

# MATEMATIKA

Išplėstinis kursas

## I DALIS (10 taškų)

*Kiekvienas šios dalies uždavinio (1-10) teisingas atsakymas vertinamas 1 tašku.*

1. Duotos skaičių aibės:  $A = (-2; 10]$ ,  $B$ - sudaryta iš pirmųjų keturių skaičiaus 4 kartotinių ir  $C \in \mathbf{N}$ . Raskite aibės  $D = (A \setminus B) \subset C$  narių sumą.

2. Skaičių  $a$  padaliję iš 8 gauname liekaną 4, o skaičių  $b$  padaliję iš 8 - liekaną 3. Kokią liekaną gausime padaliję sandaugą  $ab$  iš 8?  $a, b \in \mathbf{N}$ .

3. Duota funkcija  $f(x) = (7 - x)(x + 7) - (2x - 3)^3$ . Apskaičiuokite  $f'(1)$ .

4. Išspręskite lygtį  $2|x - 1| - 4 = 0$ .

5. Yra žinoma, kad lygybė  $f(2x) = 3f(x) - 2x$  yra teisinga su visomis  $x \in \mathbf{R}$ ,  $f(6) = 6$ . Apskaičiuokite  $f(3)$ .

6. Su kuria  $k$  reikšme funkcija  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & \text{kai } x \leq 2, \\ 2x - k, & \text{kai } x > 2. \end{cases}$  yra tolydi visoje realiųjų skaičių aibėje  $\mathbf{R}$ ?

7. Duoti taškai  $A(-2; b; 1)$ ,  $B(-1; 0; 2)$ ,  $C(a; 4; c)$ . Jei  $\overrightarrow{AB} = 0,5\overrightarrow{BC}$ , raskite kam lygi suma  $a + b + c$ .

8. Į Rutulį įbrėžtas mažesnis rutulys, kurio spindulio ilgis sudaro du trečdalius didesniojo rutulio spindulio ilgio. Kam lygus didesniojo ir mažesniojo rutulio tūrių santykis?

9. Ant penkių kortelių surašyti skaičiai: 0, 1, 2, 3, 4. Atsitiktinai vieną po kitos dėlioiant korteles sudaromi skaičiai. Kiek galima sudaryti penkiaženklių lyginių skaičių?

10. Apskaičiuokite  $\arcsin(\sin(\log_3(3 \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[9]{3} \cdot \dots)))$ .

## II DALIS (50 taškų)

*Išspręskite 11-20 uždavinius*

**11.** Išspręskite nelygybes:

**11.1.**  $\sqrt{x^2 + 8x + 16} > 10$ ; (2 taškai)

**11.2.**  $\ln(x) + \ln(x - 2) \leq \ln(9 - 2x)$ ; (2 taškai)

**11.3.**  $2 \cos(x) \sin(x) < \frac{1}{2}$ . (3 taškai)

**12.** Andrėja yra populiari platformos „Tiktok“ influencerė. Kasdien filmuodama įvairų turinį ji sulaukia vis daugiau naujų sekėjų. Andrėjos naujų sekėjų skaičių  $F(t)$  per  $t$  minučių galima apskaičiuoti pagal formulę  $F(t) = 2^{3\lg(t)} \cdot 5^{\lg(t)}$ .

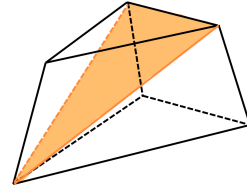
**12.1.** Apskaičiuokite kiek naujų sekėjų Andrėja gaus per 10 min. (1 taškas)

**12.2.** Per kiek valandų Andrėjai pavyks surinkti 1600 naujų sekėjų? (2 taškai)

**13.** Kai  $\sin(m) + \cos(n) = \frac{1}{2}$  ir  $m + n = \frac{\pi}{2}$ , kam lygu  $\operatorname{tg}^2(m)$ ? (3 taškai)

**14.** Egzistuoja iškilasis  $n$ -kampis, kurio kampai, paimti tam tikra tvarka, sutinka kaip  $1 : 2 : \dots : n$ . Raskite pirminį skaičių  $n$ , kuris tenkina šią sąlygą. (2 taškai)

15. Taisyklingosios trikampės nupjautinės piramidės pagrindų briaunos yra 9 cm ir 6 cm ilgio, o piramidės aukštinė - 4 cm ilgio. Per viršutinio pagrindo briauną ir priešais ją esančią apatinio pagrindo viršūnę išvesta plokštuma (žr. pav.).

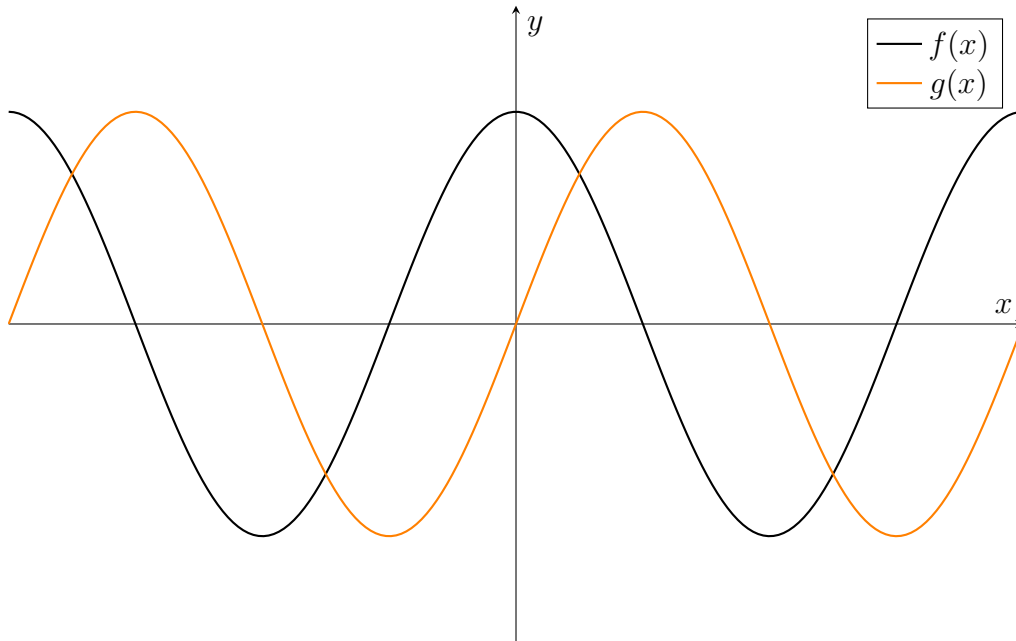


15.1 Apskaičiuokite apotemos ilgį. (4 taškai)

15.2. Apskaičiuokite pjūvio plotą. (3 taškai)

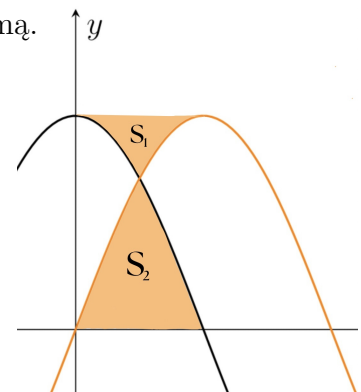
15.3. Raskite kampo tarp pjūvio ir apatinio pagrindo didumą. (2 taškai)

**16.** Paveiksle pavaizduoti funkcijų  $f(x) = 2\cos(2x)$  ir  $g(x) = 2\sin(2x)$  grafikų eskizai.



**16.1.** Raskite liestinės, kuri liečia  $f(x)$ ,  $g(x)$  grafikus ir eina per  $Oy$  ašį, lygtį.  
(2 taškai)

**16.2.** Raskite ploto  $S_2$ , kurį riboja funkcijų grafikai  $f(x)$ ,  $g(x)$  ir  $Ox$  ašis, ir ploto  $S_1$ , kurį riboja funkcijų grafikai  $f(x)$ ,  $g(x)$  ir  $y$ , skirtumą.  
(4 taškai)



**17.** Į jubiliejinę Dainų šventę mokytoja turi deleguoti 6 šokėjų poras (porą sudaro vaikinai ir mergina). Šokių būrelį lanko 9 merginos ir 7 vaikinai.

**17.1.** Keliais skirtingais būdais iš šokėjų galima sudaryti 6 poras? (3 taškai)

**17.2.** Šokių būrelį lanko Toma ir Lukas. Mokytojai atsitiktinai sudarinėjant 6 šokėjų poras, kokia tikimybė, kad Toma su Luku bus viena iš jų? (4 taškai)

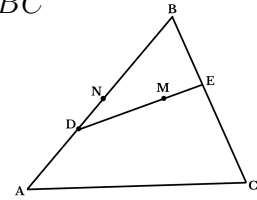
**18.** Tarkime, kad  $S_n = a$ ,  $S_{2n} = b$ , čia  $S_n$  yra geometrinės progresijos pirmųjų  $n$  narių suma. Įrodykite, kad  $S_{3n} = \frac{(b-a)^2}{a} + b$ , čia  $n \in \mathbf{N}$ . (4 taškai)

**19.** Duotas trikampis  $ABC$ . Trikampio kraštinėse  $AB$  ir  $BC$

pažymėti taškai  $D$  ir  $E$  taip, kad  $AD : AB = 1 : 3$ ,

$BE : EC = 1 : 2$ . Taškas  $N$  yra kraštinės  $AB$  vidurio

taškas (žr. pav.). Tarkime  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$  ir  $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ .



**19.1.** Vektorių  $\overrightarrow{CN}$  išreikškite vektoriais  $\vec{a}$  ir  $\vec{b}$ . (2 taškai)

**19.2.** Atkarpoje  $DE$  pažymėtas taškas  $M$  taip, kad  $ME : DM = 1 : 2$ . Išreikškite vektorių  $\overrightarrow{DM}$  vektoriais  $\vec{a}$  ir  $\vec{b}$ . (3 taškai)

**20.** Nustatykite didžiausio natūraliausios funkcijos argumento  $x$  reikšmę, su kuria funkcija  $f(x)$  įgyja mažiausią reikšmę, jei yra žinoma, kad  $a$  reikšmė yra mažesnė už 2025 ir  $a \in \mathbb{N}$ .

$$f(x) = (x-1)^2 + (x-2)^2 + (x-3)^2 + \dots + (x-a)^2$$

(4 taškai)



