Alkalmazott matematika

Baran Ágnes

A gépi számítás jellegzetességei

A kiíratás formátuma Matlab-ban

A `format` függvény segítségével szabályozhatjuk.

Alapértelmezés: 4 tizedesjegy (`format short`)

Két további lehetőség:
`format long` → 16 tizedesjegy
`format shortE` → normál alak, 4 tizedesjeggyel

Példa:

```
>> 1/7
ans =
    0.1429
>> format long; 1/7
ans =
   0.142857142857143
>> format shortE; 1/7
ans =
   1.4286e-01
```

Kettes számrendszer

1. feladat

Írja fel a következő számok kettes számrendszerbeli alakját!

$$30, \quad 117, \quad 0.875, \quad 0.5625, \quad 0.96875,$$

$$1.625, \quad 2.75, \quad 3.125,$$

$$0.1, \quad \frac{1}{3}, \quad 1.4, \quad 3.3$$

Mi lesz a felsorolt számokhoz rendelt normalizált lebegőpontos szám, ha 4 hely áll rendelkezésre a mantissza ábrázolására, és szabályosan kerekítjük a számokat?

A gépi számítás jellegzetességei

2. feladat

Vizsgálja meg számítógépén a $0.4 - 0.5 + 0.1 == 0$ logikai kifejezés értékét! Mi lesz a $0.1 - 0.5 + 0.4 == 0$ logikai kifejezés értéke?

3.feladat

Az alábbi algoritmus végrehajtása után mennyi az x elméleti, illetve a gépi számítás után adódó értéke?

```
x=1/3;
for i=1:40
   x=4*x-1;
end
```

Magyarázza meg a tapasztalt jelenséget! (Duplapontosságú számábrázolás ($t = 53$) esetén mennyi az $\frac{1}{3}$ ábrázolásakor bekövetkező hiba? Miért nő ez a ciklus lefuttatása során olyan nagyra?)

4. feladat

Vizsgálja meg számítógépén a $2^{66}+1 == 2^{66}$, $2^{66}+10 == 2^{66}$, $2^{66}+100 == 2^{66}$, $2^{66}+1000 == 2^{66}$ és $2^{66}+10000 == 2^{66}$ logikai kifejezések értékét! Duplapontosságú számábrázolás esetén mi a 2^{66} lebegőpontos alakja? Milyen messze van 2^{66}-tól a jobb oldali szomszédja? Olvassa el a `flintmax` függvény help-jét.

5. feladat

Mit tapasztal, ha az alábbi kódokat lefuttatja?

```
a=0;
for i=1:5
   a=a+0.2;
end
a==1
```

```
a=1;
for i=1:5
   a=a-0.2;
end
a==0
```

6. feladat

(a) Írjon egy kódot a gépi epszilon meghatározására.

(b) Olvassa el az Octave/Matlab `eps` függvényének help-jét. Nézze meg az eps (azaz az eps(1)) értékét.

7. feladat

(a) Írjon egy kódot az ε_0 meghatározására.

(b) Nézze meg az `eps(0)` értékét!

8. feladat

Írassa ki gépén a `realmin` és `realmax` értékét. Vizsgálja meg a `realmin('single')` és `realmax('single')` értékeket is.

9. feladat

Az alábbi algoritmus elméletileg minden $x \geq 0$ esetén az x eredeti értékét adja vissza. Vizsgálja meg mi történik a gyakorlatban, ha az algoritmust $x = 1000$, $x = 100$ kezdőértékkel futtatja! Mi az oka a tapasztalt jelenségnek?

```
for i=1:60
   x=sqrt(x);
end
for i=1:60
   x=x^2;
end
```

10. feladat

Ismert, hogy $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$. Számítsa ki az $\frac{e^x-1}{x}$ hányados értékét egyre csökkenő x értékek esetén! ($x = 1$ kezdőértékkel x-et 40-szer, 200-szor, 2000-szer felezgetve írassa ki a kifejezés értékét!) Magyarázza meg a tapasztalt jelenséget!

11. feladat

Tekintsük az alábbi azonosságot (ahol $x \neq 0$)!

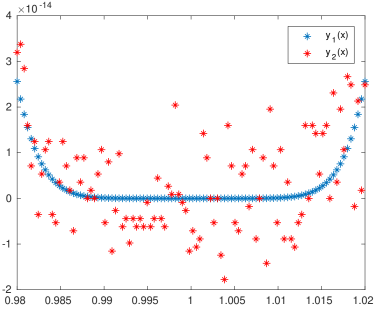
$$\left(\frac{\frac{1}{x^2}}{10} + 1 \right) x^2 - x^2 = 0.1$$

Az $x = 1, \ldots, 100$ értékekre számítógépén tesztelje a fenti egyenlőség teljesülését!

12. feladat

Számítógépén határozza meg és ábrázolja az 1 egy kis környezetében az $(x-1)^8$ kifejezés értéket az alábbi két (matematikailag ekvivalens) módon:

$$y_1(x) = (x-1)^8,$$
$$y_2(x) = x^8 - 8x^7 + 28x^6 - 56x^5 + 70x^4 - 56x^3 + 28x^2 - 8x + 1$$



Megjegyzés

A kifejezések alkalmas átalakításával elkerülhető, hogy a köztes eredmények (és így a végeredmény is) túlcsorduljanak.

13. feladat

Legyen $x = (10^{200}, 1)$. Számítsa ki gépén az x normáját az alábbi két módon.

(a)

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

(b)

$$c = \max\{|x_1|, |x_2|\}, \quad \|x\| = c \cdot \sqrt{\left(\frac{x_1}{c}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{c}\right)^2}$$