Emlékeztető:

Görbék:	$y = f(x)$	$F(x,y) = 0$	$\bar{r}(t)$
Felületek:	$z = f(x,y)$	$F(x,y,z) = 0$	$\bar{r}(u,v)$
	Explicit	Implicit	Paraméteres

A felületek vektorparaméteres megadásánál két független irányba tudunk elindulni először (paraméter vonalak) természetesen ezektől eltérően nagyon sok irányba bejárható.

Def: Ha adott az $F(x,y,z)$ n-ed fokú polinom, akkor az $F(x,y,z)=0$ egyenletet kielégítő pontok összességét n-ed rendű felületnek nevezzük. (Algebrai felület)

Pl: $\boxed{n=1}$ $ax+by+cz+d=0$ $a,b,c,d \in \mathbb{R}$
a,b,c egyszerre nem nullák

Sík egyenlete
más elsőrendű felület nincs!

$\boxed{n=2}$ $ax^2+by^2+cz^2+dxy+exz+fyz+gx+hy+jz+k=0$
$a,\dots,k \in \mathbb{R}$

Látható, hogy a másodfokra lépve már eléggé bedurvul a dolog!
Fontos: a vegyesszorzatok is másodfokú tagok: $xy = x^1y^1$ $1+1 \rightarrow$ másodf.

$x^2+y^2+z^2-9=0$ gömb (Origó kp-ú, 3 egység sugarú)

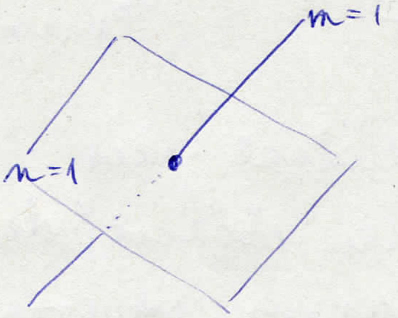
Ha eltoljuk a kp-t az origóból, akkor más újabb tagok jelennek meg. (Gyakorlaton lehet próbálni!)

egyköpenyű hiperboloid nyeregfelület

Tétel: Egy n-edrendű felületnek és egy m-edrendű görbének legfeljebb $n \cdot m$ „látható" metszéspontja lehet

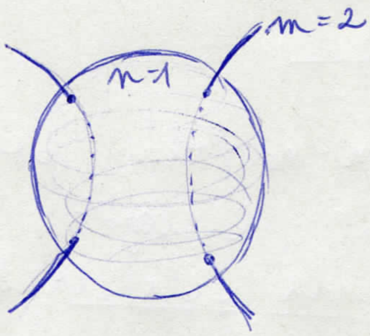
„látható" = valós koordinátákkal rendelkező és a szokásos terünkben lévőt jelent.

Pl:

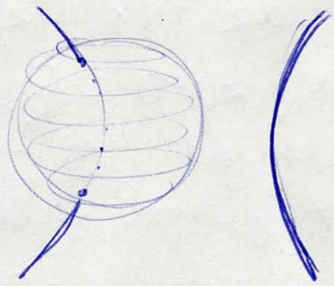


sík: elsőrendű
egyenes: elsőrendű } $n \cdot m = 1$

1 db közös pont.



Gömb: másodrendű
hiperbola: másodrendű } $n \cdot m = 2 \cdot 2 = 4.$



Ebben az esetben csak az egyik ág metszi a gömböt. Ekkor is 4 metszéspont van, csak ebből 2 valós, 2 képzetes. A képzetes pontok koordinátái komplex számmal adhatók meg.

Tétel: Egy n-ed és egy m-ed rendű felület metszésvonala $m \cdot n$-ed rendű görbe.

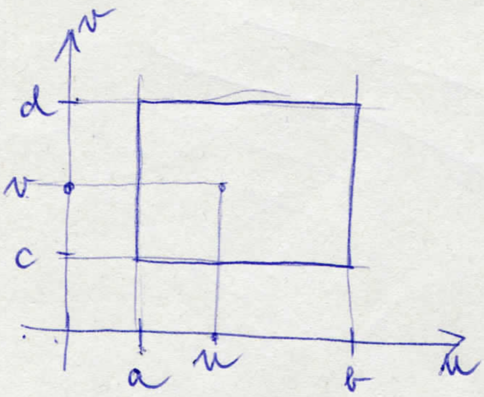
A szorzás miatt a metszésvonal (görbe) fokszáma igen hamar emelkedik. Lásd: két másodrendű felület metszésvonala negyedrendű görbe lesz.

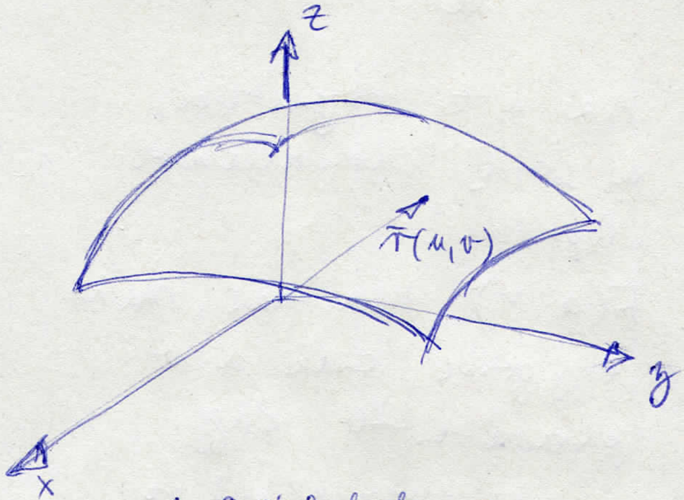
Paraméteres megadási mód:

A grafikában leggyakrabban ezzel a megadási móddal írunk le felületeket.

$$\bar{r} : [a, b] \times [c, d] \longrightarrow V^3$$

két intervallum Descartes szorzata





gyakorlatilag a koordináta-síkon egy téglalapot jelöltünk ki.

A felületet a helyvektorok végpontjai fogják alkotni.
Formailag szeszélyes lehet, pl hullámzó vagy maga alá tekeredő.

Formailag az $\bar{r}(u,v)$ három koordinátafüggvénnyel fogunk számolni. (3db valós értékű függvény)

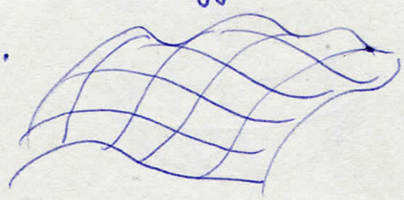
$x(u,v) : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$

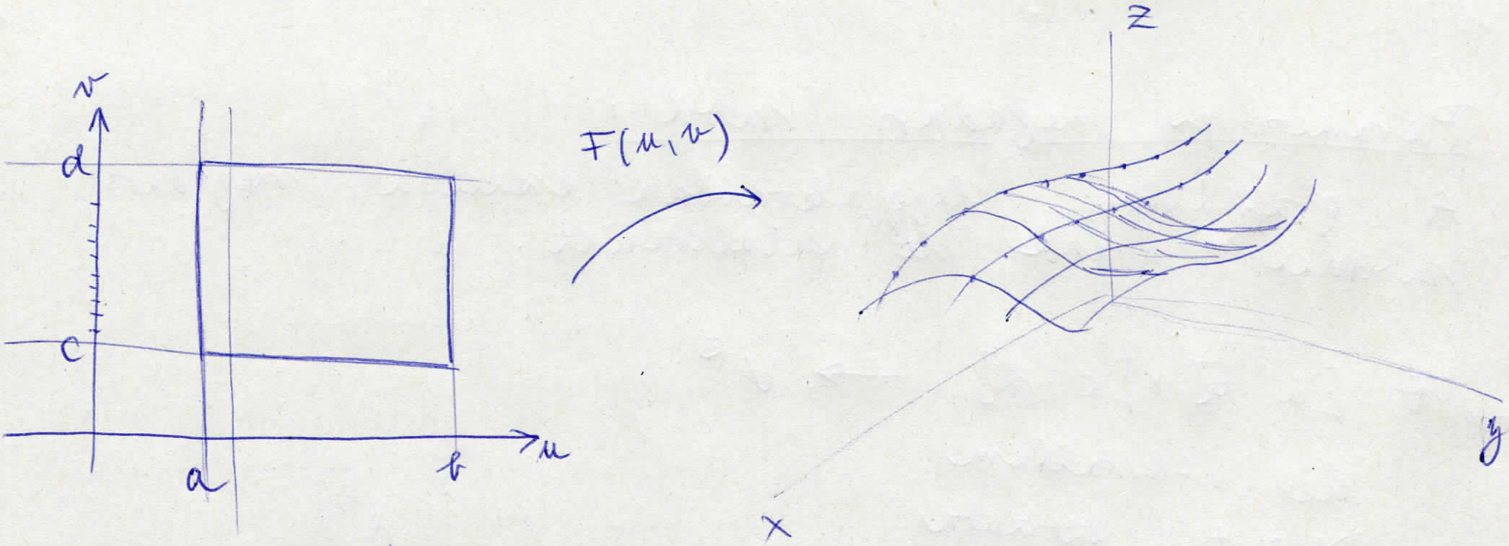
$y(u,v) : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$

$z(u,v) : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$

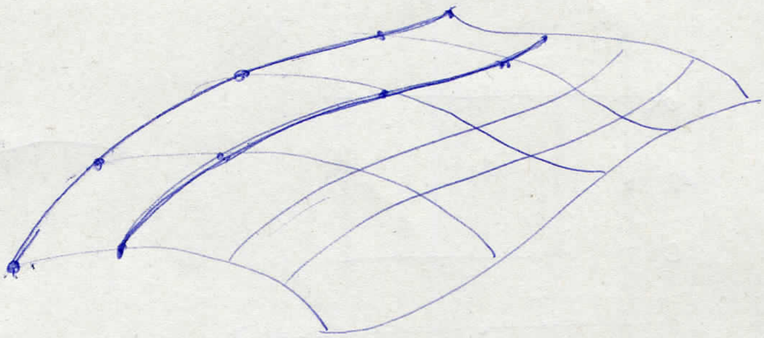
Mit jelent az, hogy egy felületet kirajzolunk?

Például egy dróthálószerű valamit akarunk látni. Ez elég szemléletes!





Az a-t rögzítem,
a [c,d] intervallumot
„léptetem".
F(a,v) nem más, mint
egy görbe, csak a v
paramétertől függ.
u-val továbblépek és
rögzítem és újabb felületi
görbét fogunk kapni.

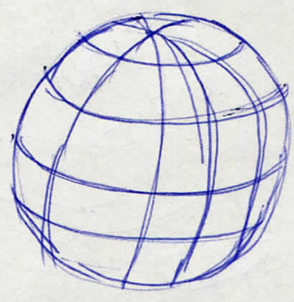


Amelyik paramétert rögzítjük, azzal ritkábban
fogunk lépni a rácsosság érdekében!
És amikor u-val végigértünk az [a,b] intervallu-
mon, akkor megfordítjuk a szerepet, és v-t
rögzítjük és u-t léptetjük a megfelelő intervallu-
mon. Ezek adják a másik irányú vonalazást.

A vonalak neve: <u>paramétervonalak</u>

Fontos: a rács sosem felesleges, azaz nem
elég csak a kontúrvonal ábrázolására.
A felületdarab „belsejéből" is kellenek
információk.

Példa a paramétervonalazásra:
Földgömb



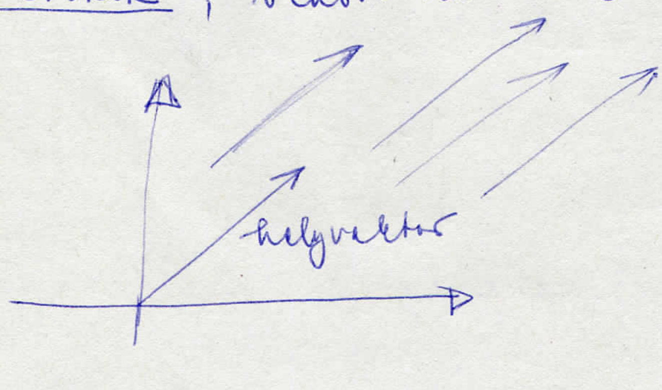
Előnyök – hátrányok

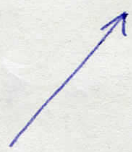
	Implicit $F(x,y,z)=0$	Paraméteres $\bar{r}(u,v)=\begin{cases} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{cases}$
megjelenítés	−	+
pont illesztése a felületre	+	−

A felületen vizsgálható az, hogy egy pont illeszkedik-e a felületre.
Implicit esetben a vizsgálandó pont koordinátáit behelyettesítjük az egyenletbe, ha 0-t kapunk, akkor illeszkedik.
Ugyanez a paraméteres esetben 3 egyenletből álló egyenletrendszer megoldását jelenti.
Egy ilyen egyenletrendszer nehezen oldható meg, gyakran csak közelítő eljárásokkal.

további felületábrázolási lehetőség: – szintvonalak (térkép)
– árnyalás (művészi)

VEKTOROK, vektor műveletek





irányított szakasz (reprezentáns)

vektor nem más, mint az ugyanilyen állású és hosszú irányított szakaszok összessége.

helyvektor: Origóból induló reprezentáns

Műveletek:

1) Skalárral való szorzás

$$\left.\begin{array}{l}\vec{a}(3,5,1)\\ \lambda \in \mathbb{R}\end{array}\right\} \rightarrow \lambda\cdot\vec{a}\ (\lambda 3,\ \lambda 5,\ \lambda\cdot 1)$$

Geometriai értelemben ez a vektor nyújtását jelenti, amelybe azt is beleértjük, hogy az eredményvektor rövidülhet is, vagy az ellentétes irányba is mutathat.

Pl: $\bar{a}$ vektorból egységnyi vektort számolunk: $\bar{e}$

$|\bar{a}| = \sqrt{3^2+5^2+1^2}$: az $\bar{a}$ vektor hossza

$\bar{e} = \frac{1}{|\bar{a}|}\cdot\bar{a}$ (egységnyi hosszú és ugyanabba az irányba mutat.)

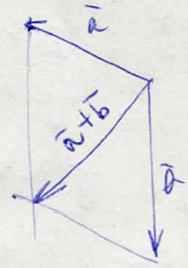
$\underline{e} = \left(\frac{3}{\sqrt{35}};\ \frac{5}{\sqrt{35}};\ \frac{1}{\sqrt{35}}\right)$

Ezt az eljárást normálásnak nevezzük.

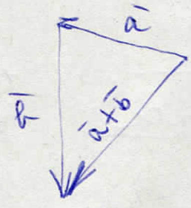
2) Összeadás (paralelogramma módszer

$\bar{a}(3,5,1)$

$\bar{b}(4,2,-7)$



összefűzési módszer :



)

$\bar{a}+\bar{b}\,(3+4;\ 5+2;\ 1+(-7)) =$

$= (7,\ 7,\ -6)$

3.) kivonás

$\bar{a}(3,5,1)$ $\bar{a}-\bar{b}$

$\bar{b}(4,2,-7)$ $\bar{b}-\bar{a}$