Diszkrét matematika
Gyakorlati feladatsor

*A *-gal jelölt feladatok a nehezebb problémákat jelölik.*

1. Halmazok és függvények

1.1. Legyen $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ páros}\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 4\}$, valamint $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 6\}$. Mivel egyenlőek az alábbi halmazok?

$$B \setminus C, \qquad A \setminus (B \cap C), \qquad B \triangle C, \qquad (B \cup C) \setminus A$$

1.2. Tekintsük az alábbi halmazokat: $A = \mathbb{Z}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ páros}\}$, $C = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $D = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ prím}\}$. Mivel egyenlőek az alábbi halmazok?

$$A \setminus B, \qquad B \setminus A, \qquad A \cap B, \qquad C \setminus B, \qquad (A \setminus B) \cup D, \qquad B \triangle D$$

1.3. Írjuk fel az $A = \{a, b, c\}$ halmaz hatványhalmazát!

1.4. Egyenlő-e az alábbi két halmaz?

(a) Az 5-nél nagyobb egész, valamint a 6-nál nem kisebb természetes számok halmaza;

(b) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1 \text{ és } x < x^2\}$ és $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ és } x = |x|\}$;

(c) $A = \mathbb{R}$ és $B = \{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{x^2} = x\}$.

1.5. Legyenek A, B és C a H alaphalmaz tetszőleges részhalmazai. Írjuk fel a halmazműveletek, valamint A, B, C és H segítségével H azon elemeinek halmazát, amelyek

(a) csak a B halmaznak elemei (A, B és C közül);
(b) pontosan két halmaznak elemei;
(c) nem elemei mindhárom halmaznak;
(d) legfeljebb egy halmaznak elemei;
(e) legalább két halmaznak elemei;
(f) legalább egy halmaznak elemei.

1.6. Jelölje X a 2020. szeptember elsején 20 és 22 óra között a „Vak késdobáló” elnevezésű vendéglátóipari egységben megjelent vendégek halmazát. Tekintsük az X alábbi részhalmazait: N a nők halmaza, T a törzsvendégek (az egységet hetente legalább 4 alkalommal látogatók) halmaza, A az alkalmi vendégek (az egységet ezidáig legfeljebb kétszer látogatók) halmaza, S a sört ivók, B pedig a bort ivók halmaza. Fogalmazzuk meg halmazelméleti műveletekkel az alábbi állításokat!

(a) A bort ivó alkalmi vendégek között nincs nő.
(b) A férfi törzsvendégek sört és bort is isznak.
(c) Nincs olyan sörivó nő, aki törzsvendég.
(d) Aki vagy csak sört, vagy csak bort iszik az alkalmi vendég és nő.
(e) Minden alkalmi vendég sörivó.

1.7. Legyen A egy m elemű, B egy n elemű halmaz. Adjuk meg m és n függvényében legalább, ill. legfeljebb hány eleme lehet az alábbi halmazoknak!

$$A \cup B, \qquad A \cap B, \qquad A \setminus B, \qquad A \triangle B, \qquad A \times B$$

1.8. Egy társaságban 27-en beszélnek angolul, 23-an németül, 12-en mindkét nyelvet beszélik, 8-an egyiket sem. Hány tagú a társaság?

1.9. Ábrázoljuk az alábbi függvényeket! (Az értelmezési tartomány $\mathbb{R}$ lehető legbővebb részhalmaza.)

(a) $f(x) = 2x + 3$

(b) $f(x) = -\frac{x}{2}$

(c) $f(x) = 6$

(d) $f(x) = 2x^2 + 8x - 10$

(e) $f(t) = t^2 - 6t + 9$

(f) $f(x) = -x^2 - 4$

1.10. Ábrázoljuk az alábbi függvényeket! (Az értelmezési tartomány $\mathbb{R}$ lehető legbővebb részhalmaza.)

(a) $f(x) = 8 - 2x$

(b) $f(x) = \frac{x}{4} + 1$

(c) Az $f(x)$ elsőfokú függvényt, ha tudjuk, hogy f grafikonja illeszkedik a $(-2, 0)$ és $(3, 4)$ pontokra. Adjuk meg $f(x)$ képletét is!

(d) $f(x) = -2x^2 - 7x + 3$

(e) $f(x) = x^2 - 2x + 4$

(f) $f(x) = x^2 - 4x + 4$

(g) $f(x) = 0.7^x$

(h) $f(x) = 3^x$

(i) $f(x) = \log_4 x$

(j) $f(x) = \log_{0,5} x$

1.11. Döntsük el, hogy az alábbi függvények közül melyik injektív, szürjektív, ill. bijektív! Ha mást nem mondunk, akkor az értelmezési tartomány $\mathbb{R}$ lehető legbővebb részhalmaza, a képtér pedig $\mathbb{R}$.

(a) $f(x) = x^2$

(b) $g(x) = \sin x$

(c) $h(x) = \sin x \restriction \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
Mi a helyzet, ha a képtér $[-1, 1]$?

(d) $f(x) = x^3$

(e) $f(x) = x^3 - x$

(f) $f(x) = 2^x$

(g) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$