

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE  
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

## MODEL NA SIMULÁCIU PENY

Diplomová práca

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE  
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

## MODEL NA SIMULÁCIU PENY

Diplomová práca

Študijný program: Aplikovaná informatika  
Študijný odbor: 2511 Aplikovaná informatika  
Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej informatiky  
Školiteľ: prof. RNDr. Jiri Silha, PhD.

Bratislava, 2014

Bc. Viktor Nagy

Čestne prehlasujem, že túto diplomovú prácu som  
vypracoval samostatne len s použitím uvedenej literatúry  
a za pomoci konzultácií u môjho školiteľa.

.....

Bratislava, 2014

Bc. Viktor Nagy

# Pod'akovanie

Touto cestou by som sa chcel v prvom rade poďakovať môjmu školiteľovi prof. RNDr. Romanovi Ďurikovičovi, PhD. za jeho cenné rady a usmernenia, ktoré mi veľmi pomohli pri riešení tejto diplomovej práce. Takisto sa chcem poďakovať mojím kolegom z YACGS semináru za rady ohľadom implementácie a v neposlednom rade chcem tiež poďakovať všetkým mojím kamarátom a celej mojej rodine za podporu počas môjho štúdia.

# Abstrakt

Táto práca sa venuje problematike simulácie peny a bublín, z ktorých táto pena pozostáva. Súčasťou tejto práce je prehľad existujúcich riešení a ich krátke zhodnotenie. Ďalej je tu popísaný návrh a implementácia nášho modelu inšpirovaného niektorými zaujímavými riešeniami z dvoch existujúcich modelov, ktorý je založený na princípe pružinového systému. Simulácia je riešená implicitnou metódou s využitím spätnej Eulerovej metódy, ktorá počíta rýchlosti bublín v ďalšom časovom kroku. Na deformáciu dotýkajúcich sa bublín je využitý vertex shader a realistické zobrazenie bublín umocňuje použitie techniky zvanej "cube mapping" kombinovanej s alpha blendingom. Prínosom nášho riešenia je najmä vytváranie animácii simulujúcich tzv. "Bubble Show".

Kľúčové slová: simulácia peny, vizualizácia peny

# Abstract

This thesis deals with foam simulation issues. This work also contains an overview of existing solutions and short summary to each of them. In the next part we describe proposal and implementation of our model, which is inspired by some interesting solutions from two existing models. Our model is based on spring system principle. Simulation uses implicit method which uses backward Euler method to compute bubble velocities at the next time step. Deformation of touching bubbles is handled by vertex shader and the realistic visualization of bubbles is achieved by using technique called "cube mapping", which is combined with alpha blending. Asset of our solution is mainly in generation of animations that simulate "Bubble Show".

Keywords: foam simulation, foam rendering

# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Motivácia</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Prehľad problematiky</b>	<b>4</b>
3.1	Problematika modelu peny . . . . .	4
3.1.1	Tvar bublín . . . . .	5
3.1.2	Zhlukovanie bublín . . . . .	6
3.1.3	Sily pôsobiace na bublinu . . . . .	6
3.1.4	Prasknutie bubliny . . . . .	6
3.1.5	Hustota peny . . . . .	7
3.1.6	Renderovanie peny . . . . .	7
3.2	Problematika implementácie . . . . .	7
3.2.1	Tvar a dátová reprezentácia bublín . . . . .	8
3.2.2	Priesečníky bublín . . . . .	8
<b>4</b>	<b>Predchádzajúce riešenia</b>	<b>10</b>
4.1	Animation of Soap Bubble Dynamics, Cluster Formation and Collision [Ďu01] . . . . .	13
4.1.1	Bubliny . . . . .	13
4.1.2	Zoskupenie dvoch bublín . . . . .	14

4.1.3	Zoskupenie troch bublín . . . . .	14
4.1.4	Dynamika . . . . .	15
4.1.5	Pôsobiace sily . . . . .	15
4.1.6	Diskusia . . . . .	16
4.2	Rendering and Simulation of Liquid Foams [SKS04] . . . . .	17
4.2.1	Bubliny . . . . .	17
4.2.2	Simulácia . . . . .	18
4.2.3	Programy zbiehajúce na grafickej karte . . . . .	19
4.2.4	Diskusia . . . . .	20
4.3	Animating Bubble Interactions in a Liquid Foam [BDWR12] . . . . .	21
4.3.1	Pena a bubliny . . . . .	22
4.3.2	Dynamika peny . . . . .	22
4.3.3	Simulácia peny . . . . .	23
4.3.4	Diskusia . . . . .	24
<b>5</b>	<b>Návrh modelu</b>	<b>25</b>
5.1	Pružinový systém . . . . .	25
5.2	Reprezentácia peny . . . . .	26
5.3	Sily pôsobiace na bubliny peny . . . . .	27
5.4	Simulácia . . . . .	30
5.5	Vizualizácia . . . . .	34
<b>6</b>	<b>Implementácia</b>	<b>37</b>
6.1	Triedy modelu . . . . .	38
6.1.1	Trieda Foam . . . . .	38
6.1.2	Trieda Bubble . . . . .	42
<b>7</b>	<b>Výsledky</b>	<b>43</b>
7.1	Výsledné animácie . . . . .	46



*OBSAH*

ix

**8 Závěr**

**50**

# Kapitola 1

## Úvod

Pena je zaujímavý prírodný úkaz nachádzajúci sa na mnohých miestach v prírode, ale aj pri každodennom živote ľudí ako napríklad pri sprchovaní, praní, umývaní, ale aj pri perlivých nápojoch a podobne. Použitie peny alebo bubliniek je efektné a animácii to pridá na jej reálnosti. Nakoľko je však pena zhuk množstva zväčša malých, alebo stredne veľkých bubliniek, ktoré z rastúcou veľkosťou strácajú na pravidelnom guľovitom tvare, je v súčasnosti veľmi obtiažne simulovať tento úkaz tak, aby ho zvládali priemerné počítače v reálnom čase a zároveň, aby táto simulácia čo najviac zodpovedala realite.

Cieľom práce je návrh a implementácia nového modelu na simuláciu peny, ktorý by mal sklbiť jednotlivé klady už existujúcich modelov a minimalizovať nedostatky tak, aby bol tento model výpočtovo menej náročný a zároveň by mal čo najvernejšie odzrkadľovať reálnu penu. Nakoľko je cieľom práce vytvorenie modelu, táto práca sa bude zaoberať najmä výberom vhodných dátových štruktúr reprezentujúcich penu a jej bublinky a výberom a optimalizáciou algoritmov použitých pri zhukovaní týchto bubliniek do klastrov.

Súčasťou tejto diplomovej práce je aj prehľad rôznych prístupov zaoberajúcich sa touto problematikou a analýza ich kladov a záporov. Nakoľko

dnes existuje viacero zaujímavých prístupov, výsledky tejto analýzy môžu byť veľmi nápomocné pri vytváraní nového modelu peny.

# Kapitola 2

## Motivácia

Na práci programátora ma baví a motivuje hlavne očakávanie výsledku mojej práce. Motivuje ma to, že dokážem naučiť kopu železa „rozmyšľať“ a veľa krát tak uľahčiť prácu ľuďom. Pri tejto diplomovej práci ma okrem iného motivuje cieľ vytvorenia modelu, ktorý bude schopný simulovať tak komplexný a unikátny prírodný úkaz ako je pena. Bol by som rád, keby sa mi podarilo vytvoriť model, ktorý by bol prínosom pre rôzne animácie a možno aj hry. Ďalšou motiváciou je určite fakt, že mám možnosť pracovať na takomto projekte za pomoci môjho školiteľa, ktorý má bohaté skúsenosti v oblasti počítačovej grafiky a ktorému sa podarilo vytvoriť model na simuláciu bubliniek, ktorý bol následne použitý v celosvetovo známom animovanom filme. Viem, že táto téma je veľmi náročná, ale myslím si, že spolupráca s mojim školiteľom na tejto práci mi môže priniesť veľmi cennú referenciu a dobrý štart do mojej kariéry a to je myslím najväčšia motivácia, akú môže človek pri písaní diplomovej práce mať.

# Kapitola 3

## Prehľad problematiky

V tejto kapitole si popíšeme problémy, ktoré treba riešiť pri návrhu a implementácii modelu na simuláciu peny.

Problematiku tejto témy môžeme rozdeliť na dve logické časti a to problematika samotnej peny a problematika implementácie. Pri problematike peny musíme brať do úvahy najmä fyziku peny a jej elementov, naopak pri problematike implementácie sa budeme zaoberať výberom vhodných dátových štruktúr a vhodným návrhom architektúry samotnej aplikácie.

1. Problematika modelu peny
2. Problematika implementácie

### 3.1 Problematika modelu peny

Pena sa dá definovať aj ako zhuk množstva bublín, preto sa musíme pri rozoberaní problematiky peny sústrediť aj na problémy vzhľadom na samotné bubliny. Pri bublinách treba riešiť nasledovné problémy:

- tvar bublín

- zhlukovanie bublín
- sily pôsobiace na bublinu
- prasknutie bubliny

Pri pene ako celku treba riešiť nasledovné problémy:

- hustota peny
- renderovanie peny

### 3.1.1 Tvar bublín

Tvar bubliny je dynamický a závisí od veľkosti bubliny a takisto je ovplyvňovaný silami pôsobiacimi na bublinu. Bublina má za ideálneho stavu guľovitý tvar, avšak vplyvom rôznych síl pôsobiacich na bublinu sa jej tvar mení na nepravidelný, niekedy až pripomínajúci fazuľu. Čím je bublina menšia, tým menšia je deformácia bubliny, nakoľko vnútorný tlak bubliny je väčší ako pri veľkých bublinách. Od veľkosti bubliny závisí takisto rýchlosť znovuobnovenia bubliny do pôvodného guľovitého tvaru. V prípade, že je bublina príliš veľká, praskne skôr ako sa stihne obnoviť do pôvodného tvaru. Problém tvaru bublín preto môžeme rozdeliť na nasledujúce problémy:

- akým spôsobom deformovať tvar bubliny
- zistiť závislosť rýchlosti obnovenia do pôvodného tvaru od veľkosti bubliny
- zistiť hranicu (veľkosti), kedy bublina praskne skôr ako sa stihne vrátiť do pôvodného tvaru

### 3.1.2 Zhlukovanie bublín

Zhlukovanie bublín je v dnešnej dobe už veľmi dobre zmapovaná oblasť. Platí, že spoločná stena dvoch bublín, ktoré sa navzájom dotýkajú, je zaoblená vždy dovnútra väčšej bubliny. Je to spôsobené tým, že vo väčšej bubline je menší tlak ako v menšej bubline a tak ja na spoločnú stenu bublín vyvíjaný väčší tlak zo strany menšej bubliny, čo spôsobuje zaoblenie steny do vnútra väčšej bubliny. Ďalej platia pre zhlukovanie bublín tri Plateau-ové pravidlá, ktoré jasne definujú podmienky pre zhlukovanie bublín.

### 3.1.3 Sily pôsobiace na bublinu

Na bublinu pôsobí sila, ktorá je súčtom viacerých síl. Medzi tieto sily patria: odpudivá sila dvoch bublín, príťažlivá sila dvoch bublín, odpor vzduchu, gravitácia, rýchlosť bubliny a iné. Dve bubliny sa navzájom priťahujú za pôsobenia príťažlivej sily medzi týmito bublinami. Akonáhle sa však dve bubliny dotknú, začne na ne pôsobiť odpudivá sila. Platí, že ak sa dve bubliny spoja, už sa nerozdelia. Pri tomto probléme treba preto riešiť nasledovné:

- určiť, ktoré sily budeme brať do úvahy
- určiť vhodné konštanty tak, aby sa dve bubliny po spojení viac nerozdelili
- zistiť o koľko posunúť bublinu v závislosti od vektora výslednej sily pôsobiacej na bublinu

### 3.1.4 Prasknutie bubliny

Na povrch bubliny pôsobí množstvo síl, ktoré sa snažia minimalizovať povrch bubliny. Tlak vo vnútri bubliny zabráňuje celkovému kolapsu tejto bubliny.

Sily pôsobiace na bublinu ju deformujú a posúvajú, avšak pri určitých okolnostiach môžu spôsobiť jej rozpadnutie a teda prasknutie bubliny. Pri tomto probléme treba zistiť:

- za akých podmienok dochádza k rozpadnutiu bubliny
- ako prebieha toto rozpadnutie a čo sa pri ňom deje

### 3.1.5 Hustota peny

Hustotu peny si môžeme definovať ako podiel počtu bubliniek peny a priemernej vzdialenosti medzi stredami jednotlivých bubliniek peny. Čím je hustota väčšia, tým viac prienikov medzi bublinami vzniká a tým bude simulácia takejto peny výpočtovo náročnejšia. Preto si treba určiť:

- maximálnu únosnú hodnotu pre hustotu peny
- ktoré priesečníky bublín treba rátať, a ktoré možno vynechať

### 3.1.6 Renderovanie peny

Renderovanie nie je podstatnou časťou tejto práce, avšak pri tomto probléme sa treba zamyslieť nad spôsobom, ktorý by aspoň z časti odzrkadľoval reálny vzhľad peny.

## 3.2 Problematika implementácie

V tejto časti sa budeme zaoberať problémami, ktoré musíme riešiť z hľadiska výpočtovej náročnosti, tak aby bol tento model schopný simulovať penu v reálnom čase.



Pri tejto problematike musíme riešiť nasledovné problémy:

- tvar a dátová reprezentácia bublín
- priesečníky bublín

### 3.2.1 Tvar a dátová reprezentácia bublín

Od tvaru a reprezentácie bublín veľmi závisí aj výpočtová zložitosť celej simulácie. Pri tomto probléme sa treba v prvom rade rozhodnúť, či budeme bubliny zjednodušené reprezentovať ako gule, alebo nie. V prípade, že budú bubliny zjednodušené na tvar gule, výpočtová zložitosť pri rôznych operáciách ako napríklad prienik dvoch gúl, alebo získanie ich spoločnej steny bude určite nižšia ako v prípade nepravidelného tvaru, avšak stratíme tým na realnosti bublín a ich správania. Nakoľko však ľudské oko nie je dokonalé, je zbytočné, aby boli veľmi malé bubliny reprezentované inak ako gule, nakoľko pre ľudské oko je to nepatrný rozdiel. Avšak pri veľkých bublinách, ktoré nikdy nemajú pravidelný tvar a ani ho nikdy nedosiahnu, by zjednodušená reprezentácia pomocou gule vyzerala dosť nepresne. Preto si treba určiť, či chceme simulovať penu obsahujúcu aj veľké bubliny nepravidelného tvaru a v prípade, že áno, bude treba zistiť hranicu veľkosti, od ktorej reprezentovať bubliny ako nepravidelný tvar.

Čo sa týka dátovej štruktúry bublín, najlepším riešením je asi použitie meshu.

### 3.2.2 Priesečníky bublín

Spoločná stena dvoch bublín (ďalej priesečník bublín) je zaoblená smerom do vnútra väčšej bubliny. Treba sa preto rozhodnúť, či chceme aby tieto priesečníky odzrkadľovali reálny obraz a boli zaoblené, alebo ich budeme zjedno-

dušene reprezentovať ako roviny. Opäť to závisí od veľkosti dotýkajúcich sa bublín, pretože pri väčších bublinách je tento rozdiel badateľný a simulácii uberá na jej reálnosti. Na druhej strane však reprezentácia priesečníkov ako rovín značne zníži výpočtovú zložitosť simulácie.

# Kapitola 4

## Predchádzajúce riešenia

Problematika peny a bublín zaujala mnohých matematikov, fyzikov a taktiež vedcov v oblasti IT. Skúmanie ich fyzikálnych vlastností má svoje počiatky už v 19. storočí. Ako prvý sa o vysvetlenie tohto fyzikálneho javu pokúšal belgický fyzik Joseph Antoine Ferdinand Plateau. V roku 1873 v práci „Statique Expérimentale et Théorique des Liquides soumis aux seules Forces Moléculaires“ [Pla73] popísal pravidlá známe ako „Plateauové pravidlá“, ktoré popisujú štruktúru filmov bublín a zabezpečujú štruktúru suchej peny, ktorá minimalizuje povrch bublín v závislosti od ich veľkostí. Sú to tieto pravidlá:

1. Tri hladké povrchy mydlových filmov sa pretínajú pozdĺž priamky.
2. Uhol medzi ktorýmkoľvek dvoma dotykovými rovinami k pretínajúcim sa povrchom, je v každom bode priamky, pozdĺž ktorej sa pretínajú tri povrchy,  $120^\circ$ .
3. V jednom bode sa môžu spojiť maximálne 4 hrany, z ktorých každá z nich je tvorená priesečníkom troch povrchov a spolu tvoria štvorboký uhol  $190^\circ 28' 16''$  medzi každými dvoma susednými hranami.

Takmer o storočie neskôr, v roku 1976, Taylor [Tay76] dokázal, že táto štruktúra naozaj minimalizuje povrch bublín. Na rozdiel od suchej peny, mokrá pena má zložitejšiu štruktúru kôli väčšiemu obsahu tekutiny. Takýto typ peny bol takisto skúmaný, a to konkrétne tímami Weaire a spol. [WPHP] v roku 1993, Herzhaft a spol. [HKM05] v roku 2005 a Piazza a spol. [PGB08] v roku 2008. Štruktúra peny sa však dá klasifikovať aj na základe veľkosti bublín, tzv. monodisperzná pena, ktorá je tvorená bublinami rovnakej veľkosti [KRvS03], alebo naopak polydisperzná, ktorá je tvorená bublinami rôznych veľkostí [KRvS04]. Vďaka podobnosti váženého Voronoivho diagramu s geometriou peny vedci skúmali využitie takéhoto diagramu na modelovanie statickej peny [RSA12].

Z hľadiska simulácie peny treba brať do úvahy dva aspekty: deformácia jednotlivých bublín a interakcia medzi bublinami navzájom a medzi bublinami a tekutinou, resp. tuhým telesom. O prvý pokus simulácie zohľadňujúcej deformáciu bublín sa zaslúžil Brakke [Bra92] v roku 1992. Ďurikovič [Ďu01] v roku 2001 použil na reprezentáciu povrchu bublín mesh (sieť) a interakčné sily aproximoval použitím intermolekulárneho Van der Wallovho modelu síl. Hong a spol. [HK03] v roku 2003 a Mihalef a spol. [MUM<sup>+</sup>06] v roku 2006 ukázali, že na simulovanie deformovateľných bublín možno použiť takisto implicitnú reprezentáciu ako je napr. VOF (Volume-of-Fluid). Zheng a spol. [ZYP06] v roku 2006 navrhli metódu využívajúcu množinu na regionálnej úrovni, pomocou ktorej implicitne modelujú penu ako multimanifoldný povrch. V roku 2007 Kim a spol. [KLL<sup>+</sup>07] pridali do tejto metódy stratu objemu pomocou techniky na ovládanie objemu. Keďže tieto metódy zohľadňujú deformáciu jednotlivých bublín, odzrkadľuje sa to na výpočtovej náročnosti pri väčšom množstve bublín. Ignorujúc deformáciu povrchu bublín, existujú simulácie založené na princípe časticových systémov, ktoré

zohľadňujú interakciu bublín s prostredím, avšak bubliny sa nedeformujú a ich priesečníky sú často aproximované. Durian [Dur95] v roku 1995 ako prvý navrhol na animáciu interakcií bublín v 2D pružinový systém. Kück a spol. [KVG02] v roku 2002 rozšírili túto myšlienku do 3D a takisto našli spôsob ako renderovať Plateauove okraje a zaoblené filmy medzi dvoma dotýkajúcimi sa bublinami. Greenwood a House [GH04] v roku 2004 začlenili Kückov model do simulátora tekutín založeného na časticovom systéme na úrovni množín. V tom istom roku vedci s MPI [SKS04] využili vo svojom modeli na simuláciu a renderovanie programy zbiehajúce na GPU, tzv. shadre. Interakcie bublín sa dajú aproximovať takisto pomocou SPH tak ako to spravili Cleary a spol. [CPPK07] v roku 2007, Thürey a spol. [TSS<sup>+</sup>07] v roku 2007 a Hong a spol. [HLYK08] v roku 2008. Nakoniec v roku 2012 navrhli model na simuláciu peny Busaryev a spol. [BDWR12], ktorí v tomto modeli využili aj vážený Voronoiov diagram a ich časticový systém dokáže simulovať pohyb bublín s veľkým množstvom za relatívne krátky výpočtový čas.

Ja osobne som sa detailnejšie zaoberal tromi vedeckými článkami, ktoré mi pomohli pri riešení tejto problematiky, a v mojej diplomovej práci som sa inšpiroval konkrétne dvoma z nich. Teraz sa budem venovať trochu podrobnejšie práve týmto článkom a rozoberiem ich prístup a riešenia problematiky peny a jednotlivých bublín. Sú to tieto tri články:

- Animation of Soap Bubble Dynamics, Cluster Formation and Collision [Đu01]
- Rendering and Simulation of Liquid Foams [SKS04]
- Animating Bubble Interactions in a Liquid Foam [BDWR12]

## 4.1 Animation of Soap Bubble Dynamics, Cluster Formation and Collision [Ďu01]

Hlavným cieľom tohto článku je návrh fyzikálneho modelu, ktorý umožňuje simulovať vznik bubliny, deformáciu bubliny, kolíziu bubliny s rovinným povrchom a takisto dynamiku kolízie dvoch bublín navzájom. V článku sú rozobraté jednotlivé zoskupenia medzi bublinami, ktoré môžu nastať pri kolízií bublín, či už zoskupenie dvoch bublín ale aj zoskupenie troch bublín a geometria bublín v týchto zoskupeniach. Ďalej sú v článku podrobne popísané všetky sily, ktoré tento model zohľadňuje. Na záver je v článku popísaná kolízia medzi bublinou a rovinným povrchom.

### 4.1.1 Bubliny

Bubliny sú v tomto modeli reprezentované pomocou meshu, vďaka čomu tento model umožňuje nepravidelný tvar bublín a tým pádom ich deformáciu. Bublina je povrch s minimálnou energiou svojho druhu tvorený mydlovým filmom. Vo vzťahu k objemu má každá bublina najmenší možný povrch. Pre takto tvorený povrch boli vynájdené spoločné geometrické vlastnosti a tieto vlastnosti sú popísané v hore uvedených Plateauových pravidlách. Mydlová pena pozostáva z množstva bublín rôznych veľkostí, ktorých tvar závisí od prvých dvoch Plateauových pravidiel.

### 4.1.2 Zoskupenie dvoch bublín

Zoskupenie dvoch bublín je tvorené dvoma bublinami, ktoré sa navzájom pretínajú a sú oddelené membránou, ktorá je hranicou ich priesečníku. Takéto zoskupenie minimalizuje plochu filmov bublín.

Obr. 4.1: Zoskupenie dvoch bublín [Ďu01].

Geometria každej z týchto dvoch bublín je tvorená z veľkej časti z guľovitých obalov z mydlových filmov oddelených guľovitou čiapkou tvorenú takisto mydlovým filmom. V prípade, že veľkosť bublín je odlišná, menšia bublina vnika do väčšej, čo je spôsobené väčším vnútorným tlakom v porovnaní s tlakom vo väčšej bubline a tak je ich spoločná stena preliačená smerom do väčšej bubliny. Na obrázku č. 4.2 vidieť zoskupenie dvoch bublín s polomeri  $r_A$  a  $r_B$  a s vnútornými tlakmi  $P_A$  a  $P_B$  vyplývajúcich s Plateauových pravidiel, z ktorých tiež vyplýva nasledujúci recipročný vzťah:

$$\frac{1}{r_B} = \frac{1}{r_A} + \frac{1}{r_C}, \quad (4.1)$$

kde  $r_C$  je polomer ich spoločného povrchu.

Obr. 4.2: Zaoblenie zoskupenia dvoch bublín [Ďu01].

### 4.1.3 Zoskupenie troch bublín

Podobne ako pri zoskupení dvoch bublín, aj pri zoskupení troch bublín sa všetky tri guľovité povrchy stretávajú pod uhlom  $120^\circ$ . Stredy zaoblenia troch bublín A, B, D a ich troch spoločných stien, ležia nevyhnutne v jednej

rovine. Takisto stredy zaoblenia troch spoločných stien C, E a F ležia nevyhnutne na jednej priamke. Rovnica 1 platí pre každý pár bublín v tomto zoskupení a tak dostávame ďalšie dva recipročné vzťahy:

$$\frac{1}{r_D} = \frac{1}{r_A} + \frac{1}{r_E}, \quad \frac{1}{r_D} = \frac{1}{r_B} + \frac{1}{r_F}, \quad (4.2)$$

kde polomer tretej bubliny je  $r_D$ . Dva nové povrchy rozdeľujúce bubliny so stredmi A a D, resp. B a D sú vytvorené a ich polomery sú  $r_E$ , resp.  $r_F$ . Na obrázku č. 4.3 vidno zaoblenie takéhoto zoskupenia.

Obr. 4.3: Zaoblenie zoskupenia troch bublín [Dü01].

#### 4.1.4 Dynamika

Experimenty ukázali, že bublina, resp. jej mydlový film, je elastický. Preto pri rátaní pohybu bol uvažovaný elastický model od Terzopoulosa a Fleischera. Rovnica pohybu pre elastický deformovateľný model je:

$$M \frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2} = F_i(t) - \gamma \frac{\partial x_i}{\partial t} - \frac{\delta \epsilon(x)}{\delta x_i}, \quad (4.3)$$

kde  $x_i$  je pozícia častice  $i$ ,  $M$  je hustota hmoty,  $\gamma$  je konštanta tlmenia,  $F_i(t)$  je externe pôsobiaca sila a  $\delta \epsilon(x)/\delta x$  je interná energia, ktorá odoláva deformovaniu bubliny.

#### 4.1.5 Pôsobiacie sily

Na bubliny pôsobí výsledná externá sila, ktorá je tvorená súčtom viacerých externých síl ako napr. gravitácia, pretlak, externá kvapalina, odporová sila



a interakčné sily.

$$F_i(t) = F_{grav} + F_{excess} + F_{drag} + F_{rep} + F_{lennard} + F_{plane}. \quad (4.4)$$

Na obrázku č. 4.4 vidno smer jednotlivých síl pôsobiacich na bublinu.

Obr. 4.4: Sily pôsobiace na bublinu [Ďu01].

#### 4.1.6 Diskusia

Pomocou tejto metódy bol vytvorený simulátor bublín, ktorý dokáže interaktívne simulovať bubliny pokiaľ počet bublín nepresiahne šesť. Tento simulátor umožňuje vizualizovať tieto bubliny ako drôtený model, alebo ako jednoduchý OpenGL model. Takisto však podporuje generovanie súborov pre POV-Ray renderer, pomocou ktorého následne môžu byť vyrenderované snímky vo vysokej kvalite.

Obr. 4.5: Výsledná animácia [Ďu01].

Model bublín z tohto článku produkuje fyzikálne veľmi presné bubliny, keďže bubliny sú reprezentované pomocou meshu a sú preto schopné nadobúdať nepravidelné tvary pôsobením rôznych síl. Nevýhodou však je, že táto metóda je výpočtovo náročná a nie je možné pomocou takejto metódy simulovať v reálnom čase penu obsahujúcu stovky bublín a preto takáto metóda nie je vhodná pre implementáciu modelu, ktorý je súčasťou tejto diplomovej práce. V každom prípade z tohto článku môžeme využiť v našom modeli niektoré zo síl, ktoré sú v ňom veľmi dobre popísané.

## 4.2 Rendering and Simulation of Liquid Foams

### [SKS04]

V tomto článku autori prezentujú techniku renderovania a simulácie peny v reálnom čase za pomoci využitia výpočtovej sily GPU. Cieľom bolo vytvoriť model, ktorý by spĺňal fyzikálne vlastnosti interakcie dvoch bublín navzájom a taktiež bublín s inými geometrickými objektmi v scéne ako napr. roviny a dať týmto bublinám realistický vzhľad okrem iného aj za pomoci detailného zobrazenia ich spoločnej steny. Toto všetko dosiahli pomocou dvoch renderovacích fáz. V prvej fáze simulujú interakcie s bublinami a zároveň počítajú spoločné steny medzi každým párom pretínajúcich sa bublín. V druhej fáze sú potom bubliny renderované pomocou shaderov na grafickej karte. Vertex shader dostane informácie o všetkých priesečníkoch medzi bublinami a potom časť vertexov dotýkajúcich sa bublín premiestni do oblasti spoločnej steny týchto bublín. Fragment shader je použitý na vyrátanie osvetlenia pomocou Fresnelovej rovnice.

### 4.2.1 Bubliny

Cieľom tohto článku je návrh modelu, ktorý je schopný simulovať a renderovať penu v reálnom čase. Avšak najväčším problémom vo virtuálnej realite je renderovanie v reálnom čase. Renderovanie peny je v reálnom čase je obzvlášť náročné použitím štandardných techník. Keďže ľudské oko prehliada niektoré vlastnosti pri pozorovaní pohybujúcich sa objektov, nie je potrebné renderovať fyzikálne presnú penu. Preto sa autori rozhodli pre techniku renderovania peny, ktorá možno nie je fyzikálne úplne presná, ale ľudské oko sa s týmito tvarmi dokáže ľahko stotožniť bez toho, aby si pozorovateľ všimol nejaké fyzikálne nepresnosti. Preto sa autori rozhodli zjednodušiť bubliny a

v tomto modeli sú reprezentované ako gule. Ďalším zjednodušením, ktoré autorom ušetrilo veľa problémov a výpočtového času je fakt, že sa rozhodli reprezentovať spoločné steny dotýkajúcich sa bublín len ako rovnú plochu, čo je ďalšia fyzikálna nepresnosť tohto modelu, keďže spoločná stena dvoch bublín je rovná plocha len v prípade, že sa dotýkajú bubliny rovnakej veľkosti, v opačnom prípade je táto stena zaoblená vždy smerom do väčšej bubliny.

### 4.2.2 Simulácia

Na simuláciu je použitý pružinový systém príťažlivých a odpudivých síl pôsobiach na bubliny. Príťažlivé sily simulujú vlastnosť minimalizácie povrchového napätia, zatiaľ čo odpudivé sily zabráňujú kolaps navzájom dotýkajúcich sa bublín – má to podobný efekt ako vnútorný tlak, ktorý pôsobí na vnútornú stenu bubliny. Tieto dve sily (príťažlivá a odpudivá) sú navzájom konkurenčné a zabezpečujú stabilitu systému, ktorá je podobná stabilite, ktorú zabezpečujú Plateauové pravidlá. Odpudivá sila  $F_{ij}^r$  pôsobiaca na bublinu  $i$  vzhľadom na jej kontakt s bublinou  $j$  je definovaná takto:

$$F_{ij}^r = k_r \left( \frac{1}{\|p_i - p_j\|} - \frac{1}{rad_i + rad_j} \right) (p_i - p_j), \quad (4.5)$$

kde  $k_r$  je používateľom definovaná konštanta povrchového napätia kvapaliny. Príťažlivá sila  $F_{ij}^a$  medzi dvomi bublinami  $i, j$  závisí od veľkosti povrchu, ktorý tieto bubliny zdieľajú a platí, že čím viac sa dotýkajú, tým je táto sila menšia. Rovnica tejto sily vyzerá nasledovne:

$$F_{ij}^a = k_a c_{nb} c_{dist} \frac{p_j - p_i}{\|p_j - p_i\|}, \quad (4.6)$$

kde

$$c_{nb} = \frac{\frac{1}{|NB_i|} + \frac{1}{|NB_j|}}{2}, \quad c_{dist} = \frac{\|p_j - p_i\| - \max(rad_i, rad_j)}{\min(rad_i, rad_j)}. \quad (4.7)$$

Opäť  $k_a$  je používateľom definovaný koeficient tak, že  $k_a/k_r$  tvoria vlhkosť simulovanej peny.  $|NB_i|$  je počet susedných bublín dotýkajúcich sa alebo pretínajúcich bublinu  $i$ . Okrem týchto síl v tomto modeli využívajú aj ďalšie sily ako napr. odpor vzduchu a takisto príťažlivé a odpudivé sily vzhľadom na objekty.

### 4.2.3 Programy zbiehajúce na grafickej karte

Asi najzaujímavejšou časťou tohto článku je riešenie zobrazovania spoločnej steny medzi bublinami. Nakoľko počas počítania simulácie sa ukladá o každej spoločnej roviny iba informácia o jej normálovej forme rovnice roviny a s bublinami sa pri výpočtoch pracuje ako s guľami, autori museli vymyslieť spôsob, ako tieto dotýkajúce sa gule orezať. Práve na toto využili výpočtovú silu GPU a použili na to program zbiehajúci na grafickej karte, tzv. vertex shader. Do vertex shadera sa najprv pošlú vertexy na povrchu každej z guľí a následne je vertex shader naplnený pretínajúcimi rovinami  $e_i : n_i x - d_i = 0$ . Pretínajúce roviny sa počítajú na začiatku každého snímku. Na obrázku č. 4.6 vidieť pretínajúcu sa oblasť dvoch guľí:

Obr. 4.6: Spoločná rovina dvoch guľí [SKS04].

Zo súradnicového systému gule 1 potom dostávame rovnicu:

$$s = c_1 \cdot n, \quad (4.8)$$

kde

$$c_1 = \frac{r_1^2 - r_2^2 + d^2}{2d}, \quad n = \frac{p_2 - p_1}{\|p_2 - p_1\|} = \frac{p_2 - p_1}{d}. \quad (4.9)$$

Teda rovnica spoločnej roviny medzi guľou 1 a guľou 2 vyzerá nasledovne:

$$e : \frac{p_2 - p_1}{d} * x - \frac{r_1^2 - r_2^2 + d^2}{2d} = 0. \quad (4.10)$$

Vertex shader potom presunie vertexy guľí do spoločnej roviny. Výber vertexov, ktoré je potrebné z každej gule posunúť funguje nasledovne: pre všetky vertexy  $p_i$  gule a pre všetky spoločné steny  $e_j : n_j x - d_j = 0$  vertex shader vypočíta

$$\lambda_{ij} = d_j - n_j \cdot p_i, \quad (4.11)$$

a v prípade, že  $\lambda_{ij} < 0$ , tak bod  $p_i$  nahradí nasledovne:

$$p_i := p_i + \lambda_{ij} \cdot n_j. \quad (4.12)$$

Na obrázku č. 4.7 a č. 5.1 vidieť akým spôsobom sú vertexy nahradené.

Obr. 4.7: Premiestňovanie vertexov na spoločnú stenu gúl [SKS04].

Obr. 4.8: Premiestňovanie vertexov na spoločné steny pri kolízií viacerých gúl [SKS04].

#### 4.2.4 Diskusia

Finálna simulácia, ktorú spravili, obsahovala okolo 21 rovín, s ktorými mohli bubliny kolidovať a obsahovala bubliny, ktoré mali náhodne generovanú ako veľkosť, tak aj pozíciu. Hoci v tomto štádiu nespĺňali fyzikálne vlastnosti

peny tohto modelu, po prvom simulačnom kroku sa dostali do stabilného rozpoloženia, t.j. rovnováhy medzi príťažlivými a odpudivými silami. Táto simulácia bežala na procesore Intel XEON 1.7GHz a na grafickej karte GeForceFX 5800 pri 10 fps.

Obr. 4.9: Výsledná animácia [SKS04].

Z tejto práce je asi najzaujímavejšie riešenie, akým docielili orezávanie dotýkajúcich sa bublín a je to určite jedna z vecí, ktorú by sme mohli využiť pri tvorbe nášho modelu.

### 4.3 Animating Bubble Interactions in a Liquid Foam [BDWR12]

Tento článok popisuje model na simuláciu peny, ktorý sa zameriava najmä na to simuláciu a vizualizáciu peny s malými bublinami, ktorých polomer je menší ako 1 cm. Keďže bubliny takejto malej veľkosti sú oveľa viac ovplyvnené povrchovým napätím v porovnaní s veľkými bublinami, sú preto oveľa menej deformovateľné a tak je ich tvar takmer vždy guľovitý. Preto sa autori rozhodli použiť časticový systém, ktorého častice (bubliny) sú gule. Autori navrhli efektívny algoritmus pre takýto časticový systém, ktorého kľúčovým prvkom je aproximácia geometrie peny použitím váženého Voronoiovho diagramu. Použitím Voronoiových buniek a váh je možné takisto explicitne zistiť problém straty objemu jednotlivých bublín, čo bol spoločný problém viacerých predchádzajúcich riešení.

### 4.3.1 Pena a bubliny

V tomto modeli je zanedbaná deformácia jednotlivých bublín a tak má každá bublina pravidelný guľovitý tvar. Pena ako celok je vlastne rozdelenie priestoru medzi gule. Autori sa preto rozhodli použiť na reprezentáciu peny dátovú štruktúru nazývanú space-filling diagram, ktorá rozdeľuje priestor rovnakým spôsobom. Space-filling diagram je priesečník zjednotenia gúl s váženým Voronoiovým diagramom. V takejto dátovej štruktúre je bublina  $B_i = B(x_i, r_i)$  reprezentovaná ako priesečník medzi  $B_i$  a bunkou  $x_i$  s váhou  $r_i$  z váženého Voronoiovhho diagramu. Na nasledujúcom obrázku vidieť dátovú štruktúru takto reprezentovanej peny.

Obr. 4.10: Štruktúra peny [BDWR12].

### 4.3.2 Dynamika peny

Pri dynamike peny sa autori venovali trom typom interakcie bublín: interakcia medzi bublinami navzájom, interakcia medzi bublinami a tekutinou a interakcia medzi bublinami a tuhým telesom. Keďže v modeli, ktorý je súčasťou tejto diplomovej práce sa budem venovať primárne interakcii medzi bublinami navzájom, budem z tohto článku ďalej rozoberať iba tento typ interakcie. Na simuláciu interakcie medzi dvomi dotýkajúcimi bublinami je v tomto modeli použitý pružinový systém, podobne ako v modeloch od Kück a spol. z roku 2002, resp. Greenwood a House z roku 2004. Nech  $x_i$  a  $x_j$  sú stredy dotýkajúcich sa bublín, potom interakčná sila pôsobiaca na  $x_i$  použitím pokojovej dĺžky  $l_{ij}$  vyzerá nasledovne:

$$f_i^{sint} = -k \sum_j \left( x_i - x_j - l_{ij} \frac{x_i - x_j}{|x_i - x_j|} \right), \quad (4.13)$$

kde  $k$  je koeficient tuhosti.

### 4.3.3 Simulácia peny

Na simuláciu vyvinuli simulátor peny, ktorý upravuje bubliny peny v každom časovom kroku. Na začiatku využíva implicitný integrátor na získanie pozície a rýchlosti jednotlivých bublín vzhľadom na dynamiku peny. Následne je použitá technika na zachovanie objemu bublín, ktorá kompenzuje stratu objemu bublín počas simulácie. Na záver tento simulátor vykoná topologické zmeny štruktúry peny a rekonštruje vážený Voronoiov diagram tak, aby zabezpečil korektnosť tohto diagramu pre ďalší simulačný krok. Časový integrátor využíva na riešenie vývoju častíc implicitnú metódu, ktorú navrhli Baraff a Witkin v roku 1998. Vzhľadom na pozície bublín  $x_i^t$  a ich rýchlosti  $v_i^t$  v čase  $t$ , je na riešenie použitá spätná Eulerová metóda, pomocou ktorej sa vypočítajú rýchlosti bublín  $v_i^{t+1}$  ďalšom časovom kroku:

$$(M - \Delta t \partial f^t / \partial v - \Delta t^2 \partial f^t / \partial x) v^{t+1} = M v^t + \Delta t f^t, \quad (4.14)$$

kde  $M$  je matica váh,  $\Delta t$  je časový krok a  $f$ ,  $x$  a  $v$  sú vektory síl, pozícií a rýchlostí bublín. Vektor  $f$  je súčtom gravitačnej sily, odporu vzduchu a celkovej interakčnej sily. Tento lineárny systém riešili pomocou PCG metódy. Keďže interakčné sily sú závislé na spojitosti jednotlivých bublín, ktorá sa môže meniť v čase, tento systém nemusí byť bezpodmienečne stabilný. Experimenty však ukázali, že systém zvládal simulovať penu aj pri veľkých časových krokoch ( $\Delta t \in [0.005s, 0.02s]$ ) pri väčšine testovaných príkladov.



#### **4.3.4 Diskusia**

Táto práca je založená na pružinovom systéme, ktorý tu je dobre popísaný a mohli by sme sa ním inšpirovať pri tvorbe nášho modelu.

Obr. 4.11: Výsledná animácia [BDWR12].

# Kapitola 5

## Návrh modelu

V tejto kapitole sa budem venovať návrhu samotného modelu a pokúsim sa takisto objasniť dôvody, ktoré ma viedli ku konkrétnym rozhodnutiam. Návrh nášho modelu, ktorý je súčasťou tejto diplomovej práce je inšpirovaný dvoma existujúcim modelmi, konkrétne náš model je podobne ako model od Busaryev a spol. [BDWR12] založený na princípe pružinového systému a na výpočet rýchlostí bublín v čase  $t + 1$  využívame implicitnú metódu taktiež z tohto článku, ktorá bola pôvodne použitá v článku od Choi a Ko [CK02], kde bola táto metóda využitá pri simulácii látok. Z článku od Sunkel a spol. [SKS04] zase náš model využíva myšlienku posúvania vrcholov dvoch dotýkajúcich sa bublín na ich spoločnú stenu. Simulácia aj vizualizácia nášho modelu bude prebiehať v 3D.

### 5.1 Pružinový systém

Pružinový systém, niekedy nazývaný tiež pružinová sieť, je fyzikálny model, popísaný ako graf, kde každý vrchol má svoju pozíciu a pozdĺž každej hrany tohto grafu je pružina s definovanou tvrdosťou. Za predpokladu, že sú

tieto pružiny lineárne a dochádza len k malým deformáciám, môže byť tento pružinový systém redukovaný na systém lineárnych rovníc, resp. problém minimalizácie energie. Existuje viacero typov pružinových systémov. Náš model využíva konkrétne pružinový systém s masou. V prípade, že je pružina natiahnutá, alebo stlačená pôsobením masy, vyprodukuje táto pružina tzv. obnovovaciu silu na získanie jej pôvodnej pokojovej dĺžky  $L$ . Hookove pravidlá popisujú vzťah tejto sily vyvíjanej pružinou, keď je natiahnutá alebo stlačená na konkrétnu dĺžku.

$$F_{rest}(t) = -kx(t), \quad (5.1)$$

kde  $F_{rest}$  je obnovovacia sila,  $k$  je konštanta tvrdosti pružiny a  $x$  je posunutie masy vzhľadom na pozíciu v rovnovážnom stave. Znamienko mínus v tejto rovnici indikuje, že táto sila vyvíjaná pružinou vždy smeruje v opačnom smere vzhľadom na posunutie, inak povedané, táto sila vždy pôsobí smerom k nulovej (pokojovej) pozícii a tým zabraňuje mase k posúvaniu sa do nekonečna.

## 5.2 Reprezentácia peny

Geometrická štruktúra peny je veľmi komplexná, nakoľko je tvorená množstvom bublín, ktoré na seba vplývajú a deformujú sa, čím vytvárajú rôzne nepravidelné tvary. Jedným z cieľov tejto diplomovej práce je simulácia a vizualizácia peny v reálnom čase, preto každé zjednodušenie, ktoré nám ušetrí výpočtový čas a zároveň sa zásadným spôsobom neodkloní od vzhľadu a správania sa peny v reálnom svete, je pre náš model veľmi cenné.

V reálnom svete majú bubliny nepravidelný tvar zapríčinený pôsobením rôznych síl na bublinu. Avšak čím je bublina menšia, tým skôr dokáže nado-

budnúť späť svoj pôvodný guľovitý tvar. Keďže pena väčšinou obsahuje malé alebo stredne veľké bubliny, ktoré sú menej náchylné na deformácie, rozhodli sme sa naše bubliny aproximovať na tvar gule, čo nám ušetrí veľa výpočtového času, keďže nemusíme riešiť rôzne nepravidelné deformácie jednotlivých bublín peny.

Spoločná stena medzi bublinami je zakrivená vždy smerom do väčšej bubliny, čo je spôsobené väčším vnútorným tlakom v menšej bubline. Keďže počítanie tohto zakrivenia by takisto zvýšilo výpočtový čas, rozhodli sme sa spoločné steny bublín aproximovať na roviny.

### 5.3 Sily pôsobiace na bubliny peny

Sily v našom modeli možno rozdeliť do dvoch skupín:

- interné sily
- externé sily

Medzi *interné sily* patria sily pôsobiace vrámci peny, konkrétne ide o sily pôsobiace medzi bublinami. Sú to konkrétne dve sily: príťažlivá sila a odpudivá sila. Obidve tieto sily pôsobia medzi každými dvoma bublinami v modeli, ktorých vzdialenosť je menšia ako súčet ich polomerov, t.j. medzi bublinami, ktoré sa dotýkajú. Keďže náš model využíva pružinový systém, tieto sily v našom modeli simuluje iba jedna sila, a to konkrétne *pružinová sila*.

Uvažujme dve bubliny  $B_i = (p_i, r_i), B_j = (p_j, r_j)$  v tomto systéme (  $p_i$  je pozícia (stred) a  $r_i$  je polomer bubliny  $B_i$  ), ktoré sa dotýkajú a sú teda spojené pružinou.

Obr. 5.1: Bubliny a ich pojmy.

Nech  $L_{ij}$  je pokojová dĺžka tejto pružiny. Táto dĺžka vyjadruje optimálnu a požadovanú vzdialenosť dvoch bublín odvodenú z Plateauových zákonov a vypočítame ju nasledovne:

$$L_{ij}^2 = r_i^2 + r_j^2 - r_i r_j. \quad (5.2)$$

Energiu pôsobiacu medzi týmito dvoma bublinami môžeme potom zapísať takto:

$$E = \frac{1}{2} k_s (|p_{ij}| - L_{ij})^2, \quad (5.3)$$

kde  $p_{ij} = p_j - p_i$ , a  $k_s$  je konštanta tvrdosti pružiny. Z rovnice č. 5.3 vidno, že táto energia je rovná nule v prípade, že platí rovnosť  $p_{ij} = L_{ij}$ . Sila pôsobiaca na bublinu  $B_i$  vzhľadom na deformáciu medzi týmito dvomi bublinami môžeme potom vyjadriť nasledovne:

$$f_{ij}^{spring} = -\frac{\partial E}{\partial p_i} = -k_s (|p_{ij}| - L_{ij}) \frac{p_{ij}}{|p_{ij}|}. \quad (5.4)$$

Celková sila pôsobiaca na bublinu  $B_i$  vyzerá nasledovne:

$$f_i^{int} = \sum_{j \in O_i} (f_{ij}^{spring}), \quad (5.5)$$

kde  $O_i$  je okolie bubliny  $B_i$  pod ktorým rozumieme  $\forall B_j$ , ktoré sa dotýkajú s bublinou  $B_i$ .

Pri týchto silách môže dôjsť k oscilovaniu jednotlivých pružín medzi bublinami, čo je veľmi nežiadúci efekt v prípade peny a priťahovania sa bublín navzájom. Aby sme zabránili oscilácii pružín, obsahuje náš model ešte jednu

internú silu, a to konkrétne *tlmiacu silu*, ktorá má na starosti potlačiť tento efekt a jej rovnica vyzerá nasledovne:

$$f^{damp} = -c_{vis}v - c_{lap}Lv, \quad (5.6)$$

kde  $c_{vis}, c_{lap}$  sú tlmiace koeficienty,  $v$  je vektor rýchlostí bublín a  $L$  je normalizovaná Laplaceova matica.

### Laplaceova matica

Laplaceova matica neorientovaného acyklického grafu  $G = (V, E)$ , kde  $n = |V|$ , je symetrická matica veľkosti  $n \times n$  definovaná ako:

$$L = D - A, \quad (5.7)$$

kde  $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$  je diagonálna matica stupňov vrcholov a  $A$  je matica susedností. Diagonálne elementy  $l_{ij}$  matice  $L$  zodpovedajú stupňu vrchola  $v_i$  a mimodiagonálne elementy  $l_{ij}$  sa rovnajú  $-1$ , ak vrchol  $v_i$  je susedný k vrcholu  $v_j$ , resp. 0 naopak. Laplaceova matica sa využíva na účely merania do akej miery sa graf líši v konkrétnom vrchole od okolitých vrcholov.

Normalizovaná Laplaceova matica je definovaná takto:

$$L_{ij}(G) = \begin{cases} 1, & \text{ak } i = j \text{ a } d_j \neq 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{d_i d_j}}, & \text{ak } i \text{ a } j \text{ susedia} \\ 0, & \text{inak} \end{cases} \quad (5.8)$$

Pri *externých silách* sme sa rozhodli použiť nakoniec len gravitačnú silu  $f^{grav} = m_i g$ , kde  $m_i$  je hmotnosť bubliny  $B_i$  a  $g = 9.78m/s^2$  je gravitačné zrýchlenie.

## 5.4 Simulácia

Na simuláciu peny využívame implicitnú metódu, ktorá je prezentovaná v článku od Busaryev a spol. [BDWR12] a ktorú pôvodne navrhli Choi a Ko [CK02] v ich článku o simulácii látok.

### Systém lineárnych rovníc

Implicitná metóda, ktorú používame v našom modeli, rieši systém lineárnych rovníc s využitím spätnej Eulerovej metódy. Systém lineárnych rovníc je množina  $k$  lineárnych rovníc s  $n$  premennými. Vyriešením tejto sústavy dostávame  $n$  hodnôt, ktoré sú riešením tohto systému, to znamená, že každá z rovníc je splnená. Jednoduchý systém lineárnych rovníc vyzerá nasledovne:

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2,\end{aligned}\tag{5.9}$$

kde  $x_1, x_2$  sú neznáme tohoto systému,  $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$  sú koeficienty a  $b_1, b_2$  sú konštanty. Najjednoduchšia metóda riešenia systému lineárnych rovníc je opakované odstraňovanie premenných. Táto metóda funguje nasledovne:

1. Prvú rovnicu vyriešime pre jednu premennú.
2. Následne túto premennú dosadíme do zvyšných rovníc.
3. Pokračujeme dokiaľ nedostaneme jednu lineárnu rovnicu.
4. Následne vyriešime túto lineárnu rovnicu a spätným dosádzaním do rovníc dostávame celkové riešenie tohto systému.

Systém lineárnych rovníc sa dá tiež zapísať v maticovom tvare  $Ax = b$ , kde  $A$  je tzv. matica systému, ktorá obsahuje koeficienty rovníc. Matica,

alebo skôr vektor  $b$  obsahuje pravé strany rovníc tohto systému a vektor  $x$  obsahuje premenné tohto systému. V prípade, že tento systém obsahuje veľké množstvo rovníc, určiť presné riešenie takéhoto systému môže byť výpočtovo veľmi náročné. Preto sa v takomto prípade zvyknú na výpočet použiť tzv. iteratívne metódy, ktoré hľadajú približné riešenie konvergujúce k správne riešeniu. Iteratívna metóda, ktorú používame v našom modeli sa nazýva metóda združených gradientov, pri ktorej musí platiť, že matica systému  $A$  je symetrická.



Majme pozície  $p_i^t$  a rýchlosti  $v_i^t$  bublín v čase  $t$ . Výpočet rýchlostí  $v_i^{t+1}$  v ďalšom časovom kroku potom počítame pomocou nasledujúceho systému lineárnych rovníc:

$$(M - \Delta t \partial f^t / \partial v - \Delta t^2 \partial f^t / \partial p) v^{t+1} = M v^t + \Delta t f^t, \quad (5.10)$$

kde

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_n \end{pmatrix}, \quad (5.11)$$

$$v = \begin{pmatrix} v_{1x} \\ v_{1y} \\ v_{1z} \\ \vdots \\ v_{nx} \\ v_{ny} \\ v_{nz} \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} p_{1x} \\ p_{1y} \\ p_{1z} \\ \vdots \\ p_{nx} \\ p_{ny} \\ p_{nz} \end{pmatrix}, \quad (5.12)$$

$\delta t$  je časový krok a  $f^t$  je vektor rýchlostí, pričom platí, že:

$$f^t = f_{int}^t + f_{damp}^t + f_{grav}^t. \quad (5.13)$$

$\frac{\partial f^t}{\partial v}$ , resp.  $\frac{\partial f^t}{\partial p}$  sú parciálne derivácie tejto sily podľa rýchlosti, resp. pozície každej bubliny v systéme a spolu tvoria tzv. Jacobianovu maticu.

## Jacobianova matica

Jacobianova matica je matica všetkých parciálnych derivácií prvého stupňa vektorovej funkcie. Majme funkciu  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Takáto funkcia je daná  $m$  funkciami  $F_1(x_1, \dots, x_n), \dots, F_m(x_1, \dots, x_n)$ . Parciálne derivácie všetkých týchto funkcií vzhľadom na premenné  $x_1, \dots, x_n$  (ak samozrejme existujú) môžu byť zapísané do matice  $m \times n$ , čo je vlastne Jacobianova matica  $J$  funkcie  $F$  a vyzerá takto:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}. \quad (5.14)$$

V našom systéme lineárnych rovníc su dve Jacobianove matice, jedna ktorá obsahuje parciálne derivácie vzhľadom na rýchlosti bublín  $\frac{\partial f^t}{\partial v}$  a jedna vzhľadom na pozície bublín  $\frac{\partial f^t}{\partial p}$ . Rozmer obidvoch Jacobianov v našom systéme je  $3n \times 3n$ . Jednotlivé komponenty (parciálne derivácie) týchto matíc majú preto rozmer  $3 \times 3$ .

## Jacobianova matica vzhľadom k rýchlostiam

Jediná sila v našom systéme, ktorá je závislá od rýchlosti je tlmiaca sila a preto v Jacobianovej matici vzhľadom na rýchlosti bublín budú iba parciálne derivácie tejto sily, teda  $\frac{\partial f^t}{\partial v} = \frac{\partial f_{damp}^t}{\partial v}$ . Výpočet jednotlivých komponentov (parciálnych derivácií) tejto matice vyzerá nasledovne:

$$c_{ij} = \begin{cases} -(c_{vis} + c_{lap})\mathbf{I}, & \text{for } i = j \\ c_{lap}(|O_i| |O_j|)^{-\frac{1}{2}} \mathbf{I}, & \text{for } i \neq j \text{ a } i \in O_j, \\ 0, & \text{inak} \end{cases} \quad (5.15)$$

kde  $O_i$  je množina susedných bublín bubliny  $B_i$ .

### Jacobianova matica vzhľadom k pozíciám

Medzi sily, ktoré sú závislé na pozícii bublín, patria príťažlivá a odpudivá sila, ktoré v našom modeli alternuje pružinová sila. Teda  $\frac{\partial f^t}{\partial p} = \frac{\partial f_{int}^t}{\partial p}$ . Výpočet jednotlivých komponentov (parciálnych derivácií) tejto matice potom vyzerá nasledovne:

$$c_{ij} = k_s \frac{p_{ij} p_{ij}^T}{p_{ij}^T p_{ij}} + k_s \left( 1 - \frac{L}{|p_{ij}|} \right) \left( \mathbf{I} - \frac{p_{ij} p_{ij}^T}{p_{ij}^T p_{ij}} \right). \quad (5.16)$$

Po vypočítaní tohto systému lineárnych rovníc dostávame vektor rýchlostí  $x = (v_{1_x}^{t+1}, v_{1_y}^{t+1}, v_{1_z}^{t+1}, \dots, v_{n_x}^{t+1}, v_{n_y}^{t+1}, v_{n_z}^{t+1})^T$ , ktorý obsahuje rýchlosti  $\forall$  bublín v čase  $t + 1$ . Pozície bublín potom vypočítame nasledovne:

$$p_i^{t+1} := p_i^t + \Delta t v_i^{t+1}. \quad (5.17)$$

## 5.5 Vizualizácia

Pri zobrazovaní peny sme sa inšpirovali článkom od Sunkel a spol. [SKS04], konkrétne ich myšlienkou orezávania bublín posúvaním vrcholov na spoločnú stenu vo vertex shadri. Pre odraz okolia na povrchu bublín sme rozhodli použiť techniku zvanú "cube mapping". Priesvitnosť našich bublín zase zabezpečuje alpha blending.

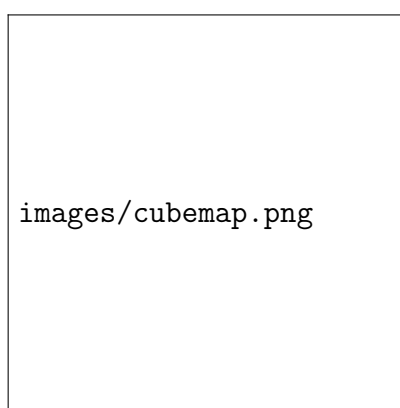
Naše bubliny sú počas celej simulácie reprezentované ako gule. Samotná deformácia bublín prebieha až vo vertex shadri, čo je program zbiehajúci na grafickej karte. Celý tento proces pozostáva z dvoch častí:

1. Naplnenie vertex shadra spoločnými rovinami bublín

## 2. Posúvanie vrcholu vo vertex shadri

Rovnice na výpočet spoločnej roviny sú popísané vo vzorcoch č. 4.8, 4.9 a 4.10. Na to aby sme vedeli zistiť, či daný vrchol treba, resp. netreba posunúť do spoločnej roviny, si potrebujeme vypočítať premennú  $\lambda_{ij}$  zo vzorca č. 4.11. Na výpočet tejto premennej potrebujeme koeficient  $d_j$  a normálu roviny  $n_j$  a preto ich po vyčíslení musíme poslať do vertex shadra pre každú spoločnú stenu každých dvoch dotýkajúcich sa bublín. Po ich odoslaní do vertex shadra sa z nich vypočíta  $\lambda_{ij}$  a v prípade, že  $\lambda_{ij} < 0$  posunie sa tento vrchol do spoločnej steny podľa vzorca č. 4.12.

Bubliny v reálnom svete sú takmer priesvitné. Na tento účel sme použili alpha blending. Ide o techniku, keď sa farba pozadia zmieša s farbou objektu, čo vytvára efekt čiastočného presvitania. Ďalší úkaz, ktorý možno vidieť na povrchu bublín je mierne odrážanie okolia. Ako sme už vyššie uviedli, na tento účel sme sa rozhodli použiť techniku zvanú "cube mapping". Ide o techniku, kedy je scéna obklopená veľkou kockou, na ktorú je aplikovaných 6 textúr (na každú stenu) z vnútornej strany. Táto kocka sa tiež zvykne nazývať "sky box". Na nasledujúcom obrázku je znázornená cube mapa.



Obr. 5.2: Cube mapa.

Pre každý vrchol bubliny sa následne vypočíta vektor odrazu, pomocou ktorého sa potom vypočíta príslušný texel z cube mapy. Tento texel je následne zmiešaný s farbou bubliny a na záver je na výslednú farbu aplikovaný spomínaný alpha blending.

# Kapitola 6

## Implementácia

Náš model sme sa rozhodli implementovať ako interaktívnu aplikáciu napísanú v jazyku C++. Na vykresľovanie bublín sme sa rozhodli použiť grafickú knižnicu OpenGL [ope], vďaka ktorej je náš kód multiplatformový. Modifikácia geometrie jednotlivých bublín peny je riešená pomocou tzv. vertex shadra, čo je program zbiehajúci na grafickej karte a na tento účel sme použili programovací jazyk GLSL. Na prácu s oknovým systémom operačného systému sme použili knižnicu na spravovanie okien GLFW [glf], ktorá je takisto multiplatformová. Pri simulácii peny sme na riešenie systému lineárnych rovníc najprv použili knižnicu TNT (Template Numeral Toolkit) [tnt]. Na riešenie systému lineárnych rovníc používala tzv. Choleského dekompozíciu, čo je však pri väčších maticiach dosť pomalé. Preto sme sa nakoniec rozhodli použiť oveľa robustnejšiu knižnicu s názvom ViennaCL [vie]. Táto knižnica ponúka kolekciu rozhraní a implementácií numerických objektov a je vhodná na vedecké výpočty v prostredí C++. Ďalej tiež ponúka základné dátové štruktúry pre numerické výpočty, ako napr. matice alebo vektory a ponúka taktiež viacero rôznych metód na riešenie systému lineárnych rovníc. Jej obrovskou výhodou je, že dokáže tieto výpočty paralelizovať a počítať na grafickej karte.

## 6.1 Triedy modelu

Z hľadiska tried je náš program rozdelený na dve hlavné triedy:

- Trieda Foam
- Trieda Bubble

### 6.1.1 Trieda Foam

Trieda Foam (po slovensky pena) je hlavnou triedou celého programu. Nastavenia peny a síl pôsobiacich v tejto pene sú kontrolované touto triedou. Asi najdôležitejšou členskou premennou tejto triedy je pole bubbles, ktoré obsahuje všetky bubliny tejto triedy. Ďalej táto trieda obsahuje všetky funkcie slúžiace na naplnenie a výpočet systému lineárnych rovníc, ktorého vyriešením dostávame rýchlosti bublín v čase  $t + 1$ . Nasledujúce tabuľky obsahujú zoznam a popis niektorých členských premenných a funkcií tejto triedy.

Tabuľka 6.1: Tabuľka členských premenných.

Členská premenná	Popis
vector<Bubble> bubbles	pole obsahujúce všetky bubliny peny
vector<Bubble> sceneBubbleQueue	zásobník bublín pri pridávaní bublín do systému pomocou klávesovej skratky A
float liquid_volume	konštanta definujúca objem kvapaliny v pene
GLfloat stiffnessCoefficient	konštanta definujúca tvrdosť pružín pružinového systému
GLfloat c_vis	tlmiaca konštanta
GLfloat c_lap	tlmiaca konštanta
bool gravitation	premenná indikujúca zapnutie / vypnutie gravitačnej sily v modeli
GLhandleARB GLSLprog	GLSL program zbiehajúci na grafickej karte



Tabuľka 6.2: Tabuľka niektorých funkcií triedy.

Funkcia	Popis
<code>void simulateStep(delta_t)</code>	funkcia, ktorá má na starosti výpočet simulácie v časovom kroku <code>delta_t</code>
<code>void fillMassMatrix(&amp;M, &amp;M2, &amp;bubble, delta_t)</code>	funkcia pre naplnenie matice váh
<code>void fillVelocities(&amp;v, &amp;bubble)</code>	funkcia pre naplnenie vektora rýchlostí
<code>void fillForces(&amp;f, &amp;bubble)</code>	funkcia pre naplnenie vektora síl
<code>void accumulateBubbleForce(&amp;bubble)</code>	funkcia, ktorá na začiatku simulácie naakumuluje všetky sily pôsobiace na jednotlivé bubliny
<code>void render(selectedBubble, wire)</code>	funkcia, ktorá má na starosti vizualizáciu peny
<code>void setBubblesNeighborhood()</code>	táto funkcia má na starosti určenie susedov jednotlivých bublín peny
<code>void setNewVelocitiesAndPositions(&amp;velocities, delta_t)</code>	táto funkcia aktualizuje nové pozície a rýchlosti bublín v pene
<code>void sortBubbles(camera_pos)</code>	funkcia slúžiaca na zoradenie bublín od najvzdialenejšej bubliny (od kamery) po najbližšiu
<code>Array2D&lt;GLfloat&gt; computeNewVelocities(M, F)</code>	táto funkcia využíva knižnicu ViennaCL [vie] na výpočet systému lineárnych rovníc
<code>GLfloat getRestingLength(r1, r2)</code>	funkcia, ktorá počíta pokojovú dĺžku pružiny na základe polomerov dvoch bublín

**Funkcia na výpočet simulácie v čase  $\Delta t$** 

Ako vidno z návrhu tohto modelu, pri výpočte systému lineárnych rovníc zo vzorca č. 5.10 sa pri výpočte používajú tri matice veľkosti  $3n \times 3n$ , čo by pri väčšom počte bublín mohla byť veľká záťaž na pamäť. Keďže jednotlivé podmatice veľkosti  $3 \times 3$  viem naplňať nezávisle od seba, rozhodli sme sa aspoň čiastočne optimalizovať tento výpočet tým, že používame len dve matice. Jedna matica slúži ako matica váh  $M$  (na pravej strane tejto rovnice) a druhá matica slúži ako matica  $A = M - \Delta t \partial f^t / \partial v - \Delta t^2 \partial f^t / \partial p$ . Takto v postupnom cykle prechádzame všetky bubliny peny a postupne naplňame tieto dve matice. Následne posunieme maticu  $A$  a vektor  $b$  funkciou *ComputeNewVelocities*( $A, b$ ), ktorá za pomoci knižnice ViennaCL [vie] vypočíta tento systém lineárnych rovníc a vráti rýchlosti bublín v čase  $t + 1$ . Na základe nich potom funkcia *SetNewVelocitiesAndPositions*( $v^{t+1}, \Delta t$ ) vypočíta podľa vzorca č. 5.17 pozície v čase  $t + 1$  a priradí bublinám nové pozície a rýchlosti.

---

**Algorithm 6.1** Funkcia *SimulateStep*( $\Delta t$ ) na výpočet jedného kroku simulácie.

---

```

SetBubblesNeighborhood()
for  $i = 0$  to bubbles.size() do
    FillMassMatrix(& $A$ , & $M$ , bubbles[ $i$ ],  $\Delta t$ )
    FillVelocities(& $v$ , bubbles[ $i$ ])
    AccumulateBubbleForce(bubble[ $i$ ])
    FillForces(& $f$ , bubble[ $i$ ])
end for
 $b = M * v + \Delta t * f$ 
 $v^{t+1} = \text{ComputeNewVelocities}(A, b)$ 
SetNewVelocitiesAndPositions( $v^{t+1}, \Delta t$ )

```

---

### 6.1.2 Trieda Bubble

Jednotlivé bubliny peny v našom modeli sú inštanciami triedy Bubble (po slovensky bublina). Členské premenné tejto triedy definujú vlastnosti bubliny ako sú rýchlosť, pozícia, polomer alebo sila pôsobiaca na bublinu. Funkcie tejto triedy slúžia zväčša na získanie, resp. nastavenie konkrétnych členských premenných tejto triedy. Nasledujúca tabuľka obsahuje zoznam niektorých členských premenných tejto triedy.

Tabuľka 6.3: Tabuľka členských premenných.

Členská premenná	Popis
GLfloat radius	polomer bubliny
vec3 position	pozícia bubliny v priestore
vec3 velocity	vektor rýchlosti bubliny
vec3 force	vektor sily pôsobiacej na bublinu
bool smoky	premenná indikujúca, či sa v danej bubline nachádza dym alebo nie
vector<GLfloat> vertices	vrcholy bubliny
vector<GLfloat> normals	normály vrcholov bubliny
vector<GLfloat> indices	indexy vrcholov pre facy bubliny
GLhandleARB GLSLprog	GLSL program zbiehajúci na grafickej karte

# Kapitola 7

## Výsledky

Náš model sme testovali na počítači s procesorom Intel®Core™i7-3537U 2.00GHz a grafickou kartou AMD Radeon HD 8670M.

V nasledujúcej tabuľke sú merania simulácie nášho modelu pri použití knižnice TNT [tnt], ktorá používala na riešenie systému lineárnych rovníc tzv. Choleského dekompozíciu. V prvom stĺpci je počet bublín, druhý stĺpec indikuje, či bola pri simulácii zapnutá aj vizualizácia a tretí stĺpec ukazuje počet snímkov za sekundu.

Tabuľka 7.1: Tabuľka meraní simulácie pri použití knižnice TNT [tnt] s metódou Choleského dekompozície.

# bublín	vizualizácia	FPS
1	áno	238
5	áno	115
10	áno	70
15	áno	65
15	nie	150
30	áno	42
30	nie	48
50	áno	12
50	nie	13
60	áno	8
60	nie	8
100	áno	2
100	nie	2
120	áno	2
120	nie	2
150	áno	1
150	nie	1

Tabuľka č. 7.2 obsahuje merania simulácie nášho modelu pri použití knižnice ViennaCL [vie] s použitím metódy združených gradientov na riešenie systému lineárnych rovníc. V prvom stĺpci je počet bublín, druhý stĺpec indikuje, či bola pri simulácii zapnutá aj vizualizácia a tretí stĺpec ukazuje počet snímkov za sekundu.

Tabuľka 7.2: Tabuľka meraní simulácie pri použití knižnice ViennaCL [vie] s metódou združených gradientov počítanou na GPU.

# bublín	vizualizácia	FPS
1	áno	227
5	áno	70
10	áno	70
15	áno	68
15	nie	145
30	áno	56
30	nie	70
50	áno	23
50	nie	28
60	áno	18
60	nie	22
100	áno	8
100	nie	9
120	áno	6
120	nie	7
150	áno	4
150	nie	4
180	áno	1
180	nie	1

Z nameraných výsledkov vidieť, že pri menšom množstve bublín bola prvá knižnica využívajúca Choleského dekompozíciu rýchlejšia oproti knižnici využívajúcej metódu združených gradientov a GPU. Toto môže byť spôsobené tým, že sa dáta musia posielat' na grafickú kartu. Pri väčšom počte bublín však už vidieť, že druhá knižnica počíta systém lineárnych častíc oveľa rýchlejšie a zatiaľ čo prvá knižnica pri 60 bublinách dokázala simulovať penu pri 8 fps, druhá knižnica pri cca. 8 fps dokázala simulovať 100 až 120 bublín. Výsledky nášho modelu sú pre nás celkom uspokojujúce, aj keď vedeli by sme si predstaviť ešte o niečo väčší počet bublín, ktorý by bol schopný náš

model simulovať v reálnom čase.

## 7.1 Výsledné animácie

Na obrázku č. 7.1 vidno 4 podobrázky zobrazujúce animáciu tzv. "Bubble Show". V ľavom hornom podobrázku je vidieť prvú bublinu pridanú do tejto formácie. Na pravom hornom podobrázku vidieť zoskupenie dvoch bublín tejto formácie. Na podobrázku v ľavom dolnom rohu už vidieť 6 bublín tejto formácie. Na poslednom podobrázku v pravom dolnom rohu vidieť výslednú formáciu, kedy je do stredu týchto bublín pridaná posledná bublina obsahujúca dym, ktorá je v tvare kocky, čo je spôsobené vplyvom okolitých bublín, ktoré ju deformujú.

Obr. 7.1: Animácia tzv. "Bubble Show"vytvárajúcej kocku uprostred bublín.

Na obrázku č. 7.2 vidno tiež animáciu zobrazujúcu "Bubble Show". V ľavom hornom podobrázku je opäť vidieť prvú bublinu pridanú do tejto formácie. Na pravom hornom podobrázku vidieť zoskupenie dvoch bublín tejto formácie. Na podobrázku v ľavom dolnom rohu už vidieť 8 bublín tejto formácie. Na poslednom podobrázku v pravom dolnom rohu vidieť výslednú formáciu, kedy je do stredu týchto bublín pridaná posledná bublina obsahujúca dym, ktorá je v tvare šesťbokého hranolu, čo je spôsobené vplyvom okolitých bublín, ktoré ju deformujú.

Obr. 7.2: Animácia tzv. "Bubble Show"vytvárajúcej šesťboký hranol uprostred bublín.

Na obrázku č. 7.3 vidieť penu pozostávajúcu z 30-tich bublín.

Obr. 7.3: Pena pozostávajúca z 30-tich bublín.



Na obrázku č. 7.4 vidieť penu pozostávajúcu zo 120-tich bublín.

Obr. 7.4: Pena pozostávajúca zo 120-tich bublín.

Na obrázku č. 7.5 vidieť detailné zoskupenie dvoch bublín ako aj ich drôtené zobrazenie.

Obr. 7.5: Priesečník dvoch bublín.

# Kapitola 8

## Záver

V tejto diplomovej práci sme rozobrali a zhodnotili viacero existujúcich modelov simulujúcich penu alebo bubliny, pričom sme navrhli a implementovali vlastný model založený na pružinovom systéme, ktorý je čiastočne inšpirovaný predchádzajúcimi riešeniami. Tento model je schopný simulovať a vizualizovať penu v reálnom čase, avšak je tu ešte priestor na jeho optimalizáciu. Prínos tohto modelu však vidíme najmä v animáciách simulujúcich tzv. "Bubble Show", pri ktorých sa síce nejedná o klasickú penu, avšak vzhľadom na to, že ide takisto o zhlukovanie bublín, je tento náš model vhodným prostriedkom pre vytváranie aj takýchto animácií.

V ďalšom vývoji tohto modelu vidíme priestor pre zrýchlenie implementáciou efektívnejšieho algoritmu na hľadanie najbližších susedov bublín, čo by mohlo priniesť menšiu výpočtovú náročnosť. Takisto je tu priestor na zrýchlenie implementovaných algoritmov napr. tým, že sa budú počítať len viditeľné priesečníky medzi bublinami. Čo sa týka rozšírenia tohto modelu, tu vidíme priestor na implementáciu ďalších externých síl pôsobiacich na penu a jednotlivé bubliny tejto peny.

# Literatúra

- [BDWR12] Oleksiy Busaryev, Tamal K. Dey, Huamin Wang, and Zhong Ren. Animating bubble interactions in a liquid foam. *ACM Trans. Graph.*, 31(4):63, 2012.
- [Bra92] Kenneth A. Brakke. The surface evolver. *Experimental Mathematics*, 1(2):141–165, 1992.
- [CK02] Kwang-Jin Choi and Hyeong-Seok Ko. Stable but responsive cloth. *ACM Trans. Graph.*, 21(3):604–611, 2002.
- [CPPK07] Paul W. Cleary, Soon Hyoun Pyo, Mahesh Prakash, and Bon Ki Koo. Bubbling and frothing liquids. *ACM Trans. Graph.*, 26(3):97, 2007.
- [Dur95] D. J. Durian. Foam mechanics at the bubble scale. *Phys. Rev. Lett.*, 75:4780–4783, Dec 1995.
- [GH04] S. T. Greenwood and D. H. House. Better with bubbles: Enhancing the visual realism of simulated fluid. In *Proceedings of the 2004 ACM SIGGRAPH/Eurographics Symposium on Computer Animation*, SCA '04, pages 287–296, Aire-la-Ville, Switzerland, Switzerland, 2004. Eurographics Association.
- [glf] GLFW. <http://www.glfw.org/>. Navštívené: 2. máj 2014.

- [HK03] Jeong-Mo Hong and Chang-Hun Kim. Animation of bubbles in liquid . *Comput. Graph. Forum*, 22(3):253–262, 2003.
- [HKM05] Benjamin Herzhaft, Sarkis Kakadjian, and Michel Moan. Measurement and modeling of the flow behavior of aqueous foams using a recirculating pipe rheometer. *Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects*, 263(1–3):153 – 164, 2005. A collection of papers presented at the 5th European Conference on Foams, Emulsions, and Applications, {EUFOAM} 2004, University of Marne-la-Vallee, Champs sur Marne (France), 5-8 July, 2004.
- [HLYK08] Jeong-Mo Hong, Ho-Young Lee, Jong-Chul Yoon, and Chang-Hun Kim. Bubbles alive. *ACM Trans. Graph.*, 27(3), 2008.
- [KLL<sup>+</sup>07] ByungMoon Kim, Yingjie Liu, Ignacio Llamas, Xiangmin Jiao, and Jarek Rossignac. Simulation of bubbles in foam with the volume control method. *ACM Trans. Graph.*, 26(3):98, 2007.
- [KRvS03] Andrew M. Kraynik, Douglas A. Reinelt, and Frank van Swol. Structure of random monodisperse foam. *Phys. Rev. E*, 67:031403, Mar 2003.
- [KRvS04] Andrew M. Kraynik, Douglas A. Reinelt, and Frank van Swol. Structure of random foam. *Phys. Rev. Lett.*, 93:208301, Nov 2004.
- [KVG02] Hendrik Kück, Christian Vogelgsang, and Günther Greiner. Simulation and rendering of liquid foams. In *Graphics Interface*, pages 81–88, 2002.

- [MUM<sup>+</sup>06] Viorel Mihalef, B. Unlusu, Dimitris N. Metaxas, Mark Sussman, and M. Yousuff Hussaini. Physics based boiling simulation. In Carol O’Sullivan and Frederic H. Pighin, editors, *Symposium on Computer Animation*, pages 317–324. Eurographics Association, 2006.
- [ope] OpenGL. <http://www.opengl.org/>. Navštívené: 2. máj 2014.
- [PGB08] L. Piazza, J. Gigli, and A. Bulbarello. Interfacial rheology study of espresso coffee foam structure and properties. *Journal of Food Engineering*, 84(3):420 – 429, 2008.
- [Pla73] J.A.F. Plateau. *Statique expérimentale et théorique des liquides soumis aux seules forces moléculaires*. Number zv. 1 in Statique expérimentale et théorique des liquides soumis aux seules forces moléculaires. Gauthier-Villars, 1873.
- [RSA12] C. Redenbach, I. Shklyar, and H. Andrä. Laguerre tessellations for elastic stiffness simulations of closed foams with strongly varying cell sizes. *International Journal of Engineering Science*, 50:70–78, 2012.
- [SKS04] Martin Sunkel, Jan Kautz, and Hans-Peter Seidel. Rendering and simulation of liquid foams. In Bernd Girod, Marcus A. Magnor, and Hans-Peter Seidel, editors, *VMV*, pages 263–269. Aka GmbH, 2004.
- [Tay76] Jean E. Taylor. The structure of singularities in soap-bubble-like and soap-film-like minimal surfaces. *Ann. Math. (2)*, 103:489–539, 1976.

- [tnt] TNT. <http://math.nist.gov/tnt/>. Navštívené: 2. máj 2014.
- [TSS<sup>+</sup>07] Nils Thürey, Filip Sadlo, Simon Schirm, Matthias Müller-Fischer, and Markus H. Gross. Real-time simulations of bubbles and foam within a shallow water framework. In Michael Gleicher and Daniel Thalmann, editors, *Symposium on Computer Animation*, pages 191–198. Eurographics Association, 2007.
- [Ďu01] Roman Ďurikovič. Animation of soap bubble dynamics, cluster formation and collision. *Comput. Graph. Forum*, 20(3):67–76, 2001.
- [vie] ViennaCL. <http://viennacl.sourceforge.net/index.html>. Navštívené: 2. máj 2014.
- [WPHP] Weaire, Pittet, Hutzler, and Pardal.
- [ZYP06] Wen Zheng, Jun-Hai Yong, and Jean-Claude Paul. Simulation of bubbles. In Carol O’Sullivan and Frederic H. Pighin, editors, *Symposium on Computer Animation*, pages 325–333. Eurographics Association, 2006.

## Zoznam obrázkov

4.1	Zoskupenie dvoch bublín [Ďu01]. . . . .	14
4.2	Zaoblenie zoskupenia dvoch bublín [Ďu01]. . . . .	14
4.3	Zaoblenie zoskupenia troch bublín [Ďu01]. . . . .	15
4.4	Sily pôsobiace na bublinu [Ďu01]. . . . .	16
4.5	Výsledná animácia [Ďu01]. . . . .	16
4.6	Spoločná rovina dvoch gúľ [SKS04]. . . . .	19
4.7	Premiestňovanie vertexov na spoločnú stenu gúľ [SKS04]. . . . .	20
4.8	Premiestňovanie vertexov na spoločné steny pri kolízií viacerých gúľ [SKS04]. . . . .	20
4.9	Výsledná animácia [SKS04]. . . . .	21
4.10	Štruktúra peny [BDWR12]. . . . .	22
4.11	Výsledná animácia [BDWR12]. . . . .	24
5.1	Bubliny a ich pojmy. . . . .	28
5.2	Cube mapa. . . . .	35
7.1	Animácia tzv. "Bubble Show"vytvárajúcej kocku uprostred bublín. . . . .	46
7.2	Animácia tzv. "Bubble Show"vytvárajúcej šesťboký hranol uprostred bublín. . . . .	46
7.3	Pena pozostávajúca z 30-tich bublín. . . . .	47



<i>ZOZNAM OBRÁZKOV</i>	56
7.4 Pena pozostávajúca zo 120-tich bublín. . . . .	48
7.5 Priesečník dvoch bublín. . . . .	49