

第1章 緒論

第2章 模型符號介紹與相關文獻回顧

2.1 符號定義

2.2 相關文獻回顧

2.2.1 出現率數據

2.2.2 取後放回之物種數估計

單群落物種數估計

兩群落之共同物種數估計

2.2.3 取後不放回之物種數估計

單群落物種數估計

兩群落之共同物種數估計

2.2.4 標準差估計

2.2.5 95%信賴區間

第3章 使用動差法修正共同物種數的估計

3.1 取後放回之抽樣方法的估計方式

在單群落的情況下，假設在目標區域實際存在 S 種物種，且實際存在之物種數 S 為一未知參數。且抽樣單位式從目標區域中針對其中的抽樣區塊進行隨機抽樣，並記錄每個區塊中的物種存在與否。若是該樣本總共包含 t 個抽樣區塊，並且 X_i 表示第 i 物種在樣本中出現的區塊數量。則 X_i 遵循參數為 t 且檢驗機率為 π_i 的二項分佈 (binomial distribution)。在此， π_i 除了取決於群落規模外，也與其他多種的生物因素相關。

Chiu (2022) 使用的混合二項式模型，建立一個新的針對單群落物種數的估計式。假設出現頻率向量 X_i 遵循二項分佈 $Binomial(T, \pi_i)$ ，其中 π_i ， $i = 1, 2, \dots, S$ ，為機率密度函數為獨立同分佈的隨機變數 $g(\pi)$ 。同時，假設 $g(\pi)$ 服從 $Beta(\alpha, \beta)$ ，獲得以下樣本之物種出現頻率的邊際分佈如下， p_k 為樣本中的物種豐富度正好為 k 的平均機率：

$$\begin{aligned} p_k &= P(X_i = k) = \int_0^1 P(X_i = k | \pi_i = \pi) \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \pi^{\alpha-1} (1 - \pi)^{\beta-1} d\pi \\ &= \int_0^1 \binom{t}{k} \pi^k (1 - \pi)^{t-k} \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \pi^{\alpha-1} (1 - \pi)^{\beta-1} d\pi \\ &= \binom{t}{k} \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{\Gamma(\alpha + k)\Gamma(\beta + t - k)}{\Gamma(\alpha + \beta + t)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, t \end{aligned}$$

又令 Q_k 表示在 k 個區塊中準確觀測到的物種數，而 $Q_k = \sum_{i=1}^S I(X_i = k)$ 為在單群落樣本中出現 k 個區塊數。並根據柯西-施瓦茨不等式 (Cauchy-Schwarz inequality) 之概念與 Good-Turing 頻率公式 (Good, 1953, 2000) 得出近似式：

$$\frac{E(Q_0)}{E(Q_1)} \geq \frac{E(Q_1)}{2E(Q_2)} \geq \frac{E(Q_2)}{3E(Q_3)} \dots$$

由該近似式可以得知，出限於較少區塊的稀有物種可以為未被觀測到的物種豐富度提供更多的估計資訊。

並根據樣本中物種出現頻率的邊際機率分佈，可知 $E(Q_k)$ 可以表示為：

$$E(Q_k) = S \times P(X = k) = S \binom{t}{k} \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{\Gamma(\alpha + k)\Gamma(\beta + t - k)}{\Gamma(\alpha + \beta + t)}$$

依據上述式子，可獲得未觀測以及出現一次至三次的物種豐富度期望值：

$$\begin{aligned} E(Q_0) &= S \times P(X = 0) = S \binom{t}{0} \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta + t)}{\Gamma(\alpha + \beta + t)} \\ E(Q_1) &= S \times P(X = 1) = S \binom{t}{1} \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\beta + t - 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + t)} \\ E(Q_2) &= S \times P(X = 2) = S \binom{t}{2} \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{\Gamma(\alpha + 2)\Gamma(\beta + t - 2)}{\Gamma(\alpha + \beta + t)} \\ E(Q_3) &= S \times P(X = 3) = S \binom{t}{3} \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{\Gamma(\alpha + 3)\Gamma(\beta + t - 3)}{\Gamma(\alpha + \beta + t)} \end{aligned}$$

並依據上述概念，將其推廣至兩群落。 p_{kl} 為兩樣本的物種豐富度正好分別為 k 和 l 的平均機率。則：

$$\begin{aligned} p_{kl} &= P(X_i = k)P(Y_i = l) \\ &= \binom{t_1}{k} \binom{t_2}{l} \frac{\Gamma(\alpha_1 + \beta_1)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\beta_1)} \frac{\Gamma(\alpha_1 + k)\Gamma(\beta_1 + t_1 - k)}{\Gamma(\alpha_1 + \beta_1 + t_1)} \frac{\Gamma(\alpha_2 + \beta_2)}{\Gamma(\alpha_2)\Gamma(\beta_2)} \frac{\Gamma(\alpha_2 + l)\Gamma(\beta_2 + t_2 - l)}{\Gamma(\alpha_2 + \beta_2 + t_2)} \end{aligned}$$

而 k 與 l 的範圍分別為 $k = 0, 1, 2, \dots, t_1$ 與 $l = 0, 1, 2, \dots, t_2$ 。隨後，又令 $Q_{kl} = \sum_{i=1}^S I(X_i = k \text{ and } Y_i = l)$ 表示在第一群落 k 個區塊且在第二群落 l 個區塊數中準確觀測到的物種數。則樣本中觀測到的共同物種數為 $D_{12} = \sum_{i=1}^{T_1} \sum_{i=1}^{T_2} Q_{kl}$ 。藉此，可獲得在第一群落中分別出現未觀測到以及一至二個區塊，且同時在第二群落中出現過至少一次的期望值：

$$\begin{aligned}
E(Q_{0+}) &= S_{12} \times P(X_i = 0) \times (1 - P(Y_i = 0)) \\
&= S_{12} \times \left[\frac{\Gamma(\alpha_1 + \beta_1)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\beta_1)} \frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\beta_1 + t_1)}{\Gamma(\alpha_1 + \beta_1 + t_1)} \right] \\
&\quad \times \left\{ 1 - \left[\frac{\Gamma(\alpha_2 + \beta_2)}{\Gamma(\alpha_2)\Gamma(\beta_2)} \frac{\Gamma(\alpha_2)\Gamma(\beta_2 + t_2)}{\Gamma(\alpha_2 + \beta_2 + t_2)} \right] \right\}
\end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned}
E(Q_{1+}) &= S_{12} \times P(X_i = 1) \times (1 - P(Y_i = 0)) \\
&= S_{12} \times \binom{t}{1} \left[\frac{\Gamma(\alpha_1 + \beta_1)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\beta_1)} \frac{\Gamma(\alpha_1 + 1)\Gamma(\beta_1 + t_1 - 1)}{\Gamma(\alpha_1 + \beta_1 + t_1)} \right] \\
&\quad \times \left\{ 1 - \left[\frac{\Gamma(\alpha_2 + \beta_2)}{\Gamma(\alpha_2)\Gamma(\beta_2)} \frac{\Gamma(\alpha_2)\Gamma(\beta_2 + t_2)}{\Gamma(\alpha_2 + \beta_2 + t_2)} \right] \right\}
\end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned}
E(Q_{2+}) &= S_{12} \times P(X_i = 2) \times (1 - P(Y_i = 0)) \\
&= S_{12} \times G\left(\frac{t}{2}\right) \left[\frac{\Gamma(\alpha_1 + \beta_1)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\beta_1)} \frac{\Gamma(\alpha_1 + 2)\Gamma(\beta_1 + t_1 - 2)}{\Gamma(\alpha_1 + \beta_1 + t_1)} \right] \\
&\quad \times \left\{ 1 - \left[\frac{\Gamma(\alpha_2 + \beta_2)}{\Gamma(\alpha_2)\Gamma(\beta_2)} \frac{\Gamma(\alpha_2)\Gamma(\beta_2 + t_2)}{\Gamma(\alpha_2 + \beta_2 + t_2)} \right] \right\}
\end{aligned} \tag{3.3}$$

將 α 設定為 1，且 $T \gg \beta$ 。可藉由式 (3.1)、式 (3.2) 與式 (3.3) 成立以下近似值：

$$\begin{aligned}
\frac{E(Q_{0+})}{E(Q_{1+})} &= \frac{(\beta_1 + t_1 - 1)}{t_1 \alpha_1} \approx \frac{1}{\alpha_1} \left(\frac{\beta_1}{t_1} + 1 \right) \\
\frac{E(Q_{1+})}{E(Q_{2+})} &= \frac{2}{\alpha_1 + 1} \approx \left(\frac{\beta_1}{t_1} + 1 \right) \\
\frac{E(Q_{2+})}{E(Q_{3+})} &= \frac{3}{\alpha_1 + 1} \approx \left(\frac{\beta_1}{t_1} + 1 \right)
\end{aligned}$$

並經由化簡 $\frac{E(Q_{1+})/E(Q_{2+})}{E(Q_{2+})/E(Q_{3+})}$ 的結果，求得 $\alpha_1 \approx \frac{4E(Q_{2+})^2 - E(Q_{1+})E(Q_{3+})}{3E(Q_{1+})E(Q_{3+}) - 2E(Q_{2+})^2}$ ；又透過化簡

$\frac{E(Q_{0+})/E(Q_{1+})}{E(Q_{1+})/E(Q_{2+})}$ 之後，可求得 $E(Q_{0+}) = \frac{E(Q_{1+})^2}{2E(Q_{2+})} \left(1 + \frac{1}{\alpha_1} \right)$ ；隨後，依據不等式

$\frac{E(Q_{1+})^2}{E(Q_{2+})} \left(\frac{1}{\alpha_1} \right) = \frac{E(Q_{1+})^2}{E(Q_{2+})} \frac{3E(Q_{1+})E(Q_{3+}) - 2E(Q_{2+})^2}{4E(Q_{2+})^2 - E(Q_{1+})E(Q_{3+})} \geq \frac{E(Q_{1+})^2}{E(Q_{2+})} \left(1 - \frac{2E(Q_{2+})^2}{3E(Q_{1+})E(Q_{3+})} \right)$ ，故將 $\left(1 - \frac{2E(Q_{2+})^2}{3E(Q_{1+})E(Q_{3+})} \right)$ 作為 $\frac{1}{\alpha_1}$ 帶入 $E(Q_{0+}) = \frac{E(Q_{1+})^2}{2E(Q_{2+})} \left(1 + \frac{1}{\alpha_1} \right)$ ，最終可獲得：

$$E(Q_{0+}) = \frac{E(Q_{1+})^2}{2E(Q_{2+})} \left(2 - \left(\frac{2E(Q_{2+})^2}{3E(Q_{1+})E(Q_{3+})} \right)^- \right)$$

$(A)^-$ 表示：若 $A \leq 1$ 時，則 $(A)^- = \max(0.5, A)$ ；若 $A > 1$ 時，則 $(A)^- = A$ 。同理，
可經由上述相同方式推導出 $E(Q_{+0})$ 與 $E(Q_{00})$ ：

$$\begin{aligned} E(Q_{+0}) &= \frac{E(Q_{+1})^2}{2E(Q_{+2})} \left(2 - \left(\frac{2E(Q_{+2})^2}{3E(Q_{+1})E(Q_{+3})} \right)^- \right) \\ E(Q_{00}) &= \frac{E(Q_{11})^2}{4E(Q_{22})} \left(2 - \left(\frac{2E(Q_{2+})^2}{3E(Q_{1+})E(Q_{3+})} \right)^- \right) \left(2 - \left(\frac{2E(Q_{+2})^2}{3E(Q_{+1})E(Q_{+3})} \right)^- \right) \end{aligned}$$

並加入 $\frac{t_i-1}{t_i}$ 對估計式進行修正，最終得估計式：

$$S_{BB} = D_{12} + E(Q_{0+}) + E(Q_{+0}) + E(Q_{00})$$

其中，

$$\begin{aligned} E(Q_{0+}) &= \frac{t_1-1}{t_1} \frac{E(Q_{1+})^2}{2E(Q_{2+})} \left(2 - \left(\frac{2E(Q_{2+})^2}{3E(Q_{1+})E(Q_{3+})} \right)^- \right) \\ E(Q_{+0}) &= \frac{t_2-1}{t_2} \frac{E(Q_{+1})^2}{2E(Q_{+2})} \left(2 - \left(\frac{2E(Q_{+2})^2}{3E(Q_{+1})E(Q_{+3})} \right)^- \right) \\ E(Q_{00}) &= \frac{E(Q_{11})^2}{4E(Q_{22})} \frac{t_1-1}{t_1} \left(2 - \left(\frac{2E(Q_{2+})^2}{3E(Q_{1+})E(Q_{3+})} \right)^- \right) \frac{t_2-1}{t_2} \left(2 - \left(\frac{2E(Q_{+2})^2}{3E(Q_{+1})E(Q_{+3})} \right)^- \right) \end{aligned}$$

且 $(A)^-$ 表示：若 $A \leq 1$ 時，則 $(A)^- = \max(0.5, A)$ ；若 $A > 1$ 時，則 $(A)^- = A$ 。

3.2 取後不放回之抽樣方法的估計方式

依據 2.2.3 節所示，在目標區塊中檢視到物種 i 所存在的區塊數 U_i ，其分布應服從一個二項分佈；且第 i 物種出現的區塊數所組成的出現頻率向量 X_i ，在給定 $U_i = u_i$ 的情況下，應服從超幾何分佈。又 $P(X_i = k | u_i)$ 與 u_i 有關， X_i 來自於 π_i ，因此可推導出：

$$\begin{aligned} P(X_i = k | \pi_i) &= \sum_{\psi_i} P(X_i = k | u_i) P(u_i | \pi_i) \\ &= \binom{t}{k} \frac{\pi_i^k (1 - \pi_i)^{t-k}}{1 - (1 - \pi_i)^T} \frac{(1 - \pi_i)^T I(k = 0)}{1 - (1 - \pi_i)^T} \end{aligned}$$

其中， $I(A)$ 為指標函數，表示若出現 A 情況時，則該式為 1，反之則即為 0。

Shen 和 He (2008) 針對取後不放回的抽樣方式，開發的 Beta 二項式模型：假設 π_i 為一來自 Beta 分佈的隨機樣本，故可將式子表示為：

$$f(\pi_i) = G(\alpha, \beta, T) (1 - (1 - \pi_i)^T) \pi_i^{\alpha-1} (1 - \pi_i)^{\beta-1}, 0 < \pi_i < 1$$

其中 $G(\alpha, \beta, T) = \left[\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} - \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+T)}{\Gamma(\alpha+\beta+T)} \right]^{-1}$ 。 X_i 的邊際分佈可通過 $P(X_i = k | \psi_i)$

與 $f(\pi_i)$ 獲得，故樣本之物種出現頻率的邊際分佈如下， p_k 為樣本中的物種豐富度正好為 k 的平均機率：

$$\begin{aligned} p_k = P(X_i = k) &= \int_0^1 P(X_i = k | \pi_i) f(\pi_i) d\pi_i \\ &= \begin{cases} G(\alpha, \beta, T) \left[\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(t+\beta)}{\Gamma(t+\alpha+\beta)} - \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+T)}{\Gamma(\alpha+\beta+T)} \right], & \text{if } k = 0 \\ G(\alpha, \beta, T) \binom{t}{k} \frac{\Gamma(\alpha+k)\Gamma(t+\beta-k)}{\Gamma(t+\alpha+\beta)}, & \text{if } k > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

並令 Q_k 表示在 k 個區塊中準確觀測到的物種數，而 $Q_k = \sum_{i=1}^S I(X_i = k)$ 為在單群落樣本中出現 k 個區塊數。並且 Chiu (2023) 又基於 Good-Turing 頻率公式與柯西不等式之概念，針對單一群落的估計得出近似式： $\frac{TE(Q_0)}{E(Q_1)} \geq \frac{(T-1)E(Q_1)}{2E(Q_2)} \geq \frac{(T-2)E(Q_2)}{3E(Q_3)}$ 。從中可以得知，在物種估計時，採取出現較少次的物種，可以更多提供未出現物種的資訊，有助於縮小物種豐富度的估計結果。根據 $P(X_i = k)$ ，可定義出 $E(Q_k)$ 為：

$$E(Q_k) = P(X_i = k) = \begin{cases} S_{12} \times G(\alpha, \beta, T) \left[\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(t+\beta)}{\Gamma(t+\alpha+\beta)} - \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+T)}{\Gamma(\alpha+\beta+T)} \right], & \text{if } k = 0 \\ S_{12} \times G(\alpha, \beta, T) \binom{t}{k} \frac{\Gamma(\alpha+k)\Gamma(t+\beta-k)}{\Gamma(t+\alpha+\beta)}, & \text{if } k > 0 \end{cases}$$

依據上述式子可知未觀測到、僅出現在一個與兩個區塊中的豐富度的期望值為：

$$\begin{aligned} E(Q_0) &= P(X_i = 0) = S_{12} \times G(\alpha, \beta, T) \left[\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(t+\beta)}{\Gamma(t+\alpha+\beta)} - \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+T)}{\Gamma(\alpha+\beta+T)} \right] \\ E(Q_1) &= P(X_i = 1) = S_{12} \times G(\alpha, \beta, T) \binom{t}{1} \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(t+\beta-1)}{\Gamma(t+\alpha+\beta)} \\ E(Q_2) &= P(X_i = 2) = S_{12} \times G(\alpha, \beta, T) \binom{t}{2} \frac{\Gamma(\alpha+2)\Gamma(t+\beta-2)}{\Gamma(t+\alpha+\beta)} \end{aligned}$$

將隨後利用上述概念，將估計推廣至兩群落。令 p_{kl} 為兩樣本的物種豐富度正好分別為 k 和 l 的平均機率：

$$p_{kl} = P(X_i = k)P(Y_i = l) =$$

$$\begin{cases} G_1 \left[\frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(t_1+\beta_1)}{\Gamma(t_1+\alpha_1+\beta_1)} - \frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\beta_1+T_1)}{\Gamma(\alpha_1+\beta_1+T_1)} \right] G_2 \left[\frac{\Gamma(\alpha_2)\Gamma(t_2+\beta_2)}{\Gamma(t_2+\alpha_2+\beta_2)} - \frac{\Gamma(\alpha_2)\Gamma(\beta_2+T_2)}{\Gamma(\alpha_2+\beta_2+T_2)} \right], \text{if } k = 0 \text{ and } l = 0 \\ G_1 \left[\frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(t_1+\beta_1)}{\Gamma(t_1+\alpha_1+\beta_1)} - \frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\beta_1+T_1)}{\Gamma(\alpha_1+\beta_1+T_1)} \right] G_2 \binom{t_2}{l} \frac{\Gamma(\alpha_2+l)\Gamma(t_2+\beta_2-l)}{\Gamma(t_2+\alpha_2+\beta_2)}, \text{if } k = 0 \text{ and } l > 0 \\ G_1 \binom{t_1}{k} \frac{\Gamma(\alpha_1+k)\Gamma(t_1+\beta_1-k)}{\Gamma(t_1+\alpha_1+\beta_1)} G_2 \left[\frac{\Gamma(\alpha_2)\Gamma(t_2+\beta_2)}{\Gamma(t_2+\alpha_2+\beta_2)} - \frac{\Gamma(\alpha_2)\Gamma(\beta_2+T_2)}{\Gamma(\alpha_2+\beta_2+T_2)} \right], \text{if } k > 0 \text{ and } l = 0 \\ G_1 \binom{t_1}{k} \frac{\Gamma(\alpha_1+k)\Gamma(t_1+\beta_1-k)}{\Gamma(t_1+\alpha_1+\beta_1)} G_2 \binom{t_2}{l} \frac{\Gamma(\alpha_2+l)\Gamma(t_2+\beta_2-l)}{\Gamma(t_2+\alpha_2+\beta_2)}, \text{if } k > 0 \text{ and } l > 0 \end{cases}$$

隨後又令 $Q_{kl} = \sum_{i=1}^S I(X_i = k \& Y_i = l)$ 為在樣本中第一群落出現 k 次且第二群即出現 l 次的區塊數，則 D_{12} 為樣本中觀測到的共同物種數量， $D_{12} = \sum_{k=1}^{T_1} \sum_{l=1}^{T_2} Q_{kl}$ 。藉此，可獲得在第一群落中分別出現未觀測到以及一至二個區塊，且同時在第二群落中出現過至少一次的期望值：

$$\begin{aligned} E(Q_{0+}) &= S_{12} \times P(X_i = 0) \times (1 - P(Y_i = 0)) \\ &= S_{12} \times G(\alpha_1, \beta_1, T_1) \\ &\quad \times \left[\frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(t_1+\beta_1)}{\Gamma(t_1+\alpha_1+\beta_1)} - \frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\beta_1+T_1)}{\Gamma(\alpha_1+\beta_1+T_1)} \right] \\ &\quad \times \left\{ 1 - G(\alpha_2, \beta_2, T_2) \left[\frac{\Gamma(\alpha_2)\Gamma(t_2+\beta_2)}{\Gamma(t_2+\alpha_2+\beta_2)} - \frac{\Gamma(\alpha_2)\Gamma(\beta_2+T_2)}{\Gamma(\alpha_2+\beta_2+T_2)} \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} E(Q_{1+}) &= S_{12} \times P(X_i = 1) \times (1 - P(Y_i = 0)) \\ &= S_{12} \times G(\alpha_1, \beta_1, T_1) \binom{t_1}{1} \left(\frac{\Gamma(\alpha_1+1)\Gamma(t_1+\beta_1-1)}{\Gamma(t_1+\alpha_1+\beta_1)} \right) \\ &\quad \times \left\{ 1 - G(\alpha_2, \beta_2, T_2) \left[\frac{\Gamma(\alpha_2)\Gamma(t_2+\beta_2)}{\Gamma(t_2+\alpha_2+\beta_2)} - \frac{\Gamma(\alpha_2)\Gamma(\beta_2+T_2)}{\Gamma(\alpha_2+\beta_2+T_2)} \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} E(Q_{2+}) &= S_{12} \times P(X_i = 2) \times (1 - P(Y_i = 0)) \\ &= S_{12} \times G(\alpha_1, \beta_1, T_1) \times \binom{t_1}{2} \left(\frac{\Gamma(\alpha_1+2)\Gamma(t_1+\beta_1-2)}{\Gamma(t_1+\alpha_1+\beta_1)} \right) \\ &\quad \times \left\{ 1 - G(\alpha_2, \beta_2, T_2) \left[\frac{\Gamma(\alpha_2)\Gamma(t_2+\beta_2)}{\Gamma(t_2+\alpha_2+\beta_2)} - \frac{\Gamma(\alpha_2)\Gamma(\beta_2+T_2)}{\Gamma(\alpha_2+\beta_2+T_2)} \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.6)$$

依據式 (3.4) 與式 (3.5)。成立以下近似值。將 α 設定為 1，且 $T \gg \beta$ ：

$$\frac{E(Q_{0+})}{E(Q_{1+})} = \left(\frac{\beta_1 + t_1 - 1}{t_1} \frac{T_1 - t_1}{T_1 + \beta_1} \right) \approx \left[\left(\frac{\beta_1}{t_1} + 1 \right) \frac{(T_1 - t_1)}{T_1 + \beta_1} \right]$$

$$\frac{E(Q_{1+})}{E(Q_{2+})} = \frac{t_1 + \beta_1 - 2}{t_1 - 1} \approx \left(\frac{\beta_1}{t_1} + 1 \right)$$

得 $\beta_1 = \left(\frac{E(Q_{1+}) - E(Q_{2+})}{E(Q_{2+})} \right) t_1$ ，代入 $E(Q_{0+}) = \frac{E(Q_{1+})^2}{E(Q_{2+})} \left(\frac{(T_1 - t_1)}{T_1 + \beta_1} \right)$ 。得：

$$E(Q_{0+}) = \begin{cases} \frac{t_1 - 1}{t_1} \frac{(1 - q)E(Q_{1+})^2}{E(Q_{2+}) + q(E(Q_{1+}) - E(Q_{2+}))^+}, & \text{if } E(Q_{2+}) > 0 \\ \frac{t_1 - 1}{t_1} \frac{1 - q}{q} (E(Q_{1+}) - 1), & \text{if } E(Q_{2+}) = 0 \end{cases}$$

$(A)^+$ 表示：若 $A > 0$ 時，則等於 $(A)^+ = A$ ；若 $A \leq 0$ ，則等於 $(A)^+ = 1$ 。

同理 $E(Q_{+0})$ 也依此證明，得 $\beta_2 = \left(\frac{E(Q_{+1}) - E(Q_{+2})}{E(Q_{+2})} \right) t_2$ ：

$$E(Q_{+0}) = \begin{cases} \frac{t_2 - 1}{t_2} \frac{(1 - q)E(Q_{+1})^2}{E(Q_{+2}) + q(E(Q_{+1}) - E(Q_{+2}))^+}, & \text{if } E(Q_{+2}) > 0 \\ \frac{t_2 - 1}{t_2} \frac{1 - q}{q} (E(Q_{+1}) - 1), & \text{if } E(Q_{+2}) = 0 \end{cases}$$

$(A)^+$ 表示：若 $A > 0$ 時，則等於 $(A)^+ = A$ ；若 $A \leq 0$ ，則等於 $(A)^+ = 1$ 。

同理，又可得在兩群群落同時為未觀測到、觀測到一至二個區塊的期望值分別為：

$$\begin{aligned}
E(Q_{00}) &= S_{12} \times P(X_i = 0) \times P(Y_i = 0) \\
&= S_{12} G(\alpha_1, \beta_1, T_1) G(\alpha_2, \beta_2, T_2) \\
&\quad \times \left[\frac{\Gamma(\alpha_1) \Gamma(t_1 + \beta_1)}{\Gamma(t_1 + \alpha_1 + \beta_1)} - \frac{\Gamma(\alpha_1) \Gamma(\beta_1 + T_1)}{\Gamma(\alpha_1 + \beta_1 + T_1)} \right] \\
&\quad \times \left[\frac{\Gamma(\alpha_2) \Gamma(t_2 + \beta_2)}{\Gamma(t_2 + \alpha_2 + \beta_2)} - \frac{\Gamma(\alpha_2) \Gamma(\beta_2 + T_2)}{\Gamma(\alpha_2 + \beta_2 + T_2)} \right]
\end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned}
E(Q_{11}) &= S_{12} \times P(X_i = 1) \times P(Y_i = 1) \\
&= S_{12} \times G(\alpha_1, \beta_1, T_1) G(\alpha_2, \beta_2, T_2) \\
&\quad \times \binom{t_1}{1} \binom{t_2}{1} \left(\frac{\Gamma(\alpha_1 + 1) \Gamma(t_1 + \beta_1 - 1)}{\Gamma(t_1 + \alpha_1 + \beta_1)} \right) \left(\frac{\Gamma(\alpha_2 + 1) \Gamma(t_2 + \beta_2 - 1)}{\Gamma(t_2 + \alpha_2 + \beta_2)} \right)
\end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}
E(Q_{22}) &= S_{12} \times P(X_i = 2) \times P(Y_i = 2) \\
&= S_{12} \times G(\alpha_1, \beta_1, T_1) G(\alpha_2, \beta_2, T_2) \\
&\quad \times \binom{t_1}{2} \binom{t_2}{2} \left(\frac{\Gamma(\alpha_1 + 2) \Gamma(t_1 + \beta_1 - 2)}{\Gamma(t_1 + \alpha_1 + \beta_1)} \right) \left(\frac{\Gamma(\alpha_2 + 2) \Gamma(t_2 + \beta_2 - 2)}{\Gamma(t_2 + \alpha_2 + \beta_2)} \right)
\end{aligned} \tag{3.9}$$

並依據式 (3.7) 與式 (3.8) 成立以下近似值：

$$\begin{aligned}
\frac{E(Q_{00})}{E(Q_{11})} &= \left(\frac{\beta_1 + t_1 - 1}{t_1} \frac{T_1 - t_1}{T_1 + \beta_1} \right) \left(\frac{\beta_2 + t_2 - 1}{t_2} \frac{T_2 - t_2}{T_2 + \beta_2} \right) \\
&\approx \left[\left(\frac{\beta_1}{t_1} + 1 \right) \frac{(T_1 - t_1)}{T_1 + \beta_1} \right] \left[\left(\frac{\beta_2}{t_2} + 1 \right) \frac{(T_2 - t_2)}{T_2 + \beta_2} \right]
\end{aligned}$$

$$\text{將 } \begin{cases} \beta_1 = \left(\frac{E(Q_{1+}) - E(Q_{2+})}{E(Q_{2+})} \right) t_1 \\ \beta_2 = \left(\frac{E(Q_{+1}) - E(Q_{+2})}{E(Q_{+2})} \right) t_2 \end{cases}, \text{ 代入 } E(Q_{00}) \approx \left[\left(\frac{\beta_1}{t_1} + 1 \right) \frac{(T_1 - t_1)}{T_1 + \beta_1} \right] \left[\left(\frac{\beta_2}{t_2} + 1 \right) \frac{(T_2 - t_2)}{T_2 + \beta_2} \right] E(Q_{11})$$

後，並加入 $\left(\frac{t_1 - 1}{t_1} \frac{t_2 - 1}{t_2} \right)$ 對估計式進行調整，最終得估計式：

$$S_{wBB1} = D_{12} + E(Q_{00}) + E(Q_{0+}) + E(Q_{+0})$$

其中：

$$E(Q_{0+}) = \begin{cases} \frac{t_1 - 1}{t_1} \frac{(1 - q)E(Q_{1+})^2}{E(Q_{2+}) + q(E(Q_{1+}) - E(Q_{2+}))^+}, & \text{if } E(Q_{2+}) > 0 \\ \frac{t_1 - 1}{t_1} \frac{1 - q}{q} (E(Q_{1+}) - 1), & \text{if } E(Q_{2+}) = 0 \end{cases} \quad (3.10)$$

$$E(Q_{+0}) = \begin{cases} \frac{t_2 - 1}{t_2} \frac{(1 - q)E(Q_{+1})^2}{E(Q_{+2}) + w_2(E(Q_{+1}) - E(Q_{+2}))^+}, & \text{if } E(Q_{+2}) > 0 \\ \frac{t_2 - 1}{t_2} \frac{1 - q}{q} (E(Q_{+1}) - 1), & \text{if } E(Q_{+2}) = 0 \end{cases} \quad (3.11)$$

$$E(Q_{00}) = \left(\frac{t_1 - 1}{t_1} \frac{t_2 - 1}{t_2} \right) \times \left[\left(\frac{\beta_1}{t_1} + 1 \right) \frac{(T_1 - t_1)}{T_1 + \beta_1} \right] \times \left[\left(\frac{\beta_2}{t_2} + 1 \right) \frac{(T_2 - t_2)}{T_2 + \beta_2} \right] E(Q_{11}) \quad (3.12)$$

$(A)^+$ 表示：若 $A > 0$ 時，則等於 $(A)^+ = A$ ；若 $A \leq 0$ ，則等於 $(A)^+ = 1$ 。

並在 S_{wBB1} 的基礎上，加入 Q_{12} 、 Q_{21} 對 β_1 、 β_2 的估計進行修正，依據式(3.8)

與式(3.9)成立以下近似值：

$$\frac{E(Q_{11})}{E(Q_{22})} \approx \left(\frac{\beta_1}{t_1} + 1 \right) \left(\frac{\beta_2}{t_2} + 1 \right)$$

並經由該式可推得出：

$$\begin{cases} \beta_1 = \frac{E(Q_{11})}{E(Q_{22})} \left(\frac{t_2}{\beta_2 + t_2} \right) t_1 - t_1 \\ \beta_2 = \frac{E(Q_{11})}{E(Q_{22})} \left(\frac{t_1}{\beta_1 + t_1} \right) t_2 - t_2 \end{cases} \quad (3.13)$$

又經由 $E(Q_{kl}) = S_{12} \times P(X_i = k) \times P(Y_i = l)$ 可以得知， $E(Q_{12})$ 以及 $E(Q_{21})$ 分別為：

$$\begin{aligned} E(Q_{12}) &= S_{12} \times P(X_i = 1) \times P(Y_i = 2) \\ &= S_{12} \times G(\alpha_1, \beta_1, T_1) G(\alpha_2, \beta_2, T_2) \\ &\times \binom{t_1}{1} \binom{t_2}{2} \left(\frac{\Gamma(\alpha_1 + 1) \Gamma(t_1 + \beta_1 - 1)}{\Gamma(t_1 + \alpha_1 + \beta_1)} \right) \left(\frac{\Gamma(\alpha_2 + 2) \Gamma(t_2 + \beta_2 - 2)}{\Gamma(t_2 + \alpha_2 + \beta_2)} \right) \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} E(Q_{21}) &= S_{12} \times P(X_i = 2) \times P(Y_i = 1) \\ &= S_{12} \times G(\alpha_1, \beta_1, T_1) G(\alpha_2, \beta_2, T_2) \\ &\times \binom{t_1}{2} \binom{t_2}{1} \left(\frac{\Gamma(\alpha_1 + 2) \Gamma(t_1 + \beta_1 - 2)}{\Gamma(t_1 + \alpha_1 + \beta_1)} \right) \left(\frac{\Gamma(\alpha_2 + 1) \Gamma(t_2 + \beta_2 - 1)}{\Gamma(t_2 + \alpha_2 + \beta_2)} \right) \end{aligned} \quad (3.15)$$

並依式 (3.14) 與式 (3.15) 成立以下近似式：

$$\frac{E(Q_{12})}{E(Q_{21})} = \left(\frac{t_2 - 1}{t_1 - 1} \right) \left(\frac{t_1 + \beta_1 - 2}{t_2 + \beta_2 - 2} \right) \approx \left(\frac{t_2}{t_1} \right) \left(\frac{t_1 + \beta_1}{t_2 + \beta_2} \right)$$

由上述式子推得：

$$\begin{cases} \beta_1 = \frac{E(Q_{12})}{E(Q_{21})} \left(\frac{t_1}{t_2} \right) (t_2 + \beta_2) - t_1 \\ \beta_2 = \frac{E(Q_{21})}{E(Q_{12})} \left(\frac{t_2}{t_1} \right) (t_1 + \beta_1) - t_2 \end{cases} \quad (3.16)$$

又可從式 (3.13) = 式 (3.16) 得：

$$\begin{aligned} (t_1 + \beta_1)^2 &= \frac{E(Q_{11}) E(Q_{12})}{E(Q_{22}) E(Q_{21})} t_1^2 \Rightarrow \beta_2^2 + 2t_2\beta_2 + t_2^2 \left(1 - \frac{E(Q_{11}) E(Q_{12})}{E(Q_{22}) E(Q_{21})} \right) = 0 \\ (t_2 + \beta_2)^2 &= \frac{E(Q_{11}) E(Q_{21})}{E(Q_{22}) E(Q_{12})} t_2^2 \Rightarrow \beta_2^2 + 2t_2\beta_2 + t_2^2 \left(1 - \frac{E(Q_{11}) E(Q_{21})}{E(Q_{22}) E(Q_{12})} \right) = 0 \end{aligned}$$

並依公式解 $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ，得：

$$\begin{cases} \beta_1 = -t_1 + t_1 \sqrt{\frac{E(Q_{11}) E(Q_{12})}{E(Q_{22}) E(Q_{21})}} = \left(-1 + \sqrt{\frac{E(Q_{11}) E(Q_{12})}{E(Q_{22}) E(Q_{21})}} \right) t_1 \\ \beta_2 = -t_2 + t_2 \sqrt{\frac{E(Q_{11}) E(Q_{21})}{E(Q_{22}) E(Q_{12})}} = \left(-1 + \sqrt{\frac{E(Q_{11}) E(Q_{21})}{E(Q_{22}) E(Q_{12})}} \right) t_2 \end{cases} \quad (3.17)$$

最終得：

$$S_{wBB2} = D_{12} + E(Q_{00}) + E(Q_{0+}) + E(Q_{+0})$$

其中，將式 (3.17) 的 β_1 與 β_2 的結果分別帶入 $E(Q_{0+}) = \frac{E(Q_{1+})^2}{E(Q_{2+})} \left(\frac{T_1 - t_1}{T_1 + \beta_1} \right)$ 與

$E(Q_{+0}) = \frac{E(Q_{+1})^2}{E(Q_{+2})} \left(\frac{T_2 - t_2}{T_2 + \beta_2} \right)$ 中可分別求得 $E(Q_{0+})$ 與 $E(Q_{+0})$ 的估計式；而 $E(Q_{00})$

則與 $wBBI$ 相同使用式 (3.12) 估計。

第4章模擬研究與討論

4.1 估計式整理

整理上一章所推倒之估計式，以及過去文獻中所存在的估計式。藉由電腦模擬的方式，在不同模型的設定下，比較三種取後不放回以及兩種取後放回的估計方式之表現，並同時估計其標準差。

以下為不同估計方法之整理：

4.1.1 取後放回

1. S_{BB}

$$S_{BB} = D_{12} + E(Q_{00}) + E(Q_{0+}) + E(Q_{+0})$$

其中：

$$\begin{aligned} E(Q_{00}) &= \frac{E(Q_{11})^2}{4E(Q_{22})} \frac{t_1 - 1}{t_1} \left(2 - \left(\frac{2E(Q_{2+})^2}{3E(Q_{1+})E(Q_{3+})} \right)^- \right) \frac{t_2 - 1}{t_2} \left(2 - \left(\frac{2E(Q_{+2})^2}{3E(Q_{+1})E(Q_{+3})} \right)^- \right) \\ E(Q_{0+}) &= \frac{t_1 - 1}{t_1} \frac{E(Q_{1+})^2}{2E(Q_{2+})} \left(2 - \left(\frac{2E(Q_{2+})^2}{3E(Q_{1+})E(Q_{3+})} \right)^- \right) \\ E(Q_{+0}) &= \frac{t_2 - 1}{t_2} \frac{E(Q_{+1})^2}{2E(Q_{+2})} \left(2 - \left(\frac{2E(Q_{+2})^2}{3E(Q_{+1})E(Q_{+3})} \right)^- \right) \end{aligned}$$

且 $(A)^-$ 表示：若 $A \leq 1$ 時，則 $(A)^- = \max(0.5, A)$ ；若 $A > 1$ 時，則 $(A)^- = A$ 。

2. S_{Pan}

$$S_{BB} = D_{12} + \frac{t_1 - 1}{t_1} \frac{E(Q_{1+})^2}{2E(Q_{2+})} + \frac{t_2 - 1}{t_2} \frac{E(Q_{+1})^2}{2E(Q_{+2})} + \frac{t_1 - 1}{t_1} \frac{t_2 - 1}{t_2} \frac{E(Q_{11})^2}{4E(Q_{22})}$$

4.1.2 取後不放回

3. S_{WBB1}

$$S_{WBB1} = D_{12} + E(Q_{00}) + E(Q_{0+}) + E(Q_{+0})$$

其中：

$$E(Q_{00}) = \left(\frac{t_1 - 1}{t_1} \frac{t_2 - 1}{t_2} \right) \times \left[\left(\frac{\beta_1}{t_1} + 1 \right) \frac{(T_1 - t_1)}{T_1 + \beta_1} \right] \times \left[\left(\frac{\beta_2}{t_2} + 1 \right) \frac{(T_2 - t_2)}{T_2 + \beta_2} \right] E(Q_{11})$$

並在 $E(Q_{00})$ 的估計式中代入 $\begin{cases} \beta_1 = \left(\frac{E(Q_{1+}) - E(Q_{2+})}{E(Q_{2+})} \right) t_1 \\ \beta_2 = \left(\frac{E(Q_{+1}) - E(Q_{+2})}{E(Q_{+2})} \right) t_2 \end{cases}$ 。

$$E(Q_{0+}) = \begin{cases} \frac{t_1 - 1}{t_1} \frac{(1 - q)E(Q_{1+})^2}{E(Q_{2+}) + q(E(Q_{1+}) - E(Q_{2+}))^+}, & \text{if } E(Q_{2+}) > 0 \\ \frac{t_1 - 1}{t_1} \frac{1 - q}{q} (E(Q_{1+}) - 1), & \text{if } E(Q_{2+}) = 0 \end{cases}$$

$$E(Q_{+0}) = \begin{cases} \frac{t_2 - 1}{t_2} \frac{(1 - q)E(Q_{+1})^2}{E(Q_{+2}) + w_2(E(Q_{+1}) - E(Q_{+2}))^+}, & \text{if } E(Q_{+2}) > 0 \\ \frac{t_2 - 1}{t_2} \frac{1 - q}{q} (E(Q_{+1}) - 1), & \text{if } E(Q_{+2}) = 0 \end{cases}$$

$(A)^+$ 表示：若 $A > 0$ 時，則等於 $(A)^+ = A$ ；若 $A \leq 0$ ，則等於 $(A)^+ = 1$ 。

4. S_{WBB2}

$$S_{WBB2} = D_{12} + E(Q_{00}) + E(Q_{0+}) + E(Q_{+0})$$

$$E(Q_{00}) = \left(\frac{t_1 - 1}{t_1} \frac{t_2 - 1}{t_2} \right) \times \left[\left(\frac{\beta_1}{t_1} + 1 \right) \frac{(T_1 - t_1)}{T_1 + \beta_1} \right] \times \left[\left(\frac{\beta_2}{t_2} + 1 \right) \frac{(T_2 - t_2)}{T_2 + \beta_2} \right] E(Q_{11})$$

並在 $E(Q_{00})$ 的估計式中代入 $\begin{cases} \beta_1 = \left(-1 + \sqrt{\frac{E(Q_{11})E(Q_{12})}{E(Q_{22})E(Q_{21})}} \right) t_1 \\ \beta_2 = \left(-1 + \sqrt{\frac{E(Q_{11})E(Q_{21})}{E(Q_{22})E(Q_{12})}} \right) t_2 \end{cases}$ 。而 $E(Q_{+0})$ 與

$E(Q_{0+})$ 的估計與 S_{WBB1} 相同。

5. $S_{12,wor2}$

$$S_{12,wor2} = D_{12} + \frac{Q_{1+}^2}{2k_1Q_{2+} + rQ_{1+}} + \frac{Q_{+1}^2}{2k_2Q_{+2} + rQ_{+1}} + \frac{Q_{11}^2}{4k_1k_2Q_{22} + 2k_1r_2Q_{21} + 2k_2r_1Q_{12} + r_1r_2Q_{11}}$$

其中 $k_i = \frac{t_i}{t_{i-1}}$ 與 $r_j = \frac{\frac{t_j}{T}}{(1-\frac{t_j}{T})}$ 。

4.1.3 標準差、95%信賴區間、樣本涵蓋率與變異係數估計

6. 標準差估計

$$\widehat{var}(\widehat{S}_{12}) = \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^t \frac{\partial \widehat{S}_{12}}{\partial Q_i} \frac{\partial \widehat{S}_{12}}{\partial Q_j} \widehat{cov}(Q_i, Q_j)$$

其中 $\widehat{cov}(Q_i, Q_j) = \begin{cases} Q_i \left(1 - \frac{Q_i}{\widehat{S}}\right), & \text{if } i = j \\ -\frac{Q_i Q_j}{\widehat{S}}, & \text{if } i \neq j \end{cases}$

7. 95%信賴區間

(1) wBB1 and wBB2

$$\left[\widehat{S}_{12} - 1.96 \left(\widehat{var}(\widehat{S}_{12}) \right)^{\frac{1}{2}}, \widehat{S}_{12} + 1.96 \left(\widehat{var}(\widehat{S}_{12}) \right)^{\frac{1}{2}} \right]$$

(2) Other

$$\left[D_{12} + \frac{\widehat{S}_{12} - D_{12}}{R}, D_{12} + (\widehat{S}_{12} - D_{12}) \times R \right]$$

其中 $R = \left\{ 1.96 \left[\log \left(1 + \frac{\widehat{var}(\widehat{S}_{12})}{(\widehat{S}_{12} - D_{12})^2} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \right\}$ 以此計算 95%信賴區間的樣本涵蓋率

(95% confidence interval coverage rate, 95% CI Coverage)。

8. Sample Coverage

為樣本中檢測到的物種的總發生率的百分比。

$$\hat{C} = 1 - \frac{Q_1}{\sum_{i=1}^S iQ_i}$$

9. 樣本變異係數 (Sample CV)

$$\hat{\gamma}^2 = \max \left\{ \frac{S_{obs}}{\hat{C}} \frac{t}{t-1} \frac{\sum_{i=1}^t i(i-1)Q_i}{\sum_{i=1}^t iQ_i \sum_{i=1}^t iQ_i - 1} - 1, 0 \right\}$$

$\hat{\gamma}^2$ 為變異係數平方的估計式，即 $CV = \hat{\gamma}$ 。

4.2 模型模擬設定

4.2.1 模擬模型假設

經由電腦模擬，可以設定不同母體並產生不同物種豐富度的結構，透過重複抽樣資料以評估估計式之估計表現。在模擬的過程中，首先需決定兩族群的共同種與特有種的數量，再選擇兩種不同種模型作為母體使用，以下為四種模擬模型之設定：

- I. 同質性模型 (homogeneity model), $p_i = 0.1$, $i = 1, 2, \dots, S$ ($mean = 0.1, CV = 0$)
- II. 均勻模型 (uniform model), $p_i = ca_i$, $i = 1, 2, \dots, S$ ($mean = 0.12, CV = 0.66$), 其中 a_i 服從均勻分佈, c 為調整常數。
- III. Broken-stick 模型, $p_i = ca_i$, $i = 1, 2, \dots, S$ ($mean = 0.15, CV = 0.94$), 其中 a_i 服從指數函數分佈, c 為調整常數。
- IV. 對數常態模型 (log-normal model), $p_i = ca_i$, $i = 1, 2, \dots, S$ ($mean = 0.15, CV = 1.17$), 其中 a_i 服從對數常態分佈, c 為調整常數。

4.2.2 物種與區塊數的假設

在電腦模擬時，需針對真實的群落物種與區塊數進行假設，以評估估計結果之優劣程度。故假設以下四種組合為電腦模擬的真實物種與區塊狀況做使用。

1. 假設總物種數為 500 種物種 ($S = 500$)，其中群落一與第二群落皆存在 400 種物種 ($S_1 = S_2 = 400$)，兩群落間共有 300 種共同種 ($S_{12} = 300$)。且兩族群皆為 100 區塊 ($T_1 = T_2 = 100$)，並從中依比例抽取 t_1 與 t_2 個區塊作為樣本使用。
2. 假設總物種數皆為 700 種物種 ($S = 700$)，其中群落一與第二群落分別存在 400 與 600 種物種 ($S_1 = 400$, $S_2 = 600$)，兩群落間共有 300 種共同種 ($S_{12} = 300$)。且兩族群皆為 100 區塊 ($T_1 = T_2 = 100$)，並從中依比例抽取 t_1 與 t_2 個區塊作為樣本使用。

3. 假設總物種數為 500 種物種 ($S = 500$)，其中群落一與第二群落皆存在 400 種物種 ($S_1 = S_2 = 400$)，兩群落間共有 300 種共同種 ($S_{12} = 300$)；兩族群皆為 100 區塊 ($T_1 = T_2 = 100$)，並從中依比例抽取 t_1 與 t_2 個區塊作為樣本使用，而 $t_2 = 2t_1$ 。
4. 假設總物種數為 500 種物種 ($S = 500$)，其中群落一與第二群落皆存在 400 種物種 ($S_1 = S_2 = 400$)，兩群落間共有 300 種共同種 ($S_{12} = 300$)。且兩族群分別為 100 與 200 區塊 ($T_1 = 100, T_2 = 200$)，並從中依比例抽取 $t_1 = qT_1$ 與 $t_2 = qT_2$ 個區塊作為樣本使用。

而在每種群落假設下，樣本數的模擬次數為 $R = 1000$ 次。

4.3 表格中名詞定義

- Sim.：群落的組合情況。
- q ：為抽樣比例， $q = \frac{t_i}{T_i}$ 。
- Sample size：抽樣區塊數， t 。
- Estimator：所採用之估計方法。
- Obs：兩樣本觀測到的共同物種。
- AVG Estimate： R 次模擬之平均估計值。
- Bias： R 次模擬之偏差 (bias)， $bias = \hat{S}_{12} - S_{12}$ 。
- Sample SE： R 次模擬之樣本標準差。
- Est. SD： R 次模擬之標準差估計值。
- RMSE： R 次模擬估計量之樣本均方根誤差。
- 95% CI Coverage： R 次模擬中理論值於信賴區間的比例。

4.4 取後放回的模擬結果

首先針對樣本涵蓋率型計算，在多種組合模擬下，除了在樣本大小為 10 的情況下，其餘樣本大小所抽樣本，無論是在何種模型或模擬組合下，所估計之樣本涵蓋率皆大於 0.95。

且依據模擬結果可以得知，在第一種物種分配的假設下，在偏差的表現上，在四種模擬情況下，兩估計方法下所估計的群落共同種，皆有低估的情況發生。尤其在小樣本時，低估情況更加明顯。平均而言，在兩種估計方法的偏差結果中皆顯示，*BB* 所估計之群落共同種相較於原有的 *Pan* 方法，在偏差的估計表現上更為優秀。

在樣本標準差 (Sample SE) 以及平均標準差估計 (Est. SD) 的結果中，可以發現無論在何種模擬情形下兩種方法皆有低估的情況發生。然而，單憑偏差與標準差的估計的結果無法從中判定估計式的好壞，在評估一個估計方法的優劣之時，還需要考慮該估計量的準確度以及精確度。因此以 RMSE 作為衡量估計式好壞之準則。在 RMSE 的結果方面，在兩群落皆為小樣本時，*BB* 的表現較優秀。但在大樣本地抽樣下，*Pan* 的表現會略優於 *BB*。另一方面，95%信賴區間涵蓋率也是能作為評估估計式優劣的標準之一。在 95%信賴區間涵蓋率的結果中 *BB* 的結果皆略優於 *Pan*。

在第二種與第三種物種分配的假設下，所進行的模擬結果，無論是在何種估計值的結果，皆與第一種物種分配的假設並無太大的差異。然而，針對第四種物種的假設下，無論是在觀測物種或是平均的估計結果上，相較於第一種假設在 *BB* 的估計下，雖然也具有較小的偏差，但會有高估的情況發生；且在 RMSE 的表現上，*BB* 的估計也獲得較差的結果；同時，隨著樣本數的增加，在 95%信賴區間涵蓋率的結果反而下降。

綜上所述，在評估各項模擬與所有指標之後，本文所提出 *BB* 估計方式的表現普遍優於 *Pan* 對於兩群落共同種的估計結果。且在目標區塊數以及共同物種

數的真值皆為相同的情況底下，群落中的特有種數量並不會影響共同物種數的估計結果。但當目標區塊與抽樣區塊不相同時，則會影響到估計式的表現結果。

Table 4.1 群落一為同質模型，群落二為 Broken-stick 模型之情況下的估計結果。 $S_1 = S_2 = 400$ ， $S_{12} = 300$ 。

Sample size	Estimator	Obs	AVG Estimate	Bias	Sample SE	Est. SD	RMSE	95% CI Coverage
10	BB	125.12	270.79	-29.21	61.1	46.64	67.69	0.86
	Pan		246.81	-53.19	40.24	27.93	66.68	0.82
30	BB	240.32	287.18	-12.82	19.64	18.34	23.44	0.91
	Pan		277.62	-22.38	13.64	11.92	26.2	0.89
50	BB	267.3	294.68	-5.32	16.04	14.36	16.89	0.87
	Pan		288.29	-11.71	11.15	9.45	16.16	0.86
70	BB	277.28	297.93	-2.07	14.03	12.42	14.18	0.83
	Pan		292.66	-7.34	9.78	8.19	12.22	0.82

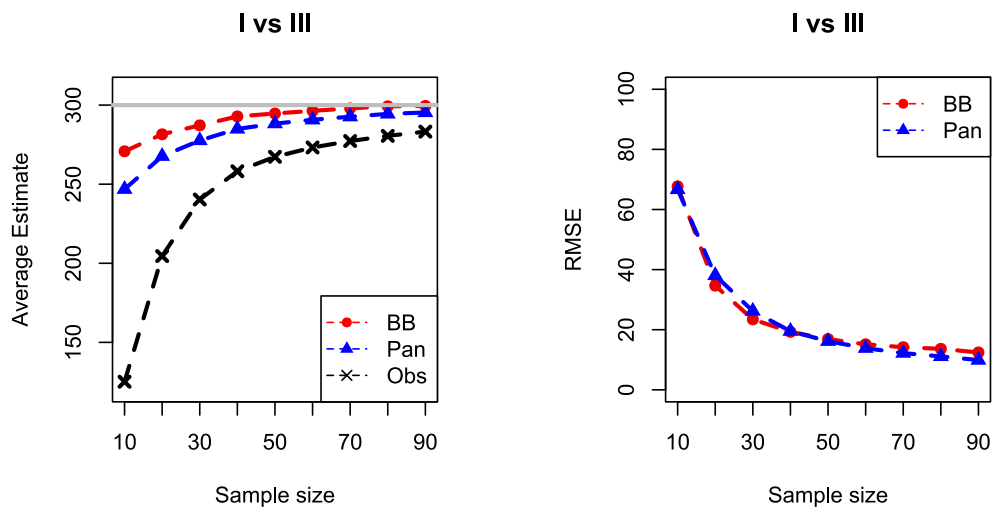


Figure 4.1 群落一為同質模型，群落二為 Broken-stick 模型之情況下的 AVG Estimate (左圖) 與 RMSE (右圖)估計結果。 $S_1 = S_2 = 400$ ， $S_{12} = 300$ 。

Table 4.2 兩群落皆為均勻模型之情況下的估計結果。 $S_1 = S_2 = 400$, $S_{12} = 300$ 。

Sample size	Estimator	Obs	AVG Estimate	Bias	Sample SE	Est. SD	RMSE	95% CI Coverage
10	BB	123.34	244.33	-55.67	52.13	40.13	76.25	0.86
	Pan		220.02	-79.98	32.53	22.51	86.34	0.83
30	BB	225.85	277.64	-22.36	22.77	19.67	31.9	0.89
	Pan		265.65	-34.35	15.31	12.33	37.6	0.88
50	BB	255.45	289.5	-10.5	16.01	15.42	19.14	0.9
	Pan		281.66	-18.34	11.37	10.15	21.58	0.89
70	BB	268.74	295.39	-4.61	13.68	13.72	14.43	0.91
	Pan		289.14	-10.86	9.76	9.21	14.6	0.9

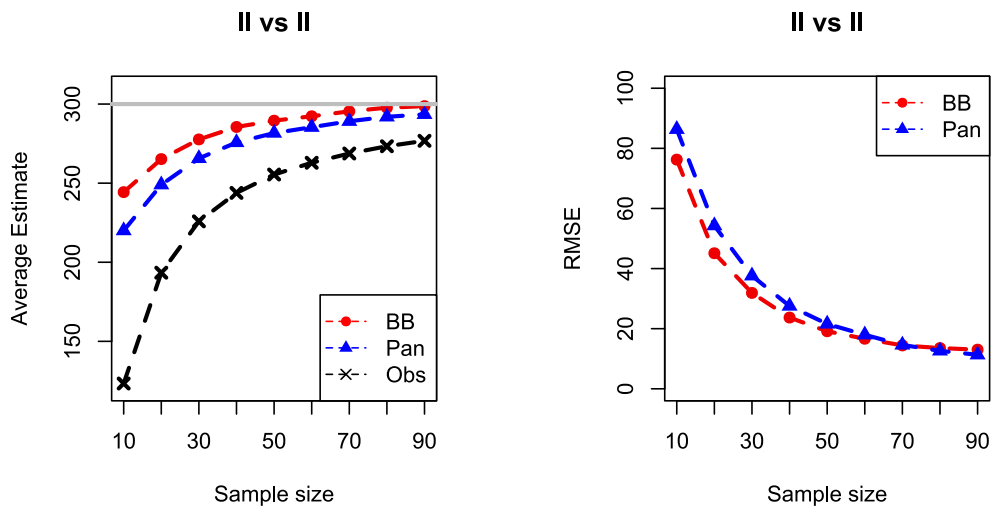


Figure 4.2 兩群落皆為均勻模型之情況下的 AVG Estimate (左圖) 與 RMSE (右圖)估計結果。 $S_1 = S_2 = 400$, $S_{12} = 300$ 。

Table 4.3 群落一為均勻模型，群落二為 Broken-stick 模型之情況下的估計結果。 $S_1 = S_2 = 400$ ， $S_{12} = 300$ 。

Sample size	Estimator	Obs	AVG Estimate	Bias	Sample SE	Est. SD	RMSE	95% CI Coverage
10	BB	123.27	232.31	-67.69	47.01	37.17	82.4	0.85
	Pan		207.78	-92.22	29.49	20.99	96.82	0.83
30	BB	218.54	276.15	-23.85	24.65	21.91	34.29	0.89
	Pan		262.17	-37.83	16.27	13.71	41.18	0.88
50	BB	248.57	290.11	-9.89	19.9	17.98	22.21	0.88
	Pan		280.02	-19.98	13.76	11.77	24.26	0.88
70	BB	263.41	295.6	-4.4	17.15	15.73	17.69	0.88
	Pan		287.96	-12.04	12.17	10.46	17.11	0.86

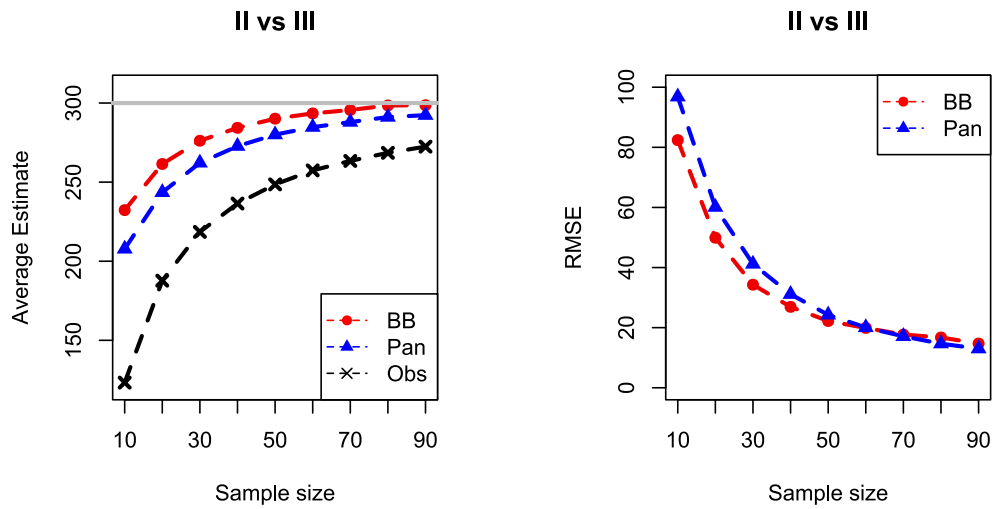


Figure 4.3 群落一為均勻模型，群落二為 Broken-stick 模型之情況下的 AVG Estimate (左圖) 與 RMSE (右圖)估計結果。 $S_1 = S_2 = 400$ ， $S_{12} = 300$ 。

Table 4.4 群落一為 Broken-stick 模型，群落二為對數常數模型之情況下的估計結果。 $S_1 = S_2 = 400$ ， $S_{12} = 300$ 。

Sample size	Estimator	Obs	AVG Estimate	Bias	Sample SE	Est. SD	RMSE	95% CI Coverage
10	BB	115.62	228.28	-71.72	52.12	40.34	88.64	0.85
	Pan		199.49	-100.51	31.57	22.73	105.34	0.83
30	BB	208.96	277.73	-22.27	29.47	25.47	36.93	0.9
	Pan		261.16	-38.84	18.92	15.57	43.2	0.88
50	BB	242.64	292.56	-7.44	22.86	20.58	24.03	0.88
	Pan		280.66	-19.34	15.44	13.18	24.74	0.87
70	BB	260.08	298.13	-1.87	19.15	17.44	19.23	0.88
	Pan		289.36	-10.64	13.26	11.47	16.99	0.88

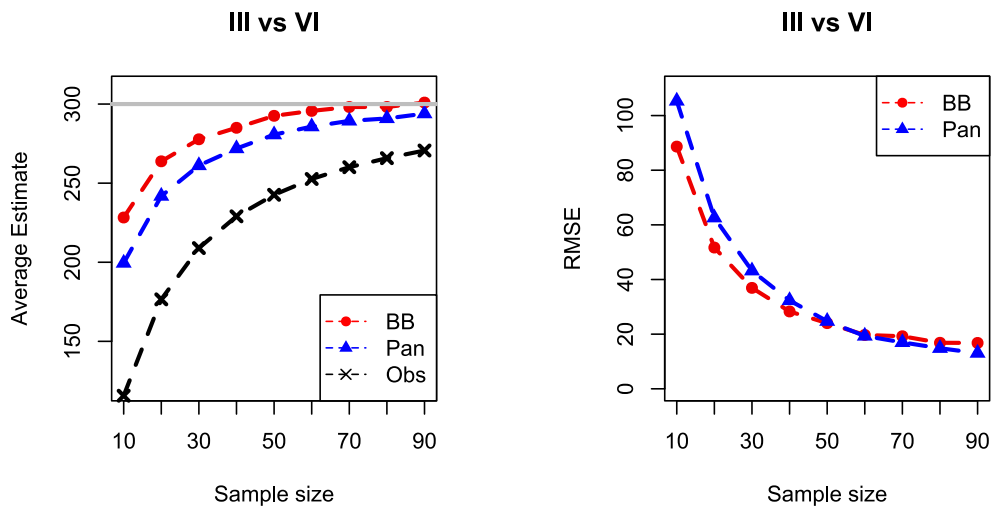


Figure 4.4 群落一為 Broken-stick 模型，群落二為對數常數模型之情況下的 AVG Estimate (左圖)

與 RMSE (右圖)估計結果。 $S_1 = S_2 = 400$ ， $S_{12} = 300$ 。

4.5 取後不放回與取後放回的模擬結果

比較在取後不放回的模擬針對樣本涵蓋率型計算，同樣於在多種組合模擬下，除了在抽樣比例為 0.1 的情況底下，其餘樣本大小所抽樣本，無論是在何種模型或模擬組合下，所估計之樣本涵蓋率皆大於 0.95。且模擬同質群落與均勻群落在抽樣比例為 0.1 的情況下，樣本變異係數通常小於 0.4。而隨抽樣比例的增加將越接近母體變異數。

依據第一種物種假設的模擬結果可以得知，在偏差的表現上，在 *wBB1* 與 *wBB2* 小樣本的估計，在同質與 Broken-stick 以及兩群落皆為均勻的兩種模擬組合下有高估的表現；而在均勻與 Broken-stick 以及 Broken-stick 與常對數的兩種模擬組合下有低估的表現。但在大樣本的情況下，則是三種估計方法皆呈現低估的表現。

在樣本標準差 (Sample SE) 以及平均標準差估計 (Est. SD) 的結果中，可以發現無論在何種模擬情形下三種方法皆有低估的情況發生。除此之外，在 RMSE 的結果中 *wBB1* 與 *wBB2* 兩者無明顯差異，且都優於 *wChao2*。在 95% 信賴區間涵蓋率方面，由於 *wChao2* 已知為下界估計式，因此在 95% 信賴區間涵蓋率的估計上使用 log 修正的方式進行估計，而在 *wBB1* 與 *wBB2*，則使用未修正的估計方式。在該項結果下 *wBB1* 的表現優於其他兩者，且隨著抽樣比例的增加，*wBB1* 與 *wBB2* 無明顯差異，且略優於 *wChao2*。

在第二種與第三種物種分配的假設底下，所進行的模擬結果，無論是在何種估計值的結果，皆與第一種物種分配的假設並無太大的差異。並且，不同於第四種物種的假設在取後放回的抽樣模擬中與前三種的估計結果上偶差異，在取後不放回的模擬下，四種假設的結果皆無明顯差異。

綜合以上論述可以得知，普遍而言在小樣本時，取後不放回的兩估計結果較不穩定，會因群落之變異大小所致，使得高估或低估的現象皆有可能發生。而依據多次模擬結果可以得知，通常當其中一個群落的估計之樣本變異係數小

於 0.4 時 ($\hat{p} < 0.4$)， $wBB1$ 與 $wBB2$ 更容易發生高估的情況。反之在大樣本的條件下，採用取後放回的估計方法 BB 則是會有明顯高估的情況發生。

因此在小樣本且當其中一個群落樣本所估計的變異係數小於 0.4 時的估計中，建議採用取後放回的抽樣方式 (BB) 估計兩群落的共同種；而在抽樣比例達到 0.4 時，取後不放回的估計式才趨近穩定，並相較於取後放回的方法有更良好的估計表現。故在抽樣比例大於 0.4 時，須以取後不放回的兩估計是對群落的共同種進行估計。

Table 4.5 群落一為同質模型，群落二為 Broken-stick 模型之情況下的估計結果。 $S_1 = S_2 = 400$ ， $S_{12} = 300$ 。

q	Estimator	Obs	AVG Estimate	Bias	Sample SE	Est. SD	RMSE	95% CI Coverage
0.1	wBB1	130.68	362.99	62.99	57.31	51.9	85.14	0.92
	wBB2		367.63	67.63	67.25	56.69	95.36	0.92
	wChao2		246.53	-53.47	30.75	24.33	61.67	0.89
	BB		282.03	-17.97	57.47	45.49	60.19	0.89
0.3	wBB1	251.5	301.72	1.72	12.87	9.29	12.97	0.86
	wBB2		303.33	3.33	17.58	14.6	17.88	0.9
	wChao2		281.55	-18.45	9.7	9.15	20.85	0.92
	BB		300.26	0.26	19.47	19.11	19.46	0.91
0.5	wBB1	277.66	298.82	-1.18	6.77	7.46	6.87	0.98
	wBB2		297.5	-2.5	6.1	5.87	6.59	0.94
	wChao2		292.87	-7.13	6.15	5.81	9.41	0.89
	BB		313.19	13.19	16.35	16.84	21	0.91
0.7	wBB1	289.19	299.95	-0.05	3.67	4.06	3.67	0.97
	wBB2		298.72	-1.28	3.32	3.51	3.56	0.97
	wChao2		298.19	-1.81	3.62	3.74	4.05	0.9
	BB		324.51	24.51	14.65	17.23	28.55	0.94

Table 4.6 兩群落皆為均勻模型之情況下的估計結果。 $S_1 = S_2 = 400$, $S_{12} = 300$ 。

q	Estimator	Obs	AVG Estimate	Bias	Sample SE	Est. SD	RMSE	95% CI Coverage
0.1	wBB1	127.72	306.03	6.03	44.38	44.69	44.77	0.95
	wBB2		310.52	10.52	52.3	43.21	53.32	0.91
	wChao2		215.98	-84.02	23.97	19.41	87.37	0.87
	BB		246.21	-53.79	46.24	38.37	70.92	0.89
0.3	wBB1	234.14	293.65	-6.35	15.26	14.24	16.52	0.93
	wBB2		298.53	-1.47	21.44	17.07	21.48	0.9
	wChao2		269.61	-30.39	11.25	9.92	32.4	0.89
	BB		294.95	-5.05	24.75	21.59	25.25	0.9
0.5	wBB1	266.2	296.79	-3.21	8.9	8.52	9.46	0.93
	wBB2		299.18	-0.82	10.62	8.93	10.65	0.9
	wChao2		287.64	-12.36	7.82	6.8	14.62	0.89
	BB		315.69	15.69	20.48	19.29	25.79	0.9
0.7	wBB1	282.94	299.05	-0.95	5.2	4.97	5.28	0.94
	wBB2		299.36	-0.64	5.33	4.82	5.37	0.93
	wChao2		296.33	-3.67	5.08	4.55	6.26	0.89
	BB		337.83	37.83	20.16	21.22	42.87	0.94

Table 4.7 群落一為均勻模型，群落二為 Broken-stick 模型之情況下的估計結果。 $S_1 = S_2 = 400$ ， $S_{12} = 300$ 。

q	Estimator	Obs	AVG Estimate	Bias	Sample SE	Est. SD	RMSE	95% CI Coverage
0.1	wBB1	126.47	290.58	-9.42	43.78	38.74	44.76	0.92
	wBB2		298.77	-1.23	55.94	44.91	55.92	0.92
	wChao2		208.8	-91.2	24.3	19.13	94.38	0.86
	BB		243.7	-56.3	47.86	38.89	73.87	0.88
0.3	wBB1	226.97	292.39	-7.61	16.63	14.85	18.28	0.93
	wBB2		292.88	-7.12	22.97	17.59	24.04	0.89
	wChao2		266.41	-33.59	12.31	10.79	35.77	0.89
	BB		296.35	-3.65	27.04	24.18	27.27	0.88
0.5	wBB1	261.52	296.89	-3.11	8.5	9.19	9.05	0.97
	wBB2		295.16	-4.84	10.14	9.17	11.23	0.94
	wChao2		286.59	-13.41	7.55	7.44	15.38	0.92
	BB		320.96	20.96	20.55	21.94	29.35	0.94
0.7	wBB1	281.06	299.58	-0.42	5.35	5.33	5.36	0.94
	wBB2		298.73	-1.27	5.41	5.07	5.56	0.93
	wChao2		296.51	-3.49	5.24	4.9	6.3	0.9
	BB		342.9	42.9	20.83	23.26	47.69	0.95

Table 4.8 群落一為 Broken-stick 模型，群落二為對數常數模型之情況下的估計結果。 $S_1 = S_2 = 400$ ， $S_{12} = 300$ 。

q	Estimator	Obs	AVG Estimate	Bias	Sample SE	Est. SD	RMSE	95% CI Coverage
0.1	wBB1	121.47	282.17	-17.83	45.02	41.28	48.4	0.94
	wBB2		289.76	-10.24	56.53	47.66	57.42	0.92
	wChao2		202.82	-97.18	25.04	19.94	100.36	0.87
	BB		243.48	-56.52	50.92	41.92	76.06	0.87
0.3	wBB1	223.77	300.21	0.21	17.93	19.62	17.93	0.97
	wBB2		301.38	1.38	24.33	19.37	24.36	0.91
	wChao2		269.92	-30.08	13.26	11.78	32.87	0.91
	BB		304.82	4.82	31.38	27.43	31.74	0.91
0.5	wBB1	262.89	300.71	0.71	9.14	9.81	9.16	0.97
	wBB2		301.44	1.44	11.58	9.83	11.66	0.9
	wChao2		289.26	-10.74	8.02	7.55	13.4	0.91
	BB		321.77	21.77	22.08	21.99	31	0.94
0.7	wBB1	283.16	300.2	0.2	4.86	5.12	4.86	0.96
	wBB2		300.39	0.39	5.08	5.03	5.09	0.94
	wChao2		296.82	-3.18	4.69	4.58	5.66	0.9
	BB		329.86	29.86	17.54	19.58	34.62	0.96

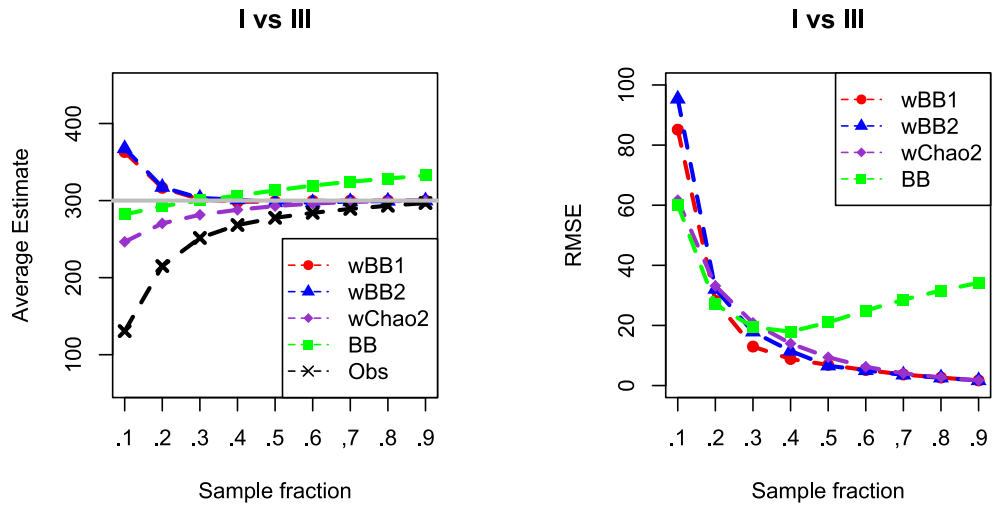


Figure 4.5 群落一為同質模型，群落二為 Broken-stick 模型之情況下的 AVG Estimate (左圖) 與 RMSE (右圖)估計結果。 $S_1 = S_2 = 400$ ， $S_{12} = 300$ 。

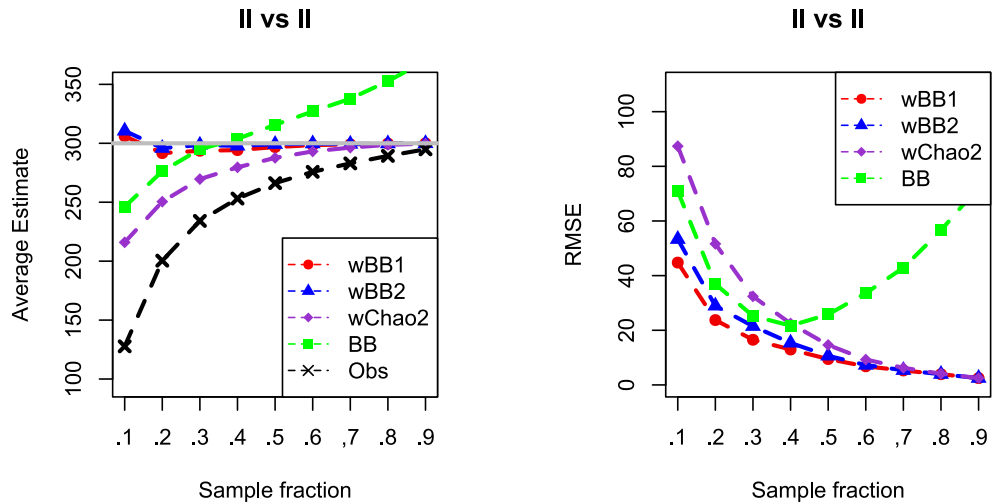


Figure 4.6 兩群落皆為均勻模型之情況下的 AVG Estimate (左圖) 與 RMSE (右圖)估計結果。 $S_1 = S_2 = 400$ ， $S_{12} = 300$ 。

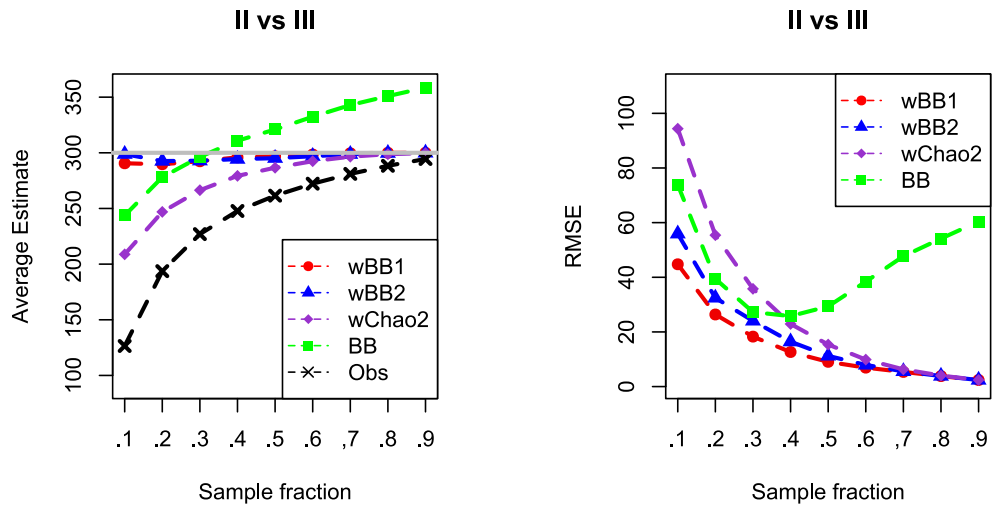


Figure 4.7 群落一為均勻模型，群落二為 Broken-stick 模型之情況下的 AVG Estimate (左圖) 與 RMSE (右圖)估計結果。 $S_1 = S_2 = 400$ ， $S_{12} = 300$ 。

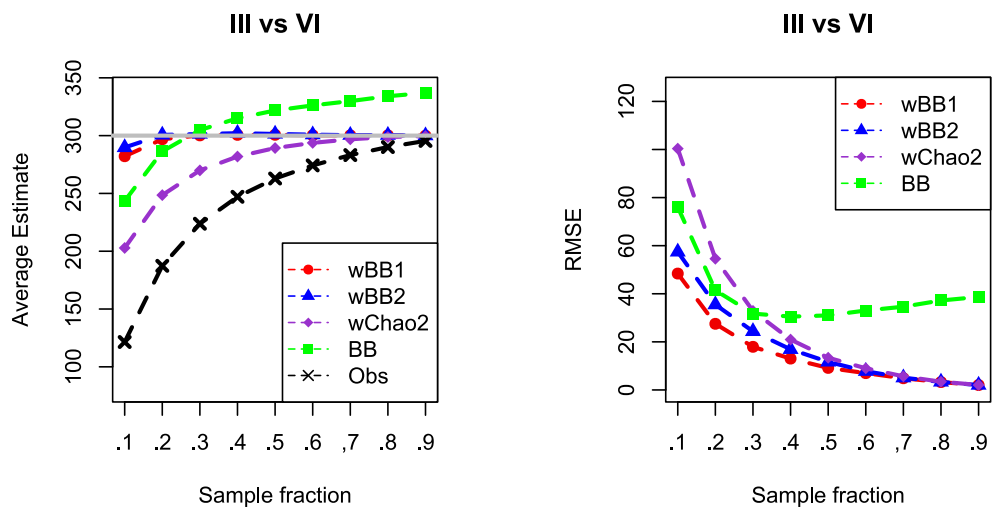


Figure 4.8 群落一為 Broken-stick 模型，群落二為對數常數模型之情況下的 AVG Estimate (左圖) 與 RMSE (右圖)估計結果。 $S_1 = S_2 = 400$ ， $S_{12} = 300$ 。

4.6 真實資料模擬

除了使用模擬母體進行重複抽樣的模擬之外，亦使用兩筆真實數據做為母體進行 $R = 1000$ 次的重複抽樣，以評斷估計式的結果優劣。

4.6.1 Australia bird

資料描述

針對澳洲東南部半乾旱地區的尤加利樹林地，量化三個氣候時期 178 個地點的極端氣候對鳥類物種出現 (species occurrence)、物種豐富度 (species richness) 和出現率 (incidence) 的影響——聖嬰現象相關的乾旱 (Big Dry)、反聖嬰現象破壞性降雨 (Big Wet)，以及反聖嬰現象事件三年後 (Post-Big Wet)。並使用 Big Dry 作為群落一使用 (Mean = 0.05, CV = 1.65)，其中共存在 55 種物種；Big Wet 作為群落二使用 (Mean = 0.13, CV = 1.53)，其中共存在 65 種物種。Post-Big Wet 作為群落三使用 (Mean = 0.12, CV = 1.61)，其中共存在 56 種物種。

模擬結果

在該筆資料中使用取後放回的估計方法下，假設該筆資料為母體，並抽取其中的區塊做為樣本所使用。使用 *BB* 的估計結果與真值的差異，明顯表現較 *Pan* 佳。在估計式評估標準上，使用 RMSE 與 95% CI Coverage 進行評估，在兩種評估標準的結果表明，在小樣本中，RMSE 在 *BB* 估計方式中的評估結果劣於 *Pan*；而在 95% CI Coverage 的模型評估上，兩者並無明顯差異，值得注意的是在本資料模擬中，隨著抽樣比例的增加，95% CI Coverage 的結果會隨之下降。

Table 4.9 取後放回 Australia bird 資料集中的 Big Dry 與 Big Wet 估計結果。

sample size	Estimator	Obs	AVG Estimate	Bias	Sample SE	Est. SD	RMSE	95% CI Coverage
20	BB	25.54	40.84	-8.16	15.08	12.58	17.13	0.8
	Pan		37.54	-11.46	10.53	8.79	15.56	0.81
60	BB	37.39	46.03	-2.97	9.69	8.18	10.13	0.75
	Pan		44.16	-4.84	6.97	5.89	8.48	0.77
100	BB	41.48	47.89	-1.11	8.92	6.78	8.98	0.7
	Pan		46.44	-2.56	6.49	4.94	6.97	0.72
140	BB	43.66	48.91	-0.09	7.21	6.13	7.21	0.69
	Pan		47.72	-1.28	5.35	4.46	5.49	0.71

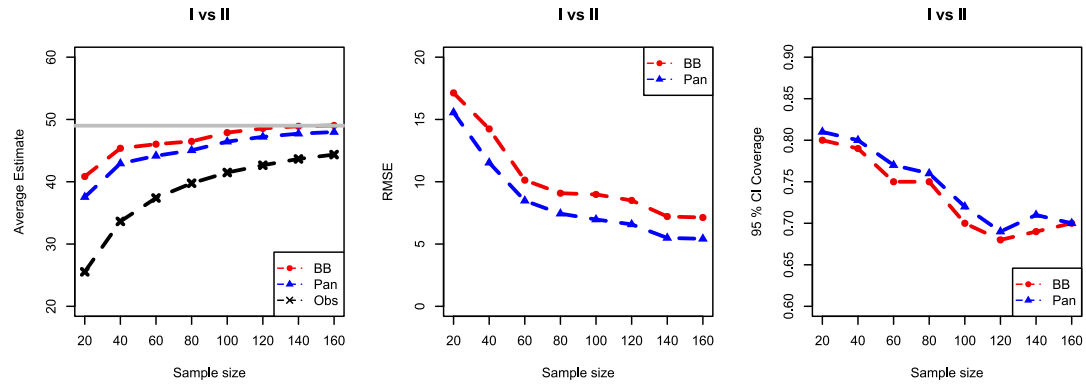


Figure 4.9 取後放回 Australia bird 資料集中的 Big Dry 與 Big Wet 估計結果。

Table 4.10 取後放回 Australia bird 資料集中的 Big Dry 與 Post-Big Wet 估計結果。

sample size	Estimator	Obs	AVG Estimate	Bias	Sample SE	Est. SD	RMSE	95% CI Coverage
20	BB	24.27	40.19	-11.81	14.49	13.1	18.69	0.82
	Pan		36.69	-15.31	10.14	9.13	18.36	0.84
60	BB	37.16	47.37	-4.63	10.54	9.4	11.51	0.8
	Pan		45.27	-6.73	7.85	6.67	10.33	0.79
100	BB	41.93	49.97	-2.03	9.39	8	9.6	0.76
	Pan		48.09	-3.91	6.9	5.76	7.93	0.75
140	BB	44.6	51.59	-0.41	8.53	7.41	8.53	0.77
	Pan		49.88	-2.12	6.22	5.31	6.56	0.76

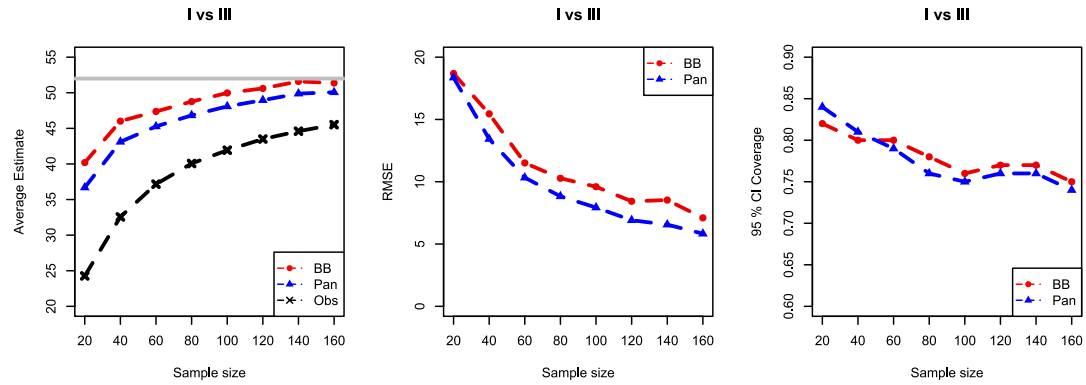


Figure 4.10 取後放回 Australia bird 資料集中的 Big Dry 與 Post-Big Wet 估計結果。

Table 4.11 取後放回 Australia bird 資料集中的 Big Wet 與 Post-Big Wet 估計結果。

sample size	Estimator	Obs	AVG Estimate	Bias	Sample SE	Est. SD	RMSE	95% CI Coverage
20	BB	30.82	45.86	-10.14	14.51	12.74	17.7	0.8
	Pan		42.88	-13.12	10.5	8.99	16.8	0.81
60	BB	42.91	51.52	-4.48	9.09	8.42	10.13	0.8
	Pan		49.88	-6.12	6.76	6.13	9.12	0.8
100	BB	47.31	54.12	-1.88	8.64	7.23	8.84	0.76
	Pan		52.73	-3.27	6.3	5.29	7.1	0.77
140	BB	49.53	55.47	-0.53	7.6	6.77	7.62	0.74
	Pan		54.15	-1.85	5.59	4.97	5.88	0.75

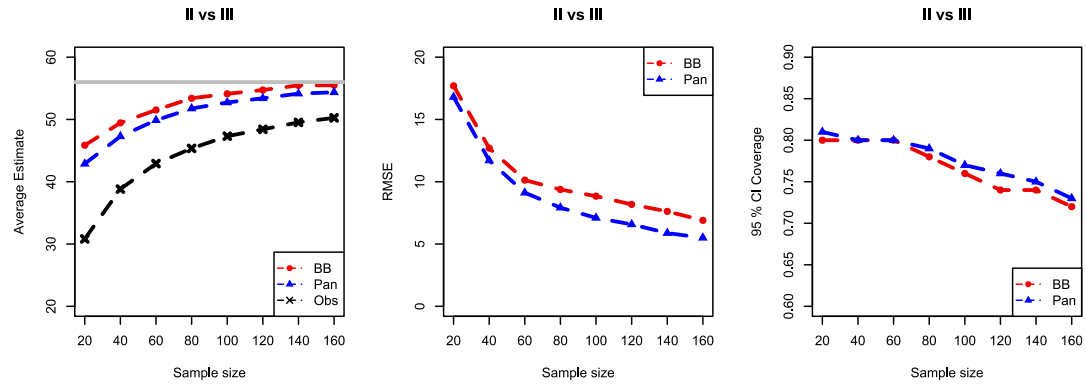


Figure 4.11 取後放回 Australia bird 資料集中的 Big Wet 與 Post-Big Wet 估計結果。

4.6.2 BCI

資料描述

本資料集中，針對 1981-2016 年間對 Barro Colorado Island 進行八次調查，紀錄該地區樹種與莖幹的生長狀況。將該地區分為 1250 個區塊進行調查，每塊區塊的大小為 400 平方公尺。以第一次與第八次的調查結果作為兩群落之母體資料，並使用母體的 10%、30%、50% 以及 70% 作為抽樣樣本大小。在兩母體中，第一次調查作為群落一 (Mean = 0.16, CV = 1.41)，第八次調查作為群落二 (Mean = 0.16, CV = 1.45)，在群落一中，包含了 307 種物種，而群落二中則擁有 299 種物種，兩群落的共同物種為 284 種。

模擬結果

在該筆資料中使用取後不放回的估計方法下，假設該筆資料為母體，並抽取其中的區塊做為樣本所使用。在模擬結果中，使用 *wBB2* 的估計方法在小樣本中與真值差異最小。在抽樣比例為 0.1 時平均的樣本標準差估計 (Average estimated SE)，與樣本標準差 (Sample SE) 存在較大的差異，隨著抽樣比例增加差異逐漸減小。在估計式評估標準上，使用 RMSE 與 95% CI Coverage 進行評估，在兩種評估標準的結果表明，在小樣本中，*wBB1* 與 *wBB2* 的估計明顯較 *wChao2* 的結果較好，但在隨著樣本變大，RMSE 在三種估計方式中的評估結果沒有明顯差異；而在 95% CI Coverage 的模型評估上，*wBB1* 在小樣本中的結果明顯較其他兩者好。

Table 4.12 取後不放回 BCI 資料集中的兩群落估計結果。

q	Estimator	Obs	AVG Estimate	Bias	Sample SE	Est. SD	RMSE	95% CI Coverage
0.1	wBB1	225.24	272.6	-11.4	24.29	26.06	26.82	0.97
	wBB2		297.63	13.63	47.35	34.37	49.25	0.92
	wChao2		253.31	-30.69	19.56	13.09	36.38	0.81
	BB		263.89	-20.11	26.59	21.9	33.33	0.85
0.3	wBB1	245.65	281.82	-2.18	17.38	15.93	17.51	0.95
	wBB2		291.12	7.12	24.41	18.74	25.41	0.9
	wChao2		266.94	-17.06	12.53	9.38	21.17	0.83
	BB		279.86	-4.14	23.86	19.53	24.2	0.84
0.5	wBB1	256.57	282.64	-1.36	11.78	10.51	11.85	0.93
	wBB2		287.81	3.81	14.91	11.69	15.38	0.88
	wChao2		272.93	-11.07	9.05	7.26	14.3	0.84
	BB		285.87	1.87	20.04	17.11	20.12	0.85
0.7	wBB1	263.97	284.41	0.41	8.81	7.86	8.82	0.92
	wBB2		286.98	2.98	10.12	8.19	10.55	0.89
	wChao2		277.76	-6.24	7.26	6.06	9.57	0.85
	BB		293.78	9.78	20.78	17.52	22.95	0.85

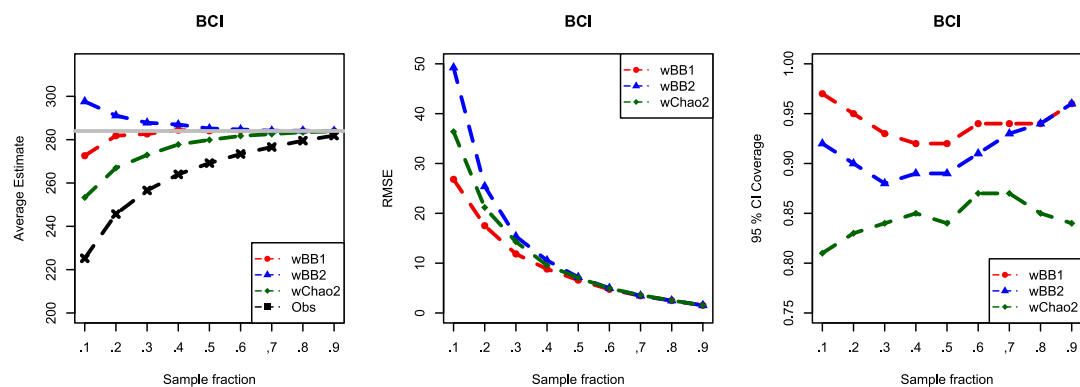


Figure 4.12 取後不放回 BCI 資料集中的兩群落估計結果。

4.7 討論

第5章 實例分析