Függelék

Ebben a részben az előző anyaghoz illetve az ábrázoló geometria szakosok képzéséhez szükséges fejezetek vannak sokszor vázlatszerűen, bizonyítás nélkül. Ez egy segédeszköz addig, míg jegyzetek nem készülnek, egyes részek magyarul meg sem találhatók.

Másodrendű görbék és euklideszi osztályozásuk

Ebben a részben felhasználjuk azt, hogy az olvasó már ismeri a kúpszeletek néhány tulajdonságát, ezért gyakran említjük ezeket példaként. Az állítások bizonyítás nélkül szerepelnek, mert most az a cél, hogy felfedezzük a projektív és az euklideszi megközelítés közötti különbségeket.

Definíció

Az euklideszi síkon azon pontok halmazát, melyek (x,y) koordinátái kielégítik az

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$$

egyenletet, ahol $a_{11}^2+a_{12}^2+a_{22}^2>0$ (azaz az a_{11}, a_{12} a_{22} egyszerre nem lehet nulla), *másodrendű görbé*nek nevezzük. A másodrendű görbe egyenletében szereplő együtthatókból képzett (a_{ik}) szimmetrikus mátrixot a görbe alapmátrixának nevezzük, A másodrendű görbe *elfajuló*, ha a mátrixának determinánsa nulla, azaz $|a_{ik}|=0$. A másodrendű görbe *nemelfajuló*, ha a mátrixának determinánsa nullától különböző, azaz $|a_{ik}|\neq 0$.

A kúpszeletek kanonikus egyenleteit felírva látható, hogy a kúpszeletek (azaz a kör, az ellipszis, a hiperbola és a parabola) a másodrendű görbék közé tartoznak. Vannak azonban olyan másodrendű görbék, melyek nem kúpszeletek.

Példák:

1. Az $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$ egyenletet egyetlen valós pont koordinátái sem elégítik ki.
2. Az $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ egyenletet csak az origó koordinátái elégítik ki, tehát ez egy pont egyenlete.
3. Az $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ egyenlet két egymást metsző egyenes egyenlete, az egyenesek: $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0$ és $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0$. (A szokásosabb írásmódban: $b\cdot x-a\cdot y=0$ és $b\cdot x+a\cdot y=0$.)
4. Az $x^2=1$ két párhuzamos egyenes egyenlete, az egyenesek: $x=1$ és $x=-1$.

A másodrendű görbe mátrixában tekintsük az $A_{33}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ aldeterminánst.

Definíció

Az adott másodrendű görbét *elliptikus*nak nevezzük, ha $A_{33}>0$,
*parabolikus*nak nevezzük, ha $A_{33}=0$
*hiperbolikus*nak nevezzük, ha $A_{33}<0$

Tétel

Egy egyenesnek egy nemelfajuló másodrendű görbével 0, 1 vagy 2 közös pontja van.
Egy egyenesnek és egy elfajuló másodrendű görbének 0, 1 vagy 2 közös pontja van, vagy az egyenes minden pontja a görbéhez tartozik.

Definíció

A $P(p_1, p_2)$ és $Q(q_1, q_2)$ pontokat *konjugált*nak nevezzük az (a_{ik}) mátrixszal adott másodrendű görbére nézve, ha

$$\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Megjegyzés

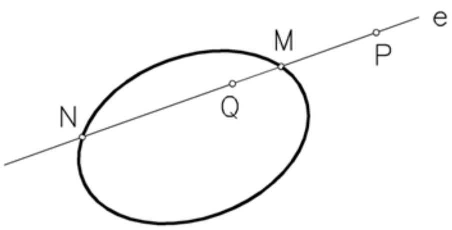
A konjugáltságot analitikusan definiáltuk, méghozzá a másodrendű görbének egy koordinátarendszerben megadott egyenletére vonatkozólag. Be lehet látni, hogy koordináta-transzformációval szemben a konjugáltság invariáns. A konjugáltság definíciójában most nem volt feltétel, hogy a görbe nemelfajuló legyen. Elfajuló görbék esetén is működik a definíció, és ahol ezt külön nem említjük, ott elfajuló görbékre is vonatkoznak az állítások.

Tétel

Egy pont akkor és csak akkor konjugált önmagához az adott másodrendű görbére nézve, ha a görbének a pontja.

Tétel

Ha egy egyenes két pontban metszi a másodrendű görbét, akkor az egyenesnek a metszéspontokat harmonikusan elválasztó két pontja egymáshoz konjugált a görbére nézve.



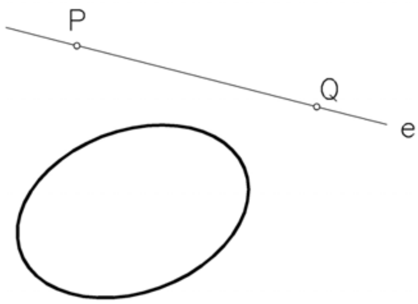
Tétel

Egy másodrendű görbe akkor és csak akkor tartalmazza két pontjának összekötő egyenesét, ha a két pont egymáshoz konjugált a görbére nézve. (Fontos, hogy a pontok egyenként önmagukhoz konjugáltak a görbére való illeszkedés miatt, de most még ezen kívül egymáshoz is konjugáltak.)

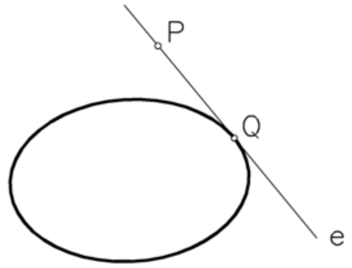
Tétel

Ha a másodrendű görbe két konjugált pont egyenesét nem tartalmazza, akkor a következő esetek valamelyike teljesül:

– Az egyenesnek és a görbének nincs közös pontja.



– Az egyenesnek és a görbének egy közös pontja van és ez a közös pont az előbbi pontok egyike.



– Az egyenesnek és a görbének két közös pontja van, és ezek harmonikusan választják el a konjugált pontokat.

Tétel

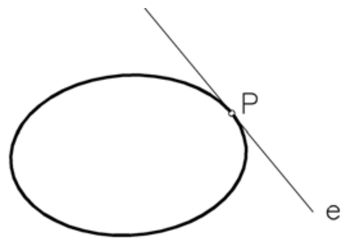
Egy adott nemelfajuló másodrendű görbére nézve egy ponthoz konjugált pontok egy egyenesen helyezkednek el, melyet a ponthoz tartozó *poláris egyenes*nek, magát a pontot *pólus*nak nevezünk.
Egy adott elfajuló másodrendű görbére nézve egy ponthoz konjugált pontok kitölthetik az egész síkot. A ilyen tulajdonságú pontot *szinguláris pont*nak nevezzük. Ha a másodrendű görbe elfajuló, akkor van legalább egy szinguláris pontja.

Tétel

Egy nemelfajuló másodrendű görbe esetén minden pontnak van polárisa, és minden egyenesnek van pólusa. (Azaz minden pont a saját polárisának pólusa és minden egyenes a saját pólusának polárisa. Ilyen módon a pontok és egyenesek között kölcsönösen egyértelmű a megfeleltetés.)

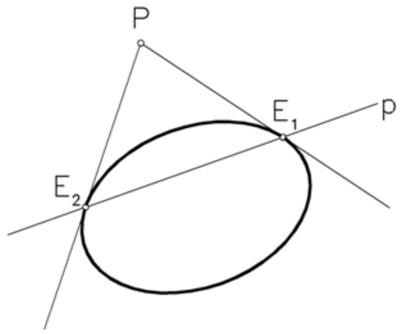
Tétel

Egy nemelfajuló másodrendű görbe pontjának polárisa az az egyetlen egyenes, amelyik a görbét ebben a pontban érinti, a görbe érintőjének pólusa maga az érintési pont.



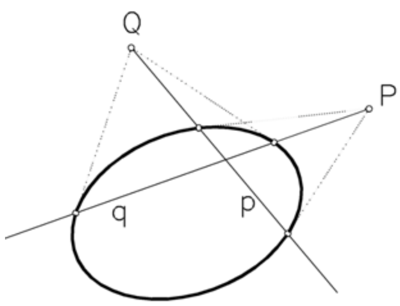
Tétel

Ha egy pont polárisának két közös pontja van a nemelfajuló másodrendű görbével, akkor ezek a pontból a görbéhez húzott érintők érintési pontjai.



Tétel

Egy nemelfajuló másodrendű görbére nézve két pont pontosan akkor konjugált, ha illeszkednek egymás polárisára.



Tétel

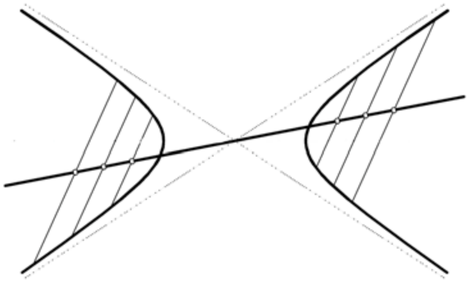
Egy elfajuló másodrendű görbe vagy egyetlen pontból, vagy egyetlen egyenesből, vagy két egyenesből áll.

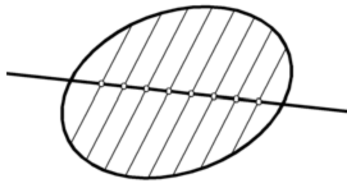
Tétel

Ha egy másodrendű görbe egyenest tartalmaz, akkor a görbe elfajuló.

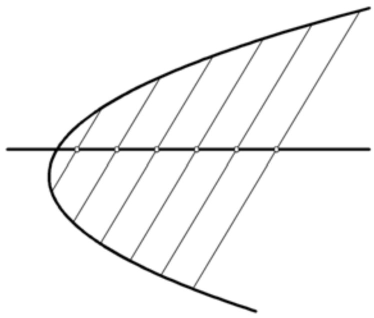
Definíció

Nemelfajuló másodrendű görbe esetén az egymással párhuzamos húrok felezési pontjai egy egyenesre illeszkednek, amely egyenest a görbe *átmérő*jének nevezünk.





Ha egy nemelfajuló másodrendű görbe esetén két átmérő metszi egymást, akkor az összes átmérő áthalad ezen a ponton, melyet a görbe *centrum*ának nevezünk. (Ezt tapasztaljuk az ellipszis, hiperbola és a kör esetén.)

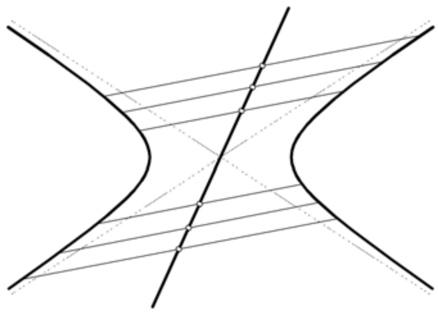


Ha egy nemelfajuló másodrendű görbe átmérői egymással párhuzamosak, akkor nem létezik centruma. (Ezt tapasztaljuk a parabola esetén.)

Átmérők esetén gyakran használjuk a végpont kifejezést, amely alatt az átmérő egyenesének a görbével vett közös pontját/pontjait értjük.

Megjegyzés

A hiperbola esetén vannak olyan átmérő is, amelynek nincsen közös pontja a görbével. Ilyen átmérőt akkor kapunk, ha a párhuzamos húrok végpontjai a hiperbola különböző ágán vannak.



A húrok között az átmérő kitüntetett egyenes. Centrális görbe esetén az átmérők végpontjaiban a görbe érintői egymással párhuzamosak, míg a húrok végpontjaiban vett érintők metszik egymást. A parabola esetén a húrok végpontjaiban vett érintők elmetszik egymást, de mivel az átmérőknek csak egy végpontja van, ezért ott az érintők párhuzamosságáról nem beszélhetünk.

A másodrendű görbe centrumának (középpontjának) koordinátái kielégítik a következő egyenletrendszert:

$$a_{11}x+a_{12}y+a_{13}=0$$
$$a_{21}x+a_{22}y+a_{23}=0$$

Tétel

A másodrendű görbe akkor és csak akkor centrális (középpontos), ha $A_{33}\neq 0$.

(Mindez azt jelenti, hogy az elliptikus és hiperbolikus görbék középpontosak, a parabolikus görbék nem lehetnek középpontosak.)

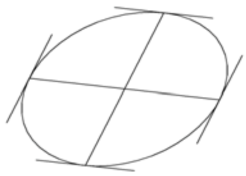
Tétel

Egy centrális másodrendű görbe centruma akkor és csak akkor azonos a koordinátarendszer kezdőpontjával, ha a görbe egyenletében lineáris tag nem szerepel.

(Azaz $a_{13}=0$ és $a_{23}=0$. Ekkor a görbe egyenlete: $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+a_{33}=0$. Minden centrális görbe egyenlet a koordinátarendszer eltolásával ilyen alakra hozható. Az egyenletből kiolvasható, hogy a centrális másodrendű görbék a centrumukra vonatkozólag szimmetrikusak, hiszen az (x, y) ponttal együtt az (-x, -y) pont is kielégíti az egyenletet.)

Definíció

Nemelfajuló, centrális másodrendű görbe esetén két átmérőt *konjugált*nak nevezünk, ha az egyik átmérő végpontjaiban vett görbeérintők a másik átmérővel párhuzamosak és viszont.

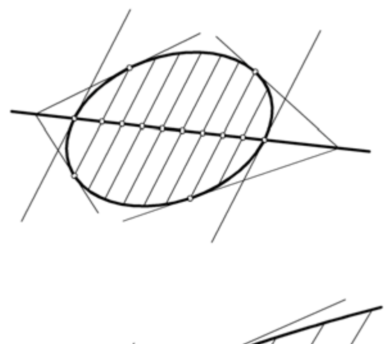


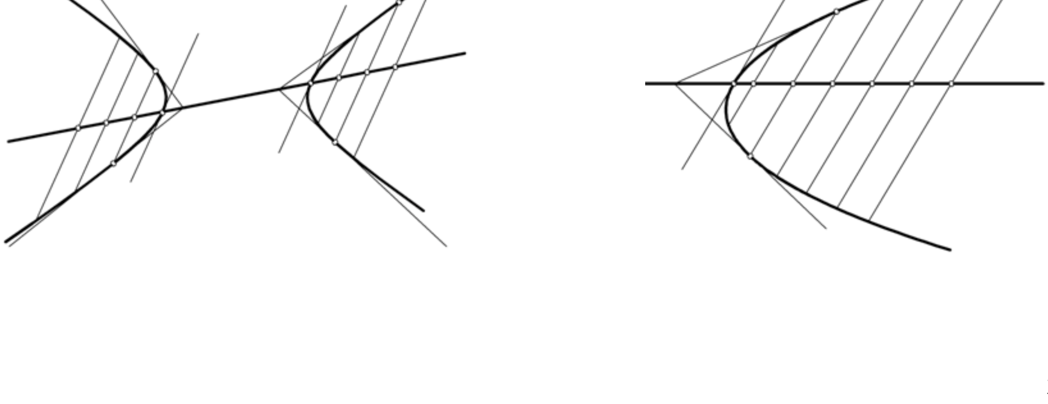
Megjegyzés

Konjugált átmérője minden középpontos kúpszeletnek van. Projektív szempontból azok végtelen távoli pontjai konjugáltak egymáshoz a kúpszeletre nézve. Az átmérők konjugált egyenesek.

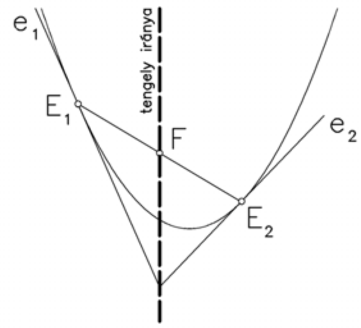
Tétel

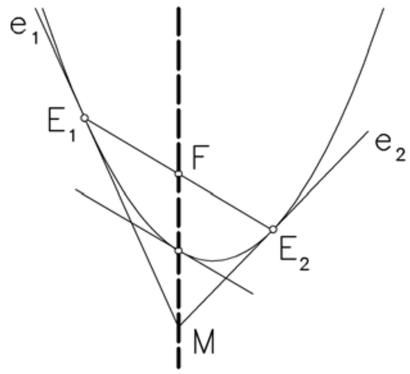
Nemelfajuló másodrendű görbe párhuzamos húrjainak felezési pontjai, az ezekkel párhuzamos érintők érintési pontjai, valamint a párhuzamos húrok végpontjaiban vett görbeérintők metszéspontjai a húrok irányához konjugált átmérőn helyezkednek el.





Ez a tétel lehetőséget ad arra, hogy ha egy parabolának ismerjük két pontját és azokban az érintőket, akkor a tengely irányát meg tudjuk határozni. (A parabola ezen adatokkal egyértelműen meg van adva.) A két pont által adott szakasz felezési pontját az érintők metszéspontjával összekötve a tengely állását kapjuk. Ezt gyakran használják a műszaki életben.





Ha az ME_1 és ME_2 szakaszok felezési pontjait összekötő egyenes a tengelyállást megadó átmérő végpontján áthalad, és ebben a pontban érinti a parabolát. Ez az érintő párhuzamos az E_1E_2 egyenessel.

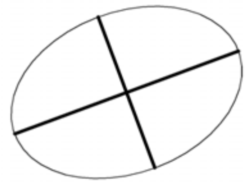
Megjegyzés
A parabolára vonatkozó szerkesztést a Brianchon-tétellel könnyedén lehet igazolni.

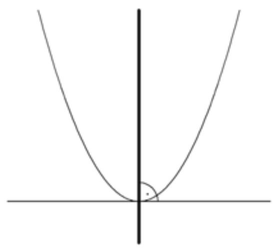
Tétel

Nemelfajuló, centrális másodrendű görbe esetén bármely átmérőhöz tartozik hozzá konjugált átmérő.

Definíció

Nemelfajuló, centrális másodrendű görbék esetén az egymásra merőleges konjugált átmérőpárt a görbe *tengely*ének nevezzük.

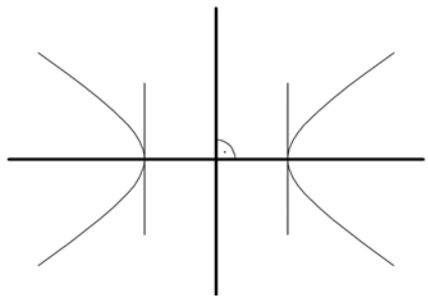




Nem centrális (azaz a parabola) esetben azt az átmérőt nevezzük *tengely*nek, amelynek a végpontjában a görbe érintője merőleges az átmérőre.

Megjegyzés

Centrális esetben is teljesül az, hogy az átmérő végpontokban az átmérő és a görbe érintője egymásra merőleges. A kör esetén bármely két egymásra merőleges átmérő konjugált egymáshoz, míg a többi görbe esetén pontosan egyszer fordul ez elő.
A hiperbola esetén az egyik átmérő elmetszi a görbét, míg a másik nem metszi azt.



Tétel

A nemelfajuló másodrendű görbék az előbb definiált tengelyekre nézve tengelyesen szimmetrikusan helyezkednek el.

A másodrendű görbék tengelyének/tengelyeinek analitikus meghatározásához felhasználjuk a lineáris algebrai ismereteket.

Az adott másodrendű görbe mátrixának tekintsük az $\left(A_{33}\right)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ részmátrixát, amely egy szimmetrikus mátrix. Ez a mátrix meghatározza az

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2 = x_1'$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2 = x_2'$$

homogén lineáris transzformációt, azaz minden $\underline{x}(x_1, x_2)$ vektorhoz egy $\underline{x}'(x_1', x_2')$ vektort rendel. Az $\underline{x}$ vektort a mátrix saját vektorának nevezzük akkor, ha nem nullvektor és párhuzamos a hozzá rendelt $\underline{x}'$ vektorral. Mindez azt jelenti, hogy $\underline{x}'=\lambda\underline{x}$, ahol λ tetszőleges valós szám. Ha $\underline{x}$ sajátvektor, akkor bármely vele párhuzamos vektor is sajátvektor. Elég tehát egy sajátvektor állását ismerni ahhoz, hogy a sajátvektorok összességét ismerjük. A sajátvektorok irányát főiránynak nevezzük. A sajátvektorra a fenti egyenletrendszer a következő:

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2=\lambda x_1$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2=\lambda x_2$$

Rendezzük egy oldalra az előbbi egyenleteket!

$$(a_{11}-\lambda)x_1+a_{12}x_2=0$$
$$a_{21}x_1+(a_{22}-\lambda)x_2=0$$

Ennek az egyenletrendszernek akkor van triviálistól különböző megoldása x_1 és x_2-re, ha az alapmátrix determinánsa nulla, azaz

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix}=0\,.$$

A determinánst kifejtve az

$$\lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+A_{33}=0.$$

egyenletet kapjuk. A megoldások az $\left(A_{33}\right)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ mátrix sajátértékei, magát az egyenletet a mátrix Laplace-féle (karakterisztikus) egyenletének nevezzük. Ezek alapján a sajátértékek száma legfeljebb kettő lehet. A kiszámolt sajátértéket felhasználva konkrét egyenletrendszereket kapunk, melynek a megoldásai vektorállások.

Összefoglalva a megoldás menete a következő:

Az $\left(A_{33}\right)$ sajátértékeit meghatározzuk, majd a sajátértékekhez meghatározzuk a sajátvektorokat. A sajátvektorok a tengelyek állását adják meg, pontosabban a sajátvektorok által kijelölt irányokhoz konjugált átmérők lesznek a tengelyek. Ez a kapcsolat az oka annak, hogy a sajátvektorok és sajátértékek meghatározásának problémáját főtengelyproblémának is mondjuk.

A Laplace-féle egyenlet diszkriminánsát felírva látható, hogy a diszkrimináns nem negatív, azaz vagy egy, vagy két valós megoldást kapunk a λ-ra. A nullától különböző sajátértékeket vesszük csak figyelembe.

- Ha két különböző, és nem nulla sajátérték volt, akkor a hozzájuk tartozó sajátvektorok egymásra merőlegesek lesznek. Ez fordul elő az ellipszis és a hiperbola esetén.
- Ha a két sajátérték közül az egyik nulla, akkor a nem nulla sajátértékhez tartozó sajátvektort határozzuk meg. Ehhez a sajátvektor álláshoz konjugált átmérő lesz az egyedüli tengely. Ezt tapasztaljuk a parabola esetén.
- Csak egyetlen sajátérték határozható meg, ha a Laplace-féle egyenlet diszkriminánsa nulla volt. Ez akkor következik be, ha $a_{11}=a_{22}$ és $a_{12}=0$. Ebben az esetben bármely vektor sajátvektor lehet, azaz nem lehet egyértelműen tengelyt meghatározni. Ezzel találkozhatunk a kör esetén.

Létezik olyan ξ_1, ξ_2 koordinátarendszer, melyben az $a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2$ másodfokú alak a következő alakot ölti:

$$\lambda_1\xi_1^2+\lambda_2\xi_2^2,$$

ahol a λ_1, λ_2 a tengelyeknek megfelelő sajátértékek.
Ha egyszerűen szeretnénk megfogalmazni, akkor az adott másodrendű görbe esetén a koordinátarendszer centrumba való eltolásával az elsőfokú tag (az x-es és y-os) eltűnik, illetve a sajátértékek felhasználásával az xy-os tag is kiejthető. Ezek után csak a négyzetes tagok és a konstans tag marad az egyenletben. Ezt az alakot nevezzük *kanonikus alak*nak. A kanonikus alak felhasználásával egyszerűbben lehet a másodrendű görbék osztályozását elvégezni. A kanonikus alakban változóként az x-t és y-t fogjuk használni.

Minden másodrendű görbe egyenlete a főtengely-transzformáció során a következő kanonikus alakok valamelyikére hozható (a, b≠0):

1. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ valós ellipszis, vagy valós kör
2. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$ képzetes ellipszis vagy képzetes kör (nincs valós pontja)
3. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ valós pontban egymást metsző képzetes egyenespár
4. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ hiperbola
5. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ valós metsző egyenespár
6. $y^2=2px$ parabola
7. $\frac{x^2}{a^2}=1$ valós párhuzamos egyenespár
8. $\frac{x^2}{a^2}=-1$ párhuzamos képzetes egyenespár (a végtelen távoli pontja valós)
9. $\frac{x^2}{a^2}=0$ kettős egyenes

Másodrendű felületek és euklideszi osztályozásuk

Definíció

Az euklideszi térben azon pontok halmazát, melyek (x,y,z) koordinátái kielégítik az

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}xz+2a_{23}yz+a_{33}z^2+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0$$

egyenletet, ahol $a_{11}^2+a_{12}^2+a_{22}^2+a_{13}^2+a_{23}^2+a_{33}^2>0$ (azaz az a_{11}, a_{12} a_{22}, a_{13}, a_{23} a_{33} egyszerre nem lehet nulla), *másodrendű felület*nek nevezzük. A másodrendű felület egyenletében szereplő együtthatókból képzett (a_{ik}) szimmetrikus mátrixot a felület alapmátrixának nevezzük. A másodrendű felület elfajuló, ha a mátrixának determinánsa nulla, azaz $|a_{ik}|=0$. A másodrendű felület nemelfajuló, ha a mátrixának determinánsa nullától különböző, azaz $|a_{ik}|\neq 0$.

A térbeli koordinátarendszer lineáris transzformációja során olyan helyettesítéseket kell alkalmazni, amely egy fenti alakú másodfokú alakhoz újra másodfokú alakot rendel, méghozzá ha az eredeti elfajuló másodrendű felület egyenlete volt, akkor a transzformáció végrehajtása után is az lesz.

Tétel

Egy síknak egy másodrendű felülettel való metszete általában másodrendű görbe, de lehet egyenes, teljes sík és üres alakzat (azaz nincs valós közös pont) is.

Az előbbi metszeteket úgy kaphatjuk meg, hogy az általános egyenletet felhasználva valamelyik koordinátasíkot használjuk a metszésre. Ez nem megy az általánosság rovására, ugyanis koordináta-transzformációval mindig elérhető, hogy a metsző sík a z=0 sík legyen. Eközben másodrendű felület egyenletében az együtthatók is transzformálódnak, de attól még másodrendű felületet kapunk. A z=0 síkkal metszve a felületet a metszet egyenlete (a síkon az eddigi x és y a síkbeli koordinátarendszert adja meg):

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{14}x+2a_{24}y+a_{44}=0.$$

Ez az alak lehet másodrendű görbe egyenlete (ha $a_{11}^2+a_{12}^2+a_{22}^2>0$), egyenes egyenlete (ha $a_{11}=a_{12}=a_{22}=0$), üres alakzat egyenlete (ha $a_{11}=a_{12}=a_{22}=a_{14}=a_{24}=0$ és $a_{44}\neq 0$) vagy teljes sík egyenlete (ha minden együttható nulla) .

Tétel

Egy egyenesnek és egy másodrendű felületnek 0, 1 vagy 2 közös pontja van, vagy az egyenes minden pontja a felülethez tartozik.

Definíció

Az olyan egyenest, amely teljes egészében a felülethez tartozik, *alkotó*nak nevezzük.

Definíció

A $P(p_1, p_2, p_3)$ és $Q(q_1, q_2, q_3)$ pontokat *konjugált*nak nevezzük az (a_{ik}) mátrixszal adott másodrendű felületre nézve, ha

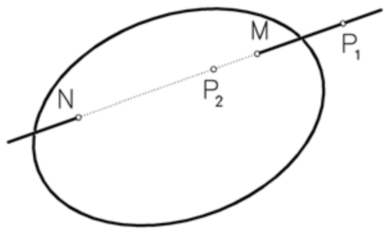
$$
\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = 0.
$$

Tétel

Egy pont akkor és csak akkor konjugált önmagához az adott másodrendű felületre nézve, ha a felületnek a pontja.

Tétel

Ha egy egyenes két pontban metszi a másodrendű felületet, akkor az egyenesnek a metszéspontokat harmonikusan elválasztó két pontja egymáshoz konjugált a felületre nézve.



(Az ábra jelöléseivel: N, M, P_1, P_2 harmonikus pontnégyes, ezért P_1 és P_2 konjugáltak egymáshoz.)

Tétel

Egy másodrendű felület akkor és csak akkor tartalmazza két pontjának összekötő egyenesét, ha a két pont egymáshoz konjugált a felületre nézve. (Fontos, hogy a pontok egyenként önmagukhoz konjugáltak a felületre való illeszkedés miatt, de most még ezen kívül egymáshoz is konjugáltak.)

Tétel

Ha a másodrendű felület két konjugált pont egyenesét nem tartalmazza, akkor a következő esetek valamelyike teljesül:

- Az egyenesnek és a felületnek nincs közös pontja.
- Az egyenesnek és a felületnek egy közös pontja van és ez a közös pont az előbbi pontok egyike.
- Az egyenesnek és a felületnek két közös pontja van, és ezek harmonikusan választják el a konjugált pontokat.

Tétel

Egy adott nemelfajuló másodrendű felületre nézve egy ponthoz konjugált pontok egy síkon helyezkednek el, melyet a ponthoz tartozó *polársík*nak, magát a pontot *pólus*nak nevezünk.
Egy adott elfajuló másodrendű felületre nézve egy ponthoz konjugált pontok kitölthetik az egész teret. A ilyen tulajdonságú pontot *szinguláris pont*nak nevezzük. Ha a másodrendű felület elfajuló, akkor van legalább egy szinguláris pontja.

Tétel

Egy nemelfajuló másodrendű felület esetén minden pontnak van polársíkja, és minden síknak van pólusa. (Azaz minden pont a saját polársíkjának pólusa és minden sík a saját pólusának polársíkja. Ilyen módon a pontok és egyenesek között kölcsönösen egyértelmű a megfeleltetés.)

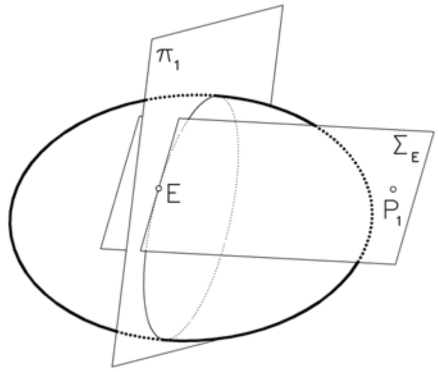
Tétel

Egy nemelfajuló másodrendű felület pontjának polársíkja az az egyetlen sík, amelyik a felületet ebben a pontban érinti, a felület érintősíkjának pólusa maga az érintési pont.

Tétel

Ha egy pont polársíkja belemetsz a nemelfajuló másodrendű felületbe, akkor a metszet pontjaiban vett érintősíkok áthaladnak magán a ponton.

(Az ábra jelöléseit felhasználva: a P_1 pont polársíkja a felületre nézve π_1, amely belemetsz a felületbe. A metszet egy tetszőleges pontja E, melyben a felület érintősíkja Σ_E. A Σ_E sík tartalmazza a P_1 pontot.)



Definíció

Két egyenest *konjugált*nak nevezünk, ha az egyik egyenes pontjaihoz tartozó polársíkok a másik egyenest tartalmazzák és viszont.

Definíció

Nemelfajuló másodrendű felület esetén az egymással párhuzamos húrok felezési pontjai egy síkra illeszkednek, amely sík a felület *átmérősík*ja. Ez az átmérősík konjugált az előbbi húrok irányához.
Ha egy irány és a hozzá konjugált átmérősík merőleges egymásra, akkor a síkot *fősík*nak nevezzük.

Ha a felület centrális, akkor az átmérősík illeszkedik a centrumra.
Egy másodrendű felület esetén általában három fősík létezik és ezek páronként egymásra merőlegesek, de előfordulhat az is, hogy végtelen sok ilyen síkhármast találunk. Egy általános ellipszoid esetén három fősík létezik, de a forgásellipszoidnál egy fősík helyzete fix, míg a többi fősík erre merőlegesen végtelen sokféleképpen beállítható. A gömb esetén bármely középponton áthaladó sík fősík.
Három egymásra merőleges fősík esetén a páronként vett metszésvonalak egymásra merőlegesek és konjugáltak. Ezeket az egyeneseket a felület tengelyeinek nevezzük.
Ha egy felületnél teljesül az, hogy az átmérősíkok mindegyike (köztük a fősíkok is) áthalad egy ponton, akkor azt a pontot a felület középpontjának (centrumának) nevezzük. Ebből következik, hogy a centrumon áthaladnak a felület tengelyei is.

Tétel

A nemelfajuló másodrendű felületek az előbb definiált fősíkokra nézve síkszimmetrikusan helyezkednek el.

Definíció

A másodrendű felület centrumának koordinátái kielégítik a következő egyenletrendszert:

$$a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+a_{14}=0$$
$$a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z+a_{24}=0$$
$$a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z+a_{34}=0$$

Tétel

A másodrendű felület akkor és csak akkor centrális (középpontos), ha $A_{44}\neq 0$. (Ahol $A_{44}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.)

Tétel

Egy centrális másodrendű felület centruma akkor és csak akkor azonos a koordinátarendszer kezdőpontjával, ha a felület egyenletében lineáris tag nem szerepel.

(Azaz $a_{14}=0$, $a_{24}=0$ és $a_{34}=0$. Ekkor a görbe egyenlete: $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}xz+2a_{23}yz+a_{33}z^2+a_{44}=0$. Minden centrális felület egyenlete a koordinátarendszer eltolásával ilyen alakara hozható. Az egyenletből kiolvasható, hogy a centrális másodrendű felületek a centrumukra vonatkozólag szimmetrikusak, hiszen az (x, y, z) ponttal együtt az (-x, -y, -z) pont is kielégíti az egyenletet.)

A másodrendű görbék tengelyének/tengelyeinek analitikus meghatározásához felhasználjuk a lineáris algebrai ismereteket.

Az adott másodrendű görbe mátrixának tekintsük az $(A_{44})=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ részmátrixát, amely egy szimmetrikus mátrix. Ez a mátrix meghatározza az

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=x_1'$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=x_2'$$
$$a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=x_3'$$

homogén lineáris transzformációt, azaz minden $\underline{x}(x_1, x_2, x_3)$ vektorhoz egy $\underline{x}'(x_1', x_2', x_3')$ vektort rendel. Az $\underline{x}$ vektort a mátrix saját vektorának nevezzük akkor, ha nem nullvektor és párhuzamos a hozzá rendelt $\underline{x}'$ vektorral. Mindez azt jelenti, hogy $\underline{x}'=\lambda\underline{x}$, ahol $\lambda\neq 0$ tetszőleges valós szám. Ha $\underline{x}$ sajátvektor, akkor bármely vele párhuzamos vektor is sajátvektor. Elég tehát egy sajátvektor állását ismerni ahhoz, hogy a sajátvektorok összességét ismerjük. A sajátvektorok irányát főiránynak nevezzük. A sajátvektorra a fenti egyenletrendszer a következő:

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=\lambda x_1$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=\lambda x_2$$
$$a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=\lambda x_3$$

Rendezzük egy oldalra az előbbi egyenleteket!

$$(a_{11}-\lambda)x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=0$$
$$a_{21}x_1+(a_{22}-\lambda)x_2+a_{23}x_3=0$$
$$a_{31}x_1+a_{32}x_2+(a_{33}-\lambda)x_3=0$$

Ennek az egyenletrendszernek akkor van triviálistól különböző megoldása x_1 és x_2-re, ha az alapmátrix determinánsa nulla, azaz

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix}=0.$$

A determinánst kifejtve a λ-ra harmadfokú egyenletet kapunk. A megoldások az (A_{44}) mátrix sajátértékei, magát az egyenletet a mátrix Laplace-féle (karakterisztikus) egyenletének

nevezzük. Ezek alapján a sajátértékek száma legfeljebb három lehet. A kiszámolt sajátértéket felhasználva konkrét egyenletrendszereket kapunk, melynek a megoldásai vektorállások.
Összefoglalva a megoldás menete a következő:
Az (A_{33}) sajátértékeit meghatározzuk, majd a sajátértékekhez meghatározzuk a sajátvektorokat. A sajátvektorok a tengelyek állását adják meg. Ez a kapcsolat az oka annak, hogy a sajátvektorok és sajátértékek meghatározásának problémáját főtengelyproblémának is mondjuk.
A Laplace-féle egyenlet az előbbi determináns kifejtése után a következő alakú:

Itt lesz az egyenlet
A gyökök és együtthatók közötti összefüggés alapján azt is tudjuk, hogy $A_{44}=\lambda_1\lambda_2\lambda_3$.
A lehetséges megoldásokat vizsgáljuk:

- Ha három különböző, és nem nulla sajátérték volt, akkor ezekhez tartozó sajátvektorok páronként egymásra merőlegesek, azaz pontosan egy tengelyhármast határoznak meg.
  A sajátértékek vagy mind azonos előjelűek (erre példa az ellipszoid), vagy kettőnek megegyezik az előjele és a harmadiknak ettől eltérő (erre példa az egy-, vagy kétköpenyű hiperboloid).
- A $\lambda=0$ pontosan akkor megoldása a Laplace-féle egyenletnek, ha nem szerepel konstans tag az egyenletben, azaz $A_{44}=0$. A nullától különböző sajátértékeket vesszük csak figyelembe. Ekkor a nem nulla sajátértékek vagy egyező (pl. elliptikus paraboloid), vagy különböző előjelűek (pl. hiperbolikus paraboloid).
- A sajátértékek között csak egy nullától különböző van. (pl. parabolikus henger)

Létezik olyan ξ_1, ξ_2, ξ_3 koordinátarendszer, melyben az $a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2$ másodfokú alak a következő alakot ölti:

$$\lambda_1\xi_1^2+\lambda_2\xi_2^2+\lambda_3\xi_3^2,$$

ahol a λ_1, λ_2, λ_3 a tengelyeknek megfelelő sajátértékek.
Ha egyszerűen szeretnénk megfogalmazni, akkor az adott másodrendű felület esetén a koordinátarendszer centrumba való eltolásával az elsőfokú tag (az x-es, y-os és z-s) eltűnik, illetve a sajátértékek felhasználásával a vegyes szorzatok is kiejthetők. Ezek után csak a négyzetes tagok és a konstans tag marad az egyenletben. Ezt az alakot nevezzük kanonikus alaknak. A kanonikus alak felhasználásával egyszerűbben lehet a másodrendű felületek osztályozását elvégezni. A kanonikus alakban változóként az x-t, y-t és z-t fogjuk használni.
Minden másodrendű felület egyenlete a főtengely-transzformáció során a következő kanonikus alakok valamelyikére hozható:

Három különböző és egyező előjelű sajátérték:

1.	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	valós ellipszoid, vagy valós gömb
2.	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$	képzetes ellipszoid vagy képzetes gömb (nincs valós pontja)
3.	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$	pontellipszoid, pontgömb, valós csúcspontú képzetes kúp

Három különböző, de nem egyező előjelű sajátérték:

4. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ egyköpenyű hiperboloid

5. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ kétköpenyű hiperboloid

6. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ valós másodrendű kúp

Két különböző előjelű és egy nulla sajátérték:

7. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$ hiperbolikus paraboloid (nyeregfelület)

8. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ hiperbolikus henger

9. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ metsző síkpár (elfajuló hiperbolikus henger)

Két egyező előjelű és egy nulla sajátérték:

10. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$ elliptikus paraboloid

11. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ elliptikus henger

12. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$ képzetes elliptikus henger (nincs valós pontja)

13. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ valós egyenesben metsző képzetes síkpár (elfajuló elliptikus henger)

Egy nullától különböző sajátérték:

14. $y^2=2px$ parabolikus paraboloid

15. $\frac{x^2}{a^2}=1$ párhuzamos síkpár

16. $\frac{x^2}{a^2}=-1$ képzetes párhuzamos síkpár

17. $\frac{x^2}{a^2}=0$ kettős sík

A felületek mátrixának determinánsát kiszámolva a következő felületek nemelfajulók:

- Valós és képzetes ellipszoid (gömb) (1. és 2.)
- Egy- és kétköpenyű hiperboloid (4. és 5.)
- Hiperbolikus paraboloid (7.)
- Elliptikus paraboloid (10.)

(A projektív osztályozás szerint az előbbi valós felületek projektív ekvivalensek, és egy osztályba tartoznak. Ezt neveztük ott a valós gömb osztálynak. A képzetes felületek egy mások osztályban tartoztak ott is.)

A másodrendű görbe fókuszainak projektív értelmezése

Definíció

Nemelfajuló másodrendű görbe *fókusz*ain a képzetes körpontokból a másodrendű görbéhez húzott érintők metszéspontjait értjük.

Tétel

Ha egy másodrendű görbének van két valós fókusza, akkor van további négy projektív fókusza is, melyek mindegyike képzetes, és kettő közülük a sík abszolút képzetes körpontja. Ha a másodrendű görbének nincs két valós fókusza, azaz parabola, akkor projektív fókuszaként csak az abszolút képzetes körpontokat említjük.

Határozzuk meg az ellipszis fókuszait!

Tekintsük a komplex számok feletti projektív síkot. A sík abszolút képzetes körpontjainak koordinátái: $I_1(1, i, 0)$ és $I_2(1, -i, 0)$.
Tekintsük azt a sugársort, melynek a sorozópontja I_1. Ez egy euklideszi értelemben párhuzamos képzetes egyenessor, a sugarai olyan egyenesek, melyek egyenletét az I_1 koordinátái kielégítik, azaz $x+iy+c_1=0$ alakban adhatók meg. (A c_1 a paraméter.) Tekintsünk egy másik sugársort is, ennek a sorozópontja az I_2, a sugarak egyenlete $x-iy+c_2=0$ alakú, ahol c_2 paraméter.
Az a nagytengelyű és b kistengelyű ellipszis egyenlete: $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$.
A sugársorokból kiválasztjuk azokat az elemeket, melyek érintik az ellipszist.
Az I_1-re illeszkedő sugársor egy elemének egyenletéből x-t kifejezzük: $x=-iy-c_1$, és ezt az ellipszis egyenletébe helyettesítjük, ekkor y-ra egy másodfokú egyenletet kapunk.

$$y^2\left(a^2-b^2\right)+2ic_1b^2y+b^2c_1^2-a^2b^2=0$$

Ennek az egyenletnek akkor van egy megoldása (az egyenes érintője az ellipszisnek), ha a diszkrimináns nulla.

$$D=-4c_1^2b^4-4\left(a^2-b^2\right)\left(b^2c_1^2-a^2b^2\right)=0$$

Ebből adódik, hogy $c_1=\pm\sqrt{a^2-b^2}$.
Hasonló számításokkal az I_2-re illeszkedő sugársorból is kiválasztjuk az ellipszist érintő elemeket, ezekre $c_2=\mp\sqrt{a^2-b^2}$.
Látható, hogy összesen négy darab érintő húzható, és ezek páronként merőlegesek egymásra:

I. $x+iy+\sqrt{a^2-b^2}=0$

II. $x+iy-\sqrt{a^2-b^2}=0$

III. $x-iy+\sqrt{a^2-b^2}=0$

IV. $x-iy-\sqrt{a^2-b^2}=0$

Vizsgáljuk meg a metszéspontokat!

M(I; II):	I_1	F_5
M(I; III):	$x=-\sqrt{a^2-b^2};y=0$	F_2
M(I; IV):	$x=0;y=i\sqrt{a^2-b^2}$	F_3

M(II; III):	$x = 0; y = -i\sqrt{a^2 - b^2}$	F_4
M(II; IV):	$x = \sqrt{a^2 - b^2}; y = 0$	F_1
M(III; IV):	I_2	F_6

Az F_1 és F_2 fókuszok az eddigi metrikus úton megadott fókuszok, az F_3 és F_4 fókuszok a kistengely egyenesén lévő képzetes fókuszok, és az F_5 és F_6 fókuszok a sík abszolút képzetes körpontjai.

Határozzuk meg a hiperbola fókuszait!

Az I_1 és I_2 abszolút képzetes körpontokra illeszkedő sugarak $x+iy+c_1=0$ és $x-iy+c_2=0$. (A c_1 és c_2 paraméterek.)
Az a valós- és b képzetes tengelyű hiperbola egyenlete: $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$.
Hasonló számításokat végzünk, mint az ellipszis esetében. Az I_2-re illeszkedő sugársorból kiválasztjuk a hiperbolát érintő elemeket, ezekre $c_1 = \pm\sqrt{a^2 + b^2}$. Az I_2-re illeszkedő sugársorból is kiválasztjuk a hiperbolát érintő elemeket, ezekre $c_2 = \mp\sqrt{a^2 + b^2}$.
Összesen négy darab érintő húzható:

I.	$x + iy + \sqrt{a^2 + b^2} = 0$
II.	$x + iy - \sqrt{a^2 + b^2} = 0$
III.	$x - iy + \sqrt{a^2 + b^2} = 0$
IV.	$x - iy - \sqrt{a^2 + b^2} = 0$

Vizsgáljuk meg a metszéspontokat!

M(I; II):	I_1	F_5
M(I; III):	$x = -\sqrt{a^2 + b^2}; y = 0$	F_2
M(I; IV):	$x = 0; y = i\sqrt{a^2 + b^2}$	F_3
M(II; III):	$x = 0; y = -i\sqrt{a^2 + b^2}$	F_4
M(II; IV):	$x = \sqrt{a^2 + b^2}; y = 0$	F_1
M(III; IV):	I_2	F_6

Az F_1 és F_2 fókuszok az eddigi metrikus úton megadott fókuszok, az F_3 és F_4 fókuszok a képzetes tengely egyenesén lévő képzetes fókuszok, és az F_5 és F_6 fókuszok a sík abszolút képzetes körpontjai.

Határozzuk meg a parabola fókuszait!

Tekintsünk egy parabolát: $y=ax^2$ és az I_1 és I_2 abszolút képzetes körpontokra illeszkedő sugársorokat: $x=-iy-c_1$ és $x=iy-c_2$.
Az ellipszisnél leírt számítással meghatározzuk a sugársorok azon elemeit, melyek érintik a parabolát. Az első esetben

$$-ay^2-(2iac_1-1)y-ac_1^2=0,$$

a második esetben

$$-ay^2-(2iac_2-1)y+ac_2^2=0$$

egyenlet diszkriminánsának kell nullának lennie.
(Ekkor $D=-4a^2c_1^2-4iac_1+1+4a^2c_1^2=0$ és $D=-4a^2c_2^2+4iac_2+1+4a^2c_2^2=0$)

Ebből adódik, hogy $c_1=-i\frac{1}{4a}$ és $c_2=i\frac{1}{4a}$.

A kapott érintők egyenletei:

$$x+iy-i\frac{1}{4a}=0 \qquad \text{és} \qquad x-iy+i\frac{1}{4a}=0.$$

A metszéspontjukat kiszámolva a fókusz koordinátái:

$$F\left(0;\frac{1}{4a}\right).$$

A parabolának csak egy végesben lévő fókusza van.

A fókuszok tulajdonságai

Tétel

Egy nemelfajuló másodrendű görbe esetén a végesben lévő fókuszokon áthaladó egymásra merőleges egyenesek konjugáltak a görbére nézve. (Két egyenest akkor nevezünk konjugáltnak, ha áthaladnak egymás pólusain.)

Bizonyítás

Legyen a görbe egyenlete $a_{ik}x_ix_k=0$. Annak szükséges és elegendő feltétele, hogy az (u_i) és (v_i) koordinátájú egyenesek konjugáltak legyenek az, hogy az egyeneskoordináták kielégítsék a $b_{ik}u_iv_k=0$ összefüggést, ahol a (b_{ik}) az (a_{ik}) mátrix inverze.

A bizonyítást ellipszis esetében az egyik valós fókuszban végezzük el.

Tekintsük a $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ egyenletű ellipszis $F(c, 0)$ fókuszát, ahol $c=\sqrt{a^2-b^2}$. Tekintsük az y tengely $(0, -s)$ pontját. Az egyik egyenes ezt a pontot köti össze a fókusszal. Ekkor az egyenlete: $y=\frac{s}{c}x-s$. Homogén koordinátákban: $(s, -c, -sc)$. Az F-ben rá merőleges egyenes meredeksége: $-\frac{c}{s}$, és az y tengelyt a $\left(0,\frac{c^2}{s}\right)$ pontban metszi. (Derékszögű háromszögek hasonlóságából határozható meg.) Egyenlete: $y=-\frac{c}{s}x+\frac{c^2}{s}$, homogén koordinátákban: $(-c, -s, c^2)$.

Az ellipszis mátrixa:

$$(a_{ik})=\begin{pmatrix} b^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2b^2 \end{pmatrix}.$$

A mátrix inverze:

$$(b_{ik}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{b^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{a^2b^2} \end{pmatrix}$$

Az előbbi egyenesek koordinátáira:

$$b_{ik}u_iv_k = \frac{1}{b^2}\cdot s\cdot(-c) + \frac{1}{a^2}(-c)(-s) + -\frac{1}{a^2b^2}(-sc)c^2 = -sc\left(\frac{a^2-b^2-c^2}{a^2b^2}\right) = 0\,,$$

vagyis a két egyenes konjugált az ellipszisre nézve.

A többi görbére és fókuszra ehhez hasonló számításokat lehet elvégezni.

Minden nemelfajuló másodrendű görbe hatással van a síkjában lévő pontokra a következő módon: minden pontban egy sugárinvolúciót indukál. Ha P egy tetszőleges pont, akkor a rajta áthaladó *e* egyeneshez azt a P-n áthaladó egyenest rendeljük, amely a görbére nézve *e*-hez konjugált. Jelölje *e*’ a képet, és ekkor az is belátható, hogy az *e*’-höz az *e*-t rendeljük. A görbe fókuszaiban ez a sugárinvolúció azért különleges, mert az egymáshoz konjugált egyenesek még merőlegesek is. Ez a tulajdonság a fókusz egy újabb definiálására ad lehetőséget:

Egy nemelfajuló másodrendű görbe fókuszán olyan pontot értünk, melyben a görbe által indukált sugárinvolúció éppen a derékszögek involúciója.

A síkon tetszőleges pontban és a másodrendű görbe középpontjában is lehet vizsgálni a görbe által indukált sugárinvolúciót. Involúciós sugársorokban érvényes a következő

Tétel:

Involúciós sugársorban vagy egy egymásra merőleges egyenespár van, vagy bármely megfelelő egyenespár merőleges.

Ez utóbbit a merőlegesek involúciója, vagy más néven ortogonális involúció. A síkon a görbe fókuszaitól különböző bármely pontban csak egy egymásra merőleges sugárpár létezik. A görbe középpontjában egymásra merőleges és egymáshoz konjugált egyenespárt a görbe tengelyeinek nevezzük. Ezt úgy is fogalmazhattuk volna, hogy a tengelyeket egymásra merőleges konjugált átmérőpár adja. A kör esetében a középpontban a kör éppen a derékszögek involúcióját indukálja, ezért ott nem tudunk egyértelműen tengelypárt kijelölni. A középpontban bármely egymásra merőleges egyenes lehet a kör tengelypárja. Minden más középpontos másodrendű görbe esetén két tengely létezik.
Ha a konjugált átmérőpárok involúciójában van valós fix elempár, akkor az a görbe aszimptotáit adja. Ezt látjuk a hiperbolánál. Ha nincs valós fix egyenespár, akkor csak képzetes egyenespár lehet fix, és a görbének nincsen aszimptotája. Ezzel az esettel találkozunk az ellipszisnél.

Tétel

Az olyan nemelfajuló másodrendű görbe, melynek bármely átmérője tengely, vagyis a konjugált átmérőpárok ortogonális involúciót alkotnak, egyedül a kör lehet.

Bizonyítás

Tekintsünk egy nemelfajuló másodrendű görbét. Válasszunk egy egymásra merőleges konjugált átmérőpárt, melyek egy homogén koordinátarendszer tengelyei lesznek. A koordinátarendszer középpontja és a tengelyek végtelen távoli pontjai a görbe egy polárháromszögét alkotják. Egy ilyen koordinátarendszerben a görbe egyenlete csak négyzetes tagokat tartalmaz, azaz a görbe mátrixa csak a főátlóban tartalmaz nullától különböző elemeket.

$$a_{11}x_1^2+ a_{22}x_2^2+ a_{33}x_3^2=0$$

A konjugált átmérőpárok involúciójában a fix egyenesek a görbe végtelen távoli pontjain áthaladó egyenesek (aszimptoták). Az ortogonális involúcióban nincsenek valós fix egyenesek, csak képzetesek, melyek az abszolút képzetes körpontokon ($I_1(1, i, 0)$, $I_2(1, -i, 0)$) haladnak át. Ezeknek a pontoknak illeszkedniük kell a görbére, azaz koordinátáik kielégítik a görbe egyenletét:

$$a_{11}- a_{22}=0.$$

Mindez azt jelenti, hogy a görbe egyenletében az x_1^2 és x_2^2 (vagy Descartes-koordinátákban az x^2 és y^2) együtthatója megegyezik, azaz a görbe valóban kör.

Nem esett szó eddig a paraboláról. A parabola nem középpontos görbe, vagyis nincs olyan véges helyzetű pont a síkon, amely a sík végtelen távoli egyenesének a pólusa lenne a parabolára nézve. A számítások szerint a pólus a parabola végtelen távoli pontja, de ez nem lehet középpont. A parabola átmérői olyan egyenesek, melyek illeszkednek a parabola végtelen távoli pontjára. A parabola tengelyének nevezzük az átmérőire merőleges egyenes végtelen távoli pontjának polárisát.

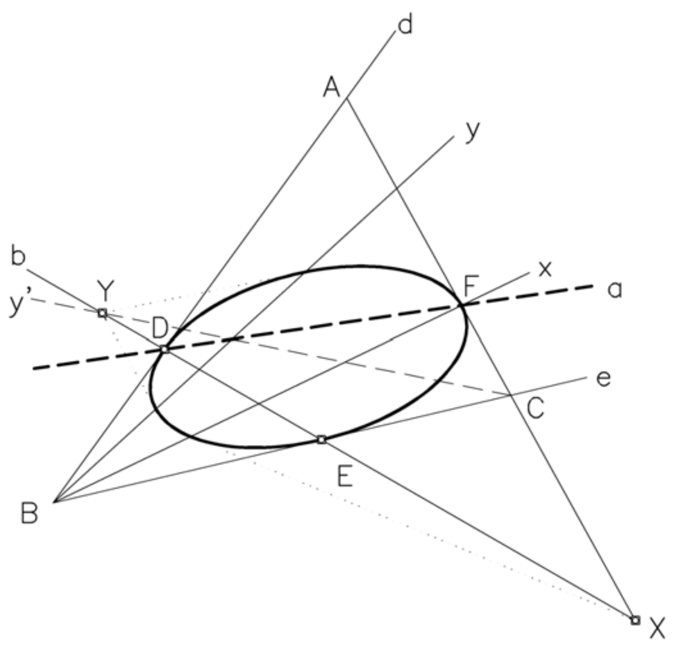
A sík egy tetszőleges pontjában egy másodrendű görbére nézve egymáshoz konjugált egyenesek a következőképpen határozhatók meg:

Tétel

Egy másodrendű görbe három érintője által meghatározott háromszögben az egyik csúcs polárisának tetszőleges pontját a másik két csúccsal összekötve konjugált egyenespárt kapunk.

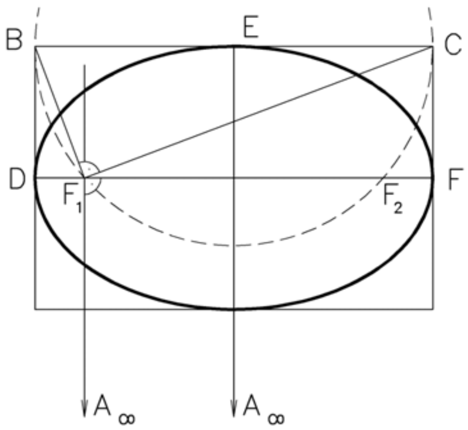
Bizonyítás:

Legyen az ABC egy másodrendű görbe három érintője által meghatározott háromszög. Az érintési pontokat jelölje D, E, F. Tekintsük a B sorozópontú sugársort (*d*=BA, *e*=BC, *x*=BF, *y* tetszőleges elem), ez projektív kapcsolatban van a sugarak pólusai által alkotott pontsorral (rendre D, E, X, Y). D, E, X, Y pontok egy egyenesre illeszkednek, amely nem más, mint a B pont polárisa: *b*. A *b* egyenesen lévő pontokat a C-ből vetítve egy másik sugársort kapunk, amely a



konstrukciónak megfelelően projektív kapcsolatban van a B-re illeszkedő sugársorral. A sugarakat a következőképpen rendeljük egymáshoz: $d \leftrightarrow$CD, $x \leftrightarrow$CX, $y \leftrightarrow$CY, $e \leftrightarrow$CE. Az e egyenes nem más, mint a sugársorok sorozópontjait összekötő egyenes, melyet önmagának feletettünk meg. Ekkor a sugársorok közötti kapcsolat perspektívvé válik. A további megfelelő sugarak a perspektivitás tengelyében metszik egymást. Az x és a CX egyenes metszéspontja F, a d és CD metszéspontja D, ebből a perspektivitás tengelye az a=DF egyenes. Ekkor az y és az y'=CY metszéspontja is illeszkedik az a egyenesre. Az ábrából leolvasható, hogy y' illeszkedik az y pólusára, de akkor y is illeszkedik az y' pólusára, vagyis a két egyenes konjugált egymáshoz a görbére nézve. Az y és y' egyenesek az A csúcs polárisán metszik egymást, vagyis teljesítik a tételben szereplő feltételeket.
A bizonyítás során sehol sem használtuk fel azt, hogy az ábrán ellipszist rajzoltunk. Parabola és hiperbola esetén és igaz az állítás.

Következmény:



Tekintsünk egy ellipszist, legyenek a nagytengely végpontjai D, F, az egyik kistengely végpont E. Ekkor az A_∞ a kistengely egyenesének végtelen távoli pontja, B és C az ellipszist érintő téglalap két csúcsa. Az ellipszis két fókusza illeszkedik az E középpontú, B, C pontokon áthaladó körre. (Ekkor teljesül az E pontra, hogy az EF_1 és EF_2 távolságok összege éppen a nagytengellyel egyezik meg.) Az előbbi tétel értelmében a BF_1 és CF_1 egyenesek egymáshoz konjugáltak és egymásra merőlegesek. Az F_1-ben a nagytengely és a rá merőleges egyenes konjugált. Ezzel a két megfelelő egyenespárral az F_1-ben ortogonális involúciót adtunk meg. Hasonló igaz az F_2 fókuszban is.
A nagytengelyen több olyan pont nem lehet, melyben ortogonális involúciót adna a konjugált egyenesek involúciója. Ha indirekt módon gondolkodunk, és feltesszük, hogy mégis van, akkor abból a pontból is derékszög alatt kellene látszódnia a BC szakasznak. Ami nem lehetséges, mert akkor egy körnek és egy egyenesnek három közös pontja lenne, ami nyilvánvalóan ellentmondás.

Befejezésül egy érdekes kapcsolatot mutatunk meg a valós fókusz és a vezéregyenes között. Középiskolában, a parabola definíciójában szerepelt a vezéregyenes. A parabola pontjait az jellemzi, hogy a fókusztól és a vezéregyenestől egyenlő távolságra vannak. Az ellipszis és a hiperbola definíciójában a fókuszokat és a nagytengely illetve a valós tengely hosszát használtuk fel. Ezek a görbék is definiálhatók egy fókusz és egy vezéregyenes segítségével.
Adjunk meg egy F pontot és egy rá nem illeszkedő v vezéregyenest. Azok a pontok a síkon, melynek az F-től és v-től mért távolságának aránya állandó, másodrendű görbét határoznak meg.

$$\lambda = \frac{d(P,F)}{d(P,v)},$$ ahol d a zárójelben lévő objektumok távolságát adja.

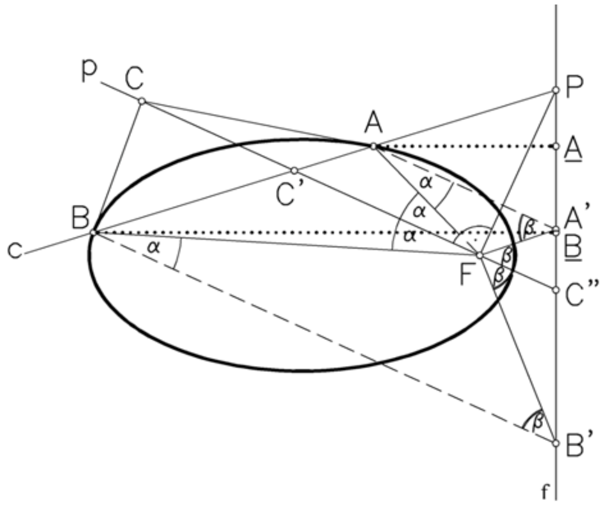
Ha $\lambda=1$, akkor a görbe parabola.
Ha $\lambda<1$, akkor a görbe ellipszis.
Ha $\lambda>1$, akkor a görbe hiperbola.

Az ellipszis és a hiperbola esetén a két fókuszhoz két vezéregyenes létezik. Az ezek közötti kapcsolat projektív eszközökkel is kifejezhető.

Tétel

Egy másodrendű görbe fókuszának polárisa a görbe vezéregyenese.

Bizonyítás



A bizonyítás során ismét ellipszist használunk, de természetesen parabola és hiperbola esetén is érvényes lenne az okoskodás. Legyen *f* az F fókusz polárisa az ellipszisre nézve. C egy tetszőlegesen választott külső pont a görbére nézve. A C pont *c* polárisa az A és B pontokban metszi a görbét és a P pontban az *f* egyenest. P polárisa a C és F pontokon is áthalad, azaz a *p*=CF egyenes. Ekkor a PF egyenes konjugált a *p*-hez, és ekkor azt is tudjuk, hogy PF merőleges a *p*-re. Jelölje C' a *p* és *c*=AB egyenesek metszéspontját. Az A, B, C', P harmonikus pontnégyes, melyet az F-ből vetítve harmonikus sugárnégyest kapunk: FA, FB, FC', FP. A négy sugár közül az egyik páros merőleges egymásra, akkor ez a két egyenes szögfelezője a másik párnak.

$$\alpha = AFC'\angle = C'FB\angle$$

Az A és B pontokból húzzunk párhuzamost a *p* egyenessel, ezeknek *f*-fel való metszéspontja: A' és B'. Ekkor a váltószögek miatt

$$\alpha = A'AF\angle = B'BF\angle.$$

A *c* egyenes B, C', A, P pontjait *p*-vel párhuzamosan az *f*-re vetítettük és ekkor rendre a B', C", A' P pontokat kaptuk, és mivel az első négyes harmonikus pontnégyes volt, így a másik négyes is az. F-ből vetítve a B', C", A', P pontokat, harmonikus sugárnégyest kapunk. Mint ahogy az előbb láttuk, az FC" egyenes felezi az A'F és B'F egyenesek szögét és váltószögek is keletkeztek:

$$\beta = BB'F\angle = B'FC''\angle = C''FA'\angle = FA'A\angle.$$

Ekkor azt láthatjuk, hogy az AA'F és BB'F háromszögek hasonlók, mert mindkettőnek egy-egy szöge α és β. Ekkor a megfelelő oldalak aránya megegyezik:

$$FA:FB = AA':BB'$$

Most az A és B pontokat az *f* egyenesre merőlegesen vetítjük. Ekkor az $\underline{A}$ és $\underline{B}$ pontokat kapjuk. A$\underline{A}$A' és B$\underline{B}$B' derékszögű háromszögek szintén hasonlóak, ezért

$$AA':BB' = A\underline{A}:B\underline{B}$$

E két arányból kapjuk:

$$FA:FB=A\underline{A}:B\underline{B}.$$

Ha átrendezzük ezt az arányt, akkor azt kapjuk, hogy az A pontnak az F-től és *f* –től mért távolságának aránya megegyezik a B-re vett hasonló aránnyal:

$$FA: A\underline{A}=FB:B\underline{B}.$$

Ha az A pontot rögzítjük a görbén, akkor minden lehetséges B-re teljesül az arányok egyenlősége, azaz a görbe nem más, mint az F fókusszal, *f* vezéregyenessel és az aránnyal megadott görbe.

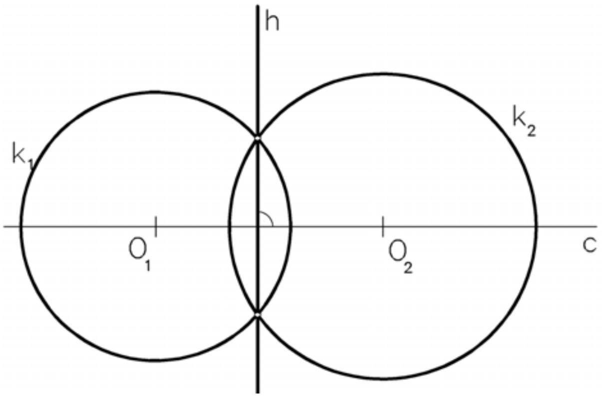
A másodrendű görbék hatványvonala

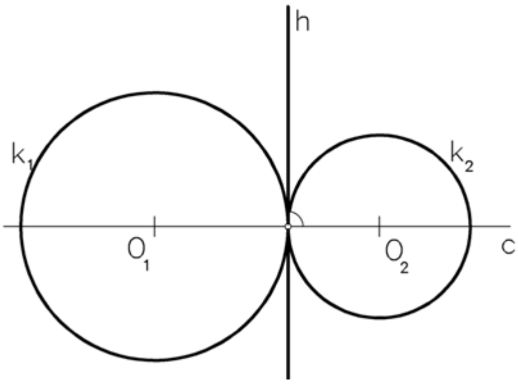
Két kör esetén a hatványvonal a következőképpen definiálható:

> Azoknak a pontoknak a mértani helyét, amelyeknek a két körre vonatkozó hatványa megegyezik, a két kör hatványvonalának nevezzük.

Ezen definíció alapján két koncentrikus körnek nincs közös hatványvonala, mert a sík bármely pontjának a két körre vett hatványa különböző érték lesz. Analitikusan a hatványvonal egyenlete úgy állítható elő, hogy a két kör egyenletét kivonjuk egymásból.

A nem koncentrikus, és egymást metsző körök esetén a hatványvonal olyan egyenes, amely merőleges a körök középpontjait összekötő egyenesre és áthalad a körök közös pontjain.

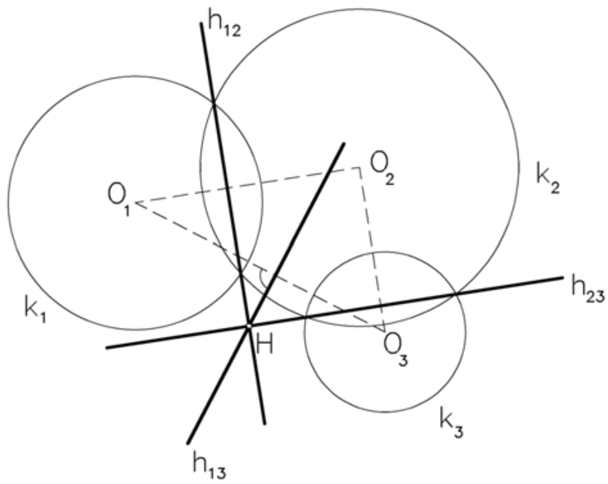




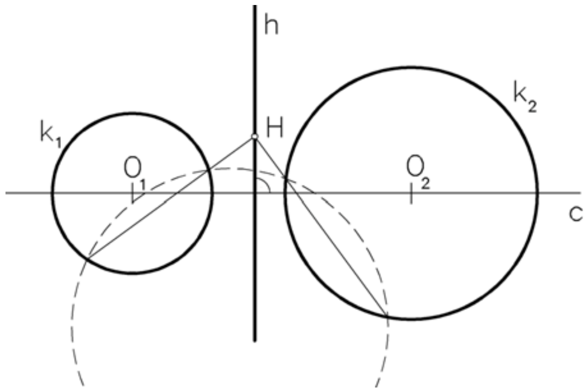
Ha a két kör egy pontban érintkezik, akkor a hatványvonal a közös pontban vett érintő. Ez az egyenes rendelkezik az előbbi tulajdonságokkal.

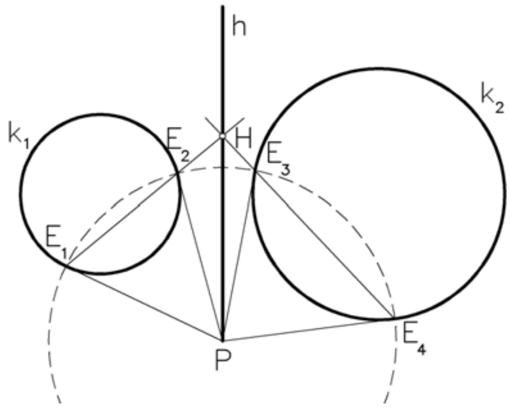
Akkor is meghatározható a hatványvonal, ha a két körnek nincs közös valós pontja. Ehhez fel kell használnunk a következő ismereteket:

Ha három kör középpontja nincs egy egyenesen, akkor egy olyan pont van, amelynek mind a három körre vonatkozólag ugyanaz a hatványa. A pontot a három kör közös hatványpontjának nevezzük. Ezen a ponton áthaladnak a páronként vett hatványvonalak, azaz a hatványpont a páronként vett hatványvonalak metszéspontja.



Ha a két körnek nincs közös pontja, akkor vegyünk egy olyan harmadik kört, amely mindkét kört metszi és a középpontja nincs rajta a két kör centrálisán. Ekkor a közös húrok egyeneseinek metszéspontja a három kör közös hatványpontja. Ebből a hatványpontból merőlegest állítunk az adott körök centrálisára.





Adott két kör: a k_1 és k_2. Legyen a P pont a két kör hatványvonalának egy olyan pontja, amely a körökre nézve külső pont. Ekkor a P pontból a k_1 és k_2 körökhöz egyenlő hosszúságú érintőszakaszokkal húzhatunk érintőket. Az E_1, E_2, E_3 és E_4 érintési pontok a P-től egyenlő távolságra vannak, ezért egy P középpontú körre illeszkednek.

Nézzük meg alaposabban az ábrát! Az E_1E_2 egyenes a P pontnak a k_1 körre vonatkozó polárisa, és E_3E_4 egyenes a k_2 körre vonatkozó poláris. A két poláris H metszéspontja a P-hez konjugált a k_1 és k_2 körre nézve. Egy kör egy egyenesen egy pontinvolúciót indukál, méghozzá oly módon, hogy az egyenes egy tetszőleges pontjához az egyenesnek azt a pontját rendeli, amely konjugált az előző ponthoz a körre nézve. Ebben az esetben azt tapasztaljuk, hogy ilyen módon a h egyenesen mindkét kör ugyanazt az involúciót indukálja.

- Ha a két körnek nincs valós közös pontja, akkor a hatványvonalon indukált involúció elliptikus, azaz nincs valós fix pontja. Az indukált involúciónak két képzetes fix pontja van, melyek a hatványvonalnak és a k_1-nek, a másik esetben a hatványvonalnak és a k_2-nek közös képzetes pontjai. Mivel az indukált involúciók megegyeznek, ezek a képzetes pontpárok is megegyeznek. Így igaz az az állítás is, hogy a hatványvonal a közös (valós vagy képzetes) pontokat összekötő egyenes.
- Ha a két körnek két valós közös pontja van, akkor az indukált involúció hiperbolikus, azaz két valós fix pontja van. Ekkor a hatványvonal két pontban metszi a köröket, és ezek a metszéspontok lesznek a fix pontjai az involúciónak.
- Ha a két kör érintkezik, akkor a hatványvonal mindkét kört érinti a közös pontban. Az indukált involúció ekkor nem kölcsönösen egyértelmű (a hatványvonal bármely pontjához az érintési pontot rendeli), ezért az érintő egyenesen indukált parabolikus involúcióról általában nem szoktunk beszélni. De most mégis használni fogjuk az elnevezést, hogy egységesen folytassuk a tárgyalást.

Ezek alapján a hatványvonal olyan egyenes, amelyen mindkét kör ugyanazt az involúciót indukálja.
Most tekintsük a sík végtelen távoli egyenesét!
Ezt az egyenest a sík minden köre az abszolút képzetes körpontokban metszi. A körök a végtelen távoli egyenesen egy elliptikus involúciót indukálnak, melynek a képzetes kettőspontjai éppen az abszolút képzetes körpontok. Ezek alapján a sík végtelen távoli egyenese is hatványvonal.

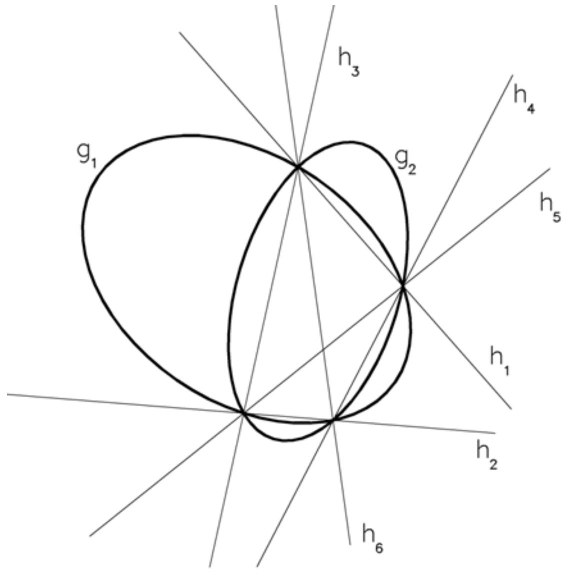
Hasonló meggondolásokkal más nem elfajuló másodrendű görbék esetén is meghatározhatunk hatványvonalat.

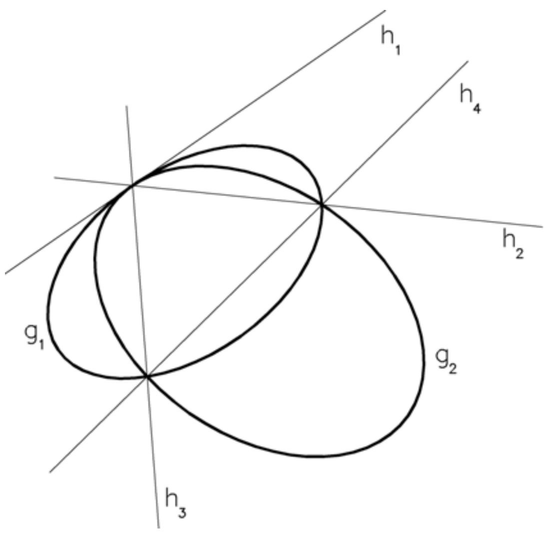
Definíció

Adott két nem elfajuló másodrendű görbe. Az olyan valós egyenest, melyen mindkét görbe ugyanazt az involúciót indukálja, a két másodrendű görbe projektív értelemben vett hatványvonalának nevezzük.

Tekintsünk néhány példát!

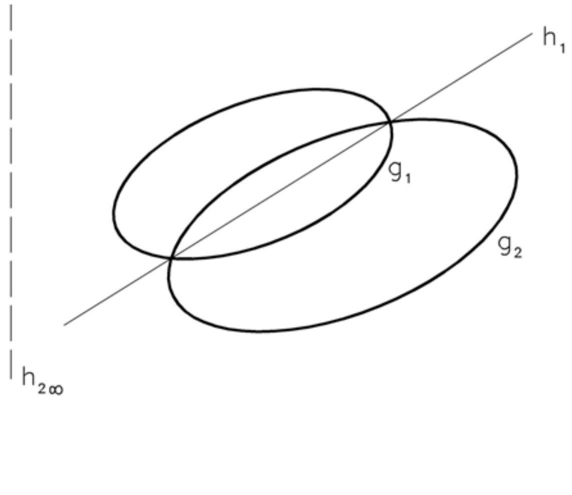
Két másodrendű görbének négy valós közös pontja van, akkor a páronként vett metszéspontok egy-egy hatványvonalat határoznak meg. Ezek a hatványvonalak a négy közös pont által meghatározott teljes négyszög oldalegyenesei. Bizonyos esetekben ez a teljes négyszög nem keletkezik (vagy éppen torzul), ezért két másodrendű görbének legfeljebb hat hatványvonala van.





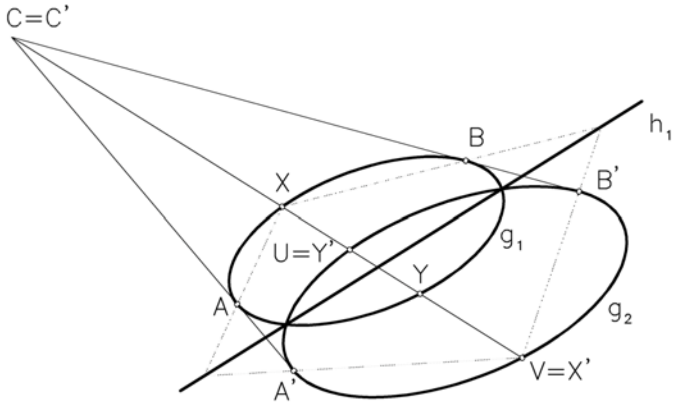
Ha a két másodrendű görbe egy közös pontban érintkezik és van még két valós közös pontja, akkor összesen négy hatványvonal van. Ebből egy a közös érintő (az indukált involúció parabolikus) a többi a páronként vett közös pontokat köti össze.

Középpontosan hasonló és egymást metsző ellipszisek esetén egy hatványvonalat azonnal kijelölhetünk, ez a két metszéspontot összekötő egyenes. A két ellipszis a konjugált irányokat egyformán cseréli fel, ezért a konjugált irányok végtelen távoli pontjai is ugyanúgy cserélődnek. A két ellipszis a végtelen távoli egyenesen ugyanazt az involúciót indukálja, ezért ez a másik hatványvonal.



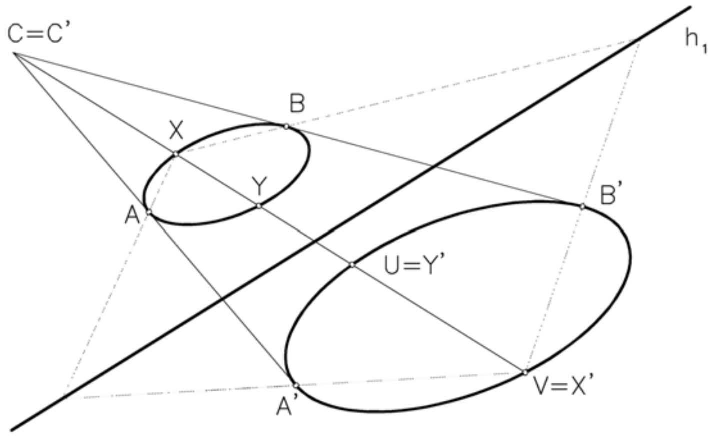
Milyen szerepe lehet két másodrendű görbe hatványvonalának?

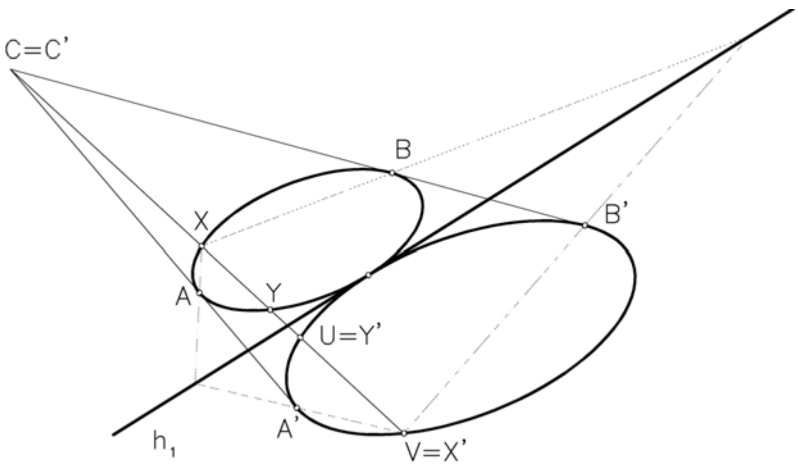
Ez utóbbi példában az ellipszisekhez a hasonlósági középpontból közös érintőket lehet húzni. Feleltessük meg egymásnak az egy érintőn lévő érintési pontokat (A↔A' és B↔B') és a hasonlósági középpontot önmagának (C=C')! Ezek után a hasonlósági középpontból indított szelővel mindkét ellipszist metszve az X, Y, U és V pontokat kapjuk. Ha az X ponthoz a V-t rendeljük (és ezzel az Y-hoz az U-t), akkor egy olyan centrális kollineációt adunk, meg, amelyben a kollineáció tengelye a h_1 hatványvonal. Ha az X-hez az U-t (és Y-hoz V-t) rendeltük volna, akkor a kollineáció tengelye a végtelen távoli egyenes lett volna, azaz a másik hatványvonal. Itt a hasonlósági középpontnak annyi szerepe van, hogy az ellipszisekhez közös érintőegyenest lehet belőle húzni.



Összefoglalva: Két nem elfajuló másodrendű görbe egymásra történő centrálkollineációs megfeleltetésében a két görbe közös hatványvonala a kollineáció tengelye.

Ha a két középpontosan hasonló, egymást nem metsző ellipszis esetén ezt a kollineációt felhasználva lehet a hatványvonalat meghatározni. Az egyik most is a sík végtelen távoli egyenese lesz, míg a másik egy közönséges egyenes.





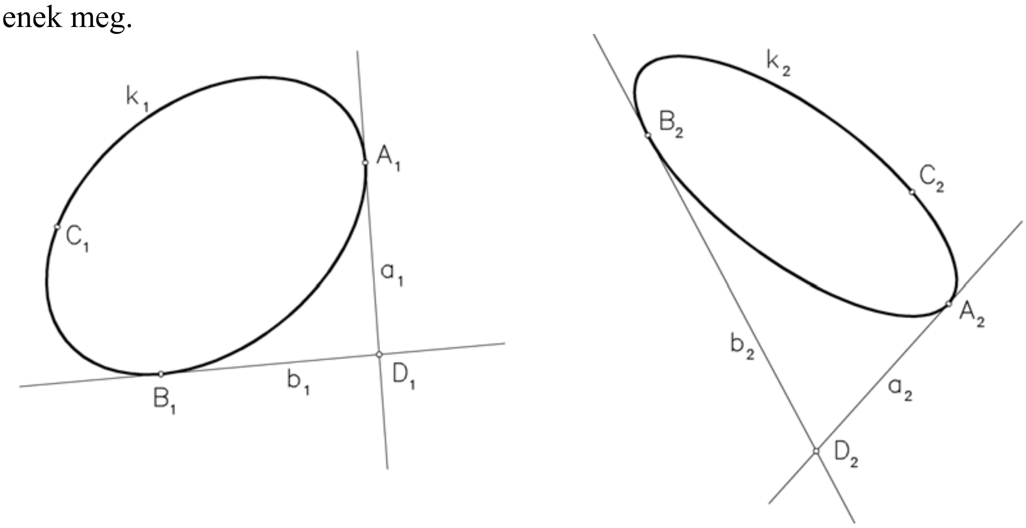
Ha a két ellipszis érintkezik, akkor a közös érintő lesz az a hatványvonal, amely közönséges egyenes.

A kúpszeletek kollineációs képe

A kollineáció illeszkedéstartó és kettősviszonytartó voltából következik, hogy projektív pontsorokat és sugársorokat projektív pontsorokba, ill. sugársorokba visz át. Ez viszont azt eredményezi, hogy minden másodrendű görbe másodrendű görbébe, minden másodosztályú görbe, másodosztályú görbébe megy át, hiszen ezekről tudjuk, hogy projektív sorok képződményeiként állíthatók elő.
A kollineáció illeszkedéstartó voltából az is következik, hogy csak elfajult görbék képe lesz ismét elfajult, továbbá, hogy a kollineációnál érintő érintőbe, érintési pont érintési pontba megy át.

A kollineációnak ez a tulajdonsága lehetővé teszi, hogy bizonyos kúpszeletre vonatkozó feladatokat úgy oldjunk meg, hogy a kúpszeletet valamilyen feladat megoldása szempontjából speciális helyzetbe transzformáljuk. Éppen e cél szempontjából igen fontos a következő tétel:

Mindig megadható olyan kollineáció, amely egy adott k_1 kúpszeletet adott k_2 kúpszeletre képez le oly módon, hogy k_1 A_1,B_1,C_1 pontjainak a k_2 adott A_2,B_2,C_2 pontjai feleljenek meg.



Jelöljük a k_1 A_1 pontbeli érintőjét a_1 -gyel, a B_1 -belit b_1 -gyel, ezek metszéspontját D_1 -gyel. A k_2 kúpszeletnél ezek megfelelőit a_2, b_2, D_2 -vel. Az A_1, B_1, C_1, D_1 pontok között nem lehet három kollineáris, mert k_1 nem elfajult, hasonlóan az A_2, B_2, C_2, D_2 között sem; ezért létezik egy és csakis egy olyan kollineáció, amely az A_1, B_1, C_1, D_1 pontokat rendre az A_2, B_2, C_2, D_2 pontokra képezi le. Ez a kollineáció viszont a k_1-et szükségképpen k_2-re képezi le, mert az illeszkedéstartás miatt az a_1 a_2-be, b_1 b_2-be megy át, és mivel két érintő az érintési ponttal és még egy pont a kúpszeletet egyértelműen meghatározza, csak a k_2 kúpszelet lehet k_1 képe.

Megjegyezzük, hogy a k_1 és k_2 kúpszeletek azonosak is lehetnek, ebben az esetben előbbi tételünk így fogalmazható:

Mindig megadható olyan kollineáció, amely egy adott kúpszeletet önmagára képez le, méghozzá úgy, hogy a kúpszelet adott három pontja annak adott három pontjába menjen át.

Bebizonyítható, hogy egy adott kúpszeletet önmagára leképező kollineációk csoportot alkotnak. Jegyezzük még meg, hogy a kollineáció, a kúpszeletre való konjugáltságot, pólus-poláris kapcsolatot is átörökíti.

A kúpszeletek simulókörei

A következőkben a kúpszeletek leképezésének egy fontos alkalmazását fogjuk megmutatni. Bevezetésül vizsgáljuk meg két kúpszelet metszéspontjainak az elhelyezkedését. A mi esetünkben az egyik kúpszelet legyen - kör.

Két kúpszelet közös pontjainak a meghatározása algebrailag két másodfokú egyenlet közös gyökeinek a meghatározását jelenti, ez negyedfokú egyenletre vezet. A negyedfokú egyenletnek pontosan 4 gyöke van (a gyököket most multiplicitásukkal tekintjük). Itt megengedjük képzetes metszéspontok létezését. 4 különböző gyök 4 különböző metszéspontot jelent. Ha valamely gyök multiplicitása 1-nél nagyobb, azaz a gyökök közül legalább 2 egyenlő, az illető gyökhöz tartozó metszéspontban - mint azt az analízis eszközeivel könnyen ki lehet mutatni - a két görbe érintője közös.

Általában: az n-szeres multiplicitású gyökhelyre azt mondjuk, hogy ott a két kúpszelet n-1-ed rendben érintkezik. Kúpszeletek esetében egy közös pont, mint gyök, legfeljebb négyszeres multiplicitással rendelkezik, ezért két kúpszelet érintkezése legfeljebb harmadrendű lehet.

Két különböző kúpszelet esetén a következők lehetségesek:

a) 4 különböző gyök: négy különböző metszéspont.
b) 2 egyenlő és 2 ezektől különböző gyök: elsőrendű érintkezés; ezenkívül metszés két különböző pontban.
c) 2-2 egyenlő gyök: a két kúpszelet két különböző pontban elsőrendben érintkezik.
d) 3 egyenlő egy ettő1 különböző gyök: a két kúpszelet egy pontban másodrendben érintkezik, ezenkívül még egy pontban metszik egymást.
e) 4 egybeeső gyök: a két kúpszelet egy pontban harmadrendben érintkezik.

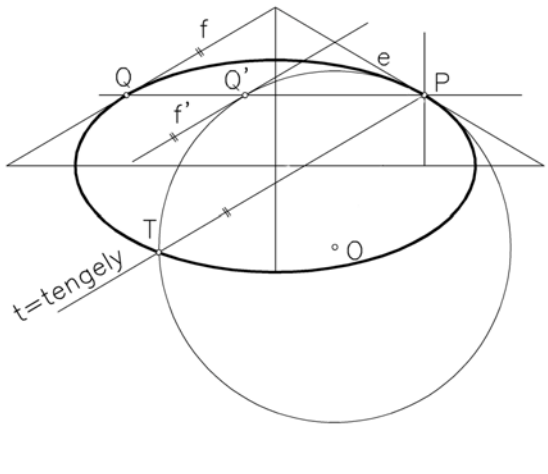
Ha egy kör egy kúpszeletet egy P pontban legalább másodrendben érint, akkor a kört a kúpszelet P pontbeli simulókörének (oszkuláló körének) nevezzük. A kúpszeletnek minden véges pontjában létezik pontosan egy simuló köre, ezekkel a kúpszelet másodrendben, a tengelyvégpontokban harmad rendben érintkezik (hiperoszkuláló körök).

A simulókör másik megközelítése lehet az, hogy felveszünk a görbén három pontot. Ezek meghatároznak egy kört. Tartson a három pont egy görbeponthoz. Ekkor egy körsorozatot kapunk. A körsorozat határértéke a simulókör. Annak a pontnak egy kis környezetében a simulókör minden más körnél pontosabban közelíti a görbét.

A simulókörök segítségével a kúpszelet egy ívdarabját jó közelítéssel körzővel is megszerkeszthetjük. Vizsgáljuk most meg, hogyan lehet a kúpszelet egy pontjában a simulókört megszerkeszteni.

A továbbiakban a projektív síkot az euklideszi sík kibővítésének tekintjük és a szerkesztésekben felhasznált párhuzamosságot, merőlegességet (felező merőlegességet) az euklideszi síkrészen használjuk.

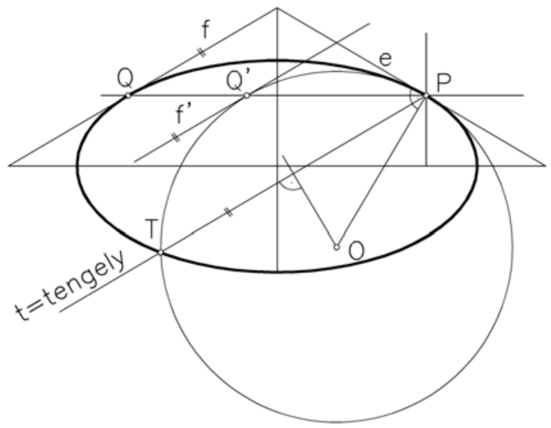
Tekintsünk most egy ellipszist és ennek P pontjában a simulókört és tegyük fel, hogy most a d) eset áll fenn, azaz a körnek és a kúpszeletnek P-n kívül van egy T valós közös pontja. Ezt a T-t a P kísérőpontjának (szatellit pont) nevezzük. Jelöljük Q-val P-nek az egyik tengelyre (most a kistengelyre) vonatkozó tükörképét, a PQ egyenes a simulókört Q’ -ben metszi.



Van olyan kollineáció, amely az ellipszist a simulókörre képezi le, méghozzá úgy, hogy a P, T, Q pontok rendre a P, T, Q' pontokba menjenek át. Ennél a kollineációnál a P-beli közös érintő fix egyenes, hiszen pontbeli érintő a képpontbeli érintőbe megy át, ugyancsak fix egyenesek a PT=P'T'=t és PQ=P'Q'. A P-re tehát három fix egyenes illeszkedik ezért centrum; kollineációnk így centrális kollineáció. Mivel a centrumon kívül fixpont csak a tengelyen lehet, ezért kell, hogy a T≡T' fixpont a tengelyen legyen. A tengely tehát T-ben metszi az ellipszist, de a másik metszéspontja csak P lehet, mert különben lenne az ellipszisnek és a simulókörnek P-n és T-en kívül is közös pontja. A PT=t egyenes tehát tengely.

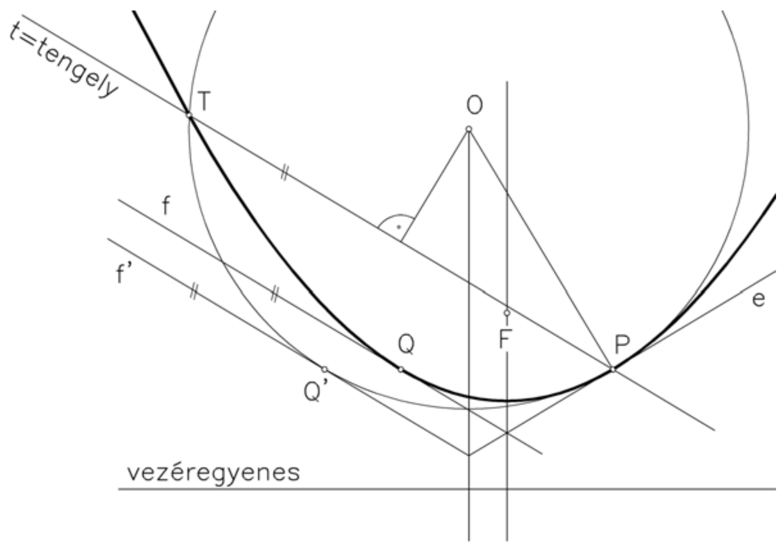
Legyen f az ellipszis Q-beli érintője és ennek képe, az f' , a simulókör Q'-beli érintője. A f és f' párhuzamosak, mert mindkettő szimmetrikus e-vel a kis tengely egyenesére nézve, illetve egy azzal párhuzamos egyenesre nézve. Mivel centrális kollineációnál egy egyenes és képe csak akkor lehet párhuzamos, ha az egyenesek párhuzamosak a kollineáció tengelyével. ezért f és f' a tengellyel is párhuzamosak. Ebből viszont az is következik, hogy e és t tengelyesen szimmetrikusak egy, a kis tengellyel párhuzamos egyenesre nézve.

Ennek alapján a P-beli simulókör O középpontjának a szerkesztése:

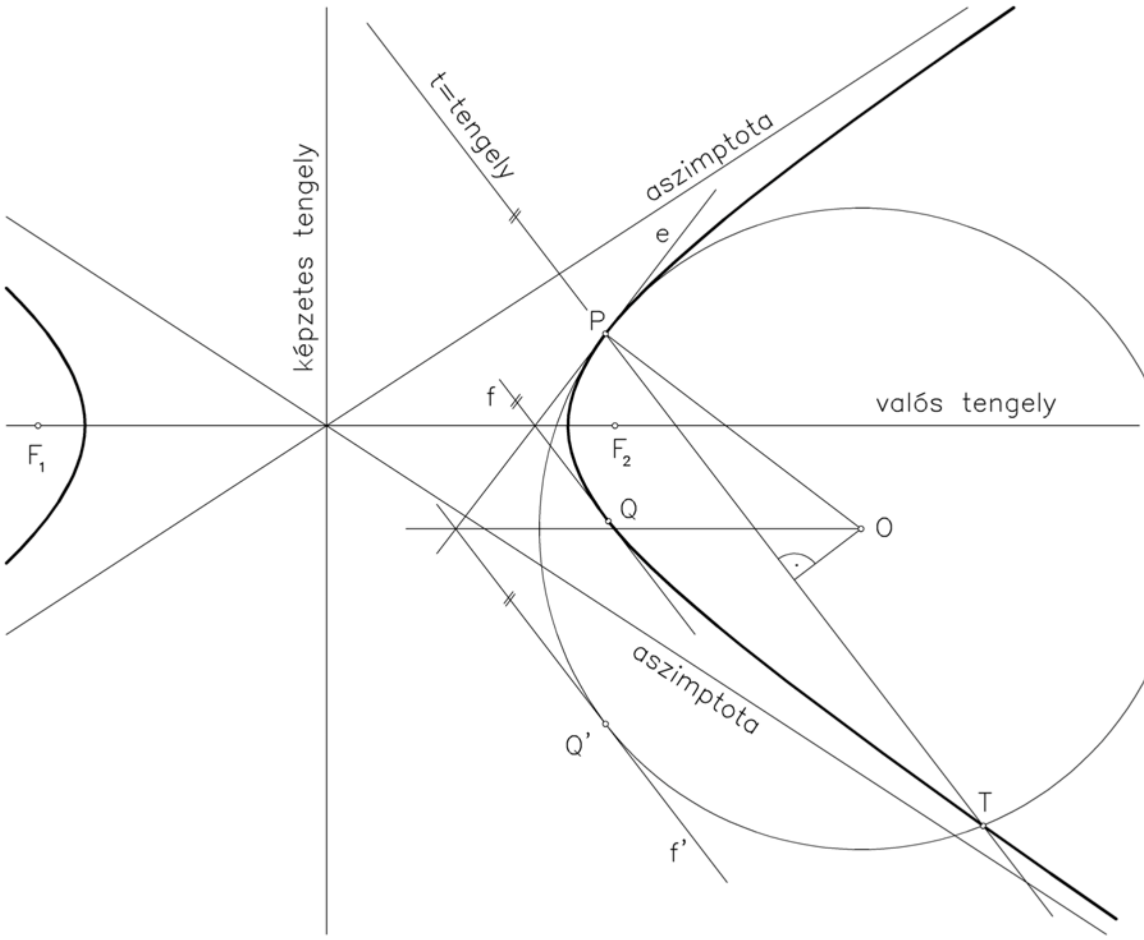


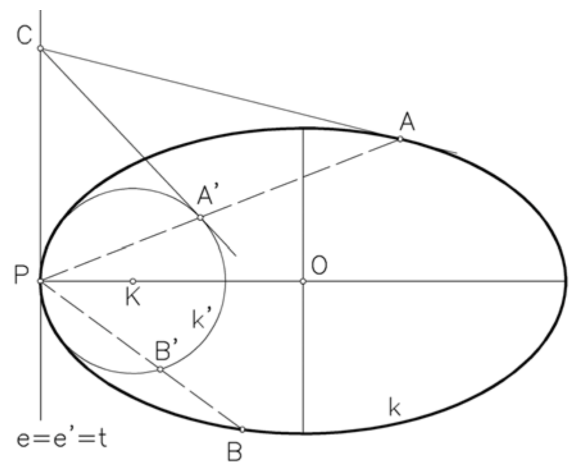
Tükrözzük a P-beli érintőt a P-re illeszkedő, egyik tengellyel párhuzamos egyenesre. A tükrözött egyenes és a kúpszelet metszéspontja a T kísérőpont; a PT szakasz felezőmerőlegese a P-beli normálison (az érintőre állított merőlegesen) az O pontot metszi ki.

A parabola esetén a szerkesztés lépései megegyeznek az ellipszisnél leírtakkal. Itt a t egyenes az e egyenes tükörképe a P-n áthaladó, a parabola tengelyével párhuzamos egyenesre nézve. (Ez az egyenes nincs feltüntetve.) A t egyenes és a parabola P-n kívüli közös pontja a T pont. A parabola P-beli normálisa és a PT felezőmerőlegese a simulókör O pontjában metszi egymást.



És végül a hiperbola esetén a lépések és jelölések megegyeznek a korábbiakkal.



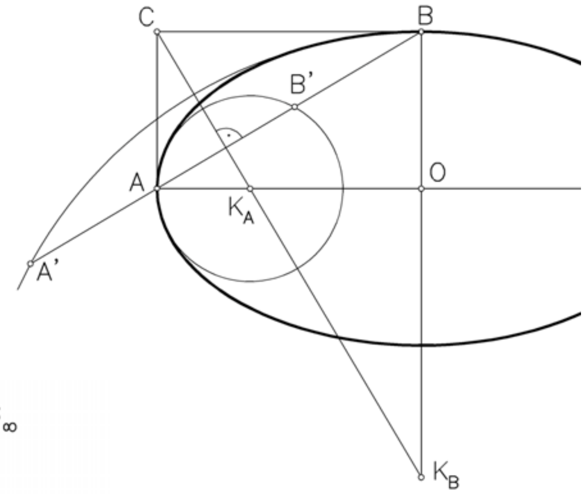


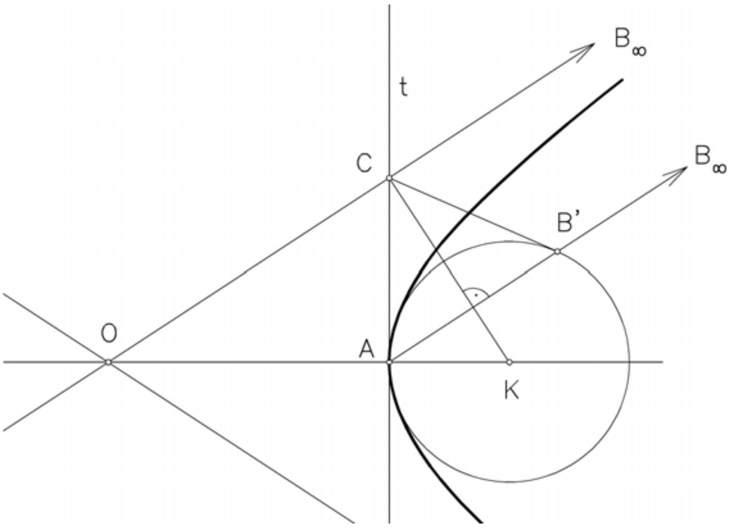
Ez a szerkesztés nem alkalmazható ott, ahol az érintkezés háromszoros, tehát a tengelyvégpontokban. Legyen most k' a k kúpszelet P tengelyvégpontbeli simulóköre. Egy P-re illesztett egyenespár k-t A és B-ben, k'-t A' és B'-ben metszi. Tekintsük azt a kollineációt, amely k-t k'-re képezi le és az A, B, P pontokhoz A', B', P-t rendeli. Az előző bizonyításban szereplő meggondolással: P centrum, mert az e, PB, PA egyenesek fixek. Ezen kívül e lesz a kollineáció tengelye, mert különben a tengelynek lenne a k-val két közös pontja, ez viszont lehetetlen, mert az e) esetben csak egy közös pont lehet. Bebizonyítottuk tehát a következőket:

Egy kúpszeletet a P-beli simulókörébe olyan centrális kollineáció viszi át, amelynek centruma a P pont, tengelye a P-t az T kísérőponttal összekötő egyenes; tengelyvégpontoknál T = P és így itt a tengely a P-beli érintő.

A tengelyvégpontbeli simulókörök megszerkesztésénél jó szolgálatot tesz, ha megfigyeljük, hogy a csúcsérintő egy C pontjából a ponton átmenő körérintők érintési pontjait összekötő egyenesre (röviden: C polárisára) állított merőleges átmegy a kör középpontján.

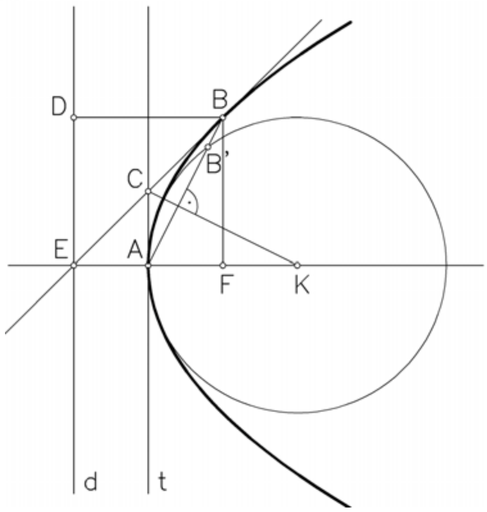
E megfigyelés alapján ellipszisnél az AOBC téglalap C csúcsából az AB átlóra állított merőleges metszi ki a tengelyekből a hiperoszkuláló körök középpontjait





Hiperbolánál az A csúcsból az aszimptotával párhuzamos egyenesre a csúcsérintő és az aszimptota közös C pontjából emelt merőlegesen van a K középpont.

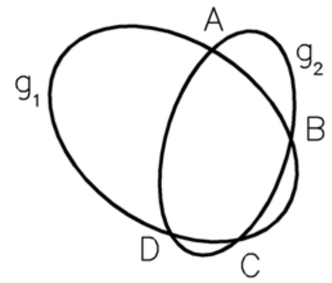
Parabolánál a fókuszban a tengelyre állított merőleges B-ben metszi a parabolát. Az FBDE négyzet C középpontjából az AB-re állított merőleges kimetszi a tengelyből a K középpontot. Az AFB és CAK háromszögek egybevágóak, ebből következik, hogy AK = 2AF.



E három esetet így is összefoglalhatnánk: A kúpszelet hiperoszkuláló körének középpontját a csúcsérintő tetszőleges C pontjából annak polárisára állított merőleges metszi ki a kúpszelet tengelyéből.

Kúpszeletsor

Tekintsünk két olyan kúpszeletet, melyeknek van négy valós és különböző közös pontjuk. Jelölje A, B, C, D ezen közös pontokat. Ha a síkon felveszünk egy olyan P pontot, amely különbözik az előbbiektől, akkor egy és csak egy olyan kúpszelet létezik, amely az A, B, C, D, P pontok mindegyikén áthalad. Ekkor a P pont változtatásával kúpszeletek olyan halmazát kapjuk, melyek mindegyike áthalad az A, B, C, D pontokon, de a sík bármely pontjára csak egyetlen kúpszelet illeszkedik.



Definíció

Legyen a

$$G_1: a_{ik}x_ix_k=0 \quad \text{és} \quad G_2: b_{ik}x_ix_k=0$$

két különböző kúpszelet homogén koordinátákkal megadott egyenlete. Ekkor az

$$\alpha\cdot a_{ik}x_ix_k+\beta\cdot b_{ik}x_ix_k=0$$

szintén egy kúpszelet egyenlete, ahol az α és a β valós paraméterek. Az így meghatározott kúpszeletek összességét a G_1 és G_2 kúpszeletek által indukált *kúpszeletsor*nak nevezzük. Az egyszerűség kedvéért használni fogjuk az $\alpha\cdot G_1+\beta\cdot G_2=0$ jelölést.

Tétel

Az α, β és a λ, μ valós számpárok segítségével elő tudjuk állítani az $\alpha\cdot G_1+\beta\cdot G_2=0$ és a $\lambda\cdot G_1+\mu\cdot G_2=0$ görbéket.

Az így előállított kúpszeletek megegyeznek, ha $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\lambda}{\mu}$, és különböznek, ha $\frac{\alpha}{\beta}\neq\frac{\lambda}{\mu}$.

Bizonyítás:

Az $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\lambda}{\mu}$ esetben a két egyenlet egymásból egy konstanssal való szorzással nyerhető, ezért ugyanazt a görbét állítják elő.

Az $\frac{\alpha}{\beta}\neq\frac{\lambda}{\mu}$ esetben tegyük fel, hogy a két kúpszelet azonos, vagyis létezik olyan $P(x_i)$ pont a projektív síkon, amely nem illeszkedik sem a G_1, sem a G_2 görbékre, de az $\alpha\cdot G_1+\beta\cdot G_2=0$ és a $\lambda\cdot G_1+\mu\cdot G_2=0$ görbékre azonban igen. Mindez a következőket jelenti:

$$a_{ik}x_ix_k\neq 0$$
$$b_{ik}x_ix_k\neq 0$$
$$\alpha\cdot a_{ik}x_ix_k+\beta\cdot b_{ik}x_ix_k=0$$
$$\lambda\cdot a_{ik}x_ix_k+\mu\cdot b_{ik}x_ix_k=0.$$

Az utóbbi két egyenlet a G_1 és G_2-re nézve homogén lineáris egyenletrendszer. Ennek van triviálistól különböző megoldása, ha az együtthatókból képzett mátrix determinánsa zérus.

$$\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \lambda & \mu\end{vmatrix}=\alpha\cdot\mu-\beta\cdot\lambda=0$$

Ebből pedig az $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\lambda}{\mu}$ következik, ami ellentétes a feltételünkkel.

Tétel

A kúpszeletsort bármely két eleme indukálja.

Bizonyítás

Legyen K_1 és K_2 az indukált kúpszeletsor két különböző eleme:

$$K_1: \quad \alpha_1\cdot G_1+\beta_1\cdot G_2=0$$
$$K_2: \quad \alpha_2\cdot G_1+\beta_2\cdot G_2=0.$$

Ekkor $\begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_1 & \beta_2\end{vmatrix}\neq 0$. A K_1 és K_2 görbék által indukált kúpszeletsornak $\rho\cdot K_1+\sigma\cdot K_2=0$ egy tetszőleges eleme, amely a következő alakban is írható:

$\rho\cdot(\alpha_1\cdot G_1+\beta_1\cdot G_2)+\sigma\cdot(\alpha_2\cdot G_1+\beta_2\cdot G_2)=(\rho\cdot\alpha_1+\sigma\cdot\alpha_2)G_1+(\rho\cdot\beta_1+\sigma\cdot\beta_2)G_2=0$

Ez pedig azt jelenti, hogy az előbbi kúpszelet a G_1, G_2 által indukált kúpszeletsornak az a $\lambda\cdot G_1+\mu\cdot G_2=0$ eleme, ahol $\lambda=\rho\cdot\alpha_1+\sigma\cdot\alpha_2$ és $\mu=\rho\cdot\beta_1+\sigma\cdot\beta_2$. Ezen összefüggések ismeretében, ha G_1, G_2-höz megadjuk a λ, μ számpárt, akkor kiszámolható a K_1, K_2-höz tartozó ρ,σ számpár és fordítva. Ebből pedig az következik hogy a G_1, G_2 és a K_1, K_2 által indukált kúpszeletsor megegyezik.

Tétel

A G_1 és G_2 kúpszeletek közös pontjain az általuk indukált kúpszeletsor minden eleme áthalad.

Bizonyítás

Mivel a közös pontokra teljesül, hogy $a_{ik}x_ix_k=0$ és $b_{ik}x_ix_k=0$, ezért az $\alpha\cdot a_{ik}x_ix_k+\beta\cdot b_{ik}x_ix_k=0$ is teljesül.

Definíció

A G_1 és G_2 kúpszeletek közös pontjait az általuk indukált *kúpszeletsor alappontjai*nak nevezzük.

Tétel

Az alappontoktól eltekintve az $\alpha\cdot G_1+\beta\cdot G_2=0$ kúpszeletsor elemei egyrétűen befedik projektív síkot, azaz a projektív sík minden, alappontoktól különböző pontján a kúpszeletsornak pontosan egy eleme halad át.

Bizonyítás

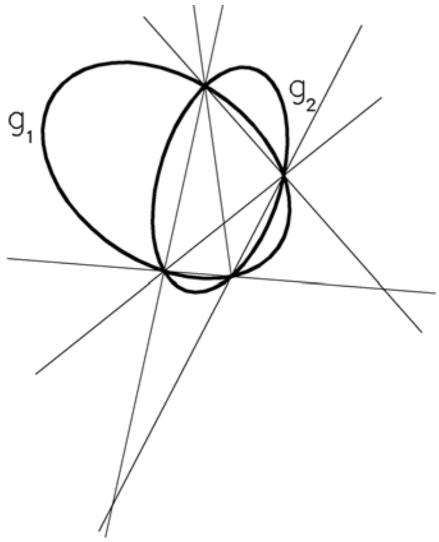
Legyen a $P(x_i)$ olyan pont, amely nem közös pontja a G_1 és G_2 kúpszeleteknek, akkor az (x_i) koordinátákat behelyettesítve $a_{ik}x_ix_k=\rho$ és $b_{ik}x_ix_k=\sigma$. A ρ és a σ közül legfeljebb csak az egyik lehet zérus. Ekkor az a Q kúpszelet, amelyre teljesül, hogy $\alpha\cdot\rho+\beta\cdot\sigma=0$, áthalad a P ponton.

- Ha $\rho=0$, akkor $\sigma\neq0$ és következik, hogy $\beta=0$. Ekkor a $Q=G_1$ áthalad a P ponton.
- Ha $\sigma=0$, akkor $\rho\neq0$ és következik, hogy $\alpha=0$. Ekkor a $Q=G_2$ áthalad a P ponton.
- Ha $\rho\neq0$ és $\sigma\neq0$ akkor $\beta=0$. Ekkor $\alpha\cdot\rho+\beta\cdot\sigma=0$-ból $\lambda\neq0$ és $\mu\neq0$ miatt a $\frac{\alpha}{\beta}=-\frac{\sigma}{\rho}$ egyenlőséggel definiált $Q=\alpha\cdot G_1+\beta\cdot G_2$ áthalad a P ponton.

Az $\alpha\cdot G_1+\beta\cdot G_2=0$ kúpszeletsor elemei között lehetnek elfajuló elemek. Olyan α, β pár állít elő elfajuló kúpszeletet, amelyre a keletkezett másodrendű görbe együtthatóiból képzett mátrix determinánsa zérus:

$$\left|\alpha\cdot a_{ik}+\beta\cdot b_{ik}\right|=0$$

Ez α, β-ban homogén harmadfokú egyenlet, amely pontosan három α, β párra lesz zérus. Ezért a kúpszeletsorban három elfajuló elem van. Harmadfokú valós együtthatós egyenletnek legalább egy valós gyöke van, ezért van minden kúpszeletsorban egy valós pontokból álló egyenespár. A gyököktől függően a másik két elfajuló elem vagy két valós vagy két képzetes egyenespár lehet.



Metsszük el az $\alpha\cdot G_1+\beta\cdot G_2=0$ kúpszeletsor elemeit egy olyan egyenessel, amely nem illeszkedik az alappontok egyikére sem. Ez az egyenes lehet az $x_3=0$, hiszen koordináta-transzformációval mindig elérhető, hogy a metsző egyenes egyenlete ez legyen. Ekkor e keletkezet metszéspontokra:

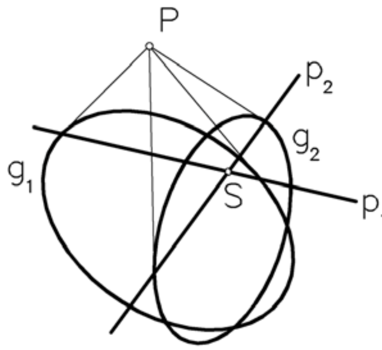
$$(\alpha\cdot a_{11}+\beta\cdot b_{11})x_1^2+2(\alpha\cdot a_{12}+\beta\cdot b_{12})x_1x_2+(\alpha\cdot a_{22}+\beta\cdot b_{22})x_2^2=0.$$

Ez egy pontpársor egyenlete. A pontpársor elemei egy involúció megfelelő pontpárjai. Ezzel beláttuk a következő **tétel**t:

Egy egyenes a kúpszeletsor elemeit egy involúció megfelelő pontpárjaiban metszi. Ezen involúció fixpontjában a kúpszeletsor egy eleme érinti az egyenest.

Tétel

A projektív sík egy pontjának polárisai a kúpszeletsor egyes elemeire vonatkozó polárisai általában sugársort alkotnak. A sugársor sorozópontja nem más, mint a pont konjugáltja a kúpszeletsor bármely elemére vonatkozólag.



Bizonyítás

Tekintsünk egy $Y(y_i)$ pontot. Az R pont polárisa a G_1-re nézve $a_{ik}y_ix_k=0$, a G_2-re nézve $b_{ik}y_ix_k=0$, ezért a kúpszeletsor tetszőleges elemére vonatkozó poláris $\alpha\cdot a_{ik}y_ix_k+\ \beta\cdot b_{ik}y_ix_k=0$. Ez pedig nem más, mint az $a_{ik}y_ix_k=0$ és $b_{ik}y_ix_k=0$ egyenesek által meghatározott sugársor egy eleme, természetesen abban az esetben, ha az $a_{ik}y_ix_k=0$ és $b_{ik}y_ix_k=0$ egyenesek különbözőek.

Milyen Y pontra teljesülhet, hogy az $a_{ik}y_ix_k=0$ és $b_{ik}y_ix_k=0$ egyenesek egybeesnek?

Ekkor e két egyenlet csak konstans szorzóban térhet el egymástól, azaz létezik olyan λ, μ számpár, amelyre $\lambda\cdot a_{ik}y_ix_k+\mu\cdot b_{ik}y_ix_k\equiv0$. (Azonosan zérus bármely x_k-ra.) Ez csak akkor lehet azonosan zérus bármely x_k-ra, ha az egyenletben minden együttható zérus. Így nyerjük az y_i-re homogén lineáris egyenletrendszert.

$$(\lambda\cdot a_{11}+\mu\cdot b_{11})y_1+(\lambda\cdot a_{12}+\mu\cdot b_{12})y_2+(\lambda\cdot a_{13}+\mu\cdot b_{13})y_3=0$$
$$(\lambda\cdot a_{21}+\mu\cdot b_{21})y_1+(\lambda\cdot a_{22}+\mu\cdot b_{22})y_2+(\lambda\cdot a_{23}+\mu\cdot b_{23})y_3=0$$
$$(\lambda\cdot a_{31}+\mu\cdot b_{31})y_1+(\lambda\cdot a_{32}+\mu\cdot b_{32})y_2+(\lambda\cdot a_{33}+\mu\cdot b_{33})y_3=0.$$

Ennek akkor van triviálistól különböző megoldás y_i-re, ha az egyenletrendszer determinánsa nulla. Ekkor már látható, hogy ha Y a kúpszeletsorban szereplő elfajuló elemek valamelyikének szinguláris pontja, pontosan ekkor lesz az Y polárisa a kúpszeletsor bármely nem elfajuló elemére nézve ugyanaz az egyenes.

Tétel

Egy egyenesnek a kúpszeletsor egyes elemeire vonatkozó pólusai egy kúpszeletre illeszkednek.

Bizonyítás

Egy egyenesnek valamely kúpszeletre vonatkozó pólusát meghatározhatjuk úgy, hogy vesszük az egyenes két tetszőleges pontját és azok metszéspontja lesz a keresett pólus.

Az egyenes két pontja legyen $Y(y_i)$ és $Z(z_i)$. Ekkor a polárisok a kúpszeletsor elemeire a $\lambda\cdot a_{ik}y_ix_k+\mu\cdot b_{ik}y_ix_k=0$ és a $\lambda\cdot a_{ik}z_ix_k+\mu\cdot b_{ik}z_ix_k=0$ sugársorokhoz tartozó egyenesek. A polaritás tulajdonságaiból következik, hogy a két sugársor egymáshoz projektív. Projektív (de nem perspektív) sugársorok metszési alakzata pedig nem elfajuló másodrendű görbe.

Következmény

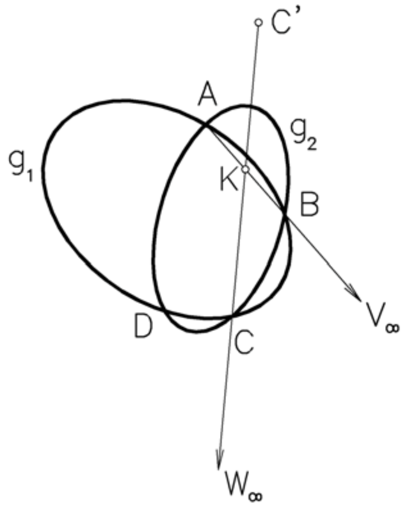
Egy kúpszeletsorban szereplő kúpszeletek középpontjai (ha léteznek a középpontok) egy kúpszeletet alkotnak. A középpontok a sík végtelen távoli egyenesének a kúpszeletsor elemeire vonatkozó pólusai. Ez a kúpszelet áthalad a kúpszeletsorban szereplő parabolák végtelen távoli pontján és a kúpszeletsor elfajuló elemeinek szinguláris pontjain is.

Tekintsünk a síkon négy általános helyzetű pontot. Ezen a négy ponton áthaladó kúpszeletek kúpszeletsort alkotnak. Bármely két elemet kiválasztva azok indukálják az egész sort. Az így meghatározott kúpszeletsor megegyezik a bevezetésben elmondottal.

Tétel

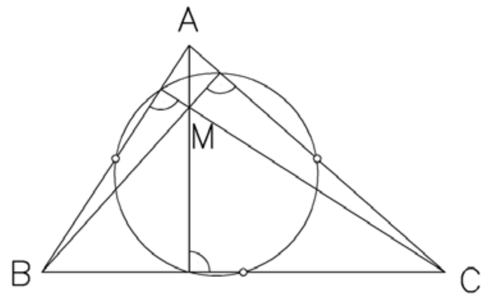
A négy alappontra illeszkedő kúpszeletsor elemeinek középpontjai által meghatározott kúpszelet átmegy bármely két pont összekötő szakaszának felezési pontján.

Bizonyítás

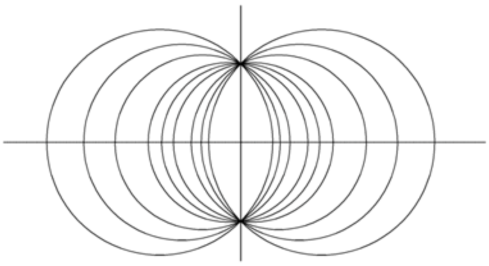


Elegendő azt belátni, hogy ha kiválasztunk két alappontot, akkor az általuk adott szakasz felezési pontja a kúpszeletsor valamelyik elemének középpontja. Legyen az A és B alappontok által adott szakasz felezési pontja K. C egy további alappont, melyet tükrözünk a K-ra és megkapjuk a C' pontot. Tekintsük a kúpszeletsor azon elemét, amely áthalad a C' ponton. Ez az A, B, C, D, C' pontok által meghatározott kúpszelet. Erre a kúpszeletre nézve a K konjugált a CC' és AB egyenesek végtelen távoli pontjához (mert $(ABKV_\infty)=-1$ és $(CC'KV_\infty)=-1$). Ebből az következik, hogy a K és a sík végtelen távoli egyenese pólus-poláris kapcsolatban vannak, vagyis a K a középpontja az előbbi kúpszeletnek. Következésképpen illeszkedni fog arra a kúpszeletre, amely a kúpszeletsorhoz tartozó görbék középpontjaiból áll.

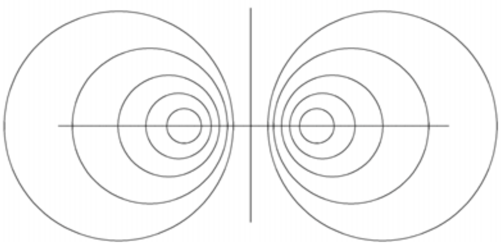
Példa



Legyen adva egy háromszög három csúcspontja és magasságpontja, és tekintsük a négy pont által adott kúpszeletsort. Ekkor a kúpszeletsor elfajuló elemeinek középpontja a magasságvonalak talppontja. Így a kúpszeletsor elemeinek középpontjai által meghatározott kúpszelet áthalad a magasságvonalak talppontjain és a háromszög oldalainak felezőpontjain és a csúcspontok és a magasságpont által adott szakaszok felezési pontján. Ez a kúpszelet tehát nem más, mint a háromszög Feuerbach-féle köre.

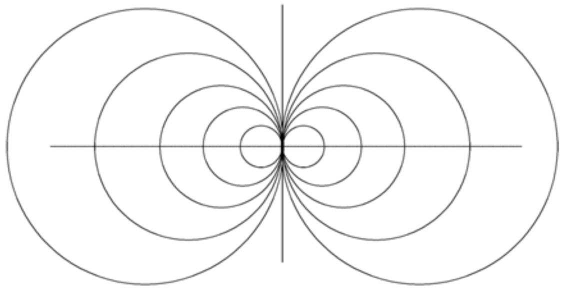


Adjunk meg két különböző valós pontot a projektív síkon, valamint tekintsük az abszolút képzetes körpontokat. Legyenek ezek egy kúpszeletsor alappontjai. Ekkor a kúpszeletsor csak körökből fog állni, mivel minden elemnek át kell haladnia az abszolút képzetes körpontokon. Ekkor a már korábbról ismert hiperbolikus körsort kapjuk. Ennek a körsornak elfajuló eleme a körök közös hatványvonala. A középpontokból álló kúpszelet pedig egy egyenes, pontosabban egybeeső egyenespár. Ebből a körsorból metszettünk ki az Involúció című fejezetben hiperbolikus és elliptikus involúciós pontsorokat olyan egyenesekkel, amelyek nem illeszkedtek a körök közös pontjaira. Említettük azt is, hogy olyan egyenessel, amely illeszkedik a körök közös pontjaira, nem tudunk involúciós pontsort metszeni.

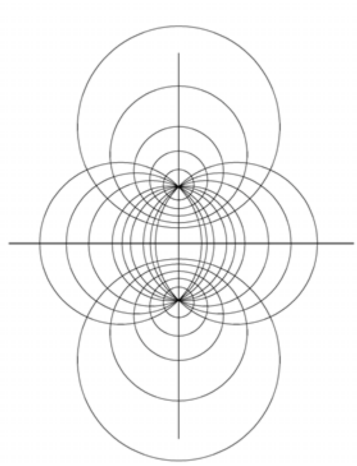


Ennek a mintájára két képzetes pont és az abszolút képzetes körpontok által meghatározott kúpszeletsort is tekinthetjük. Ez szintén körökből fog állni, csak ezeknek a köröknek nincsen közös valós, csak képzetes metszéspontjuk. Ezek szerepelnek a kúpszeletsor, pontosabban a körsor alappontjai között. A kapott körsort elliptikus körsornak nevezzük. Ennek a körsornak az elfajuló eleme most is a körök közös hatványvonala, és a középpontokból álló kúpszelet most is egy egyenes. Mivel ennek e körsornak nehezebb meghatározni az elemeit, mint a hiperbolikus körsornak, nem szoktuk használni a az involúciós pontsorokkal kapcsolatos szerkesztésekben. Az elliptikus körsorból is involúciós pontsorokat lehet metszeni. A metsző egyenest érintő körsorbeli elemek a kettőspontokat fogják adni.

Adott egy valós pont, melyet duplán fogunk számolni és az abszolút képzetes körpontok. Ekkor ezekre az alappontokra illeszkedő kúpszeletek egy parabolikus körsort fognak alkotni. Ezek a körök érintik egymást a duplán számított valós alappontban és az elfajuló elem most is a körök közös hatványvonala. A középpontokból álló kúpszelet most is egy egyenes.



Minden olyan egyenes, amely nem megy át az egybeeső alapponton hiperbolikus involúciós pontsort metsz ki a körsorból. Ennek a középpontja a hatványvonallal alkotott közös pont, míg a kettőspontokat a körsor adott egyenessel érintkező elemei jelölik ki.



Elliptikus körsort lehet előállítani, ha egy hiperbolikus körsor egybevágó elemeit merőlegesen metsző köröket tekintjük.

Tétel

Egy kúpszeletsorban általában két parabola van.

Bizonyítás

A parabola olyan kúpszelet, amely érinti a sík végtelen távoli egyenesét. Ezért ha a kúpszeletsort elmetsszük a végtelen távoli egyenessel, akkor egy involúciós pontsort kapunk, melyben a kettős pontokat a kúpszeletsor érintkező elemei jelölik ki. Két ilyen érintkező elem van, tehát két ilyen parabola létezik.

Tétel

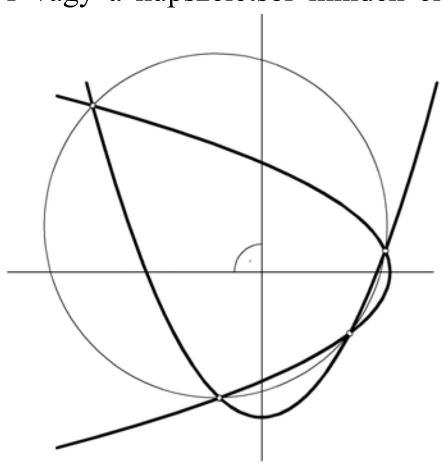
Egy duplán számító a egyenes és egy b, c egyenespár által indukált kúpszeletsor bármely eleme érinti a b, c egyeneseket az a-val való metszéspontjaikban.

A tétel alapján meg tudunk adni olyan kúpszeletsort, amely minden eleme parabola.

Tétel

Egy kúpszeletsorban szereplő körök száma 0, 1 vagy a kúpszeletsor minden eleme kör.

Megadhatunk olyan kúpszeletsort, amelyben pontosan egy kör szerepel.



Tétel

Egy kúpszeletsor alappontjai legyenek egy húrnégyszög csúcspontjai, akkor a kúpszeletsorban szereplő parabolák tengelyei merőlegesek egymásra.

Tétel

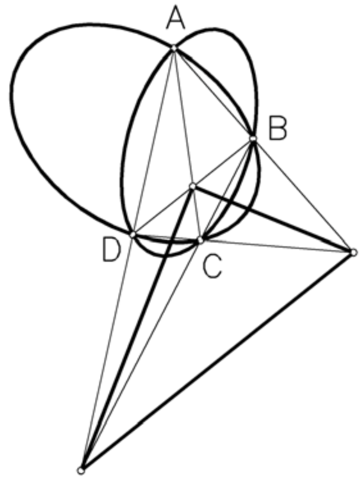
Két egymásra merőleges tengelyű parabola metszéspontjai egy körön vannak.

Bizonyítás

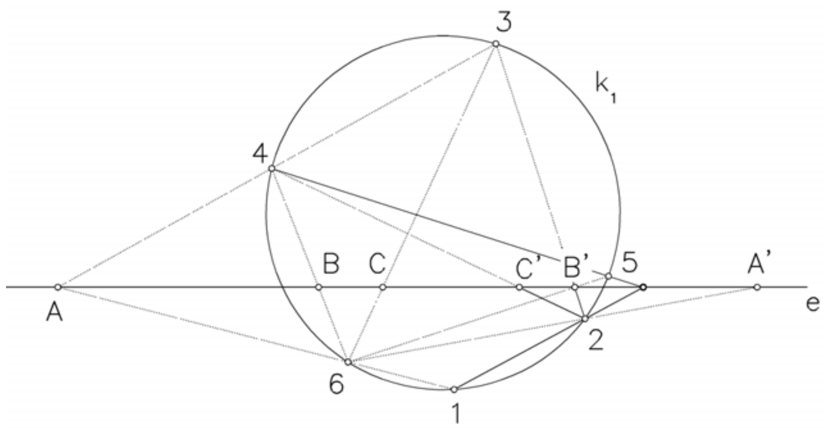
Tekintsük azt az involúciót, amelyet a két parabola által indukált kúpszeletsorból a végtelen távoli egyenes metsz ki. Ennek a kettőspontjai a parabolák végtelen távoli pontja. Ha veszünk egy tetszőleges kúpszeletsorbeli elemet, akkor a belőle a végtelen távoli egyenes által kimetszett pontpárt (akár valósak, akár képzetesek) a kettőspontok harmónikus fogják elválasztani. Az abszolút képzetes körpontok éppen ilyen tulajdonsággal bírnak, ezért a kúpszeletsorban lennie kell egy olyan elemnek, amely áthalad a parabolák négy metszéspontján, valamint az abszolút képzetes körpontokon. Ilyen göbre pedig csak kör lehet, emiatt a parabolák metszéspontja egy körön van.

Mindez igaz abban az esetben is, ha a paraboláknak csak képzetes metszéspontjaik vannak.

Fontos megjegyezni azt, hogy elfajuló elemekkel is lehet indukálni a kúpszeletsort. Ez nagyon szépen látszik, ha olyan esetet veszünk, amikor négy különböző valós alappont van. Ekkor az A, B, C, D általános helyzetű alappontok a projektív síkon egy teljes négyszöget alkotnak, melynek csúcsain a kúpszeletsor minden eleme áthalad. A kúpszeletsor elfajuló elemei éppen ennek a teljes négyszögnek az oldalegyenesei pontosabban szemköztes oldalpárjai. Az előbbi teljes négyszög átlóspontjai polárháromszöget alkotnak a kúpszeletsor bármely elemére nézve. Ez alapján mondhatjuk, a kúpszeletsornak van egy közös polárháromszöge, mely az alappontokból egyértelműen meghatározható.



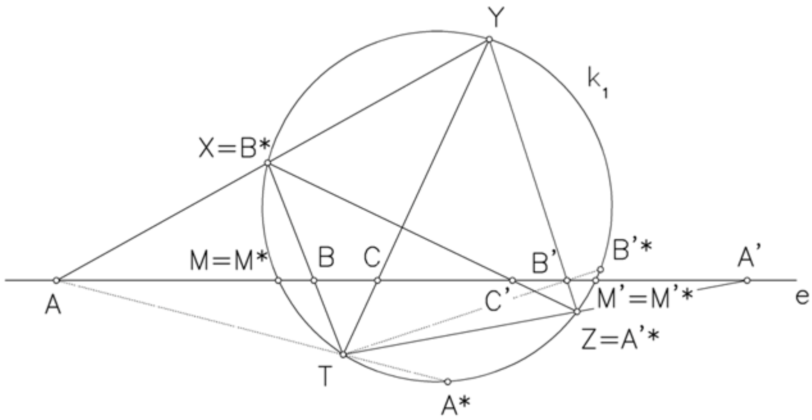
Már korábban analitikusan bizonyítottuk azt a tételt, hogy négy adott pont által indukált kúpszeletsor elemeit egy, az alappontokra nem illeszkedő egyenes involúciós pontsorban metsz. Lássuk be szintetikusan is az előbbi tételt!



Az alappontok legyenek X, Y, Z, T, az egyenes *e*, a kúpszeletsor tetszőleges eleme k_1, amely az *e*-t M és M' pontokban metszi. Az X, Y, Z, T teljesnégyszög szemköztes oldalainak *e*-vel való metszéspontjai A, A'; B, B' illetve C, C'. Elég azt belátni, hogy az e egyenesen az A, A'; B, B'; M, M' egy involúció megfelelő pontpárjai. A T pontból vetítsük ezt a hat pontot a k_1

kúpszeletre. Ekkor rendre az A^*, A'^*, B^*, B'^*, M^*, M'^* pontokat kapjuk. Ezek a pontok pedig a k_1 kúpszeletre vonatkozóan involúcióban vannak, vagyis az $A^*A'^*$, $B^*B'^*$, $M^*M'^*$ egyenesek egy pontban metszik egymást.
Ehhez alkalmazzuk a Pascal-tételt a következő jelöléssel:

$A^*=1$ $A'^*=Z=2$ $Y=3$ $B^*=X=4$ $B'^*=5$ $T=6$



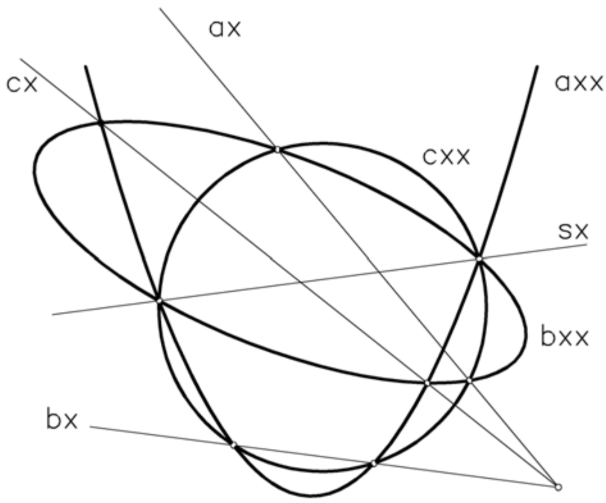
Ekkor a 23 és 56 metszéspontja a B' pont, a 34 és 61 metszéspontja az A pont. Ebből az következik, hogy a Pascal-egyenes éppen az *e* lesz, ezért az 12 és 45 metszéspontja is illeszkedik rá. Emiatt a A^*, A'^*, B^*, B'^*, M^*, M'^* pontok a k_1-en involúcióban vannak, emiatt az eredeti A, A', B, B', M, M' pontok is involúcióban vannak az *e*-n.

Tétel

Legyen három kúpszeletnek két közös pontja. Ekkor a további, páronként vett közös húregyenesek egy pontra illeszkednek.

Bizonyítás

A három kúpszelet egyenlete: $\sum a_{ik}x_ix_k=0$, $\sum b_{ik}x_ix_k=0$, $\sum c_{ik}x_ix_k=0$.
A közös húr egyenlete: $s_ix_i=0$.
A páronként vett közös húrok: $a_ix_i=0$, $b_ix_i=0$, $c_ix_i=0$, ahol az $a_ix_i=0$ a $\sum b_{ik}x_ix_k=0$ és $\sum c_{ik}x_ix_k=0$ görbék, a $b_ix_i=0$ az $\sum a_{ik}x_ix_k=0$ és $\sum c_{ik}x_ix_k=0$ görbék valamint a $c_ix_i=0$ a $\sum a_{ik}x_ix_k=0$ és, $\sum b_{ik}x_ix_k=0$ görbék közös húrja. (Az ábrán a görbék és egyenesek jelölésében az indexeket nem tüntettük fel.)



Ekkor a $b_ix_i=0$, $s_ix_i=0$ egyenespár egy elfajuló eleme az $\sum a_{ik}x_ix_k=0$ és $\sum c_{ik}x_ix_k=0$ görbék által indukált kúpszeletsornak. Vagyis az egyenespár előáll a következő alakban:

$$(b_ix_i)(s_kx_k)=\lambda\cdot(a_{ik}x_ix_k)+\mu\cdot(c_{ik}x_ix_k).$$

Hasonló meggondolásokkal

$$(c_ix_i)(s_kx_k)=\rho\cdot(a_{ik}x_ix_k)+\sigma\cdot(b_{ik}x_ix_k).$$

Szorozzuk meg az első egyenletet ρ-val, a másodikat (-λ)-val, majd adjuk össze. Ekkor

$$(s_kx_k)\{\rho\cdot(b_ix_i)-\lambda\cdot(c_ix_i)\}=\rho\cdot\mu(c_{ik}x_ix_k)-\lambda\cdot\sigma(b_{ik}x_ix_k)=0.$$

Ez azt jelenti, hogy $s_ix_i=0$ és a $\rho\cdot(b_ix_i)-\lambda\cdot(c_ix_i)=0$ egyenespár a $\sum c_{ik}x_ix_k=0$ és $\sum b_{ik}x_ix_k=0$ kúpszeletek által indukált kúpszeletsorban elfajuló elemek. Ekkor a $\rho\cdot(b_ix_i)-\lambda\cdot(c_ix_i)=0$ egyenesnek meg kell egyeznie az $a_ix_i=0$ egyenessel. A három egyenes egy sugársorhoz tartozik.

Megjegyzés

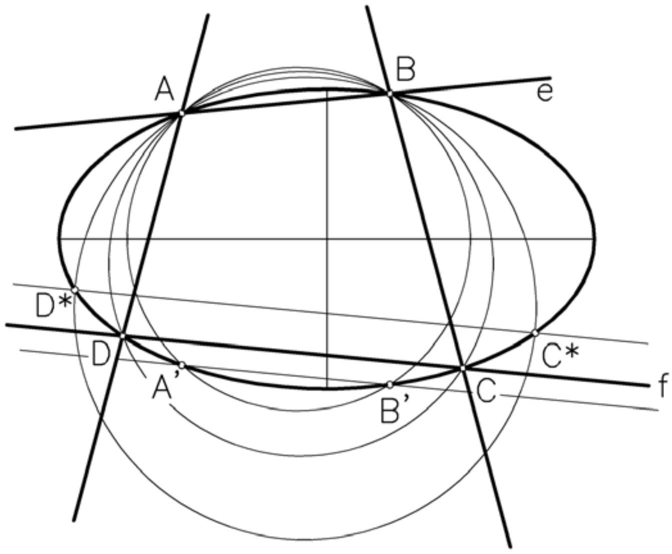
Ebben a bizonyításban az $s_ix_i=0$ a három kúpszelet közös húregyenese volt. Ha a kúpszeletek egyik közös pontját minden határon túl a másikhoz közelítjük, akkor a közös szelőből közös érintő lesz. Emiatt teljesül az az állítás is, hogy ha három kúpszeletnek van egy közös érintkezési pontja, akkor a páronként vett húregyenesek egy pontban metszik egymást.

Tétel

Egy kúpszelet és egy kör négy metszéspontja által keletkezett teljes négyszögben bármely két szemköztes oldal szögfelezői párhuzamosak a kúpszelet tengelyeivel. (Parabola esetén az egyik párhuzamos a parabola tengelyével.)

Bizonyítás

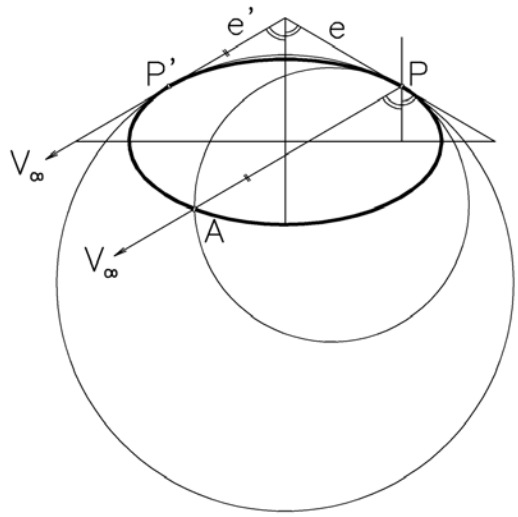
Válasszuk ki a teljes négyszögben az *e*, *f* szemköztes oldalakat. Az *e*-re illeszkedő A és B pontokon keresztül vegyünk fel egy újabb kört, amely a kúpszeletet C^* és D^* pontokban metszi. Ekkor az előző tételt alkalmazhatjuk a három kúpszeletre. A páronként vett CD és C^*D^* húregyeneseknek és a két kör miatt az abszolút képzetes körpontokat összekötő végtelen távoli egyenesnek egy közös pontja van. Ez a pont most végtelen távoli, ezért a CD és C^*D^* egymással párhuzamos egyenesek.



Most tükrözzük az A és B pontokat a kúpszelet tengelyére, így az A' és B' pontokat kapjuk, melyek szintén a kúpszeletre illeszkednek. A tükrözés miatt az AB és A'B' egyenesek szögét a tengely felezi. Most alkalmazzuk az előbb leírt gondolatmenetet az eredeti körre, kúpszeletre és az ABA'B' pontokon áthaladó körre. Ebből az következik, hogy az A'B' párhuzamos a CD egyenessel. Ekkor a kúpszelet tengelyéve párhuzamos egyenesek között van egy olyan, amely az *e* és *f* egyenesek szögét felezi. (Egyállású szögek szögfelezői egymással párhuzamosak)

Tétel

Egy kúpszelet és simulókörének közös érintője és közös húrja olyan tulajdonságú egyenespár, hogy a szögfelezőik párhuzamosak a kúpszelet tengelyeivel.

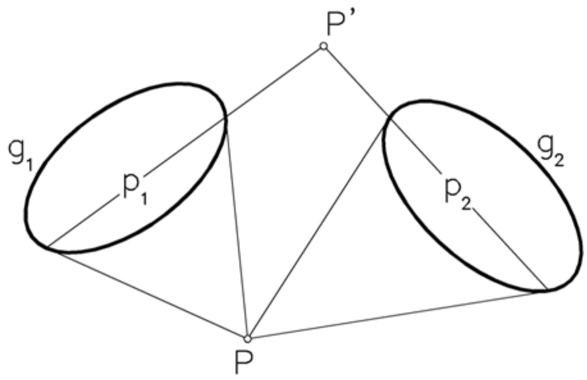


Bizonyítás

Felhasználhatjuk azt, hogy ha három kúpszeletnek van egy közös érintkezési pontja, akkor a páronként vett húregyenesek egy pontban metszik egymást. Egy kúpszelet P pontjában vett simulókörnek a kúpszelettel még az A pontja is közös. Megadunk még egy kört, melyet a P pontbeli *e* érintő érinteni fog és ezen kívül áthalad még a P-nek a kúpszelet tengelyére való P' tükörképén. Ekkor ez a tengelyegyenes felezi az *e* és *e*' egyenesek szögét. Ekkor a PA egyenes (mint a kúpszelet és a simulókör közös húregyenese), az *e*' (mint a kúpszelet és a másik kör közös húregyenese, amely érintőbe ment át) és a sík végtelen távoli egyenese (mint a két kör közös húregyenese) egy ponton halad át. Ez a pont csak végtelen távoli lehet, emiatt a PA és *e*' egymással párhuzamosak. Mivel a kúpszelet tengelye felezi az *e* és *e*' egyenesek szögét, egy tengellyel párhuzamos egyenes (az egyállású szögek miatt) felezni foga az *e* és PA egyenesek szögét.

Steiner-rokonság

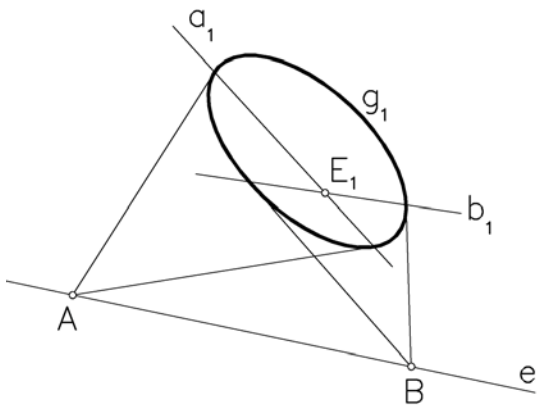
A projektív síkon g_1 és g_2 két nem elfajuló másodrendű görbe. Egy tetszőleges P pontnak a g_1 és g_2 görbékre nézve meghatározható a p_1 és p_2 polárisa. Ekkor a P ponthoz rendeljük a p_1 és p_2 polárisok P' metszéspontját. A P' pontot a P g_1-re és g_2-re vonatkozó *Steiner-rokon*ának nevezzük.



Ekkor a P és P' pontok mindkét görbére nézve konjugált pontok lesznek. Ugyanis a p_1 poláris a g_1-re vonatkozóan a P-hez konjugált összes pontot tartalmazza, a p_2 pedig a g_2-re nézve a konjugáltakat. Így a P' mindkét görbére nézve konjugált a P-hez. Maga a leképezés pólus-poláris kapcsolatokkal írható le, ezért projektív leképezés lesz.

Vizsgáljuk meg, hogy milyen alakzatot kapunk, ha egy egyenes Steiner-rokonát szeretnénk meghatározni!

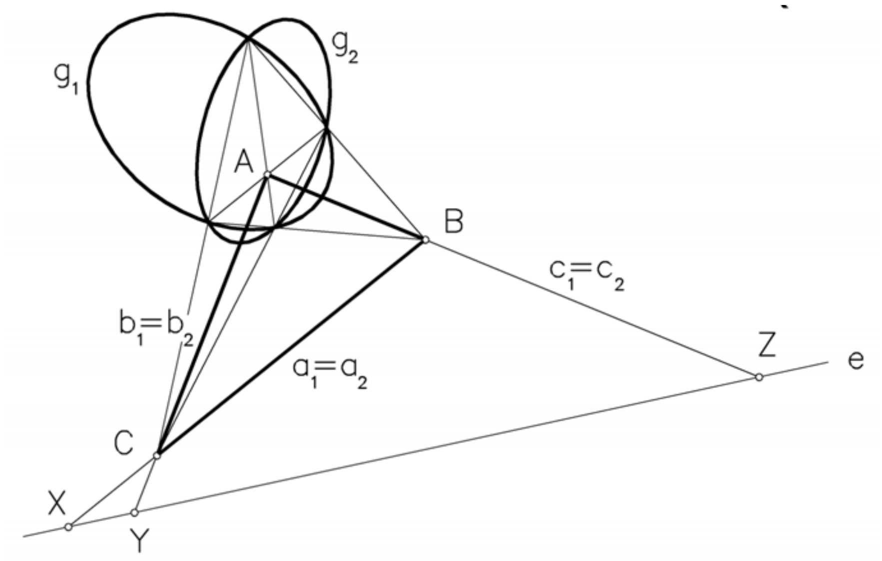
Egy e egyenesnek a g_1 görbére vonatkozóan a pólus-poláris kapcsolatban egy sugársor felel meg, amelynek a sorozópontja az e egyenes E_1 pólusa. Ezt meghatározhatjuk, ha az e-n tetszőlegesen kiválasztunk két pontot és a hozzájuk tartozó polárisokat elmetsszük egymással.



Hasonlóan egy E_2 sorozóponttal bíró sugársor felel meg az e egyenesnek a g_2-re vonatkozóan. Mindkét sugársor projektív az e egyenesen lévő pontsorhoz, így egymáshoz is. Az egyenes képe a két, egymással projektív sugársor metszési alakzata, azaz egy másodrendű görbe.

Mivel az egyenes képe másodrendű görbe, ezért a képalakzatot öt ponttal egyértelműen meg lehet adni.

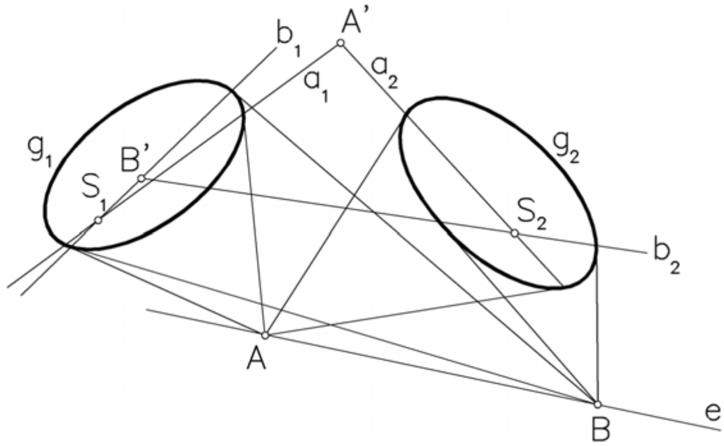
A két másodrendű görbe meghatároz egy görbesort, melyben a görbék közös pontjai (lehetnek valósak és képzetesek is) indukálnak egy közös polárháromszöget. A közös polárháromszög olyan tulajdonságú, hogy ha kiválasztjuk az egyik csúcsát, akkor az ahhoz mindkét görbére nézve konjugált pontok a polárháromszög szemköztes oldalán vannak, és csak ott.

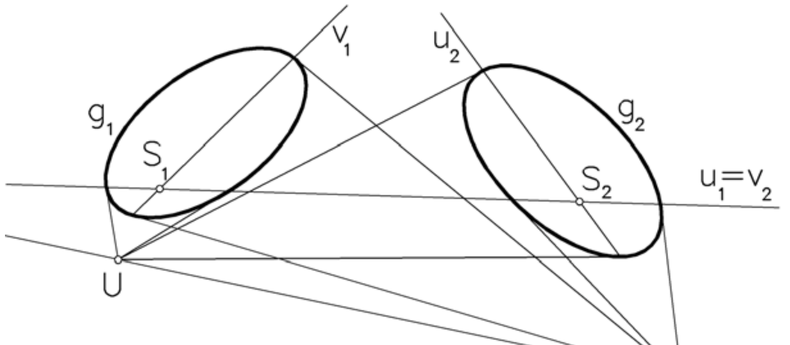


Általános esetben egy *e* egyenes a polárháromszög $a_1=a_2$, $b_1=b_2$, $c_1=c_2$ oldalait a csúcspontoktól különböző, X, Y, Z pontokban metszi. Ekkor X'≡A, Y'≡B, Z'≡C, mert pl. az A-hoz konjugált pontok csak az $a_1=a_2$ egyenesen vannak, így X és A mindkét görbére nézve konjugáltak. Mindebből az következik, hogy az *e* egyenes képe át fog haladni a két görbe közös polárháromszögének csúcsain. És ennél általánosabban is fogalmazhatunk, hogy bármely fenti helyzetű egyenes Steiner-rokona áthalad a közös polárháromszög csúcsain.

Látható az is, hogy ebben a leképezésben a polárháromszög csúcsai esetén nem lehet egyértelműen képpontot kijelölni, mivel a lehetséges pontok egy-egy egyenesen helyezkednek el. Hasonlóan rosszul működik a Steiner-rokonság a közös polárháromszög oldalegyenesei esetén is. Ugyanis egy oldalegyenes Steiner-rokona a szemköztes háromszögcsúcs lesz. Ebben az esetben is sérül az az elvárásunk egy leképezéssel szemben, hogy kölcsönösen egyértelműen rendeljen egymáshoz pontokat. Mindezek tudatában érdemes magával a leképzéssel ismerkedni.

Egy *e* egyenes esetén az egyenes két pontja segítségével a g_1 és g_2-re vonatkozó pólusok meghatározhatóak.



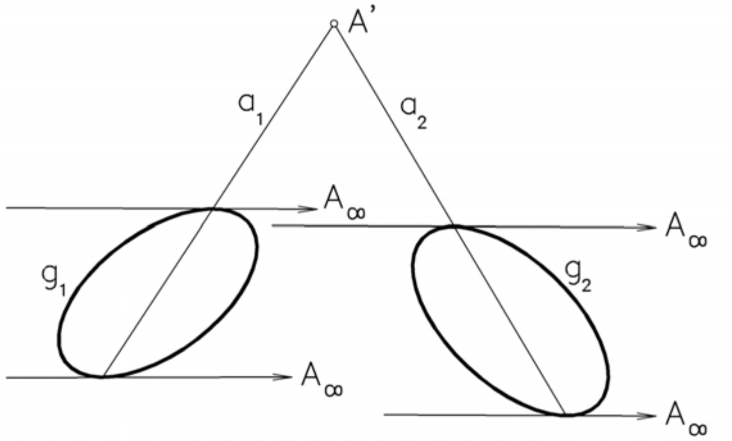


Ezek a sorozópontjai annak a két sugársornak, melyek metszési alakzataként előáll az *e* képe. A projektív sugársorok metszési alakzataként előálló görbe áthalad a sugársorok sorozópontjain, most ebben az esetben az S_1 és S_2 pontokon.

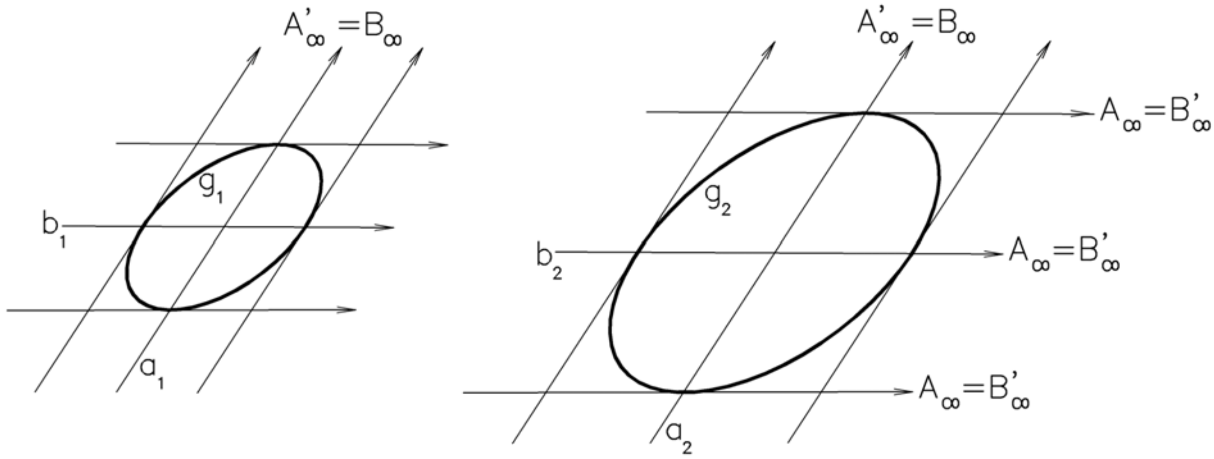
Ez most más módon is be fogjuk látni. Meghatározzuk az *e* egyenes azon pontjait, melyek Steiner-rokona éppen a két sorozópont lesz. Ehhez tekintsük az S_1S_2 egyenest úgy, hogy az *e* egyenes valamely U pontjának a g_1-re vonatkozó polárisa. Ekkor az U pontban fogják metszeni egymást a g_1 görbe S_1S_2 egyenessel közös pontjaiba húzott érintői. Ekkor az u_1 és u_2 polárisok az S_2-ben metszik egymást. Tehát az U pont Steiner-rokona az S_2.
Hasonló módszerrel határozható meg az a V pont, melynek a Steiner-rokona az S_1 lesz.

Az előzőek alapján egy egyenes Steiner-rokona öt ponttal meghatározható: Az öt pontból három a két görbe közös polárháromszögének csúcsai, a maradék kettő pedig az egyenesnek a görbékre vonatkozó pólusa.

Végtelen távoli pont képe általában véges helyzetű pont, mert általában a polárisok véges pontban metszik egymást.



Végtelen távoli pont képe csak akkor lesz végtelen távoli, ha a polárisok egymással párhuzamos egyenesek.



Véges helyzetű pont Steiner-rokona lehet végtelen távoli is. Ennek is az a feltétele, hogy a két poláris egymással párhuzamos legyen.

A végtelen távoli egyenes képe át fog haladni a két görbe közös polárháromszögének csúcsain, valamint a két görbe centrumán. (Egy görbe centruma a végtelen távoli egyenes pólusa a görbére nézve.) A g_1 görbe indukál egy involúciót a sík végtelen távoli egyenesén, melynek a véges részen a konjugált irányok involúciója felel meg. Ugyanez a g_2-ről is elmondható. A végtelen távoli egyenesen a két indukált involúciónak van közös elempárja. A véges részen a mindkét görbére nézve konjugált irányok felelnek meg. Az ezek által kijelölt végtelen távoli pontokat a Steiner-rokonság egymásnak felelteti meg. A végtelen távoli egyenes képe olyan nem elfajuló másodrendű görbe, melynek két végtelen távoli pontja van, vagyis egy hiperbola. Mindezt csak általános esetben lehet kimondani!

Ha a g_1 és g_2 középpontosan hasonló vagy egybevágó görbék, akkor bármely végtelen távoli pont képe újból végtelen távoli lesz, mivel bármely végtelen távoli pont esetén a polárisok egymással párhuzamos egyenesek. Pl. két kör, vagy két olyan párhuzamos tengelyű ellipszis, melyeknél a kis- és nagytengelyek hosszának aránya egyenlő. Ezeknek a görbéknek a sík végtelen távoli egyenese az egyik hatványvonala. A hatványvonalon a két görbe ugyanúgy cseréli fel a konjugált pontokat, emiatt a hatványvonal Steiner-rokona önmaga. Az a két sugársor, melynek a metszési alakzataként áll elő az egyenes képe, most egymáshoz perspektív.

Metsző egyenesek

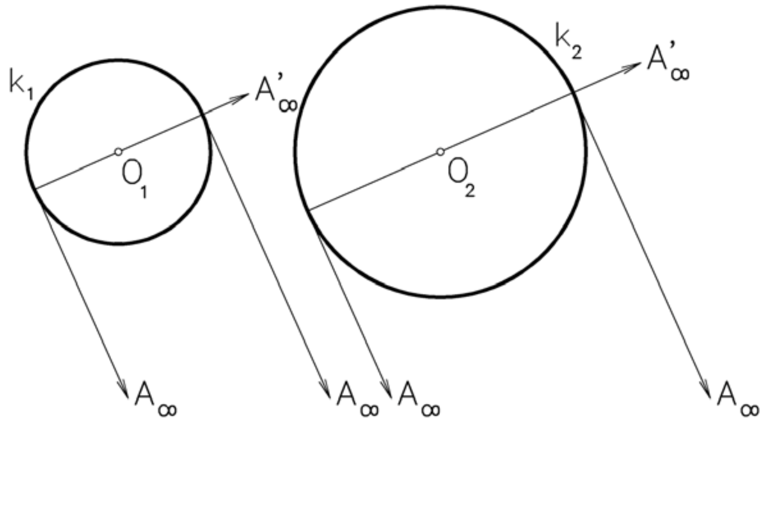
Ha az *e* és *f* metsző egyenesek, akkor az *e*' és *f*' görbék a g_1 és g_2 görbék közös polárháromszögének csúcspontjain kívül még egy pontban metszik egymást. (Két másodrendű görbének négy közös pontja van.) A negyedik metszéspont nem más mint az *e* és *f* egyenesek M metszéspontjának Steiner-rokona.

Tekintsünk újabb, az M ponton áthaladó egyeneseket! Ennek a sugársornak a Steiner-rokona olyan kúpszeletsor, amelynek az előbbi négy pont éppen az alappontja.

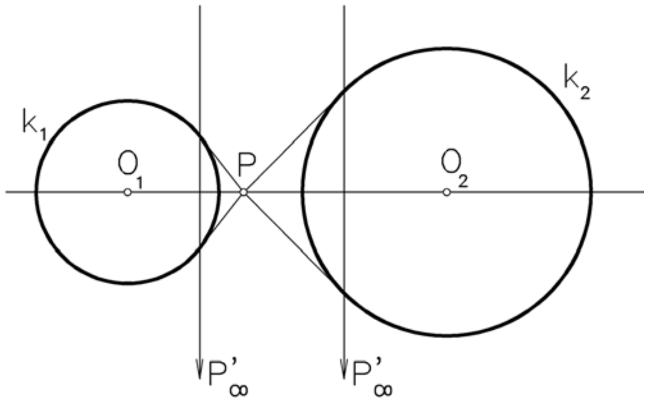
Maga a Steiner-rokonság alkalmas lehet elvi szinten arra, hogy két kúpszelet közös polárháromszögét meghatározhassuk. Ha a két kúpszeletnek négy közös valós pontja van, akkor eddig is könnyen szerkeszthető volt a háromszög. Minden más esetben gondok adódnak a szerkesztéssel. Ha veszünk két metsző egyenest, akkor ezek képeinek négy metszéspontja közül három éppen a keresett. Ehhez két másodrendű görbét kell elmetszeni egymással, amely nem mindig oldható meg euklideszi szerkesztéssel.

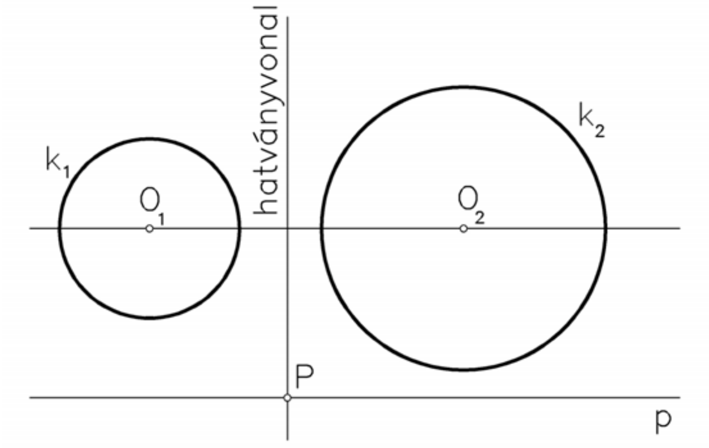
Két valós körre vonatkozó Steiner-rokonság

Már korábban említettük, hogy ez éppen olyan eset, melyben minden végtelen távoli pont képe újból végtelen távoli pont lesz.



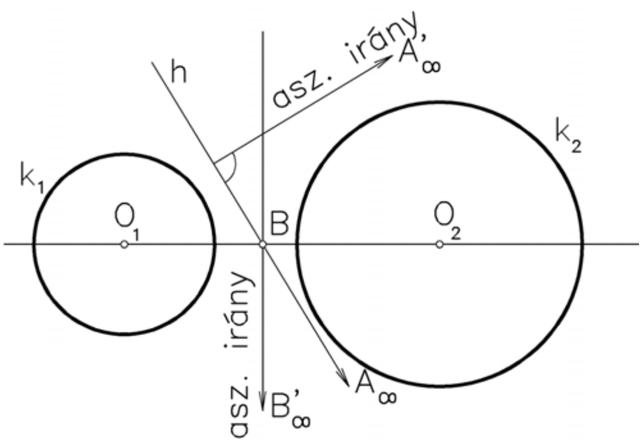
Ezen kívül az O_1 és O_2 középpontokat összekötő egyenes bármely pontjának képe ugyanaz a végtelen távoli pont lesz, melyet az O_1O_2-re merőleges irány jelöl ki.

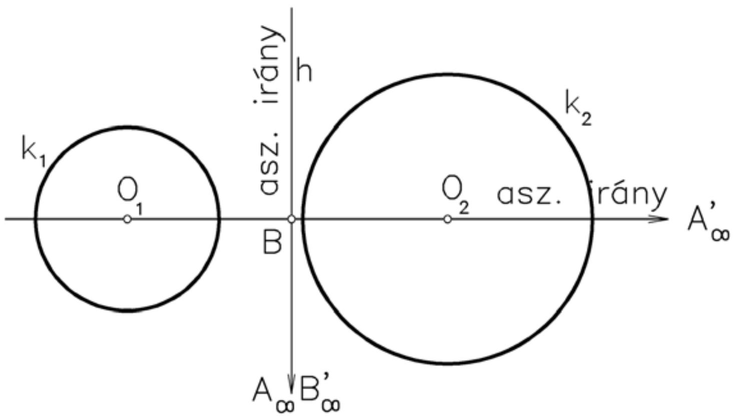




Ha az O_1O_2-vel párhuzamos *p* egyenest veszünk, akkor ennek olyan görbe felel meg, amelynek egy végtelen távoli pontja van, méghozzá a *p* végtelen távoli pontjának Steiner-rokona. Ekkor e kép parabola. A p-nek a két kör hatványvonalával való P metszéspontjának képe lesz a parabola csúcspontja.

Minden más állású *h* egyenes elmetszi az O_1O_2 egyenest. A h végtelen távoli pontjából most is végtelen távoli pont lesz, melyet a *h*-ra merőleges irány jelöl ki. A *h*-nak van metszéspontja az O_1O_2 egyenessel, ebből is végtelen távoli pont lesz. Emiatt a *h* képe hiperbola.





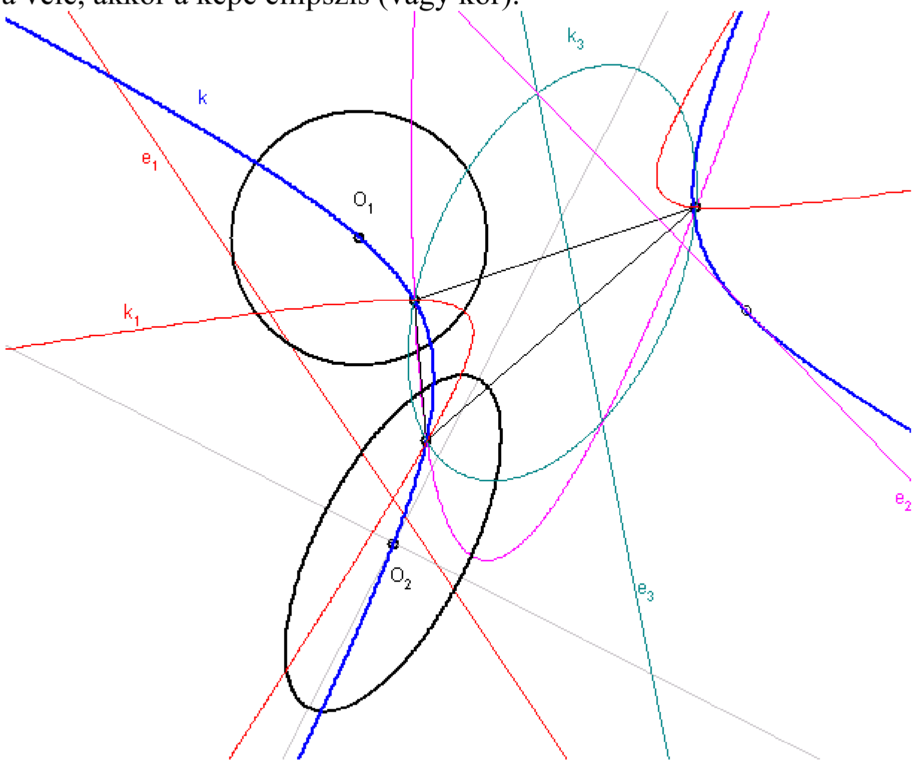
Ha az O_1O_2 egyenest merőlegesen metsző egyenest veszünk, akkor ennek a képe egy normál hiperbola.

Ezeket az egyeneseket egy

sugársorba is illeszthetjük és ekkor a sugársor képe egy olyan kúpszeletsor lesz, amelynek a nem elfajuló elemei egy parabolán kívül csak hiperbolák. Köztük van egy normál hiperbola is.

Egy körre és egy ellipszisre vonatkozó Steiner-rokonság

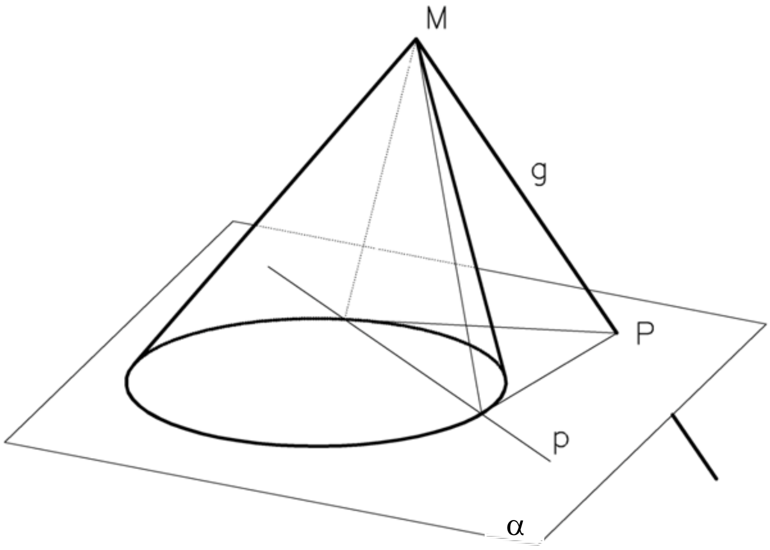
Legyen adott egy O_1 középpontú kör és egy O_2 középpontú ellipszis, melynek tengelyei nem illeszkednek O_1-re. O_1-nek a körre vonatkozó polárisa a sík végtelen távoli egyenese, az ellipszisre vonatkozó polárisa a szokásos módon határozható meg. Ezek metszéspontja, az O_1' végtelen távoli pont lesz. Az O_2 pont esetében a az ellipszisre vonatkozó poláris lesz a végtelen távoli egyenes, így az O_2' is végtelen távoli lesz. Az O_1O_2 egyenes minden más pontjának a képe véges helyzetű lesz, mivel a polárisok nem lesznek egymással párhuzamosak. Ekkor az O_1O_2 egyenes képe egy hiperbola.
A végtelen távoli egyenes képe szintén hiperbola lesz. Ugyanis az ellipszis két tengelyének végtelen távoli pontja egymásnak felel meg a leképezésben, mert az A_∞ képének meghatározásakor a felhasznált két poláris egymással párhuzamos. Így $A_\infty' \equiv B_\infty$ és hasonlóan teljesül, hogy $B_\infty' \equiv A_\infty$. A végtelen távoli egyenes képeként előálló hiperbola az előzőek miatt olyan tulajdonságú, hogy az asszimptotáinak iránya megegyezik az ellipszis tengelyeinek irányával, és áthalad az O_1 és O_2 pontokon. Jelen esetben, ha a kapott hiperbolára alkalmazzuk a Steiner-rokonságot, akkor a végtelen távoli egyenest kapjuk. Tehát ebben az esetben ez a Steiner-rokonság involutórikusan működik, azaz ezen alakzatok esetében a leképezés kétszeri végrehajtása az identitást adja. (Ezt itt most azért fontos megemlíteni, mert a Steiner-rokonság nem mindenesetben viselkedik így!) Emiatt ha egy egyenes elmetszi a végtelen távoli egyenes képeként előálló hiperbolát, akkor annak a Steiner-rokon képe hiperbola lesz. Ha egy egyenes érinti az előbbi hiperbolát, akkor a képe parabola, és ha nincs közös pontja vele, akkor a képe ellipszis (vagy kör).



Emiatt ha az egyeneseket egy olyan sugársorból választjuk, ahol a sorozópont külső pont a végtelen távoli egyenesnek megfelelő hiperbolára nézve, akkor a sugársor képe egy olyan kúpszeletsor lesz, amelyben hiperbolák, parabolák és ellipszisek is vannak. Míg a hiperbolákból és ellipszisekből végtelen sok van ebben a sorban, addig a parabolák száma pontosan kettő, hiszen a sorozó pontból két érintő húzható a vizsgált hiperbolához.
Ha a sugársor sorozópontja éppen a hiperbolára esik, akkor nem lesznek ellipszisek a képként előálló kúpszeletsorban, és a hiperbolákon kívül csak egy parabola lesz.
Ha a sorozópont belső pont, akkor csak hiperbolákból áll a kúpszeletsor.

Másodrendű kúp tengelyei

Tekintsünk egy másodrendű kúpot és egy olyan g egyenest, amely illeszkedik a kúp csúcspontjára. Ekkor a g egyenes általános helyzetű P pontjának a kúpra vonatkoztatott polársíkját meghatározhatjuk úgy, hogy a P-re egy olyan síkot illesztünk, amely nem illeszkedik a kúp M csúcspontjára. Ekkor a kúpból kimetszett görbére nézve a P polárisa a p egyenes. Ha különböző állású metsző síkokat használunk, akkor a meghatározott polárisok egy M-en áthaladó síkra illeszkednek. Ez a sík kimetsz két alkotót a kúpból, ha a g pontjai az M kivételével mind külső pontok. A kimetszett alkotók éppen azok, melyekben a g-re illeszthető érintősíkok érintik a kúpot. Mivel a kúp elfajult felület, ezért most az M szinguláris pont, itt nem tudunk érintősíkot megadni a kúphoz, míg a g egyenes többi pontja esetén a polársíkok megegyeznek. Ha a g éppen kúpalkotó, akkor illeszkedik a hozzá rendelt síkra, méghozzá a sík érinti a g alkotó mentén a kúpot.



(Ugyanehhez a konstrukcióhoz jutunk akkor is, ha egy síkban megadunk egy nem elfajuló másodrendű görbét, és az arra vonatkozó pólus-poláris kapcsolatot egy kívül eső pontból vetítjük.)
Vizsgáljuk azt az esetet, amikor egy g egyenes merőleges a pontjaihoz rendelt egyetlen polársíkra. Ez azt jelenti, hogy merőleges az összes hozzá konjugált egyenesre.
A merőlegesség projektív definíciója szerint ez akkor fog előállni, ha a g egyenes végtelen távoli pontja és a sík végtelen távoli egyenese pólus-poláris kapcsolatban van az abszolút képzetes körre nézve.
Tekintsünk egy síkmetszetet az M csúcspontú kúpból, melyet nyugodtan nevezhetünk vezérgörbének. E metszetnek a síkja -α- kimetsz egy P pontot a g egyenesből és egy p egyenest a P-hez rendelt síkból. P és p pólus-poláris kapcsolatban vannak a vezérgörbére nézve. Ha a g és a hozzá rendelt sík merőlegesek voltak, akkor a P és p éppen a merőlegesség definíciójában szereplő végtelen távoli elemek vetületei az M pontból való vetítést használva. Ekkor P és p nemcsak az alapgörbére nézve lesznek pólus-poláris kapcsolatban, hanem az abszolút képzetes kör M-ből való vetületére is. Ez a vetület –számolás szerint- képzetes kör lesz, melynek a valós reprezentánsa egy olyan valós kör, melynek a középpontja az M merőleges vetülete az α-ra, sugara pedig az M és α távolságával egyezik meg. (Maga a képzetes kör az M csúcspontú minimálkúpnak (más néven Laguerre-féle kúpnak) az α-val való metszete.)
Ebből pedig az következik, hogy a P és p a vezérgörbe és a képzetes kör közös polárháromszögének egy csúcspontja és a vele szemköztes oldala lesz.
Mivel egy adott kúp esetén három ilyen P és p párost találhatunk, ezért ez alkalmas lehet a tengely definiálására.

Definíció

A másodrendű kúp csúcspontján átmenő, egymáshoz páronként konjugált és merőleges egyeneseket a *másodrendű kúp tengelyei*nek nevezzük.

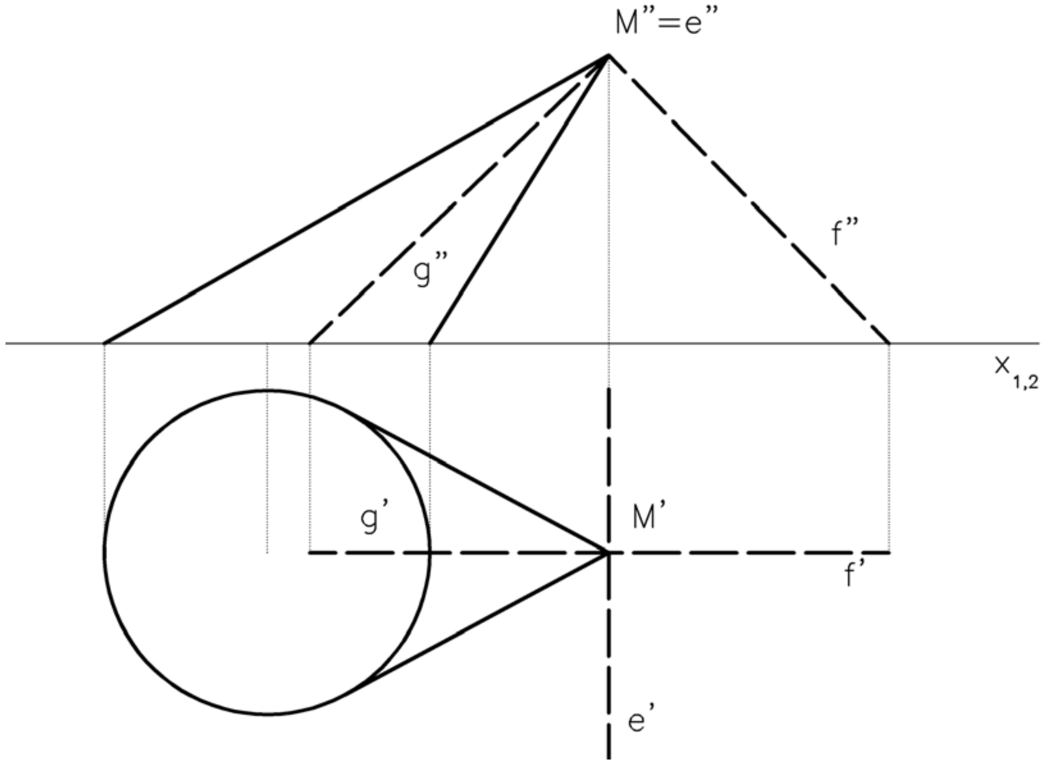
A kúp tengelyeinek meghatározása

A kúp csúcspontjára ráillesztjük a minimálkúpot, melyet elmetszünk a kúp vezérgörbéjének síkjával. Ebben a síkban lesz egy valós nem elfajuló másodrendű görbe és egy képzetes kör. Ennek a két görbének a közös polárháromszögének a csúcsai lesznek azok a pontok, melyeket a csúcsponttal összekötve a kúp tengelyeit kapjuk. A közös polárháromszög meghatározására egy módszer lehet a vezérgörbe síkjában a Steiner-rokonság alkalmazása.
A vezérgörbe általában jó adatokkal ismert görbe, míg a képzetes kör megadása a valós reprezentánsának megadásával történhet. Vennünk kell a síkban két, egymást metsző egyenest. Ezek Steiner-rokona egy-egy másodrendű görbe lesz, melyeknek négy közös pontja van. A négy közös pontból egy a két egyenes metszéspontjának a képe, a maradék három pedig a közös polárháromszög három csúcsa.

Minden másodrendű kúpnak van körmetszete (vagyis minden másodrendű kúp körkúp), ezért minden másodrendű kúpra érvényes a következő:

Tétel

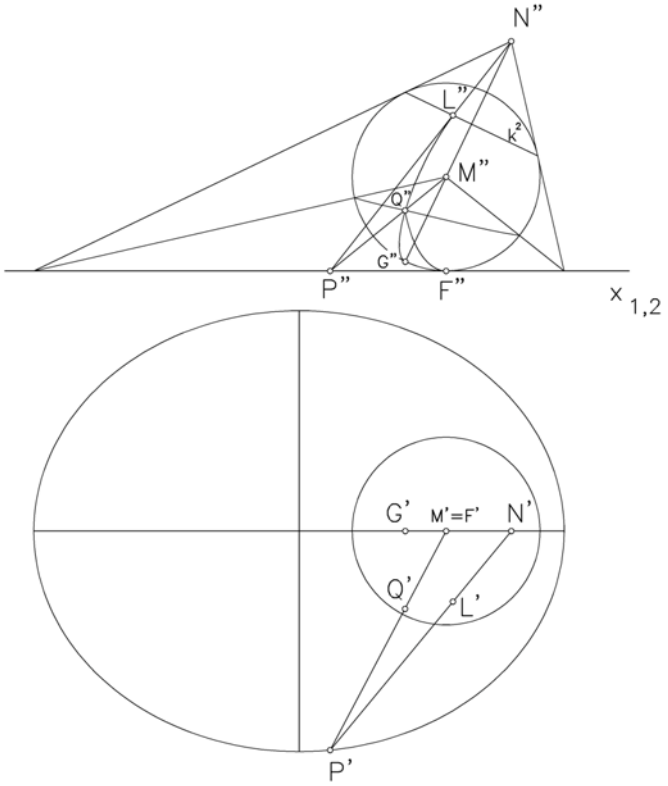
A körkúp esetén bármely két tengely által meghatározott sík a kúp szimmetriasíkja.



A forgáskúp esetén végtelen sok tengelyhármas található. Az egyik tengely maga a forgástengely, a másik két tengely a forgástengelyre merőleges síkban bármely két egymásra merőleges egyenes lehet.

Szférikus kúpszelet

Adott egy másodrendű kúp, melyet egy olyan gömbbel metszünk el, melynek a középpontja a kúp csúcspontja. (Ha síkkal metszünk el a másodrendű kúpot, akkor közönséges kúpszeletet kapunk, ha gömbbel – vagyis szférával – akkor szférikus kúpszeletet.) A keletkezett görbe középpontosan szimmetrikus a kúp csúcspontjára és síkszimmetrikus a kúp három szimmetriasíkjára. Mivel két másodrendű felületet áthatási görbéjéről van szó, ezért negyedrendű görbét kaptunk, amely nem széteső áthatás, csak két részből áll. (Széteső áthatásról akkor beszélünk, ha alacsonyabb rendű görbékre, egy negyedrendű görbe például két másodrendű görbére esik szét.) Az áthatási görbe tulajdonságait fogjuk megvizsgálni.



A felülethez speciálisan választjuk meg a Monge-rendszert. A másodrendű kúpot az első képsíkon lévő ellipszis vezérgörbével és az M csúcsponttal adtuk meg. (Ez nem megy az általánosság rovására, mivel minden másodrendű kúpot tudunk ellipszisben metszeni, és egy ilyen metsző síkot választunk első képsíknak.) A gömb középpontja M és érinti az első képsíkot.
Szükségünk lesz még egy kúpfelületre, amelynek a vezérgörbéje az első képsíkon lévő ellipszis, és a felület a gömböt érinti a k^2 körben. Mivel gömböt érintő kúpról van szó, ez csak forgásfelület lehet, melynek csúcspontját N-nel jelöltük. Mindhárom felületnek van egy közös szimmetria síkja, amely párhuzamos a második képsíkkal, ezért a második képen a k^2 kör és az áthatásként keletkezett görbe kettős vetülete látszik. (Az áthatási görbe egyik ága van csak megrajzolva.) A kúpok megkülönböztetése érdekében az M csúcspontú kúpot másodrendű kúpnak, az N csúcspontú kúpot forgáskúpnak fogom nevezni. Az MN egyenes és a gömb közös pontját G-vel jelöljük, a k^2 a G és F pontokat nem választja el.

Tekintsük most a forgáskúpot!
Az első képsík a forgáskúp egy metsző síkja, a gömb érinti a metsző síkot és a kúpot is, ezért a metszethez tartozó egyik Dandelin-gömb. Ekkor a gömb a síkot a metszet egyik fókuszában érinti, melyet F-fel jelölünk.
Legyen P az ellipszis tetszőleges pontja! A PN egyenes a forgáskúp egyik alkotója, amely a gömböt az L pontban érinti. Az L természetesen a k^2 kör egyik pontja. Az első képsíkon lévő PF egyenes szintén érinti a gömböt, a P külső pontból a gömbhöz két érintőt húztunk, ezért az érintő szakaszok egyenlő hosszúságúak.

$$d(PL)=d(PF)$$

Most a P pontot kössük össze az M ponttal! A kapott egyenes a másodrendű kúp egyik alkotója, amely a gömböt a Q pontban metszi.
A PN és PM egyenesek, mint metsző egyenespár, felfeszítenek egy síkot. Ezen a síkon a P, M, N, L, Q és G pontok ismertek. Ez a sík a gömbből egy főkört metsz ki, ennek az L és G közé eső ívét rajzoltuk meg a második képen.
A PM és a PF egyenesek, mint egy másik metsző egyenespár, egy újabb síkot feszítenek fel. Ezen a síkon a P, Q, M és F pontok ismertek. Ez a sík is egy főkört metsz ki a gömbből, ennek a Q és F pontok közé eső ívét tüntettük fel.
A gömbből kimetszett főkörök LQ és FQ ívei egyenlők, mert ahogy a PM egyenes körül a PL és PF érintők egymásban forgathatók, úgy az előbbi ívek is.
A gömbön a G pont a k^2 kör minden pontjától egyenlő távolságra van, mert a gömbön két pont távolsága mindig főkörívvel mérhető. Minden G-n áthaladó főkörön az áthatási görbének egy-egy pontja található, ezért az LQ és QG ívek összege állandó, bárhogy is választjuk az áthatási görbe Q pontját. (Vagy ami ezzel egyenértékű, bárhogy is választjuk a P pontot az ellipszisen.)
Az előbb láttuk, hogy az LQ és FQ ívek egyenlők, ezért az FQ és a QG ívek összege is állandó.
Azaz a metszet pontjai (mint a gömb felületére illeszkedő pontok) rendelkeznek azzal a tulajdonsággal, a gömbön egy ponttól (F) és egy körtől (k^2) mért távolságösszegük állandó. Ez az állandó a GL ív hossza, és ami nagyon fontos, hogy most mérni mindig főkörívekkel fogunk.

Analóg tételek a közönséges kúpszeletek, a szférikus kúpszeletek és a másodrendű kúpok között

Definíció

Adott a gömbön egy k^2 kör és egy F pont. Azon pontok a gömbön, melyek a k^2 körtől és az F ponttól egyenlő távolságra vannak (gömbi főköríven mérve), *szférikus kúpszelet*et alkotnak.

Megjegyzés

Ha az F pont a k^2 kör és a gömb középpontját összekötő egyenes és a gömb metszéspontja, akkor k^2 –tel párhuzamos síkban lévő kört kapunk.

Az előbbi definíció nagyon hasonlít a közönséges kúpszelet vezérkörös definíciójára:

Adott a síkon egy kör és egy rá nem illeszkedő pont. A sík azon pontjai, melyek a körtől és a ponttól egyenlő távolságra vannak, kúpszeletet alkotnak. (Ha a pont a körön belül van, akkor ellipszist, ha a körön kívül van, akkor hiperbolát kapunk. A megadott pont a kúpszelet egyik fókusza. A parabolának nincsen vezérköre, itt vezéregyenest szoktunk megadni.)
A vezérkörrel való definiálásra egy másik megfogalmazás is lehetséges:
Adott a síkon egy kör és egy rá nem illeszkedő pont. Azon körök középpontjai, melyek az adott ponton áthaladnak, és az adott kört érintik, kúpszeletet alkotnak.

Most vizsgáljuk meg, hogy milyen szerepe van a G pontnak!
A QF és QL ívek egyenlősége miatt azt is mondhatjuk, hogy az áthatási görbe pontjaira a GQ és FQ ívek összeg is állandó (G és a k^2 közötti tetszőleges főkörív hosszával egyenlő)
Ebből egy újabb definíciót kapunk:

Adott a gömbön két pont: F és G, valamint egy főkörív, mely nagyobb az FG közötti főkörívnél. Ekkor azon pontok a gömbön, melyek F-től és G-től mért távolságösszege a megadott ívvel egyenlő, *szférikus kúpszelet*et alkotnak.

Az F és G pontokat most nevezzük a szférikus kúpszelet fókuszainak, a G-től megadott főkörívnyi távolságra lévő gömbi pontok az előbbi k^2 kört adják, amit vezérkörnek nevezünk. Az F-től megadott főkörívnyi távolságra lévő gömbi pontok egy másik főkört határoznak meg. Az FQ és GQ íveket (főköríveket) *vezérívek*nek nevezzük. A szférikus kúpszelet Q-beli érintője nem más, mint az FQ és GQ vezérívek Q-beli érintőinek külső szögfelezője.

Megjegyzés

A megadott főkörív maximálva van, nincs értelme a teljes kört használni.

A megadott főkörív nagyobb, mint a fókuszok között feszülő főkörív, ezért az egyik fókuszhoz tartozó vezérkör nem választja szét a fókuszokat.

Az előbbieket hasonlítsuk össze a kúpszelet egy másik definíciójával:

Adott a síkon két pont és egy távolság, amely nagyobb, mint a két pont távolsága. Azon pontok, melyeknek a megadott pontoktól mért távolságösszege a megadott távolsággal egyenlő, ellipszist alkotnak. A megadott távolság az ellipszis nagytengelyének hosszával egyenlő, a megadott pontok az ellipszis fókuszai. (Ha itt az egyik fókusz körül vesszük a vezérkört, akkor az nem választja szét a fókuszokat.) Az ellipszis tetszőleges pontját a fókuszokkal összekötve vezérsugarakat kapunk, és az adott ellipszispontban az érintő a vezérsugarak külső szögfelezője.

Adott a síkon két pont és egy távolság, amely kisebb, mint a két pont távolsága. Azon pontok, melyeknek a két ponttól mért távolságkülönbsége a megadott szakasszal egyenlő hosszúságú, hiperbolát alkotnak. A megadott távolság a hiperbola valós tengelyének hosszával egyenlő, a megadott pontok a hiperbola fókuszai. (Ha itt az egyik fókusz körül vesszük a vezérkört, akkor az szétválasztja a fókuszokat.) A hiperbola tetszőleges pontját a fókuszokkal összekötve vezérsugarakat kapunk, és az adott hiperbolapontban az érintő a vezérsugarak belső szögfelezője.

Most előállítjuk a másodrendű kúp alkotóit két olyan egyenesből, amely a gömb középpontján áthalad.

Tekintsük az MF és MG egyeneseket. A másodrendű kúp alkotói természetesen az M pontra illeszkednek, és az MG és MF egyenesekkel alkotott szögösszegük állandó. Mindez azért igaz, mert a fokális kúpszeletnél a vezérívek összegét mondtuk állandónak. A vezérívek, mint főkörívek a gömbben középponti szögeket mérnek. Ezek alapján következik a **definíció**:

Tekintsük az MF és MG egyeneseket, melyeket a továbbiakban a másodrendű kúp *fokális sugarai*nak nevezünk és egy szöget, amely nagyobb a fokális sugarak szögénél. A fokális sugarak metszéspontján áthaladó azon egyenesek, melyeknek a fokális sugarakkal bezárt szögek összege állandó, *másodrendű kúp*ot alkotnak. Az előbbi feltételt teljesítő egyeneseket a másodrendű kúp *alkotó*inak nevezzük. Egy alkotó és egy fokális sugár által felfeszített síkot *vezérsík*nak nevezzük. A másodrendű kúp egy alkotója mentén vett érintősík az alkotóhoz tartozó vezérsíkok külső szögfelező síkja.

Hiperbolikus és elliptikus transzformációk

Ebben a részben az elliptikus és hiperbolikus transzformációkat a projektív transzformációk részcsoportjaiként közelítjük meg. Tudjuk, hogy a projektív transzformációk az egymás utáni végrehajtásra, mint műveletre nézve csoportot alkotnak. Ebben a csoportban már korábban találtunk részcsoportot, amikor olyan transzformációkat figyeltünk, melyek egy bizonyos alakzatot fixen hagytak (pl. az affin transzformációk a sík végtelen távoli egyenesét).

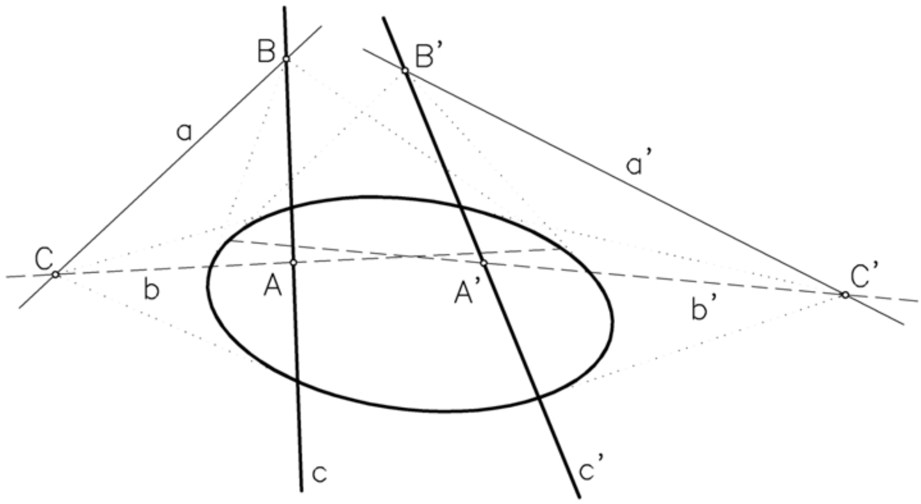
Definíció

Adott egy G transzformációcsoport és egy M objektum halmaz. Legyen az U az M részhalmaza. A G transzformációcsoportot az M halmaz U részhalmazára vonatkozó *automorfizmus-csoport*jának nevezzük, ha a G csoport elemei az U részhalmazt önmagára képezik le. Az U-ra vonatkozó automorfizmusok csoportot alkotnak.

Tétel

Legyen adva a projektív síkon egy valós, nem elfajuló másodrendű görbe, és a görbe belsejében egy A és A' pontpár. Ekkor kettő és csak kettő olyan automorfizmus-típus létezik a görbére vonatkozóan, amely A-t az A'-be viszi át és az A-n áthaladó tetszőlegesen kiválasztott irányt az A'-n áthaladó tetszőlegesen választott irányba viszi át.

Bizonyítás



Az A és A' pontokon áthaladó irány megadása egy-egy egyenes kijelölését jelenti. Az A és A' pontokon keresztül választott egyenesek legyenek rendre *c* és *c'*. A *c* és *c'* egyenesek görbére vonatkozó pólusa C és C', az A és A' pontok polárisa *a* és *a'*. Ekkor az *a* és *c* egyenesek B metszéspontjának polárisa a *b*=AC egyenes, és az *a'* és *c'* egyenesek B' metszéspontjának polárisa a *b'*=A'C' egyenes. Az ABC és A'B'C' az adott görbe egy-egy polárháromszöge.

Most tekintsük az $a_{ik}x_ix_k=0$ egyenletű valós, nem elfajuló másodrendű görbét! Legyenek a koordinátarendszer alappontjai az ABC polárháromszög csúcsai. Ekkor az alappontok (és egy E egységpont) koordinátái:

A(0,0,1)
B(1,0,0)
C(0,1,0)
E(1,1,1).

Az *a* egyenes egyenlete: $x_3=0$.
A *b* egyenes egyenlete: $x_1=0$.
A *c* egyenes egyenlete: $x_2=0$.
A pólus-poláris kapcsolatokat felhasználva ebben a koordinátarendszerben a görbénk egyenlete kanonikus alakra hozható: $x_1^2+x_2^2-x_3^2=0$.
Hasonló meggondolásokkal egy másik koordinátarendszer alappontjai az A'B'C' polárháromszög csúcsai. Ekkor az alappontok (és egy E' egységpont) koordinátái:

A'(0,0,1)
B'(1,0,0)
C'(0,1,0)
E'(1,1,1).

Az *a*' egyenes egyenlete: $x_3'^2=0$.
A *b*' egyenes egyenlete: $x_1'^2=0$.
A *c*' egyenes egyenlete: $x_2'^2=0$.
A pólus-poláris kapcsolatokat felhasználva ebben a koordinátarendszerben a görbénk egyenlete kanonikus alakra hozható: $x_1'^2+x_2'^2-x_3'^2=0$.
Tekintsük azt a projektív transzformációt, amely az A, B, C, E pontokat rendre az A', B', C', E' pontokban viszi. Ez a transzformáció az ABC polárháromszöget az A'B'C' polárháromszögbe viszi át, és ezzel a nem elfajuló másodrendű görbét önmagára képezi le. A leképezés megadásához a (c_{ij}) mátrix megadása elegendő, mellyel az

$$x'_i=c_{ik}x_k$$

egyenletek írják le a kapcsolatot. Az A↔A', B↔B', C↔C' megfelelő pontpárok koordinátáit behelyettesítve

$$x'_1=c_{11}x_1$$
$$x'_2=c_{22}x_2$$
$$x'_3=c_{33}x_3.$$

Az egyenleteket az $x_1'^2+x_2'^2-x_3'^2=0$-be helyettesítve : $c_{11}^2x_1^2+c_{22}^2x_2^2-c_{33}^2x_3^2=0$. Ennek meg kell egyeznie a görbe ABCE koordinátarendszerbeli egyenletével, ezért

$$|c_{11}|=|c_{22}|=|c_{33}|.$$

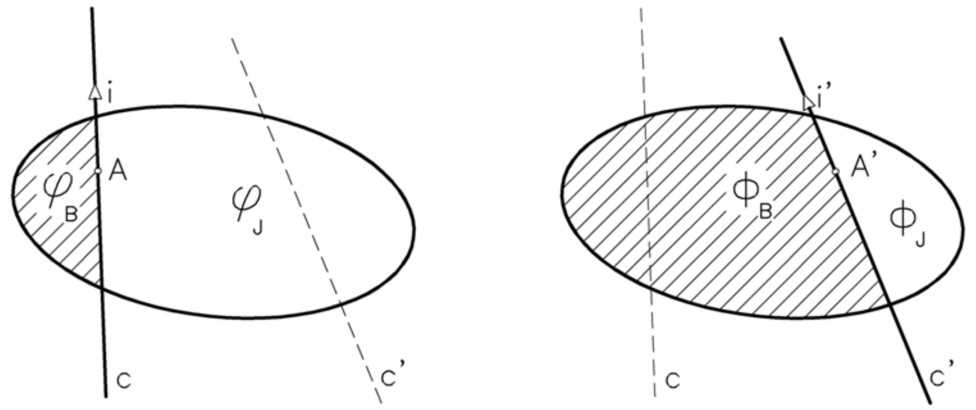
Definiáljuk a pozitív irányokat A-ból B-be és A'-ből B'-be úgy, hogy $\frac{x_2}{x_3}>0$ illetve $\frac{x'_2}{x'_3}>0$. Ezek az irányok egymásnak felelnek meg, ha $c_{22}>0$ és $c_{33}>0$. Ekkor a c_{11} előjelétől függően két lehetséges automorfizmus-típus létezik.

Tétel

Legyen adva a projektív síkon egy képzetes, nem elfajuló másodrendű görbe: $x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$, és a projektív síkon egy A és A' pontpár. Ekkor kettő és csak kettő olyan automorfizmus-típus létezik a görbére vonatkozóan, amely A-t az A'-be viszi át és az A-n áthaladó tetszőlegesen kiválasztott irányt az A'-n áthaladó tetszőlegesen választott irányba viszi át.

Ez utóbbi tétel bizonyítása az előzőjéhez hasonlóan végezhető.

Egy adott valós nem elfajuló másodrendű görbére vonatkozóan végtelen sok automorfizmus létezik, mivel a görbe belsejében egy rögzített A és A’ pontpáron keresztül végtelen sok iránypár jelölhető ki. Ezen kívül a görbe belsejében végtelen sok megfelelő pontpárt találunk.



Az A és A’ pontokon áthaladó egyeneseken kijelölt i és i’ irányok a görbe belső pontjait két csoportra osztják aszerint, hogy az egyenesek bal, vagy jobb oldalán vannak. Jelölje ϕ_B és ϕ_J a *c* egyenes bal- és jobb oldalán lévő belső pontok halmazát és Φ_B és Φ_J a *c*’ egyenes által kijelölt részeket. Ekkor az előbbi bizonyításban megadott két automorfizmus-típus úgy viselkedik, hogy az egyik a bal és jobb oldali részeket egymásnak felelteti meg (azaz $\phi_B \to \Phi_B$ és $\phi_J \to \Phi_J$), míg a másik felcseréli azokat (azaz $\phi_B \to \Phi_J$ és $\phi_J \to \Phi_B$).
Hasonlóan végtelen sok olyan automorfizmus létezik, amely egy képzetes nem elfajuló másodrendű görbére vonatkozik.

Definíció

A valós nem elfajuló másodrendű görbére vonatkozó automorfizmusokat *hiperbolikus mozgás*nak, a képzetes nem elfajuló másodrendű görbére vonatkozó automorfizmusokat *elliptikus mozgás*nak nevezzük.

Definíció

A *hiperbolikus geometria* a projektív geometriának az a speciális esete, amelyben egy $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ egyenletű abszolút alakzat van kitüntetve, a projektív geometriának csak azokat a transzformációit tekintjük, amelyeknél az abszolút alakzat helyben marad (nem pontonként).

Definíció

Az *elliptikus geometria* a projektív geometriának az a speciális esete, amelyben egy $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ egyenletű abszolút alakzat van kitüntetve, a projektív geometriának csak azokat a transzformációit tekintjük, amelyeknél az abszolút alakzat helyben marad (nem pontonként).

Másodrendű felületsor

A kúpszeletsorhoz hasonlóan másodrendű felületetekből is képezhetőek sorok, melyek megadása és tulajdonságai nagyon hasonlóak lesznek a kúpszeletsoroknál tárgyaltakhoz.

Definíció

Legyen az

$$\Phi_1\colon a_{ik}x_ix_k=0 \quad \text{és} \qquad \Phi_2\colon b_{ik}x_ix_k=0$$

két különböző másodrendű felület homogén koordinátákkal megadott egyenlete. Ekkor az

$$\alpha\cdot a_{ik}x_ix_k+\beta\cdot b_{ik}x_ix_k=0$$

szintén egy másodrendű felület egyenlete, ahol az α és a β valós paraméterek. Az így meghatározott másodrendű felületek összességét a Φ_1 és Φ_2 felületetek által indukált *másodrendű felületsor*nak nevezzük. Az egyszerűség kedvéért használni fogjuk az $\alpha\cdot\Phi_1+\beta\cdot\Phi_2=0$ jelölést.

Tétel

Az α, β és a λ, μ valós számpárok segítségével elő tudjuk állítani az $\alpha\cdot\Phi_1+\beta\cdot\Phi_2=0$ és a $\lambda\cdot\Phi_1+\mu\cdot\Phi_2=0$ felületeket.

Az így előállított felületek megegyeznek, ha $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\lambda}{\mu}$, és különböznek, ha $\frac{\alpha}{\beta}\neq\frac{\lambda}{\mu}$.

Bizonyítás

Az $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\lambda}{\mu}$ esetben a két egyenlet egymásból egy konstanssal való szorzással nyerhető, ezért ugyanazt a felületet állítják elő.

Az $\frac{\alpha}{\beta}\neq\frac{\lambda}{\mu}$ esetben tegyük fel, hogy a két felület azonos, vagyis létezik olyan $P(x_i)$ pont a projektív térben, amely nem illeszkedik sem a Φ_1, sem a Φ_2 felületekre, de az $\alpha\cdot\Phi_1+\beta\cdot\Phi_2=0$ és a $\lambda\cdot\Phi_1+\mu\cdot\Phi_2=0$ felületekre azonban igen. Mindez a következőket jelenti:

$$a_{ik}x_ix_k\neq0$$
$$b_{ik}x_ix_k\neq0$$
$$\alpha\cdot a_{ik}x_ix_k+\beta\cdot b_{ik}x_ix_k=0$$
$$\lambda\cdot a_{ik}x_ix_k+\mu\cdot b_{ik}x_ix_k=0.$$

Az utóbbi két egyenlet a Φ_1 és Φ_2-re nézve homogén lineáris egyenletrendszer. Ennek van triviálistól különböző megoldása, ha az együtthatókból képzett mátrix determinánsa zérus.

$$\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \lambda & \mu\end{vmatrix}=\alpha\cdot\mu-\beta\cdot\lambda=0$$

Ebből pedig az $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\lambda}{\mu}$ következik, ami ellentétes a feltételünkkel.

Tétel

A másodrendű felületsort bármely két eleme indukálja.

Bizonyítás

Legyen Ψ_1 és Ψ_2 az indukált felületsor két különböző eleme:

$$\Psi_1: \quad \alpha_1\cdot\Phi_1+\beta_1\cdot\Phi_2=0$$
$$\Psi_2: \quad \alpha_2\cdot\Phi_1+\beta_2\cdot\Phi_2=0.$$

Ekkor $\begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_1 & \beta_2\end{vmatrix} \neq 0$. A Ψ_1 és Ψ_2 felületek által indukált felületsornak $\rho\cdot\Psi_1+\sigma\cdot\Psi_2=0$ egy tetszőleges eleme, amely a következő alakban is írható:

$\rho\cdot(\alpha_1\cdot\Phi_1+\beta_1\cdot\Phi_2)+\sigma\cdot(\alpha_2\cdot\Phi_1+\beta_2\cdot\Phi_2)=(\rho\cdot\alpha_1+\sigma\cdot\alpha_2)\ \Phi_1+(\rho\cdot\beta_1+\sigma\cdot\beta_2)\ \Phi_2=0$

Ez pedig azt jelenti, hogy az előbbi felület a Φ_1, Φ_2 által indukált felületsornak az a $\lambda\cdot\Phi_1+\mu\cdot\Phi_2=0$ eleme, ahol $\lambda=\rho\cdot\alpha_1+\sigma\cdot\alpha_2$ és $\mu=\rho\cdot\beta_1+\sigma\cdot\beta_2$. Ezen összefüggések ismeretében, ha Φ_1, Φ_2-höz megadjuk a λ, μ számpárt, akkor kiszámolható a Ψ_1, Ψ_2-höz tartozó ρ,σ számpár és fordítva. Ebből pedig az következik hogy a Φ_1, Φ_2 és a Ψ_1, Ψ_2 által indukált felületsor megegyezik.

Tétel

A Φ_1 és Φ_2 felületek közös pontjain, melyek egy negyedrendű görbét határoznak meg, az általuk indukált felületsor minden eleme áthalad.

Bizonyítás

Mivel a közös pontokra teljesül, hogy $a_{ik}x_ix_k=0$ és $b_{ik}x_ix_k=0$, ezért az $\alpha\cdot a_{ik}x_ix_k+\beta\cdot b_{ik}x_ix_k=0$ is teljesül.

Definíció

A Φ_1 és Φ_2 felületek közös metszetgörbéjét az általuk indukált *felületsor alapgörbéjé*nek nevezzük.

Tétel

Az alapgörbe pontjaitól eltekintve az $\alpha\cdot\Phi_1+\ \beta\cdot\Phi_2=0$ felületsor elemei egyrétűen kitöltik projektív teret, azaz a tér minden alapgörbére nem illeszkedő pontján a felületsornak pontosan egy eleme halad át.

Bizonyítás

Legyen a $P(x_i)$ olyan pont, amely nem közös pontja a Φ_1 és Φ_2 felületeknek, akkor az (x_i) koordinátákat behelyettesítve $a_{ik}x_ix_k=\rho$ és $b_{ik}x_ix_k=\sigma$. A ρ és a σ közül legfeljebb csak az egyik lehet zérus. Ekkor az a Ψ felület, amelyre teljesül, hogy $\alpha\cdot\rho+\ \beta\cdot\sigma=0$, áthalad a P ponton.

- Ha $\rho=0$, akkor $\sigma\neq0$ és következik, hogy $\beta=0$. Ekkor a $Q=\Phi_1$ áthalad a P ponton.
- Ha $\sigma=0$, akkor $\rho\neq0$ és következik, hogy $\alpha=0$. Ekkor a $Q=\Phi_2$ áthalad a P ponton.
- Ha $\rho\neq0$ és $\sigma\neq0$ akkor $\beta=0$. Ekkor $\alpha\cdot\rho+\ \beta\cdot\sigma=0$-ból $\lambda\neq0$ és $\mu\neq0$ miatt a $\frac{\alpha}{\beta}=-\frac{\sigma}{\rho}$ egyenlőséggel definiált $\Psi=\alpha\cdot\Phi_1+\ \beta\cdot\Phi_2$ áthalad a P ponton.

Az $\alpha\cdot\Phi_1+\beta\cdot\Phi_2=0$ felületsor elemei között lehetnek elfajuló elemek. Olyan α, β pár állít elő elfajuló felületet, amelyre a keletkezett másodrendű felület együtthatóiból képzett mátrix determinánsa zérus.

$$\left|\alpha\cdot a_{ik}+\beta\cdot b_{ik}\right|=0$$

Ez α, β-ban homogén negyedfokú egyenlet, amely pontosan négy α, β párra lesz zérus. Ezért a felületsorban négy elfajuló elem van. Negyedfokú valós együtthatós egyenlet megoldásait tekintve vagy négy valós, vagy két valós és két képzetes, vagy négy képzetes megoldás lehet.

Példa

Forgassunk meg egy tetszőleges körsort a középpontokat tartalmazó egyenes körül. Ekkor egy gömbsort kapunk. Az alapgörbéről tudjuk, hogy negyedrendű görbének kell lennie. Minden gömb a végtelen távoli síkot az abszolút képzetes körben metszi, tehát a teljes áthatásból hiányzik még egy másodrendű görbe.

Ha egy hiperbolikus körsor forgatásával állt elő a gömbsor, akkor a körsor valós alappontjainak a forgatásával egy olyan kört kapunk, amely minden gömbre illeszkedik. Tehát ebben az esetben egy valós kör a hiányzó másodrendű görbe.

Ha elliptikus körsort forgattunk, akkor a maradék másodrendű görbe egy képzetes kör lesz, amelyet szemléletesen úgy is elő lehet állítani, hogy a körsor képzetes alappontjait forgatjuk meg.

És végül, ha parabolikus körsorból indultunk ki, akkor olyan gömbök alkotják a sort, melyek egy pontban érintkeznek. Ez a közös érintkezési pont egy pontkör, mely így szintén másodrendű görbe.

Tétel

A projektív tér egy pontjának a felületsor egyes elemeire vonatkozó polársíkjai általában síksort alkotnak. A síksor sorozóegyenese nem más, mint a ponthoz konjugált egyenes a felületsor bármely elemére vonatkozólag.

Bizonyítás

Tekintsünk egy $Y(y_i)$ pontot. Az Y pont polársíkja a Φ_1-re nézve $a_{ik}y_ix_k=0$, a Φ_2-re nézve $b_{ik}y_ix_k=0$, ezért a felületsor tetszőleges elemére vonatkozó polársík $\alpha\cdot a_{ik}y_ix_k+\beta\cdot b_{ik}y_ix_k=0$. Ez pedig nem más, mint az $a_{ik}y_ix_k=0$ és $b_{ik}y_ix_k=0$ síkok által meghatározott síksor egy eleme, természetesen abban az esetben, ha az $a_{ik}y_ix_k=0$ és $b_{ik}y_ix_k=0$ síkok különbözőek.

Milyen Y pontra teljesülhet, hogy az $a_{ik}y_ix_k=0$ és $b_{ik}y_ix_k=0$ egyenesek egybeesnek?

Ekkor e két egyenlet csak konstans szorzóban térhet el egymástól, azaz létezik olyan λ, μ számpár, amelyre $\lambda\cdot a_{ik}y_ix_k+\mu\cdot b_{ik}y_ix_k\equiv 0$. (Azonosan zérus bármely x_k-ra.) Ez csak akkor lehet azonosan zérus bármely x_k-ra, ha az egyenletben minden együttható zérus. Így nyerjük az y_i-re homogén lineáris egyenletrendszert.

$$\begin{aligned}
(\lambda\cdot a_{11}+\mu\cdot b_{11})y_1+(\lambda\cdot a_{12}+\mu\cdot b_{12})y_2+(\lambda\cdot a_{13}+\mu\cdot b_{13})y_3&=0\\
(\lambda\cdot a_{21}+\mu\cdot b_{21})y_1+(\lambda\cdot a_{22}+\mu\cdot b_{22})y_2+(\lambda\cdot a_{23}+\mu\cdot b_{23})y_3&=0\\
(\lambda\cdot a_{31}+\mu\cdot b_{31})y_1+(\lambda\cdot a_{32}+\mu\cdot b_{32})y_2+(\lambda\cdot a_{33}+\mu\cdot b_{33})y_3&=0
\end{aligned}$$

Ennek akkor van triviálistól különböző megoldás y_i-re, ha az egyenletrendszer determinánsa nulla. Ekkor már látható, hogy ha Y a felületsorban szereplő elfajuló elemek valamelyikének szinguláris pontja, pontosan ekkor lesz az Y polársíkja a felületsor bármely nem elfajuló elemére nézve ugyanaz a sík. (Az $a_{ik}x_ix_k=0$ másodrendű felületre nézve az $Y(y_i)$ szinguláris pont, ha $a_{ik}y_i=0$.)

Következmény

Ha egy Y pont polársíkja a felületsor bármely elemére nézve ugyanaz a sík, akkor a felületsor Y-ra illeszkedő eleme éppen egy másodrendű kúp.

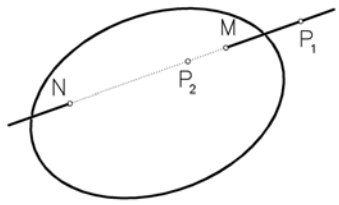
A lehetséges Y pontok a felületsort indukáló felületek közös polártetraéderének csúcspontjai. Ez a polártetraéder nemcsak az előbbi két felületnek, hanem a felületsor bármely két elemének is közös polártetraédere.

Tétel

A másodrendű felületsorba tartozó másodrendű kúpok az alapgörbét kettősen vetítik.

Bizonyítás

Felhasználjuk azt, hogy egy másodrendű felületre vonatkozóan két konjugált pontot összekötő egyenes belemetsz a felületbe, akkor a keletkezett metszéspontok harmonikusan választják el a konjugált pontokat. Az ábra alapján a P_1 és P_2 konjugáltak a felületre nézve, az M és N pontok a P_1P_2 egyenesnek a felülettel alkotott közös pontja. $(P_1P_2MN)=-1$.



Legyen Y a közös polártetraéder egyik csúcspontja, T pedig a felületsort indukáló két felület egy közös pontja. Ekkor az YT egyenes az Y pont polársíkjából (amely ugyanaz bármely felületsorbeli felületre nézve) kimetsz egy X pontot. Ekkor az YT egyenesen létezik egy S pont, melyre (YXTS)=-1, azaz harmónikus pontnégyest alkotnak. Ha az egyik indukáló felületet vesszük, akkor S-nek illeszkednie kell erre a felületre, de ha a másikat, akkor is illeszkednie kell. Emiatt az S pont nemcsak az indukáló két felület, hanem a felületsor minden elemének is közös pontja. Így a vizsgált kúpfelület egy alkotóján, ha van egy pont a felületsor közös metszetgörbéjéről, akkor van egy másik is, emiatt valóban kettősen vetítődik a metszetgörbe.

Következmény

Két tetszőleges másodrendű felület metszetgörbéje (áthatása) visszavezethető másodrendű kúpok áthatására, vagyis ugyanaz a negyedrendű görbe két másodrendű kúp metszeteként is előáll.

Ehhez elegendő a felületsor közös polártetraéderének két csúcspontját ismerni, amely bizonyos felületpárok esetén szinte látszik, ami által a szerkesztéshez információt ad, pontosítja azt. Általános esetben a közös polártetraéder euklideszi értelemben nem szerkeszthető.

A közös polártetraéder meghatározása:

Adottak az A és B másodrendű felületek, melyek egy felületsort indukálnak. Legyen P egy tetszőleges pont, melyből indítunk három tetszőleges *g*, *i*, *j* egyenest.

A *g*-re illeszkedő pontoknak az A-ra vesszük a polársíkjait, melyek egy *g*-hez projektív síksort alkotnak. Ugyanezt tesszük a B-re nézve és egy másik, *g*-hez projektív síksort kapunk. A két síksor egymáshoz is projektív, ekkor az egymásnak megfeleltetett síkok metszési alakzata egy egyköpenyű hiperboloid. Ennek egy tetszőleges alkotója a *g* valamely pontjához mindkét felületre nézve konjugált egyenes. Ehhez hasonlóan az *i* és *j* egyenesekhez is tudunk rendelni egy-egy hiperbolikus hiperboloidot.

A P pont a *g*, *i*, *j* egyenesek mindegyikén rajta volt, ezért a hozzá tartozó konjugált egyenes mindhárom hiperboloidon megtalálható. Ezért a három hiperboloidnak van egy közös alkotója.

Ha a közös alkotókon kívül páronként tekintjük a hiperboloidokat, akkor van még egy-egy harmadrendű áthatási görbe. A három harmadrendű görbének a közös pontja legyen S. (Nem mindig létezik.)

A *g* egyenes egy bizonyos G pontjához az A és B felületekre nézve konjugált egyenes át fog haladni az S ponton. Hasonlóan találhatunk egy I és J pontot az *i* és *j* egyeneseken. Ekkor a G, I, J pontok síkja az S polársíkja az A és B felületekre vonatkozóan.
Általában négy, S-sel megegyező tulajdonságú pont található, melyek a közös polárháromszög csúcsai lesznek.

Általános helyzetű síkokkal egy felületsorból kúpszeletsorokat tudunk metszeni. Ha a metsző sík éppen a közös polártetraéder egyik lapjának a síkja, akkor ebben a síkban lévő tetraédercsúcsok a kimetszett kúpszeletsor közös polárháromszögének a csúcsait adják.

Nullarendszer

Korreláció

A Σ és Σ' projektív síkok korrelatív vonatkozásban vannak, ha a Σ pontjai és a Σ' egyenesei között, és a Σ egyenesei és a Σ' pontjai között olyan kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesítünk, amely illeszkedéstartó. (Egy síkot korrelatív módon önmagára is le tudunk képezni, ekkor Σ=Σ'.)
A korrelatív leképezés adott, ha négy általános helyzetű ponthoz hozzárendelünk négy általános helyzetű egyenest.

Ha analitikusan gondolkodunk, akkor a pontok és egyenesek koordinátái között a következő áll fenn:

- $(x_i)\leftrightarrow(u_i')$ kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés
- $(u_i)\leftrightarrow(x_i')$ kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés
- Ha $u_ix_i=0$, akkor $x_i'u_i'=0$ is teljesül.

Példa:

Egy síknak önmagára vonatkozó korrelatív leképezésére egy szép példa, ha egy nem elfajuló másodrendű görbére vonatkozó pólus-poláris kapcsolatot tekintünk. Ez valóban megfelel a kívánalmaknak. Egy ponthoz a görbére vett polárist rendeljük és egy egyeneshez a pólust.

Egy síknak önmagára vonatkozó korrelatív kapcsolatában vizsgálható az, hogy egy pont mikor illeszkedik a képegyenesére, és egy egyenes mikor illeszkedik a képpontjára.
Az előbbi példában a megadott másodrendű görbe pontjai és a görbe érintői ilyen tulajdonságú elemek. A sík bármely más pontjára és egyenesére ez már nem teljesül.

A korreláció, mint projektív leképezés, egy 3×3-as reguláris mátrixszal adható meg, ahol a képelemek kiszámítása a következő:

$u_i'=a_{ik}x_k$ és $x_i'=b_{ik}u_k$, ahol az (a_{ik}) és (b_{ik}) egymás inverzei.

Ha egy pont illeszkedik a képegyenesére, akkor $u_i'x_i=0$, azaz $a_{ik}x_kx_i=0$. Ha az (a_{ik}) mátrix kielégít bizonyos feltételeket $(a_{11}^2+a_{12}^2+a_{22}^2>0)$, akkor ez egy nem elfajuló másodrendű görbe egyenlete. Abban az esetben, ha a mátrix szimmetrikus, akkor magát a korrelációt *polaritás*nak nevezzük, és a fenti egyenlettel leírt másodrendű görbét *vezető kúpszelet*nek.

Síkban nem létezik olyan korrelatív leképezés, amelynél minden pont illeszkedne a képegyenesére, és minden egyenes illeszkedne a képpontjára.

Korreláció a térben

Tekintsük a háromdimenziós projektív teret. A térben minden ponthoz egyértelműen hozzárendelünk egy síkot és minden síkhoz egyértelműen hozzárendelünk egy pontot. Ettől a leképezéstől elvárjuk azt, hogy illeszkedéstartó és egyenestartó (azaz az A, B pontok egyeneséhez az α' és β' síkok metszésvonalát rendeljük) legyen.
A korrelatív leképezés adott, ha öt általános helyzetű ponthoz hozzárendelünk öt általános helyzetű síkot

Ha analitikusan gondolkodunk, akkor a pontok és síkok koordinátái között a következő áll fenn:

- $(x_I)\leftrightarrow(u_I')$ kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés
- $(u_I)\leftrightarrow(x_I')$ kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés
- Ha $u_Ix_I=0$, akkor $x_I'u_I'=0$ is teljesül.

A térbeli korreláció, mint projektív leképezés, egy 4×4-es reguláris mátrixszal adható meg, ahol a képelemek kiszámítása a következő:

$u_I'=a_{IK}x_K$ és $x_I'=b_{IK}u_K$, ahol az (a_{IK}) és (b_{IK}) egymás inverzei.

Ha egy pont illeszkedik a képsíkjára, akkor $u_I'x_I=0$, azaz $a_{IK}x_Kx_I=0$. Abban az esetben, ha az (a_{IK}) mátrix szimmetrikus, akkor magát a korrelációt *polaritás*nak nevezzük, és a fenti egyenlet megad egy másodrendű felületet. Ennek a felületnek a pontjai és csak azok, amelyek illeszkednek a hozzájuk rendelt síkokra és a felület érintősíkjai illeszkednek képpontjaikra.

A térben van olyan korreláció, amelynél minden pont illeszkedik a képsíkjára. Ennek a leképezésnek a mátrixa ferdén szimmetrikus reguláris mátrix. Az ilyen korrelációt *nullarendszer*nek nevezzük.

Tekintsük a korrelációt: $u_I'=a_{IK}x_K$.
Ezt részletesen kiírva:

$$\begin{aligned}
u_1'&=a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+a_{14}x_4\\
u_2'&=a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+a_{24}x_4\\
u_3'&=a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3+a_{34}x_4\\
u_4'&=a_{41}x_1+a_{42}x_2+a_{43}x_3+a_{44}x_4
\end{aligned}$$

Tekintsük az (1,0,0,0) pontot.
A fenti egyenletrendszert felhasználva a képsíkja: $(a_{11}, a_{21}, a_{31}, a_{41})$.
A pont illeszkedik a képsíkra: $a_{11}\cdot 1+a_{21}\cdot 0+a_{31}\cdot 0+a_{41}\cdot 0=0$, azaz $\boxed{a_{11}=0}$.

Tekintsük a (0,1,0,0) pontot.
A fenti egyenletrendszert felhasználva a képsíkja: $(a_{12}, a_{22}, a_{32}, a_{42})$.
A pont illeszkedik a képsíkra: $a_{12}\cdot 0+a_{22}\cdot 1+a_{32}\cdot 0+a_{42}\cdot 0=0$, azaz $\boxed{a_{22}=0}$.

Tekintsük a (0,0,1,0) pontot.
A fenti egyenletrendszert felhasználva a képsíkja: $(a_{13}, a_{23}, a_{33}, a_{43})$.
A pont illeszkedik a képsíkra: $a_{13}\cdot 0+a_{23}\cdot 0+a_{33}\cdot 1+a_{43}\cdot 0=0$, azaz $\boxed{a_{33}=0}$.

Tekintsük a (0,0,0,1) pontot.

A fenti egyenletrendszert felhasználva a képsíkja: (a_{14}, a_{24}, a_{34}, a_{44}).
A pont illeszkedik a képsíkra: $a_{14}\cdot 0+ a_{24}\cdot 0+ a_{34}\cdot 0 + a_{44}\cdot 1=0$, azaz $\boxed{a_{44}=0}$.
Tehát a mátrix főátlója csak 0 elemeket tartalmaz.

Tekintsük az (1,1,0,0) pontot.
A fenti egyenletrendszert felhasználva a képsíkja: ($0+a_{12}$, $a_{21}+0$, $a_{31}+a_{32}$, $a_{41}+a_{42}$).
A pont illeszkedik a képsíkra: $a_{12}\cdot 1+ a_{21}\cdot 1+ (a_{31}+a_{32})\cdot 0 + (a_{41}+a_{42})\cdot 0=0$, azaz $\boxed{a_{21}=-a_{12}}$.

Hasonlóan folytatva igazolható, hogy $\boxed{a_{31}=-a_{13}}$, $\boxed{a_{41}=-a_{14}}$, $\boxed{a_{32}=-a_{23}}$, $\boxed{a_{42}=-a_{24}}$, $\boxed{a_{43}=-a_{34}}$
Vagyis egy ferdén szimmetrikus mátrixot kaptunk.

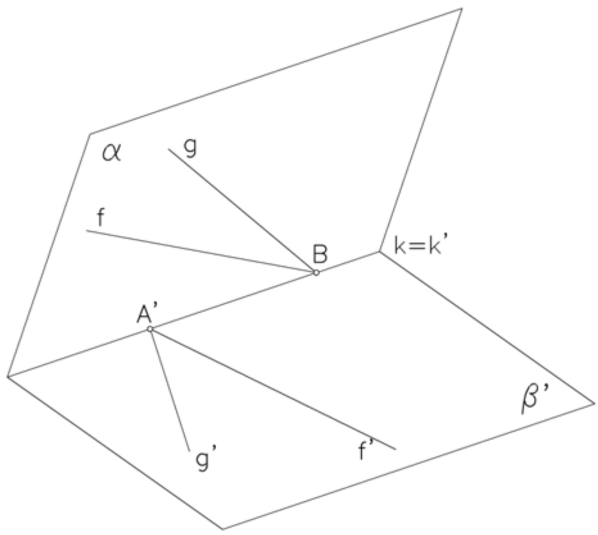
Legyen a $P(x_I)$ tetszőleges pont. Ennek a képe:

$$u_1'=a_{12}x_2+a_{13}x_3+a_{14}x_4$$
$$u_2'=-a_{12}x_1+a_{23}x_3+a_{24}x_4$$
$$u_3'=-a_{13}x_1-a_{23}x_2+a_{34}x_4$$
$$u_4'=-a_{14}x_1-a_{24}x_2-a_{34}x_3$$

A P pont illeszkedik erre a síkra. Mivel a P tetszőleges volt, ezért igaz, hogy minden pont illeszkedik a képsíkjára. Egy ilyen leképezés valóban egy ferdén szimmetrikus mátrixszal adható meg.

A nullarendszer Sylvester-féle megadása

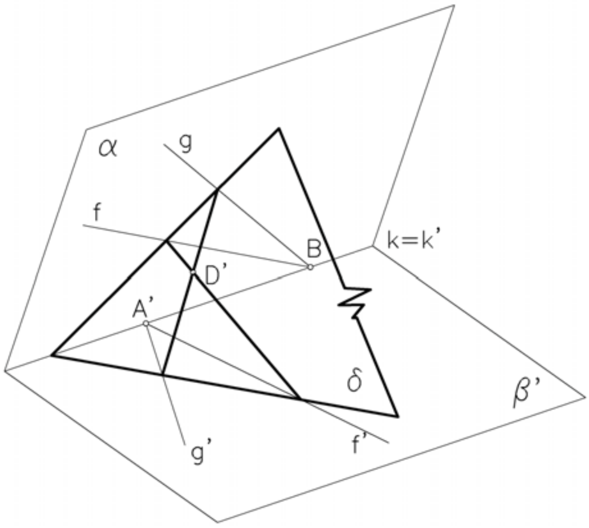
Ha egy pontsort veszünk, akkor ennek a korrelatív képe egy síksor lesz. A pontsor tartóegyenese és a síksor sorozóegyenese egymásnak felel meg a leképezésben. Ha teljesül az, hogy a tartóegyenes és a sorozóegyenes egybeesik, akkor *vezetősugár*nak nevezzük.

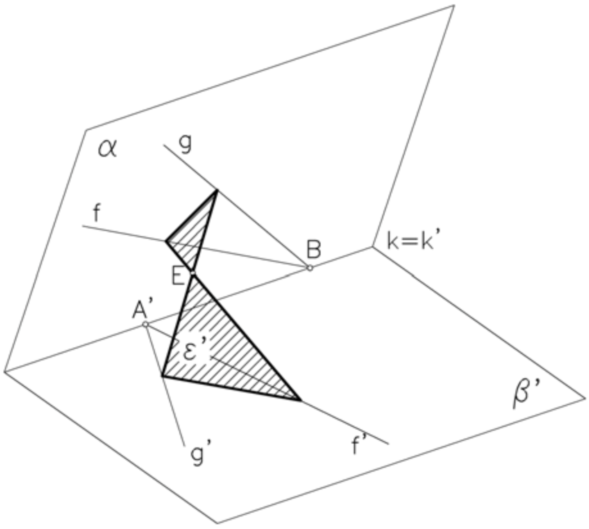


A leképezés megadása azt jelenti, hogy meg tudjuk adni egy pontnak megfelelő síkot és egy síknak megfelelő pontot.
Az α síkhoz a korreláció rendelje az A' pontot, a B ponthoz a β' síkot. A két sík metszésvonala k=k' vezetősugár. (Emiatt az A' és B pontok illeszkednek a k=k'-re.) Az α síkban a B ponton áthalad a g és f egyenes. Ezeknek a β' síkban az A' pontra illeszkedő g' és f' egyenesek felelnek meg. Az ábrán vannak összegyűjtve a fenti adatok, melyek a Sylvester-féle megadásban a nullarendszert meghatározzák.

Rendeljünk egy tetszőleges síkhoz pontot!

Egy tetszőleges δ sík elmetszi a g, f, g’ és f’ egyeneseket. A g és g’-vel való metszéspontokat, és az f és f’-vel való metszéspontokat összekötő egyenes egy-egy vezérsugár, melyek metszéspontja D’, a δ síkhoz rendelt pont.
(A konstrukcióból látszik, hogy a δ síkot a g és g’, f és f’ D’-re illeszkedő transzverzálisa feszíti fel.)





Rendeljünk egy tetszőleges ponthoz síkot!

Az E ponton keresztül az f és f’ egyeneseknek és a g és g’ egyeneseknek van egy-egy transzverzálisa. Ezek, mint metsző egyenespár, felfeszítenek egy ε’ síkot, ezt rendeljük az E ponthoz.

Néhány fontosabb elnevezés:
A nullarendszer *középpont*ja: A korrelációban a végtelen távoli síknak megfelelő pont. (Mindig végtelen távoli pont, hiszen illeszkedik a párjára.)
Átmérők: A nullarendszer középpontján áthaladó egyenesek. (Mivel a középpont mindig végtelen távoli, az átmérők egymással párhuzamos egyenesek.)
Tengely: Az egy átmérőn lévő pontok korrelatív képei egy síksort alkotnak, ennek a síksornak eleme a végtelen távoli sík is, ezért egymással párhuzamos síkokból áll. Azt az átmérőt, mely pontjaihoz tartozó síkok merőlegesek az átmérőre, a nullarendszer tengelyének nevezzük.
A nullarendszer a tengelye mentén önmagában eltolható és önmagában elforgatható. Ezek együttesen azt jelentik, hogy a nullarendszer a tengelye mentén önmagában elcsavarható.

Példa

1. Egy harmadrendű térgörbe pontjai és simulósíkjai nullarendszert alkotnak.
2. A hengeres csavarvonal pontjai és normálsíkjai nullarendszert alkotnak.
3. A tér általános mozgása projektív geometriai eszközökkel a nullarendszerrel írható le.

Irodalomjegyzék

1. Fazekas Sarolta: TDK dolgozat

2. Gyarmathi Attila – Szabó József: *Ábrázoló geometriai példatár*
   Egységes jegyzet, Tankönyvkiadó, Budapest, 1987
3. H. S. M. Coxeter: *A geometriák alapjai*
   Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1973
4. H. S. M. Coxeter: *Projektív geometria*
   Gondolat, Budapest, 1986
5. Hajós György: *Bevezetés a geometriába*
   Egyetemi tankönyv, Tankönyvkiadó, Budapest, 1959
6. Horvay Katalin - Reimann István: *Projektív geometria*
   Kézirat, Tankönyvkiadó, Budapest 1980
7. Kerékgyártó Béla: *A geometria alapjairól*

8. Klug Lipót: *Projektív geometria*
   Budapest, 1903
9. Láncos Kornél: *A geometriai térfogalom fejlődése*

10. R. Courrant – H. Robbins*: Mi a matematika?*
    Gondolat Könyvkiadó, Budapest, 1966
11. Reimann István: *A geometria és határterületei*
    Szalay Könyvkiadó és Kereskedőház Kft., 1999
12. Scop János: *Kúpszeletek*
    Középiskolai szakköri füzetek
13. Stormmer Gyula: *Ábrázoló geometria*

14. Stormmer Gyula: *Geometria*

15. Szász Gábor: *Projektív geometria*

16. Varga Ottó: *Projektív geometria*
    jegyzet, ELTE, 1954
17. Vigassy Lajos: *Geometriai transzformációk*
    Középiskolai szakköri füzetek
18. Vigassy Lajos: *Projektív geometria*
    Középiskolai szakköri füzetek