3.2.4 カルマンフィルタ (KF) の数学的導出

まずは予測ステップの導出から始める。1 ステップ前の信念 $bel(x_{t-1})$ に、制御 u_t が加わったあとの信念 $\overline{bel}(x_t)$ が計算できる。

$$\begin{aligned}\overline{bel}(x_t) &= \int p(x_t|x_{t-1},u_t)bel(x_{t-1})dx_{t-1} &(1)\\ &= \int \mathcal{N}(x_t;A_tx_{t-1}+B_tu_t,R_t)\mathcal{N}(x_{t-1};\mu_{t-1},\Sigma_{t-1})dx_{t-1} &(2)\end{aligned}$$

ただし、$\mathcal{N}(x;\mu,\Sigma)$ は平均 μ、共分散行列 Σ のガウス分布の x における確率密度を表す。具体的にガウス分布で表示すると

$$\begin{aligned}\overline{bel}(x_t) &= \int \mathcal{N}(x_t;A_tx_{t-1}+B_tu_t,R_t)\mathcal{N}(x_{t-1};\mu_{t-1},\Sigma_{t-1})dx_{t-1} &(3)\\ &= \eta\int \exp[-\frac{1}{2}(x_t-(A_tx_{t-1}+B_tu_t))^TR_t^{-1}(x_t-(A_tx_{t-1}+B_tu_t))]\\ &\qquad \exp[-\frac{1}{2}(x_{t-1}-\mu_{t-1})^T\Sigma^{-1}(x_{t-1}-\mu_{t-1})]dx_{t-1} &(4)\end{aligned}$$

指数関数の積は肩の和を取ればよい。なので以下のように関数 L_t を使って書き換えられる。

$$\begin{aligned}\overline{bel}(x_t) &= \eta\int \exp[-L_t]dx_{t-1} &(5)\\ L_t &= \frac{1}{2}(x_t-(A_tx_{t-1}+B_tu_t))^TR_t^{-1}(x_t-(A_tx_{t-1}+B_tu_t))\\ &\qquad +\frac{1}{2}(x_{t-1}-\mu_{t-1})^T\Sigma^{-1}(x_{t-1}-\mu_{t-1}) &(6)\end{aligned}$$

x_{t-1} に関する積分を実行するために、L_t を x_{t-1} によらない項のみを含む部分 $L_t(x_t)$ と、x_{t-1} による項も含む部分 $L_t(x_{t-1},x_t)$ に分解する（$L_t(x_{t-1},x_t)$ は x_{t-1} によらない項を含んでもよい、なので一意な分解ではない)。こうすると、この積分は

$$\begin{aligned}\overline{bel}(x_t) &= \eta L_t(x_t)\int \exp L_t(x_{t-1},x_t)dx_{t-1} &(7)\\ & &(8)\end{aligned}$$

とかける。この積分だが、L_t が x_{t-1} に関して 2 次式だったことを思い出すと、x_{t-1} に関して「平方完成」すればある x_{t-1} によらないベクトル ξ と行列 Ψ を用いて、$\frac{1}{2}(x_{t-1}-\xi)^T\Psi^{-1}(x_{t-1}-\xi)$ の形に変形できそうである。この形に変形できれば、$\exp L_t(x_{t-1},x_t)$ の積分は多変量正規分布 $\mathcal{N}(x_{t-1};\xi,\Psi)$ の規格化定数を求める積分と全く同じになり、特に x_t によらない定数になる。

この変形を行うため、あえて $L_t(x_{t-1},x_t)$ は x_{t-1} によらない項を含めても良いことにしている。

$\exp L_t(x_{t-1},x_t)$ の積分を多変量正規分布 $\mathcal{N}(x_{t-1};\xi,\Psi)$ の積分の形にもっていくために、この分布 $\exp L_t(x_{t-1},x_t)$ の頂点の座標 ξ を求める。頂点 ξ では、$L_t(x_{t-1},x_t)$ はベクトル x_{t-1} のあらゆる方向に対して微分係数が

0 になっている。なので、$L_t(x_{t-1}, x_t)$ を x_{t-1} の各成分に関して微分したもの（この操作を「L_t を x_{t-1} で微分」という）がすべて 0 となっている。

x_{t-1} の第 i 成分を $x_{i,t-1}$ とし、実際にこの計算を実行すると

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L_t}{\partial x_{i,t-1}} &= \frac{\partial}{\partial x_{i,t-1}}\frac{1}{2}(x_t-(A_t x_{t-1}+B_t u_t))^T R_t^{-1}(x_t-(A_t x_{t-1}+B_t u_t)) \\
&\qquad + \frac{\partial}{\partial x_{i,t-1}}\frac{1}{2}(x_{t-1}-\mu_{t-1})^T \Sigma_{t-1}^{-1}(x_{t-1}-\mu_{t-1}) \qquad (9) \\
&= \left(-\frac{1}{2}\frac{\partial A_{\alpha\beta}x_{\beta,t-1}}{\partial x_{i,t-1}}\right) R^{-1}_{\alpha\gamma,t}(x_{\gamma,t}-(A_{\gamma\delta,t}x_{\delta,t-1}+B_{\gamma\delta,t}u_{\delta,t})) \\
&\quad +(x_{\alpha,t}-(A_{\alpha\beta,t}x_{\beta,t-1}+B_{\alpha\beta,t}u_{\beta,t})R^{-1}_{\alpha\gamma,t}\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial A_{\gamma\delta}x_{\delta,t-1}}{\partial x_{i,t-1}}\right) \\
&\quad -\frac{1}{2}\frac{\partial x_{\alpha,t-1}}{\partial x_{i,t-1}}\Sigma^{-1}_{\alpha\gamma,t-1}(x_{\gamma,t-1}-\mu_{\gamma,t-1}) \\
&\quad -\frac{1}{2}(x_{\alpha,t-1}-\mu_{\alpha,t-1})\Sigma^{-1}_{\alpha\gamma,t-1}\frac{\partial x_{\gamma,t-1}}{\partial x_{i,t-1}} \qquad \text{(積の微分)} \qquad (10) \\
&= -\frac{1}{2}A_{\alpha i}R^{-1}_{\alpha\gamma,t}(x_{\gamma,t}-(A_{\gamma\delta,t}x_{\delta,t-1}+B_{\gamma\delta,t}u_{\delta,t})) \\
&\quad -\frac{1}{2}(x_{\alpha,t}-(A_{\alpha\beta,t}x_{\beta,t-1}+B_{\alpha\beta,t}u_{\beta,t}))R^{-1}_{\alpha\gamma,t}A_{\gamma i} \\
&\quad -\frac{1}{2}\Sigma^{-1}_{i,\gamma,t-1}(x_{\gamma,t-1}-\mu_{\gamma,t-1})-\frac{1}{2}(x_{\alpha,t-1}-\mu_{\alpha,t-1})\Sigma^{-1}_{\alpha i,t-1} \qquad (11) \\
&\qquad \text{(微分すると } \beta=i \text{ のような項しか残らない。クロネッカーのデルタを使うと } \tfrac{\partial x_j}{\partial x_i}=\delta_{ij}\text{)} \\
&= -\frac{1}{2}A^T_{i\alpha}R^{-1}_{\alpha\gamma,t}(x_{\gamma,t}-(A_{\gamma\delta,t}x_{\delta,t-1}+B_{\gamma\delta,t}u_{\delta,t})) \\
&\quad -\frac{1}{2}(x_{\alpha,t}-(A_{\alpha\beta,t}x_{\beta,t-1}+B_{\alpha\beta,t}u_{\beta,t}))R^{-1}_{\alpha\gamma,t}A_{\gamma i} \\
&\quad -\frac{1}{2}\Sigma^{-1}_{i,\gamma,t-1}(x_{\gamma,t-1}-\mu_{\gamma,t-1})-\frac{1}{2}(x_{\alpha,t-1}-\mu_{\alpha,t-1})\Sigma^{-1}_{\alpha i,t-1} \qquad (A^T_{ij}=A_{ji}\text{ より}) \qquad (12) \\
&= -\frac{1}{2}A^T_{i\alpha}R^{-1}_{\alpha\gamma,t}(x_{\gamma,t}-(A_{\gamma\delta,t}x_{\delta,t-1}+B_{\gamma\delta,t}u_{\delta,t})) \\
&\quad -\frac{1}{2}A_{\gamma i}R^{-1}_{\alpha\gamma,t}(x_{\alpha,t}-(A_{\alpha\beta,t}x_{\beta,t-1}+B_{\alpha\beta,t}u_{\beta,t})) \\
&\quad -\frac{1}{2}\Sigma^{-1}_{i\gamma,t-1}(x_{\gamma,t-1}-\mu_{\gamma,t-1})-\frac{1}{2}(x_{\alpha,t-1}-\mu_{\alpha,t-1})\Sigma^{-1}_{\alpha i,t-1} \\
&\qquad \text{(各成分はスカラーなので可換)} \qquad (13) \\
&= -\frac{1}{2}A^T_{i\alpha}R^{-1}_{\alpha\gamma,t}(x_{\gamma,t}-(A_{\gamma\delta,t}x_{\delta,t-1}+B_{\gamma\delta,t}u_{\delta,t})) \\
&\quad -\frac{1}{2}A^T_{i\gamma}R^{-1}_{\gamma\alpha,t}(x_{\alpha,t}-(A_{\alpha\beta,t}x_{\beta,t-1}+B_{\alpha\beta,t}u_{\beta,t})) \\
&\quad -\frac{1}{2}\Sigma^{-1}_{i\gamma,t-1}(x_{\gamma,t-1}-\mu_{\gamma,t-1})-\frac{1}{2}\Sigma^{-1}_{i\alpha,t-1}(x_{\alpha,t-1}-\mu_{\alpha,t-1}) \\
&\qquad \text{(共分散行列は対称なので添字を入れ替え、さらに } A \text{ を転置。第四項も同様)} \qquad (14)
\end{aligned}
$$

第一項と第二項は和に使われている添字が違うだけで、全く同じ項である。第三項、第四項についても同じである。結局

$$\frac{\partial L_t}{\partial x_{i,t-1}} = -A^T_{i\alpha}R^{-1}_{\alpha\gamma,t}(x_{\gamma,t}-(A_{\gamma\delta,t}x_{\delta,t-1}+B_{\gamma\delta,t}u_{\delta,t}))+\Sigma^{-1}_{i\alpha}(x_{\alpha,t-1}-\mu_{\alpha,t-1}) \tag{15}$$

が得られるので、行列とベクトルの積を計算してまとめてかくと

$$\frac{\partial L_t}{\partial x_{t-1}} = -A^T R_t^{-1}(x_t-(A_{,t}x_{t-1}+B_t u_t))+\Sigma^{-1}_{t-1}(x_{t-1}-\mu_{t-1}) \tag{16}$$

$L_t(x_{t-1},x_t)$ はベクトル x_{t-1} のあらゆる方向に対して微分係数が 0 になっている点 $x_{t-1}=\xi$ を求めたかったのだから、上の式がゼロベクトルと等しいとした方程式を x_{t-1} に関して解けばよい。

実際に変形をはじめるまえにもうひとつ別の量を計算しておく。$L_t(x_{t-1},x_t)=(x_{t-1}-\xi)^T\Psi^{-1}(x_{t-1}-\xi)$ の形に変形する際のあらたな共分散行列 Ψ だ。$L_t(x_{t-1},x_t)=\frac{1}{2}(x_{t-1}-\xi)^T\Psi^{-1}(x_{t-1}-\xi)$ に変形できることを仮定すると、この行列は以下のように計算できる

$$\begin{aligned}
\Psi^{-1}_{ij} &= \frac{\partial^2 L_t(x_{t-1},x_t)}{\partial x_{i,t-1}\partial x_{j,t-1}} = \frac{\partial^2 L_t}{\partial x_{i,t-1}\partial x_{j,t-1}} && (17)\\
&\quad (L_t(x_t)\text{ は }x_{t-1}\text{ で微分してもゼロ}) && (18)\\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_{i,t-1}\partial x_{j,t-1}}(x_{t-1}-\xi)^T\Psi^{-1}(x_{t-1}-\xi) && (19)\\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_{i,t-1}}\Psi^{-1}_{j\alpha}(x_{\alpha t-1}-\xi_\alpha)+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_{i,t-1}}(x_{\alpha t-1}-\xi_\alpha)^T\Psi^{-1}_{\alpha j} && (20)\\
&= \frac{1}{2}(\Psi^{-1}_{ij}+\Psi^{-1}_{ji}) && (21)
\end{aligned}$$

Ψ は定義から共分散行列で対称行列で、対称行列の逆行列はまた対称行列になる $(1=(AA^{-1})^T=(A^{-1})^T A$ だから、$A^{-1}=(A^{-1})^T)$ ので両辺は等しい。なので Ψ を求めるため、L_t をさらにもう一回微分する。