

### 3.2.4 カルマンフィルタ (KF) の数学的導出

まずは予測ステップの導出から始める。1 ステップ前の信念  $bel(x_{t-1})$  に、制御  $u_t$  が加わったあとの信念  $\overline{bel}(x_t)$  が計算できる。

$$\overline{bel}(x_t) = \int p(x_t|x_{t-1}, u_t) bel(x_{t-1}) dx_{t-1} \quad (1)$$

$$= \int \mathcal{N}(x_t; A_t x_{t-1} + B_t u_t, R_t) \mathcal{N}(x_{t-1}; \mu_{t-1}, \Sigma_{t-1}) dx_{t-1} \quad (2)$$

ただし、 $\mathcal{N}(x; \mu, \Sigma)$  は平均  $\mu$ 、共分散行列  $\Sigma$  のガウス分布の  $x$  における確率密度を表す。具体的にガウス分布で表示すると

$$\overline{bel}(x_t) = \int \mathcal{N}(x_t; A_t x_{t-1} + B_t u_t, R_t) \mathcal{N}(x_{t-1}; \mu_{t-1}, \Sigma_{t-1}) dx_{t-1} \quad (3)$$

$$= \eta \int \exp\left[-\frac{1}{2}(x_t - (A_t x_{t-1} + B_t u_t))^T R_t^{-1} (x_t - (A_t x_{t-1} + B_t u_t))\right] \\ \exp\left[-\frac{1}{2}(x_{t-1} - \mu_{t-1})^T \Sigma_{t-1}^{-1} (x_{t-1} - \mu_{t-1})\right] dx_{t-1} \quad (4)$$

指数関数の積は肩の和を取ればよい。なので以下のように関数  $L_t$  を使って書き換えられる。

$$\overline{bel}(x_t) = \eta \int \exp[-L_t] dx_{t-1} \quad (5)$$

$$L_t = \frac{1}{2}(x_t - (A_t x_{t-1} + B_t u_t))^T R_t^{-1} (x_t - (A_t x_{t-1} + B_t u_t)) \\ + \frac{1}{2}(x_{t-1} - \mu_{t-1})^T \Sigma_{t-1}^{-1} (x_{t-1} - \mu_{t-1}) \quad (6)$$

$x_{t-1}$  に関する積分を実行するために、 $L_t$  を  $x_{t-1}$  によらない項のみを含む部分  $L_t(x_t)$  と、 $x_{t-1}$  による項も含む部分  $L_t(x_{t-1}, x_t)$  に分解する ( $L_t(x_{t-1}, x_t)$  は  $x_{t-1}$  によらない項を含んでもよい、なので一意な分解ではない)。こうすると、この積分は

$$\overline{bel}(x_t) = \eta \exp[-L_t(x_t)] \int \exp[-L_t(x_{t-1}, x_t)] dx_{t-1} \quad (7)$$

$$(8)$$

とかける。この積分だが、 $L_t$  が  $x_{t-1}$  に関して 2 次式だったことを思い出すと、 $x_{t-1}$  に関して「平方完成」すればある  $x_{t-1}$  によらないベクトル  $\xi$  と行列  $\Psi$  を用いて、 $\frac{1}{2}(x_{t-1} - \xi)^T \Psi^{-1} (x_{t-1} - \xi)$  の形に変形できそうである。この形に変形できれば、 $\exp L_t(x_{t-1}, x_t)$  の積分は多変量正規分布  $\mathcal{N}(x_{t-1}; \xi, \Psi)$  の規格化定数を求める積分と全く同じになり、特に  $x_t$  によらない定数になる。

この変形を行うため、あえて  $L_t(x_{t-1}, x_t)$  は  $x_{t-1}$  によらない項を含めても良いことにしている。

$\exp L_t(x_{t-1}, x_t)$  の積分を多変量正規分布  $\mathcal{N}(x_{t-1}; \xi, \Psi)$  の積分の形にもっていくために、この分布  $\exp L_t(x_{t-1}, x_t)$  の頂点の座標  $\xi$  を求める。頂点  $\xi$  では、 $L_t(x_{t-1}, x_t)$  はベクトル  $x_{t-1}$  のあらゆる方向に対して微分係数が

0 になっている。なので、 $L_t(x_{t-1}, x_t)$  を  $x_{t-1}$  の各成分に関して微分したもの（この操作を「 $L_t$  を  $x_{t-1}$  で微分」という）がすべて 0 となっている。

$x_{t-1}$  の第  $i$  成分を  $x_{i,t-1}$  とし、実際にこの計算を実行すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_t}{\partial x_{i,t-1}} &= \frac{\partial}{\partial x_{i,t-1}} \frac{1}{2} (x_t - (A_t x_{t-1} + B_t u_t))^T R_t^{-1} (x_t - (A_t x_{t-1} + B_t u_t)) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x_{i,t-1}} \frac{1}{2} (x_{t-1} - \mu_{t-1})^T \Sigma_{t-1}^{-1} (x_{t-1} - \mu_{t-1}) \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} &= \left( -\frac{1}{2} \frac{\partial A_{\alpha\beta} x_{\beta,t-1}}{\partial x_{i,t-1}} \right) R_{\alpha\gamma,t}^{-1} (x_{\gamma,t} - (A_{\gamma\delta,t} x_{\delta,t-1} + B_{\gamma\delta,t} u_{\delta,t})) \\ &\quad + (x_{\alpha,t} - (A_{\alpha\beta,t} x_{\beta,t-1} + B_{\alpha\beta,t} u_{\beta,t})) R_{\alpha\gamma,t}^{-1} \left( -\frac{1}{2} \frac{\partial A_{\gamma\delta} x_{\delta,t-1}}{\partial x_{i,t-1}} \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{\partial x_{\alpha,t-1}}{\partial x_{i,t-1}} \Sigma_{\alpha\gamma,t-1}^{-1} (x_{\gamma,t-1} - \mu_{\gamma,t-1}) \\ &\quad - \frac{1}{2} (x_{\alpha,t-1} - \mu_{\alpha,t-1}) \Sigma_{\alpha\gamma,t-1}^{-1} \frac{\partial x_{\gamma,t-1}}{\partial x_{i,t-1}} \quad (\text{積の微分}) \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{2} A_{\alpha i} R_{\alpha\gamma,t}^{-1} (x_{\gamma,t} - (A_{\gamma\delta,t} x_{\delta,t-1} + B_{\gamma\delta,t} u_{\delta,t})) \\ &\quad - \frac{1}{2} (x_{\alpha,t} - (A_{\alpha\beta,t} x_{\beta,t-1} + B_{\alpha\beta,t} u_{\beta,t})) R_{\alpha\gamma,t}^{-1} A_{\gamma i} \\ &\quad - \frac{1}{2} \Sigma_{i,\gamma,t-1}^{-1} (x_{\gamma,t-1} - \mu_{\gamma,t-1}) - \frac{1}{2} (x_{\alpha,t-1} - \mu_{\alpha,t-1}) \Sigma_{\alpha i,t-1}^{-1} \end{aligned} \quad (11)$$

(微分すると  $\beta = i$  のような項しか残らない。クロネッカーのデルタを使うと  $\frac{\partial x_j}{\partial x_i} = \delta_{ij}$ )

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{2} A_{i\alpha}^T R_{\alpha\gamma,t}^{-1} (x_{\gamma,t} - (A_{\gamma\delta,t} x_{\delta,t-1} + B_{\gamma\delta,t} u_{\delta,t})) \\ &\quad - \frac{1}{2} (x_{\alpha,t} - (A_{\alpha\beta,t} x_{\beta,t-1} + B_{\alpha\beta,t} u_{\beta,t})) R_{\alpha\gamma,t}^{-1} A_{\gamma i} \\ &\quad - \frac{1}{2} \Sigma_{i,\gamma,t-1}^{-1} (x_{\gamma,t-1} - \mu_{\gamma,t-1}) - \frac{1}{2} (x_{\alpha,t-1} - \mu_{\alpha,t-1}) \Sigma_{\alpha i,t-1}^{-1} \quad (A_{ij}^T = A_{ji} \text{ より}) \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{2} A_{i\alpha}^T R_{\alpha\gamma,t}^{-1} (x_{\gamma,t} - (A_{\gamma\delta,t} x_{\delta,t-1} + B_{\gamma\delta,t} u_{\delta,t})) \\ &\quad - \frac{1}{2} A_{\gamma i} R_{\alpha\gamma,t}^{-1} (x_{\alpha,t} - (A_{\alpha\beta,t} x_{\beta,t-1} + B_{\alpha\beta,t} u_{\beta,t})) \\ &\quad - \frac{1}{2} \Sigma_{i\gamma,t-1}^{-1} (x_{\gamma,t-1} - \mu_{\gamma,t-1}) - \frac{1}{2} (x_{\alpha,t-1} - \mu_{\alpha,t-1}) \Sigma_{\alpha i,t-1}^{-1} \end{aligned} \quad (13)$$

(各成分はスカラーなので可換)

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{2} A_{i\alpha}^T R_{\alpha\gamma,t}^{-1} (x_{\gamma,t} - (A_{\gamma\delta,t} x_{\delta,t-1} + B_{\gamma\delta,t} u_{\delta,t})) \\ &\quad - \frac{1}{2} A_{i\gamma}^T R_{\alpha\gamma,t}^{-1} (x_{\alpha,t} - (A_{\alpha\beta,t} x_{\beta,t-1} + B_{\alpha\beta,t} u_{\beta,t})) \\ &\quad - \frac{1}{2} \Sigma_{i\gamma,t-1}^{-1} (x_{\gamma,t-1} - \mu_{\gamma,t-1}) - \frac{1}{2} \Sigma_{i\alpha,t-1}^{-1} (x_{\alpha,t-1} - \mu_{\alpha,t-1}) \end{aligned} \quad (14)$$

(共分散行列は対称なので添字を入れ替え、さらに  $A$  を転置。第四項も同様)

第一項と第二項は和に使われている添字が違うだけで、全く同じ項である。第三項、第四項についても同じである。結局

$$\frac{\partial L_t}{\partial x_{i,t-1}} = -A_{i\alpha}^T R_{\alpha\gamma,t}^{-1}(x_{\gamma,t} - (A_{\gamma\delta,t}x_{\delta,t-1} + B_{\gamma\delta,t}u_{\delta,t})) + \Sigma_{i\alpha}^{-1}(x_{\alpha,t-1} - \mu_{\alpha,t-1}) \quad (15)$$

が得られるので、行列とベクトルの積を計算してまとめてかくと

$$\frac{\partial L_t}{\partial x_{t-1}} = -A_t^T R_t^{-1}(x_t - (A_t x_{t-1} + B_t u_t)) + \Sigma_{t-1}^{-1}(x_{t-1} - \mu_{t-1}) \quad (16)$$

$L_t(x_{t-1}, x_t)$  はベクトル  $x_{t-1}$  のあらゆる方向に対して微分係数が 0 になっている点  $x_{t-1} = \xi$  を求めたかったのだから、上の式がゼロベクトルと等しいとした方程式を  $x_{t-1}$  に関して解けばよい。

実際に変形をはじめのまえにもうひとつ別の量を計算しておく。 $L_t(x_{t-1}, x_t) = (x_{t-1} - \xi)^T \Psi^{-1}(x_{t-1} - \xi)$  の形に変形する際のあらたな共分散行列  $\Psi$  だ。 $L_t(x_{t-1}, x_t) = \frac{1}{2}(x_{t-1} - \xi)^T \Psi^{-1}(x_{t-1} - \xi)$  に変形できることを仮定すると、この行列は以下のように計算できる

$$\Psi_{ij}^{-1} = \frac{\partial^2 L_t(x_{t-1}, x_t)}{\partial x_{i,t-1} \partial x_{j,t-1}} = \frac{\partial^2 L_t}{\partial x_{i,t-1} \partial x_{j,t-1}} \quad (17)$$

$$(L_t(x_t) \text{ は } x_{t-1} \text{ で微分してもゼロ}) \quad (18)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_{i,t-1} \partial x_{j,t-1}} (x_{t-1} - \xi)^T \Psi^{-1}(x_{t-1} - \xi) \quad (19)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_{i,t-1}} \Psi_{j\alpha}^{-1}(x_{\alpha,t-1} - \xi_\alpha) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_{i,t-1}} (x_{\alpha,t-1} - \xi_\alpha)^T \Psi_{\alpha j}^{-1} \quad (20)$$

$$= \frac{1}{2} (\Psi_{ij}^{-1} + \Psi_{ji}^{-1}) \quad (21)$$

$\Psi$  は定義から共分散行列で対称行列で、対称行列の逆行列はまた対称行列になる ( $1 = (AA^{-1})^T = (A^{-1})^T A$  だから、 $A^{-1} = (A^{-1})^T$ ) ので両辺は等しい。なので  $\Psi$  を求めるため、 $L_t$  をさらにもう一回微分する。

$$\frac{\partial^2 L_t}{\partial x_{t-1}^2} = \frac{\partial}{\partial x_{t-1}} - A_t^T R_t^{-1}(x_t - (A_t x_{t-1} + B_t u_t)) + \Sigma_{t-1}^{-1}(x_{t-1} - \mu_{t-1}) \quad (22)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_{t-1}} A_t^T R_t^{-1} A_t x_{t-1} + \frac{\partial}{\partial x_{t-1}} \Sigma_{t-1}^{-1} x_{t-1} \quad (23)$$

$$= A_t^T R_t^{-1} A_t + \Sigma_{t-1}^{-1} = \Psi_t^{-1} \quad (24)$$

それではいよいよ  $L_t(x_{t-1}, x_t)$  の  $x_{t-1}$  についてあらゆる方向に対して微分係数が 0 になっている点  $x_{t-1} = \xi$  を求める。

$$\frac{\partial L_t}{\partial x_{t-1}} = -A_t^T R_t^{-1}(x_t - (A_t x_{t-1} + B_t u_t)) + \Sigma_{t-1}^{-1}(x_{t-1} - \mu_{t-1}) = 0 \quad (25)$$

$$-A_t^T R_t^{-1} x_t + A_t^T R_t^{-1} A_t x_{t-1} + A_t^T R_t^{-1} B_t u_t + \Sigma_{t-1}^{-1} x_{t-1} - \Sigma_{t-1}^{-1} \mu_{t-1} = 0 \quad (26)$$

$$(A_t^T R_t^{-1} A_t + \Sigma_{t-1}^{-1}) x_{t-1} = A_t^T R_t^{-1} x_t - A_t^T R_t^{-1} B_t u_t + \Sigma_{t-1}^{-1} \mu_{t-1}$$

( $x_{t-1}$  に関する項を左辺にまとめた) (27)

$$\Psi_t x_{t-1}^{-1} x_{t-1} = A_t^T R_t^{-1} (x_t - B_t u_t) + \Sigma_{t-1}^{-1} \mu_{t-1} \quad (\Psi \text{ の定義}) \quad (28)$$

$$x_{t-1} = \Psi_t [A_t^T R_t^{-1} (x_t - B_t u_t) + \Sigma_{t-1}^{-1} \mu_{t-1}] \quad (29)$$

これで無事、 $L_t(x_{t-1}, x_t)$  としてほしい形が求まった。すなわち

$$L_t(x_{t-1}, x_t) \quad (30)$$

$$= \frac{1}{2}(x_{t-1} - \xi)^T \Psi_t^{-1}(x_{t-1} - \xi) \quad (31)$$

$$= \frac{1}{2}(x_{t-1} - \Psi_t[A_t^T R_t^{-1}(x_t - B_t u_t) + \Sigma_{t-1}^{-1} \mu_{t-1}])^T \Psi_t^{-1} \\ (x_{t-1} - \Psi_t[A_t^T R_t^{-1}(x_t - B_t u_t) + \Sigma_{t-1}^{-1} \mu_{t-1}]) \quad (32)$$

である。実際ここで求めた  $L_t(x_{t-1}, x_t)$  を使って  $L_t(x_t) = L_t - L_t(x_{t-1}, x_t)$  が  $x_{t-1}$  を含まない形になっているか確認しておく。本書の通りこれには具体的に計算してみてもよいが、 $\frac{\partial}{\partial x_{t-1}}[L_t - L_t(x_{t-1}, x_t)]$  が  $x_{t-1}$  に関して恒等的に 0 に等しいことを示す方法もある。

このノートでは  $\frac{\partial L_t}{\partial x_{t-1}}$  と  $\frac{\partial L_t(x_{t-1}, x_t)}{\partial x_{t-1}}$  が等しいことを示すことで、上記の事実を示す。 $\frac{\partial L_t}{\partial x_{t-1}}$  は前に計算したので、 $\frac{\partial L_t}{\partial x_{t-1}}$  を計算すればよい。

$$\frac{\partial L_t}{\partial x_{t-1}} = \frac{\partial}{\partial x_{t-1}} \frac{1}{2}(x_{t-1} - \xi)^T \Psi_t^{-1}(x_{t-1} - \xi) \quad (33)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\partial x_{t-1}}{\partial x_{t-1}}^T \Psi_t^{-1}(x_{t-1} - \xi) + \frac{1}{2}(x_{t-1} - \xi)^T \Psi_t^{-1} \frac{\partial x_{t-1}}{\partial x_{t-1}} \quad (\text{積の微分、ch0 のノート参照}) \quad (34)$$

$$= \Psi_t^{-1}(x_{t-1} - \xi) \quad (\Psi \text{ は対称行列}) \quad (35)$$

$$= \Psi_t^{-1} x_{t-1} - \Psi_t^{-1} \Psi_t [A_t^T R_t^{-1}(x_t - B_t u_t) + \Sigma_{t-1}^{-1} \mu_{t-1}] \quad (\xi \text{ の定義}) \quad (36)$$

$$= (A_t^T R_t^{-1} A_t + \Sigma_{t-1}^{-1}) x_{t-1} - A_t^T R_t^{-1}(x_t - B_t u_t) - \Sigma_{t-1}^{-1} \mu_{t-1} \quad (\Psi \text{ の定義}) \quad (37)$$

$$= -A_t^T R_t^{-1}(x_t - (A_t x_{t-1} + B_t u_t)) + \Sigma_{t-1}^{-1}(x_{t-1} - u_{t-1}) \quad (38)$$

これは  $\frac{\partial L_t}{\partial x_{t-1}}$  と等しいので、 $\frac{\partial}{\partial x_{t-1}}[L_t - L_t(x_{t-1}, x_t)]$  は 0(定数関数) となる。よって  $L_t - L_t(x_{t-1}, x_t)$  は  $x_{t-1}$  によらない。

これで無事に  $L_t$  を分解できた。信念の計算に戻ると  $\int \exp L_t(x_{t-1}, x_t) dx_{t-1}$  を定数にとることができたので

$$\overline{bel}(x_t) = \eta \exp[-L_t(x_t)] \int \exp[-L_t(x_{t-1}, x_t)] dx_{t-1} \quad (39)$$

$$= \eta \exp[-L_t(x_t)] \quad (40)$$

と簡単に書き直せる。1 行目と 2 行目で  $\eta$  を取り替えている。信念の計算には  $L_t(x_t)$  が必要である。せっかくなので  $L_t$  を愚直に展開して  $L_t(x_{t-1}, x_t)$  を引く以外の方法で計算してみる。

$L_t(x_t)$  は  $x_{t-1}$  によらないので  $L_t - L_t(x_{t-1}, x_t)$  はどの  $x_{t-1}$  で計算してもよい。なので  $x_{t-1} = \xi$  で計算すると、 $L_t(x_{t-1}, x_t) = 0$  なので、展開して差し引くまでもなく  $L_t(x_t) = L_t$  になる。つまり、 $L_t$  に  $x_{t-1} = \xi$  を代入すればよい。

$$L_t(x_t) = \frac{1}{2}(x_t - (A_t\xi + B_tu_t))^T R_t^{-1}(x_t - (A_t\xi + B_tu_t)) + \frac{1}{2}(\xi - \mu_{t-1})^T \Sigma_{t-1}^{-1}(\xi - \mu_{t-1}) \quad (41)$$

$\xi$  は  $x_t$  に依存していることに注意しなくてはならないが、この式は  $x_t$  に関して 2 次式なので、 $L_t(x_{t-1}, x_t)$  と同様に  $L_t(x_t)$  も  $\frac{1}{2}(x_t - \bar{\mu}_t)^T \bar{\Sigma}_t^{-1}(x_t - \bar{\mu}_t)$  の形に変形できる。 $L_t(x_{t-1}, x_t)$  にしたのと同様の手順で  $\bar{\mu}_t, \bar{\Sigma}_t$  を求める。まず  $\bar{\mu}_t$  を求めるために  $L_t(x_t)$  を  $x_t$  で微分する。

$$\frac{\partial L_t(x_t)}{\partial x_t} = \frac{\partial}{\partial x_t} \frac{1}{2}(x_t - (A_t\xi + B_tu_t))^T R_t^{-1}(x_t - (A_t\xi + B_tu_t)) + \frac{\partial}{\partial x_t} \frac{1}{2}(\xi - \mu_{t-1})^T \Sigma_{t-1}^{-1}(\xi - \mu_{t-1}) \quad (42)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_t} \frac{1}{2}(x_t^T - \xi^T A_t^T - u_t^T B_t^T)^T R_t^{-1}(x_t - A_t\xi - B_tu_t) + \frac{\partial}{\partial x_t} \frac{1}{2}(\xi - \mu_{t-1})^T \Sigma_{t-1}^{-1}(\xi - \mu_{t-1}) \quad (43)$$

$$= \frac{1}{2}R_t^{-1}(x_t - (A_t\xi + B_tu_t)) - \frac{1}{2}\frac{\partial \xi^T}{\partial x_t} A_t^T R_t^{-1}(x_t - (A_t\xi + B_tu_t)) - \frac{1}{2}(x_t - (A_t\xi + B_tu_t))^T R_t^{-1} - \frac{1}{2}(x_t - (A_t\xi + B_tu_t))^T R_t^{-1} A_t \frac{\partial \xi}{\partial x_t} + \frac{\partial \xi^T}{\partial x_t} \frac{1}{2}\Sigma_{t-1}^{-1}(\xi - \mu_{t-1}) + \frac{1}{2}(\xi - \mu_{t-1})^T \Sigma_{t-1}^{-1} \frac{\partial \xi}{\partial x_t} \quad (\text{積の微分}) \quad (44)$$

$$= R_t^{-1}(x_t - (A_t\xi + B_tu_t)) - \frac{1}{2}A_t \frac{\partial \xi}{\partial x_t} R_t^{-1}(x_t - (A_t\xi + B_tu_t)) - \frac{1}{2}(x_t - (A_t\xi + B_tu_t))^T R_t^{-1} A_t \frac{\partial \xi}{\partial x_t} + \frac{\partial \xi^T}{\partial x_t} \frac{1}{2}\Sigma_{t-1}^{-1}(\xi - \mu_{t-1}) + \frac{1}{2}(\xi - \mu_{t-1})^T \Sigma_{t-1}^{-1} \frac{\partial \xi}{\partial x_t} \quad (R \text{ は対称行列}) \quad (45)$$

ここで、

$$\xi = \Psi_t[A_t^T R_t^{-1}(x_t - B_tu_t) + \Sigma_{t-1}^{-1}\mu_{t-1}] \quad (46)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x_t} = \Psi_t A_t^T R_t^{-1} \quad (47)$$

$$\frac{\partial \xi^T}{\partial x_t} = R_t^{-1} A_t \Psi_t \quad (48)$$

である。特に  $R_t^{-1} A_t \Psi_t A_t^T R_t^{-1}$  は対称行列であることに注意すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_t(x_t)}{\partial x_t} &= R_t^{-1}(x_t - (A_t\xi + B_tu_t)) - R_t^{-1} A_t \Psi_t A_t^T R_t^{-1}(x_t - (A_t\xi + B_tu_t)) \\ &\quad + R_t^{-1} A_t \Psi_t \Sigma_{t-1}^{-1}(\xi - \mu_{t-1}) \quad (\text{対称な行列を整理。} x^T A^T = Ax \text{ を用いた}) \end{aligned} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} &= [R_t^{-1} - R_t^{-1} A_t \Psi_t A_t^T R_t^{-1}](x_t - B_tu_t) - R_t^{-1} A_t \Psi_t \Sigma_{t-1}^{-1} \mu_{t-1} \\ &\quad - [R_t^{-1} A_t - R_t^{-1} A_t \Psi_t A_t^T R_t^{-1} A_t + R_t^{-1} A_t \Psi_t \Sigma_{t-1}^{-1}] \xi \quad (\text{項を並び替え}) \end{aligned} \quad (50)$$

実はこの  $\xi$  の係数はゼロである。ここだけ計算すると

$$[R_t^{-1}A_t - R_t^{-1}A_t\Psi_tA_t^TR_t^{-1}A_t + R_t^{-1}A_t\Psi_t\Sigma_{t-1}^{-1}] \quad (51)$$

$$= R_t^{-1}A_t[I - \Psi_tA_t^TR_t^{-1}A_t + \Psi_t\Sigma_{t-1}^{-1}] \quad (52)$$

$$= R_t^{-1}A_t[I - \Psi_t(A_t^TR_t^{-1}A_t + \Sigma_{t-1}^{-1})] \quad (53)$$

$$= R_t^{-1}A_t[I - \Psi_t\Psi_t^{-1}] = 0 \quad (54)$$

なので

$$\frac{\partial L_t(x_t)}{\partial x_t} = [R_t^{-1} - R_t^{-1}A_t\Psi_tA_t^TR_t^{-1}](x_t - B_tu_t) - R_t^{-1}A_t\Psi_t\Sigma_{t-1}^{-1}\mu_{t-1} \quad (55)$$

$[R_t^{-1} - R_t^{-1}A_t\Psi_tA_t^TR_t^{-1}]$  について、 $\Psi = (A_t^TR_t^{-1}A_t + \Sigma_{t-1}^{-1})^{-1}$  を代入し Sherman-Morrison 公式を適用する。Sherman-Morrison 公式は

$$(R + PQQ^T)^{-1} = R^{-1} - R^{-1}P(Q^{-1} + P^TR^{-1}P)^{-1}P^TR^{-1} \quad (56)$$

である。 $R = R_t, P = A_t, Q = \Sigma_{t-1}$  とすることで、 $[R_t^{-1} - R_t^{-1}A_t\Psi_tA_t^TR_t^{-1}] = (R_t + A_t\Sigma_{t-1}A_t^T)^{-1}$  と変形できる。

$$\frac{\partial L_t(x_t)}{\partial x_t} = (R_t + A_t\Sigma A_t^T)^{-1}(x_t - B_tu_t) - R_t^{-1}A_t\Psi_t\Sigma_{t-1}^{-1}\mu_{t-1} \quad (57)$$

この微分係数が 0 に等しくなるときの  $x_t$  がもともと求めたいものだった。実際計算すると

$$(R_t + A_t\Sigma A_t^T)^{-1}(x_t - B_tu_t) - R_t^{-1}A_t\Psi_t\Sigma_{t-1}^{-1}\mu_{t-1} = 0 \quad (58)$$

$$x_t = B_tu_t + (R_t + A_t\Sigma A_t^T)R_t^{-1}A_t\Psi_t\Sigma_{t-1}^{-1}\mu_{t-1}$$

$$(\text{両辺に } (R_t + A_t\Sigma A_t^T) \text{ を左からかけて移項}) \quad (59)$$

$$x_t = B_tu_t + (R_t + A_t\Sigma_{t-1}A_t^T)R_t^{-1}A_t(A_t^TR_t^{-1}A_t + \Sigma_{t-1}^{-1})^{-1}\Sigma_{t-1}^{-1}\mu_{t-1} \quad (60)$$

$$x_t = B_tu_t + (A_t + A_t\Sigma_{t-1}A_t^TR_t^{-1}A_t)(A_t^TR_t^{-1}A_t + \Sigma_{t-1}^{-1})^{-1}\Sigma_{t-1}^{-1}\mu_{t-1} \quad (61)$$

$$x_t = B_tu_t + (A_t + A_t\Sigma_{t-1}A_t^TR_t^{-1}A_t)(\Sigma_{t-1}A_t^TR_t^{-1}A_t + \Sigma_{t-1}\Sigma_{t-1}^{-1})^{-1}\mu_{t-1}$$

$$((AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \text{ の性質を利用}) \quad (62)$$

$$x_t = B_tu_t + A_t(I + \Sigma_{t-1}A_t^TR_t^{-1}A_t)(\Sigma_{t-1}A_t^TR_t^{-1}A_t + I)^{-1}\mu_{t-1} \quad (63)$$

$$x_t = B_tu_t + A_t\mu_{t-1} = \bar{\mu}_t \quad (64)$$

予測ステップの導出の最後は  $\bar{\Sigma}_t$  の計算である。これは  $\Psi$  を計算したときと同じ議論で、 $L_t(x_t)$  の 2 階

微分の逆行列になる。2 階微分の計算は以下の通り

$$\frac{\partial L_t(x_t)}{\partial x_t} = (R_t + A_t \Sigma_{t-1} A_t^T)^{-1} (x_t - B_t u_t) - R_t^{-1} A_t \Psi_t \Sigma_{t-1}^{-1} \mu_{t-1} \quad (65)$$

$$\frac{\partial^2 L_t(x_t)}{\partial x_t^2} = (R_t + A_t \Sigma_{t-1} A_t^T)^{-1} = \bar{\Sigma}_t^{-1} \quad (66)$$

これで予測ステップの信念の更新を導けた。