Alkalmazott matematika
Labor

Baran Ágnes

Lineáris programozás

1. feladat

Oldjuk meg grafikus úton az alábbi feladatot!

Egy bútoripari vállalkozás kétféle bútort gyárt: tálalószekrényt és komódot. Egy tálalószekrény előállításához 2 egység faanyagra, 1 egység lakkra és 1 egység üvegre, míg egy komód előállításához 1 egység faanyagra és 1 egység lakkra van szükség. Egy tálalószekrényt 30 ezer, egy komódot 20 ezer Ft-ért lehet eladni. Határozza meg a maximális bevételt biztosító gyártási tervet, ha 100 egység faanyag, 80 egység lakk és 40 egység üveg áll rendelkezésre!

2. feladat

Oldja meg grafikus úton az alábbi feladatot!

Egy édesipari vállalatnál kétféle túródesszertet (natúr és kakaós) gyártanak. Egy egység natúr desszert előállításához 20 egység édesített túróra és 50 egység tejszínre van szükség, míg egy egység kakaós desszerthez 40 egység édesített túróra, 20 egység tejszínre és 2 egység kakaóra. A kakaós desszertet 300 Ft/egység, a natúrt 190 Ft/egység áron lehet értékesíteni, az előállítási költségük 100 Ft/egység (kakaós) és 90 Ft/egység (natúr). Milyen gyártási arány mellett érhető el a maximális nyereség, ha 280 egység édesített túró, 300 egység tejszín és 12 egység kakaó áll rendelkezésre?

3. feladat

Oldja meg grafikus úton az alábbi feladatokat!

(a)
$$\begin{array}{rcl} 4x_1 + 3x_2 & \leq & 12 \\ 3x_1 + x_2 & \leq & 3 \\ 10x_1 + 6x_2 & \leq & 15 \\ x_1, x_2 & \geq & 0 \\ \hline f(x) = x_1 + x_2 & \to & \max \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 & \leq & 7 \\ x_1 + 3x_2 & \leq & 15 \\ x_1 & \leq & 5 \\ x_1, x_2 & \geq & 0 \\ \hline f(x) = 8x_1 + 10x_2 & \to & \max \end{array}$$

Lineáris programozási feladatok Matlab-bal

A `linprog` függvényt használhatjuk.

```
x = linprog(c,A,b,Aeq,beq,lb,ub)
```

Megoldja az

$$\begin{array}{c} \begin{array}{rcl} Ax & \leq & b \\ A_{eq}x & = & b_{eq} \end{array} \\ l_b \leq x \leq u_b \\ \hline \min\limits_{x}\{c^T x\} \end{array}$$

feladatot.

1. példa (gyakorlatról)

Matlab segítségével oldjuk meg a következő feladatot.

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 & \leq & 20 \\ 3x_1 + 2x_2 & \leq & 30 \\ x_1, x_2 & \geq & 0 \\ \hline f(x) = x_1 + x_2 & \to & \max \end{array}$$

Definiáljuk az A mátrixot, a b és c vektorokat. Mivel a Matlab a célfüggvény minimumát keresi meg, ezért c vektorként a feladatban adott vektor (-1)-szeresét kell megadni.

```
>> A=[1 2; 3 2];
>> b=[20;30];
>> c=[-1 -1];
```

Hívjuk meg a linprog függvényt. A változóink mindegyikére a 0 alsó korlát adott, míg felső korlát nincs, azt állítsuk ∞-re (vagy hagyjuk el).

```
>> A=[1 2; 3 2];
>> b=[20;30];
>> c=[-1 -1];
>> x=linprog(c,A,b,[],[],[0;0],[inf,inf])

Optimal solution found.


x =

    5.0000
    7.5000
```

2. példa, (gyakorlatról)

Matlab segítségével oldjuk meg a következő feladatot.

$$
\begin{array}{rcl}
x_1 + 2x_2 & \leq & 40 \\
5x_1 + x_2 & \leq & 56 \\
x_1 & \leq & 10 \\
x_1, x_2 & \geq & 0 \\
\hline
f(x) = 10x_1 + 2x_2 & \to & \max
\end{array}
$$

Mielőtt megoldjuk a feladatot, Matlab segítségével ábrázoljuk a megengedett tartományt.

Ehhez a beépített `fimplicit` függvényt használhatjuk.

Az egyes korlátozó feltételeknek megfelelő félsíkokat határoló egyenesek egyenleteit rendezzük 0-ra, majd definiáljuk a megfelelő függvényeket.

Az `fimplicit` kétváltozós függvényeket vár bemenetként, ezen kívül megadhatjuk a tartományt, ahol az egyenest ábrázolni kívánjuk, illetve a színt, vonaltípust.

```
c1=@(x,y) x+2*y-40;
c2=@(x,y) 5*x+y-56;
c3=@(x,y) x-10;
figure; fimplicit(c1,[0,20,0,30],'b')
hold on; fimplicit(c2,[0,20,0,30],'r')
fimplicit(c3,[0,20,0,30],'g')
```

Arról, hogy az egyes egyenesek által meghatározott két félsík közül melyik a megfelelő, a szokásos módon (pl. a (0.0) pont behelyettesítésével) győződhetünk meg.

Ha látni szeretnénk a célfüggvény meredekségét is, akkor valamilyen c_0 érték esetén rajzoltassuk ki az $f(x) - c_0 = 0$ egyenest is. Pl. $c_0 = 80$-nal:

```
cfv=@(x,y) 10*x+2*y-80;
fimplicit(cfv,[0,20,0,30],'k--')
```

Térjünk vissza a feladat megoldására!

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 & \leq & 40 \\ 5x_1 + x_2 & \leq & 56 \\ x_1 \quad\quad & \leq & 10 \\ x_1, x_2 & \geq & 0 \\ \hline f(x) = 10x_1 + 2x_2 & \to & \max \end{array}$$

Matlab-bal:

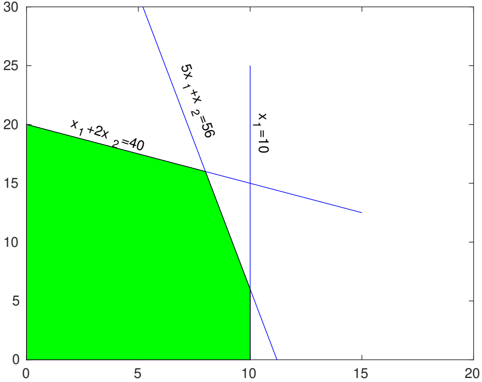
```
>> A=[1 2; 5 1; 1 0];
>> b=[40; 56; 10];
>> c=[-10; -2];
>> [x,fval]=linprog(c,A,b,[],[],[0;0],[inf,inf])
```

Ha a `linprog` függvényt két output változóval hívjuk, akkor a célfüggvény optimális értékét is megkapjuk (ami (-1)-szerese az eredeti feladatunkban szereplő értéknek)

```
>> A=[1 2; 5 1; 1 0];
>> b=[40; 56; 10];
>> c=[-10; -2];
>> [x,fval]=linprog(c,A,b,[],[],[0;0],[inf,inf])

Optimal solution found.

x =
   10.0000
    6.0000

fval =
 -112.0000
```

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 &\leq 40 \\
5x_1 + x_2 &\leq 56 \\
x_1 \qquad &\leq 10 \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Az $x = (10, 6)^T$ megoldás rajta van a 2. és 3. tartomány peremén, de az 1.-nek a belsejében van $\Longrightarrow$ ilyen gyártás mellett a 2. és 3. nyersanyagot teljesen elhasználjuk, az 1.- nem.



Mennyi nyersanyag marad?

```
>> b-A*x
ans =
   18.0000
   -0.0000
   -0.0000
```

Ha lehetőségünk van valamelyik nyersanyagkészletet bővíteni, akkor melyiket érdemes?

```
[x,fval,~,~,lambda]=linprog(c,A,b,[],[],[0;0])
```

Ekkor a `lambda` struktúra mezőin találjuk a nyersanyagok ú.n. árnyékárait:

```
lambda.ineqlin
ans =
         0
    2.0000
         0
```

Ez megadja, hogy az egyes nyersanyagokból 1 egységnyit beszerezve még mennyivel növelhetjük a célfüggvény értékét.

$\Longrightarrow$ csak a második nyersanyagkészletet érdemes most bővíteni. (Természetesen a bővítés csak bizonyos határok között hozza ezt az eredményt.)

3. példa (gyakorlatról), folytatás

Oldjuk meg Matlab-bal a következő feladatot.

$$\begin{array}{rcl} -2x_1 + x_2 & \leq & 8 \\ x_1 - 2x_2 & \leq & 12 \\ x_1, x_2 & \geq & 0 \\ \hline f(x) = 2x_1 + x_2 & \to & \max \end{array}$$

```
>> A=[-2 1; 1 -2];
>> b=[8; 12];
>> c=[-2; -1];
>> [x,fval]=linprog(c,A,b,[],[],[0;0],[inf,inf])
```

```
>> A=[-2 1; 1 -2];
>> b=[8; 12];
>> c=[-2; -1];
>> [x,fval]=linprog(c,A,b,[],[],[0;0],[inf,inf])

Problem is unbounded.
x =
     []
fval =
     []
```

Ahogy azt a grafikus és szimplex módszerrel történő megoldásnál is láttuk, a célfüggvény a megadott tartományon nem korlátos.

4. feladat

Oldjuk meg az 1.-3. feladatokat Matlab-bal.

5. feladat

Egy irodába irattartó szekrényeket szeretnének vásárolni. Kétféle típus kapható, A és B. Az A típusú alapterülete 0.6 m^2, 0.8 m^3 iratot lehet elhelyezni benne, és 10000 Ft-ba kerül. A B típusú 20000 Ft-ba kerül, 0.8 m^2 az alapterülete és 1.2 m^3 irat tárolására alkalmas. Melyik szekrényből hányat vásároljunk, ha a tárolókapacitást szeretnénk maximalizálni, de nem költhetünk 140000 Ft-nál többet és nem akarunk 7.2 m^2 területnél többet felhasználni a szekrények felállításával.
Írja fel a feladat modelljét, oldja meg grafikusan, majd Matlab segítségével.

6. feladat

Egy bútorüzlet tulajdonosa egy kisvállalkozástól szeretne összeillő foteleket és kanapékat rendelni. Ahhoz, hogy a vállalkozás a kialkudott áron szállítsa a termékeket összesen legalább 10 darabot kell rendelnie, de a boltban, illetve a raktárában nem tud 60 m^2-nél többet felszabatítani ezeknek a bútoroknak a tárolására. Egy fotel tárolására 1 m^2, egy kanapé tárolására 3 m^2 hely szükséges. Az üzleti tapasztalatai azt mutatják, hogy fotelből legfeljebb annyit érdemes rendelni, mint kanapéból. Egy fotel beszerzési ára 100 Euró, és 130 Euróért tudja eladni, míg a kanapét 200 Euróért szerzi be és 290-ért adja el. Melyikből mennyit rendeljen, ha maximalizálni akarja a hasznot?
Írja fel a feladat modelljét, oldja meg grafikusan, majd Matlab segítségével.

7. feladat

Matlab segítségével oldjuk meg a következő feladatot.
Egy konzervgyárnak 2 telephelye van és 3 termelőtől szerzi be a gyümölcsöket. Az egyes termelők a lenti mennyiségben képesek gyümölcsöt eladni, a megadott egységáron. Tonnánkénti szállítási költségeket (Euróban) a második táblázat mutatja.

T1	200 tonna	11 Euró/tonna
T2	310 tonna	10 Euró/tonna
T3	420 tonna	9 Euró/tonna

	I. telep	II. telep
T1	3	3.5
T2	2	2.5
T3	6	4

Az egyes telephelyek maximális kapacitása és a feldolgozás költsége:

	I. telep	II. telep
kapacitás	460 tonna	560 tonna
költség	26 Euró/tonna	21 Euró/tonna

A gyümölcskonzerv 50 Euró/tonna áron értékesíthető. Készítse el a maximális hasznot hozó termelési tervet!

8. feladat

Oldjuk meg Matlab-bal az alábbi feladatokat!

$$
\begin{array}{rcl}
x_2 \qquad + x_4 & = & 15 \\
x_3 + x_4 & = & 20 \\
x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad & \leq & 50 \\
4x_1 - x_2 \qquad + x_4 & \leq & 60 \\
x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0 \\
\hline
f(x) = x_1 + 2x_3 - 5x_4 & \to & \max
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
3x_1 + 2x_2 & \geq & 60 \\
x_1 - x_2 & \geq & 1 \\
x_1 \qquad & \leq & 10 \\
x_1, x_2 & \geq & 0 \\
\hline
\multicolumn{3}{c}{f(x) = x_1 + x_2 \to \max}
\end{array}
$$

9. feladat

Oldja meg az alábbi lineáris programozási feladatot!

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + 2x_3 & \leq & 5 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 & \geq & 2 \\ x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \\ \hline \multicolumn{3}{c}{x_1 + x_2 + 3x_3 \to \max} \end{array}$$

10. feladat

Oldja meg az alábbi lineáris programozási feladatot.

$$\begin{array}{rcl} 4x_1 + x_2 & \geq & 4 \\ x_1 + x_2 & \geq & 2 \\ 4x_1 + 3x_2 & \leq & 12 \\ x_1, x_2 & \geq & 0 \\ \hline \multicolumn{3}{c}{2x_1 + x_2 \to \max} \end{array}$$

11. feladat

Oldja meg grafikusan, illetve Matlab-bal az alábbi feladatot!

$$\begin{array}{rcl} 3x_1 + 2x_2 & \geq & 6 \\ -x_1 + x_2 & \leq & 4 \\ 5x_1 + 8x_2 & \leq & 40 \\ x_1 - 2x_2 & \leq & 4 \\ x_1, x_2 & \geq & 0 \\ \hline f(x) = 2x_1 + x_2 & \to & \max \end{array}$$

12. feladat

Oldja meg az előző feladatot az alábbi célfüggvényekkel is!

(a) $10x_1 + 16x_2 \to \max$

(b) $10x_1 + 16x_2 \to \min$

(c) $10x_1 - 5x_2 \to \min$

13. feladat

Grafikus úton, illetve Matlab segítségével oldja meg az alábbi feladatot!

Egy állattartó telepen az állatok etetésére kétféle (A és B jelű) tápot használnak. A tápok négyféle alapanyagot (I., II., III., IV.) tartalmaznak a táblázat szerinti arányban. Az állatoknak az egyes tápanyagokból a napi minimális szükséglete szintéén a táblázatban adott. Az A táp egységára 30 Ft/kg, míg a B tápé 40 Ft/kg. Határozzuk meg a leggazdaságosabb tápanyagösszetételt!

	A táp (1kg)	B táp (1kg)	Napi min. szükséglet
I.	0.2kg	0kg	0.2kg
II.	0kg	0.2kg	0.4kg
III.	0.1kg	0.2kg	1kg
IV.	0.7kg	0.6kg	4.2kg

14. feladat

Matlab segítségével oldja meg az alábbi feladatot!

Egy folyamatosan működő vegyi üzemben a hét minden napján 3 műszakban zajlik a termelés. Az egyes napokon az egyes műszakok ellátásához minimálisan szükséges létszám:

	H	K	Sze	Cs	P	Szo	V
Éjszaka	5	3	2	4	3	2	2
Délelőtt	7	8	9	5	7	2	5
Délután	9	10	10	7	11	2	2

Az üzemnek 60 dolgozója van, minden dolgozó 4 egymásutáni munkanap+ 3 egymásutáni szabadnap beosztás szerint dolgozik, és a 4 munkanapján végig ugyanabban a műszakban. Hogyan lehet beosztani a munkásokat úgy, hogy az együttes munkaerő igénybevételt minimalizáljuk?

Útmutató: a `linprog` függvény helyett az `intlinprog` függvényt használja, mely egész értékű megoldások keresésére alkalmas.
Az együtthatómátrix előállításához használhatja a `toeplitz` és `kron` függvényeket.

Szállítási feladat

15. feladat

Oldjuk meg az alábbi szállítási feladatokat, ha a raktárak készletei, a boltok igényei és a költségmátrix a táblázatban adottak.

	B_1	B_2	B_3	B_4	
R_1	8	2	4	7	30
R_2	7	4	3	2	40
R_3	2	5	5	9	50
	20	16	42	42	

	B_1	B_2	B_3	B_4	
R_1	3	1	7	4	250
R_2	2	6	5	9	350
R_3	8	3	3	2	400
	200	300	350	150	

16. feladat

Oldjuk meg az alábbi szállítási feladatokat, ha a raktárak készletei, a boltok igényei és a költségmátrix a táblázatban adottak.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
R_1	20	16	18	20	17	14
R_2	12	15	13	15	10	6
R_3	8	10	17	11	13	22
R_4	5	12	15	18	17	12
R_5	13	14	16	12	16	5
	15	21	7	13	3	

	B_1	B_2	B_3	B_4	
R_1	5	5	5	10	2
R_2	3	8	8	8	2
R_3	4	4	12	12	4
R_4	5	5	5	17	4
	3	3	3	3	

17. feladat

Oldjuk meg az alábbi szállítási feladatokat, ha a raktárak készletei, a boltok igényei és a költségmátrix a táblázatban adottak.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
R_1	6	3	9	5	2	9
R_2	11	7	5	10	5	17
R_3	9	5	9	6	8	11
R_4	5	4	10	8	6	10
	12	8	15	5	7	

	B_1	B_2	B_3	
R_1	40	10	20	80
R_2	15	20	10	50
R_3	20	25	30	60
	105	50	65	