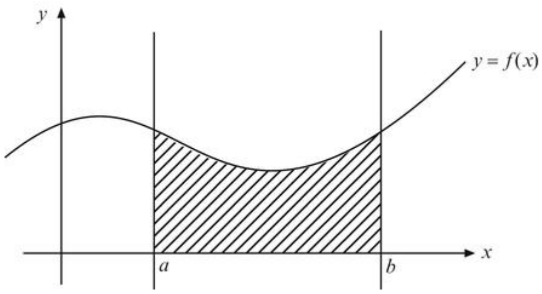
Riemann-integrál

Elméleti áttekintés

Riemann-integrál

1. Megjegyzés (A Riemann-integrál geometriai jelentése). *Az* $\int_a^b f(x)dx$ *Riemann-integrál annak a tartománynak az* ***előjeles területe****, melyet az* $y = f(x)$ *görbe, az* x*-tengely, valamint az* $x = a$ *és* $y = b$ *egyenletű egyenes határol.*



1. Tétel (Newton–Leibniz). *Legyen* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *egy folytonos függvény és jelölje* $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *az* f *függvény egy primitív függvényét. Ekkor*

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

2. Tétel (Parciális integrálás tétele). *Legyenek* $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *olyan differenciálható függvények, melyek deriváltjai Riemann-integrálhatóak. Ekkor*

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

3. Tétel (Helyettesítéses integrálás tétele). *Legyen* $\varphi\colon [a,b] \to [A,B]$ *egy olyan szigorúan monoton növekedő, folytonosan differenciálható függvény, melyre* $\varphi(a) = A$ *és* $\varphi(b) = B$*. Ha az* $f\colon [\varphi(a), \varphi(b)] \to \mathbb{R}$ *függvény folytonos, akkor*

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Improprius integrálok

1. Definíció. *Legyen* a *valós,* b *pedig bővített valós szám, úgy, hogy* $a < b$ *teljesül. Legyen továbbá* $f\colon [a,b[\to \mathbb{R}$ *egy olyan függvény, mely minden* $x \in [a,b[$ *esetén Riemann-integrálható az* $[a,x]$ *intervallumon. Értelmezzük az* $F\colon [a,b[\to \mathbb{R}$ *függvényt az*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \qquad (x \in [a,b[)$$

formulával. Ha az F *függvénynek a* b *pontban létezik és véges a baloldali határértéke, akkor azt mondjuk, hogy az* $\int_a^b f(x)dx$ ***improprius integrál konvergens*** *és ebben az esetben*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{x\to b-} F(x).$$

2. Definíció. *Legyen a bővített valós, b pedig valós szám, úgy, hogy $a < b$ teljesül. Legyen továbbá $f\colon]a, b] \to \mathbb{R}$ egy olyan függvény, mely minden $x \in]a, b]$ esetén Riemann-integrálható az $[x, b]$ intervallumon. Értelmezzük az $F\colon]a, b] \to \mathbb{R}$ függvényt az*

$$F(x) = \int_x^b f(t)dt \qquad (x \in]a, b])$$

formulával. Ha az F függvénynek az a pontban létezik és véges a jobboldali határértéke, akkor azt mondjuk, hogy az $\int_a^b f(x)dx$ ***improprius integrál konvergens*** *és ebben az esetben*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{x \to a+} F(x).$$

3. Definíció. *Legyenek a, b bővített valós számok úgy, hogy $a < b$. Legyen továbbá $f\colon]a, b[\to \mathbb{R}$ egy olyan függvény, mely az $]a, b[$ intervallum minden zárt részintervallumán Riemann-integrálható. Tegyük fel, hogy van olyan $c \in]a, b[$, mely esetén az*

$$\int_a^c f(x)dx \qquad \text{és az} \qquad \int_c^b f(x)dx$$

improprius integrálok konvergensek. Ebben az esetben azt mondjuk, hogy az $\int_a^b f(x)dx$ improprius integrál is konvergens és

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Feladatok

Riemann-integrál

1. Feladat.

A Newton–Leibniz-formula felhasználásával számítsuk ki az alábbi Riemann-integrálokat.

(a) $$\int_2^4 x^3 dx,$$

(b) $$\int_2^7 \sqrt{x} dx,$$

(c) $$\int_{-4}^{-2} \frac{1}{x^2} dx,$$

(d) $$\int_2^6 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx,$$

(e) $$\int_2^8 \frac{5}{x} dx,$$

(f) $$\int_{12}^{120} \frac{7}{x} dx,$$

(g) $$\int_6^{10} \frac{2}{x-3} dx,$$

(h) $$\int_{-1}^{2} \frac{2}{x-3} dx,$$

2. Feladat. *A Newton–Leibniz-formula felhasználásával számítsuk ki az alábbi Riemann-integrálokat.*

(a) $$\int_0^{\pi/4} \sin(x) dx,$$

(b) $$\int_0^{2\pi} \cos(x) dx,$$

(c) $$\int_{-4}^{7} \frac{1}{1+x^2} dx,$$

(d) $$\int_2^4 e^x dx$$

(e) $$\int_2^6 3^x dx,$$

(f) $$\int_{\frac{1}{2}}^{3} \frac{\cosh(x)}{2} dx,$$

(g) $$\int_2^4 \sinh(x) dx,$$

(h) $$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{\sin^2(x)} dx,$$

3. Feladat. *A parciális integrálás tételének felhasználásával számítsuk ki az alábbi Riemann-integrálokat.*

(a) $$\int_0^2 xe^x dx,$$

(b) $$\int_2^3 x^2e^{2x} dx,$$

(c) $$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} x\sin(x) dx,$$

(d) $$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} x^2\cos(x) dx,$$

(e) $$\int_e^{e^2} x^2\ln(x) dx$$

(f) $$\int_e^{e^5} \sqrt{x}\ln^2(x) dx$$

(g) $$\int_{\frac{1}{2}}^1 e^x\sin(x) dx,$$

(h) $$\int_{-1}^0 e^{2x}\cos(x) dx,$$

(i) $$\int_2^4 x\sinh(x) dx,$$

(j) $$\int_1^{10} x^2\cosh(x) dx,$$

(k) $$\int_5^6 x^3\left(e^x+\ln(x)\right) dx$$

(l) $$\int_0^1 x^3e^{-x^2} dx$$

A helyettesítéses integrálás tételének felhasználásával számítsuk ki az alábbi Riemann-integrálokat.

(a) $$\int_1^2 (3x+4)^3 dx,$$

(b) $$\int_2^3 \frac{1}{(2x+1)^4} dx,$$

(c) $$\int_2^3 \frac{x^2}{\sqrt{x^3-2}} dx,$$

(d) $$\int_1^2 \frac{e^{3x}}{e^{3x}+1} dx,$$

(e) $$\int_{-1}^0 \frac{3}{e^{x+1}} dx,$$

(f) $$\int_1^4 \frac{x}{\sqrt{5x-4}} dx,$$

(g) $$\int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{2x^2}{\sqrt{1+x^2}} dx,$$

(h) $$\int_3^4 3x^2\sqrt{x^2-1} dx,$$

Improprius integrálok

4. Feladat. *Vizsgáljuk meg, hogy konvergensek-e az alábbi improprius integrálok.*

(a) $$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx,$$

(b) $$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx,$$

(c) $$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx,$$

(d) $$\int_0^{+\infty} \frac{1}{25+x^2} dx,$$

(e) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{1+x^2} dx,$$

(f) $$\int_5^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}} dx,$$

(g) $$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx,$$

(h) $$\int_3^{+\infty} \frac{1}{(x-2)^3} dx,$$

(i) $$\int_5^{+\infty} \frac{2}{(x-3)(x+4)} dx,$$

(j) $$\int_3^{+\infty} \frac{5}{(x-1)(x+5)} dx,$$

(k) $$\int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{(x+1)(x-3)} dx,$$

(l) $$\int_1^{+\infty} e^{-x} dx,$$

(m) $$\int_2^{+\infty} 5e^{-2x} dx,$$

(n) $$\int_{-\infty}^3 e^x dx,$$

(o) $$\int_1^{+\infty} \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx,$$

(p) $$\int_{10}^{+\infty} xe^x dx,$$

(q) $$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\ln(x)}dx$$

(r) $$\int_2^{+\infty} \frac{3x}{x^2+x-2}dx$$

(s) $$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^3}dx$$

(t) $$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\cos(\beta x)dx$$

5. Feladat. *Vizsgáljuk meg, hogy konvergensek-e az alábbi improprius integrálok.*

(a) $$\int_0^{5} \frac{1}{\sqrt{25-x^2}}dx,$$

(c) $$\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}dx,$$

(e) $$\int_0^{8} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx$$

(g) $$\int_{-2}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx,$$

(i) $$\int_0^{1} \ln(x)dx,$$

(b) $$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx,$$

(d) $$\int_{-2}^{3} \frac{1}{\sqrt{|x|}}dx,$$

(f) $$\int_{-2}^{3} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx,$$

(h) $$\int_{-1}^{1} \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}dx,$$

(j) $$\int_0^{1} \frac{3x}{(1-x)(x+2)}dx$$

6. Feladat. *Döntsük el, hogy az alábbi improprius integrálok közül melyek konvergensek.*

(a) $$\int_2^{+\infty} \sin(x)dx$$

(c) $$\int_3^{+\infty} \frac{1}{x+e^x}dx$$

(e) $$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}dx$$

(g) $$\int_0^{+\infty} x^2 2^x dx$$

(b) $$\int_2^{+\infty} \frac{\cos^2(x)}{x^2}dx$$

(d) $$\int_3^{+\infty} \frac{1}{x-e^x}dx$$

(f) $$\int_1^{+\infty} e^{-x^2}dx$$

(h) $$\int_0^{+\infty} e^{-x}x^n dx \ \ (n\in\mathbb{N})$$

Nehezebb feladatok

7. Feladat. *Magyarázzuk meg, hogy az alábbi integrálok esetében az x változó megadott helyettesítése miért vezet hamis eredményre*

(a) $$\int_{-1}^{1} 1dx \qquad t = x^{\frac{2}{3}}$$

(b) $$\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}dx \qquad x = \frac{1}{t}$$

(c) $$\int_0^{\pi} \frac{1}{1+\sin^2(x)}dx \qquad \mathrm{tg}(x) = t$$

8. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy minden $p > 0$ esetén*

$$\lim_{n\to\infty} \int_n^{n+p} \frac{\sin(x)}{x} = 0.$$

9. Feladat. *Legyen $f\colon [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ egy olyan folytonos függvény, melyre $\lim_{x\to\infty} f(x) = \alpha$ teljesül. Határozzuk meg a*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} f(x)dx$$

határértéket. Először tekintsük azt a speciális esetet, amikor az f függvény az arctg *függvény.*

10. Feladat. *Tegyük fel, hogy az $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ improprius integrál konvergens. Következik-e ebből, hogy $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$?*