定期試験 3 で用いた定理の証明

この資料では定期試験 3 で用いた以下の定理の証明を行う.

> x, y, z が $x+y+z=180^\circ$ および $0^\circ < x, y, z < 90^\circ$ をみたすとき,
>
> $$\tan x + \tan y + \tan z = \tan x \tan y \tan z$$
>
> である.

[証明] 仮定より $x+y+z=180^\circ$ であるから

$$\tan(x+y+z) = \tan 180^\circ = 0$$

である. 一方, $x+y=180^\circ - z$, $0^\circ < z < 90^\circ$ から $90^\circ < x+y < 180^\circ$ となる. 故に $\tan(x+y)$ は定義される. このことに注意して tan についての加法定理[1] を用いると,

$$\begin{aligned}
\tan(x+y+z) &= \frac{\tan(x+y)+\tan z}{1-\tan(x+y)\tan z} \\
&= \frac{\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}+\tan z}{1-\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}\tan z} \\
&= \frac{\tan x+\tan y+(1-\tan x\tan y)\tan z}{(1-\tan x\tan y)-(\tan x+\tan y)\tan z} \\
&= \frac{\tan x+\tan y+\tan z-\tan x\tan y\tan z}{1-\tan x\tan y-\tan y\tan z-\tan z\tan x}
\end{aligned}$$

と計算できる. $\tan(x+y+z)=0$ であったから, 結局 $\tan x+\tan y+\tan z-\tan x\tan y\tan z=0$, つまり $\tan x+\tan y+\tan z=\tan x\tan y\tan z$ であることがわかる. 以上で示せた. □

---

[1] 加法定理は数学 II の三角関数の単元で扱う.