Valós számsorok
Házi feladatok

Rutinfeladatok

1. Feladat. *Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi sorok közül melyek (abszolút) konvergensek.*

(a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

(b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$$

(c)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+2n)(1+3n)}$$

(d)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)}$$

(e)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n-1)}$$

(f)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{2n-1}{n(n+1)}$$

(g)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

(h)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n+1}{2^n+3^n}$$

(i)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2^n+9^n}$$

(j)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cdot 3^n}{-3\cdot 4^n+7\cdot 9^n}$$

(k)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\frac{2^n}{n!}$$

(l)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{5^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

(m)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+5n-3}{9n^3+4n^2-6n+4}$$

(n)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(n\frac{\pi}{3}\right)}{n^2}$$

(o)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(n\frac{2\pi}{3}\right)}{3^n}$$

(p)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n^3}$$

(q)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$$

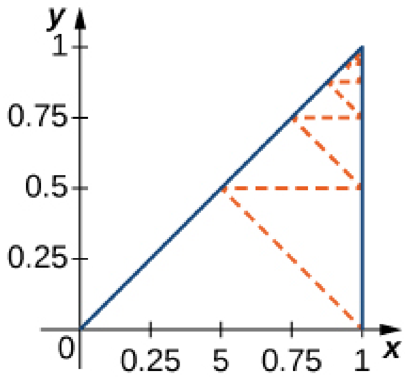
(r)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n}{(2n)!}$$

(s)
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^3-n}$$

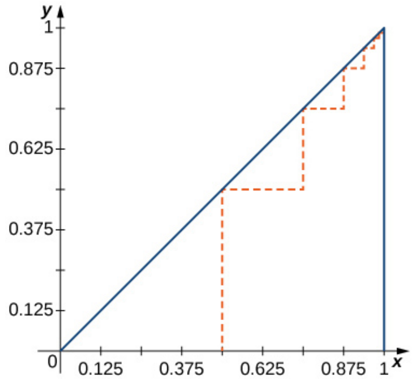
(t)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n(n+1)2^n}$$

További feladatok

2. Feladat. *Határozzuk meg az alábbi ábrán látható cikkcakk-vonal hosszát.*



3. Feladat. *Határozzuk meg az alábbi ábrán látható cikkcakk-vonal hosszát.*



4. Feladat. *Legyen $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ egy nemnegatív tagú konvergens sor. Igazoljuk, hogy ekkor*

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=N}^{\infty} x_n = 0$$

teljesül.

5. Feladat. *Tegyük fel, hogy egy beteg szervezetében lévő gyógyszer mennyisége óránként egy $r < 1$ szorzótényezővel csökken. Tegyük fel, hogy a gyógyszerből minden N órában új adagot kell beadni. Keressünk egy olyan kifejezést, amely megadja a beteg szervezetében n óra elteltével jelen lévő gyógyszer $A(n)$ mennyiségét az adagolás d és az arány r függvényében.*

6. Feladat. *Egy adott gyógyszer csak akkor hatásos egy átlagos beteg számára, ha a beteg szervezetében legalább 1 mg van jelen testsúlykilogrammonként, míg biztonságos, ha egy átlagos beteg szervezetében legfeljebb 2 mg van jelen testsúlykilogrammonként. Tegyük fel, hogy a beteg szervezetében lévő mennyiség $0,9$-es szorzótényezővel csökken minden órával az adag beadása után. Keressük meg az adagok közötti maximális N órák közötti intervallumot és a megfelelő d dózistartományt, amely lehetővé teszi, hogy a gyógyszer használata hosszú távon biztonságos és hatékony legyen.*

7. Feladat. *Legyenek $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan valós sorozatok, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$ és a $\sum_{n=1}^{\infty} y_n^2$ sorok konvergensek. Igazoljuk, hogy ekkor minden rögzített $p \geqslant 2$ esetén a $\sum_{n=1}^{\infty}(x_n - y_n)^p$ sor is konvergens.*

8. Feladat. *Mutassuk meg, hogy ha a $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ sor konvergens, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n}$ sor is az.*

9. Feladat. *Vizsgáljuk meg az alábbi sorokat konvergencia szempontjából.*

(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{n+1}{n}}}$$

(b)

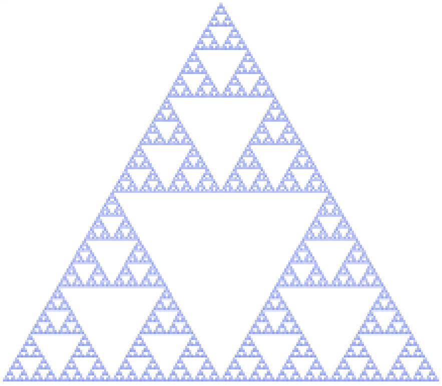
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos(\ln(\ln(n)))}{\ln(n)}$$

(c)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n!)}$$

10. Feladat. *Befektetésünk után a bank i százalék éves kamatot ad. Legalább mennyi dollárt kell befektetnünk, ha azt szeretnénk, hogy az első év után* 1*, a második év után* 4*, stb., az n-edik év után* n^2 *dollárt ki tudjunk venni a bankból?*

11. Feladat. *Tekintsünk egy szabályos háromszög által határolt háromszöglemezt. Ennek húzzuk be a középvonalait, majd távolítsuk el a középső háromszöget. Ismételjük ezeket a lépéseket a keletkezett kis háromszögekre. Az így keletkező alakzatot Sierpinski-háromszögnek hívjuk. Számítsuk ki ennek a területét.*



12. Feladat. *Legyen*

$$u = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots \qquad \textit{és} \qquad v = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \cdots.$$

Ekkor

$$2v = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots = u + v,$$

amiből $u - v = 0$ *adódik. Másfelől,*

$$u - v = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \cdots$$

amiből $u - v > 0$ *adódik, hiszen a fenti összegben minden összeadandó pozitív. Hogyan oldjuk fel ezt az ellentmondást?*

13. Feladat. *Válasszuk ki, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak és melyek hamisak.*

(a) *Ha* $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$*, akkor a* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *sor konvergens.*

(b) *A* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *sor konvergens, feltéve, hogy a sorhoz tartozó* $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *részletösszeg-sorozat konvergens.*

(c) *Ha a* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *pozitív tagú sor konvergens, akkor a* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$ *sor is az.*

(d) *Ha a* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *pozitív tagú sor konvergens, akkor a* $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{x_n}$ *sor is az.*

(e) *Ha a* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *pozitív tagú sor konvergens, akkor a* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+x_n}{2+x_n}$ *sor is az.*

(f) *Ha a* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *pozitív tagú sor konvergens, akkor a* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+x_n}{3^n+x_n}$ *sor is az.*

(g) *A* $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$ *sor konvergens.*

(h) *A* $\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{1}{n^2}\right)$ *sor konvergens.*

(i) *A* $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\cos(3)}$ *sor konvergens.*

(j) *A* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n+5}$ *sor összege* $\frac{1}{5}$.

(k) *A* $\sum_{n=2}^{\infty} 3 \cdot 4^{-n+1}$ *sor összege* 1.

(l) *Ha a* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *pozitív tagsú sor részletösszeg-sorozata felülről korlátos, akkor* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *konvergens.*

(m) *Ha az* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *és* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozatokra az teljesül, hogy* $\lim_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = +\infty$ *és a* $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ *sor divergens, akkor a* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *sor is az.*

(n) *Ha az* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *és* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozatokra az teljesül, hogy* $\lim_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = 0$ *és a* $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ *sor konvergens, akkor a* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *sor is az.*

(o) *Ha a* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *sorra az teljesül, hogy*

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = A \qquad \text{és} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| = B$$

úgy, hogy A és B végesek, akkor szükségképpen $B = |A|$.

(p) *Ha a* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *pozitív tagú sor divergens, akkor a* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{1+x_n}$ *sor is az.*

(q) *Ha a* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *pozitív tagú sor divergens, akkor a* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_n}$ *sor konvergens.*

(r) *Ha az* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat nullsorozat, a* $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ *sor pedig konvergens, akkor a* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ *sor is konvergens.*

(s) *Ha a* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *valós sor konvergens, akkor az ehhez a sorhoz tartozó* $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *részletösszeg-sorozatnak nincs olyan részsorozata, amely felülről nem korlátos.*