

## 12. Euklideszi terek

**12.1.** Határozza meg az  $a$  és  $b$  vektor belső szorzatát és a vektorok normáját.

$$a = (-1, 2, 1)^T, \quad b = (2, 2, -3)^T.$$

**12.2.** Határozza meg az  $a$  és  $b$  vektorok által bezárt szöget!

- (a)  $a^T = (2, 1), b^T = (1, 3),$
- (b)  $a^T = (3, \sqrt{3}), b^T = (2, 0),$
- (c)  $a^T = (1, 3, 1), b^T = (-4, -2, 0),$
- (d)  $a^T = (-2, 3, 4), b^T = (-6, -4, 2),$
- (e)  $a^T = (1, -2, 3), b^T = (2, 4, 2),$
- (f)  $a^T = (1, 1, 0), b^T = (1, 1, -\sqrt{2}),$
- (g)  $a^T = (0, -1, 0), b^T = (1, -\sqrt{3}, 0).$

**12.3.** Adja meg úgy  $\lambda$ -t, hogy az  $a$  vektor merőleges legyen  $b$ -re!

- (a)  $a^T = (1, 1), b^T = (-2, \lambda),$
- (b)  $a^T = (4, 2, 1), b^T = (-4, -2, \lambda),$
- (c)  $a^T = (1, 2, 1, 1), b^T = (-4, -2, 2, \lambda),$
- (d)  $a^T = (1, \lambda, \lambda), b^T = (-3, -2, \lambda),$

**12.4.** Írja fel azokat a vektorokat, amelyek  $\mathbb{R}^2$ -ben ortogonálisak az  $x = (-1, 2)^T$  vektorra!

12.5. Írja fel azokat a vektorokat, amelyek  $\mathbb{R}^3$ -ban ortogonálisak az  $x = (-1, 2, 4)^T$  vektorra!

12.6. Írja fel azokat a vektorokat, amelyek  $\mathbb{R}^3$ -ban ortogonálisak az  $x = (-2, 3, 4)^T$  és az  $y = (1, -2, 1)^T$  vektorra is!

**12.7.** Mutassa meg, hogy az alábbi mátrixok oszlopvektorai tetszőleges  $\vartheta$  szög esetén ortogonális vektorrendszert alkotnak!

$$A = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta & 0 \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & 0 & -\sin \vartheta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \vartheta & 0 & \cos \vartheta \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ 0 & \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix},$$

**12.8.** Vizsgálja meg az előző feladatban adott mátrixok esetén mivel egyenlő  $A^T A$ ,  $B^T B$  és  $C^T C$ .

**12.9.** Adja meg azt a vektort, melynek iránya megegyezik az  $x = (-1, 2, 1)^T$  vektor irányával, de normája 1.

**12.10.** Legyen  $Q$  egy olyan mátrix, melynek oszlopvektorai ortonormált vektorrendszert alkotnak. Mivel egyenlő  $Q^{-1}$ ?