第 1 講

指数関数

基本事項

◆ 指数法則

❶ 指数法則

「文字 a を n 個掛け合わせたもの」を **a の n 乗** といい，$\boldsymbol{a^n}$ と書く（特に，$n=1$ のとき a^1 を省略して a と書く）．ここで，a^n の n を 累乗の**指数** といい，$\boldsymbol{a}$ を **底** という．このときの a は 正数とは限らず，0 や 負数でも良い（複素数でも成り立つ）．

今まで，中等学校以前で学習した累乗の指数は「正の整数」であったが，これを「任意の整数」に拡張することができる．細かい説明を除けば，次の **指数法則** が成り立つ．

指数法則

m, n は整数で，$ab \neq 0$ とする．このとき，次の指数法則が成り立つ．

(1) $\boldsymbol{a^m a^n = a^{m+n}}$

(2) $\boldsymbol{(a^m)^n = a^{mn}}$

(3) $\boldsymbol{(ab)^n = a^n b^n}$

特に，k が正整数で $a \neq 0$ のとき，$\boldsymbol{a^{-k} = \dfrac{1}{a^k}}$ と定義されることは注意されたい．

この法則から，様々な「指数計算の定理」を導くことができる．例えば

$$\left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n} \quad (a \neq 0)$$

となる．これを証明してみよう．

指数法則の (3)，(2) を用いると，

$$\left(\frac{b}{a}\right)^n = (ba^{-1})^n = b^n(a^{-1})^n = b^n a^{-n} = \frac{b^n}{a^n}$$

のようになる．

❷ 累乗根

n を正整数とするとき，「n 乗して a になる数」を $\boldsymbol{a}$ **の** $\boldsymbol{n}$ **乗根** といい，$\boldsymbol{\sqrt[n]{a}}$ と書く．2 乗根，3 乗根，4 乗根，$\cdots$ をまとめて **累乗根** という．以下に累乗根の性質をまとめる．

累乗根の性質

$a \geqq 0,\ b \geqq 0,\ m,\ n$ を正整数とするとき，次が成り立つ．

(1) $\boldsymbol{\sqrt[m]{a}\,\sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{ab}}$

(2) $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[m]{\dfrac{a}{b}},\ \ (b \neq 0)}$

(3) $\boldsymbol{(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}}$

(4) $\boldsymbol{\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}}$

❸ 指数の有理数への拡張

「指数」を「有理数」まで拡張して，意味を持たせることができる．例えば，$a^{\frac{1}{3}}$ などである．

分数（有理数）指数の定義

$a > 0$ で，m を任意の整数，n を任意の正整数とするとき

$$\boldsymbol{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}}$$

である．

❹ 指数の大小関係

指数の大小関係の同値性をまとめる．

$a > 1$ のとき，

$$\boldsymbol{a^x < a^y \quad \Leftrightarrow \quad x < y}$$

$0 < a < 1$ のとき，

$$\boldsymbol{a^x < a^y \quad \Leftrightarrow \quad x > y}$$

「数の分類」をすると

$$
\text{実数}\begin{cases}\text{有理数}\cdots\text{分数で表される数}\\ \text{無理数}\cdots\text{分数では表されない数}\end{cases}
$$

であるが，実は無理数も指数に取り入れることができ，例えば

$$1 < \sqrt{3} < 2$$

であるから

$$2 < 2^{\sqrt{3}} < 2^2 = 4$$

などと評価できる．

例題 1　次の式を計算し，簡単にせよ．

(1) $\sqrt[3]{5} \div \sqrt[12]{5} \times \sqrt[8]{25}$　(2) $\sqrt{6} \times \sqrt[4]{54} \div \sqrt[4]{6}$　(3) $(3^{-2} \times 9^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$

解答

(1)
$$
\begin{aligned}
\sqrt[3]{5} \div \sqrt[12]{5} \times \sqrt[8]{25} &= 5^{\frac{1}{3}} \div 5^{\frac{1}{12}} \times 5^{\frac{1}{4}} \quad (\because\ \sqrt[8]{25} = \sqrt[8]{5^2})\\
&= 5^{\frac{1}{3} - \frac{1}{12} + \frac{1}{4}}\\
&= 5^{\frac{1}{2}} = \boldsymbol{\sqrt{5}}.
\end{aligned}
$$

(2)
$$
\begin{aligned}
\sqrt{6} \times \sqrt[4]{54} \div \sqrt[4]{6} &= \sqrt{6} \times \sqrt[4]{3^2} \cdot \sqrt[4]{6} \div \sqrt[4]{6}\\
&= 6^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{2}} \cdot 6^{\frac{1}{4}} \div 6^{\frac{1}{4}}\\
&= 6^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} = \boldsymbol{\sqrt{18}}.
\end{aligned}
$$

(3)
$$
\begin{aligned}
(3^{-2} \times 9^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} &= 3^{-3} \times 3^2\\
&= \boldsymbol{\frac{1}{3}}.
\end{aligned}
$$

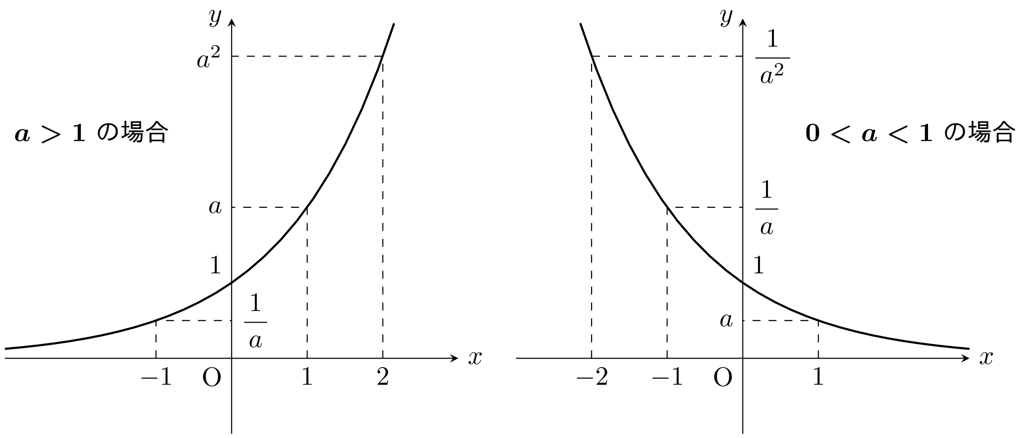
◆ 指数関数

❺ 指数関数のグラフ

a が 1 でない正数であるとき，関数

$$\boldsymbol{y = a^x} \quad (a > 0,\ a \neq 1)$$

を $\boldsymbol{a}$ **を底とする指数関数** という．指数関数のグラフの概形は次の図のようになる．



指数関数のグラフの特徴

$y = a^x := f(x)$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ のグラフは，

(1) 定点 $(0, 1)$ を通る．

(2) x 軸の上側にある．（常に $y > 0$ である）

(3) $a > 1$ のとき増加で，$0 < a < 1$ のとき減少である．

$(*)$ $y = a^x$ と $y = (a^{-1})^x = \dfrac{1}{a^x}$ は y 軸対称．

実は上の図において，左は $a = 2$，右は $a = \dfrac{1}{2}$ のときのグラフである．

補　グラフの平行移動

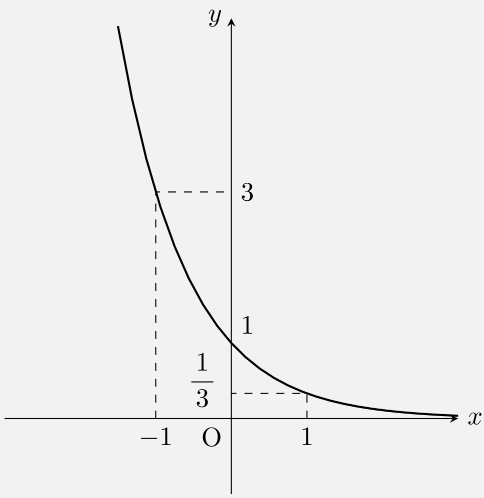
曲線 $y = f(x)$ を x 軸方向に a，y 軸方向に b だけ平行移動して得られる曲線の方程式は，

$$y - b = f(x - a).$$

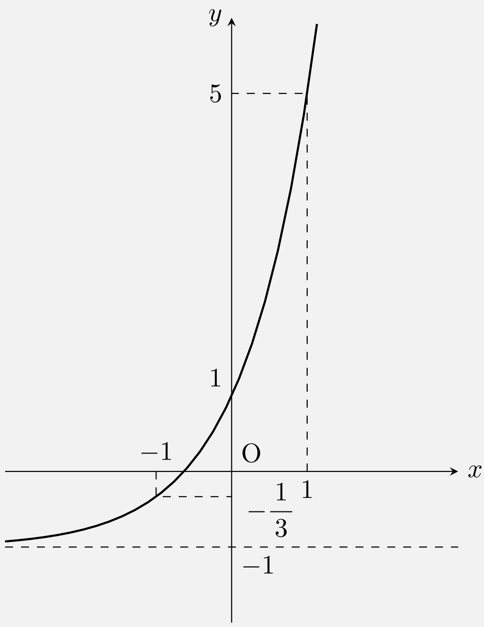
例題 2　次のグラフを書け.

(1) $y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$　　(2) $y=2\cdot 3^x-1$

解答　(1)



(2)



◆ 指数方程式・不等式

❻ 指数方程式

指数方程式の基本系は，$\boldsymbol{f(a^x)=0}$ の形のものである．これは $a^x=X$ と置き換えることによって

$$f(X)=0 \quad (X>0)$$

を解くことに帰着する．不等式も同様に置き換えて解けば良い．以下実例で確認しよう．

例題 3　次の方程式を解け．

(1) $2^{3x+2}-4^x+2^{x+1}-5=0$

(2) $\begin{cases} 2^x+2^y=40 \\ 2^{x+y}=256 \end{cases}$

解答　(1) 2^x を $X(>0)$ とおく．

$$2^{3x+2}=4\cdot(2^x)^3=4X^3,\ \ 4^x=(2^x)^2=X^2,\ \ 2^{x+1}=2\cdot 2^x=2X$$

であるから，与式は

$$4X^3-X^2+2X-5=0 \ \Leftrightarrow\ (X-1)(4X^2+3X+5)=0$$

である．$X>0$ であるから，常に $4X^2+3X+5>0$ が成り立つので

$$X=2^x=1. \quad \therefore\ \boldsymbol{x=0}.$$

(2) $2^x=X,\ 2^y=Y$ とおくと，$2^{x+y}=2^x\cdot 2^y=XY$ であるから

$$\begin{cases} X+Y=40 \\ XY=256 \end{cases}.$$

$X,\ Y$ は 2 次方程式 $t^2-40t+256=(t-8)(t-32)=0$ の根であるから

$$\begin{cases} X=2^x=8 \\ Y=2^x=32 \end{cases} \text{または} \begin{cases} X=32 \\ Y=8 \end{cases}.$$

$$\therefore \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{3} \\ \boldsymbol{5} \end{pmatrix} \text{または} \begin{pmatrix} \boldsymbol{5} \\ \boldsymbol{3} \end{pmatrix}.$$

例題 4　次の不等式を解け.

(1) $2^x + 2^{-x} < \dfrac{17}{4}$　　(2) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x} < \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^2}$

(3) $8^{x+1} - 4^{x+\frac{3}{2}} + 2^{x+1}(1-2^x) < 0$

解答

(1) $2^x = X(>0)$ とおくと，$2^{-x} = \dfrac{1}{X}$ であるから，所与の式は

$$X + \frac{1}{X} < \frac{17}{4}$$

となり，$X > 0$ であるから分母を払い整理すると

$$4X^2 - 17X + 4 = (4X-1)(X-4) < 0.$$

$$\therefore\ \frac{1}{4} < X < 4. \qquad \therefore\ \boldsymbol{-2 < x < 2}.$$

(2) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ は 単調に減少する関数であるから，

$$2x > x^2 \iff x(x-2) < 0.$$

$$\therefore\ \boldsymbol{0 < x < 2}.$$

(3) $2^x = X$ とおくと，

$$8^{x+1} = 8X^3,\ \ 4^{x+\frac{3}{2}} = 8X^2,\ \ 2^{x+1} = 2X$$

であるから，所与の式は

$$8X^3 - 8X^2 + 2X(1-X) < 0 \iff 8X^3 - 10X^2 + 2X < 0.$$

すなわち，

$$2X(X-1)(4X-1) < 0.$$

$X > 0$ より，

$$\frac{1}{4} < X < 1. \quad \therefore\ \boldsymbol{-2 < x < 0}$$

である.

演習問題

問題 1.1. 方程式

$$4^x - 3 \cdot 2^x + 3 \cdot 2^{-x} + 4^{-x} = 0$$

について，次の問いに答えなさい．

(1) $X = 2^x - 2^{-x}$ とおくとき，上の方程式を X の式で表しなさい．

(2) 上の方程式の実数解 x をすべて求めなさい．

問題 1.2. 方程式

$$2^x - (\sqrt{2})^{x+1} - 4 = 0$$

を解け．

問題 1.3. 実数 k を定数とする．x と y に関する連立方程式

$$\begin{cases} 2^{x+1} + 3^y = 2 \\ k \cdot 2^x - 3^y = 3k - 1 \end{cases}$$

の解が存在するような k の値の範囲は $\dfrac{\boxed{\text{シ}}\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}} < k < \dfrac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$ である．

問題 1.4. $0 < x < 2$ を満たす実数 x に関する 2 つの条件

$$p : 2\left(\frac{1}{4}\right)^{2x-1} - 9\left(\frac{1}{4}\right)^{x} + 1 < 0$$

$$q : \cos\left(\frac{\pi}{2x+1}\right)\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2x+1}\right) - \frac{1}{2}\right\}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2x+1} + 2\right)\right\} < 0$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) 条件 p を満たす x の範囲を求めよ．

(2) 条件 q を満たす x の範囲を求めよ．

(3) 命題 $p \Rightarrow q$ の真偽を調べよ．また，命題 $p \Rightarrow q$ の裏を述べ，その真偽を調べよ．

問題 1.5. $y > 0$ とするとき，不等式

$$y^{\frac{2}{x}} + y^{-\frac{2}{x}} - 6(y^{\frac{1}{x}} + y^{-\frac{1}{x}}) + 10 \leqq 0$$

について次の各問に答えよ．

(1) $X = y^{\frac{1}{x}} + y^{-\frac{1}{x}}$ とするとき，この不等式を X を用いて表せ．

(2) この不等式を満たす点 (x, y) の全体が表す図形を座標平面上に図示せよ．

問題 1.6. $f(x) = 16 \cdot 9^x - 4 \cdot 3^{x+2} - 3^{-x+2} + 9^{-x}$ とし，$t = 4 \cdot 3^x + 3^{-x}$ とおくとき，以下の問い答えよ．

(1) t の最小値とそのときの x の値を求めよ．

(2) $f(x)$ を t の式で表せ．

(3) x の方程式 $f(x) = k$ の相異なる実数解の個数が 3 個であるとき，定数 k の値と，3 つの実数解を求めよ．