Valós függvények differenciálszámítása II. rész

Elméleti áttekintés

1. Tétel (L'Hospital-szabály). *Legyen $D \subset \mathbb{R}$ nemüres, nyílt halmaz, $x_0 \in D$ és legyenek $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ olyan differenciálható függvények, hogy*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$$

és $g(x)\cdot g'(x) \neq 0$ teljesül az x_0 pont valamely környezetében. Ekkor, ha létezik a

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

határérték, akkor létezik a

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

határérték is, továbbá a két érték megegyezik.

2. Tétel (Taylor–tétel). *Legyen $[a, b] \subset \mathbb{R}$ valódi intervallum, $n \in \mathbb{N}$, $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ pedig egy olyan függvény, hogy az $f^{(k)}$ differenciálhányadosfüggvények folytonosak az $[a, b]$ intervallumon minden $k = 0, 1, \ldots, n-1$ esetén és létezik $f^{(n)}$. Ekkor tetszőleges $x, x_0 \in]a, b[$, $x \neq x_0$ esetén van olyan $\xi \in]a, b[$, hogy*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n$$

teljesül.

Feladatok

1. Feladat. *Alkalmazzuk a L'Hospital–szabályt a következő függvényhatárértékek kiszámítására.*

(a) $\lim_{x\to 2} \dfrac{\ln\left(\frac{x}{2}\right)}{x-2}$

(b) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\ln(x^2)}{x-1}$

(c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x}$

(d) $\lim_{x\to 0} \dfrac{2x-\sin(x)}{x^2}$

(e) $\lim_{x\to 0} \dfrac{5^x-7^x}{x}$

(f) $\lim_{x\to 0} \dfrac{2^{3x}-3^{4x}}{x^2}$

(g) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{tg}(7x)}{x}$

(h) $\lim_{x\to \pi} \dfrac{\sin(4x)}{\mathrm{tg}(5x)}$

(i) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{x^2}{2^x}$

(j) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{5x}{\ln(4x)}$

(k) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{2x^3-4x+5}{7x^3+5x-3}$

2. Feladat. *Számítsuk ki az alábbi határértékeket.*

(a)
$$\lim_{x\to a} \frac{x^m-a^m}{x^n-a^n}$$

(b)
$$\lim_{x\to 1} \frac{mx^{m+1}-(m+1)x^m+1}{x^2-2x+1}$$

(c)
$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^3-2x^2+2x-1}$$

(d)
$$\lim_{x\to 5} \frac{x^3-8x^2+17x-10}{x^4-5x^3-2x^2+11x-5}$$

(e)
$$\lim_{x\to -1} \frac{x^3-5x^2+2x+8}{x^4-2x^3-16x^2+2x+15}$$

(f)
$$\lim_{x\to 2} \frac{x^4-5x^2+4}{x^4-3x^3-4}$$

(g)
$$\lim_{x\to -3} \frac{x^4+3x^3-7x^2-27x-18}{x^4-3x^3-7x^2+27x-18}$$

(h)
$$\lim_{x\to c} \frac{ax^2-2acx+ac^2}{bx^2-2bcx+bc^2}$$

(i)
$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-x^2-8x+12}{x^3-4x^2+x+6}$$

(j)
$$\lim_{x\to a} \frac{\sqrt{a+x}-\sqrt{2a}}{\sqrt{x+2a}-\sqrt{3a}}$$

(k)
$$\lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x^3-a^3}}{\sqrt{x-a}}$$

(l)

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{a}-\sqrt{a}-\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

(m)

$$\lim_{x\to a}\frac{a^x-b^x}{\ln(1-x)}$$

3. Feladat. *Számítsuk ki az alábbi határértékeket.*

(a)
$$\lim_{x\to a}\frac{a^n-x^n}{\ln(a^n)-\ln(x^n)}$$

(b)
$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x+\ln(x)}{1-\sqrt{2x-x^2}}$$

(c)
$$\lim_{x\to 1}\frac{x-(n+1)x^{n+1}+nx^{n+2}}{(1-x^2)}$$

(d)
$$\lim_{x\to 1}\frac{x^x-x}{1-x+\ln(x)}$$

(e)
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x\ln(1-x)}$$

(f)
$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin(x)}{x^3}$$

(g)
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-x\cos(x)}{\sin^3(x)}$$

(h)
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-\cos(x)+1}{\sin(x)+\cos(x)-1}$$

4. Feladat. *Számítsuk ki az alábbi határértékeket.*

(a)
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{\cos(x)\sin^2(x)}$$

(b)
$$\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-e^{-x})^2}{x^2\cos(x)}$$

(c)
$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}(a+x)-\mathrm{tg}(a-x)}{\mathrm{arctg}(a+x)-\mathrm{arctg}(a-x)}$$

(d)
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\mathrm{tg}(x))}{\ln(\mathrm{tg}(2x))}$$

(e)
$$\lim_{x\to 1}\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}$$

(f)
$$\lim_{x\to 1}\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln(x)}$$

(g)
$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sin^2(x)}-\frac{1}{x^2}$$

(h)
$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{x\mathrm{tg}(x)}$$

(i)
$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\ln(x+1)}-\frac{1}{x}$$

5. Feladat. *Számítsuk ki a következő függvények magasabbrendű deriváltjait.*

(a) $f(x)=3x^4+5x^3-2x^2-14$, $f^{(v)}(x)=?$;

(b) $f(x)=5x^3-4x^2+2x+200$, $f^{(iv)}(x)=?$;

(c) $f(x)=e^{bx}$, $f^{(n)}(x)=?$, *ahol* $n\in\mathbb{N}$;

(d) $f(x)=\sin(x)$, $f(x)=\cos(x)$, $f(x)=\sinh(x)$, $f(x)=\cosh(x)$, $f^{(n)}(x)=?$, *ahol* $n\in\mathbb{N}$.

(e) $f(x)=x(2x-1)^2(x+3)^3$, $f^{(6)}(x)$, $f^{(7)}(x)=?$;

(f) $f(x)=\sqrt{x}$, $f^{(10)}(x)=?$;

(g) $f(x)=x^2e^{2x}$, $f^{(20)}(x)=?$;

(h) $f(x)=x\sinh(x)$, $f^{(100)}(x)=?$;

(i) $f(x)=x\ln(x)$, $f^{(5)}(x)=?$;

(j) $f(x)=x^2\sin(2x)$, $f^{(50)}(x)=?$

6. Feladat. *Határozzuk meg az alábbi függvények tizedik deriváltját.*

(a)
$$\frac{1}{\sqrt{x}}$$

(b)
$$\sqrt[3]{x}$$

(c)
$$\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

(d) $\sqrt[3]{x^2}$

(e) $(a+bx)^{10}$

(f) $\dfrac{x}{a \pm bx}$

(g) $x\sqrt{a+bx}$

(h) $\dfrac{1}{a^2-b^2x^2}$

(i) $\dfrac{x}{a^2-b^2x^2}$

(j) $\left(a+\sqrt{bx}\right)^{10}$

(k) e^{a+bx}

(l) $e^{a^2+b^2x^2}$

(m) a^x

(n) $e^x x^{10}$

(o) $\ln(a+bx)$

(p) $\ln(a^2+b^2x^2)$

(q) $\sin(ax)$

(r) $\cos^{10}(x)$

7. Feladat. *Határozzuk meg az $y = x^2$ egyenletű függvény görbéjének azokat a pontjait, amelyekhez húzott érintők párhuzamosak az $y = 2x + 4$ egyenletű egyenessel.*

8. Feladat. *Határozzuk meg az $y = \sqrt[3]{x}$ függvény azon pontjait, amelyekhez húzott érintők párhuzamosak az $y = x+4$ egyenletű egyenessel. Írjuk fel az érintők egyenletét.*

9. Feladat. *Határozzuk meg az $xy = 8$ görbe azon pontjait, amelyekhez húzott érintők merőlegesek az $y = 3x + 2$ egyenletű egyenesre. Írjuk fel az egyenesek egyenletét.*

10. Feladat. *Írjuk fel az f függvény x_0 pont körüli n–edrendű Taylor–polinomját, ha*

(i) $f(x) = x^6 - 5x^5 + 2x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 6$, $x_0 = 2$, $n = 6$;

(ii) $f(x) = e^x$, $x_0 = 1$, $n = 10$;

(iii) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 2$, $n = 4$;

(iv) $f(x) = \ln(x)$, $x_0 = 2$, $n = 3$.