

Az informatika logikai alapjai

4. feladatsor

Logikailag ekvivalens formulák

- Kettős tagadás törvénye: $\neg\neg A \Leftrightarrow A$
- Kommutativitás: $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$, $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$ és $A \equiv B \Leftrightarrow B \equiv A$
- Asszociativitás: $A \wedge (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$, $A \vee (B \vee C) \Leftrightarrow (A \vee B) \vee C$ és $A \equiv (B \equiv C) \Leftrightarrow (A \equiv B) \equiv C$
- Idempotencia: $A \wedge A \Leftrightarrow A$ és $A \vee A \Leftrightarrow A$
- Disztibutivitás:
 - $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
 - $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
- Elnyelés: $A \wedge (B \vee A) \Leftrightarrow A$ és $A \vee (B \wedge A) \Leftrightarrow A$
- De Morgan: $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$ és $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

(Aszalós László fóliái, kiemelések tőlem)

Mit is jelent az odavissza-nyíl? (Szintek.) Hogyan lehet ilyen állításokat igazolni?

Logikailag ekvivalens formulák

- Áthelyezési törvény: $(A \wedge B) \supset C \Leftrightarrow A \supset (B \supset C)$
- Kontrapozíció: $A \supset B \Leftrightarrow \neg B \supset \neg A$
- Öndisztributivitás: $A \supset (B \supset C) \Leftrightarrow (A \supset B) \supset (A \supset C)$
- Esetszétválasztás: $(A \vee B) \supset C \Leftrightarrow (A \supset C) \wedge (B \supset C)$

Logikai műveletek egymással való kifejezhetősége

- $A \supset B \Leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$
- $A \supset B \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$
- $A \wedge B \Leftrightarrow \neg(A \supset \neg B)$
- $A \vee B \Leftrightarrow (\neg A \supset B)$
- $A \vee B \Leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$
- $A \wedge B \Leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)$
- $A \equiv B \Leftrightarrow (A \supset B) \wedge (B \supset A)$

8.I.5. Az

$$(1) \neg(X \wedge Y \supset Z \vee U) \quad (2) \neg X \vee \neg Y \vee Z \vee U \quad (3) X \wedge Y \wedge (\neg Z \vee \neg U)$$

formulákra mely állítások igazak? Válaszát röviden indokolja!

- (a) (1) és (2) ekvivalensek.
- (b) (1) és (3) ekvivalensek.
- (c) Páronként bármely kettő ekvivalens egymással.
- (d) Nincs a felsoroltak között ekvivalens pár.

8.I.6. Igazoljuk az ítéletlogikai ekvivalenciák segítségével, hogy az alábbi formulák logikai törvények!

(a) $\neg(X \supset Y) \supset X$

(b) $(X \wedge Y) \supset (X \supset Y)$

(c) $((X \supset Y) \supset X) \supset (X \vee Y)$

Ki lehet jeini ezekt egyetlen
művelettel?

Igen: A and vagy or műveletnek is deklarációját.

Például:

Tejéssük ki \wedge -t and szótjezővel:

$$\begin{aligned} & \bullet \boxed{A \wedge B} \Leftrightarrow \neg \neg (A \wedge B) \Leftrightarrow \neg (A \text{ and } B) \\ & \Leftrightarrow \neg ((A \text{ and } B) \wedge (A \text{ and } B)) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \boxed{(A \text{ and } B) \text{ and } (A \text{ and } B)} \end{aligned}$$

$$\bullet \boxed{\neg A} \Leftrightarrow \neg (A \wedge A) \Leftrightarrow \boxed{A \text{ and } A}$$

Melyik lépés miért igaz?

$$\neg \neg A \Leftrightarrow A$$

$$A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A, A \vee B \Leftrightarrow B \vee A \text{ és } A \equiv B \Leftrightarrow B \equiv A$$

$$A \wedge (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C, A \vee (B \vee C) \Leftrightarrow (A \vee B) \vee C \text{ és } A \equiv (B \equiv C) \Leftrightarrow (A \equiv B) \equiv C$$

$$A \wedge A \Leftrightarrow A \text{ és } A \vee A \Leftrightarrow A$$

$$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

$$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

$$A \wedge (B \vee A) \Leftrightarrow A \text{ és } A \vee (B \wedge A) \Leftrightarrow A$$

$$\neg (A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B \text{ és } \neg (A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$$

8.I.7. Vezessük be a következő jelölést (Peirce vonás):

$$A \circ B \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B.$$

A bevezetett \circ összekötő jel neve „sem-sem”, $A \circ B$ jelentése: „sem A , sem B ”. Fejezzük ki a \neg , \vee , \wedge logikai összekötő jeleket a \circ jel segítségével!

mai új példa

kielégíthető?

$$(p \wedge q) \wedge (\neg p \wedge \neg q)$$

$$(p \vee q) \wedge (\neg p \wedge \neg q)$$

↓

$$p \vee q, \neg p \wedge \neg q$$

↓

$$p \vee q, \neg p, \neg q$$

↙

$$p, \neg p, \neg q$$

zárt

↘

$$q, \neg p, \neg q$$

zárt

Kielégíthető, ha $\{p, \neg p, \neg q\}$ vagy $\{q, \neg p, \neg q\}$
kielégíthető.

Milyen tulajdonságok szerint
konjunkciókat a táblázatban?

α	α_1	α_2
$\neg\neg A_1$	A_1	
$A_1 \wedge A_2$	A_1	A_2
$\neg(A_1 \vee A_2)$	$\neg A_1$	$\neg A_2$
$\neg(A_1 \supset A_2)$	A_1	$\neg A_2$

β	β_1	β_2
$\neg(B_1 \wedge B_2)$	$\neg B_1$	$\neg B_2$
$B_1 \vee B_2$	B_1	B_2
$B_1 \supset B_2$	$\neg B_1$	B_2

- $\boxed{\alpha}$ típusú formula esetén bővíthető a formula halmaz
- $\boxed{\beta}$ típusú formula esetén elágazhat, és alternatívákba bontható bővíthető a formula halmaz
- A levezetés végig kell járni a ~~levezetés~~ (gy. 6H / 20pt) 7

A tábla konstruója peci' rekkre (algorithm)

Bemenet : Φ formula, Kimenet : T nemartikus
tábla

- Készítjük T-vel egy gyökér
csúcsra, címkéje $\{\Phi\}$
- Valamikor egy l megüresedett levelet
 $U(l)$ a címke formula helyére
 - Ha $U(l)$ literálokra áll, jelöljük $\{ \}$ meg.
 - Ha $A \in U(l)$ nem literál:
 - Ha A α típusú formula:


```

graph TD
    A["l, U(l)"] --> B["e', U(l) - {A} ∪ {α₁, α₂}"]
                    
```
 - Ha A β típusú formula,


```

graph TD
    A["l, U(l)"] --> B["U(l) - {B} ∪ {B₁}"]
    A --> C["U(l) - {B} ∪ {B₂}"]
                    
```

Hogyan?

A tábla konstrukciója peci' rellre (algorithm)

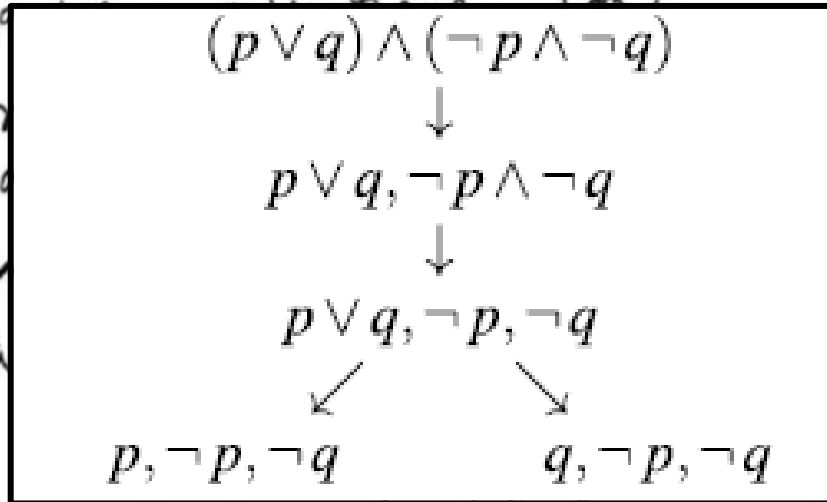
Premenet : \emptyset formula, Kimenet : T nemantian
tábla

- Készítsen T-vel van gőzök
Göriz...

(minden levele
~~megjelenik~~
megjelenik)

- Válasz
 $U(l)$

- Ha
- Ha

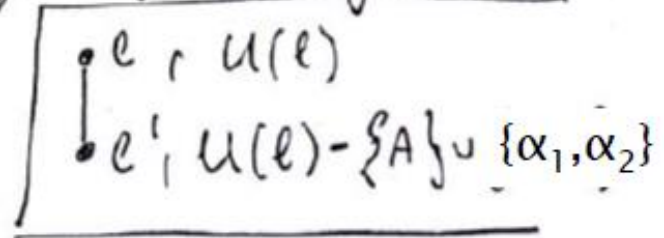


α_1, α_2 : levelek

levelet

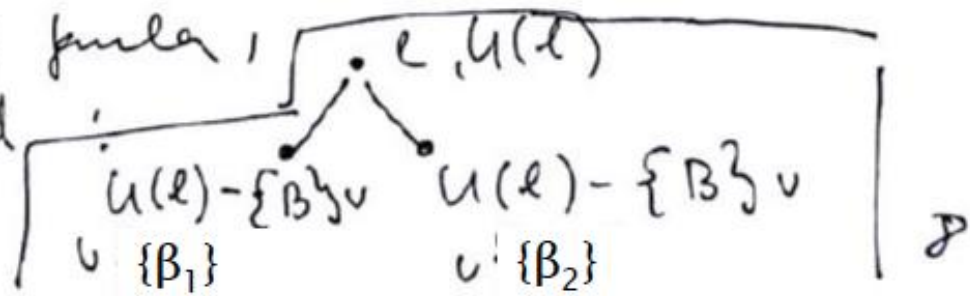
(Hogyan?)

Ha, jelöljei & meg.



- Ha A B típusú formula,

B_1, B_2 : részek



\mathcal{P}

α	α_1	α_2	β	β_1	β_2
$\neg\neg A_1$	A_1				
$A_1 \wedge A_2$	A_1	A_2	$\neg(B_1 \wedge B_2)$	$\neg B_1$	$\neg B_2$
$\neg(A_1 \vee A_2)$	$\neg A_1$	$\neg A_2$	$B_1 \vee B_2$	B_1	B_2
$\neg(A_1 \supset A_2)$	A_1	$\neg A_2$	$B_1 \supset B_2$	$\neg B_1$	B_2

2.7

Igazoljuk: $\models (A \supset B) \vee (B \supset C)$

2.9

Igazoljuk: $(A \wedge B) \supset C \models (A \supset C) \vee (B \supset C)$

8.1.6. Igazoljuk az ~~ítéletlogikai ekvivalenciák~~ segítségével, hogy az alábbi formulák logikai törvények!

$$(c) ((X \supset Y) \supset X) \supset (X \vee Y)$$

Szemantikus tábla segítségével igazoljuk.

α	α_1	α_2	β	β_1	β_2
$\neg\neg A_1$	A_1				
$A_1 \wedge A_2$	A_1	A_2	$\neg(B_1 \wedge B_2)$	$\neg B_1$	$\neg B_2$
$\neg(A_1 \vee A_2)$	$\neg A_1$	$\neg A_2$	$B_1 \vee B_2$	B_1	B_2
$\neg(A_1 \supset A_2)$	A_1	$\neg A_2$	$B_1 \supset B_2$	$\neg B_1$	B_2

7.I.23. Ellenőrizzük, hogy az alábbi következtetések helyesek-e!

(b) Premisszák:

Ha a 2 prímszám, akkor a 2 a legkisebb prímszám. Ha a 2 a legkisebb prímszám, akkor az 1 nem prímszám. Az 1 nem prímszám.

Konklúzió:

Tehát a 2 prímszám.

7.I.21. Döntsük el, hogy az alábbi következményrelációk fennállnak-e!

(a) $X \supset \neg Y \models X \supset (Y \supset Z)$

(b) $\neg X \vee Y, Z \supset \neg Y \models X \supset \neg Z$

(c) $(X \vee Y) \supset (Z \wedge U), (U \vee V) \supset W \models X \supset W$

(d) $X \supset Y, \neg Z \supset \neg Y, \neg Z \vee \neg U \models U \supset \neg X$