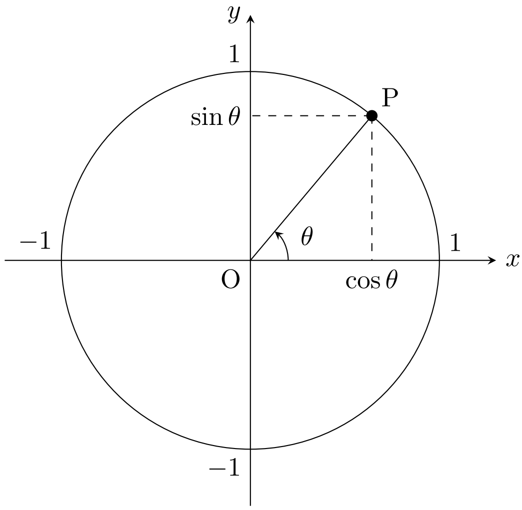
第 1 講

三角関数 ①

基本事項

◆ 三角関数の定義



上の図のように，単位円（半径が 1 で，中心が原点 O の円）を用意する．単位円上の，動径 OP を x 軸正方向から計るとき，その角度が θ (シータ) であれば，点 P の座標を

$$(\boldsymbol{\cos\theta},\ \boldsymbol{\sin\theta})$$

と定義する．さらに，

$$\boldsymbol{\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$$

と定義する．

ここで，$\tan\theta$ は幾何学的には **線分 OP の傾き** と考えることができる．

(注) $\cos\theta$，$\sin\theta$，$\tan\theta$ をそれぞれ日本語で **余弦関数**，**正弦関数**，**正接関数** という．

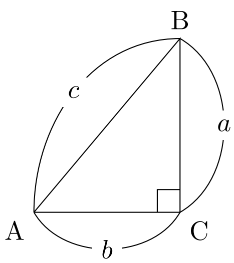
♦ 三角比

前述した図から，三角形を取り出し動径 OP にあたる部分を c 倍せしめる．

すると相似が保たれ，右の図において次の関係式が得られる．

$$\begin{cases} \boldsymbol{\cos\theta = \dfrac{b}{c}} \\[2ex] \boldsymbol{\sin\theta = \dfrac{a}{c}} \\[2ex] \boldsymbol{\tan\theta = \dfrac{a}{b}} \end{cases}.$$

❶ 余角の三角関数



左記の図において次が成り立つ．

$$\boldsymbol{\sin A = \cos(90^\circ - A),}$$

$$\boldsymbol{\cos A = \sin(90^\circ - A),}$$

$$\boldsymbol{\tan A = \frac{1}{\tan(90^\circ - A)}.}$$

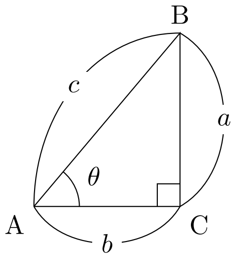
例題　$\cos A = \sin A$ である鋭角 A を求めよ．

（解答例）$\cos A = \sin(90^\circ - A)$ より，与えられた式を書き直すと

$$\sin(90^\circ - A) = \sin A$$

となり，$90^\circ - A = A$ が得られる．したがって，$A = 45^\circ$ である．

❷ 三角関数の間の関係



左記の図においてピタゴラスの定理を考えると，
$a^2+b^2=c^2$ ゆえ，これを書き直すと

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2=1.$$

よって，

$$\boldsymbol{\sin^2\theta+\cos^2\theta=1}$$

が得られる．

さらに，$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ を両辺 $\cos^2\theta$ で割ると，

$$\boldsymbol{\tan^2\theta+1=\frac{1}{\cos^2\theta}}$$

が得られる．

例題　次の式が成り立つことを証明せよ．

$$(\sin A+\cos A)^2+(\sin A-\cos A)^2=2.$$

（解答例）　左辺を展開する．

$$(\sin A+\cos A)^2+(\sin A-\cos A)^2$$
$$=\sin^2 A+2\sin A\cos A+\cos^2 A+\sin^2 A-2\sin A\cos A+\cos^2 A$$
$$=2(\sin^2 A+\cos^2 A)$$
$$=2.\ (\because\ \sin^2 A+\cos^2 A=1)$$

発展 (さまざまな三角関数)

実は，三角関数は $\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の他に，

$\sec\theta$（正割関数），$\csc\theta$（余割関数），$\cot\theta$（余接関数）

がある．これらはそれぞれ，次によって定義される．

$$\sec\theta:=\frac{1}{\sin\theta},\quad \csc\theta:=\frac{1}{\cos\theta},\quad \cot\theta:=\frac{1}{\tan\theta}.$$

練習問題

問題 1

次の式の値を求めよ.

(1) $10\cos 60^\circ - 6\sin 30^\circ + \tan 45^\circ$

(2) $\sin 60^\circ \cos 30^\circ - \tan 30^\circ$

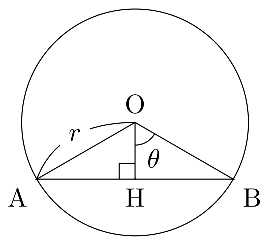
(3) $\sin 60^\circ \tan 30^\circ + \cos 60^\circ \sin 30^\circ$

問題 2

半径 r の円 O において，中心角 $\angle$AOB の大きさを 2θ とするとき，次の値を，r，θ を用いて表せ．ただし，θ は鋭角とする.

(1) 弦 AB の長さ

(2) O から AB におろした垂線 OH の長さ



問題 3

$0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ$ とする.

(1) $\sin\theta = \dfrac{1}{3}$ のとき，$\cos\theta$ を求めよ.

(2) $\sin\theta - 3\cos\theta + 1 = 0$ のとき，$\sin\theta$ と $\cos\theta$ の値を求めよ.

問題 4

$0 \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，次の不等式を満たす θ の値の範囲を求めよ．

(1) $\sin\theta > \dfrac{1}{2}$

(2) $\cos\theta \leqq \dfrac{1}{2}$

(3) $\tan\theta \geqq 1$

問題 5

正方形 ABCD の辺 BC 上に $\angle\mathrm{BAP} = \theta$ $(0^\circ < \theta < 45^\circ)$ となるように点 P をとると，$\mathrm{AP} = a$ となったという．さらに，B を通り AP に垂直な直線と AP，DC の交点をそれぞれ Q，R とするとき，次のものを a と θ で表せ．

(1) BQ

(2) PQ

(3) $\triangle$PQR の面積 S_1

(4) 四角形 PCRQ の面積 S_2

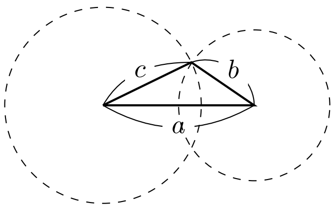
第 2 講

三角関数 ②

基本事項

♦ 三角形と三角比

❶ 三角形の基本



3 辺の長さが a, b, c の三角形が作られる条件は，上図のように長さ a の両端を中心とする半径 b，c の円が，線分を含む直線上以外に共有点を持つことである．数式で表現すると

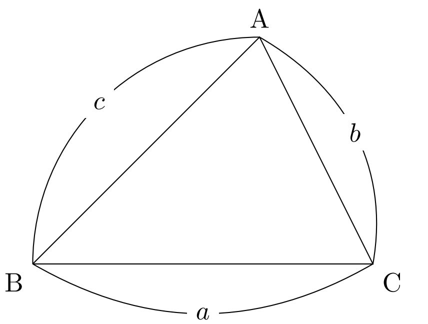
$$|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}|<\boldsymbol{a}<\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$$

である．これを同値変形すると，

$$\boldsymbol{a}<\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c},\ \ \boldsymbol{b}<\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a},\ \ \boldsymbol{c}<\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$$

が得られる．

❷ 正弦定理

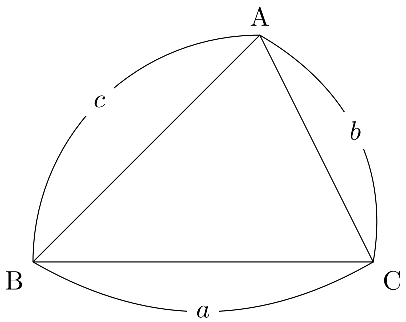


左記のような三角形において，次が成立する．

$$\frac{\boldsymbol{a}}{\sin \boldsymbol{A}}=\frac{\boldsymbol{b}}{\sin \boldsymbol{B}}=\frac{\boldsymbol{c}}{\sin \boldsymbol{C}}=\boldsymbol{2R}.$$

(ただし，$\boldsymbol{R}$ は外接円の半径)

❸ 余弦定理



左記のような三角形において，次が成立する．

$$\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A}$$
$$\boldsymbol{b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B}$$
$$\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C}$$

(正弦定理，余弦定理についての証明は省略する　Plus Elite p.171〜177 を参照)

❹ 三角形の面積公式

$\triangle$ABC の面積を S とすると，

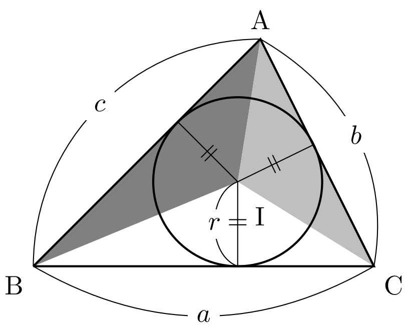
(1)　$\boldsymbol{S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C.}$

(2)　$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.　(ただし，$2s = a+b+c$)　⇦ ヘロンの公式

❺ 三角形の面積と内接円の半径

$\triangle$ABC の面積を S，内接円の半径を r とすると，次が成り立つ．

$$\boldsymbol{S = \frac{1}{2}r(a+b+c).}$$



(証明) 内接円の中心を I とすると，

$$\triangle\mathrm{IBC} = \frac{1}{2}ar,\ \triangle\mathrm{ICA} = \frac{1}{2}br,\ \triangle\mathrm{IAB} = \frac{1}{2}cr$$

ゆえ，$S = \frac{1}{2}r(a+b+c)$.

練習問題

問題 6

$\triangle$ABC において，次の問いに答えよ．

(1) $B = 70^\circ$, $C = 50^\circ$, $a = 8$ のとき，外接円の半径を求めよ．

(2) $a = 5$, 外接円の半径 $R = 5$ のとき，角 A を求めよ．

問題 7

円に内接する四角形 ABCD において

$$\mathrm{AB} = 5,\ \mathrm{BC} = 8,\ \mathrm{CD} = 3,\ \mathrm{DA} = 5$$

であるとき，AC の長さを求めよ．

問題 8

$\triangle$ABC の角 A の二等分線が対辺 BC と交わる点を D とするとき，

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}} = \frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}}$$

となることを，$\triangle$ABD，$\triangle$ACD についての正弦定理を使って証明せよ．

問題 9

$\triangle$ABC において，次の関係が成り立つことを，余弦定理を用いて示せ．

(1) $A < 90^\circ$ ならば $a^2 < b^2 + c^2$

(2) $A = 90^\circ$ ならば $a^2 = b^2 + c^2$

(3) $A > 90^\circ$ ならば $a^2 > b^2 + c^2$

問題 10

3 辺の長さ $x,\ x+1,\ x+2,$ であるような三角形が鈍角三角形になるとき，x のとる値の範囲を求めよ．

問題 11

直角三角形 ABC において，$\angle\mathrm{C} = 90^\circ,\ \mathrm{AB} = 1$ であるとする．$\angle\mathrm{B} = \theta$ とおく．点 C から辺 AB に垂線 CD を下ろし，点 D から辺 BC に垂線 DE を下ろす．AE と CD の交点を F とする．

(1) $\dfrac{\mathrm{DE}}{\mathrm{AC}}$ を θ で表せ.

(2) $\triangle\mathrm{FEC}$ の面積を θ で表せ.

問題 12

$\triangle\mathrm{ABC}$ の 3 辺の長さを $a = \mathrm{BC},\ b = \mathrm{CA},\ c = \mathrm{AB}$ とする．実数 $t \geqq 0$ を与えたとき，A を始点とし B を通る半直線上に $\mathrm{AP} = tc$ となるように点 P をとる.

(1) CP^2 を $a,\ b,\ c,\ t$ を用いて表せ.

(2) 点 P が $\mathrm{CP} = a$ を満たすとき，t を求めよ.

(3) (2) の条件を満たす点 P が辺 AB 上にちょうど 2 つあるとき，$\angle\mathrm{A}$ と $\angle\mathrm{B}$ に関する条件を求めよ.

第 3 講

三角関数 ③

基本事項

♦ 弧度法

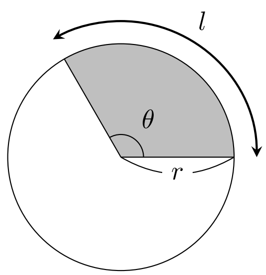
❶ 弧度法の定義

今までは，角度は度数法すなわち何 ° という形で取り扱ってきたが，数学では極力「単位」なるものを排除する．そこで新に弧度法を導入する．

180°を，数 π として扱う

ことにする．これが定義であることに間違いはないが，本質的には次の式に依る．
下図のように孤の長さを l とし，その弧を持つ円の半径を r，角度を θ とすると，

$$\boldsymbol{l = r\theta}.$$



❷ 扇形の面積

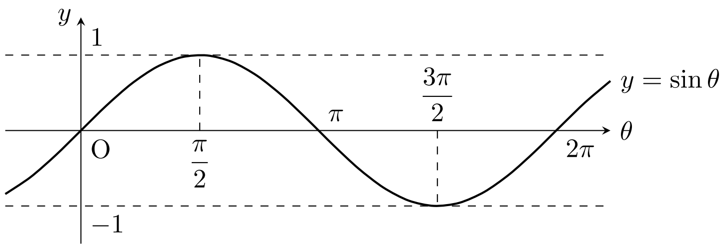
上図の灰色の部分の扇形の面積を求めたい．半径 r の面積の $\dfrac{\theta}{2\pi}$ 倍であるから，扇形の面積は

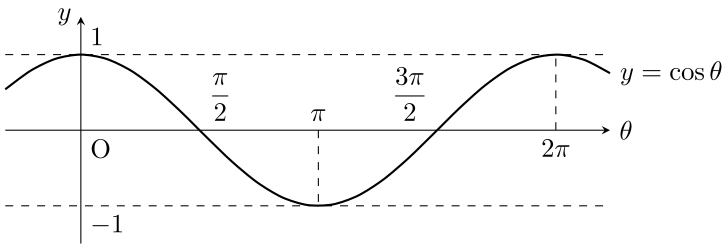
$$\pi r^2 \times \frac{\theta}{2\pi} = \boldsymbol{\frac{1}{2}r^2\theta}$$

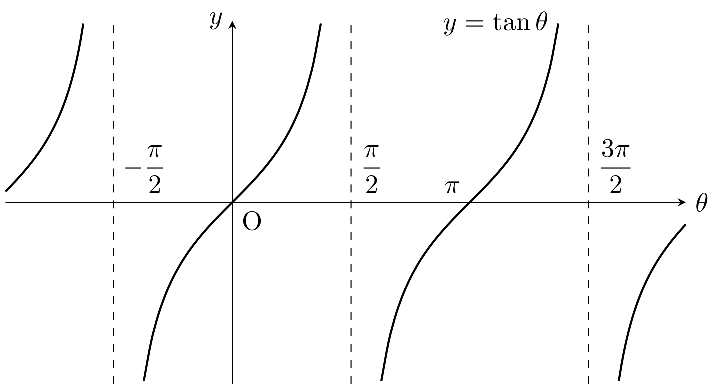
である．

♦ 三角関数の諸性質

❸ 基本の三角関数のグラフ







(発展) $y = \sin\theta$ と $y = \tan\theta$ は原点対称である．このような関数のことを **奇関数** という．

$y = \cos\theta$ は y 軸対称である．このような関数のことを **偶関数** という．

奇関数と偶関数

関数 $f(x)$ に対し，

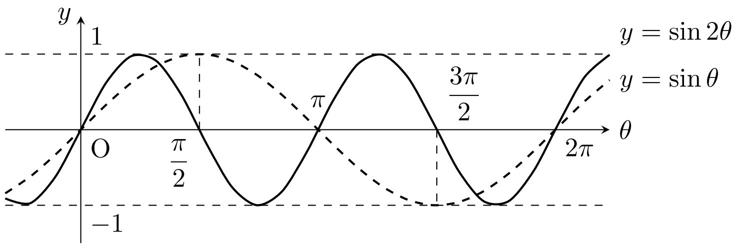
　すべての x に対し，$f(-x) = -f(x)$ のとき $f(x)$ は **奇関数**，

　すべての x に対し，$f(-x) = f(x)$ のとき $f(x)$ は **偶関数**

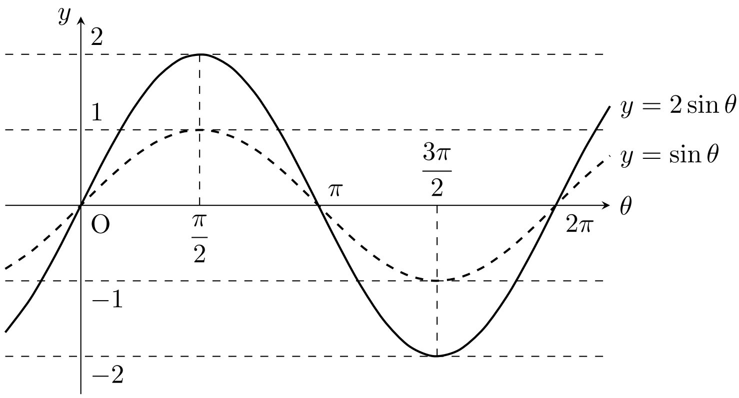
という．

❹ 様々な三角関数のグラフ

$y = \sin 2\theta$ のグラフ



$y = \sin 2\theta$ のグラフは， $y = \sin \theta$ のグラフを θ 軸方向に $\frac{1}{2}$ 倍に縮小したもの．



$y = 2\sin \theta$ のグラフは， $y = \sin \theta$ のグラフを y 軸方向に 2 倍に拡大したもの．

❺ 三角関数の周期性

$\sin(\theta + 2n\pi) = \sin \theta$， $\cos(\theta + 2n\pi) = \cos \theta$， $\tan(\theta + n\pi)$ (n : 任意整数)．

上式は，三角関数の周期性についての重要な式である．

一般に周期は次のように定義される．

周期と周期関数

関数 $f(x)$ に対し， 定数 T が存在し

$$\boldsymbol{f(x + T) = f(x)}$$

がすべての x に対し成り立つとき $f(x)$ を **周期関数** とよび， T をその **周期** という．また，周期の中で正で最小のものを **基本周期** とよぶ．

すなわち， **$\sin \theta$，$\cos \theta$，$\tan \theta$ の基本周期はそれぞれ 2π，2π，π** である．

❻ グラフからわかる三角関数の性質

$$\sin\theta : \begin{cases} \boldsymbol{\sin(-\theta) = -\sin\theta} & \Leftarrow「原点」に関して対称 \\ \boldsymbol{\sin(\pi-\theta) = \sin\theta} & \Leftarrow「直線\ x=\dfrac{\pi}{2}」に関して対称 \\ \boldsymbol{-1 \leqq \sin\theta \leqq 1} & \Leftarrow グラフの全体が\ y=-1\ から\ y=1\ の間である \end{cases}$$

$$\cos\theta : \begin{cases} \boldsymbol{\cos(-\theta) = \cos\theta} & \Leftarrow「y\ 軸」に関して対称 \\ \boldsymbol{\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right) = \sin\theta} & \Leftarrow「x\ 軸方向」に「\dfrac{\pi}{2}」だけずらすと \\ & \quad「y=\cos\theta」に重なる \end{cases}$$

$$\tan\theta : \begin{cases} \boldsymbol{\tan(-\theta) = -\tan\theta} & \Leftarrow「原点」に関して対称 \\ \boldsymbol{\theta = \dfrac{\pi}{2}+n\pi\ では\ \tan\theta\ は定義されない} & \Leftarrow 直線\ \theta=\dfrac{\pi}{2}+n\pi\ は \\ & \quad「漸近線」である \end{cases}$$

上のように，公式を暗記していなくてもグラフの性質から直ちに公式を作り出すことができる．しかしながら，いつでも導き出すことができるように練習はしておこう．

♦ 加法定理

❸ 加法定理

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta} \\ \boldsymbol{\cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta} \\ \boldsymbol{\tan(\alpha\pm\beta) = \dfrac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}} \end{cases} \quad \textbf{(複号同順).}$$

❹ 倍角公式

❸の加法定理で，$\alpha=\beta$ とすると次が得られる．

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha} \\ \boldsymbol{\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha} \\ \boldsymbol{\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}} \end{cases}.$$

第 2 式をさらに変形した式である

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}, \quad \cos^2\alpha = \frac{1+\cos\alpha}{2}$$

も有用である．

❺ ３倍角公式

$$\begin{cases} \sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha \\ \cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha \end{cases}.$$

♦ 和積・積和の公式

加法定理を辺々足したり引いたりすることで次の式が得られる．全て覚える必要はないが，すぐに作ることができるようにしておくこと．

❻ 積和の公式

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right\}.$$

$$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\right\}.$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right\}.$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\right\}.$$

❻ 和積の公式

$$\sin A + \sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}.$$

$$\sin A - \sin B = 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}.$$

$$\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}.$$

$$\cos A - \cos B = -2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}.$$

♦ 単振動の合成（加法定理の逆）

ここでは，一般に合成公式と呼ばれているものを学ぶ．合成とは，数学の言葉ではなく物理の「単振動の合成」によるものである．

❼ 合成公式

$a^2+b^2 \neq 0$ の下で，

$$\boldsymbol{a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha).}$$

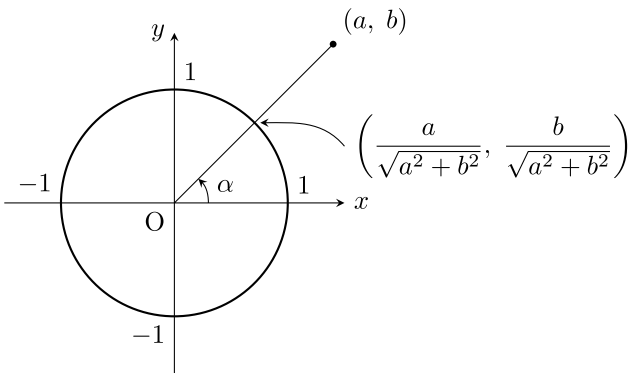
$$\left(\text{但し，}\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \ \sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

証明.

$a^2+b^2 \neq 0$ とする．点 $\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ は単位円上の点であって，ある実数 α を用いて，

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

と表せる．



$$\begin{aligned}
a\sin\theta + b\cos\theta &= \sqrt{a^2+b^2}\cdot\left(\sin\theta\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \cos\theta\cdot\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\\
&= \sqrt{a^2+b^2}\cdot(\sin\theta\cdot\cos\alpha + \cos\theta\cdot\sin\alpha)\\
&= \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha).
\end{aligned}$$

基本事項

問題 13

$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，関数

$$f(x) = 4\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 2\cos\left(x - \frac{5}{6}\pi\right)$$

の最大値と最小値を求めよ．

問題 14

三角形 ABC において，

$$\cos 3A + \cos 3B + \cos 3C = 1$$

であるとき， A, B, C のいずれかは 120° に等しいことを示せ．

問題 15

関数

$$f(x) = \sin x - \sin x \cos x + \cos x - \frac{1}{2}$$

について，$f(x)$ の最大値と最小値およびこれらの値をとるときの x の値を求めよ．