### 3.2.4 カルマンフィルタ (KF) の数学的導出

まずは予測ステップの導出から始める。1 ステップ前の信念 $bel(x_{t-1})$ に、制御 $u_t$ が加わったあとの信念 $\overline{bel}(x_t)$ が計算できる。

$$
\begin{aligned}
\overline{bel}(x_t) &= \int p(x_t|x_{t-1}, u_t) bel(x_{t-1}) dx_{t-1} &(1)\\
&= \int \mathcal{N}(x_t; A_t x_{t-1} + B_t u_t, R_t) \mathcal{N}(x_{t-1}; \mu_{t-1}, \Sigma_{t-1}) dx_{t-1} &(2)
\end{aligned}
$$

ただし、$\mathcal{N}(x; \mu, \Sigma)$ は平均 $\mu$、共分散行列 $\Sigma$ のガウス分布の $x$ における確率密度を表す。具体的にガウス分布で表示すると

$$
\begin{aligned}
\overline{bel}(x_t) &= \int \mathcal{N}(x_t; A_t x_{t-1} + B_t u_t, R_t) \mathcal{N}(x_{t-1}; \mu_{t-1}, \Sigma_{t-1}) dx_{t-1} &(3)\\
&= \eta \int \exp[-\frac{1}{2}(x_t - (A_t x_{t-1} + B_t u_t))^T R_t^{-1} (x_t - (A_t x_{t-1} + B_t u_t))] \\
&\qquad \exp[-\frac{1}{2}(x_{t-1} - \mu_{t-1})^T \Sigma^{-1} (x_{t-1} - \mu_{t-1})] dx_{t-1} &(4)
\end{aligned}
$$

指数関数の積は肩の和を取ればよい。なので以下のように関数 $L_t$ を使って書き換えられる。

$$
\begin{aligned}
\overline{bel}(x_t) &= \eta \int \exp[-L_t] dx_{t-1} &(5)\\
L_t &= \frac{1}{2}(x_t - (A_t x_{t-1} + B_t u_t))^T R_t^{-1} (x_t - (A_t x_{t-1} + B_t u_t)) \\
&\qquad + \frac{1}{2}(x_{t-1} - \mu_{t-1})^T \Sigma^{-1} (x_{t-1} - \mu_{t-1}) &(6)
\end{aligned}
$$

$x_{t-1}$ に関する積分を実行するために、$L_t$ を $x_{t-1}$ によらない項のみを含む部分 $L_t(x_t)$ と、$x_{t-1}$ による項も含む部分 $L_t(x_{t-1}, x_t)$ に分解する（$L_t(x_{t-1}, x_t)$ は $x_{t-1}$ によらない項を含んでもよい、なので一意な分解ではない)。こうすると、この積分は

$$
\begin{aligned}
\overline{bel}(x_t) &= \eta \exp[-L_t(x_t)] \int \exp[-L_t(x_{t-1}, x_t)] dx_{t-1} &(7)\\
& &(8)
\end{aligned}
$$

とかける。この積分だが、$L_t$ が $x_{t-1}$ に関して 2 次式だったことを思い出すと、$x_{t-1}$ に関して「平方完成」すればある $x_{t-1}$ によらないベクトル $\xi$ と行列 $\Psi$ を用いて、$\frac{1}{2}(x_{t-1} - \xi)^T \Psi^{-1} (x_{t-1} - \xi)$ の形に変形できそうである。この形に変形できれば、$\exp L_t(x_{t-1}, x_t)$ の積分は多変量正規分布 $\mathcal{N}(x_{t-1}; \xi, \Psi)$ の規格化定数を求める積分と全く同じになり、特に $x_t$ によらない定数になる。

この変形を行うため、あえて $L_t(x_{t-1}, x_t)$ は $x_{t-1}$ によらない項を含めても良いことにしている。

$\exp L_t(x_{t-1}, x_t)$ の積分を多変量正規分布 $\mathcal{N}(x_{t-1}; \xi, \Psi)$ の積分の形にもっていくために、この分布 $\exp L_t(x_{t-1}, x_t)$ の頂点の座標 $\xi$ を求める。頂点 $\xi$ では、$L_t(x_{t-1}, x_t)$ はベクトル $x_{t-1}$ のあらゆる方向に対して微分係数が

0 になっている。なので、$L_t(x_{t-1}, x_t)$ を $x_{t-1}$ の各成分に関して微分したもの（この操作を「$L_t$ を $x_{t-1}$ で微分」という）がすべて 0 となっている。

$x_{t-1}$ の第 $i$ 成分を $x_{i,t-1}$ とし、実際にこの計算を実行すると

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L_t}{\partial x_{i,t-1}} &= \frac{\partial}{\partial x_{i,t-1}}\frac{1}{2}(x_t-(A_t x_{t-1}+B_t u_t))^T R_t^{-1}(x_t-(A_t x_{t-1}+B_t u_t)) \\
&\qquad\qquad + \frac{\partial}{\partial x_{i,t-1}}\frac{1}{2}(x_{t-1}-\mu_{t-1})^T \Sigma_{t-1}^{-1}(x_{t-1}-\mu_{t-1}) && (9) \\
&= \left(-\frac{1}{2}\frac{\partial A_{\alpha\beta}x_{\beta,t-1}}{\partial x_{i,t-1}}\right) R^{-1}_{\alpha\gamma,t}(x_{\gamma,t}-(A_{\gamma\delta,t}x_{\delta,t-1}+B_{\gamma\delta,t}u_{\delta,t})) \\
&\quad +(x_{\alpha,t}-(A_{\alpha\beta,t}x_{\beta,t-1}+B_{\alpha\beta,t}u_{\beta,t})R^{-1}_{\alpha\gamma,t}\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial A_{\gamma\delta}x_{\delta,t-1}}{\partial x_{i,t-1}}\right) \\
&\quad -\frac{1}{2}\frac{\partial x_{\alpha,t-1}}{\partial x_{i,t-1}}\Sigma^{-1}_{\alpha\gamma,t-1}(x_{\gamma,t-1}-\mu_{\gamma,t-1}) \\
&\quad -\frac{1}{2}(x_{\alpha,t-1}-\mu_{\alpha,t-1})\Sigma^{-1}_{\alpha\gamma,t-1}\frac{\partial x_{\gamma,t-1}}{\partial x_{i,t-1}} \qquad \text{(積の微分)} && (10) \\
&= -\frac{1}{2}A_{\alpha i}R^{-1}_{\alpha\gamma,t}(x_{\gamma,t}-(A_{\gamma\delta,t}x_{\delta,t-1}+B_{\gamma\delta,t}u_{\delta,t})) \\
&\quad -\frac{1}{2}(x_{\alpha,t}-(A_{\alpha\beta,t}x_{\beta,t-1}+B_{\alpha\beta,t}u_{\beta,t}))R^{-1}_{\alpha\gamma,t}A_{\gamma i} \\
&\quad -\frac{1}{2}\Sigma^{-1}_{i,\gamma,t-1}(x_{\gamma,t-1}-\mu_{\gamma,t-1})-\frac{1}{2}(x_{\alpha,t-1}-\mu_{\alpha,t-1})\Sigma^{-1}_{\alpha i,t-1} && (11) \\
&\qquad \text{(微分すると } \beta = i \text{ のような項しか残らない。クロネッカーのデルタを使うと } \tfrac{\partial x_j}{\partial x_i}=\delta_{ij}\text{)} \\
&= -\frac{1}{2}A^T_{i\alpha}R^{-1}_{\alpha\gamma,t}(x_{\gamma,t}-(A_{\gamma\delta,t}x_{\delta,t-1}+B_{\gamma\delta,t}u_{\delta,t})) \\
&\quad -\frac{1}{2}(x_{\alpha,t}-(A_{\alpha\beta,t}x_{\beta,t-1}+B_{\alpha\beta,t}u_{\beta,t}))R^{-1}_{\alpha\gamma,t}A_{\gamma i} \\
&\quad -\frac{1}{2}\Sigma^{-1}_{i,\gamma,t-1}(x_{\gamma,t-1}-\mu_{\gamma,t-1})-\frac{1}{2}(x_{\alpha,t-1}-\mu_{\alpha,t-1})\Sigma^{-1}_{\alpha i,t-1} \qquad (A^T_{ij}=A_{ji}\text{ より}) && (12) \\
&= -\frac{1}{2}A^T_{i\alpha}R^{-1}_{\alpha\gamma,t}(x_{\gamma,t}-(A_{\gamma\delta,t}x_{\delta,t-1}+B_{\gamma\delta,t}u_{\delta,t})) \\
&\quad -\frac{1}{2}A_{\gamma i}R^{-1}_{\alpha\gamma,t}(x_{\alpha,t}-(A_{\alpha\beta,t}x_{\beta,t-1}+B_{\alpha\beta,t}u_{\beta,t})) \\
&\quad -\frac{1}{2}\Sigma^{-1}_{i\gamma,t-1}(x_{\gamma,t-1}-\mu_{\gamma,t-1})-\frac{1}{2}(x_{\alpha,t-1}-\mu_{\alpha,t-1})\Sigma^{-1}_{\alpha i,t-1} \\
&\qquad \text{(各成分はスカラーなので可換)} && (13) \\
&= -\frac{1}{2}A^T_{i\alpha}R^{-1}_{\alpha\gamma,t}(x_{\gamma,t}-(A_{\gamma\delta,t}x_{\delta,t-1}+B_{\gamma\delta,t}u_{\delta,t})) \\
&\quad -\frac{1}{2}A^T_{i\gamma}R^{-1}_{\gamma\alpha,t}(x_{\alpha,t}-(A_{\alpha\beta,t}x_{\beta,t-1}+B_{\alpha\beta,t}u_{\beta,t})) \\
&\quad -\frac{1}{2}\Sigma^{-1}_{i\gamma,t-1}(x_{\gamma,t-1}-\mu_{\gamma,t-1})-\frac{1}{2}\Sigma^{-1}_{i\alpha,t-1}(x_{\alpha,t-1}-\mu_{\alpha,t-1}) \\
&\qquad \text{(共分散行列は対称なので添字を入れ替え、さらに } A \text{ を転置。第四項も同様)} && (14)
\end{aligned}
$$

第一項と第二項は和に使われている添字が違うだけで、全く同じ項である。第三項、第四項についても同じである。結局

$$\frac{\partial L_t}{\partial x_{i,t-1}} = -A^T_{i\alpha} R^{-1}_{\alpha\gamma,t}(x_{\gamma,t} - (A_{\gamma\delta,t} x_{\delta,t-1} + B_{\gamma\delta,t} u_{\delta,t})) + \Sigma^{-1}_{i\alpha}(x_{\alpha,t-1} - \mu_{\alpha,t-1}) \tag{15}$$

が得られるので、行列とベクトルの積を計算してまとめてかくと

$$\frac{\partial L_t}{\partial x_{t-1}} = -A^T_t R^{-1}_t (x_t - (A_t x_{t-1} + B_t u_t)) + \Sigma^{-1}_{t-1}(x_{t-1} - \mu_{t-1}) \tag{16}$$

$L_t(x_{t-1}, x_t)$ はベクトル $x_{t-1}$ のあらゆる方向に対して微分係数が 0 になっている点 $x_{t-1} = \xi$ を求めたかったのだから、上の式がゼロベクトルと等しいとした方程式を $x_{t-1}$ に関して解けばよい。

実際に変形をはじめるまえにもうひとつ別の量を計算しておく。$L_t(x_{t-1}, x_t) = (x_{t-1} - \xi)^T \Psi^{-1} (x_{t-1} - \xi)$ の形に変形する際のあらたな共分散行列 $\Psi$ だ。$L_t(x_{t-1}, x_t) = \frac{1}{2}(x_{t-1} - \xi)^T \Psi^{-1}(x_{t-1} - \xi)$ に変形できることを仮定すると、この行列は以下のように計算できる

$$\Psi^{-1}_{ij} = \frac{\partial^2 L_t(x_{t-1}, x_t)}{\partial x_{i,t-1} \partial x_{j,t-1}} = \frac{\partial^2 L_t}{\partial x_{i,t-1} \partial x_{j,t-1}} \tag{17}$$

$$(L_t(x_t) \text{ は } x_{t-1} \text{ で微分してもゼロ}) \tag{18}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_{i,t-1} \partial x_{j,t-1}} (x_{t-1} - \xi)^T \Psi^{-1} (x_{t-1} - \xi) \tag{19}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_{i,t-1}} \Psi^{-1}_{j\alpha}(x_{\alpha t-1} - \xi_\alpha) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_{i,t-1}} (x_{\alpha t-1} - \xi_\alpha)^T \Psi^{-1}_{\alpha j} \tag{20}$$

$$= \frac{1}{2}(\Psi^{-1}_{ij} + \Psi^{-1}_{ji}) \tag{21}$$

$\Psi$ は定義から共分散行列で対称行列で、対称行列の逆行列はまた対称行列になる $(1 = (AA^{-1})^T = (A^{-1})^T A$ だから、$A^{-1} = (A^{-1})^T)$ ので両辺は等しい。なので $\Psi$ を求めるため、$L_t$ をさらにもう一回微分する。

$$\frac{\partial^2 L_t}{\partial x^2_{t-1}} = \frac{\partial}{\partial x_{t-1}} - A^T_t R^{-1}_t (x_t - (A_t x_{t-1} + B_t u_t)) + \Sigma^{-1}_{t-1}(x_{t-1} - \mu_{t-1}) \tag{22}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_{t-1}} A^T R^{-1}_t A_t x_{t-1} + \frac{\partial}{\partial x_{t-1}} \Sigma^{-1}_{t-1} x_{t-1} \tag{23}$$

$$= A^T R^{-1}_t A_t + \Sigma^{-1}_{t-1} = \Psi^{-1}_t \tag{24}$$

それではいよいよ $L_t(x_{t-1}, x_t)$ の $x_{t-1}$ についてあらゆる方向に対して微分係数が 0 になっている点 $x_{t-1} = \xi$ を求める。

$$\frac{\partial L_t}{\partial x_{t-1}} = -A^T_t R^{-1}_t (x_t - (A_t x_{t-1} + B_t u_t)) + \Sigma^{-1}_{t-1}(x_{t-1} - \mu_{t-1}) = 0 \tag{25}$$

$$-A^T_t R^{-1}_t x_t + A^T_t R^{-1}_t A_t x_{t-1} + A^T_t R^{-1}_t B_t u_t + \Sigma^{-1}_{t-1} x_{t-1} - \Sigma^{-1}_{t-1} \mu_{t-1} = 0 \tag{26}$$

$$(A^T_t R^{-1}_t A_t + \Sigma^{-1}_{t-1}) x_{t-1} = A^T_t R^{-1}_t x_t - A^T_t R^{-1}_t B_t u_t + \Sigma^{-1}_{t-1} \mu_{t-1}$$

$$(x_{t-1} \text{ に関する項を左辺にまとめた}) \tag{27}$$

$$\Psi_t x^{-1}_{t-1} x_{t-1} = A^T_t R^{-1}_t (x_t - B_t u_t) + \Sigma^{-1}_{t-1} \mu_{t-1} \quad (\Psi \text{ の定義}) \tag{28}$$

$$x_{t-1} = \Psi_t [A^T_t R^{-1}_t (x_t - B_t u_t) + \Sigma^{-1}_{t-1} \mu_{t-1}] \tag{29}$$

これで無事、$L_t(x_{t-1}, x_t)$ としてほしい形が求まった。すなわち

$$
\begin{aligned}
& L_t(x_{t-1}, x_t) && (30)\\
= & \frac{1}{2}(x_{t-1} - \xi)^T \Psi_t^{-1} (x_{t-1} - \xi) && (31)\\
= & \frac{1}{2}(x_{t-1} - \Psi_t[A_t^T R_t^{-1}(x_t - B_t u_t) + \Sigma_{t-1}^{-1}\mu_{t-1}])^T \Psi_t^{-1} \\
& \quad (x_{t-1} - \Psi_t[A_t^T R_t^{-1}(x_t - B_t u_t) + \Sigma_{t-1}^{-1}\mu_{t-1}]) && (32)
\end{aligned}
$$

である。実際ここで求めた $L_t(x_{t-1}, x_t)$ を使って $L_t(x_t) = L_t - L_t(x_{t-1}, x_t)$ が $x_{t-1}$ を含まない形になっているか確認しておく。本書の通りこれには具体的に計算してみてもよいが、$\frac{\partial}{\partial x_{t-1}}[L_t - L_t(x_{t-1}, x_t)]$ が $x_{t-1}$ に関して恒等的に 0 に等しいことを示す方法もある。

このノートでは $\frac{\partial L_t}{\partial x_{t-1}}$ と $\frac{\partial L_t(x_{t-1}, x_t)}{\partial x_{t-1}}$ が等しいことを示すことで、上記の事実を示す。$\frac{\partial L_t}{\partial x_{t-1}}$ は前に計算したので、$\frac{\partial L_t}{\partial x_{t-1}}$ を計算すればよい。

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L_t}{\partial x_{t-1}} &= \frac{\partial}{\partial x_{t-1}} \frac{1}{2}(x_{t-1} - \xi)^T \Psi_t^{-1} (x_{t-1} - \xi) && (33)\\
&= \frac{1}{2} \frac{\partial x_{t-1}}{\partial x_{t-1}}^T \Psi_t^{-1}(x_{t-1} - \xi) + \frac{1}{2}(x_{t-1} - \xi)^T \Psi_t^{-1} \frac{\partial x_{t-1}}{\partial x_{t-1}} \quad \text{(積の微分、ch0 のノート参照)} && (34)\\
&= \Psi_t^{-1}(x_{t-1} - \xi) \quad (\Psi\text{は対称行列}) && (35)\\
&= \Psi_t^{-1} x_{t-1} - \Psi_t^{-1}\Psi_t[A_t^T R_t^{-1}(x_t - B_t u_t) + \Sigma_{t-1}^{-1}\mu_{t-1}] \quad (\xi\text{ の定義}) && (36)\\
&= (A^T R_t^{-1} A_t + \Sigma_{t-1}^{-1}) x_{t-1} - A_t^T R_t^{-1}(x_t - B_t u_t) - \Sigma_{t-1}^{-1}\mu_{t-1} \quad (\Psi\text{ の定義}) && (37)\\
&= -A^T R_t^{-1}(x_t - (A_t x_{t-1} + B_t u_t)) + \Sigma_{t-1}^{-1}(x_{t-1} - u_{t-1}) && (38)
\end{aligned}
$$

これは $\frac{\partial L_t}{\partial x_{t-1}}$ と等しいので、$\frac{\partial}{\partial x_{t-1}}[L_t - L_t(x_{t-1}, x_t)]$ は 0(定数関数) となる。よって $L_t - L_t(x_{t-1}, x_t)$ は $x_{t-1}$ によらない。

これで無事に $L_t$ を分解できた。信念の計算に戻ると $\int \exp L_t(x_{t-1}, x_t) dx_{t-1}$ を定数にとることができたので

$$
\begin{aligned}
\overline{bel}(x_t) &= \eta \exp[-L_t(x_t)] \int \exp[-L_t(x_{t-1}, x_t)] dx_{t-1} && (39)\\
&= \eta \exp[-L_t(x_t)] && (40)
\end{aligned}
$$

と簡単に書き直せる。1 行目と 2 行目で $\eta$ を取り替えている。信念の計算には $L_t(x_t)$ が必要である。せっかくなので $L_t$ を愚直に展開して $L_t(x_{t-1}, x_t)$ を引く以外の方法で計算してみる。

$L_t(x_t)$ は $x_{t-1}$ によらないので $L_t - L_t(x_{t-1}, x_t)$ はどの $x_{t-1}$ で計算してもよい。なので $x_{t-1} = \xi$ で計算すると、$L_t(x_{t-1}, x_t) = 0$ なので、展開して差し引くまでもまく $L_t(x_t) = L_t$ になる。つまり、$L_t$ に $x_{t-1} = \xi$ を代入すればよい。

$$
\begin{aligned}
L_t(x_t) \quad = \quad & \frac{1}{2}(x_t - (A_t\xi + B_t u_t))^T R_t^{-1}(x_t - (A_t\xi + B_t u_t)) \\
& \qquad\qquad\qquad + \frac{1}{2}(\xi - \mu_{t-1})^T \Sigma_t^{-1}(\xi - \mu_{t-1}) \qquad (41)
\end{aligned}
$$