

$\vdash \{A\} \subset \{B\}$ ならば $\vdash \{A\} \subset \{B\}$

・ $\{A\} \subset \{B\}$ の導出, 1: 閉する帰納法で示す.

$\{A\} \subset \{B\}$ を導出した最後の規則で場合分けする.

・ (H-seq) の場合

$\{A\} \subset_0 \{D\} \quad \{D\} \subset_1 \{B\}$

$\{A\} \subset_0 : C, \{B\}$

すなわち, $C \equiv C_0 : C_1$,

$\vdash \{A\} \subset_0 \{D\} \dots \textcircled{1}$

$\vdash \{D\} \subset_1 \{B\} \dots \textcircled{2}$

が成り立ち, 2: いる.

$\sigma \models A \dots \textcircled{3}$, c changes σ to $\sigma' \dots \textcircled{4}$ と仮定する.

$\textcircled{1}$ と IH より, $\vdash \{A\} \subset_0 \{D\} \dots \textcircled{5}$

$\textcircled{2}$ と IH より $\vdash \{D\} \subset_1 \{B\} \dots \textcircled{6}$

c_0 changes σ to σ''

c_1 changes σ'' to σ'

$C_0 : C_1$ changes σ to σ' (E-seq) と $\textcircled{4}$ より,

c_0 changes σ to σ'' . $\textcircled{7}$

c_1 changes σ'' to σ' $\dots \textcircled{8}$ が成り立ち, 2: いる.

$\textcircled{3}$, $\textcircled{5}$, $\textcircled{7}$ より, $\sigma'' \models D \dots \textcircled{9}$

$\textcircled{6}$, $\textcircled{8}$, $\textcircled{9}$ より, $\sigma' \models B$

よって, $\sigma' \models B$ なので, 成り立つ.

(H-If) の場合

$$\frac{\{A \wedge b\} C_0 \{B\} \quad \{A \wedge \neg b\} C_1 \{B\}}{\{A\} \text{ if } b \text{ then } C_0 \text{ else } C_1 \{B\}}$$

すなわち, $C \equiv \text{if } b \text{ then } C_0 \text{ else } C_1$

$$\vdash \{A \wedge b\} C_0 \{B\} \dots (1)$$

$$\vdash \{A \wedge \neg b\} C_1 \{B\} \dots (2)$$

が成り立ち, 2.3.

$\sigma \models A$, c changes σ to σ' .. (3) を仮定する.

(1) を導出した最後の規則で場合分けする

(i) (E-If True) の場合

$$\frac{\sigma \vdash b \Downarrow \text{true} \quad C_0 \text{ changes } \sigma \text{ to } \sigma'}{\text{if } b \text{ then } C_0 \text{ else } C_1 \text{ changes } \sigma \text{ to } \sigma'} \quad (\text{E-If True})$$

すなわち, $\sigma \vdash b \Downarrow \text{true}$

$$C_0 \text{ changes } \sigma \text{ to } \sigma' \dots (4)$$

が成り立ち, 2.3.

$$\sigma \vdash b \Downarrow \text{true} \text{ より, } \sigma \models b = \text{true} \Rightarrow \sigma \models b$$

$$\sigma \models A \wedge \sigma \models b \text{ より, } \sigma \models A \wedge b \dots (5)$$

$$\text{また, (1) と IH より, } \vdash \{A \wedge b\} C_0 \{B\} \dots (6)$$

$$(4), (5), (6) \text{ より } \sigma' \models B$$

(ii) (E-If False) の場合

i) と同様なので, 省略

ii), (ii) より, $\sigma' \models B$ なので成り立つ.