6. Ea. 2017. 10. 16.

VEKTOROK (folyt)

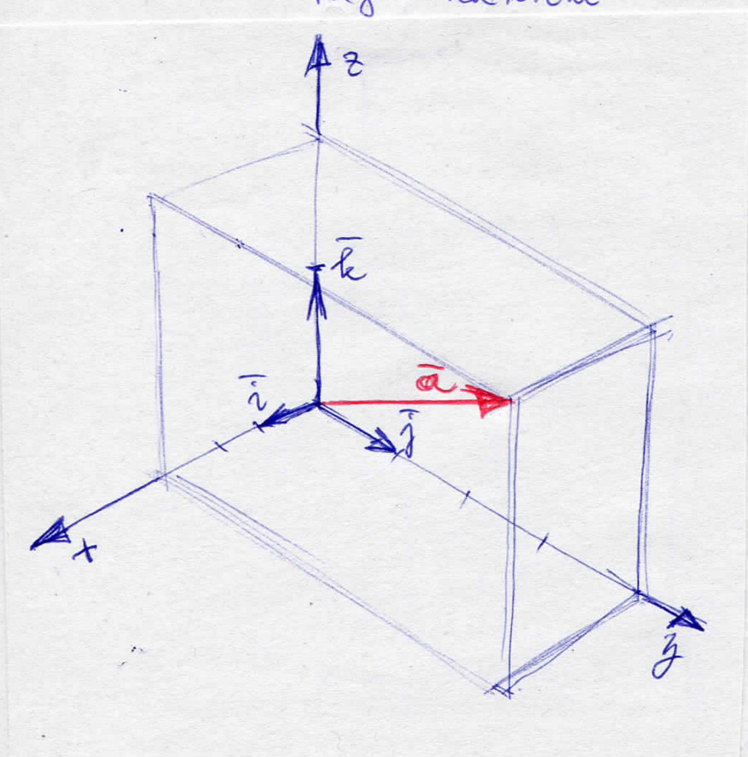
- Skaláris szorzás (belső szorzás) (két vektor ∢-e meghat.)
- Vektoriális szorzás
  - $|\bar a \times \bar b| = |\bar a| \cdot |\bar b| \sin\varphi$
  - $\bar a, \bar b, \bar a \times \bar b$ ebben a sorrendben jobbsodrású rendszer
  - $(\bar a \times \bar b) \perp \bar b$
    $(\bar a \times \bar b) \perp \bar a$

kiszámolás

$$|\bar a \times \bar b| = |\bar a| \cdot |\bar b| \cdot \sin\varphi$$

tudjuk számolni

ha nagyon kell, akkor a belső szorzatból $\cos\varphi$-ből kiszámolható.
De ez nem annyira jó!



Mit jelent az $\bar a$ vektor $(3, 4, 2)$ koordinátája?

$\bar i, \bar j, \bar k$ az x, y, z tengelyek irányába mutató egységvektorok.

$$\Rightarrow \bar a = 3 \cdot \bar i + 4 \cdot \bar j + 2 \cdot \bar k$$

$\left.\begin{array}{l} \bar a(x_a, y_a, z_a) \\ \bar b(x_b, y_b, z_b) \end{array}\right\} \Rightarrow$ $\bar a \times \bar b$ koordinátáit keressük.

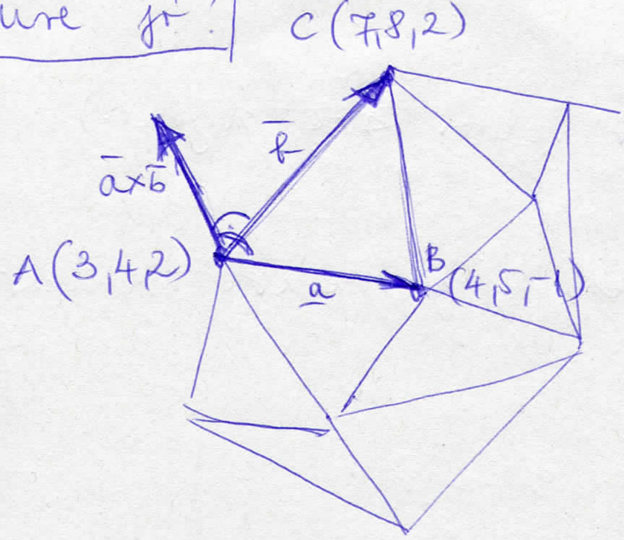
$$\bar a \times \bar b = \det \begin{pmatrix} \bar i & \bar j & \bar k \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{pmatrix} =$$

← a mátrix első sora az $\bar i, \bar j, \bar k$ vektorok „jelét" tartalmazza.

$$= \bar i \cdot \det \begin{pmatrix} y_a & z_a \\ y_b & z_b \end{pmatrix} - \bar j \cdot \det \begin{pmatrix} x_a & z_a \\ x_b & z_b \end{pmatrix} + \bar k \cdot \det \begin{pmatrix} x_a & y_a \\ x_b & y_b \end{pmatrix}$$

$$= (y_a \cdot z_b - y_b \cdot z_a) \cdot \bar i - (x_a \cdot z_b - x_b \cdot z_a) \cdot \bar j + (x_a \cdot y_b - x_b - y_a) \cdot \bar k$$

$\boxed{\text{Mire jó?}}$



Egy Δ lapra $\perp$ vektort akarunk számolni.

$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ két vektor

$\bar{a}$: $\overrightarrow{AB} = (1,1,-3)$

$\bar{b}$: $\overrightarrow{AC} = (4,4,0)$

$\bar{a}\times\bar{b}$ egy lehetséges normálvektor

$$\bar{a}\times\bar{b} = \det\begin{pmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & -3 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix} = 12\cdot\bar{i} - (+12)\cdot\bar{j} + 0\cdot\bar{k}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\bar{a}\times\bar{b}\ (12,-12,0)}$$

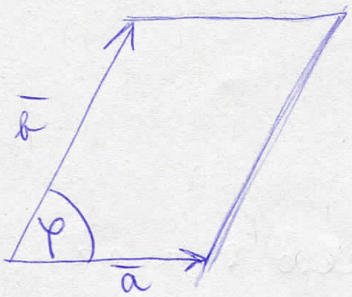
$\boxed{\text{FONTOS: } \bar{a}\times\bar{b} \neq \bar{b}\times\bar{a} \text{ !!!}}$ a jobb sodrásra figyelni kell!

$\bar{b}\times\bar{a}$ az ellenkező irányba mutat!!

$\bar{a}\times\bar{b} = -(\bar{b}\times\bar{a})$

A vektoriális szorzás <u>nem kommutatív</u> művelet.

$\boxed{\text{Mire jó még?}}$ <u>Területszámítás</u>



$T = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\sin\varphi$

A két vektor által felfeszített paralelogramma területe az $\bar{a}\times\bar{b}$ hossza.

Vegyesszorzat

(igazából egy kicsit kombinálódnak az előző szorzatok.)

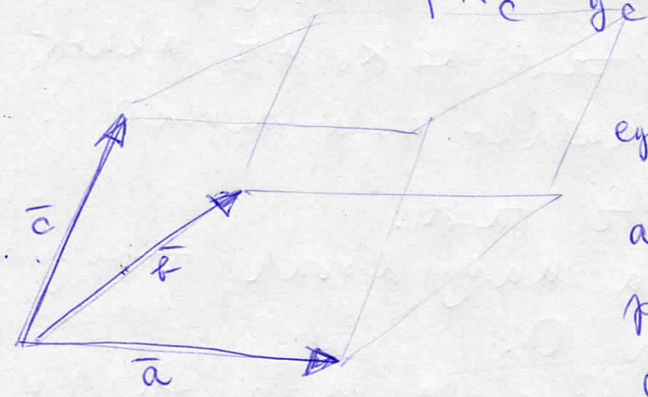
$V^3 \times V^3 \times V^3 \to \mathbb{R}$

$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = (\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c}$

($\bar{a} \times \bar{b}$ és $\bar{c}$ belső szorzata)

kiszámítás:

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \det \begin{pmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{pmatrix}$$



Az $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ vektorok felfeszítenek egy paralelepipedont.

az $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ értéke a paralelepipedon térfogatát adja (vagy annak a (-1)szeresét)

Vektorok kölcsönös helyzete

Kiemelten vizsgálandó két vektor párhuzamossága vagy merőlegessége.

$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}| \cdot \cos\varphi \qquad \cos\varphi = 0$, ha $\varphi = 90°$

$\boxed{\bar{a} \cdot \bar{b} \iff \bar{a} \perp \bar{b}}$

A merőlegesség a skaláris szorzattal vizsgálható!

$|\bar{a} \times \bar{b}| = |\bar{a}||\bar{b}| \cdot \sin\varphi \qquad \sin\varphi = 0$, ha $\varphi = 0° \Rightarrow \bar{a} \parallel \bar{b}$

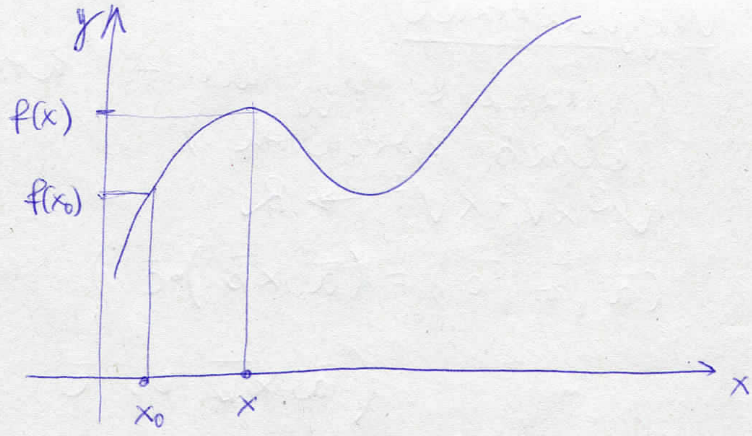
$\boxed{|\bar{a} \times \bar{b}| = 0 \iff \bar{a} \parallel \bar{b}}$

A párhuzamosság a vektoriális szorzattal vizsgálható!

$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ = paralelepipedon térfogata $= 0$, ha a három vektor egy síkban van.

$\boxed{(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = 0 \iff \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \text{ egy síkban vannak}}$

Differenciálszámítás



f(x) függvény
kiválasztottam egy x_0
értéket és ettől viszonyítok
majd az x-ig
Ez a függvényértékek
változását is eredményezi:

$$f(x) - f(x_0)$$

Hogyan viszonyítható ez az $x - x_0$ különbséghez?

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

ha x tart az x_0-hoz akkor a számláló és a nevező is 0-hoz tart.
DE a hányadosuk többnyire nem 0.
Ez lesz majd a függvény deriváltja az x_0 helyen.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

Néhány szabály

$f(x)$	$f'(x)$
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$c \cdot f(x)$	$c \cdot f'(x)$
$f(x) + g(x)$	$f'(x) + g'(x)$

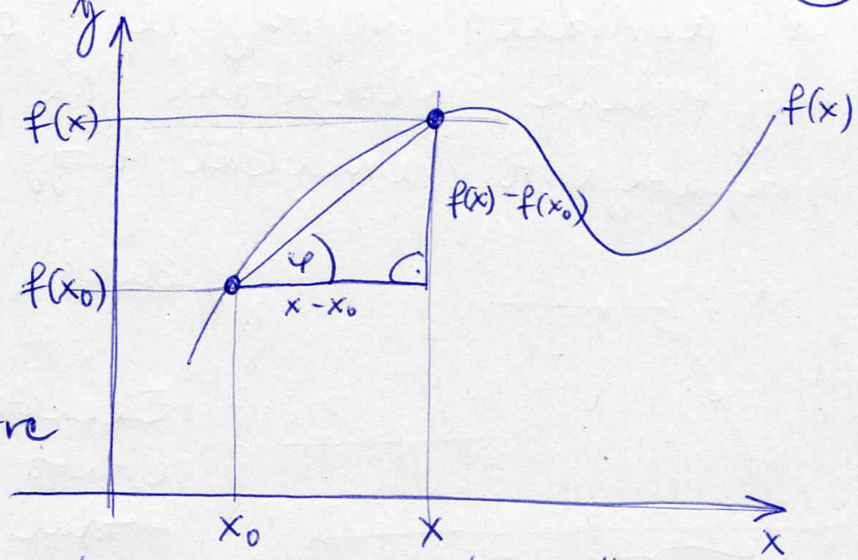
Mire jó?

$y = f(x)$

x_0: rögzített érték

x: változhat

Egy adott pillanatban a grafikon az $(x_0, f(x))$ és $(x, f(x))$ pontjait összekötve egy húrt rajzolunk.



A húr alatti részen létrejön egy derékszögű Δ, melynek oldalai párhuzamosak az x, y tengelyekkel.

Ebben a Δ-ben a befogók aránya:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

← függőleges befogó (számláló)

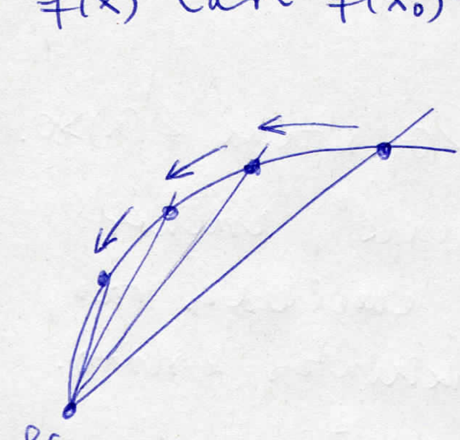
← vízszintes befogó (nevező)

Ez a hányados a jelölt φ szög tangense.

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

: a szelő meredeksége, ahol a φ szög a szelő x tengely + felével bezárt szöge.

Ennek a határhelyzetét fogjuk vizsgálni, amikor az x tart x_0-hoz $(x \to x_0)$ és ezzel $f(x)$ tart $f(x_0)$-hoz $(f(x) \to f(x_0))$.

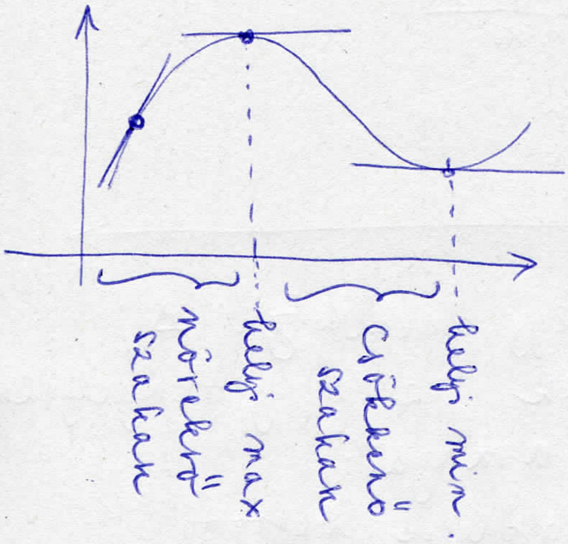


Ekkor a szelők $f(x)$ pontja közelíti az $f(x_0)$-t, amely pont az összes szelő közös pontja.

A szelők határhelyzete az $f(x_0)$-beli érintőt adja.

$f'(x_0)$ geometriai jelentése: az $f(x_0)$ pontbeli érintő meredeksége.

A derivált segítségével sokféle dolgot meg tudunk állapítani az eredeti függvény grafikonjáról anélkül, hogy azt ábrázolnánk.



Helyi (lokális) minimum/maximum

Ezekben a pontokban az érintő az x tengellyel || helyzetbe fordul ⇒ meredeksége = 0.
Vagyis $f'(x_0) = 0$ csak ezeken a helyeken fordul elő.
A növekvő szakasz esetén az érintő meredeksége: +
A csökkenő szakasz esetén az érintő meredeksége: −

Összefoglalva:

$f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ nő

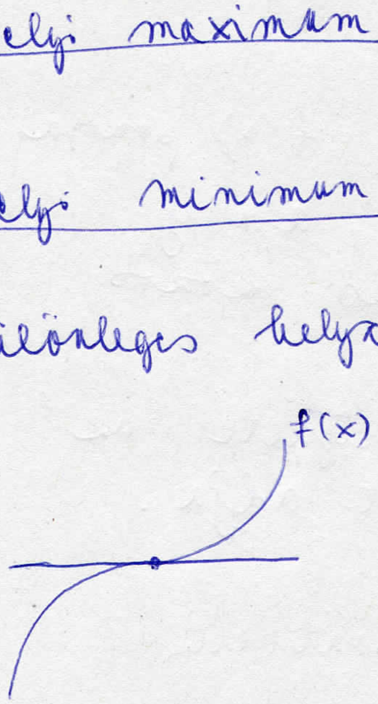
$f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ csökken

$f'(x) = 0 \rightarrow$ lokális szélsőértékhely, érintő || x teng.

Helyi maximum van, ha:
$f'(x) = 0$ és előtte $f'(x) > 0$, utána $f'(x) < 0$.

Helyi minimum van, ha:
$f'(x) = 0$ és előtte $f'(x) < 0$, utána $f'(x) > 0$.

Különleges helyzet: „pillanatnyi megtorpanás", amikor előtte és utána is emelkedés van, de mégis van vízszintes érintő.



Neve: inflexiós pont
$f'(x) = 0$ és $f'(x)$ előjele előtte és utána is megegyezik.