Az informatika logikai alapjai
4. feladatsor

Logikailag ekvivalens formulák

- Kettős tagadás törvénye: $\neg\neg A \Leftrightarrow A$
- Kommutativitás: $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$, $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$ és $A \equiv B \Leftrightarrow B \equiv A$
  - Asszociatívitás: $A \wedge (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$, $A \vee (B \vee C) \Leftrightarrow (A \vee B) \vee C$ és $A \equiv (B \equiv C) \Leftrightarrow (A \equiv B) \equiv C$
- Idempotencia: $A \wedge A \Leftrightarrow A$ és $A \vee A \Leftrightarrow A$
- Disztibutivitás:
  - $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
  - $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
- Elnyelés: $A \wedge (B \vee A) \Leftrightarrow A$ és $A \vee (B \wedge A) \Leftrightarrow A$
- De Morgan: $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$ és $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

(Aszalós László fóliái, kiemelések tőlem)

Mit is jelent az odavissza-nyíl? (Szintek.) Hogyan lehet ilyen állításokat igazolni?

Logikailag ekvivalens formulák

- Áthelyezési törvény: $(A \wedge B) \supset C \Leftrightarrow A \supset (B \supset C)$
- Kontrapozíció: $A \supset B \Leftrightarrow \neg B \supset \neg A$
- Öndisztributivitás: $A \supset (B \supset C) \Leftrightarrow (A \supset B) \supset (A \supset C)$
- Esetszétválasztás: $(A \vee B) \supset C \Leftrightarrow (A \supset C) \wedge (B \supset C)$

Logikai műveletek egymással való kifejezhetősége

- $A \supset B \Leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$
- $\boxed{A \supset B \Leftrightarrow (\neg A \vee B)}$
- $A \wedge B \Leftrightarrow \neg(A \supset \neg B)$
- $A \vee B \Leftrightarrow (\neg A \supset B)$
- $A \vee B \Leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$
- $A \wedge B \Leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)$
- $A \equiv B \Leftrightarrow (A \supset B) \wedge (B \supset A)$

8.I.5. Az

$$(1)\ \neg(X \wedge Y \supset Z \vee U) \quad (2)\ \neg X \vee \neg Y \vee Z \vee U \quad (3)\ X \wedge Y \wedge (\neg Z \vee \neg U)$$

formulákra mely állítások igazak? Válaszát röviden indokolja!

(a) (1) és (2) ekvivalensek.

(b) (1) és (3) ekvivalensek.

(c) Páronként bármely kettő ekvivalens egymással.

(d) Nincs a felsoroltak között ekvivalens pár.

8.I.6. Igazoljuk az ítéletlogikai ekvivalenciák segítségével, hogy az alábbi formulák logikai törvények!

(a) $\neg(X \supset Y) \supset X$

(b) $(X \wedge Y) \supset (X \supset Y)$

(c) $((X \supset Y) \supset X) \supset (X \vee Y)$

Ki lehet fejezni ezeket egyetlen művelettel?

Igen: A nand vagy nor önmagában is elegendő.

Például:

Fejezzük ki $\wedge$-t nand segítségével:

- $\boxed{A \wedge B} \Leftrightarrow \neg\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg(A \text{ nand } B)$

$\Leftrightarrow \neg((A \text{ nand } B) \wedge (A \text{ nand } B)) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \boxed{(A \text{ nand } B) \text{ nand } (A \text{ nand } B)}$

- $\boxed{\neg A} \Leftrightarrow \neg(A \wedge A) \Leftrightarrow \boxed{A \text{ nand } A}$

Melyik lépés miért jogos?

$\neg\neg A \Leftrightarrow A$

$A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$, $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$ és $A \equiv B \Leftrightarrow B \equiv A$

$A \wedge (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$, $A \vee (B \vee C) \Leftrightarrow (A \vee B) \vee C$ és $A \equiv (B \equiv C) \Leftrightarrow (A \equiv B) \equiv C$

$A \wedge A \Leftrightarrow A$ és $A \vee A \Leftrightarrow A$

$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

$A \wedge (B \vee A) \Leftrightarrow A$ és $A \vee (B \wedge A) \Leftrightarrow A$

$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$ és $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

8.I.7. Vezessük be a következő jelölést (Peirce vonás):

$$A \circ B \leftrightharpoons \neg A \wedge \neg B.$$

A bevezetett $\circ$ összekötő jel neve „sem-sem”, $A \circ B$ jelentése: „sem A, sem B”. Fejezzük ki a $\neg$, $\vee$, $\wedge$ logikai összekötő jeleket a $\circ$ jel segítségével!

Másik példa

Kielégíthető?

$(p \vee q) \wedge (\neg p \wedge \neg q)$

$$(p \vee q) \wedge (\neg p \wedge \neg q)$$
$$\downarrow$$
$$p \vee q, \neg p \wedge \neg q$$
$$\downarrow$$
$$p \vee q, \neg p, \neg q$$
$$\swarrow \qquad \searrow$$
$$\begin{array}{cc} p, \neg p, \neg q & q, \neg p, \neg q \\ \text{zárt} & \text{zárt} \end{array}$$

Kielégíthető, ha $\{p, \neg p, \neg q\}$ vagy $\{q, \neg p, \neg q\}$ kielégíthető.

Milyen szabályok szerint konstruáltuk a táblázatot?

α	α_1	α_2	β	β_1	β_2
$\neg\neg A_1$	A_1				
$A_1 \wedge A_2$	A_1	A_2	$\neg(B_1 \wedge B_2)$	$\neg B_1$	$\neg B_2$
$\neg(A_1 \vee A_2)$	$\neg A_1$	$\neg A_2$	$B_1 \vee B_2$	B_1	B_2
$\neg(A_1 \supset A_2)$	A_1	$\neg A_2$	$B_1 \supset B_2$	$\neg B_1$	B_2

- $\boxed{\alpha}$ típusú formulák esetén bővítettük a formulahalmazt
- $\boxed{\beta}$ típusú formulák esetén elágaztunk, és alternatívákkal bővítettük a formulahalmazt
- A leveleket megjelöltük ~~[illegible]~~ (nyitott / zárt)

A tábla konstrukciója precízebben
(algoritmus)

<u>Bemenet</u>: Φ formula, <u>Kimenet</u>: $\mathcal{T}$ szemantikus tábla (minden levele ~~megcáfolva~~ megjelölve)

- Kezdetben $\mathcal{T}$-nek egy gyökér csúcsa van, címkéje $\{\Phi\}$
- Válasszunk egy l meg nem jelölt levelet, $U(l)$ a címke formulahalmaz — Hogyan?
  - Ha $U(l)$ literálokból áll csak, jelöljük meg.
  - Ha $A \in U(l)$ nem literál:
    - Ha A α típusú formula, α_1, α_2 részeivel: $\longrightarrow$

      $l,\ U(l)$

      $l',\ U(l)-\{A\}\cup\{\alpha_1,\alpha_2\}$

    - Ha A β típusú formula, β_1, β_2 részeivel: $\longrightarrow$

      $l,\ U(l)$

      $U(l)-\{B\}\cup\{\beta_1\}$ | $U(l)-\{B\}\cup\{\beta_2\}$

A tábla konstrukciója precízebben
(algoritmus)

Bemenet: Φ formula, **Kimenet**: T szemantikus tábla (minden levele ~~[illegible]~~ megjelölve)

- Kezdetben T-nek egy gyökér csúcsa ... (Φ)

$$\begin{array}{ccc}
 & (p\vee q)\wedge(\neg p\wedge\neg q) & \\
 & \downarrow & \\
 & p\vee q, \neg p\wedge\neg q & \\
 & \downarrow & \\
 & p\vee q, \neg p, \neg q & \\
 \swarrow & & \searrow \\
p, \neg p, \neg q & & q, \neg p, \neg q
\end{array}$$

- Vála... levelet
  U(l) ...

Hogyan?

  - Ha ..., jelöljük meg.
  - Ha ...

α_1, α_2 szerint:

$$\begin{array}{l}
\bullet\ l,\ U(l) \\
\ \ | \\
\bullet\ l',\ U(l)-\{A\}\cup\{\alpha_1,\alpha_2\}
\end{array}$$

– Ha A β típusú formula, β_1, β_2 szerint:

$$\begin{array}{ccc}
 & \bullet\ l, U(l) & \\
 \swarrow & & \searrow \\
U(l)-\{B\}\cup\{\beta_1\} & & U(l)-\{B\}\cup\{\beta_2\}
\end{array}$$

α	α_1	α_2	β	β_1	β_2
$\neg\neg A_1$	A_1				
$A_1 \wedge A_2$	A_1	A_2	$\neg(B_1 \wedge B_2)$	$\neg B_1$	$\neg B_2$
$\neg(A_1 \vee A_2)$	$\neg A_1$	$\neg A_2$	$B_1 \vee B_2$	B_1	B_2
$\neg(A_1 \supset A_2)$	A_1	$\neg A_2$	$B_1 \supset B_2$	$\neg B_1$	B_2

2.7

Igazoljuk: $\models (A \supset B) \vee (B \supset C)$

2.9

Igazoljuk: $(A \wedge B) \supset C \models (A \supset C) \vee (B \supset C)$

8.1.6. Igazoljuk az ~~ítéletlogikai ekvivalenciák~~ segítségével, hogy az alábbi formulák logikai törvények!

(c) $((X \supset Y) \supset X) \supset (X \vee Y)$

Szemantikus tábla segítségével igazoljuk.

α	α_1	α_2	β	β_1	β_2
$\neg\neg A_1$	A_1				
$A_1 \wedge A_2$	A_1	A_2	$\neg(B_1 \wedge B_2)$	$\neg B_1$	$\neg B_2$
$\neg(A_1 \vee A_2)$	$\neg A_1$	$\neg A_2$	$B_1 \vee B_2$	B_1	B_2
$\neg(A_1 \supset A_2)$	A_1	$\neg A_2$	$B_1 \supset B_2$	$\neg B_1$	B_2

7.I.23. Ellenőrizzük, hogy az alábbi következtetések helyesek-e!

(b) Premisszák:

Ha a 2 prímszám, akkor a 2 a legkisebb prímszám. Ha a 2 a legkisebb prímszám, akkor az 1 nem prímszám. Az 1 nem prímszám.

Konklúzió:

Tehát a 2 prímszám.

7.I.21. Döntsük el, hogy az alábbi következményrelációk fennállnak-e!

(a) $X \supset \neg Y \vDash X \supset (Y \supset Z)$

(b) $\neg X \vee Y, Z \supset \neg Y \vDash X \supset \neg Z$

(c) $(X \vee Y) \supset (Z \wedge U), (U \vee V) \supset W \vDash X \supset W$

(d) $X \supset Y, \neg Z \supset \neg Y, \neg Z \vee \neg U \vDash U \supset \neg X$