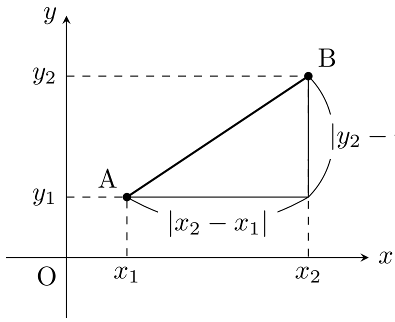
第 III 部

図形と方程式 ①

1　二次元座標系，直線の方程式

1.1　2 点間の距離



2 点 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$，$\mathrm{B}(x_2, y_2)$ について，

（A と B との距離）

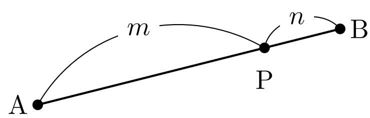
$$:= \overline{\mathrm{AB}} = \boldsymbol{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}.$$

特に，原点 $\mathrm{O}(0,0)$ と点 $\mathrm{P}(x, y)$ との距離は，

$$\overline{\mathrm{OP}} = \boldsymbol{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

で表される．

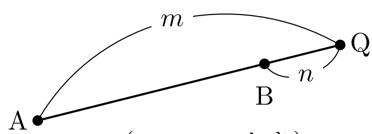
1.2　内分・外分点



異なる 2 点 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$，$\mathrm{B}(x_2, y_2)$ に対して，線分 AB を $\boldsymbol{m : n}$ $(m > 0, n > 0)$ に **内分する** 点を P とすると，

$$\boxed{\boldsymbol{\mathrm{P}\left(\frac{nx_1 + mx_2}{m + n},\ \frac{ny_1 + my_2}{m + n}\right)}}$$

である．

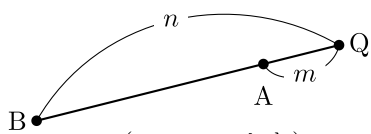


（$m > n$ のとき）

また，線分 AB を $\boldsymbol{m : n}$ $(m > 0, n > 0, m \neq n)$ に **外分する** 点を Q とすると，

$$\boxed{\boldsymbol{\mathrm{Q}\left(\frac{-nx_1 + mx_2}{m - n},\ \frac{-ny_1 + my_2}{m - n}\right)}}$$

である．



（$m < n$ のとき）

特に，2 点 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$，$\mathrm{B}(x_2, y_2)$ とを結ぶ線分 AB の中点は，

$$\boldsymbol{\left(\frac{x_1 + x_2}{2},\ \frac{y_1 + y_2}{2}\right)}$$

である．

1.3　三角形の重心

3 点 $\mathrm{A}(x_1, y_1), \mathrm{B}(x_2, y_2), \mathrm{C}(x_3, y_3)$ を頂点にもつ三角形 ABC があるとき，この三角形の重心を G とすると，

$$\boxed{\mathbf{G}\left(\boldsymbol{\frac{x_1+x_2+x_3}{3}},\ \boldsymbol{\frac{y_1+y_2+y_3}{3}}\right)}$$

である．

1.4　様々な直線の方程式

y 切片と傾きによる決定

y 切片が n で，傾き m の直線は $\boxed{\boldsymbol{y = mx + n}}$ で表される．

点と傾きによる決定

点 (x_1, y_1) を通り，傾き m の直線は，$\boxed{\boldsymbol{y - y_1 = m(x - x_1)}}$ で表される．

傾きを持たない直線

y 軸に平行で，x 切片が k である直線は，$\boxed{\boldsymbol{x = k}}$ で表される．

例． (1)　点 $(0, 3)$ を通り，傾き -2 である直線は，

$$y = -2x + 3.$$

(2)　点 $(2, 3)$ を通り，傾き 3 である直線は，

$$y - 3 = 3(x - 3) \quad \Leftrightarrow \quad y = 3x - 6.$$

(3)　点 $(5, 4)$ を通り，y 軸に平行である直線は，

$$x = 5.$$

1.5　直線の方程式の一般形

下のような形の直線の方程式は **一般形** とよばれ，1.4 におけるすべての直線を表すことができる．

$$\boldsymbol{ax + by + c = 0. \quad (a, b) \neq (0, 0)}$$

2　直線 $\boldsymbol{ax+by+c=0}$ の基本的性質

$l : ax+by+c=0$ とする．

- 直線 l の **方向ベクトル**（l に平行なベクトル）の一つとして，$\begin{pmatrix} \boldsymbol{-b} \\ \boldsymbol{a} \end{pmatrix}$ がとれる．

- 直線 l の **法ベクトル**（l に垂直なベクトル）の一つとして，$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix}$ がとれる．

点 (x_0, y_0) を通り，法ベクトルが $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

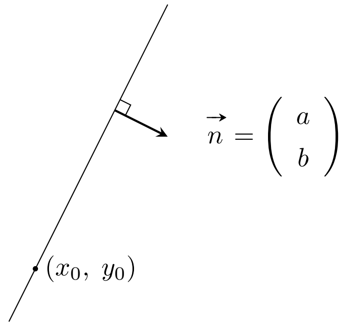
である直線の方程式は，直線上の任意の点に対し

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} = 0$$

が成り立つことにより，

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$$

である．



- 直線 l と 点 (x_0, y_0) との距離は，$\dfrac{|\,\boldsymbol{ax_0+by_0+c}\,|}{\sqrt{\boldsymbol{a^2+b^2}}}$．（ヘッセの公式）

このヘッセの公式の証明は演習問題とする．

3　2 直線の平行条件・垂直条件

3.1　法ベクトルによる解釈

2 直線 $l : ax+by+c=0$, $l' : a'x+b'y+c'=0$ は，

(i) $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} /\!/ \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \boldsymbol{ab'-a'b=0}$ のとき **平行** である．

注． $ab'-a'b$ のことを，$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$ と書き，たすき掛けのように考えると覚えやすい．

(ii) $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \boldsymbol{aa'+bb'=0}$ のとき **垂直** である．

3.2　陽関数の傾きによる解釈

2 直線 $y = mx + n,\ \ y = m'x + n'$ は，

(i)　$m = m'$ のとき **平行** である．

(ii)　$mm' = -1$ のとき **垂直** である．

コラム　〜写像と関数〜

集合 X の元を x を 1 つ決めると集合 Y の元 y がただ 1 つに決まるとき，このような法則 f を X から Y への **写像** と呼ぶ．このとき，f を **関数** と呼ぶこともあり y が x によって決まるという意味で，$y = f(x)$ と表す．特に，

- このままの形の $y = f(x)$ という関数を **陽関数** と呼び，
- $f(x) - y = 0$ と変形し，$F(x, y) = 0$ という形としてみたものを **陰関数** と呼ぶ．

例． $y = x^2 + 4x + 3$ は陽関数であり，$x^2 + 4x - y + 3 = 0$ は陰関数である．さらに円の方程式 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ （a, b は実数，r は正の数）も陰関数と見れることに注意しよう．

重要例題． 2 直線

$$(a-2)x + ay + 2 = 0,\ \ x + (a-2)y + 1 = 0$$

が平行（一致する場合を含む）となる a の値，および垂直となる a の値を求めよ．

解答． 2 直線の法ベクトルはそれぞれ

$$\overrightarrow{n_1} = \begin{pmatrix} a-2 \\ a \end{pmatrix},\quad \overrightarrow{n_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ a-2 \end{pmatrix}$$

としてとれるが，2 直線が平行となるための条件は $\overrightarrow{n_1} /\!/ \overrightarrow{n_2}$ より

$$(a-2)^2 - a \cdot 1 = 0.$$

これを解いて，$a = 1,\ 4$.

2 直線が垂直となるための条件は $\overrightarrow{n_1} \perp \overrightarrow{n_2}$ より

$$(a-2) \cdot 1 + a(a-2) = 0.$$

これを解いて，$a = -1,\ 2$.

4　円の方程式

4.1　円の方程式

円の中心の座標を (a, b)，円の半径を r とすると，円上の任意の点 (x, y) は

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r$$

と表される．これを両辺平方した結果

$$\boxed{\boldsymbol{(x-a)^2+(y-b)^2=r^2}}$$

が一般に **円の方程式** と呼ばれる．さらに，

$$\boxed{\boldsymbol{x^2+y^2+lx+my+n=0}}$$

は $\left(x+\dfrac{l}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{m}{2}\right)^2=\dfrac{l^2+m^2-4n}{4}$ と変形できるので円の方程式と呼べる．

重要例題． 次のそれぞれの条件を満たす円の方程式を求めよ．

(1)　2 点 $(-3, 0)$, $(5, 6)$ を直径の両端とする．

(2)　3 点 $(-1, 1)$, $(1, 3)$, $(2, 2)$ を通る．

解答．　(1)　$\mathrm{A}(-3, 0)$，$\mathrm{B}(5, 6)$ とする．円の中心は，線分 AB の中点 $(1, 3)$ であり，半径は

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{AB}=\frac{1}{2}\sqrt{\{5-(-3)\}^2+(6-0)^2}=5.$$

よって，求める方程式は $(x-1)^2+(y-3)^2=25$.

(2)　求める方程式を

$$x^2+y^2+lx+my+n=0 \quad \cdots\cdots \text{①}$$

とする．円①上に 3 点 $(-1, 1)$, $(1, 3)$, $(2, 2)$ があるから，

$$\begin{cases} 2-l+m+n=0, \\ 10+l+3m+n=0, \\ 8+2l+2m+n=0. \end{cases}$$

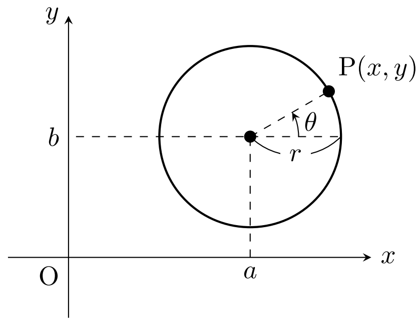
したがって，$l=-1$, $m=-3$, $n=0$.
よって，求める方程式は $x^2+y^2-x-3y=0$.

4.2　円の媒介変数（パラメータ）表示

中心 (a, b)，半径 r の円 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 上の点 $\mathrm{P}(x, y)$ は，θ を媒介変数として

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = a + r\cos\theta,} \\ \boldsymbol{y = b + r\sin\theta} \end{cases}$$

と表される.



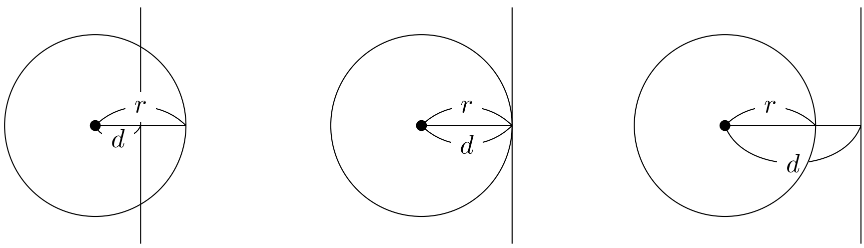
4.3　円の接線の方程式

円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点 (x_0, y_0) における円の方程式は，

$$\boxed{\boldsymbol{x_0x + y_0y = r^2.}}$$

5　円と直線との位置関係

円の半径を r ，円の中心と直線との距離を d とする.



(a) 異なる 2 点で交わる　　**(b)** 接する　　**(c)** 交わらない

$\boldsymbol{r > d}$　　$\boldsymbol{r = d}$　　$\boldsymbol{r < d}$

例. 円 $(x-3)^2+(y-2)^2=25$ と 直線 $tx+(1-t)y+1=0$ が接するのは，

$$d = \frac{|t\cdot 3 + (1-t)\cdot 2 + 1|}{\sqrt{t^2+(1-t)^2}} \quad \text{（ヘッセの公式による）}$$

がちょうど $r=5$ になるときなので $t=\dfrac{4}{7}$.

演習問題

問題 1.

直線 $2x + y - 5 = 0$ に関して点 $(3, 4)$ と対称な点の座標を求めよ.

問題 2.

点 (x_0, y_0) と直線 $ax + by + c = 0$ との距離を d とすると,

$$d = \frac{|\, ax_0 + by_0 + c \,|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

であることを示せ.

問題 3.

円 $x^2 + y^2 - 2ax - 4ay + a^2 = 0 \ \ (a > 0)$ とが接するとき, a の値を求めよ.

問題 4.

直線 $y=3x+2k$ が円 $x^2+y^2=8$ との共有点をもつような定数 k の値の範囲を求めよ．

問題 5.

3 つの直線 $4x+y=4,\ mx+y=0,\ 2x-3my=4$ がある．

(1) 3 つの直線が 1 点で交わるような m の値を求めよ．

(2) 3 つの直線が三角形を作らないような m の値を求めよ．

問題 6.

2 つの円 $C_1 : x^2+y^2=1$，$C_2 : (x-3)^2+y^2=9$ がある．C_1 に接し，C_2 から切り取られる線分の長さが $2\sqrt{5}$ である直線の方程式を求めよ．

問題 7.

直線 $l:(k+1)x+(1-k)y-4=0$ について，

(1) どのような実数 k に対しても l が通る点をすべて求めよ．

(2) どのような実数 k に対しても l が通らない点をすべて求めよ．

問題 8.

2 つの円

$$C_1 : x^2+y^2-2x-8y+8=0,$$
$$C_2 : x^2+y^2-8x+4=0$$

がある．

(1) C_1 と C_2 が異なる 2 点で交わることを示し，それら 2 点を通る直線の方程式を求めよ．

(2) C_1, C_2 の 2 交点を通り，さらに原点を通る円の方程式を求めよ．