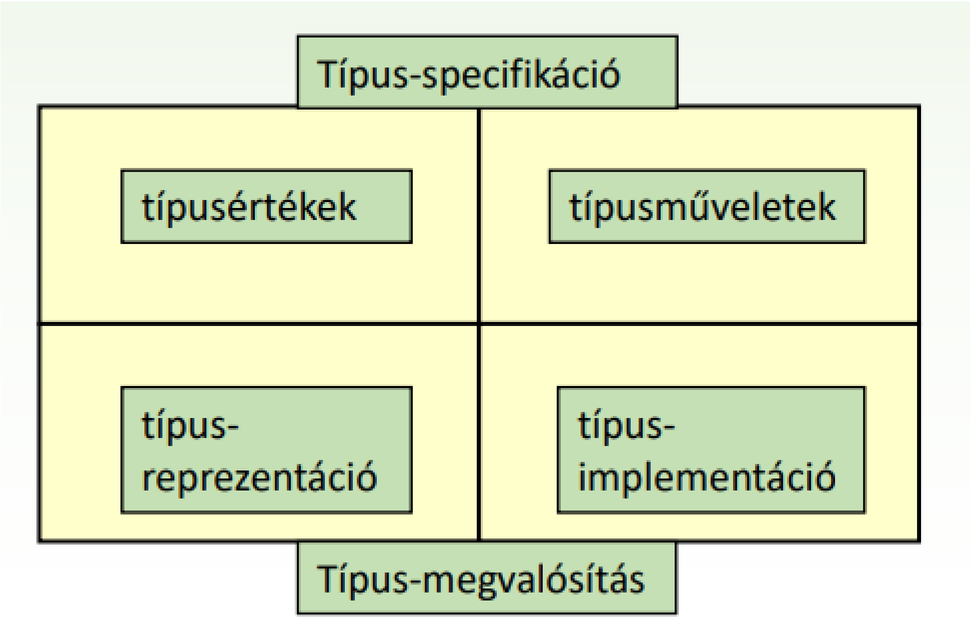

1. Feladat – racionális számok

Valósítsuk meg a racionális számok típusát úgy, hogy kihasználjuk azt, hogy minden racionális szám ábrázolható két egész számmal, mint azok hányadosa! Implementáljuk az alapműveleteket!

Megoldás:

$\mathbb{Q}$ $//\frac{x}{y}$	$A = (a{:}\mathbb{Q},\ b{:}\mathbb{Q},\ c{:}\mathbb{Q})$ $c := a \pm b$
	$A = (a{:}\mathbb{Q},\ b{:}\mathbb{Q},\ c{:}\mathbb{Q})$ $c := a*b$
	$A = (a{:}\mathbb{Q},\ b{:}\mathbb{Q},\ c{:}\mathbb{Q})$ $c := a/b$
$x,y{:}\ \mathbb{Z}$ (Invariáns: $y \neq 0$)	$c.x,\ c.y := a.x*b.y \pm a.y*b.x,\ a.y*b.y$
	$c.x,\ c.y := a.x * b.x,\ a.y * b.y$
	$c.x,\ c.y := a.x * b.y,\ a.y * b.x$

2. Feladat – komplex számok

Valósítsuk meg a komplex számok típusát! Ábrázoljuk a komplex számokat az algebrai alakjukkal ($x+iy$)! Implementáljuk az alapműveleteket!

Megoldás:

$\mathbb{C}$ $//(x+iy)$	$A = (a: \mathbb{C}, b:\mathbb{C}, c:\mathbb{C})$ $c := a \pm b$
	$A = (a:\mathbb{C}, b:\mathbb{C}, c:\mathbb{C})$ $c := a * b$
	$A = (a:\mathbb{C}, b:\mathbb{C}, c:\mathbb{C})$ $c := a/b$
x,y: $\mathbb{R}$	$c.x,\ c.y := a.x \pm b.x,\ a.y \pm b.y$
	$c.x,\ c.y := a.x\ b.x - a.y\ b.y,\ \ a.x\ b.y + a.y\ b.x$
	$c.x,\ c.y := (a.x\ a.y + b.x\ b.y)/(\ a.x^2 + b.x^2),$ $(a.x\ b.y - b.x\ a.y)/(\ a.x^2 + b.x^2)$

3. Prímek halmaza

Valósítsuk meg a prímek halmazának típusát a következőképpen: A prímek halmazát egy természetes számmal tudjuk reprezentálni úgy, hogy a szám a halmazban szereplő prímek szorzata. Implementáljuk a következő műveleteket!

- benne van-e
- betesz
- kivesz
- üres
- üres-e
- minimum
- elemszám

Prím típus

prímek halmaza (PH)	$A = (ph$: PH, x: ℕ, l: 𝕃) l:= benne van-e (x)
	$A = (ph$: PH, x: ℕ) Ef=(ph=ph' és $x \notin ph$) ph :=betesz(x)
	$A = (ph$: PH, x: ℕ) *Ef*=(ph=ph' és $x \notin ph$) ph:=kivesz(x)
p: ℕ	l := prim(x) és (p mod x=0)
	p:=$p*x$
	p:=p/x

Valósítsuk meg az alsó háromszög mátrix típust (a mátrixok a főátlójuk felett csak nullát tartalmaznak)! Ilyenkor elegendő csak a főátló és az alatti elemeket reprezentálni egy sorozatban. Implementáljuk a mátrix i-edik sorának j-edik elemét visszaadó műveletet, valamint két mátrix összegét és szorzatát!

7 x 7 -es alsó háromszög mátrix

	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
1	1						
2	2	3					
3	4	5	6				
4	7	8	9	10			
5	11	12	13	14	15		
6	16	17	18	19	20	21	
7	22	23	24	25	26	27	28

A sorszámok mutatják, hogy hányadik lesz a mátrix elem a tömbben.

A mátrix elhelyezése sorfolytonosan egy egydimenziós tömbben
(a biztosan nulla értékű elemeket felesleges tárolni)

1	[1,1]	
2	[2,1]	
3	[2,2]	
4	[3,1]	
5	[3,2]	
6	[3,3]	
27	[7,6]	
28	[7,7]	
29	0	*a nulla értéket is tárolhatjuk egy példányban*

Az index függvény rendeli hozzá a mátrix elem idexeihez a tárolásnak megfelelő indexet:

$$ind(i,j) = j + \sum_{k=1}^{i-1} k = j + \frac{i(i-1)}{2} \quad , ha\ 1 \le j \le i \le n$$

ind(1,1)=1
ind(2,1)=2
…
ind(4,2)=8
…
ind(7,7)=28

Az alsó háromszög mátrix típus specifikációja:

Típus értékek:	**Típus műveletek:**
$AlsóH(\mathbb{R}^{n\times n})$	**Két mátrix összege:** $A=(a,\ b,\ c{:}AlsóH(\mathbb{R}^{n\times n}))$ $c := a+b$
	Két mátrix szorzata: $A=(a,\ b,\ c{:}\ AlsóH(\mathbb{R}^{n\times n}))$ $c := a*b$
	Egy mátrix elem értékének visszaadása: $A=(a{:}\ AlsóH(\mathbb{R}^{n\times n}), i{:}\mathbb{N},\ j{:}\mathbb{N}, e{:}\mathbb{R})$ $e := a[i,j]$

<table>
<tr><td rowspan="3">Típus reprezentáció:
$v:\mathbb{R}^{n(n+1)/2}$</td><td>összeg:
$\forall i \in [1..n(n+1)/2]$: $c.v[i] = a.v[i]+b.v[i]$</td></tr>
<tr><td>szorzat:
$\forall i,j \in [1..n]$: ha $i \geq j$ akkor
$c.v[i(i-1)/2+j] = \sum_{k=j}^{i} a.v\left[\frac{i(i-1)}{2}+k\right] b.v\,[k(k-1)/2 + j]$</td></tr>
<tr><td>érték:
$i \geq j \rightarrow e = v[i(i-1)/2+j]$
$i<j \rightarrow e = 0$</td></tr>
</table>