Az informatika logikai alapjai
3. előadás

Vaszil György

vaszil.gyorgy@inf.unideb.hu

I. emelet 110-es szoba

A múlt órán: Állításlogika (más néven kijelentéslogika vagy nulladrendű logika)

- Állítások, nemlogikai és logikai konstansok
- Szintaxis:
  - Az állításlogika nyelve, formulák
- Szemantika:
  - A formulák jelentése, interpretáció, igazságtáblázat
- Szemantikai fogalmak:
  - modell
  - kielégíthetőség, kielégíthetetlenség
  - érvényesség

Elemi állításokat jelölő jelek és logikai jelek

és, vagy, nem, (,)

Je: Juli elmegy
Ém: Éva itt marad
Ée: Éva elmegy
Jv: Juli visszajön
ÉV: Éva visszajön

(Je és Ém) vagy ((Je és Ém) és (nem Jv) és (Év vagy (nem Év)))

Juli elmegy, és Éva itt marad, vagy mindketten elmennek, és Juli vissza sem jön, de Éva vagy visszajön, vagy nem.

A múlt órán: Állításlogika (más néven kijelentéslogika vagy nulladrendű logika)

- Állítások, nemlogikai és logikai konstansok
- Szintaxis:
  - Az állításlogika nyelve, formulák
- Szemantika:
  - A formulák jelentése, interpretáció, igazságtáblázat
- Szemantikai fogalmak:
  - modell
  - kielégíthetőség, kielégíthetetlenség
  - érvényesség

Szintaxis és szemantika

Hogyan kell a szöveget megformálni?

- jólformáltság
- grammatikai szabályok

Hogyan rendelünk jelentést a szöveghez?

Szintaxis: Az állításkalkulus nyelve

Klasszikus nulladrendű nyelv:

$\boxed{L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle}$ ahol

- $LC=\{\neg,\supset,\wedge,\vee,\equiv,(,)\}$ -**logikai konstansok** halmaza
- $Con \neq \emptyset$ -**nemlogikai konstansok** (állítás- vagy kijelentés-paraméterek) legfeljebb megszámlálhatóan végtelen halmaza
  $Con = \{p, q, r, \ldots\}$
  $LC \cap Con = \emptyset$
- Form -**formulák** (jól formált kifejezések)

LC véges. Mi az, hogy Con megsz.-ható végtelen?

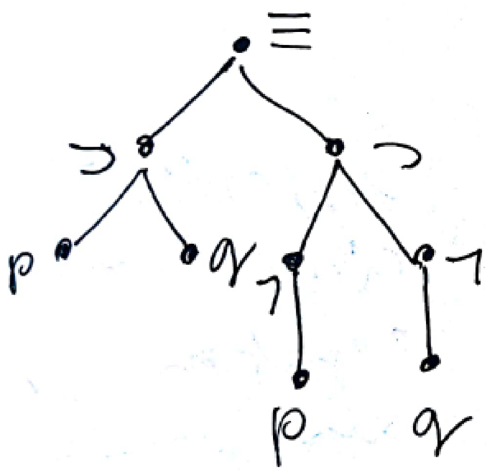
A formulák megformálásának szabályai (ez egy ún. induktív definíció)

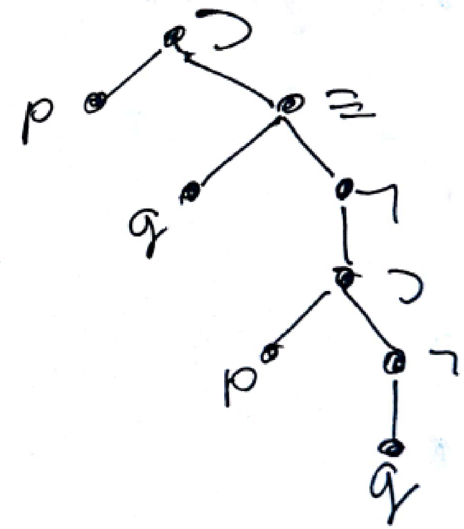
- Con⊆Form　　　　$p, q, r, \ldots$　　　←atomi formulák
- Ha A,B∈Form, akkor
  - $\neg(A) \in$ Form　　　　$\neg(p), \neg(q), \neg(r), \ldots$
  - $(A \wedge B) \in$ Form,　　　　$(p \wedge q), (\neg(r) \wedge p), \ldots$
  - $(A \vee B) \in$ Form,　　　　$(p \vee \neg(r)), ((\neg(r) \wedge p) \vee p), \ldots$
  - $(A \equiv B) \in$ Form　　　　$((\neg(r) \wedge p) \vee p) \equiv (\neg(r) \wedge p)), \ldots$
  - $(A \supset B) \in$ Form,　　　　$((((\neg(r) \wedge p) \supset p)) \supset (p \wedge q)), \ldots$

és így tovább, pl.:

$\ldots \neg ((((\neg(r) \wedge p) \supset p)) \supset (p \wedge q)), \quad ((\neg(r) \wedge p) \supset (p \vee \neg(r))), \ldots$

Zárójelek nélkül a sztring reprezentáció nem egyértelmű





$p \supset q \equiv \neg p \supset \neg q$

$((p \supset q) \equiv (\neg(p) \supset \neg(q)))$

$p \supset q \equiv \neg p \supset \neg q$

$(p \supset (q \equiv (\neg(p \supset \neg(q)))))$

Bizonyos zárójelek amit elhagyhatók — precedencia

Például: $(a+(b*c)) \leftrightarrow a+b*c$

$((a+b)*c) \leftrightarrow (a+b)*c$

Hiszen a műveletek precedenciájának sorrendje: $*, +$ (A $*$ precedenciája nagyobb)

A logikai operátorok precedenciája

Csökkenő sorrendben: $\neg, \wedge, \vee, \supset, \equiv$

Ezek szerint, például:

- $((p \supset q) \equiv (\neg(p) \supset \neg(q))) \iff p \supset q \equiv \neg p \supset \neg q$
- $(p \supset (q \equiv (\neg(p \supset \neg(q))))) \iff p \supset (q \equiv \neg(p \supset \neg q))$

Továbbá: (példák)

- $p \vee (q \wedge r) \vee s \iff p \vee q \wedge r \vee s$
- $((p \vee q) \wedge (r \vee s)) \iff (p \vee q) \wedge (r \vee s)$

Továbbá: (példák)

- $p \vee q \vee r$, $p \wedge q \wedge r$ -t így értjük: $(p \vee (q \vee r))$, $(p \wedge (q \wedge r))$

Ez mindegy

Ez fontos

- $p \supset q \supset r$ -t így értjük: $(p \supset (q \supset r))$

Két „argumentumú” operátorok, kettesével lehet őket végrehajtani

A múlt órán: Állításlogika (más néven kijelentéslogika vagy nulladrendű logika)

- Állítások, nemlogikai és logikai konstansok
- Szintaxis:
  - Az állításlogika nyelve, formulák
- Szemantika:
  - A formulák jelentése, interpretáció, igazságtáblázat
- Szemantikai fogalmak:
  - modell
  - kielégíthetőség, kielégíthetetlenség
  - érvényesség

Szintaxis és szemantika

Hogyan kell a szöveget megformálni?

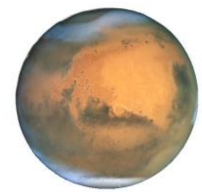
- jólformáltság
- grammatikai szabályok

Hogyan rendelünk jelentést a szöveghez?

Interpretáció

p: „a bolygón van víz"
q: „a bolygónak van élővilága"
r: „a bolygó a nap körül kering"

Föld



Mars

egyik interpretáció →

p : igaz
q : igaz
r : igaz

← másik interpretáció

p : hamis
q : hamis
r : igaz

pl.

$\boxed{p \wedge q \wedge r : \text{igaz}}$

$\boxed{p \wedge q \wedge r : \text{hamis}}$

Interpretáció: értelmezés („interpreter")

Interpretáció – Formálisan

$L^{(0)} = \langle LC, \langle Con, Form \rangle \rangle$ nulladrendű nyelv interpretációja olyan ϱ függvény, ami:

$\varrho : Con \to \{0,1\}$

ϱ logikai értékeket (igaz: 1, hamis: 0) rendel az atomi formuláknak (a nemlogikai konstansokhoz)

Mi volt a „ró” az előző példákban? (tábla)

Az iménti szemantikai szabályok táblázatba foglalva

$\lvert A \rvert_{\varrho}$	$\lvert B \rvert_{\varrho}$	$\lvert \neg A \rvert_{\varrho}$	$\lvert (A \supset B) \rvert_{\varrho}$	$\lvert (A \wedge B) \rvert_{\varrho}$	$\lvert (A \vee B) \rvert_{\varrho}$	$\lvert (A \equiv B) \rvert_{\varrho}$
0	0	1	1	0	0	1
0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	0	0	1	0
1	1	0	1	1	1	1

Még egy példa

Example 2.23 The computation of the truth value of $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$ for the interpretation $\mathscr{I}(p) = T$ and $\mathscr{I}(q) = F$ is:

$(p$	$\rightarrow$	$q)$	$\leftrightarrow$	$(\neg$	q	$\rightarrow$	$\neg$	$p)$
T		F			F			T
T		F		T	F			T
T		F		T	F		F	T
T		F		T	F	F	F	T
T	F	F		T	F	F	F	T
T	F	F	$\boxed{T}$	T	F	F	F	T

Azaz: Ebben az interpretációban a formula igaz

(Mások a jelölések: interpretáció, implikáció, ekvivalencia, F, T)
(Melyik melyik?)

A múlt órán: Állításlogika (más néven kijelentéslogika vagy nulladrendű logika)

- Állítások, nemlogikai és logikai konstansok
- Szintaxis:
  - Az állításlogika nyelve, formulák
- Szemantika:
  - A formulák jelentése, interpretáció, igazságtáblázat
- Szemantikai fogalmak:
  - modell
  - kielégíthetőség, kielégíthetetlenség
  - érvényesség

Formula és formulahalmaz modellje

Legyen adott: • $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ nulladrendű nyelv
• ϱ interpretáció

Ekkor:

• ϱ interpretáció az $A \in Form$ formula modellje, ha

$$\underline{\underline{|A|_\varrho = 1}}$$

• ϱ interpretáció az $\Gamma \subseteq Form$ formulahalmaz modellje, ha

$$\underline{\underline{|A|_\varrho = 1 \text{ minden } A \in \Gamma\text{-ra}}}$$

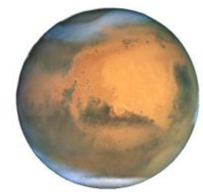
Interpretáció

p: „a bolygón van víz"

q: „a bolygónak van élővilága"

r: „a bolygó a nap körül kering"

Föld



Mars

egyik interpretáció →

p: igaz
q: igaz
r: igaz

modellje $p \wedge q \wedge r$ -nek

másik ← interpretáció

p: hamis
q: hamis
r: igaz

nem modellje $p \wedge q \wedge r$ -nek

pl.

$\boxed{p \wedge q \wedge r : \text{igaz}}$

$\boxed{p \wedge q \wedge r : \text{hamis}}$

Kielégíthetőség

(Adott: $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$, $A \in Form$, $\Gamma \subseteq Form$)

Egy A formula vagy egy Γ formulahalmaz kielégíthető, ha van modellje.

Megjegyzés.

- Az A fomula kielégíthető, ha van olyan interpretáció, amelyben a formula igaz.
- Kielégíthető formula: a formula lehet igaz, azaz nem logikai hamisság.
- Ha egy formulahalmaz kielégíthető, akkor minden eleme kielégíthető.
- Az előző állítás megfordítása nem igaz. Pl.: a {p,¬p} formulahalmaz minden eleme kielégíthető, de maga a formulahalmaz nem kielégíthető.

Megjegyzés.

- A Γ fomulahalmaz kielégíthető, ha van olyan interpretáció, amelyben a formulahalmaz minden eleme igaz.
- Kielégíthető formulahalmaz: nem tartalmaz logikai ellentmondást, azaz a formulahalmaz elemei lehetnek egyszerre igazak.

Kielégíthetetlenség

(Adott: $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$, $A \in Form$, $\Gamma \subseteq Form$)

Egy A formula vagy egy Γ formulahalmaz kielégíthetetlen, ha nem kielégíthető, azaz, ha nincs modellje.

Megjegyzés.

- Az A fomula kielégíthetetlen, ha nincs olyan interpretáció, amelyben a formula igaz, azaz minden interpretációban a formula hamis értékű.

Megjegyzés.

- A Γ formulahalmaz kielégíthetetlen, ha nincs olyan interpretáció, amelyben a formulahalmaz mindeneleme igaz.
- Kielégíthetetlen formulahalmaz: logikai ellentmondást tartalmaz, azaz a formulahalmaz elemei nem lehetnek egyszerre igazak

Érvényesség

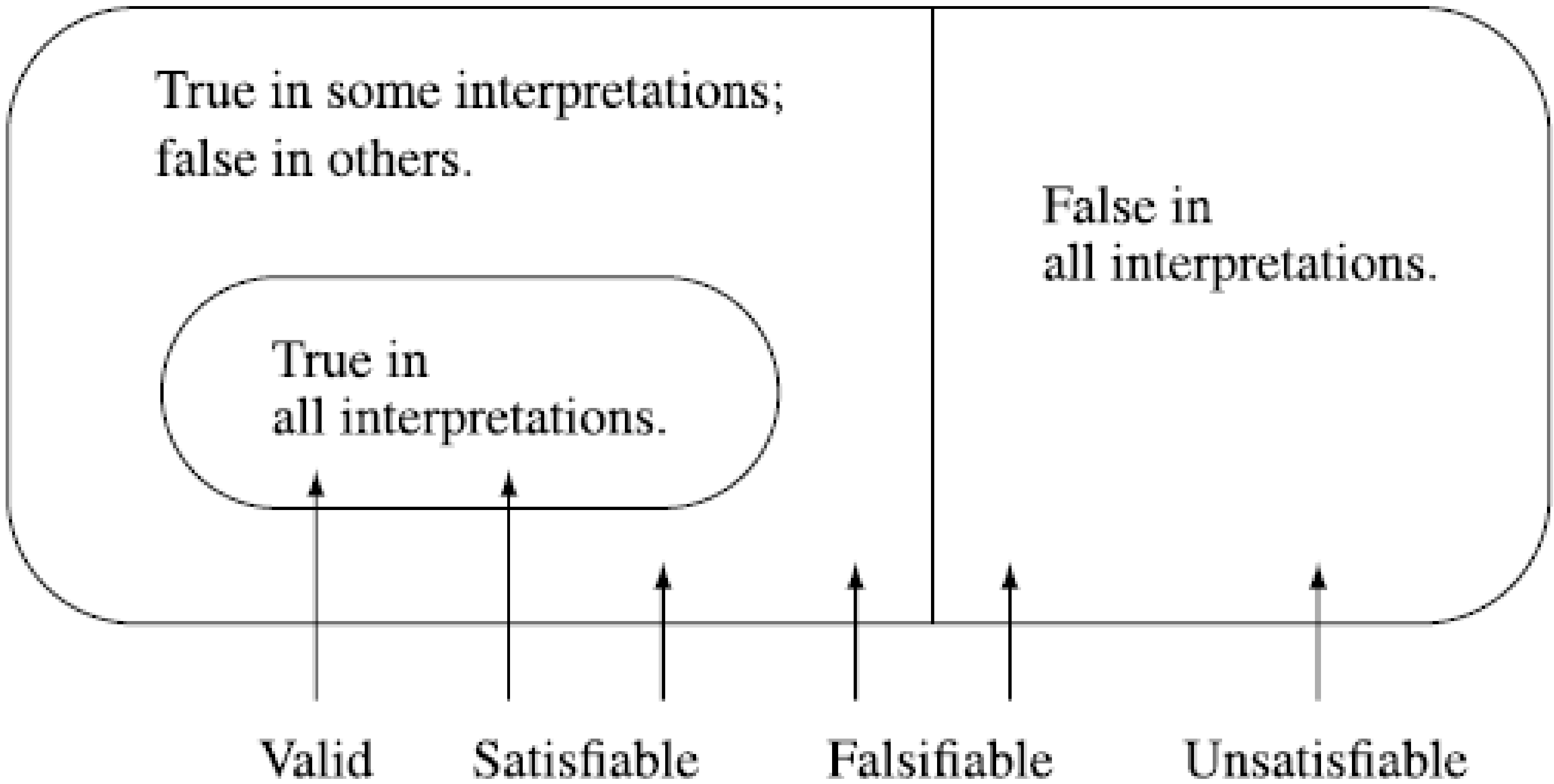
(Adott $L^{(0)}_F$ (LC, Con, Form), $A \in Form$)

Egy A formula érvényes, ha
minden interpretációban igaz, azaz
$|A|_g = 1$ minden $g: Con \to \{0,1\}$-re

Ha A formula érvényes, akkor A tautológia

logikai törvény ← másik elnevezés

Érvényes, kielégíthető, kielégíthetetlen formulák halmazai



érvényes
tautológia
logikai törvény

kielégíthető

cáfolható

nem kielégíthető
(kielégíthetetlen)
ellentmondás

A mai órán:
Állításlogika (más néven kijelentéslogika vagy nulladrendű logika)

- Szemantikai fogalmak:
  - modell
  - kielégíthetőség, kielégíthetetlenség, érvényesség
- Kielégíthető és kielégíthetetlen formulahalmazok tulajdonságai
- Logikai (szemantikai) következmény reláció
  - logikai ekvivalencia
- A logikai következményreláció tulajdonságai
  - érvényesség még egyszer
- Nyelvi „szintek”
  - **A logikai következményreláció és az implikáció**
  - **A logikai ekvivalencia és az ekvivalencia operátor**

A kielégíthetőségről

Tétel

Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ egy **nulladrendű nyelv**, $\Gamma \subseteq Form$ egy formulahalmaz.

Ha Γ **kielégíthető formulahalmaz** és $\Delta \subseteq \Gamma$, akkor Δ **kielégíthető formulahalmaz**.

Megjegyzés

- A tétel röviden úgy fogalmazható meg, hogy egy **kielégíthető formulahalmaz** minden részhalmaza kielégíthető.
- Szemléletes értelemben a tétel azt mondja ki, hogy a logikai ellentmondástalanság szűkítéssel nem rontható el.

Forrás: Mihálydeák Tamás, https://arato.inf.unideb.hu/mihalydeak.tamas/Logika_my_twt-treeview.html

A kielégíthetőségről

Tétel

Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ egy **nulladrendű nyelv**, $\Gamma \subseteq Form$ egy formulahalmaz.

Ha Γ **kielégíthető formulahalmaz** és $\Delta \subseteq \Gamma$, akkor Δ **kielégíthető formulahalmaz**.

Bizonyítás

Legyen $\Gamma \subseteq Form$ egy tetszőleges **kielégíthető formulahalmaz**, és $\Delta \subseteq \Gamma$!

Γ kielégíthetősége miatt a Γ formulahalmaznak van modellje, legyen Γ egy modellje a ϱ interpretáció.

ϱ tulajdonsága: Ha $A \in \Gamma$, akkor $|A|_\varrho = 1$

Mivel $\Delta \subseteq \Gamma$, ha $A \in \Delta$, akkor $A \in \Gamma$, s így $|A|_\varrho = 1$. Azaz a ϱ interpretáció modellje Δ-nak, tehát Δ kielégíthető.

A kielégíthetetlenségről

Tétel

Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ egy **nulladrendű nyelv**, és Γ, $\Delta \subseteq Form$ két formulahalmaz.

Ha Γ **kielégíthetetlen formulahalmaz**, és $\Gamma \subseteq \Delta$, akkor Δ **kielégíthetetelen formulahalmaz**.

Megjegyzés

- A tétel röviden úgy fogalmazható meg, hogy egy **kielégíthetetlen formulahalmaz** minden bővítése kielégíthetetlen.
- Szemléletes értelemben a tétel azt mondja ki, hogy a logikai ellentmondás bővítéssel nem szüntethető meg.

A kielégíthetetlenségről

Tétel

Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ egy **nulladrendű nyelv**, és Γ, $\Delta \subseteq Form$ két formulahalmaz.

Ha Γ **kielégíthetetlen formulahalmaz**, és $\Gamma \subseteq \Delta$, akkor Δ **kielégíthetetelen formulahalmaz**.

Bizonyítás

Indirekt bizonyítás:

Tegyük fel, hogy $\Gamma \subseteq Form$ tetszőleges **kielégíthetetlen formulahalmaz**, és $\Delta \subseteq Form$ olyan formulahalmaz, hogy $\Gamma \subseteq \Delta$.

Indirekt feltétel: Γ kielégíthetetlen, és Δ kielégíthető.

$\Gamma \subseteq \Delta$

A **kielégíthetőségre vonatkozó tétel** miatt Γ kielégíthető (mivel Δ kielégíthető), ez pedig ellentmondás.

(Használjuk, amit az előbb beláttunk)

A mai órán:
Állításlogika (más néven kijelentéslogika vagy nulladrendű logika)

- Szemantikai fogalmak:
  - modell
  - kielégíthetőség, kielégíthetetlenség, érvényesség
- Kielégíthető és kielégíthetetlen formulahalmazok tulajdonságai
- Logikai (szemantikai) következmény reláció
  - logikai ekvivalencia
- A logikai következményreláció tulajdonságai
  - érvényesség még egyszer
- Nyelvi „szintek”
  - **A logikai következményreláció és az implikáció**
  - **A logikai ekvivalencia és az ekvivalencia operátor**

Az első héten láttuk

Premisszák: Esik az eső.
Ha esik az eső, sáros az út.
Konklúzió: Sáros az út.
Premisszák: Ha dolgozom, elfáradok.
Dolgozom.
Konklúzió: Elfáradok.
Premisszák: Ha három lábon gyábokorsz, a Kálán Púgra nem tudsz menni.
Három lábon gyábokorsz.
Konklúzió: A Kálán Púgra nem tudsz menni.

Premisszák : Ha A akkor B.
A
Konklúzió : B

Az első héten láttuk

Mi is hát a helyes következtetés?

- A premisszák igazsága szükségszerűen vonja maga után a konklúzió igazságát

(lehetetlen olyan eset, hogy a premisszák igazak, a konklúzió hamis.)

Tisztázni kell viszont a „szükségszerű" és a „lehetetlen" jelentését

Logikai következmény – szemantikai következmény-reláció

(Adott: $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$, $A \in Form$, $B \in Form$, $\Gamma \subseteq Form$)

- $A \in Form$ formulának következménye a B formula, $A \vDash B$, ha A minden modellje B-nek is
- $\Gamma \subseteq Form$ formulahalmaznak következménye $B \in Form$, $\Gamma \vDash B$, ha Γ minden modellje B-nek is.

Az első héten láttuk

Vizsgáljuk meg ezt a példát is, az előzőek szellemében:

1. Feri idősebb mint Péter.
2. Ha Feri idősebb mint Péter, akkor Ferinek több gyertya van a tortáján.
3. Ferinek több gyertya van a tortáján.

Következtetések (!?)

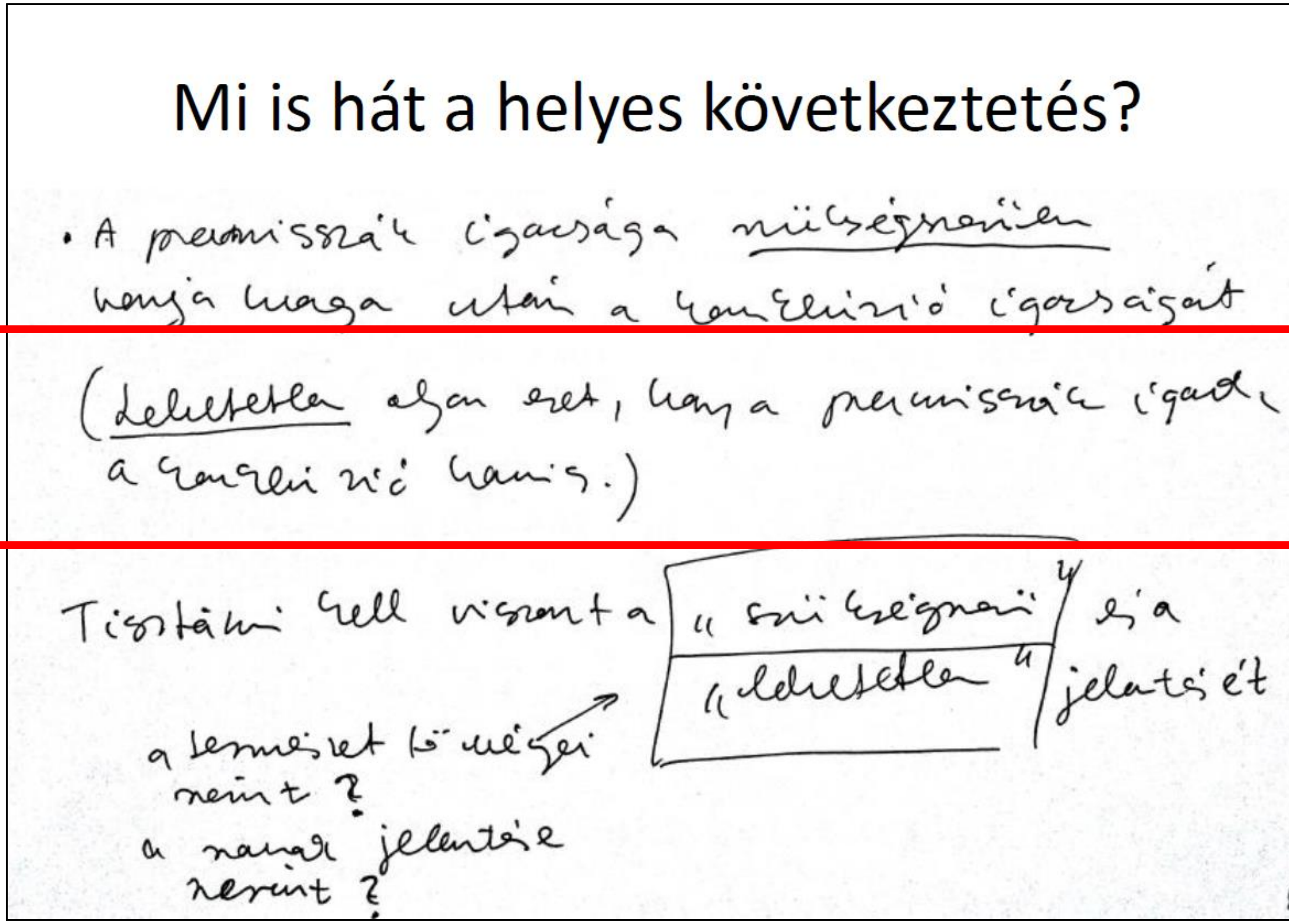
- Következik-e 1 és 2-ből 3? (Dedukció)

- Következik-e 2 és 3-ból 1?
- Következik-e 1 és 3-ból 2?

1. A
2. Ha A, akkor B
3. B

Problematikus azért: (A és B) –> (ha A akkor B) de más az "elvárásunk"

Ismét a korábbi dia ezzel kapcsolatban:



Hiszen a premisszák minden modellje olyan, hogy egyben modellje a konklúziónak is

Még egy példa

$\Gamma = \{p, \neg q\}$ $\quad A = (p \vee r) \wedge (\neg q \vee \neg r)$

Ekkor:

$\{p, \neg q\} \models A$

Hiszen:

Milyen $\mathcal{I}$ interpretáció mellett teljesül Γ összes eleme?

$\mathcal{I}$: $|p|_{\mathcal{I}} = 1$, $|q|_{\mathcal{I}} = 0$, $|r|_{\mathcal{I}}$ lehet 0 vagy 1

Ellenőrizzük! (tábla)

<u>Vagyis:</u>

$\Gamma = \{p, \neg q\}$ minden eleme igaz, ha:

φ:	p	q	r
①	1	0	0
②	1	0	1

<u>ekkor:</u>

	$($ p	$\vee$	r $)$	$\wedge$	$($ $\neg$	q	$\vee$	$\neg$	r $)$
①	1		0			0			0
	1	1	0		1	0		1	0
	1	1	0		1	0	1	1	0
	1	1	0	1	1	0	1	1	0
②	1	1	1			0			1
	1	1	1		1	0		0	1
	1	1	1		1	0	1	0	1
	1	1	1	1	1	0	1	0	1

Azaz: $\Gamma = \{p, \neg q\} \models A = (p \vee r) \wedge (\neg q \vee \neg r)$

A mai órán:
Állításlogika (más néven kijelentéslogika vagy nulladrendű logika)

- Szemantikai fogalmak:
  - modell
  - kielégíthetőség, kielégíthetetlenség,érvényesség
- Kielégíthető és kielégíthetetlen formulahalmazok tulajdonságai
- Logikai (szemantikai) következmény reláció
  - logikai ekvivalencia
- A logikai következményreláció tulajdonságai
  - érvényesség még egyszer
- Nyelvi „szintek”
  - **A logikai következményreláció és az implikáció**
  - **A logikai ekvivalencia és az ekvivalencia operátor**

Logikai ekvivalencia – szemantikai ekvivalencia

(Adott: $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$, $A, B \in Form$)

Két formula, A és B logikailag ekvivalens ha

első megfogalmazás

• minden interpretációban ugyanaz a logikai értékük:

$|A|_g = |B|_g$ minden $g : Con \to \{0, 1\}$ esetén

második megfogalmazás

• $A \vDash B$ és $B \vDash A$

jelölés: $A \Leftrightarrow B$

A mai órán:
Állításlogika (más néven kijelentéslogika vagy nulladrendű logika)

- Szemantikai fogalmak:
  - modell
  - kielégíthetőség, kielégíthetetlenség, érvényesség
- Kielégíthető és kielégíthetetlen formulahalmazok tulajdonságai
- Logikai (szemantikai) következmény reláció
  - logikai ekvivalencia
- A logikai következményreláció tulajdonságai
  - érvényesség még egyszer
- Nyelvi „szintek”
  - **A logikai következményreláció és az implikáció**
  - **A logikai ekvivalencia és az ekvivalencia operátor**

Az imént láttuk:

Logikai következmény – szemantikai következmény – reláció

(Adott: $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$, $A \in Form$, $B \in Form$, $\Gamma \subseteq Form$)

- $A \in Form$ formulának következménye a B formula, $A \vDash B$, ha A minden modellje modellje B-nek is

- $\Gamma \subseteq Form$ formulahalmaznak következménye $B \in Form$, $\Gamma \vDash B$, ha Γ minden modellje modellje B-nek is.

Ismét a korábbi dia:

Mi is hát a helyes következtetés?

- A premisszák igazsága szükségszerűen hozza maga után a konklúzió igazságát

(lehetetlen olyan eset, hogy a premisszák igazak, a konklúzió hamis.)

Tisztázni kell viszont a „szükségszerű” és a „lehetetlen” jelentését

a természet törvényei szerint?

a szavak jelentése szerint?

Hiszen a premisszák minden modellje olyan, hogy egyben modellje a konklúziónak is

A következményreláció tulajdonságai - 1

Adott $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$, $\Gamma \subseteq Form$, $A \in Form$.

Tétel:

$\boxed{\Gamma \vDash A}$ akkor és csak akkor, ha $\boxed{\Gamma \cup \{\neg A\} \text{ kielégíthetetlen.}}$

Bizonyítás: $(\Rightarrow)$

Tegyük fel, hogy Γ minden modellje modellje A-nak is, de $\Gamma \cup \{\neg A\}$ kielégíthető. Ekkor $\Gamma \cup \{\neg A\}$-nak van modellje. Legyen ez a ϱ interpretáció.

Ekkor: $|B|_\varrho = 1$ minden $B \in \Gamma$-ra, de $|\neg A|_\varrho = 1$, azaz $|A|_\varrho = 0$.

Vagyis Γ-nak van olyan modellje, ami nem modellje A-nak.

Ellentmondás.

Nézzük meg a gondolatmenet sémáját (tábla)

Adott $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$, $\Gamma \subseteq Form$, $A \in Form$.

Tétel:

$\Gamma \models A$ akkor és csak akkor, ha $\Gamma \cup \{\neg A\}$ kielégíthetetlen.

Bizonyítás: ($\Leftarrow$)

Tegyük fel indirekt, hogy $\Gamma \cup \{\neg A\}$ kielégíthetetlen, de $\Gamma \not\models A$, azaz Γ-nak van olyan modellje, ami A-nak nem modellje. Legyen ez a g interpretáció.

Erre $|B|_g = 1$ minden $B \in \Gamma$ esetén, de $|A|_g = 0$, azaz $|\neg A|_g = 1$.

Vagyis g kielégíti $\Gamma \cup \{\neg A\}$-t, azaz $\Gamma \cup \{\neg A\}$ kielégíthető.

Ez ellentmondás, azaz az indirekt feltétel hamis volt.

Érvényesség

(Adott $L^{(0)}_F(LC, Con, Form)$, $A \in Form$)

Egy A formula érvényes, ha

1. megfogalmazás
- minden interpretációban igaz, azaz $|A|_g = 1$ minden $g : Con \to \{0,1\}$-re

2. megfogalmazás
- $\emptyset \vDash A$ (Az üreshalmaz következménye.)

A következményreláció tulajdonságai - 2

Tétel

Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ \ egy **nulladrendű nyelv**, $A \in Form$.
Ha A **érvényes formula** $(\vDash A)$, akkor minden $\Gamma \subseteq Form$ formulahalmaz esetén $\Gamma \vDash A$.

Megjegyzés

A tétel szemléletesen úgy is megfogalmazható, hogy egy érvényes formula minden formulahalmaznak következménye.

A következményreláció tulajdonságai - 2

Tétel

Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle \backslash$ egy **nulladrendű nyelv**, $A \in Form$.
Ha A **érvényes formula** ($\vDash A$), akkor minden $\Gamma \subseteq Form$ formulahalmaz esetén $\Gamma \vDash A$.

Bizonyítás

Ha A érvényes formula, akkor $\emptyset \vDash A$.
Így $\emptyset \cup \{\neg A\}$ $(= \{\neg A\})$ kielégíthetetlen, s így a **kielégíthetetlenségre kimondott tétel** alapján ennek a halmaznak a bővítései is kielégíthetetlenek.
$\Gamma \cup \{\neg A\}$ bővítése $\{\neg A\}$-nak, így kielégíthetetlen, tehát $\Gamma \vDash A$.

A következményreláció tulajdonságai - 3

Tétel

Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ \ egy **nulladrendű nyelv** és $\Gamma \subseteq Form$ egy formulahalmaz..

Ha a Γ formulahalmaz kielégíthetetlen, akkor minden A formula esetén $\Gamma \vDash A$.

Megjegyzés

A tétel szemléletesen úgy is megfogalmazható, hogy egy kielégíthetetlen formulahalmaznak minden formula következménye.

Bizonyítás

A **már bizonyított tétel** szerint ha a Γ formulahalmaz kielégíthetetlen, akkor Γ minden bővítése is kielégíthetetlen.

$\Gamma \cup \{\neg A\}$ bővítése Γ-nak, így kielégíthetetlen, tehát $\Gamma \vDash A$.

(Ruzsa féle megjegyzések)

A mai órán:
Állításlogika (más néven kijelentéslogika vagy nulladrendű logika)

- Szemantikai fogalmak:
  - modell
  - kielégíthetőség, kielégíthetetlenség, érvényességéf
- Kielégíthető és kielégíthetetlen formulahalmazok tulajdonságai
- Logikai (szemantikai) következmény reláció
  - logikai ekvivalencia
- A logikai következményreláció tulajdonságai
  - Érvényesség még egyszer
- Nyelvi „szintek”
  - **A logikai következményreláció és az implikáció**
  - **A logikai ekvivalencia és az ekvivalencia operátor**

Az implikáció/kondicionális és a következményreláció kapcsolata

- Különböző „szintek”:
  - Az **implikáció (kondicionális)** logikai operátor, logikai formulákban jelenik meg, a **logikai formulák nyelvének** része
  - A **következményreláció** logikai formulák (formulahalmazok) közötti viszonyt ír le, nem a logikai formulák nyelvének, ha nem a **logikai formulákról beszélő „metanyelvnek”** a része

(papír 39)


VIGYÁZAT!
VIGYÁZAT!
HARAPÓS
KUTYA!
TÁBLA
JIM DAVIS 6-25
www.garfield.com
©2005 PAWS, INC. All Rights Reserved.
FURCSA.
Distributed by Universal Press Syndicate
VIGYÁZAT!
HARAPÓS
KUTYA!

Ezt szeretnénk belátni:

Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ egy **nulladrendű nyelv**, és $A, B \in Form$ két formula.

$A \vDash B$ akkor és csak akkor, ha $\vDash (A \supset B)$

Az implikáció és a következményreláció kapcsolata

Tétel (Dedukció tétel)

Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ egy **nulladrendű nyelv**, $\Gamma \subseteq Form$ egy formulahalmaz és $A, B \in Form$ két formula.

Ha $\Gamma \cup \{A\} \vDash B$, akkor $\Gamma \vDash (A \supset B)$.

Megjegyzés

$\Gamma \cup \{A\} \vDash B$ helyett gyakran használjuk a következő rövidebb írásmódot:

$\Gamma, A \vDash B$

Tétel (Dedukció tétel)

$\boxed{\text{Ha } \Gamma \cup \{A\} \vDash B, \text{ akkor } \Gamma \vDash (A \supset B)}$

Bizonyítás

Indirekt feltétel: Tegyük fel, hogy $\Gamma \cup \{A\} \vDash B$ teljesül, de $\Gamma \vDash (A \supset B)$ nem teljesül.

Így $\Gamma \cup \{\neg(A \supset B)\}$ **kielégíthető**, tehát van **modellje**. Legyen egy modellje a ϱ **interpretáció**!

A ϱ tulajdonságai:

1. Γ minden eleme igaz a ϱ interpretáció szerint.
2. $|\neg(A \supset B)|_\varrho = 1$

$|(A \supset B)|_\varrho = 0$, azaz $|A|_\varrho = 1$ és $|B|_\varrho = 0$. Így $|\neg B|_\varrho = 1$.

$\Gamma \cup \{A\} \cup \{\neg B\}$ formulahalmaz minden eleme igaz a ϱ interpretáció szerint, azaz a formulahalmaz **kielégíthető**, tehát $\Gamma \cup \{A\} \vDash B$ nem teljesül, ami ellentmondás.

Tétel (Dedukció tétel megfordítása)

Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ egy **nulladrendű nyelv**, $\Gamma \subseteq Form$ egy formulahalmaz és $A, B \in Form$ két formula.

Ha $\Gamma \vDash (A \supset B)$, akkor $\Gamma \cup \{A\} \vDash B$.

Bizonyítás

Ha $\Gamma \vDash (A \supset B)$, akkor $\Gamma \cup \{A\} \vDash B$.

Indirekt feltétel: Tegyük fel, hogy $\Gamma \vDash (A \supset B)$, és ugyanakkor $\Gamma \cup \{A\} \vDash B$ nem teljesül.

Így $\Gamma \cup \{A\} \cup \{\neg B\}$ **kielégíthető**, tehát van modellje. Legyen egy **modellje** a ϱ **interpretáció**!

A ϱ tulajdonságai:

- Γ minden eleme igaz a ϱ interpretáció szerint.
- $|A|_\varrho = 1$
- $|\neg B|_\varrho = 1$, így $|B|_\varrho = 0$

Így a ϱ interpretáció szerint $|(A \supset B)|_\varrho = 0$, következésképpen $|\neg(A \supset B)|_\varrho = 1$.

$\Gamma \cup \{\neg(A \supset B)\}$ formulahalmaz minden eleme igaz a ϱ interpretáció szerint, azaz a ϱ interpretációja modellje a formulahalmaznak, ami egyben azt is jelenti, hogy a formulahalmaz kielégíthető. Tehát $\Gamma \vDash (A \supset B)$ nem teljesül, ami ellentmond indirekt feltételünknek.

Az implikáció és a következményreláció kapcsolata

A dedukciótétel és megfordításának következménye:

Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ egy **nulladrendű nyelv**, és $A, B \in Form$ két formula.

$A \vDash B$ akkor és csak akkor, ha $\vDash (A \supset B)$

Bizonyítás

Alkalmazzuk a **dedukció tételt** és **megfordítását** abban az esetben, amikor $\Gamma = \emptyset$.

A mai órán:
Állításlogika (más néven kijelentéslogika vagy nulladrendű logika)

- Szemantikai fogalmak:
  - modell
  - kielégíthetőség, kielégíthetetlenség, érvényesség
- Kielégíthető és kielégíthetetlen formulahalmazok tulajdonságai
- Logikai (szemantikai) következmény reláció
  - logikai ekvivalencia
- A logikai következményreláció tulajdonságai
  - érvényesség
- Nyelvi „szintek”
  - **A logikai következményreláció és az implikáció**
  - **A logikai ekvivalencia és az ekvivalencia operátor**

Az (materiális) ekvivalencia és a logikai ekvivalencia kapcsolata

A dedukciótétel és megfordításának következménye:

Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ egy **nulladrendű nyelv** és $A, B \in Form$ két formula.

$A \Leftrightarrow B$ akkor és csak akkor, ha $\vDash (A \equiv B)$

Ez hogy jön ki?

Tétel (Metszet tétel)

Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ egy **nulladrendű nyelv**, Γ , $\Delta \subseteq Form$ két formulahalmaz és $A, B \in Form$ két formula.

Ha $\Delta \vDash A$, és $\Gamma \cup \{A\} \vDash B$ akkor $\Gamma \cup \Delta \vDash B$.

A „metszet” itt inkább „kimetszés” (``cut’’) – A-t „kivágjuk” a premisszák közül

Indirekt bizonyítás

$\boxed{\text{Ha } \Gamma \cup \{A\} \vDash B \text{ és } \Delta \vDash A\text{, akkor } \Gamma \cup \Delta \vDash B}$

Indirekt feltétel: Tegyük fel, hogy $\Gamma \cup \{A\} \vDash B$ és $\Delta \vDash A$, de $\Gamma \cup \Delta \vDash B$ nem teljesül.

Ekkor $\Gamma \cup \Delta \cup \{\neg B\}$ **kielégíthető** (a **következményreláció** 1. tulajdonsága miatt), azaz van modellje. Legyen a formulahalmaz egy modellje a ϱ interpretáció.

A ϱ interpretáció tulajdonságai:

1. Γ minden eleme igaz a ϱ interpretációban.
2. Δ minden eleme igaz a ϱ interpretációban.
3. $|\neg B|_{\varrho} = 1$

Mivel $\Delta \vDash A$ és Δ minden eleme igaz a ϱ interpretációban, $|A|_{\varrho} = 1$.

Következésképpen a $\Gamma \cup \{A\} \cup \{\neg B\}$ halmaz minden eleme igaz a ϱ interpretációban, ami azt jelenti, hogy a $\Gamma \cup \{A\} \cup \{\neg B\}$ formulahalmaz **kielégíthető**. Ekkor azonban a **következményreláció** 1. tulajdonsága miatt $\Gamma \cup \{A\} \vDash B$ nem teljesül. Ez pedig ellentmond indirekt feltételünknek.

A mai órán: Állításlogika (más néven kijelentéslogika vagy nulladrendű logika)

- Kielégíthető és kielégíthetetlen formulahalmazok tulajdonságai
- Logikai (szemantikai) következmény reláció
  - logikai ekvivalencia
- A logikai következményreláció tulajdonságai
  - Érvényesség még egyszer
- Nyelvi „szintek”
  - **A logikai következményreláció és az implikáció**
  - **A logikai ekvivalencia és az ekvivalencia operátor**

Egy korábbi példa még egyszer:

Vizsgáljuk meg ezt a példát is, az előzőek szellemében:

1. Ma kedd van.
2. Xéna keddenként miniszoknyában jár az órákra.
3. Xéna ma miniszoknyában van.

Következtetések (!?)

- Következik-e 1 és 2-ből 3? (Dedukció)
- Következik-e 2 és 3-ból 1?
- Következik-e 1 és 3-ból 2?

1. A
2. Ha A, akkor B
3. B

Írjuk fel a lehetséges interpretációkat és válaszoljuk meg a három kérdést (tábla)

Egy korábbi példa még egyszer:

Az előadáson megállapítottuk, hogy ez a példa problematikus: Formálisan, ha „A” igaz és „B” igaz, akkor „ha A akkor B” is igaz, noha a szöveges részben, a hétköznapi értelmezés szerint az 1. és a 3. állításból nem következik a 2. állítás. Azaz, a jobb oldali keretben lévő formalizáció nem jó, mert nem pontosan fedi le a bal oldali keretben lévő szöveg állításait. (Később látni fogjuk majd, hogyan küszöbölhető ki a probléma, ha elsőrendű nyelven formalizáljuk a bal oldali keretben lévő állításokat.)

előzőek

a A, akkor B

Következtetések (!?)

- Következik-e 1 és 2-ből 3? (Dedukció)
- Következik-e 2 és 3-ból 1?
- Következik-e 1 és 3-ból 2?

Írjuk fel a lehetséges interpretációkat és válaszoljuk meg a három kérdést (tábla)