ベクトル

目次

1　ベクトルの概念

物理学などに現れる量の多くは，単に大きさのみを持つものである．これを**スカラー**と呼ぶ．長さ，時間，温度，エネルギー，速さなどは全てスカラーである．

一方，大きさだけでなく方向を持っている量がある．これを**ベクトル**と呼ぶ．例をあげると，速度はベクトルである．『車のメーターの速度』というのは間違いであり，これは『車のメーター』が方向を示していないためである．『車のメーターの速さ』というべきである．

1.1　ベクトルの定義

(注) この 1.1 は難しいのでとりあえず理解しないまま 1.2 以降に進んでもよい．

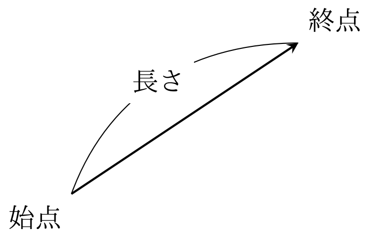
平面内の 2 点を結ぶ線分に向きを与えたものを**有向線分**という．

記号として，点 A から点 B に向かう有向線分を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と書く．

有向線分は，その始点と終点を決めることでただ一つに定まる．これはまた，

始点 (または終点)，　方向，　長さ

の 3 つの要素により定まると言い換えて良いことを確認しよう．



この 3 要素のうち，

方向，　長さ

のみに注目し，任意の始点，すなわち視点の違いを無視することによって，ベクトルの概念が生まれる．

定義

有向線分は 1 つのベクトルを定める．ただし，始点の違いに依らずこの有向線分と方向も長さも等しい有向線分は全て同一のベクトルであるものとする．

この定義により，

「平行移動によって重ね合わせることのできる有向線分は，全て同一のベクトルを表す」

ことがわかる．

(注)

有向線分 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を表すベクトルを $\vec{a}$ とおくときに，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{a}$$

のように書くことが多い．

ベクトルを小文字の太字 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ などで表すこともあるが，高校数学では $\vec{a}$, $\vec{b}$ などと表記する方が一般的である．

1.2　ベクトルの成分

ベクトルの成分を説明するために，座標を本当は使いたくないのだがしょうがない．座標を使わなければ，誤解の可能性が出てくるので，座標を使って説明するとしよう．

例えば，2 点 A(1, 1)，B(2, 3) を取ると，点 A から点 B までの変位は x 軸方向に 1 目盛，y 方向に 2 目盛だから，

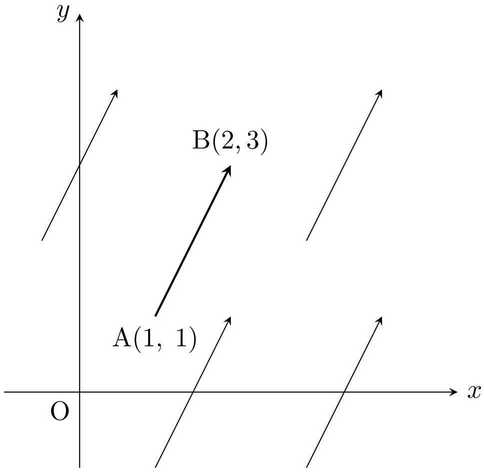
$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

のように表すことにする．これは，有向線分だからただ一つに決まっていることはわかるだろう．いいですね．(始点も終点も決まっているからね)

今度は，変位だけを取り出し

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{a}$$

と表すと，これは始点も終点も指定されていないので，この平面上に無数に存在しますね．



太い矢印は有向線分，細いのがベクトル

つまり，有向線分 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ が無数のベクトル $\vec{a}$ を代表しているとも言えるわけだ．また，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ で代表されるベクトル ($\vec{a}$ で表されるベクトル集団) をベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ というときもある．

さて，ここでベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を平行移動して $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ にピタッと重なるとすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots \ (*)$$

となり，点 P(1, 2) として P の座標が決まる．これがいわゆる**位置ベクトル**の考え方ですね．

結論，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ について

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

をこのベクトルの**成分**というわけです．

1.3 ベクトルの方向と大きさ

ベクトル $\vec{a}$ を表す有向線分を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ とする．

与えられたベクトル $\vec{a}$ の向きを逆にしたベクトルを $\vec{a}$ の**逆ベクトル**と呼び，$-\vec{a}$ と書く．

すなわちベクトル $\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の逆ベクトルは $-\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{BA}}$ である．

また，ベクトル $\vec{a}$ の**大きさ**を有向線分 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の長さで定義し，

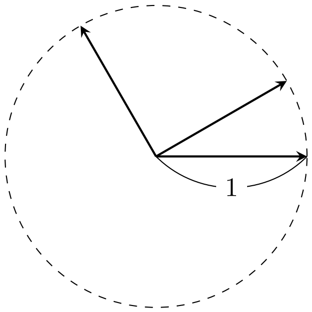
$$\text{ベクトル}\vec{a}\text{の大きさ} = |\vec{a}|$$

という記号で表す．　例えば，前の例 $(*)$ を考えると，

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OP}}| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

である．

1.4　単位ベクトル



大きさが 1 のベクトルを単位ベクトルという．
単位ベクトルはあらゆる方向のものが存在するが，
方向を指定すれば単位ベクトルはただ一つに決まる．

1.5　零ベクトル (ヌルベクトル)

始点と終点が一致したベクトル，すなわち大きさが 0 であるベクトルを**零(れい)ベクトル**または**ヌルベクトル**と呼ぶ．記号としては，$\vec{0}$ や $\mathbf{0}$ を用いる．

零ベクトルは点であるとも言い換えられ，方向を定めることができないことに注意する．

ゼロベクトルという言い方も存在するが，ベクトルがドイツ語風な読み方であるのに英語で形容するというのは不思議であると筆者は感じるため，ヌルベクトルという言い方を提示した．

2　ベクトルの演算

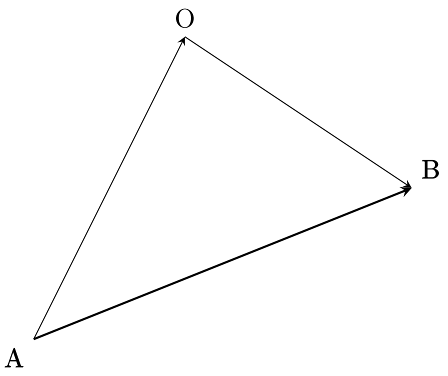
ベクトルは線形代数学の一分野であり，この線形代数学はその名前通り代数の演算によって図形を解釈する学問である．ベクトルの良い点として，初等幾何で解けないような複雑な図形を幾何的にイメージしなくても代数の演算によって，解析できることである．ここでは，ベクトルの代表的な演算を紹介する．

2.1　ベクトルの合成と分解

まず合成について，

$$\overrightarrow{\mathrm{AO}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} \quad \cdots\cdots \text{①}$$

となる．これは A から B へと向かう際に，途中の O を経由して遠回りしても同じであることを示している．矢印の継ぎ足し，継ぎ足しが許されるのだ！



例えば，A$(1,1)$，B$(3,5)$ とすると，それぞれベクトルは

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix},\ \overrightarrow{\mathrm{AO}} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

と表され，

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

となり，式 ① が成り立っている．

さらに式 ① について議論してみると，$\overrightarrow{\mathrm{AO}} = -\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ であることから，

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{AB}} &= \overrightarrow{\mathrm{AO}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} \\ &= -\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} \\ &= \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} \end{aligned}$$

となり，後から前を引いているような形になっている．

ベクトルの合成と分解

それぞれ合成は，

$$\overrightarrow{\mathrm{AO}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

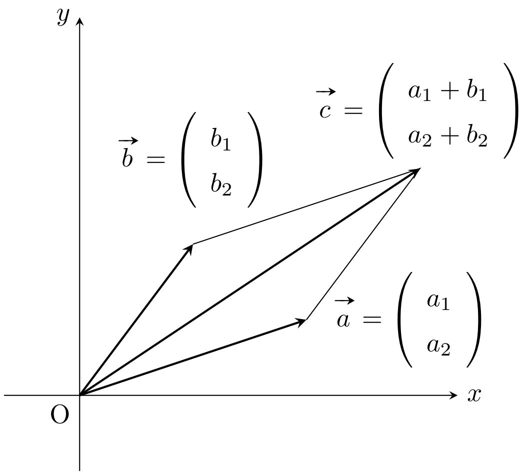
分解は，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

と表されるが，本質的には同じことを言っている．

2.2　ベクトルの（和）加法の定義

頼む．図で理解してほしい．



$\vec{a}$, $\vec{b}$ の和，すなわち $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$ は上のように作図されるが，得られた $\vec{c}$ は $\vec{a}$, $\vec{b}$ を隣り合う 2 辺とする**平行四辺形の対角線**で表されるベクトルに他ならない．
$\vec{a}$ に，平行移動した $\vec{b}$ を継ぎ足すと考えよう．

このことを成分で表すと，

$$\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \end{pmatrix}$$

となる．

当然，$\overrightarrow{b}$ に，平行移動した $\overrightarrow{a}$ を継ぎ足すと考えても

$$\overrightarrow{b}+\overrightarrow{a}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \end{pmatrix}$$

となって，同様の結果が得られる．

2.3　ベクトルの実数倍

$\overrightarrow{0}$ でない $\overrightarrow{a}$ に対し，次を定める．m を実数とするとき，$m\overrightarrow{a}$ は，

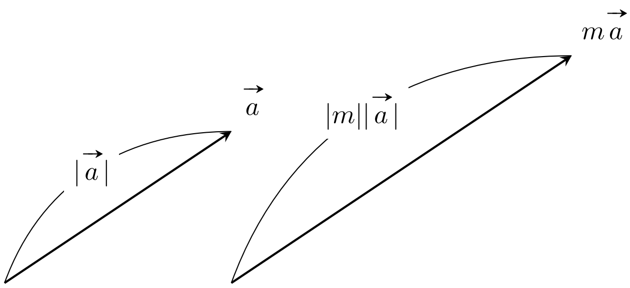
(1) $m>0$ のとき，$\overrightarrow{a}$ と同じ向きで，大きさが $|m|$ 倍のベクトル

(2) $m=0$ のとき，$0\overrightarrow{a}=\overrightarrow{0}$

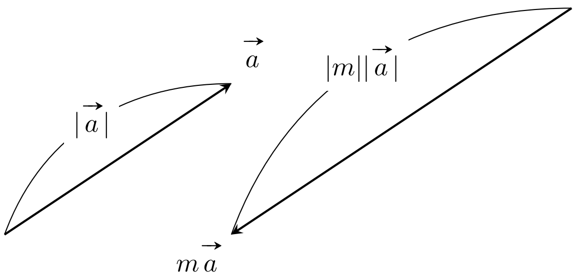
(3) $m<0$ のとき，$\overrightarrow{a}$ と逆向きで，大きさが $|m|$ 倍のベクトル

である．

(1) のイメージ



(3) のイメージ



特に，$\overrightarrow{a}$ に対し $m=-1$ のときすなわち $-\overrightarrow{a}$ を**逆ベクトル**と呼ぶ．

さらに，ベクトルの実数倍に対し以下の計算法則が従う．

$$\begin{cases} m(n\vec{a}) = (mn)\vec{a} & \text{(結合法則)} \\ (m+n)\vec{a} = m\vec{a} + n\vec{a} & \text{(分配法則)} \\ m(\vec{a} + \vec{b}) = m\vec{a} + m\vec{b} & \text{(分配法則)} \end{cases}$$

ここまでくれば，成分についてもう図を書いて説明するまでもなかろう．
k をある実数として，

$$k\vec{a} = k\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \end{pmatrix}$$

である．

2.4 ベクトルの（差）減法の定義

ベクトルの加法から明らかであろう．

$$\vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \end{pmatrix}.$$

3 線型独立 (1 次独立) な 2 つのベクトル

2 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ が

$$\vec{a} \neq \vec{0}, \quad \vec{b} \neq \vec{0}$$

を満たしかつ $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行でないとき，

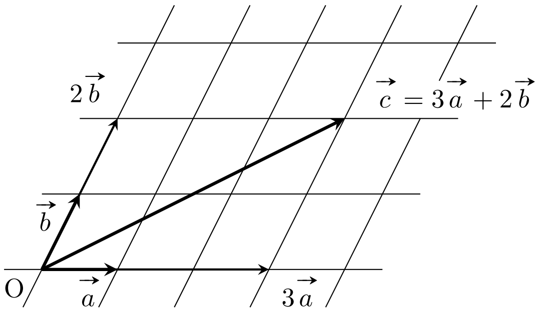
「$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は**線型独立** (または **1 次独立**) である」

という．

また，線型独立でない場合を**線形従属** (または **1 次従属**) であるという．

3.1 線型独立のありがたみ

まず，下の図を見てみよう．



図のベクトル $\vec{c}$ がベクトル $\vec{a}$ とベクトル $\vec{b}$ を用いて，

$$\vec{c}=3\vec{a}+2\vec{b}$$

と表されることは異論あるまい．このとき，$\vec{c}$ は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ との**線型結合**で表されたという．

ところが，線形従属だと，2 つのベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ とが平行か，またはいずれかが $\vec{0}$ だからそうはいかない．格子状の枠がベクトルに平行な直線上になってしまうか，原点につぶれてしまう．$\vec{a}$ と $\vec{b}$ をどう組み合わせても $\vec{c}$ を表すことができない．

実はこの話題は，一般に綺麗にまとめられている．

ベクトルの線型結合と線型独立の定義

n 個のベクトル $\overrightarrow{a_1},\ \overrightarrow{a_2},\ \cdots,\ \overrightarrow{a_n}$ に対し，$k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_n$ を実数として

$$k_1\overrightarrow{a_1}+k_2\overrightarrow{a_2}+\cdots+k_n\overrightarrow{a_n}$$

を n 個のベクトル $\overrightarrow{a_1},\ \overrightarrow{a_2},\ \cdots,\ \overrightarrow{a_n}$ による**線型結合**という．

特に，

$$k_1\overrightarrow{a_1}+k_2\overrightarrow{a_2}+\cdots+k_n\overrightarrow{a_n}=\vec{0}$$

が $k_1=k_2=\cdots=k_n=0$ のときに限って成り立つならば n 個のベクトル $\overrightarrow{a_1},\ \overrightarrow{a_2},\ \cdots,\ \overrightarrow{a_n}$ は**線型独立**であるという．

4　内積の研究

平面ベクトル $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$，$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ に対して，実数

$$(\vec{a},\ \vec{b}) = a_1b_1 + a_2b_2$$

を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の**内積**という．ここで，内積とはベクトルでなくスカラーであることに注意しよう．

同じように，空間ベクトル $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$，$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ に対しても内積が

$$(\vec{a},\ \vec{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

と定義される．内積は $(\vec{a},\ \vec{b})$ の他に $\vec{a} \cdot \vec{b}$ と表されることもある．

さらに，当然のことであるが，ベクトルの大きさに対し

$$|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a},\ \vec{a})} = \begin{cases} \sqrt{a_1^2 + a_2^2} & (\vec{a}\text{が平面ベクトルのとき}) \\ \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} & (\vec{a}\text{が空間ベクトルのとき}) \end{cases}$$

が成り立つ．
実は，ベクトルの大きさは内積によって定義しても良い．

ここまでで小休止としよう．兎にも角にも言いたいことは，

内積とは積の和である

ということだ．

さてさて，次の命題を提示しよう．

命題 4.0 内積とベクトルの大きさに関して次の不等式が成立する．

(1) $|(\vec{a},\ \vec{b})| \leqq |\vec{a}||\vec{b}|$ (コーシー・シュワルツの不等式)

(2) $|\vec{a} + \vec{b}| \leqq |\vec{a}| + |\vec{b}|$ (三角不等式)

Proof.

(1)

今回は，平面ベクトル $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ についてのみ証明する．空間のベクトルも同様に示すことができる．

$$\begin{aligned}
|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a},\ \vec{b})^2 &= (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) - (a_1b_1 + a_2b_2)^2 \\
&= a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 - 2a_1b_1a_2b_2 \\
&= (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \geqq 0. \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

(2)

内積の性質から，

$$\begin{aligned}
|\vec{a} + \vec{b}|^2 &= ((\vec{a} + \vec{b}),\ (\vec{a} + \vec{b})) \\
&= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2(\vec{a},\ \vec{b}) \\
&\leqq |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}| \\
&= (|\vec{a}| + |\vec{b}|)^2. \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

ここでの不等号は，コーシー・シュワルツの不等式から得られる．これから三角不等式がわかる．

コーシー・シュワルツの不等式から，$\vec{a}$, $\vec{b}$ がともに $\vec{0}$ でないとき，

$$-1 \leqq \frac{(\vec{a},\ \vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|} \leqq 1$$

が成り立つので，2 つのベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ を

$$\cos\theta = \frac{(\vec{a},\ \vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|} \quad (0 \leqq \theta \leqq \pi)$$

で定義することができる．

4.1 内積のまとめ

以上の議論においては，$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ との内積を成分の積の和によって定義し，内積によって 2 つのベクトルのなす角を定義した．

すなわち，$\overrightarrow{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$，$\overrightarrow{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ において，

$$(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b})=a_1b_1+a_2b_2=|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta$$

である．

内積の定義

2 つのベクトル $\overrightarrow{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$，$\overrightarrow{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ に対して，

$$(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b})=a_1b_1+a_2b_2=|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta$$

である．

尚，$(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b})=|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta$ を内積の定義としたときには，余弦定理で $a_1b_1+a_2b_2$ が示される．

4.2 内積と三角形の面積

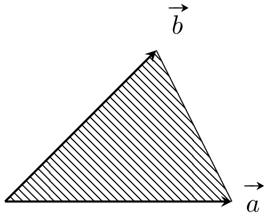
実は三角形の面積は，内積を用いることで簡単に表すことができる．

内積を用いた三角形の面積

2 つのベクトル $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ とで作られる三角形の面積 S は

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{a}|^2|\overrightarrow{b}|^2-(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b})^2}$$

と表される．



これを証明しよう．2 つのベクトル $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ のなす角を θ とすると，

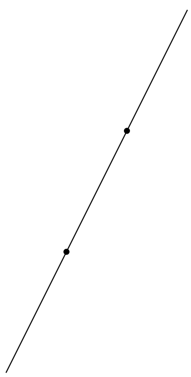
$$
\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\sin\theta \\
&= \frac{1}{2}|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\sqrt{1-\cos^2\theta} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{a}|^2|\overrightarrow{b}|^2-|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos^2\theta} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{a}|^2|\overrightarrow{b}|^2-(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b})^2}. \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

5　直線と平面の方程式

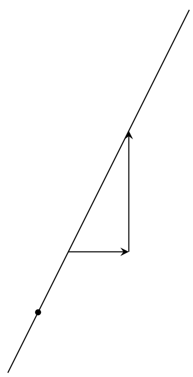
あまり知られていないことだが，直線や平面の方程式とは本来ベクトルから導かれるものである．このセクションでは，本来の直線や平面の方程式の姿を見ていこうと思う．言わば，『元祖・直線，平面の方程式』だ．

5.1　直線は何で決まるか？

ある特定の直線を定めるためにはどうすればよいか．中学生の頃の諸君であれば，2 点と答えるだろう．真っ当なことである．或いは，ある 1 点と傾きだろうか？



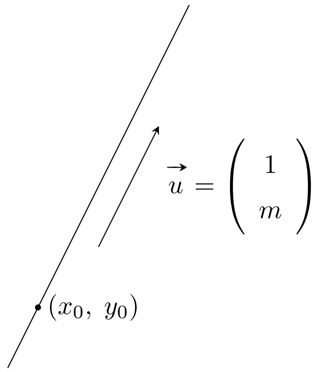
2 点



1 点と傾き

ベクトルを学んだ今，こんな風にも直線は決められることがわかる．

『直線は，ある 1 点と方向ベクトルで決めることができる．』



上図のように，ある定点を $(x_0,\ y_0)$ とし，傾き m に値する方向ベクトルを $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ と定めると，直線は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} \quad (t \text{ は任意実数}) \quad \cdots\cdots\ (*)$$

を満たす任意の点 $(x,\ y)$ の集合であると考えられる．ここで，実数 t は**媒介変数 (パラメータ)** と呼ばれる．

さて，$(*)$ を書き換えると，

$$\begin{cases} x = x_0 + t \\ y = y_0 + mt \end{cases}$$

であり，2 式からパラメータ t を消去すると，よく見慣れた式

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

が得られる．

また，より一般に方向ベクトルを $\vec{v} = \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix}$ と定めると，直線の方程式は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} \quad (t \text{ は任意実数})$$

と表せ，パラメータ t を消去すると，

$$mx - ly + (ly_0 - mx_0) = 0.$$

であり，$m,\ l,\ x_0,\ y_0$ は常数であるから

$$\begin{cases} m = a \\ -l = b \\ ly_0 - mx_0 = c \end{cases}$$

と表せ，直線の方程式の一般形と呼ばれる

$$ax + by + c = 0$$

が得られる．ここで，$\vec{v} \neq 0 \iff l^2 + m^2 \neq 0$ すなわち $a^2 + b^2 \neq 0$ の条件が付されることに注意されたい．

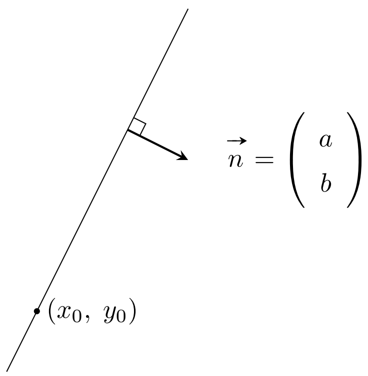
さらに，直線の存在範囲を平面から空間に広げるとより一般に，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} \quad (t \text{ は任意実数})$$

と表される．

5.2 法線ベクトルによる直線の決定

直線の方程式をもう一つの方法で導いてみよう．



『直線はある一点とその直線の方向ベクトルの二つによってただ一つに決まる』ことを使ったのが 5.1 である．

方向ベクトルをそれに垂直な **法線ベクトル** に変えても良いだろう．

図のように，直線に対する法線ベクトルを $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ と定め，今までと同じようにある定点を $\mathrm{A}(x_0,\ y_0)$ と定める．

直線上の任意の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ を考えると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \perp \overrightarrow{n}$$

である．

ここで，内積を思い出してみよう．$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ の内積とは，二つのベクトルのなす角 θ を用いて

$$(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b}) = |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta$$

と表現できた．特に，二つのベクトルが直行，すなわち $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ となるとき，$\cos\theta = 0$ ゆえ

$$(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b}) = 0$$

である．

ベクトルが直行するときの内積の値

2 つのベクトル $\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b}$ について，

$$\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b} \ \Rightarrow\ (\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b}) = 0$$

である．

これは重要事項である．よく心に留めておいてもらいたい．

さて，この事実を使ってみると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \perp \overrightarrow{n} \ \Leftrightarrow\ (\overrightarrow{\mathrm{OP}},\ \overrightarrow{n}) = 0$$

である．よって，

$$(x - x_0) \cdot a + (y - y_0) \cdot b = 0.$$

さらに書き換えると，

$$ax + by - (ax_0 + by_0) = 0.$$ （さらに $-ax_0 - by_0 = c$ とでもおけば良い．）

5.3　平面の方程式

　平面がただ一つに決まるためには，

　『ある 1 点と 2 つのベクトル』

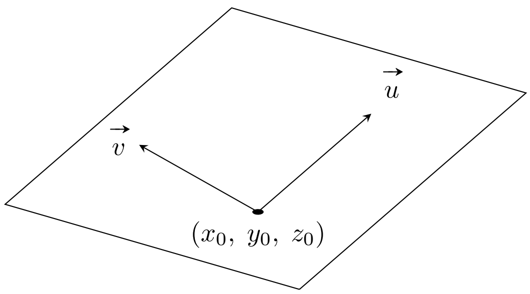
もしくは

　『ある一点と法線ベクトル』

のどちらかを考えれば良い．

5.3.1　ある 1 点と 2 つのベクトル

　平面を決めるためには，ある 1 点と線型独立な 2 つのベクトルを定めればよい．



上図のように，ある 1 点を $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ とおき，線型独立な 2 つのベクトルを $\vec{u},\ \vec{v}$ とすると，求める平面上の任意の点 $(x,\ y,\ z)$ は，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + s\vec{u} + t\vec{v} \quad (s,\ t \text{ は任意実数})$$

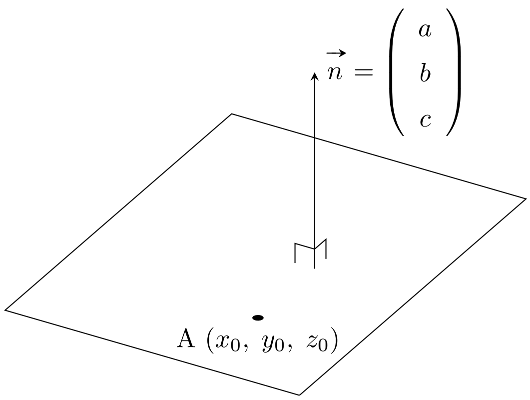
$$= \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} \lambda \\ \varepsilon \\ \nu \end{pmatrix}$$

と表せる．

上では $\vec{u} = \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix},\ \vec{v} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \varepsilon \\ \nu \end{pmatrix}$ とおいた．

5.3.2　ある 1 点と法線ベクトル

平面を決めるためには，ある 1 点と法線ベクトルを定めればよい．



上図のように，ある 1 点 A $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ と法線ベクトル $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ を定める．

平面上の任意の点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ を考えると，直線の方程式のときと同様に，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} \perp \vec{n} \ \Rightarrow\ (\overrightarrow{\mathrm{AP}},\ \vec{n}) = 0$$

ゆえ，

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

$a,\ b,\ c,\ x_0,\ y_0,\ z_0$ は常数であるから，$-ax_0 - by_0 - cz_0 = d$ とおくと，平面の方程式の標準形と呼ばれる

$$ax + by + cz + d = 0$$

が得られる．