続するために，周期 h で動作する理想サンプラ \mathcal{S}_h と 零次ホールド \mathcal{H}_h を用いる．

定義 4 サンプル周期 h で動作する理想サンプラ \mathcal{S}_h および 零次ホールド \mathcal{H}_h は次式で定義される．

$$\mathcal{S}_h : L^2[0, h) \ni u \mapsto v \in l^2, \quad v[k] := u(kh)$$

$$\mathcal{H}_h : l^2 \ni v \mapsto u \in L^2[0, \infty), \quad u(kh + \theta) := H(\theta)v[k]$$

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

ここで $H(\cdot)$ はホールド関数と呼ばれ，次式で定義される．

$$H(\theta) := \begin{cases} 1, & \theta \in [0, h) \\ 0, & \text{その他のとき} \end{cases} \quad (2.2.2)$$

図 2.10 の制御系の設計問題は，ある与えられたクラスに属する入力 w に対して，制御量 z が所望の特性を持つように制御器 K_d を設計する問題である．この問題は連続時間と離散時間の信号が混在するため，周期時変系の設計問題となるが，連続時間入出力信号 z, w をリフティングし， $\tilde{z} := \mathcal{L}z$, $\tilde{w} := \mathcal{L}w$ とおくことにより，図 2.10 のサンプル値制御系は図 2.11 の時不変離散時間系に変換される．リフティングされたシステム \mathbf{G} の状態空間表現は

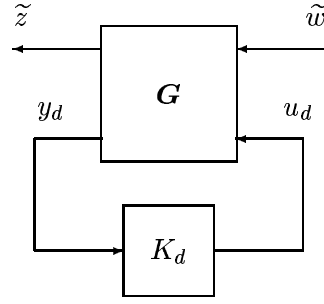


図 2.11: サンプル値制御系のリフティング

次のようになる.

$$\mathbf{G} : \begin{bmatrix} x[k+1] \\ \tilde{z}[k] \\ y_d[k] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_d & \mathbf{B}_1 & B_{d2} \\ \mathbf{C}_1 & \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} \\ C_{d2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[k] \\ \tilde{w}[k] \\ u_d[k] \end{bmatrix}$$

$$k = 0, 1, \dots$$

$$A_d := e^{Ah}$$

$$B_{d2} := \int_0^h e^{A(h-\tau)} B_2 d\tau$$

$$C_{d2} := C_2$$

$$\mathbf{B}_1 : L^2[0, h) \longrightarrow \mathbf{R}^n$$

$$: w \mapsto \int_0^h e^{A(h-\tau)} B_1 w(\tau) d\tau$$

$$\mathbf{C}_1 : \mathbf{R}^n \longrightarrow L^2[0, h)$$

$$: x \mapsto C_1 e^{A\theta} x$$

$$\mathbf{D}_{11} : L^2[0, h) \longrightarrow L^2[0, h)$$

$$: w \mapsto \int_0^\theta C_1 e^{A(\theta-\tau)} B_1 w(\tau) d\tau + D_{11} w(\theta)$$

$$\mathbf{D}_{12} : \mathbf{R}^n \longrightarrow L^2[0, h)$$

$$: u_d \mapsto \int_0^\theta C_2 e^{A(\theta-\tau)} B_2 H(\tau) d\tau u_d + D_{12} H(\theta) u_d$$

$$\theta \in [0, h)$$

ここで $H(\cdot)$ は式 (2.2.2) で定義されたホールド関数である. 通常の離散時間系と異なり \mathbf{B}_1 ,

\mathbf{C}_1 , \mathbf{D}_{11} , \mathbf{D}_{12} は無限次元の作用素となる．一方, A_d , B_{d2} , C_{d2} は行列である．リフティングを導入することにより, サンプル値系は無限次元作用素を含む時不変離散時間系で記述される．

2.2.3 サンプル値制御系の周波数応答と H^∞ 制御理論

前節でサンプル値系が時不変離散時間系で記述された．時不変モデルが得られれば伝達関数や周波数応答の概念が定義でき, これを基にしてサンプル値制御系の解析や設計が厳密に可能となる．特にサンプル値 H^∞ 制御は周波数領域での最適化手法であり, 実用的にも制御問題を定式化しやすく重要な制御手法である．

図 2.11 の \tilde{w} から \tilde{z} へのシステムを

$$\begin{aligned} x_s[k+1] &= \mathcal{A}x_s[k] + \mathcal{B}\tilde{w}[k] \\ \tilde{z}[k] &= \mathcal{C}x_s[k] + \mathcal{D}\tilde{w}[k], \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

とおく．ここで \mathcal{A} は行列となるが, \mathcal{B} , \mathcal{C} , \mathcal{D} は無限次元作用素となる．リフティングされた信号 $\{\tilde{f}[k]\}_{k=0}^\infty$ に対して z 変換を通常と同様に

$$\mathcal{Z}[\tilde{f}](z) := \sum_k \tilde{f}[k] z^{-k}$$

と定義する．これによりサンプル値制御系の伝達関数 $\mathcal{G}(z)$ が定義できる．

$$\mathcal{G}(z) := \mathcal{D} + \mathcal{C}(zI - \mathcal{A})^{-1}\mathcal{B}, \quad z \in \mathbf{C}$$

変数 z を固定した場合, $\mathcal{G}(z)$ は関数空間 $L^2[0, h)$ 上の線形作用素となる．この変数に $z = e^{j\omega h}$ を代入した $\mathcal{G}(e^{j\omega h})$ をサンプル値制御系の周波数応答と呼ぶ．また周波数応答 $\mathcal{G}(e^{j\omega h})$ の作用素ノルム

$$\|\mathcal{G}(e^{j\omega h})\| := \sup_{v \in L^2[0, h), v \neq 0} \frac{\|\mathcal{G}(e^{j\omega h})v\|_{L^2[0, h)}}{\|v\|_{L^2[0, h)}}$$

を周波数応答ゲインと呼ぶ．さらに, 周波数応答ゲイン $\|\mathcal{G}(e^{j\omega h})\|$ を用いて \mathcal{G} の H^∞ ノルムは

$$\|\mathcal{G}\|_\infty := \sup_{\omega \in [0, 2\pi/h)} \|\mathcal{G}(e^{j\omega h})\|$$

で与えられる．すなわち H^∞ ノルムは周波数 $[0, 2\pi/h)$ 上での周波数応答ゲインの上限である．また $\|G\|_\infty$ はシステム (2.2.3) の L^2 誘導ノルムに一致することが知られている [1]．サンプル値 H^∞ 制御問題とは，この H^∞ ノルムを評価指標として用い，それを最小化するような離散時間制御器 K_d を求める問題であり，サンプル値系に最悪の外乱が加わったときの応答に関して所望の性能を保証するという意味を持つ．この設計問題は連続時間の入出力に基づいており，サンプル点上の特性だけでなく，サンプル点間の特性を厳密に考慮した設計が可能となる．

第3章 マルチレート信号処理システムの設計

3.1 インターポレーションフィルタの設計

3.1.1 問題設定

インターポレータによる信号復元系のブロック線図を図 3.1 に示す. 図 3.1 において信号

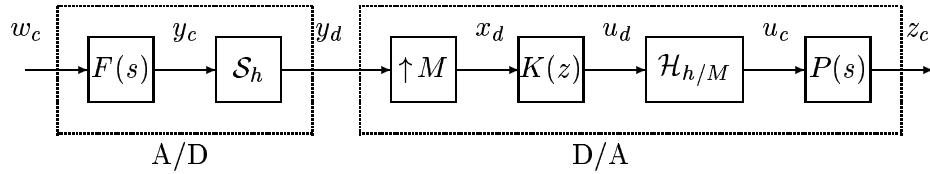


図 3.1: インターポレータの信号復元系

w_c は処理すべき連続時間信号であり, $F(s)$ はアンチエイリアシングフィルタである. 信号 w_c はフィルタ $F(s)$ で帯域制限された後, サンプラ S_h によってサンプル周期 h の離散時間信号 y_d となる. この離散時間信号 y_d がインターポレータ $K(z)(\uparrow M)$ によってレート変換される. まず y_d をアップサンプラ $\uparrow M$ によりサンプル周期 h/M の離散時間信号 x_d に変換する. この信号 x_d はデジタルフィルタ $K(z)$ によって処理され, 周期 h/M で動作する零次ホールド $H_{h/M}$ によって連続時間信号 u_c に変換される. そして u_c をアナログフィルタ $P(s)$ によって平滑化し復元信号 z_c を得る. このインターポレータと零次ホールドおよびフィルタ $P(s)$ のシステムは, 速いサンプル周期で動作するホールド回路によりデジタル信号をアナログ信号に変換するオーバーサンプル D/A 変換器と解釈できる.

通常, 信号処理における信号復元にはある程度の時間遅れが許容される. この時間遅れを考慮した信号復元の誤差系のブロック線図を図 3.2 に示す. 図 3.2 において上側のパスが時間遅れを, 下側のパスがインターポレータによるレート変換の信号の流れをあらわす. この

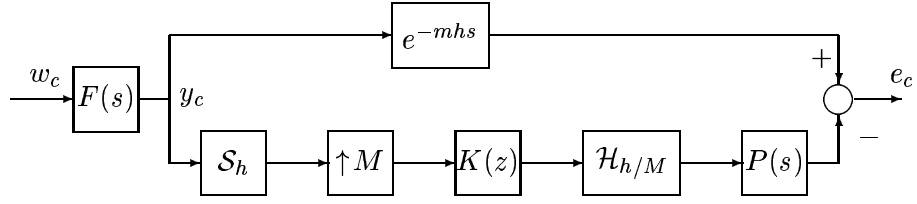


図 3.2: 信号復元の誤差系

誤差系に対して本研究では次の設計問題を考える．ただしホールド $\mathcal{H}_{h/M}$ の出力と， $F(s)$ の出力信号 y_c が mh だけ遅れた信号との誤差を $e_c(t) := z_c(t) - y_c(t - mh)$ とおく．

問題 1 安定な連続時間フィルタ $F(s)$ と $P(s)$ が与えられたとする．連続時間信号 w_c から e_c へのシステムを T_{ew} とおく．このとき，与えられた $\gamma > 0$ に対し

$$\|T_{ew}\| := \sup_{w_c \in L^2[0, \infty)} \frac{\|T_{ew}w_c\|}{\|w_c\|} < \gamma \quad (3.1.1)$$

を満たすインターポレーションフィルタ $K(z)$ を求めよ．

3.1.2 離散時間有限次元系への変換

問題 1 は，システム T_{ew} が連続時間と離散時間とともに含むため無限次元系に対する設計問題であり，またマルチレート系であるので時変系となるので，このままでは解を得ることは困難である．しかし文献 [13, 20] で用いられた手法により，問題 1 は有限次元系の設計問題に帰着される．ここで連続時間システム $F(s)$ の状態方程式を

$$\dot{x}_F = A_F x_F + B_F w_c, \quad y_c = C_F x_F \quad (3.1.2)$$

とおき，次の作用素を定義する．

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{11} : L^2[0, h) &\rightarrow L^2[0, h) \\ &: w_k \mapsto \int_0^\theta C_F e^{A_F(\theta-\tau)} B_F w_k(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

定理 1 正数 γ が不等式

$$\|\mathbf{D}_{11}\| < \gamma \quad (3.1.4)$$

を満たすとする．このとき，ある時不変離散時間系 G_{11} , G_{12} , G_{21} が存在して，不等式 (3.1.1) は次の不等式と等価である．

$$\|z^{-m}G_{11}(z) + G_{12}(z)\tilde{K}(z)G_{21}(z)\|_{\infty} < \gamma \quad (3.1.5)$$

ここで $\tilde{K}(z)$ は $K(z)$ の離散時間リフティングであり，次式で与えられる．

$$\tilde{K}(z) = \mathbf{L}_M K(z) \mathbf{L}_M^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

証明 まず系を単一レート系に変換する．離散時間リフティングを用いて $K(z)(\uparrow M)$ は次のように変換される．

$$\begin{aligned} K(z)(\uparrow M) &= \mathbf{L}_M^{-1} \tilde{K}(z) \\ \tilde{K}(z) &:= \mathbf{L}_M K(z) \mathbf{L}_M^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ここで $\tilde{K}(z)$ は1入力 M 出力の LTI システムであり， $K(z)$ との関係は次式で与えられる．

$$K(z) = \begin{bmatrix} 1 & z^{-1} & \dots & z^{-M+1} \end{bmatrix} \tilde{K}(z^M) \quad (3.1.6)$$

次に一般化ホールド $\tilde{\mathcal{H}}_h$ を導入する．

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{H}}_h &: l^2 \ni \mathbf{v} \mapsto u \in L^2, \quad u(kh + \theta) = \mathbf{H}(\theta) \mathbf{v}[k] \\ &\quad \theta \in [0, h), \quad k = 0, 1, 2, \dots \\ \mathbf{H}(\theta) &:= \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, & \theta \in [0, h/M) \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, & \theta \in [h/M, 2h/M) \\ \dots & \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}, & \theta \in [(M-1)h/M, h) \end{cases} \end{aligned}$$

このとき次の等式が成り立つ．

$$\mathcal{H}_{h/M} \mathbf{L}_M^{-1} = \tilde{\mathcal{H}}_h$$

以上より

$$\mathcal{H}_{h/M}K(z)(\uparrow M)\mathcal{S}_h = \tilde{\mathcal{H}}_h\tilde{K}(z)\mathcal{S}_h$$

が成立し、図 3.2 のマルチレート系は図 3.3 の単一レート系に等価変換される。したがって、

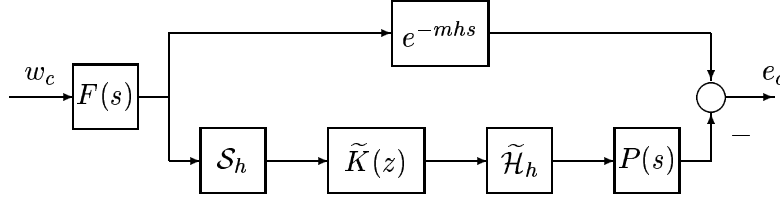


図 3.3: 単一レート系への変換

文献 [13] の手法を用いて、不等式 (3.1.4) を満たす γ に対して、マルチレート無限次元系の設計問題 (3.1.1) は単一レート有限次元系の設計問題 (3.1.5) に帰着される。□

3.1.3 ファストサンプルファストホールドによる近似

前節で設計問題は等価的に単一レート離散時間系の設計問題に帰着できることが示されたが、条件 (3.1.4) は厳しい条件であり、設計において数値計算上の問題がある [15]。そこで本研究では、(3.1.4) の条件を課さず、近似的に不等式 (3.1.1) を満たす離散時間系を求め設計を行う。

図 3.3 のブロック線図を変換して図 3.4 のようにシステムを構成する。図 3.4 のサンプル値制御系に対する近似離散時間系を、FSFH（ファーストサンプル・ファーストホールド）手法 [11, 21] を用いて導出する。ここでFSFH 手法とはサンプル値系の性能を近似的に評価する手法の一つである。これは h 周期のサンプル値系の連続時間入出力を h/N （ N は自然数）周期で動作するサンプラとホールドによって離散化し、十分大きな N に対する離散時間信号で連続時間信号を近似する方法である（図 3.5）。

FSFH 手法を用いて図 3.4 のサンプル値系の近似離散時間系

$$G_{dN} : \begin{bmatrix} x_N[k+1] \\ \tilde{e}_d[k] \\ y_d[k] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_d & B_{N1} & B_{N2} \\ C_{N1} & D_{N11} & D_{N12} \\ C_{N2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_N[k] \\ \tilde{w}_d[k] \\ u_d[k] \end{bmatrix}$$

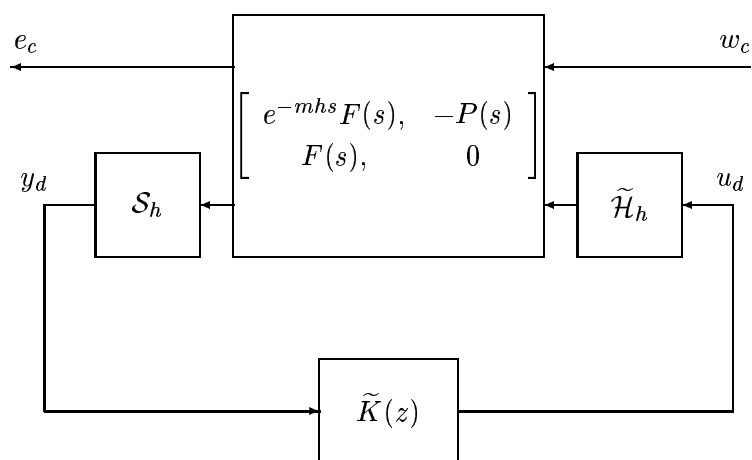


図 3.4: サンプル値制御系

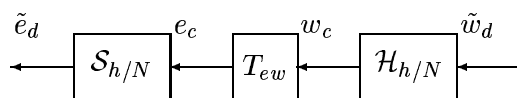


図 3.5: FSFH による離散化

が得られる (付録参照). この近似離散時間系 G_{dN} を用いて不等式 (3.1.1) は

$$\|z^{-m}G_{dN11}(z) + G_{dN12}(z)\tilde{K}(z)G_{dN21}(z)\|_{\infty} < \gamma$$

で近似され, 問題 1 は近似的に有限次元離散時間系の問題に帰着される. ただし

$$\begin{bmatrix} G_{dN11}(z) & G_{dN12}(z) \\ G_{dN21}(z) & 0 \end{bmatrix} := G_{dN}(z)$$

である.

対応する離散時間系のブロック線図を図 3.6 に示す. この離散時間系に対し離散時間 H^{∞}

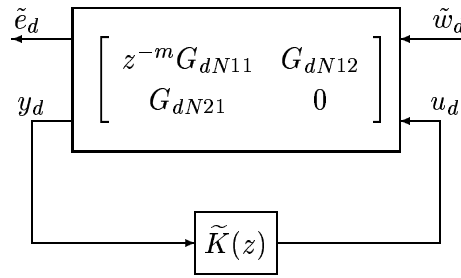


図 3.6: FSFH による離散時間系

制御 [2] により $\tilde{K}(z)$ を設計する. 得られた $\tilde{K}(z)$ に対して, 式 (3.1.6) の変換によりインターポレーションフィルタ $K(z)$ が得られる.

3.2 デシメーションフィルタの設計

3.2.1 問題設定

デシメータによる信号復元系のブロック線図を図 3.7 に示す. 図 3.7 において信号 w_c は処理すべき連続時間信号であり, $F(s)$ はアンチエイリアシングフィルタである. 信号 w_c はフィルタ $F(s)$ で帯域制限された後, サンプラ $\mathcal{S}_{h/M}$ によってサンプル周期 h/M の離散時間信号 y_d となる. この離散時間信号 y_d がデシメータ $(\downarrow M)H(z)$ によってレート変換される. まず y_d がデジタルフィルタ $H(z)$ によって処理されダウンサンプラ $\downarrow M$ によってサンプル周期 h の離散時間信号 x_d に変換される. この x_d が周期 h で動作する零次ホールド

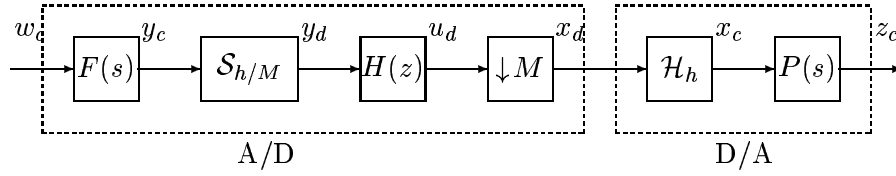


図 3.7: デシメータの信号復元系

\mathcal{H}_h によって連続時間信号 u_c に変換される．そして u_c をアナログフィルタ $P(s)$ によって平滑化し復元信号 z_c を得る．フィルタ $F(s)$ とサンプラ S_h およびデシメータのシステムは，速いサンプル周期で動作するサンプラによって離散化した後，遅い周期の離散時間信号に変換するオーバーサンプル A/D 変換器と解釈できる．

インターポレータ設計の場合と同様に，信号処理における信号復元にはある程度の時間遅れが許容される．この時間遅れを考慮した信号復元の誤差系のブロック線図を図 3.8 に示す．図 3.8 において上側のパスが時間遅れを，下側のパスがデシメータによるレート変換の

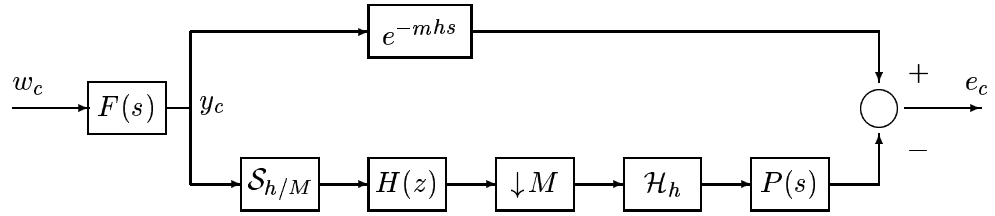


図 3.8: 信号復元の誤差系

信号の流れをあらわす．この誤差系に対し設計問題を考える．ただしホールド \mathcal{H}_h の出力と， $F(s)$ の出力信号 y_c が mh だけ遅れた信号との誤差を $e_c(t) := z_c(t) - y_c(t - mh)$ とおく．

問題 2 安定な連続時間フィルタ $F(s)$ と $P(s)$ が与えられたとする．連続時間信号 w_c から e_c へのシステムを T_{ew} とおく．このとき，与えられた $\gamma > 0$ に対し

$$\|T_{ew}\| := \sup_{w_c \in L^2[0, \infty)} \frac{\|T_{ew} w_c\|}{\|w_c\|} < \gamma \quad (3.2.7)$$

を満たす デシメーションフィルタ $H(z)$ を求めよ．

3.2.2 離散時間有限次元系への変換

問題2のマルチレート無限次元系の設計問題は単一レート有限次元系の設計問題に帰着される．ここで $F(s)$ の状態方程式を (3.1.2) とおき，(3.1.3) の作用素を定義する．

定理 2 正数 γ が不等式

$$\|\mathbf{D}_{11}\| < \gamma \quad (3.2.8)$$

を満たすとする．このとき，ある離散時間系 G_{11} , G_{12} , G_{21} が存在して，不等式 (3.2.7) は次の不等式と等価である．

$$\|z^{-m}G_{11}(z) + G_{12}(z)\tilde{H}(z)G_{21}(z)\|_{\infty} < \gamma \quad (3.2.9)$$

ここで $\tilde{H}(z)$ は $H(z)$ の離散時間リフティングであり，次式で与えられる．

$$\tilde{H}(z) := \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \mathbf{L}_M H(z) \mathbf{L}_M^{-1}$$

証明 離散時間リフティングを用いて $(\downarrow M)H(z)$ を変換する．

$$\begin{aligned} (\downarrow M)H(z) &= \tilde{H}(z)\mathbf{L}_M \\ \tilde{H}(z) &:= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \mathbf{L}_M H(z) \mathbf{L}_M^{-1} \end{aligned}$$

ここで $\tilde{H}(z)$ は M 入力 1 出力の LTI システムであり， $K(z)$ との関係は次式で与えられる．

$$H(z) = \tilde{H}(z^M) \begin{bmatrix} 1 \\ z \\ \vdots \\ z^{M-1} \end{bmatrix} \quad (3.2.10)$$

次に一般化サンブラ $\tilde{\mathcal{S}}_h$ を導入する．

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{S}}_h : L^2 \ni u &\longmapsto \mathbf{v} \in l^2 \\ \mathbf{v}[k] &:= \begin{bmatrix} u(kh) \\ u(kh + h/M) \\ \vdots \\ u(kh + (M-1)h/M) \end{bmatrix}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

このとき次式が成り立つ.

$$\mathbf{L}_M \mathcal{S}_{h/M} = \tilde{\mathcal{S}}_h$$

以上より

$$(\downarrow M)H(z)\mathcal{S}_{h/M} = \tilde{H}(z)\tilde{\mathcal{S}}_h$$

が成り立ち, 図 3.8 のマルチレート系は図 3.9 の単一レート系に変換される. したがって文

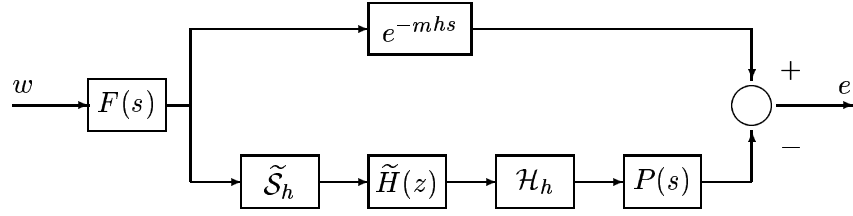


図 3.9: 単一レート系への変換

献 [13] の手法を用いて, 不等式 (3.2.8) を満たす γ に対して, マルチレート無限次元系の設計問題 (3.2.7) は単一レート有限次元系の設計問題 (3.2.9) に帰着される. \square

3.2.3 ファーストサンプルファーストホールドによる近似

インターポレータ設計の場合と同様に, 近似的に不等式 (3.2.7) を満たす離散時間系により設計を行う. 図 3.9 のブロック線図を変換して図 3.10 のようにシステムを構成する. FFSH 手法を用いて図 3.10 のサンプル値系に対する近似離散時間系

$$G_{dN} : \begin{bmatrix} x_N[k+1] \\ \tilde{e}_d[k] \\ y_d[k] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_d & B_{N1} & B_{N2} \\ C_{N1} & D_{N11} & D_{N12} \\ C_{N2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_N[k] \\ \tilde{w}_d[k] \\ u_d[k] \end{bmatrix}$$

が得られる (付録参照). この近似離散時間系 G_{dN} を用いて不等式 (3.2.7) は

$$\|z^{-m}G_{dN11}(z) + G_{dN12}(z)\tilde{K}(z)G_{dN21}(z)\|_{\infty} < \gamma$$

で近似され, 問題 2 は近似的に有限次元離散時間系の問題に帰着される. ただし

$$\begin{bmatrix} G_{dN11}(z) & G_{dN12}(z) \\ G_{dN21}(z) & 0 \end{bmatrix} := G_{dN}(z)$$

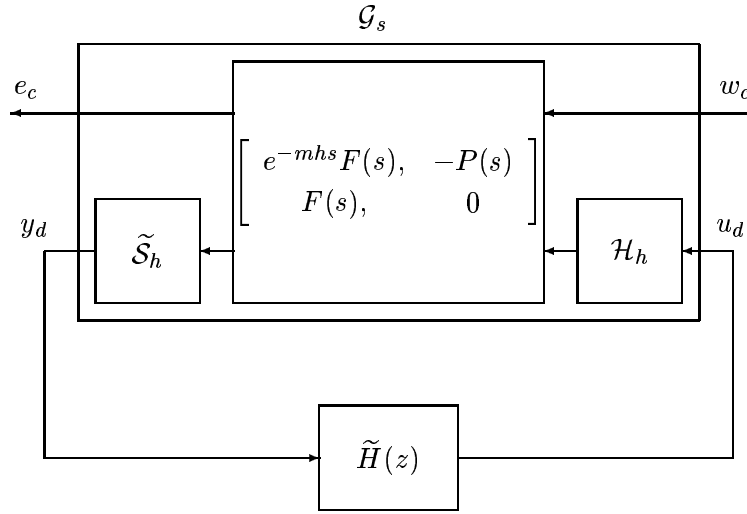


図 3.10: サンプル値制御系

である.

対応する離散時間 H^∞ 設計のブロック線図を図 3.11 に示す. この離散時間系に対し離散

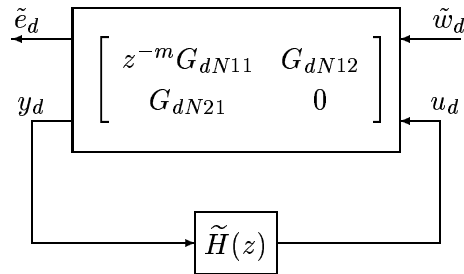


図 3.11: FSFH による近似離散時間系

時間 H^∞ 制御 [2] により $\tilde{H}(z)$ を設計する. 得られた $\tilde{H}(z)$ に対して, 式 (3.2.10) の変換によりデシメーションフィルタ $H(z)$ が得られるが, この変換の形から $H(z)$ が因果的でなくなる場合があり得る. したがって, デシメーションフィルタとして次のフィルタ $H_d(z)$ を

採用する.

$$\begin{aligned}
 H_d(z) &= z^{-M} H(z) \\
 &= z^{-M} \tilde{H}(z^M) \begin{bmatrix} 1 & z & \cdots & z^{M-1} \end{bmatrix}^T \\
 &= \tilde{H}(z^M) \begin{bmatrix} z^{-M} & z^{-M+1} & \cdots & z^{-1} \end{bmatrix}^T
 \end{aligned} \tag{3.2.11}$$

3.3 サンプルレート変換器の構成

サンプルレート変換器のブロック線図を図 3.12 に示す. 例えばオーディオ CD の規格周波

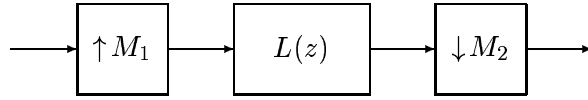


図 3.12: サンプルレート変換器 ($M_1 : M_2$)

数 44.1kHz から DAT の規格周波数 480kHz への変換器では, $M_1 = 3 \times 7^2$, $M_2 = 2^5 \times 5$ である. また信号処理では通常デジタルフィルタ $L(z)$ には $\omega = \pi/M$, $M := \max(M_1, M_2)$ にカットオフ周波数を持つローパスフィルタが用いられる [4, 16]. 本節では 3.1 節および 3.2 節の手法を用いてインターポレーションフィルタ $K(z)$ およびデシメーションフィルタ $H(z)$ を設計し, 図 3.13 によりサンプルレート変換器を構成する. ここで $K(z)$ および $H(z)$ の

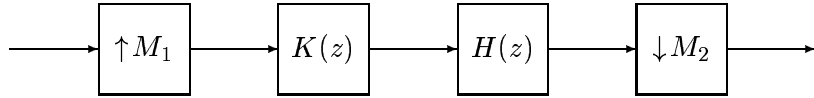


図 3.13: サンプルレート変換器のブロック線図

サンプル値設計のブロック線図を図 3.14 および図 3.15 に示す. ここで $h_2 = h \cdot \frac{M_2}{M_1}$ であり, また $F_1(s)$, $F_2(s)$ は図 3.16 に示す特性を持つ. この F_1 , F_2 によって, ナイキスト周波数以上の高周波に対しても性能を保証するフィルタ $K(z)$, $H(z)$ が設計される.

この段階的なフィルタ設計法の利点は M_1 や M_2 が大きな数の時にも設計が可能であることである. 例えば前述の CD/DAT のサンプルレート変換器を構成するには, 図 3.17 のイ

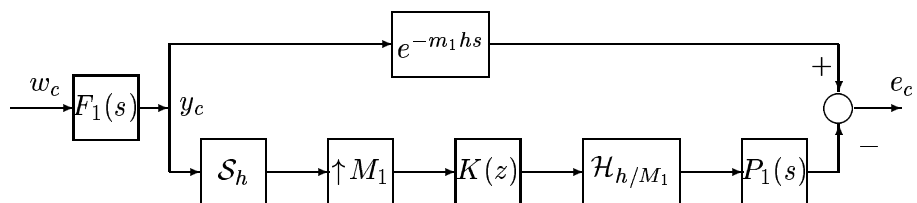


図 3.14: インターポレータの設計

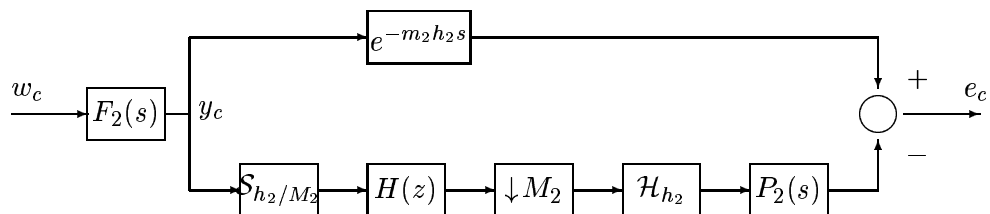


図 3.15: デシメータの設計

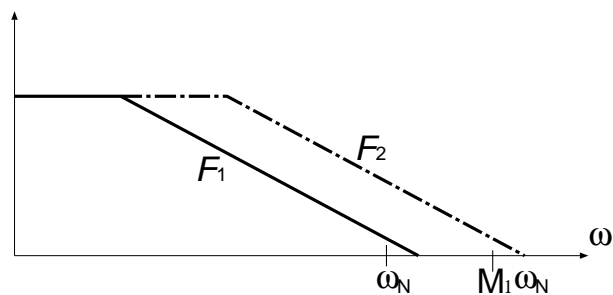
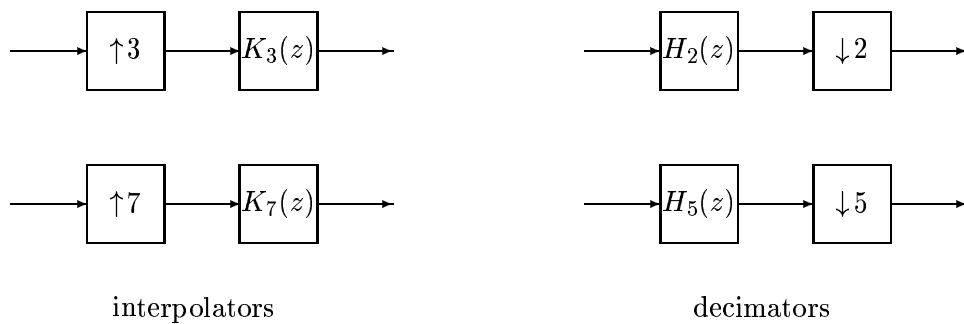
図 3.16: アンチエイリアシングフィルタ F_1 , F_2 の特性

図 3.17: インターポレータおよびデシメータ

インターポレータおよびデシメータをそれぞれ個別に設計し，インターポレーションフィルタ $K_3(z)$, $K_7(z)$ およびデシメーションフィルタ $H_2(z)$, $H_5(z)$ を用いて図 3.18 のように構成すればよい．なおサンプルレート変換器を周期時変離散時間系で構成する手法が提案されて

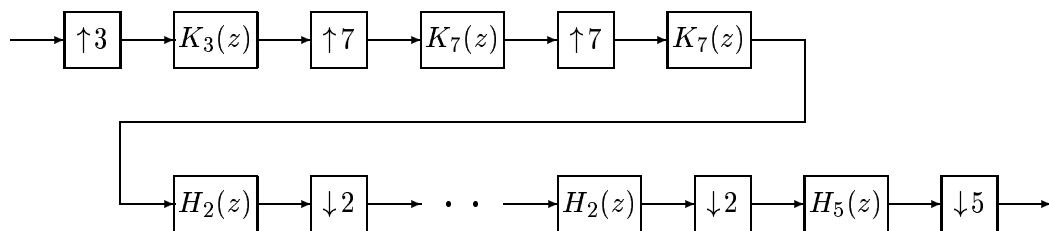


図 3.18: サンプルレート変換器 (CD/DAT) の構成

いるが [7]，この手法では問題が少なくとも $M_1 M_2$ の次数を持つ制御対象に対する設計問題となる．したがって，CD/DAT 変換のような大きな比率 ($M_1 M_2 = 23520$) の場合は数値計算を実行することができず，設計は不可能である．

第4章 提案手法による設計例と従来法との比較

4.1 インターポレータの設計

ここでは3.1節の結果を用いてインターポレータのサンプル値 H^∞ 設計を行い、従来法である Johnston フィルタ [9] による設計と比較する.

サンプル値 H^∞ 設計のパラメータは以下の通りである. インターポレータの比率を $M = 2$, サンプル周期を $h = 1$, 遅れのステップを $m = 2$ とする. またアナログフィルタ $F(s)$ と $P(s)$ を

$$F(s) = \frac{1}{(Ts + 1)(10Ts + 1)}, \quad T := 22.05/\pi \approx 0.70187, \quad P(s) = 1$$

とする. フィルタ $F(s)$ は 0.14248 [rad/sec] から 1 次で減衰し, 1.4248 [rad/sec] から 2 次で減衰するフィルタである. これを音楽再生用 CD のサンプリング周波数 44.1 [kHz] に換算すると 1 [kHz] から 1 次で減衰し, 10 [kHz] から 2 次で減衰するローパスフィルタとなる. この特性はオーケストラの音の周波数分布を簡単にシミュレートしたものである. 比較のための Johnston フィルタは 31 次のものを用いた.

得られたインターポレーションフィルタの周波数特性を図 4.1 に示す. Johnston フィルタは $\omega = \pi/2$ から急峻に減衰しているが, サンプル値設計によって得られたフィルタは減衰が緩やかである. なおサンプル値設計によって得られたフィルタの次数は 7 であり, Johnston フィルタに比べ低い次数となっている. 次にインターポレータの信号処理系 (図 3.1) に矩形波を入力したときの応答を図 4.2 (サンプル値設計) と図 4.1 (Johnston フィルタ) に示す. サンプル値設計によるものに比べ, Johnston フィルタによる信号復元では大きなリングングが生じていることがわかる. サンプル値設計は Nyquist 周波数以上の周波数成分も考慮にいられた設計であるので, 信号の高周波成分に対しても良好に復元されていることが示される.

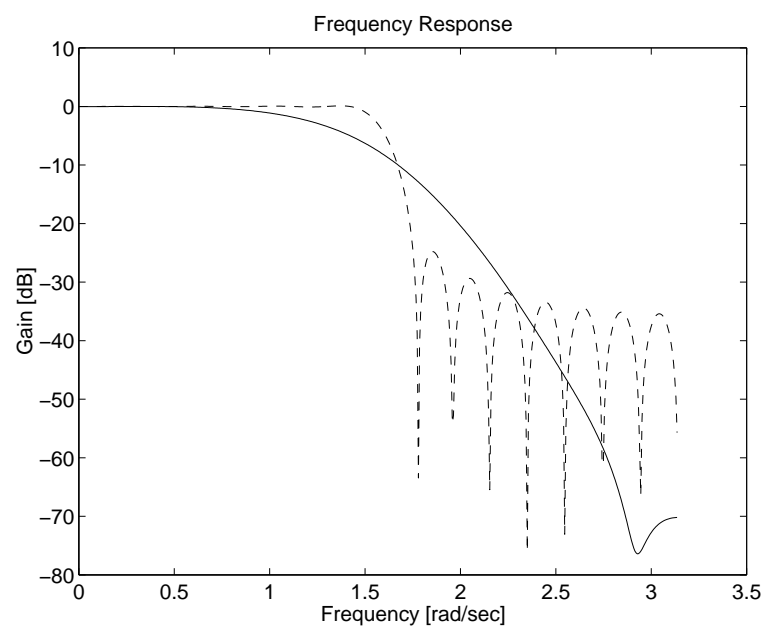


図 4.1: インターポレーションフィルタの周波数特性: サンプル値設計 (solid) , Johnston フィルタ (dash)

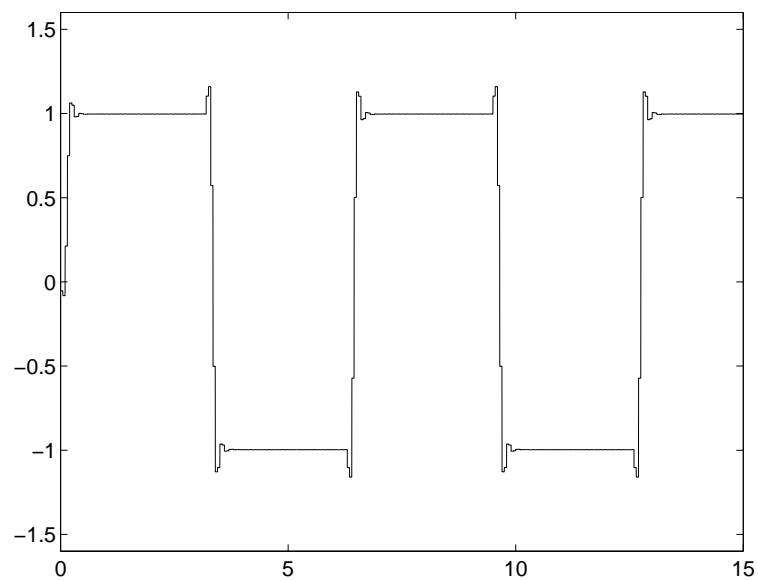


図 4.2: 矩形波応答 (サンプル値設計)

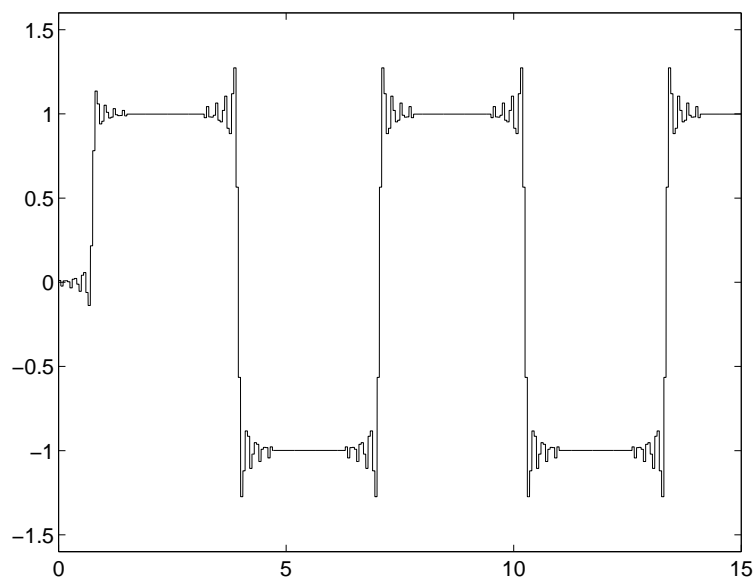


図 4.3: 矩形波応答 (Johnston フィルタ)

次に信号復元の誤差系 (図 3.2) の周波数応答を図 4.4 に示す. サンプル値設計によって得られたフィルタの次数は Johnston フィルタのものよりも低いにもかかわらず, 誤差系の周波数特性はサンプル値設計によるものが良好である.

4.2 デシメータの設計

3.2 節の結果を用いてデシメータのサンプル値 H^∞ 設計を行い, Johnston フィルタによる設計と比較する.

デシメータの比率を $M = 2$ とし, サンプル値 H^∞ 設計は前節のインターポレータ設計と同様のものを用いる. 比較のために 31 次の Johnston filter を用いた. Johnston フィルタは $\omega = \pi/2$ から急峻に減衰しているが, サンプル値設計によって得られたフィルタは減衰が緩やかである. なおサンプル値設計によって得られたフィルタの次数は 6 であり, Johnston フィルタに比べ低い次数となっている. 次にデシメータの信号処理系 (図 3.7) に矩形波を入力したときの応答を図 4.6(サンプル値設計) と図 4.2(Johnston フィルタ) に示す. インターポレータの場合と同様に, サンプル値設計は良好な結果を得ているが, Johnston フィルタは

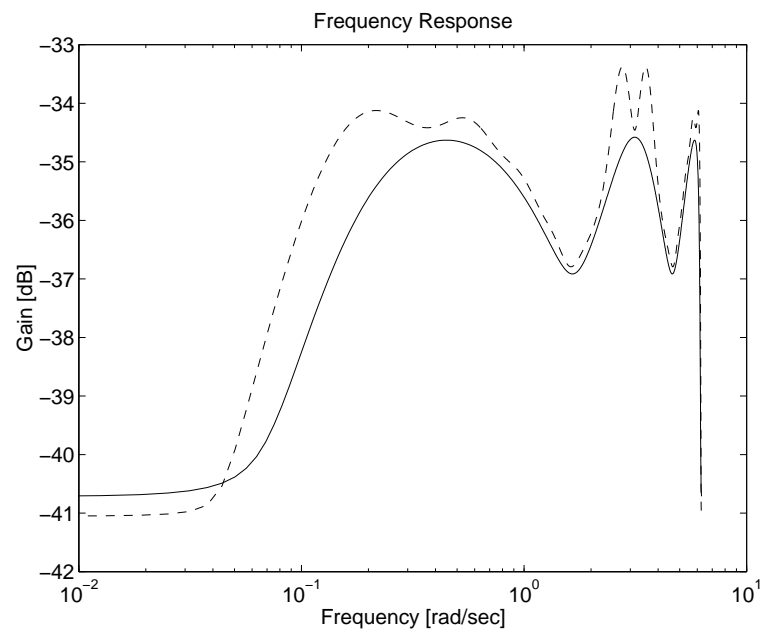


図 4.4: 誤差系の周波数応答: サンプル値設計 (solid), Johnston フィルタ (dash)

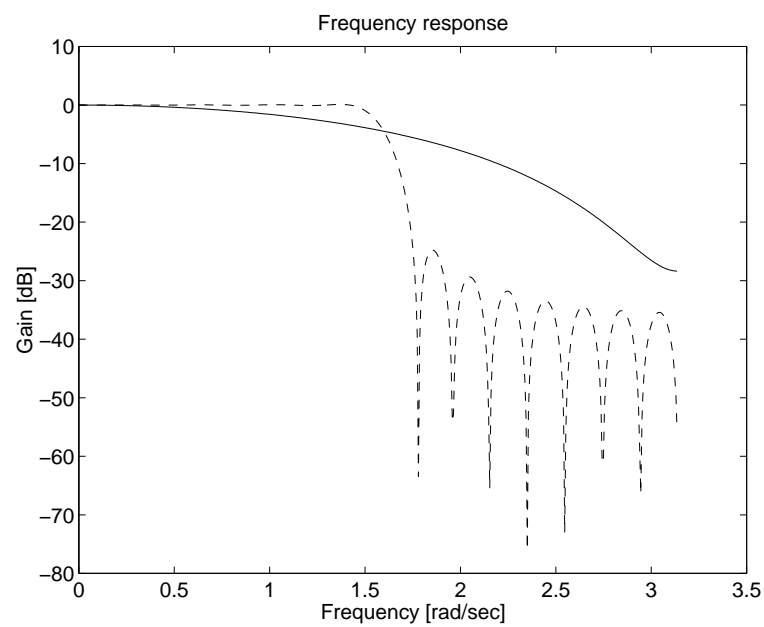


図 4.5: デシメーションフィルタの周波数特性: サンプル値設計 (solid), Johnston フィルタ (dash)

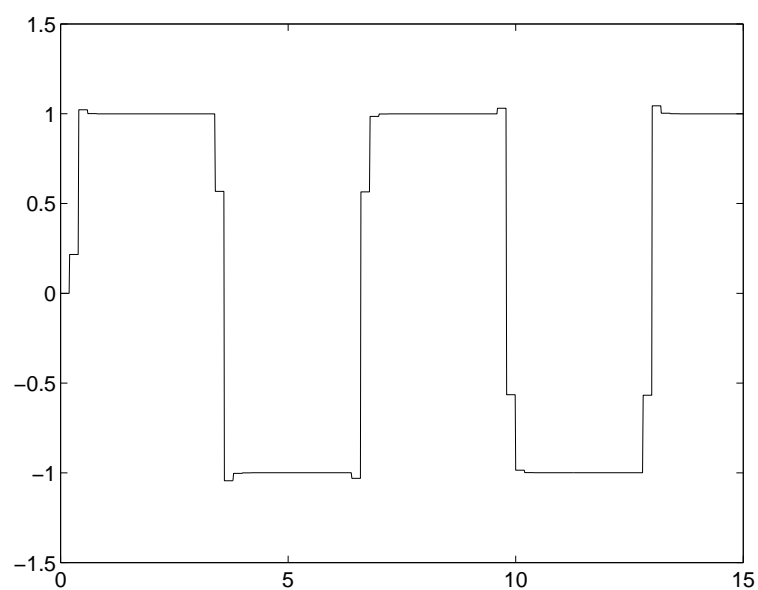


図 4.6: 矩形波応答 (サンプル値設計)

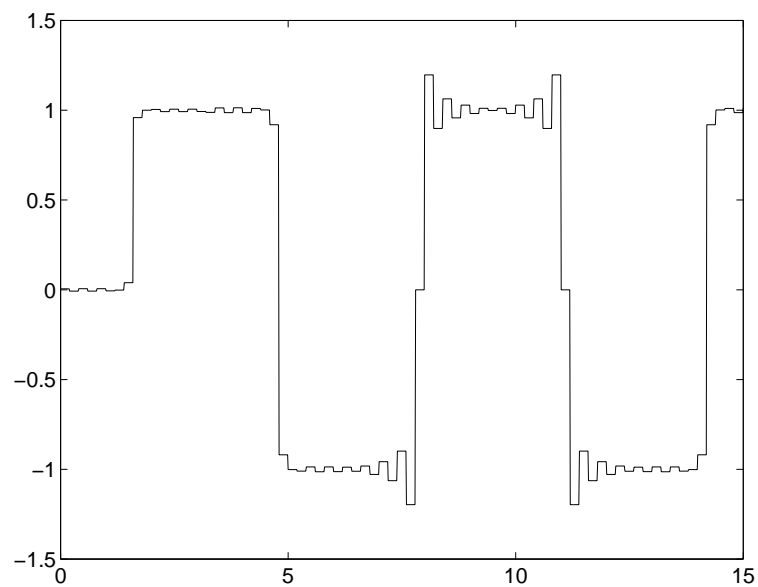


図 4.7: 矩形波応答 (Johnston フィルタ)

大きなリングングが生じている．次に信号復元の誤差系 (図 3.8) の周波数応答を図 4.8 に示す．誤差系の周波数特性より，サンプル値設計によって得られたフィルタの次数は Johnston

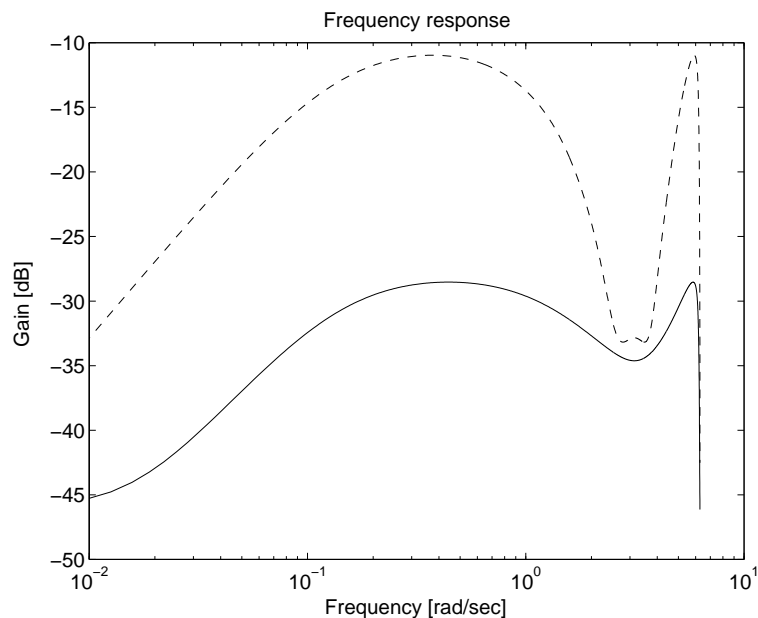


図 4.8: 誤差系の周波数応答: サンプル値設計 (solid) and Johnston フィルタ (dash)

フィルタのものよりも低いにもかかわらず，サンプル値設計によるものは約 20dB もの差が出ていることがわかる．

4.3 サンプルレート変換器の設計

第 3.3 節の手法を用いて図 3.17 のサンプルレート変換器を構成する．ここで変換比を $M_1 : M_2 = 3 : 4$ とし，インターポレーションフィルタ $K(z)$ とデシメーションフィルタ $H(z)$ をそれぞれサンプル値設計によって設計する．また従来法の等リプル FIR フィルタ設計 [16] を行い，結果を比較する．

インターポレーションフィルタとデシメーションフィルタのサンプル値設計のパラメータ

は以下のものを用いた.

$$h = 1, \quad m_1 = m_2 = 1, \quad P(s) = 1$$

$$F_1(s) = \frac{1}{(Ts + 1)(10Ts + 1)}, \quad F_2(s) = \frac{1}{(T_2s + 1)(10T_2s + 1)},$$

$$T := 22.05/\pi, \quad T_2 := T/M_1,$$

サンプル値設計によって得られたインターポレーションフィルタ $K(z)$ とデシメーションフィルタ $H(z)$ を直列につないだフィルタ $L(z) := H(z)K(z)$ の周波数特性を図 4.9 に示す. 比較のため, 等リプルフィルタ $L_e(z)$ の周波数特性を同時に示してある. なおサンプル値設計によるフィルタ $L(z)$ の次数は 23 であり, 等リプルフィルタ次数は 31 とした. 次に

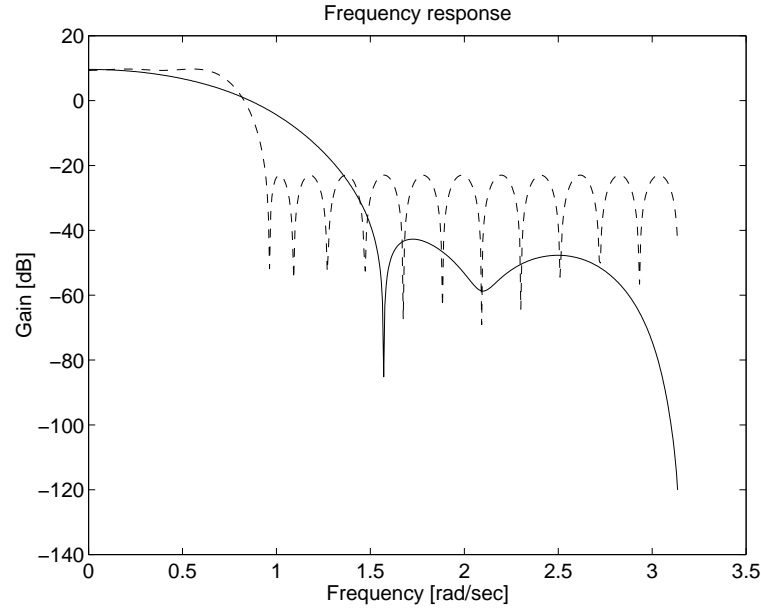


図 4.9: サンプルレート変換フィルタの周波数特性: サンプル値設計 $L(z)$ (solid), 等リプルフィルタ $L_e(z)$ (dash)

サンプルレート変換の信号処理系に矩形波を入力したときの応答を図 4.10(サンプル値設計)と図 4.3(等リプルフィルタ)に示す. サンプル値設計によるものは良好な信号復元を示しているが, 等リプルフィルタによるものは矩形波のエッジ部分にリングングが生じていることがわかる. また図 4.12 の誤差系に対して, 連続時間入力 w_c から連続時間出力 e_c までの周波数応答を図 4.13 に示す. これよりサンプル値設計によるサンプルレート変換が, 特に高

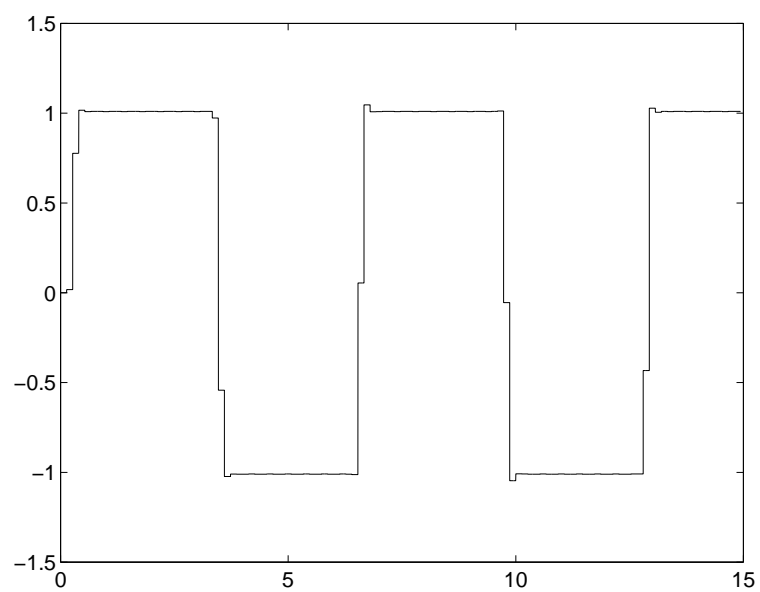


図 4.10: 矩形波応答 (サンプル値設計)

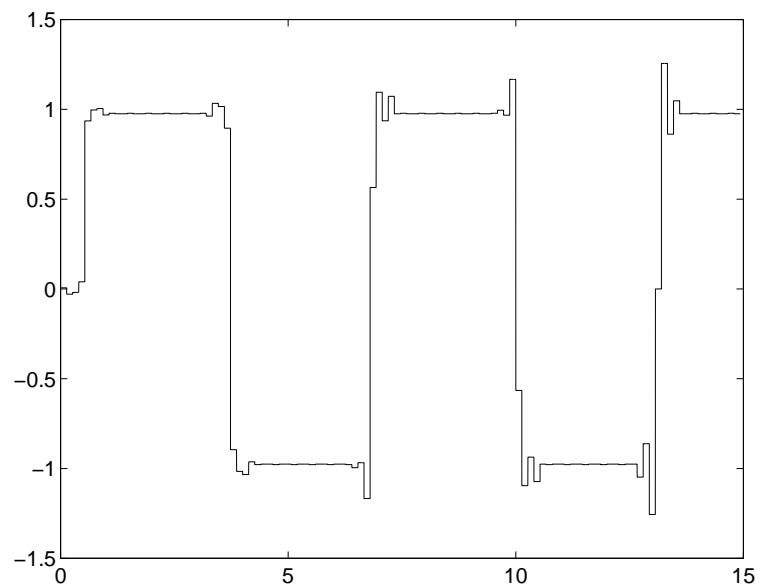


図 4.11: 矩形波応答 (等リプルフィルタ)

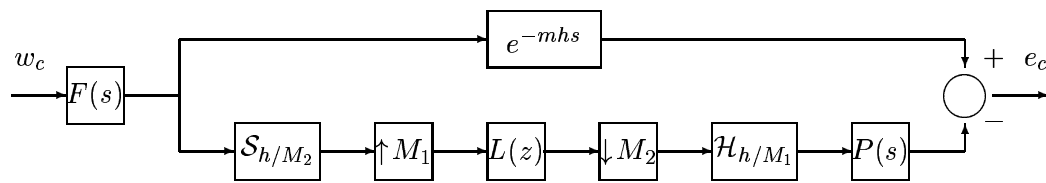


図 4.12: サンプルレート変換器の誤差系

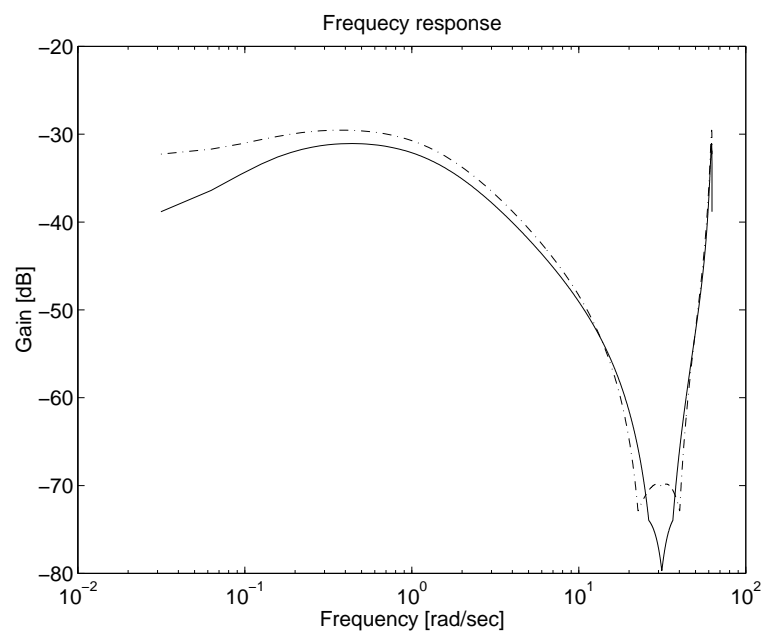


図 4.13: 誤差系の周波数応答: サンプル値設計 (solid), 等リプルフィルタ (dash)

周波の部分で良い性能を得ていることがわかる。

4.4 設計例に対する考察

従来の信号処理では、急峻な特性を持つフィルタが良いとされていたが、設計例の結果からわかるように、急峻なフィルタによる信号復元は良好ではなく、むしろ性能は悪化する。一方、元アナログ信号の特性を設計に取り入れた提案手法によって得られたフィルタは急峻な特性を持たない。これは、元アナログ信号のナイキスト周波数以上の周波数成分に対して、信号を再構成するために、高周波域をある程度残しておく必要があるためと考えられる。特にデシメータで、この傾向が顕著に出ている。

さらに従来の手法では、フィルタの次数は試行錯誤的に決定される。離散時間領域で考えれば、フィルタ次数が大きければ大きいほど性能は良くなるので、一般に高い次数のフィルタが設計される。一方、提案手法ではフィルタの次数を設計前に設定する必要はない。すなわちフィルタ次数は、アンチエイリアシングフィルタ $F(s)$ と遅れステップ m によって一意に決定される。また、提案手法によって設計されたフィルタは次数が低いにも関わらず、アナログ特性を含めた意味で (準) 最適なフィルタである。一般にフィルタの次数を高くすれば、カットオフ特性は急峻となる。設計例で示したように、急峻な特性を持つ従来型のフィルタでは、矩形波応答のエッジ部分に大きなリングングが生じる。これは、高周波域を急峻に減衰させることによって生じた時間領域でのギブス現象である。

第5章 おわりに

本論文ではマルチレート信号処理にサンプル値制御理論を導入することによって、完全帯域制限という条件を課すことなく信号処理系の設計が行えることを示した。これにより連続時間特性を考慮に入れたデジタルフィルタ設計が可能となり、信号処理における従来の設計法に比べ、より現実的な設計法であると言える。また具体的な設計例によって提案手法の有効性を確かめた。

マルチレート信号処理はウェーブレット解析と関連が深いことが知られている。ウェーブレット解析との関わりからサンプル値制御理論を用いてマルチレート信号処理の研究を行うことは今後の課題である。また本論文では音声などの1次元信号に対する信号処理を扱ったが、2次元信号を扱う画像処理にサンプル値制御理論を応用することが考えられる。

参考文献

- [1] B. Bamieh and J. B. Pearson: A general framework for linear periodic systems with application to H_∞ sampled-data control, *IEEE Trans. Autom. Control*, **AC-37**, pp. 418–435, 1992.
- [2] T. Chen and B. A. Francis: *Optimal Sampled-Data Control Systems*, Springer, 1995.
- [3] T. Chen and B. A. Francis: Design of multirate filter banks by \mathcal{H}^∞ optimization, *IEEE Trans. Signal Processing*, **SP-43**, pp. 2822–2830, 1995.
- [4] N. J. Fliege: *Multirate Digital Signal Processing*, Wiley, 1994.
- [5] S. Hara, H. Fujioka, P. P. Khargonekar and Y. Yamamoto: Computational aspects of gain frequency response for sampled-data systems, *Proc. of 34th Conf. on Decision and Control*, pp. 1784–1789, 1995.
- [6] 石井, 山本: マルチレート D/A 変換器のサンプル値 $H^\infty, H^2/H^\infty$ 設計, システム制御情報学会論文誌, Vol.11, No.10, pp. 585–592, 1998.
- [7] H. Ishii, Y. Yamamoto, B. A. Francis: Sample-rate conversion via sampled-data H^∞ control, *Proc. of 38th Conf. on Decision and Control*, 1999.
- [8] A. J. Jerri : The Shannon sampling theorem - its various extension and applications: a tutorial review, *Proc. IEEE*, vol. 65, pp.1565-1596 (1977).
- [9] J. D. Johnston: A filter family designed for use in quadrature mirror filter banks, *Proc. of IEEE International Conf. on Acoustics, Speech and Signal Processing*, pp. 291–294, 1980.

- [10] P. T. Kabamba and S. Hara: Worst case analysis and design of sampled data control systems, *IEEE Trans. Autom. Control*, **AC-38**, pp. 1337–1357, 1993.
- [11] J. P. Keller and B. D. O. Anderson: A new approach to the discretization of continuous-time controllers, *IEEE Trans. Autom. Control*, **AC-37**, pp. 214–223, 1992.
- [12] P. P. Khargonekar, K. Poolla and A. Tannenbaum: Robust control of linear time-invariant plants using periodic compensation, *IEEE Trans. Autom. Control*, **AC-30** pp. 1088–1096, 1985.
- [13] P. P. Khargonekar and Y. Yamamoto: Delayed signal reconstruction using sampled-data control, *Proc. of 35th Conf. on Decision and Control*, pp. 1259–1263, 1996.
- [14] S. Mallat: *A Wavelet Tour of Signal Processing*, Academic Press, 1998.
- [15] 永原, 山本, 藤岡: オーバーサンプル D / A 変換器のサンプル値 H^∞ 設計, 第 22 回 DST シンポジウム予稿集, pp. 347–350, 1999.
- [16] P. P. Vaidyanathan: *Multirate Systems and Filter Banks*, Prentice Hall (1993)
- [17] Y. Yamamoto: New approach to sampled-data systems: a function space method, *Proc. of 29th Conf. on Decision and Control*, pp. 1881–1887, 1990.
- [18] Y. Yamamoto: A function space approach to sampled-data control systems and tracking problems, *IEEE Trans. Autom. Control*, **AC-39** pp. 703–712, 1994.
- [19] Y. Yamamoto and P. P. Khargonekar: Frequency Response of sampled-data systems, *IEEE Trans. Autom. Control*, **AC-41** pp. 166–176, 1996.
- [20] Y. Yamamoto, H. Fujioka and P. P. Khargonekar: Signal reconstruction via sampled-data control with multirate filter banks, *Proc. of 36th Conf. on Decision and Control*, pp. 3395–3400, 1997.
- [21] Y. Yamamoto, A. G. Madievski and B. D. O. Anderson: Computation and convergence of frequency response via fast sampling for sampled-data control systems, *Proc. of 36th Conf. on Decision and Control*, pp. 2157–2162, 1997.

- [22] A. I. Zayed: *Advances in Shannon's Sampling Theory*, Boca Raton, CRC Press, 1993.

第6章 謝辞

本論文を締めくくるにあたり，日頃より懇切に御指導いただき，本研究を進める上で適切な御助言を賜りました山本裕教授に深く感謝の意を表します．また，本研究の遂行に当たって多くの御助言を賜りました藤岡久也助教授に心より感謝申し上げます．さらに，日頃から研究会等で貴重な御助言を賜りました若佐裕治助手に深く感謝いたします．そして、知能化システム分野の学生諸君をはじめとして，本研究に御協力頂いたすべての皆様に厚く御礼申し上げます．

付 録 A

A.1 インターポレータおよびデシメータ設計の FSFH 近似公式

ここではインターポレータおよびデシメータのサンプル値制御系 (図 3.4, 図 3.10) に対する FSFH 離散近似系 (図 3.6, 図 3.6) の公式を与える.

連続時間系

$$G_a(s) := \begin{bmatrix} F(s) & -P(s) \\ F(s) & 0 \end{bmatrix}$$

の状態空間表現を

$$G_a : \begin{bmatrix} \dot{x}_a \\ e_c \\ y_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_c & B_{c1} & B_{c2} \\ C_{c1} & 0 & D_{c12} \\ C_{c2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ w_c \\ u_c \end{bmatrix}$$

とおく.

A.1.1 インターポレータ設計の FSFH 離散時間近似

図 3.6 の離散近似系 G_{dN} の状態空間表現は次式で与えられる. ただし N は図 3.5 における離散近似の分割数であり, $N = Ml$ (l :自然数) とする.

$$G_{dN} : \begin{bmatrix} x_N[k+1] \\ \tilde{e}_d[k] \\ y_d[k] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_d & B_{N1} & B_{N2} \\ C_{N1} & D_{N11} & D_{N12} \\ C_{N2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_N[k] \\ \tilde{w}_d[k] \\ u_d[k] \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
A_d &:= e^{A_c h}, & A_f &:= e^{A_c h/N} \\
[B_{1f} \ B_{2f}] &:= \int_0^{h/N} e^{A_c t} [B_{c1} \ B_{c2}] dt \\
B_{N1} &= \begin{bmatrix} A_f^{N-1} B_{1f} & A_f^{N-2} B_{1f} & \cdots & B_{1f} \end{bmatrix} \\
B_{N2} &= \begin{bmatrix} A_f^{N-1} B_{2f} & A_f^{N-2} B_{2f} & \cdots & B_{2f} \end{bmatrix} \mathcal{Q} \\
C_{N1} &= \begin{bmatrix} C_{c1} \\ C_{c1} A_f \\ \vdots \\ C_{c1} A_f^{N-1} \end{bmatrix} \\
D_{N11} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ C_{c1} B_{1f} & 0 & \cdots & 0 \\ C_{c1} A_f B_{1f} & C_{c1} B_{1f} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{c1} A_f^{N-2} B_{1f} & C_{c1} A_f^{N-3} B_{1f} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \\
D_{N12} &= \begin{bmatrix} D_{c12} & 0 & \cdots & 0 \\ C_{c1} B_{2f} & D_{c12} & \cdots & 0 \\ C_{c1} A_f B_{2f} & C_{c1} B_{2f} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{c1} A_f^{N-2} B_{2f} & C_{c1} A_f^{N-3} B_{2f} & \cdots & D_{c12} \end{bmatrix} \mathcal{Q} \\
\mathcal{Q} &:= \begin{bmatrix} \left. \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{matrix} \right\} l & & \\ & \ddots & \\ & & \left. \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{matrix} \right\} l \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{N \times M}
\end{aligned}$$

A.1.2 デシメータ設計の FSFH 離散時間近似

図 3.11 の離散近似系 G_{dN} の状態空間表現は次式で与えられる．ただし N は図 3.5 における離散近似の分割数であり， $N = Ml$ (l :自然数) とする．

$$G_{dN} : \begin{bmatrix} x_N[k+1] \\ \tilde{e}_d[k] \\ y_d[k] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_d & B_{N1} & B_{N2} \\ C_{N1} & D_{N11} & D_{N12} \\ C_{N2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_N[k] \\ \tilde{w}_d[k] \\ u_d[k] \end{bmatrix}$$

$$A_d := e^{A_c h}, \quad A_f := e^{A_c h/N}$$

$$[B_{1f} \ B_{2f}] := \int_0^{h/N} e^{A_c t} [B_{c1} \ B_{c2}] dt$$

$$B_{N1} = \begin{bmatrix} A_f^{N-1} B_{1f} & A_f^{N-2} B_{1f} & \cdots & B_{1f} \end{bmatrix}$$

$$B_{N2} = \int_0^h e^{A_c t} B_{c2} dt$$

$$C_{N1} = \begin{bmatrix} C_{c1} \\ C_{c1} A_f \\ \vdots \\ C_{c1} A_f^{N-1} \end{bmatrix}, \quad C_{N2} = \mathcal{R} \begin{bmatrix} C_{c2} \\ C_{c2} A_f \\ \vdots \\ C_{c2} A_f^{N-1} \end{bmatrix}$$

$$D_{N11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ C_{c1} B_{1f} & 0 & \cdots & 0 \\ C_{c1} A_f B_{1f} & C_{c1} B_{1f} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{c1} A_f^{N-2} B_{1f} & C_{c1} A_f^{N-3} B_{1f} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$D_{N12} = \begin{bmatrix} D_{c12} \\ C_{c1} B_{2f} + D_{c12} \\ \vdots \\ C_{c1} A_f^{N-2} B_{2f} + C_{c1} A_f^{N-3} B_{2f} + \cdots + D_{c12} \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{R} := \begin{bmatrix} \underbrace{1 \ 0 \ \cdots \ 0}_l & & \\ & \ddots & \\ & & \underbrace{1 \ 0 \ \cdots \ 0}_l \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{M \times N}$$