Teljes függvényvizsgálat

Házi feladatok

1. Feladat. *Legyenek*

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} \qquad g(x) = \frac{d - x}{\sqrt{b^2 - (d - x)^2}} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

illetve

$$h(x) = \frac{x}{c_1 \sqrt{x^2 + a^2}} - \frac{d - x}{c_2 \sqrt{b^2 - (d - x)^2}} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ahol $a, b, d \in \mathbb{R}$, $c_1, c_2 > 0$ *adottak. Mutassuk meg, hogy*

(a) f *szigorúan monoton növekedő*

(b) g *szigorúan monoton csökkenő*

(c) h *szigorúan monoton növekedő.*

2. Feladat. *Legyen*

$$f(x) = 3 + 4\cos(x) + \cos(2x) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

(a) Melyek azok az $x \in \mathbb{R}$ *pontok, melyekre*

$$f(x) < 0$$

teljesül?

(b) Az (a) részben miért elegendő a $[0, 2\pi]$ *intervallumra szorítkozni?*

3. Feladat. *Vizsgáljuk meg a következő függvényeket konvexitás szempontjából.*

(a)
$$3x^2 - x^3$$

(b)
$$x^4 - 14x^3 + 60x^2 + 27$$

(c)
$$\frac{1}{1 + x^2}$$

(d)
$$\sqrt{1 + x^2}$$

(e)
$$e^{-x^2}$$

(f)
$$\ln(1 + x^2)$$

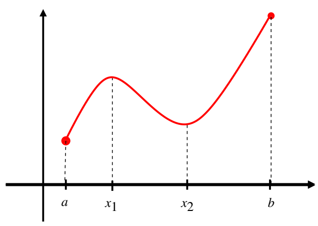
4. Feladat. *Alább néhány függvény gráfja látható. Mindegyik esetében döntsük el az alábbiakat.*

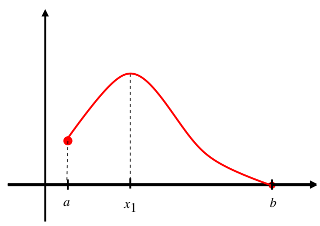
(a) Felveszi-e az f *függvény a minimumát az* $[a, b]$ *intevallumon?*

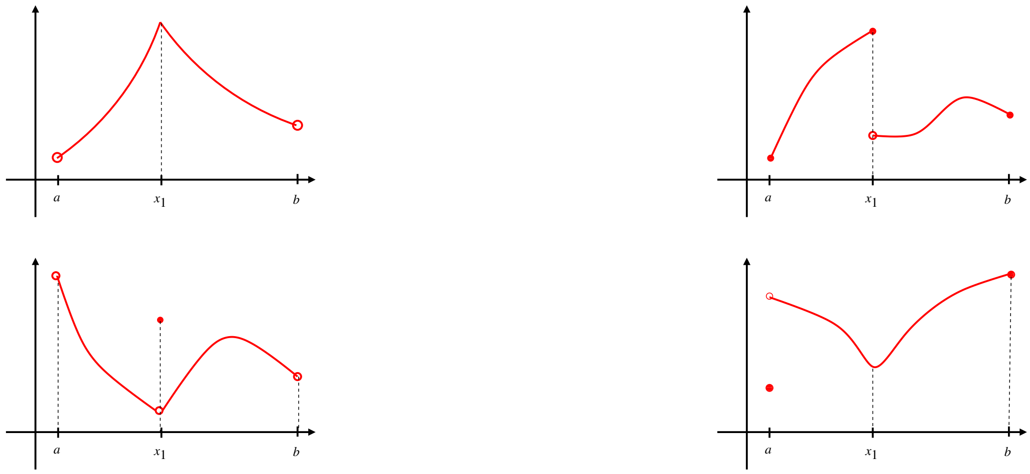
(b) Felveszi-e az f *függvény a maximumát az* $[a, b]$ *intevallumon?*

(c) Létezik-e az f *függvénynek lokális minimumhelye az* $]a, b[$ *intervallumon?*

(d) Létezik-e az f *függvénynek lokális maximumhelye az* $]a, b[$ *intervallumon?*







5. Feladat. *Az alábbi esetekben meg van adva az f függvény differenciálhányados függvénye. Ez alapján határozzuk meg az f függvény stacionárius pontjait, majd osztályozzuk azokat.*

(a)
$$f'(x) = x(x-1)$$

(b)
$$f'(x) = (x-1)^2(x+2)$$

(c)
$$f'(x) = (x-1)(x+2)(x-3)$$

(d)
$$f'(x) = (x-7)(x+1)(x+5)$$

(e)
$$f'(x) = \frac{x+2}{\sqrt[3]{x}}$$

(f)
$$f'(x) = (x-1)(x+2)$$

(g)
$$f'(x) = (x-1)^2(x+2)^2$$

(h)
$$f'(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x}}$$

6. Feladat. *Vizsgáljuk meg az alábbi függvényeket monotonitás szempontjából és határozzuk meg a stacionárius pontjaikat is, illetve osztályozzuk azokat.*

(a)
$$f(x) = -x^2 - 3x + 3$$

(b)
$$f(x) = -x^3 + 2x^2$$

(c)
$$f(x) = 3x^2 - 4x^3$$

(d)
$$f(x) = 3x^3 + 16x$$

(e)
$$f(x) = -3x^2 + 9x + 5$$

(f)
$$f(x) = 2x^3 - 18x$$

(g)
$$f(x) = 6x - x^3$$

(h)
$$f(x) = (x+7)^3$$

(i)
$$f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$$

(j)
$$f(x) = \frac{3x^4}{2} - x^6$$

(k)
$$f(x) = x\sqrt{8x^2}$$

(l)
$$f(x) = \frac{x+8}{\sqrt[3]{x}}$$

(m)
$$f(x) = \frac{x^2-4}{\sqrt[3]{x}}$$

(n)
$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2$$

(o)
$$f(x) = 15x^3 - x^5$$

(p)
$$f(x) = x^2\sqrt{5-x}$$

(q)
$$f(x) = \frac{x^3}{3x^2+1}$$

(r)
$$f(x) = \sqrt[3]{x^2}(x+5)$$

(s)
$$f(x) = \sqrt[3]{x^2}(x^2-4)$$

7. Feladat. *Legyen*
$$f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma \qquad (x \in \mathbb{R})\,.$$
Hogyan válasszuk meg az α, β, γ valós konstansokat úgy, hogy az f függvénynek az $x = 1$ pont inflexiós pontja legyen? (Útmutatás: Használjuk a Kalkulus előadásjegyzet 8.7.4. fejezetének eredményeit)

8. Feladat. *Az alábbi feladatokban meg van adva az f függvény differenciálhányados függvénye. Ez alapján határozzuk meg f''-at és vizsgáljuk meg az f függvényt konvexitás szempontjából.*

(a)
$$f'(x) = 2 + x - x^2$$

(b)
$$f'(x) = x(x-3)^2$$

(c)
$$f'(x) = x(x^2-12)$$

(d)
$$f'(x) = (8x-5x^2)(4-x)^2$$

(e)
$$f'(x) = x^2 - x - 6$$

(f)
$$f'(x) = x^2(2-x)$$

(g)
$$f'(x) = (x-1)^2(2x+3)$$

(h)
$$f'(x) = (x^2-2x)(x-5)$$

(i)
$$f'(x) = \cos(x)$$

(j)
$$f'(x) = \sin(x)$$

(k)
$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}$$

(l)
$$f'(x) = \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2}}$$

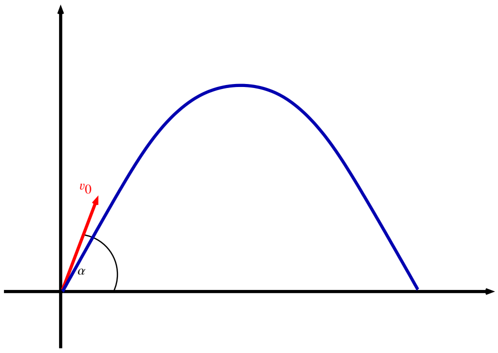
9. Feladat. *Egy felül nyitott, négyzet alapú doboz készítéséhez $2m^2$ területű lemezt használhatunk fel. Hogyan válasszuk meg a doboz méreteit, hogy a térfogata a legnagyobb legyen és mekkora ez a legnagyobb térfogat?*

10. Feladat. *Egy felül nyitott, henger alakú, $0,5$ literes mérőedényt szeretnénk készíteni. Hogyan válasszuk meg az edény alapjának a sugarát és a magasságát, hogy minél kevesebb lemezt használjunk fel és mennyi lesz a felhasznált lemezmennyiség?*

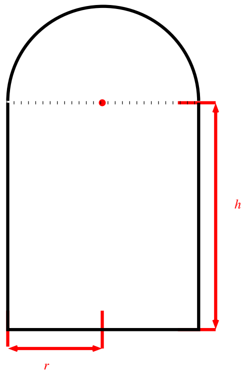
11. Feladat. *Egy tűzfal mellett $600m^2$-es téglalap alakú területet akarunk elkeríteni. Csak három oldalon kell kerítést készítenünk, mert a negyedik oldal a tűzfal. Hogyan válasszuk meg a téglalap oldalait, hogy a kerítés hossza a lehető legkisebb legyen és mennyi ez a minimális hossz?*

12. Feladat. *A ferde hajítás távolságát megadó képlet*
$$s = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g},$$
ahol v_0 az elhajított test kezdősebessége, α a kezdősebesség irányának a vízszintessel bezárt szöge $(0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$, g pedig a nehézség gyorsulás (lásd az alábbi ábrát). Milyen α érték mellet lesz legnagyobb a hajítás távolsága és mekkora ez a maximális távolság?

13. Feladat. *Egy csarona keresztmetszete az alábbi ábrán látható. A keresztmetszet $2m^2$ kell, hogy legyen. Hogyan válasszuk meg a csatorna r és h méretét, hogy a kerület a lehető legkisebb legyen? Mekkora lesz a minimális kerület?*



1. ábra. Ferde hajítás



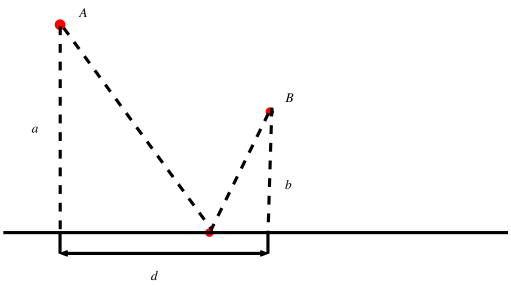
2. ábra. Csatorna

14. Feladat. *Valamely mennyiséget n-szer megmérünk. Legyenek a mérési eredmények $x_1, \ldots, x_n$. A mennyiség valódi értéke legjobb becslésének azt az x számot tekintjük, amelytől a mérési eredmények eltérésének a négyzetösszege a legkisebb. Más szóval, bevezetve az*

$$A = (x - x_1)^2 + \cdots + (x - x_n)^2$$

jelölést, keressük azt az x értéket, amelyre A minimális.

15. Feladat. *Egy országúttól a távolságra van az A község és b távolságra a B község. A két település vetületének távolsága az országúton d. Mindkét községhez az országút egyazon pontjából kiinduló egyenes bekötő utat kell építeni úgy, hogy a két bekötő út együttes hossza a legkisebb legyen. Hogyan válasszuk meg ezt a pontot (lásd a 3. ábrát)?*



3. ábra. Bekötő út építése

16. Feladat. *Határozzuk meg a K kerületű téglalapok közül azt, mely a legnagyobb területet határolja.*

17. Feladat. *Határozzuk meg a T területű téglalapok közül azt, melynek a legkisebb a kerülete.*

18. Feladat. *Tegyük fel, hogy egy háromszögnek adva van két oldalának a hosszúsága, legyenek ezek a és b. Hogyan válasszuk meg ezen oldalak bezárt szögét, ha azt szeretnénk, hogy a háromszög területe a lehető legnagyobb legyen?*