整数係数の多項式からなる方程式の有理数解

この資料では整数係数の多項式 $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ からなる n 次方程式

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$$

の有理数解の候補について考察する．有理数解 $\dfrac{q}{p}$ $(p, q$ は互いに素な整数で $p \neq 0)$ を方程式が持ったとしてみよう．すると

$$a_n\left(\frac{q}{p}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{q}{p}\right)^{n-1} + \cdots + a_1\left(\frac{q}{p}\right) + a_0 = 0$$

となる．両辺に p^n をかけると

$$a_nq^n + a_{n-1}q^{n-1}p + \cdots + a_1qp^{n-1} + a_0p^n = 0$$

となる．左辺 2 項目から $n+1$ 項目を移項すると

$$\begin{aligned} a_nq^n &= -(a_{n-1}q^{n-1}p + \cdots + a_1qp^{n-1} + a_0p^n) \\ &= p(-a_{n-1}q^{n-1} - \cdots - a_0p^{n-1}) \end{aligned}$$

となる．よって a_nq^n は p で割り切ることができる．ところで p と q は互いに素であったから, 結局 a_n は p で割り切ることができる．つまり, p は a_n の約数である．同様の考察で a_np^n が q で割り切れることがわかるから, a_n が q で割り切れる, つまり q は a_n の約数となることがわかる．ゆえに,

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$$

の有理数解があるならば,

$$\frac{a_0\text{の約数}}{a_n\text{の約数}} = \frac{\text{定数項の約数}}{\text{最高次の係数の約数}}$$

という形をしている必要があることがわかった.

▶ 例 **1.** $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$ の有理数解 (従って整数解) の候補は x^3 の係数が 1 であることに注意すると

$$\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$$

に限られる.