Alkalmazott matematika

Baran Ágnes

Lineáris egyenletrendszerek

Lineáris egyenletrendszerek megoldása

Példa

$$\begin{aligned} -2x_1 - x_2 + 4x_3 &= 3 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 1 \\ -4x_1 - 10x_2 - 5x_3 &= -12 \end{aligned}$$

$Ax = b$, ahol

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \\ -4 & -10 & -5 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -12 \end{bmatrix}$$

Gauss-elimináció (sorcsere nélküli)

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -2 & -1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ -4 & -10 & -5 & -12 \end{array}\right] \xrightarrow[\ell_{31}=2]{\ell_{21}=-1} \left[\begin{array}{rrr|r} -2 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -8 & -13 & -18 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\ell_{32}=-4} \left[\begin{array}{rrr|r} -2 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right]$$

A visszahelyettesítés:

$$\begin{aligned} -x_3 &= -2 & \rightarrow \quad x_3 &= 2 \\ 2x_2 + 3x_3 &= 4 & \rightarrow \quad x_2 &= -1 \\ -2x_1 - x_2 + 4x_3 &= 3 & \rightarrow \quad x_1 &= 3 \end{aligned}$$

A visszahelyettesétés helyett folytathattuk volna az eliminációt (Gauss-Jordan elimináció):

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -2 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} -2 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} -2 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Ekkor a jobb oldalon a megoldásvektort kapjuk.

Matlab-ban

- A backslash operátorral: Az A mátrix és b vektor megadása után

```
>> x=A\b
x =
   3
  -1
   2
```

- Az rref függvénnyel:

```
  >> rref([A b])
ans =
     1     0     0     3
     0     1     0    -1
     0     0     1     2
```

Ez a Gauss-Jordan elimináció végén kapott mátrixot adja vissza.

LU-felbontás

Példa

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \\ -4 & -10 & -5 \end{bmatrix}$$

Gauss-elimináció:

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \\ -4 & -10 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\ell_{21} = -1 \\ \ell_{31} = 2}} \begin{bmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -8 & -13 \end{bmatrix}$$

Mátrixos alakban:

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \\ -4 & -10 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -8 & -13 \end{bmatrix}$$

Gauss-elimináció:

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -8 & -13 \end{bmatrix} \xrightarrow{\ell_{32} = -4} \begin{bmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Mátrixos alakban:

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -8 & -13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Mivel

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \\ -4 & -10 & -5 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \end{bmatrix}}_{L:=} \underbrace{\begin{bmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{U:=}$$

Az A mátrix **LU-felbontás**a:

$$A = LU$$

ahol
L alsóháromszög mátrix, átlójában csupa 1-es,
U felsőháromszög mátrix.

LU-felbontás

Az A mátrix LU-felbontása:

$$A = LU$$

ahol
L alsóháromszög mátrix, átlójában csupa 1-es,
U felsőháromszög mátrix.

Az eredeti feladat: $Ax = b$ megoldása.

$$LUx = b$$

A mátrix felbontása után a megoldás két lépésben történik:
1. $Ly = b$
2. $Ux = y$

Mindkét rendszer mátrixa háromszög alakú.

A mátrix determinánsa

Ha $A = LU$, akkor a determinánsok szorzástétele alapján

$$\det(A) = \det(L) \cdot \det(U)$$

Háromszögmátrix determinánsa a főátlóban álló elemek szorzata, így $\det(L) = 1$ és

$$\det(A) = \det(U)$$

Az A determinánsa az U főátlóbeli elemeinek szorzata.

LU-felbontás

Példa (folytatás)

$Ax = b$, ahol

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \\ -4 & -10 & -5 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -12 \end{bmatrix}$$

A mátrix felbontása:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \\ -4 & -10 & -5 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{U}$$

A visszahelyettesítések:

1. $Ly = b$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -12 \end{bmatrix}$$

felülről lefelé visszahelyettesítve:

$$\begin{aligned} y_1 &= 3 & & \\ -y_1 + y_2 &= 1 & \quad \rightarrow \quad & y_2 = 4 \\ 2y_1 - 4y_2 + y_3 &= -12 & \quad \rightarrow \quad & y_3 = -2 \end{aligned}$$

2. $Ux = y$

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

alulról felfelé visszahelyettesítve:

$$\begin{aligned} -x_3 = -2 \quad &\rightarrow \quad x_3 = 2 \\ 2x_2 + 3x_3 = 4 \quad &\rightarrow \quad x_2 = -1 \\ -2x_1 - x_2 + 4x_3 = 3 \quad &\rightarrow \quad x_1 = 3 \end{aligned}$$

Az A determinánsa:

$$\det(A) = \det(U) = (-2) \cdot 2 \cdot (-1) = 4$$

LU-felbontás, műveletigény

Az LU-felbontás műveletigénye ugyanannyi, mint a Gauss-eliminációé:

A mátrix felbontása: $\frac{n^3}{3} + O(n^2)$ művelet

A két visszahelyettesítés: összesen n^2 művelet

A **determináns kiszámítása** LU-felbontással: $\approx \frac{n^3}{3}$ művelet

Az LU-felbontás tárigénye:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \\ -4 & -10 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -8 & -13 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

tömören:

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \\ -4 & -10 & -5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -2 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & -8 & -13 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} -2 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

Példa

Oldjuk meg az $Ax = b$ lineáris egyenletrendszert LU-felbontással!

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ -4 & 0 & 2 & -5 \\ 6 & -1 & -2 & 6 \\ 4 & 2 & -10 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \\ 2 \\ 19 \end{bmatrix}$$

$$A \to \begin{bmatrix} \boxed{2} & -1 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & -5 & -3 \\ 2 & 4 & -12 & -7 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ -2 & \boxed{-2} & 4 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -4 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & \boxed{-1} & -2 \\ 2 & -2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Így

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}}_{U}$$

A két visszahelyettesítés:

1. $Ly = b$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \\ 2 \\ 19 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} y_1 &= -3 & & \\ -2y_1 + y_2 &= -5 & \rightarrow \quad & y_2 = -11 \\ 3y_1 - y_2 + y_3 &= 2 & \rightarrow \quad & y_3 = 0 \\ 2y_1 - 2y_2 + 4y_3 + y_4 &= 19 & \rightarrow \quad & y_4 = 3 \end{aligned}$$

2. $Ux = y$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -11 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 3x_4 = 3 \quad &\rightarrow \quad x_4 = 1 \\ -x_3 - 2x_4 = 0 \quad &\rightarrow \quad x_3 = -2 \\ -2x_2 + 4x_3 + x_4 = -11 \quad &\rightarrow \quad x_2 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = -3 \quad &\rightarrow \quad x_1 = -1 \end{aligned}$$

Az A mátrix determinánsa:

$$\det(A) = \det(U) = 2 \cdot (-2) \cdot (-1) \cdot 3 = 12$$

2. feladat

Oldja meg az $Ax = b$ és $Ax = c$ lineáris egyenletrendszereket LU-felbontással!

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 12 & -6 & 2 \\ -6 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 5 \\ -28 \\ 12 \end{bmatrix}, \qquad c = \begin{bmatrix} -6 \\ 18 \\ -15 \end{bmatrix}.$$

Megjegyzés

Ha több lineáris egyenletrendszert kell megoldanunk, ahol a rendszerek mátrixa azonos, akkor a mátrix felbontását elegendő egyszer elvégezni.

Cholesky-felbontás

Cholesky-felbontás

Az A felbontását $A = LL^T$ alakba, ahol L alsóháromszög mátrix, Cholesky-felbontásnak nevezzük.

Az A mátrixnak pontosan akkor létezik Cholesky felbontása invertálható L mátrixszal, ha A szimmetrikus és pozitív definit.

Mivel az L^T mátrixot nem szükséges kiszámítani és tárolni, ezért a tár- és műveletigény kb fele az LU-felbontás tár- és műveletigényének.

Cholesky-felbontás

A felbontás k-adik lépése ($k = 1, \dots, n$):
(L-lel felülírva A alsóháromszög részét)

$$\begin{aligned}
a_{kk} &= \sqrt{a_{kk}} \\
a_{ik} &= \frac{a_{ik}}{a_{kk}}, \qquad\qquad i = k+1, \dots, n \\
a_{ij} &= a_{ij} - a_{ik} \cdot a_{jk}, \quad j = k+1, \dots, n, \quad i = j, \dots, n
\end{aligned}$$

A visszahelyettesítések:

1. $Ly = b$ (y-nal felülírva b-t)

$$b_i = \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} b_j \right] / a_{ii}, \quad i = 1, \dots, n$$

2. $L^T x = y$ (x-szel felülírva y-t)

$$b_i = \left[b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ji} b_j \right] / a_{ii}, \quad i = n, \dots, 1$$

Példa:

$$A = \begin{bmatrix} 9 & -3 & -6 \\ -3 & 5 & 4 \\ -6 & 4 & 9 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \boxed{3} & -1 & -2 \\ -1 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & \boxed{2} & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

azaz

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{L^T}$$

A felbontás másképpen:

Az L-et oszloponként számítva a k-adik oszlop $(k = 1, \ldots, n)$:

$$\ell_{kk} = \left[a_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} \ell_{kj}^2 \right]^{1/2},$$

$$\ell_{ik} = \left[a_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} \ell_{ij}\ell_{kj} \right] / \ell_{kk}, \quad i = k+1, \ldots, n.$$

Megj.: itt is felülírható L-lel A.

A visszahelyettesítések ugyanúgy, mint az előbb.

PLU-felbontás (Gauss-elimináció sorcserével)

Permutációs mátrix: az egységmátrix sorainak permutálásával

Pl. az i-edik és j-edik sor cseréjével ($i < j$):

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & & & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & & & & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & & & & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_j \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow i. \\ \\ \leftarrow j. \\ \\ \\ \end{array}$$

Ekkor

PA: az A mátrix i-edik és j-edik sora felcserélődik,

AP: az A mátrix i-edik és j-edik oszlopa felcserélődik.

Gauss-elimináció:

1. ha $a_{11} \neq 0 \quad \rightarrow \quad$ végrehajtjuk az első lépést

2. ha $a_{11} = 0$ és $a_{i1} = 0$ minden $i = 2, \ldots, n$-re $\quad \rightarrow \quad$ az első oszlopban nincs kiküszöbölendő elem $\quad \rightarrow \quad$ a 2. lépéssel folytathatjuk

3. ha $a_{11} = 0$, de van olyan i, hogy $a_{i1} \neq 0 \quad \rightarrow \quad$ sorcsere

Ha P_1 az 1. és i-edik sort cseréli:

$$A = P_1 A_1 \quad \rightarrow \quad A_1\text{-re kezdődhet a felbontás}$$

az 1. lépés után:

$$A = P_1 A_1 = P_1 L_1 A^{(2)}$$

a 2. lépés:

1. ha $a_{22}^{(2)} \neq 0 \quad \rightarrow \quad$ végrehajtjuk a 2. lépést

2. ha $a_{22}^{(2)} = 0$ és $a_{i2}^{(2)} = 0$ minden $i = 3, \ldots, n$-re $\quad \rightarrow \quad$ a 2. oszlopban nincs kiküszöbölendő elem $\quad \rightarrow \quad$ a köv. lépéssel folytathatjuk

3. ha $a_{22}^{(2)} = 0$, de van olyan $i > 2$, hogy $a_{i2}^{(2)} \neq 0 \quad \rightarrow \quad$ sorcsere

Ha P_2 a 2. és i-edik sort cseréli:

$$A^{(2)} = P_2 A_2$$

$$A = P_1 L_1 P_2 A_2$$

$$L_1 P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \ell_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \ell_{31} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \\ \ell_{i1} & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \\ \ell_{n1} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \ell_{21} & 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \ell_{31} & 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & & \\ \ell_{i1} & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & & \\ \ell_{n1} & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$= P_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \ell_{i1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \ell_{31} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \\ \ell_{21} & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \\ \ell_{n1} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} =: P_2 \widetilde{L}_1$$

$$A = P_1 P_2 \widetilde{L}_1 A_2$$

$\rightarrow$ folytatható a felbontás.

Az $(n-1)$-edik lépés után:

$$A = \underbrace{P_1 P_2 \cdots P_{n-1}}_{P:=} LU$$

azaz

$$A = PLU$$

ahol
P: permutációs mátrix
L: alsóháromszög mátrix, átlójában 1-esek
U: felsőháromszög mátrix

Az $Ax = b$ egyenletrendszer megoldása:

$$A = PLU$$

$$LUx = P^{-1}b$$

- 1. $Ly = P^{-1}b$ megoldása
- 2. $Ux = y$ megoldása

Megjegyzés

$P^{-1} = P^T$, továbbá a gyakorlatban nem a P hanem a P^T mátrixot határozzuk meg, és egyetlen oszlopvektorba tömörítve tároljuk.

Példa

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & -28 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -6 \\ -11 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

1. lépés (sorcsere+a felbontás 1. lépése)

$$P = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 4 & 2 & -28 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \boxed{1} & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 4 & 14 & -28 & -7 \\ -1 & -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

2. lépés (sorcsere nem kell, a felbontás 2. lépése)

$$\to \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & 4 \\ 4 & 14 & 0 & -63 \\ -1 & -3 & -5 & 15 \end{bmatrix}$$

1. lépés (sorcsere+a felbontás 1. lépése)

$$P = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 4 & 2 & -28 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \boxed{1} & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 4 & 14 & -28 & -7 \\ -1 & -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

2. lépés (sorcsere nem kell, a felbontás 2. lépése)

$$\to \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & 4 \\ 4 & 14 & 0 & -63 \\ -1 & -3 & -5 & 15 \end{bmatrix}$$

3. lépés (sorcsere és kész a felbontás)

$$P = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ -1 & -3 & \boxed{-5} & 15 \\ 4 & 14 & 0 & -63 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 1 & 0 \\ 4 & 14 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & -63 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} -6 \\ -11 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad P^{-1}b = \begin{bmatrix} -11 \\ -6 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

1. $Ly = P^{-1}b \quad \rightarrow \quad y_1 = -11,\ y_2 = -6,\ y_3 = -30,\ y_4 = 126$
2. $Ux = y \quad \rightarrow \quad x_4 = -2,\ x_3 = 0,\ x_2 = 2,\ x_1 = -1$

Gyengén meghatározott lineáris egyenletrendszerek

Példa. Az

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.0001 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

egy.rendszer megoldása:

$$x = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Az

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.0001 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2.0001 \end{bmatrix}$$

egy.rendszer megoldása:

$$y = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Gyengén meghatározott lineáris egyenletrendszerek

Példa. Tekintsük a következő 100×100-as lineáris egyenletrendszert:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{99} \\ x_{100} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -98 \\ -97 \\ -96 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ez egyértelműen megoldható:

$$x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = x_{99} = x_{100} = 1.$$

Perturbáljuk egy kicsit a rendszert!

Gyengén meghatározott lineáris egyenletrendszerek

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{99} \\ x_{100} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -98 \\ -97 \\ -96 \\ \vdots \\ 0 \\ \color{red}{1.00001} \end{bmatrix}$$

Ez is egyértelműen megoldható, de

$$x_1 \approx 3.1691 \cdot 10^{24}.$$

Egy pici perturbáció az adatokban $\rightarrow$ hatalmas különbség a megoldásban.

Normák, kondíciószámok

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertálható, $b \in \mathbb{R}^n$, $b \neq 0$
az $Ax = b$ lin. egyenletrendszer megoldását keressük.

Tfh b hibával terhelten ismert: b helyett $b + \delta b$ adott. Ekkor a lineáris egyenletrendszer:

$$Ay = b + \delta b$$

vagy

$$A(x + \delta x) = b + \delta b$$

A kérdés: mekkora lehet a megoldás hibája?

A jobb oldali vektor változása mekkora hatással van a megoldás változására?

vektorokat kell mérnünk $\rightarrow$ normák

Norma

Legyen X egy lineáris tér $\mathbb{R}$ felett. Az $d : X \to \mathbb{R}$ leképezés **norma**, ha

1. $d(x) \geq 0$ minden $x \in X$ esetén
2. $d(x) = 0 \iff x = 0$
3. $d(\lambda x) = |\lambda| d(x)$, minden $\lambda \in \mathbb{R}$ és $x \in X$ esetén
4. $d(x + y) \leq d(x) + d(y)$ minden $x, y \in X$ esetén
(háromszög-egyenlőtlenség)

A továbbiakban $d(x)$ helyett $\|x\|$

Példák:

Legyen $X = \mathbb{R}^n$

1. Az 1-norma, vagy oktaéder norma:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

2. A 2-norma, vagy euklideszi norma:

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{1/2}$$

3. A ∞-norma, vagy maximum norma:

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|$$

Példa.

Ha

$$x = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

akkor

$$\|x\|_1 = |-3| + |0| + |1| = 4$$
$$\|x\|_2 = \left(|-3|^2 + |0|^2 + |1|^2\right)^{1/2} = \sqrt{10}$$
$$\|x\|_\infty = \max\{|-3|, |0|, |1|\} = 3$$

Abszolút hiba, relatív hiba

Az $A(x + \delta x) = b + \delta b$ rendszerben:

- $\|\delta b\|$: a jobb oldal abszolút hibája
- $\|\delta x\|$: a megoldás abszolút hibája

Ezek önmagukban nem elég informatívak.

Sokkal érdekesebb számunkra:

- $\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$: a jobb oldal relatív hibája
- $\frac{\|\delta x\|}{\|x\|}$: a megoldás relatív hibája

A relatív hiba becsléséhez mátrixnormákra is szükségünk van.

Legyen $\|\cdot\|$ egy vektornorma $\mathbb{R}^n$-en és $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ egy mátrix. Ekkor

$$d(A) := \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

a **vektornorma által indukált mátrixnorma**.

Be lehet látni, hogy ez valóban normát definiál.

A továbbiakban $d(A)$ helyett $\|A\|$

Az indukált mátrixnormák tulajdonságai

(1) $\|E\| = 1$

(2) $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$ minden $x \in \mathbb{R}^n$ esetén

(3) $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ minden $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ esetén

Milyen mátrixnormát indukálnak az általunk megismert vektornormák?

1. Az 1-vektornorma által indukált mátrixnorma:

$$\|A\|_1 = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \qquad \text{(oszlopnorma)}$$

2. A ∞-vektornorma által indukált mátrixnorma:

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \qquad \text{(sornorma)}$$

3. A 2-vektornorma által indukált mátrixnorma:

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)} \qquad \text{(spektrálnorma)}$$

ahol $\lambda_{\max}(A^T A)$ az $A^T A$ mátrix legnagyobb sajátértéke

Példa

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \|A\|_1 =? \quad \|A\|_\infty =?$$

$$\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow 7 \\ \leftarrow 4 \\ \leftarrow 5 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 6 & 2 & 8 \end{array} & \end{array}$$

$\|A\|_1 = 8$ és $\|A\|_\infty = 7$

A kondíciószám

Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertálható, $b \in \mathbb{R}^n$, $b \neq 0$
az $Ax = b$ lin. egyenletrendszer megoldását keressük.

Tfh b hibával terhelten ismert: b helyett $b + \delta b$ adott. Ekkor a lin. egy.rendszer:

$$Ay = b + \delta b$$

vagy

$$A(x + \delta x) = b + \delta b$$

Be lehet látni, hogy

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \underbrace{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|}_{cond(A):=} \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

Kondíciószám

Legyen A egy invertálható mátrix. A

$$cond(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$

számot a mátrix kondíciószámának nevezzük.

$$\boxed{\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq cond(A) \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}}$$

Megjegyzés

A kondíciószám felső becslést ad arra, hogy hibás jobboldallal adott lin. egy.rendszer esetén a megoldás relatív hibája a jobboldal relatív hibájának hányszorosa lehet.

A kondíciószám tulajdonságai

(1) függ a mátrixnormától

(2) $cond(A) \geq 1$

(3) ha $A = Q$ ortogonális mátrix (azaz $Q^T Q = E$), akkor $cond_2(A) = 1$

(4)

$$\left| \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} \right| \leq cond(A)$$

ahol $\lambda_{\max}$ és $\lambda_{\min}$ az A absz.értékben legnagyobb és legkisebb sajátértéke

Legyen b relatív hibája $\frac{\|\delta b\|}{\|b\|} \approx \varepsilon_1$ (inputhiba nagyságrendű).
Ekkor ha

$$cond(A) \geq \frac{1}{\varepsilon_1}$$

akkor

$$cond(A)\frac{\|\delta b\|}{\|b\|} \geq 1$$

azaz a megoldásra rakódó hiba ugyanakkora lehet, mint maga a megoldás.
Az egyenletrendszer rosszul kondícionált.

Ahhoz, hogy a megoldásnak legalább 1 helyes számjegye legyen

$$cond(A) \leq \frac{1}{a\varepsilon_1}$$

kell, mert ekkor

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{1}{a}$$

Példa

Legyen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0.7 \\ 0.7 & 0.6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0.8 \\ 0.8 & 0.7 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0.9 \\ 0.9 & 0.8 \end{bmatrix}.$$

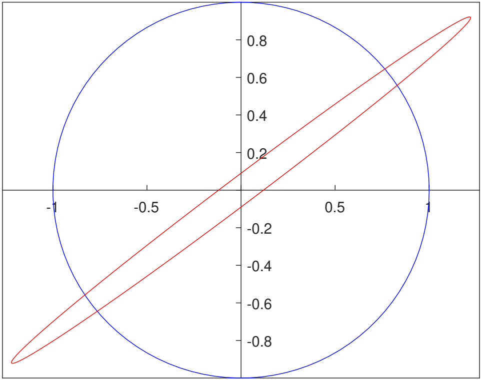
Ekkor 2-normában

$$cond(A) = 21.2256, \quad cond(B) = 46.1450, \quad cond(C) = 325.9969.$$

Vizsgáljuk meg, hogy az adott mátrixokat, mint lineáris transzformációkat tekintve hogyan transzfolmálódnak az origó körüli egységkör pontjai!

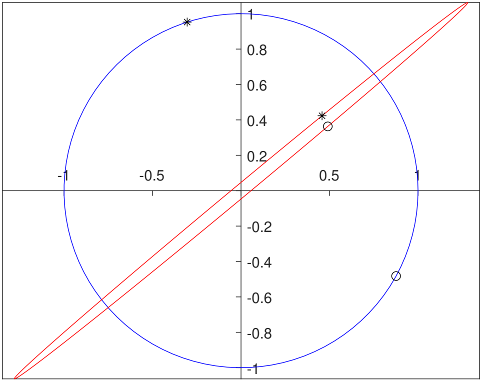
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0.7 \\ 0.7 & 0.6 \end{bmatrix}, \quad cond(A) = 21.2256$$

esetén



$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0.8 \\ 0.8 & 0.7 \end{bmatrix}, \quad cond(B) = 46.1450$$

esetén



Itt két egymáshoz közeli képpontot is megjelöltünk, a pontok eredeti helyzetével együtt.

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0.9 \\ 0.9 & 0.8 \end{bmatrix}, \quad cond(C) = 325.9969$$

esetén