Riemann-integrál

A gyakorlat célja

Ennek a gyakorlatnak a célja a Riemann-integrál témakörében tanult definícióknak és tételeknek az elmélyítése és begyakorlása. Az alábbiakban a legfontosabb feladatok részletes megoldása található. A meg nem oldott feladatok házi feladatnak tekintendőek.

Felhasznált elméleti anyag

A feladatok megoldásához szükséges elméleti állítások

(i) Newton–Leibniz formula (10.4.3 Tétel)

(ii) Parciális integrálás tétele Riemann-integrálra (10.4.4 Tétel)

(iii) Helyettesítéses integrálás tétele Riemann-integrálra (10.4.5 Tétel)

(iv) Improprius integrálok konvergenciája/divergenciája (10.5.1–10.5.3 Definíció)

(v) Összehasonlító kritérium I. és II. improprius integrálra (10.5.1–10.5.4 Tétel)

Ezek az állítások, néhány kidolgozott példával együtt megtalálhatóak a Kalkulus előadásjegyzet 10.4 és 10.5 fejezeteiben.

Korábbi előismeretek

Ahhoz, hogy ezt a témakört sikeresen elsajátítsuk, szükség van néhány előismeretre. Ezek az alábbiak

(i) Határozatlan integrál I., II., III. (Ha gond van a primitív függvény kereséssel, akkor előbb azt kell gyakorolni, anélkül ez a témakör sem fog menni).

(ii) Az improprius integrálok témakörben többször lesz szükség arra, hogy különböző függvények határértékeit ki tudjuk számítani. Ehhez érdemes átismételni a Valós függvények határértéke feladatlapot (és az ott tanult módszereket), valamint a L'Hospital-szabályt.

🍀Néhány hasznos tipp

Aki nem keresi az előre nem láthatót,
nem lát semmit,
ugyanis a járt út
zsákutca.

(Hérakleitosz)

(i) Legyünk minden esetben szkeptikusak az ismertetett megoldásokkal kapcsolatban. Természetesen a kiadott anyagban lehetnek gépelési hibák, de nem csak erről van szó, hanem például a parciális integrálás tételének alkalmazásakor próbáljuk ki, hogy mi történik, ha nem a megoldásban szereplő „szereposztást” használjuk. Hasonló igaz a helyettesítéses integrálás tételére is, próbáljunk ki más helyettesítéseket is, mint ami megoldásban szerepel.

(ii) A 3. és 4. Feladatokat kétféleképpen is meg lehet oldani:

vagy a Riemann-integrálra vonatkozó parciális, illetve helyettesítéses integrálás tételét használjuk (ilyen módszerrel vannak megoldva a 3. Feladat példái),

vagy először a határozatlan integrálra vonatkozó parciális, illetve helyettesítéses integrálás tételével meghatározzuk az integrandus egy primitív függvényét és utána alkalmazzuk a Newton–Leibniz-formulát (ilyen módszerrel vannak megoldva a 4. Feladat (f) példája).

Az utóbbi módszernek az lehet az előnye, hogy a primitív függvény keresésben már (elvileg) rutinosak vagyunk és ennél a módszernél „nem kell foglalkozni a határokkal”, egészen pontosan pl. helyettesítéskor nem kell kiszámolni az új határokat.

(iii) Általánosságban véve elmondható, hogy azok a módszerek, melyeket a határozatlan integrál témakörében tanultunk, itt is érvényesek. Tehát ha például P egy valós polinom, akkor az $\int_a^b P(x)e^x dx$ alakú Riemann-integrál esetében a parciális integrálás tételét célszerű alkalmazni deg(P)-szer, az $f(x) = P(x)$ és $g'(x) = e^x$ választással stb.

1. Feladat. *A Newton–Leibniz-formula felhasználásával számítsuk ki az alábbi Riemann-integrálokat.*

Útmutatás. *A megoldások során az úgynevezett Newton–Leibniz-formulát fogjuk használni, mely az alábbi állítás.*

1. Tétel (Newton–Leibniz). *Legyen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ egy folytonos függvény és jelölje $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ az f függvény egy primitív függvényét. Ekkor*

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

1. Megjegyzés. *Ennek az állításnak a fényében, az $\int_a^b f(x)dx$ Riemann-integrál kiszámításához először meg kell határoznunk az f függvény egy F primitív függvényét, majd ezt a F primitív függvényt ki kell értékelnünk az a és b pontokban. A Riemann-integrál értéke pedig ezeknek a függvényértékeknek a különbsége, vagyis $F(b) - F(a)$.*

□

(a)

$$\int_2^4 x^3 dx$$

Megoldás.

$$\int_2^4 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_2^4 = \frac{4^4}{4} - \frac{2^4}{4} = 60,$$

hiszen a fenti tétel jelöléseivel

$$f(x) = x^3 \qquad \textit{és} \qquad F(x) = \frac{x^4}{4}.$$

□

(b)

$$\int_2^7 \sqrt{x} dx$$

(c)

$$\int_{-4}^{-2} \frac{1}{x^2} dx$$

Megoldás.

$$\int_{-4}^{-2} \frac{1}{x^2} dx = \int_{-4}^{-2} x^{-2} dx = \left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_{-4}^{-2} = \frac{(-2)^{-1}}{-1} - \frac{(-4)^{-1}}{-1} = \frac{1}{4}.$$

hiszen a fenti tétel jelöléseivel

$$f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2} \qquad \textit{és} \qquad F(x) = \frac{x^{-1}}{-1}.$$

□

(d)

$$\int_2^6 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$$

Megoldás.

$$\int_2^6 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = \int_2^6 x^{-\frac{1}{3}} dx = \left[\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}\right]_2^6 = \left[\frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}}\right]_2^6 = \frac{3}{2} 6^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{2} 2^{\frac{2}{3}} = \frac{3 \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot 6^{\frac{2}{3}} - 6}{2^{\frac{4}{3}}}$$

hiszen a fenti tétel jelöléseivel

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = x^{-\frac{1}{3}} \qquad \textit{és} \qquad F(x) = \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}}.$$

□

(e)

$$\int_2^8 \frac{5}{x} dx$$

Megoldás.

$$\int_2^8 \frac{5}{x}dx = [5\ln(|x|)]_2^8 = 5\ln(|8|) - 5\ln(|2|) = 5\ln(8) - 5\ln(2) = 5\ln\left(\frac{8}{2}\right) = 5\ln(4).$$

hiszen a fenti tétel jelöléseivel

$$f(x) = \frac{5}{x} \qquad \textit{és} \qquad F(x) = 5\ln(|x|).$$

□

(f)

$$\int_{12}^{120} \frac{7}{x}dx$$

(g)

$$\int_6^{10} \frac{2}{x-3}dx$$

(h)

$$\int_{-1}^{2} \frac{2}{x-3}dx$$

Megoldás.

$$\int_{-1}^{2} \frac{2}{x-3}dx = [2\cdot\ln(|x-3|)]_{-1}^{2} = 2\ln(|2-3|) - 2\ln(|-1-3|) = 2\ln(1) - 2\ln(4) = -2\ln(4).$$

hiszen a fenti tétel jelöléseivel

$$f(x) = \frac{2}{x-3} \qquad \textit{és} \qquad F(x) = 2\ln(|x-3|),$$

valamint $\ln(1) = 0$. □

2. Feladat. *A Newton–Leibniz-formula felhasználásával számítsuk ki az alábbi Riemann-integrálokat.*

(a)

$$\int_0^{\pi/4} \sin(x)dx$$

Megoldás.

$$\int_0^{\pi/4} \sin(x)dx = [-\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - (-\cos(0)) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

hiszen a fenti tétel jelöléseivel

$$f(x) = \sin(x) \qquad \textit{és} \qquad F(x) = -\cos(x).$$

□

(b)

$$\int_0^{2\pi} \cos(x)dx$$

(c)

$$\int_{-4}^{7} \frac{1}{1+x^2}dx$$

Megoldás.

$$\int_{-4}^{7} \frac{1}{1+x^2}dx = [\mathrm{arctg}(x)]_{-4}^{7} = \mathrm{arctg}(7) - \mathrm{arctg}(-4)$$

hiszen a fenti tétel jelöléseivel

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad \textit{és} \qquad F(x) = \mathrm{arctg}(x).$$

□

(d)

$$\int_2^4 e^x dx$$

Megoldás.

$$\int_2^4 e^x dx = [e^x]_2^4 = e^4 - e^2.$$

hiszen a fenti tétel jelöléseivel

$$f(x) = e^x \qquad \textit{és} \qquad F(x) = e^x.$$

□

(e)

$$\int_2^6 3^x dx$$

(f)

$$\int_{\frac{1}{2}}^{3} \frac{\cosh(x)}{2}dx$$

Megoldás.

$$\int_{\frac{1}{2}}^{3} \frac{\cosh(x)}{2}dx = \left[\frac{\sinh(x)}{2}\right]_{\frac{1}{2}}^{3} = \frac{\sinh(3)}{2} - \frac{\sinh\left(\frac{1}{2}\right)}{2}$$

hiszen a fenti tétel jelöléseivel

$$f(x) = \frac{\cosh(2)}{2} \qquad \textit{és} \qquad F(x) = \frac{\sinh(x)}{2}.$$

□

(g)

$$\int_2^4 \sinh(x)dx$$

(h)

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{\sin^2(x)}dx$$

Megoldás.

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{\sin^2(x)}dx = [-\mathrm{ctg}(x)]_{\frac{1}{2}}^{2} = -\mathrm{ctg}(2) - \left(-\mathrm{ctg}\left(\frac{1}{2}\right)\right)$$

hiszen a fenti tétel jelöléseivel

$$f(x) = \frac{1}{\sin^2(x)} \qquad \textit{és} \qquad F(x) = -\mathrm{ctg}(x).$$

□

3. Feladat. *A parciális integrálás tételének felhasználásával számítsuk ki az alábbi Riemann-integrálokat.*

Útmutatás. *A megoldások során a Riemann-integrálra vonatkozó parciális integrálás tételét fogjuk használni, mely az alábbi állítás.*

2. Tétel (Parciális integrálás tétele). *Legyenek $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ olyan differenciálható függvények, melyek deriváltjai Riemann-integrálhatóak. Ekkor*

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

2. Megjegyzés. *Hasonlóan, mint a határozatlan integrál esetében, itt is kulcsfontosságú szerepe van annak, hogy az integrandus melyik tényezőjét választjuk f-nek és melyiket g'-nek. Általánosságban véve az mondható el, hogy azok a módszerek, amelyeket a határozatlan integrálra vonatkozó parciális integrálás tétele esetén tanultunk, itt is működnek, ugyanazzal a „szereposztással”.*

□

(a)

$$\int_0^2 xe^x dx,$$

Megoldás. *Legyen*

$$f(x) = x \qquad \textit{és} \qquad g'(x) = e^x,$$

Ekkor

$$f'(x) = 1 \qquad \textit{és} \qquad g(x) = e^x,$$

ezért

$$\int_0^2 xe^x dx = [xe^x]_0^2 - \int_0^2 1 \cdot e^x dx = [xe^x]_0^2 - [e^x]_0^2 = 2 \cdot e^2 - 0 \cdot e^0 - \left(e^2 - e^0\right) = 2e^2 - e^2 + 1 = e^2 + 1.$$

□

(b)

$$\int_{2}^{3} x^2 e^{2x} dx,$$

(c)

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} x \sin(x) dx,$$

Megoldás. *Legyen*

$$f(x) = x \qquad \textit{és} \qquad g'(x) = \sin(x),$$

Ekkor

$$f'(x) = 1 \qquad \textit{és} \qquad g(x) = -\cos(x),$$

ezért

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} x \sin(x) dx = [x \cdot (-\cos(x))]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} - \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 1 \cdot (-\cos(x)) dx$$

$$= \left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \left(-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) - \left(-\frac{\pi}{4}\right) \cdot \left(-\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) + [\sin(x)]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}\pi - 2^{\frac{5}{2}}}{4}.$$

□

(d)

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} x^2 \cos(x) dx,$$

(e)

$$\int_{e}^{e^2} x^2 \ln(x) dx$$

Megoldás. *Legyen*

$$f(x) = \ln(x) \qquad \textit{és} \qquad g'(x) = x^2,$$

Ekkor

$$f'(x) = \frac{1}{x} \qquad \textit{és} \qquad g(x) = \frac{x^3}{3},$$

ezért

$$\int_{e}^{e^2} x^2 \ln(x) dx = \left[\ln(x) \cdot \frac{x^3}{3}\right]_{e}^{e^2} - \int_{e}^{e^2} \frac{1}{x} \cdot \frac{x^3}{3} dx$$

$$= \left[\ln(x) \cdot \frac{x^3}{3}\right]_{e}^{e^2} - \int_{e}^{e^2} \frac{x^2}{3} dx = \ln(e^2)\frac{(e^2)^3}{3} - \ln(e)\frac{e^3}{3} - \left(\frac{(e^2)^3}{9} - \frac{e^3}{9}\right) = \frac{5\,e^6 - 2\,e^3}{9}.$$

□

(f)

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} e^x \sin(x)dx,$$

Megoldás. *Legyen*

$$f(x) = e^x \qquad \textit{és} \qquad g'(x) = \sin(x),$$

Ekkor

$$f'(x) = e^x \qquad \textit{és} \qquad g(x) = -\cos(x),$$

ezért

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} e^x \sin(x)dx = [e^x \cdot (-\cos(x))]_{\frac{1}{2}}^{1} - \int_{\frac{1}{2}}^{1} e^x(-\cos(x))dx = [e^x \cdot (-\cos(x))]_{\frac{1}{2}}^{1} + \int_{\frac{1}{2}}^{1} e^x \cos(x)dx$$

Az

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} e^x \cos(x)dx$$

integrál kiszámításához alkalmazzuk még egyszer a parciális integrálás tételét egy „hasonló szereposztással", azaz legyen

$$f(x) = e^x \qquad \textit{és} \qquad g'(x) = \cos(x),$$

Ekkor

$$f'(x) = e^x \qquad \textit{és} \qquad g(x) = \sin(x),$$

így

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} e^x \cos(x)dx = [e^x \cdot \sin(x)]_{\frac{1}{2}}^{1} - \int_{\frac{1}{2}} e^x \sin(x)dx.$$

Ezt írjuk vissza a fenti azonosságba,

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} e^x \sin(x)dx = [e^x \cdot (-\cos(x))]_{\frac{1}{2}}^{1} - \int_{\frac{1}{2}}^{1} e^x(-\cos(x))dx = [e^x \cdot (-\cos(x))]_{\frac{1}{2}}^{1} + \int_{\frac{1}{2}}^{1} e^x \cos(x)dx$$

$$[e^x \cdot (-\cos(x))]_{\frac{1}{2}}^{1} + [e^x \cdot \sin(x)]_{\frac{1}{2}}^{1} - \int_{\frac{1}{2}} e^x \sin(x)dx.$$

Figyeljük meg, hogy ebből az azonosságból az $\int_{\frac{1}{2}}^{1} e^x \sin(x)dx$ *kifejezhető. Valóban*

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} e^x \sin(x)dx = \left[\frac{1}{2}e^x (\sin(x) - \cos(x))\right]_{\frac{1}{2}}^{1}.$$

□

(g)

$$\int_{-1}^{0} e^{2x} \cos(x)dx,$$

(h)

$$\int_2^4 x\sinh(x)dx,$$

Megoldás. *Legyen*

$$f(x) = x \qquad \text{és} \qquad g'(x) = \sinh(x),$$

ekkor

$$f'(x) = 1 \qquad \text{és} \qquad g(x) = \cosh(x),$$

ezért

$$\int_2^4 x\sinh(x)dx = [x\cosh(x)]_2^4 - \int_2^4 1\cdot\cosh(x)dx = 4\cosh(4) - 2\cosh(2) - \sinh(4) + \sinh(2).$$

□

(i)

$$\int_1^{10} x^2\cosh(x)dx,$$

(j)

$$\int_5^6 x^3\left(e^x + \ln(x)\right)dx$$

Megoldás. *Bár az integrandus szorzat alakú, akár x^3-t, akár $(e^x + \ln(x))$-et választjuk f-nek, nem fogunk eredményre jutni. Ehelyett bontsuk fel a zárójelet,*

$$\int_5^6 x^3\left(e^x + \ln(x)\right)dx = \int_5^6 x^3e^xdx + \int_5^6 x^3\ln(x)dx$$

és számoljuk ki az egy adódó Riemann-integrálokat külön-külön, más-más „szereposztással”. Az elsőhöz legyen Legyen

$$f(x) = x^3 \qquad \text{és} \qquad g'(x) = e^x,$$

ekkor

$$f'(x) = 3x^2 \qquad \text{és} \qquad g(x) = e^x,$$

ezért

$$\int_5^6 x^3e^xdx = \left[x^3e^x\right]_5^6 - \int_5^6 3x^2e^xdx.$$

Az így adódó integrálra alkalmazzuk még egyszer a parciális integrálás tételét az

$$f(x) = 3x^2 \qquad \text{és} \qquad g'(x) = e^x$$

választással, ekkor

$$f'(x) = 6x \qquad \text{és} \qquad g(x) = e^x,$$

így

$$\int_5^6 3x^2e^xdx = \left[3x^2e^x\right]_5^6 - \int_5^6 6xe^xdx.$$

A most kapott integrálra alkalmazzuk a parciális integrálás tételét az

$$f(x) = 6x \qquad \textit{és} \qquad g'(x) = e^x$$

választással, ekkor

$$f'(x) = 6 \qquad \textit{és} \qquad g(x) = e^x,$$

így

$$\int_5^6 6xe^x dx = [6xe^x]_5^6 - \int_5^6 6e^x dx = [6xe^x - 6e^x]_5^6.$$

Mindezeket egybevetve

$$\int_5^6 x^3 e^x dx = \left[x^3 e^x\right]_5^6 - \int_5^6 3x^2 e^x dx = \left[x^3 e^x\right]_5^6 - \left(\left[3x^2 e^x\right]_5^6 - \int_5^6 6xe^x dx\right)$$
$$= \left[x^3 e^x\right]_5^6 - \left(\left[3x^2 e^x\right]_5^6 - [6xe^x - 6e^x]_5^6\right) = \left[\left(x^3 - 3\,x^2 + 6\,x - 6\right)\,e^x\right]_5^6 = 138\,e^6 - 74\,e^5.$$

Végül az $\int_5^6 x^3 \ln(x) dx$ *Riemann-integrál meghatározásához legyen*

$$f(x) = \ln(x) \qquad \textit{és} \qquad g'(x) = x^3,$$

ekkor

$$f'(x) = \frac{1}{x} \qquad \textit{és} \qquad g(x) = \frac{x^4}{4},$$

ezért

$$\int_5^6 x^3 \ln(x) dx = \left[\ln(x)\frac{x^4}{4}\right]_5^6 - \int_5^6 \frac{1}{x} \cdot \frac{x^4}{4} dx = \left[\ln(x)\frac{x^4}{4} - \frac{x^4}{16}\right]_5^6 = \frac{5184\,\ln(6) - 2500\,\ln(5) - 671}{16}.$$

Mindezekből azonban az adódik, hogy

$$\int_5^6 x^3\,(e^x + \ln(x))\,dx = \int_5^6 x^3 e^x dx + \int_5^6 x^3 \ln(x) dx = 138\,e^6 - 74\,e^5 + \frac{5184\,\ln(6) - 2500\,\ln(5) - 671}{16}.$$

□

4. Feladat. *A helyettesítéses integrálás tételének felhasználásával számítsuk ki az alábbi Riemann-integrálokat.*

Útmutatás. *Ebben a feladatban a Riemann-integrálra vonatkozó helyettesítéses integrálás tételét fogjuk alkalmazni, mely az alábbi állítás.*

3. Tétel (Helyettesítéses integrálás tétele). *Legyen* $\varphi\colon [a, b] \to [A, B]$ *egy olyan szigorúan monoton növekedő, folytonosan differenciálható függvény, melyre* $\varphi(a) = A$ *és* $\varphi(b) = B$*. Ha az* $f\colon [\varphi(a), \varphi(b)] \to \mathbb{R}$ *függvény folytonos, akkor*

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx = \int_a^b f\left(\varphi(t)\right) \varphi'(t) dt.$$

□

(a)

$$\int_1^2 (3x+4)^3 dx$$

Megoldás. *A fenti tétel jelöléseivel ebben az esetben*

$$f(x) = (3x+4)^3 \qquad (x \in [1,2]).$$

Legyen

$$3x+4 = t,$$

azaz,

$$x = \frac{t-4}{3} = \varphi(t).$$

Ebben az esetben

$$\varphi'(t) = \frac{1}{3}$$

és

$$f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = \left(3\left(\frac{t-4}{3}\right)+4\right)^3 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}t^3,$$

továbbá

$$\begin{array}{rclcrcl} \varphi(a) & = & 1 & & \varphi(b) & = & 2 \\ \frac{a-4}{3} & = & 1 & \text{és} & \frac{b-4}{3} & = & 2 \\ a & = & 7 & & b & = & 10. \end{array}$$

Ezért

$$\int_1^2 (3x+4)^3 dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)dt = \int_7^{10} \frac{1}{3}t^3 dt = \left[\frac{t^4}{12}\right]_7^{10} = \frac{2533}{4}.$$

□

(b)

$$\int_2^3 \frac{1}{(2x+1)^4} dx,$$

(c)

$$\int_2^3 \frac{x^2}{\sqrt{x^3-2}} dx,$$

Megoldás. *A fenti tétel jelöléseivel ebben az esetben*

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^3-2}} \qquad (x \in [2,3]).$$

Legyen

$$x^3 - 2 = t,$$

azaz,

$$x = \sqrt[3]{t+2} = \varphi(t).$$

Ebben az esetben

$$\varphi'(t) = \frac{1}{3}(t+2)^{-\frac{2}{3}}$$

és

$$f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = \frac{\left(\sqrt[3]{t+2}\right)^2}{\sqrt{\left(\sqrt[3]{t+2}\right)^3 - 2}} \cdot \frac{1}{3}(t+2)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}t^{-\frac{1}{2}}$$

továbbá

$$\begin{array}{rclcrcl} \varphi(a) & = & 1 & & \varphi(b) & = & 3 \\ \sqrt[3]{a+2} & = & 2 & \text{és} & \sqrt[3]{b+2} & = & 3 \\ a & = & 6 & & b & = & 25. \end{array}$$

Ezért

$$\int_2^3 \frac{x^2}{\sqrt{x^3-2}}dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)dt = \int_6^{25} \frac{1}{3}t^{-\frac{1}{2}}dt = \frac{10-2\sqrt{6}}{3}.$$

□

(d)

$$\int_1^2 \frac{e^{3x}}{e^{3x}+1}dx,$$

Megoldás. *A fenti tétel jelöléseivel ebben az esetben*

$$f(x) = \frac{e^{3x}}{e^{3x}+1} \qquad (x \in [1,2]).$$

Legyen

$$e^{3x} = t,$$

azaz,

$$x = \frac{1}{3}\ln(t) = \varphi(t).$$

Ebben az esetben

$$\varphi'(t) = \frac{1}{3t}$$

és

$$f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = \frac{t}{t+1} \cdot \frac{1}{3t},$$

továbbá

$$\begin{array}{rclcrcl} \varphi(a) & = & 1 & & \varphi(b) & = & 2 \\ \frac{1}{3}\ln(a) & = & 1 & \text{és} & \frac{1}{3}\ln(b) & = & 2 \\ a & = & e^3 & & b & = & e^6. \end{array}$$

Ezért

$$\int_1^2 \frac{e^{3x}}{e^{3x}+1}dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)dt$$

$$= \int_{e^3}^{e^6} \frac{t}{t+1} \cdot \frac{1}{3t}dt = \left[\frac{1}{3}\ln(|t+1|)\right]_{e^3}^{e^6} = \frac{1}{3}\ln\left(|e^6+1|\right) - \frac{1}{3}\ln\left(|e^3+1|\right).$$

□

(e)

$$\int_{-1}^{0} \frac{3}{e^{x+1}}dx,$$

(f)

$$\int_{1}^{4} \frac{x}{\sqrt{5x-4}}dx,$$

Megoldás. *Először meghatározzuk a feladatban szereplő*

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{5x-4}} \qquad (x \in [1,4])\,.$$

függvény primitív függvényét. Ehhez legyen

$$t = \sqrt{5x-4} = \varphi^{-1}(x),$$

azaz,

$$x = \frac{t^2+4}{5} = \varphi(t).$$

Ebben az esetben

$$\varphi'(t) = \frac{2t}{5}$$

és

$$f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = \frac{2}{25}t^2 + \frac{8}{25}.$$

Ezért

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{5x-4}}dx = \int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)dt\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)} \\ = \int \frac{2}{25}t^2 + \frac{8}{25}dt\Big|_{t=\sqrt{5x-4}} = \frac{2}{75}t^3 + \frac{8}{25}t\Big|_{t=\sqrt{5x-4}} = \frac{2}{75}\left(\sqrt{5x-4}\right)^3 + \frac{8}{25}\sqrt{5x-4}.\end{aligned}$$

Így, a Newton–Leibniz-formula miatt

$$\int_{1}^{4} \frac{x}{\sqrt{5x-4}}dx = \int_{a}^{b} f(x)dx = [F(x)]_a^b = \left[\frac{2}{75}\left(\sqrt{5x-4}\right)^3 + \frac{8}{25}\sqrt{5x-4}\right]_1^4.$$

□

(g)

$$\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{2x^2}{\sqrt{1+x^2}}dx,$$

(h)

$$\int_{3}^{4} 3x^2\sqrt{x^2-1}dx,$$

5. Feladat. *Vizsgáljuk meg, hogy konvergensek-e az alábbi improprius integrálok.*

Útmutatás. *Ebben a feladatban a Kalkulus előadásjegyzet 10.5 fejezetének az eredményeit fogjuk használni.*

□

(a)

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx,$$

Megoldás. *A* $[2, +\infty[$ *intervallum felülről nem korlátos, azonban tetszőleges* $x \in [2, +\infty[$ *esetén az integrandus, azaz az*

$$f(t) = \frac{1}{t^2} \qquad (t \in [1, x])$$

függvény Riemann-integrálható az $[1, x]$ *intervallumon. Továbbá,*

$$F(x) = \int_2^x f(t)dt = \int_2^x \frac{1}{t^2} dt = \left[-\frac{1}{t}\right]_2^x = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{x},$$

ezért

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{4},$$

vagyis az $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ *improprius integrál konvergens és*

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{2}.$$

□

(b)

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx,$$

Megoldás. *A* $[1, +\infty[$ *intervallum felülről nem korlátos, azonban tetszőleges* $x \in [2, +\infty[$ *esetén az integrandus, azaz az*

$$f(t) = \frac{1}{t} \qquad (t \in [1, x])$$

függvény Riemann-integrálható az $[1, x]$ *intervallumon. Továbbá,*

$$F(x) = \int_1^x f(t)dt = \int_1^x \frac{1}{t} dt = [\ln(t)]_1^x = \ln(x) - \ln(1) = \ln(x),$$

ezért

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x\to\infty} \ln(x) = +\infty,$$

vagyis az $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ *improprius integrál divergens.* □

(c)

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + x^2} dx,$$

Megoldás. *A* $[0,+\infty[$ *intervallum felülről nem korlátos, azonban tetszőleges* $x \in [0,+\infty[$ *esetén az integrandus, azaz az*

$$f(t) = \frac{1}{1+t^2} \qquad (t \in [0,x])$$

függvény Riemann-integrálható az $[0,x]$ *intervallumon. Továbbá,*

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt = [\operatorname{arctg}(t)]_0^x = \operatorname{arctg}(x) - \operatorname{arctg}(0) = \operatorname{arctg}(x),$$

ezért

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg}(x) = \frac{\pi}{2},$$

vagyis az $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$ *improprius integrál konvergens és*

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{2}.$$

□

(d)

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{25+x^2}dx,$$

(e)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{1+x^2}dx,$$

(f)

$$\int_5^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}dx,$$

Megoldás. *A* $[5,+\infty[$ *intervallum felülről nem korlátos, azonban tetszőleges* $x \in [0,+\infty[$ *esetén az integrandus, azaz az*

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt[3]{t^4}} = t^{-\frac{4}{3}} \qquad (t \in [5,x])$$

függvény Riemann-integrálható az $[5,x]$ *intervallumon. Továbbá,*

$$F(x) = \int_5^x f(t)dt = \int_5^x t^{-\frac{4}{3}}dt = \left[-3t^{-\frac{1}{3}}\right]_5^x = -\frac{3}{\sqrt[3]{x}} + \frac{3}{\sqrt[3]{5}},$$

ezért

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x\to\infty} -\frac{3}{\sqrt[3]{x}} + \frac{3}{\sqrt[3]{5}} = \frac{3}{\sqrt[3]{5}},$$

vagyis az $\int_5^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}dx$ *improprius integrál konvergens és*

$$\int_5^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}dx = \frac{3}{\sqrt[3]{5}}.$$

□

(g)

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx,$$

(h)

$$\int_{3}^{+\infty} \frac{1}{(x-2)^3} dx,$$

(i)

$$\int_{5}^{+\infty} \frac{2}{(x-3)(x+4)} dx,$$

Megoldás. *A* $[5, +\infty[$ *intervallum felülről nem korlátos, azonban tetszőleges* $x \in [0, +\infty[$ *esetén az integrandus, azaz az*

$$f(t) = \frac{2}{(t-3)(t+4)} \qquad (t \in [5, x])$$

függvény Riemann-integrálható az $[5, x]$ *intervallumon. Továbbá,*

$$\begin{aligned} F(x) = \int_{5}^{x} f(t)dt = \int_{5}^{x} \frac{2}{(t-3)(t+4)} dt \\ = \left[\frac{2}{7} \left(\ln\left(|t-3|\right) - \ln\left(|t+4|\right)\right)\right]_5^x = \left[\frac{2}{7} \ln\left(\left|\frac{t-3}{t+4}\right|\right)\right]_5^x \\ = \frac{2}{7} \ln\left(\left|\frac{x-3}{x+4}\right|\right) - \frac{2}{7} \ln\left(\left|\frac{5-3}{5+4}\right|\right) \\ = \frac{2}{7} \ln\left(\left|\frac{x-3}{x+4}\right|\right) - \frac{2}{7} \ln\left(\frac{2}{9}\right) \end{aligned}$$

ezért

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{7} \ln\left(\left|\frac{x-3}{x+4}\right|\right) - \frac{2}{7} \ln\left(\frac{2}{9}\right) = -\frac{2}{7} \ln\left(\frac{2}{9}\right)$$

vagyis az $\int_{5}^{+\infty} \frac{2}{(x-3)(x+4)} dx$ *improprius integrál konvergens és*

$$\int_{5}^{+\infty} \frac{2}{(x-3)(x+4)} dx = -\frac{2}{7} \ln\left(\frac{2}{9}\right).$$

□

(j)

$$\int_{3}^{+\infty} \frac{5}{(x-1)(x+5)} dx,$$

(k)

$$\int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{(x+1)(x-3)} dx,$$

(l)

$$\int_{1}^{+\infty} e^{-x}dx,$$

Megoldás. *A* $[1, +\infty[$ *intervallum felülről nem korlátos, azonban tetszőleges* $x \in [1, +\infty[$ *esetén az integrandus, azaz az*

$$f(t) = e^{-x} \qquad (t \in [1, x])$$

függvény Riemann-integrálható az $[1, x]$ *intervallumon. Továbbá,*

$$F(x) = \int_{1}^{x} f(t)dt = \int_{1}^{x} e^{-t}dt = \left[-e^{-t}\right]_{1}^{x} = -e^{-x} + e = e - e^{-x}$$

ezért

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x\to\infty} e - e^{-x} = e,$$

vagyis az $\int_{1}^{+\infty} e^{-x}dx$ *improprius integrál konvergens és*

$$\int_{1}^{+\infty} e^{-x}dx = e.$$

□

(m)

$$\int_{2}^{+\infty} 5e^{-2x}dx,$$

(n)

$$\int_{-\infty}^{3} e^{x}dx,$$

(o)

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{e^{x}}{e^{2x}+1}dx,$$

Megoldás. *A* $[1, +\infty[$ *intervallum felülről nem korlátos, azonban tetszőleges* $x \in [1, +\infty[$ *esetén az integrandus, azaz az*

$$f(t) = \frac{e^{x}}{e^{2x}+1} \qquad (t \in [1, x])$$

függvény Riemann-integrálható az $[1, x]$ *intervallumon. Továbbá,*

$$F(x) = \int_{1}^{x} f(t)dt = \int_{1}^{x} \frac{e^{t}}{e^{2t}+1}dt = \left[\operatorname{arctg}(e^{t})\right]_{1}^{x} = \operatorname{arctg}(e^{x}) - \operatorname{arctg}(e)$$

ezért

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x\to\infty} \left(\operatorname{arctg}(e^{x}) - \operatorname{arctg}(e)\right) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(e),$$

vagyis az $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx$ *improprius integrál konvergens és*

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx = \frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}(e).$$

□

(p)

$$\int_{10}^{+\infty} xe^{-x}dx,$$

Megoldás. *A* $[10, +\infty[$ *intervallum felülről nem korlátos, azonban tetszőleges* $x \in [10, +\infty[$ *esetén az integrandus, azaz az*

$$f(t) = te^{-t} \qquad (t \in [10, x])$$

függvény Riemann-integrálható az $[1, x]$ *intervallumon. Továbbá,*

$$F(x) = \int_1^x f(t)dt = \int_{10}^x te^{-t}dt = [-(t+1)e^{-t}]_{10}^x = -(x+1)e^{-x} + 11e^{-10},$$

ezért

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x\to\infty} \left(-(x+1)e^{-x} + 11e^{-10}\right) = 11e^{-10},$$

vagyis az $\displaystyle\int_{10}^{+\infty} xe^{-x}dx$ *improprius integrál konvergens és*

$$\int_{10}^{+\infty} xe^{-x}dx = 11e^{-10}.$$

□

(q)

$$\int_e^{+\infty} \frac{1}{x\ln(x)}dx$$

Megoldás. *Az* $[e, +\infty[$ *intervallum felülről nem korlátos, azonban tetszőleges* $x \in [e, +\infty[$ *esetén az integrandus, azaz az*

$$f(t) = \frac{1}{t\ln(t)} \qquad (t \in [e, x])$$

függvény Riemann-integrálható az $[e, x]$ *intervallumon. Továbbá,*

$$F(x) = \int_e^x f(t)dt = \int_e^x \frac{1}{t\ln(t)}dt = [\ln(|\ln(t)|)]_e^x = \ln(|\ln(x)|) - \ln(|\ln(e)|) = \ln(|\ln(x)|)$$

ezért

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x\to\infty} \ln(|\ln(x)|) = +\infty,$$

vagyis az $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{1}{x\ln(x)}dx$ *improprius integrál divergens.* □

6. Feladat. *Vizsgáljuk meg, hogy konvergensek-e az alábbi improprius integrálok.*

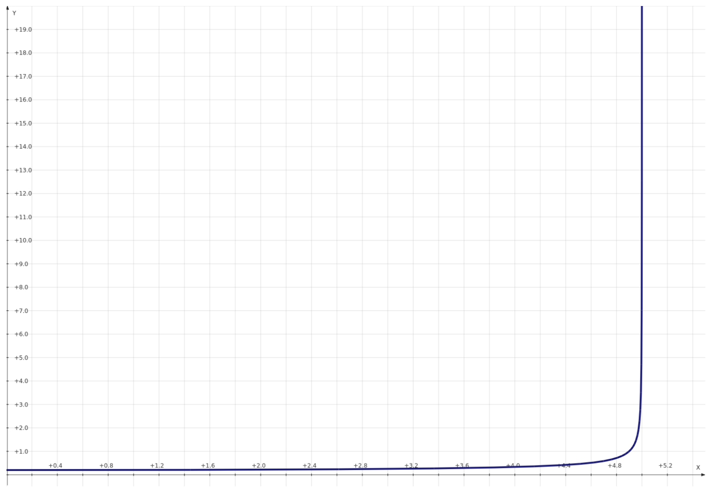
(a)

$$\int_0^5 \frac{1}{\sqrt{25-x^2}}dx,$$

Megoldás. *Az integrandus, azaz az*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{25-x^2}} \qquad (x \in [0,5[)$$

függvény nem korlátos a $[0,5[$ *intervallumon, azonban tetszőleges* $x \in [0,5[$ *esetén a* $[0,x]$ *intervallumon korlátos és Riemann-integrálható.*



Legyen

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{25-t^2}}dt = \left[\arcsin\left(\frac{t}{5}\right)\right]_5^x = \arcsin\left(\frac{x}{5}\right) - \arcsin(0) \qquad (x \in [0,5[)\,.$$

Ekkor

$$\lim_{x\to 5-} F(x) = \lim_{x\to 5-} \arcsin\left(\frac{x}{5}\right) - \arcsin(0) = \arcsin(1) - \arcsin(0) = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}.$$

Ezt azt jelenti, hogy az $\displaystyle\int_0^5 \frac{1}{\sqrt{25-x^2}}dx$ *improprius integrál konvergens és*

$$\int_0^5 \frac{1}{\sqrt{25-x^2}}dx = \frac{\pi}{2}.$$

$\square$

(b)

$$\int_{-10}^{10} \frac{1}{\sqrt{100-x^2}}dx,$$

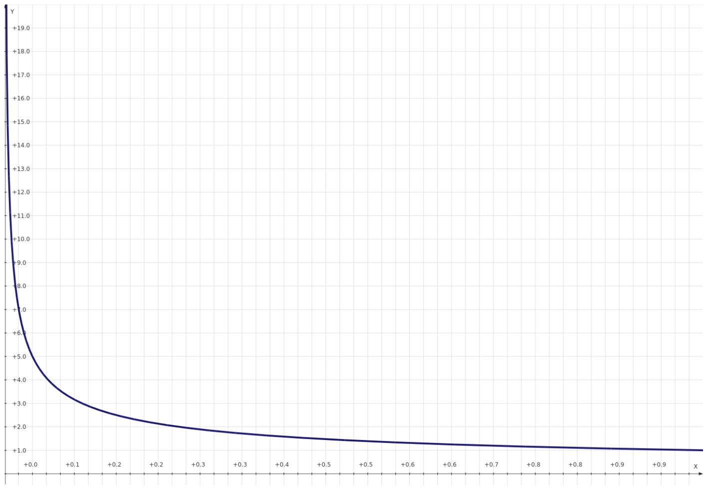
(c)

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx,$$

Megoldás. *Az integrandus, azaz az*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \qquad (x \in]0, 1])$$

függvény nem korlátos a $]0, 1]$ *intervallumon, azonban tetszőleges* $x \in]0, 1]$ *esetén az* $[x, 1]$ *intervallumon korlátos és Riemann-integrálható.*



Legyen

$$F(x) = \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \left[2\sqrt{t}\right]_x^1 = 2 - 2\sqrt{x} \qquad (x \in [0, 5[) .$$

Ekkor

$$\lim_{x\to 0+} F(x) = \lim_{x\to 0+} 2 - 2\sqrt{x} = 2$$

Ezt azt jelenti, hogy az $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ *improprius integrál konvergens és*

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2.$$

□

(d)

$$\int_{-2}^3 \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx,$$

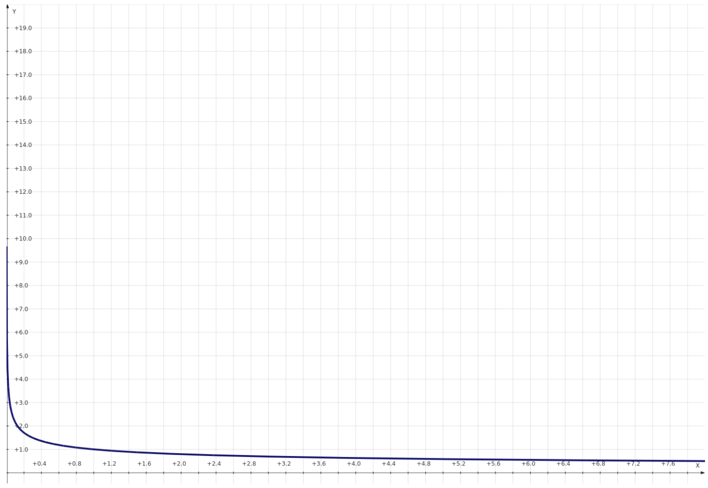
(e)

$$\int_0^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$$

Megoldás. *Az integrandus, azaz az*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \qquad (x \in]0, 8])$$

függvény nem korlátos a $]0, 8]$ *intervallumon, azonban tetszőleges* $x \in]0, 8]$ *esetén az* $[x, 8]$ *intervallumon korlátos és Riemann-integrálható.*



Legyen

$$F(x)=\int_x^8 \frac{1}{\sqrt[3]{t}}dt=\left[\frac{3}{2}t^{\frac{2}{3}}\right]_x^8=6-\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\qquad (x\in]0,8]).$$

Ekkor

$$\lim_{x\to 0+}F(x)=\lim_{x\to 0+}6-\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}=6$$

Ezt azt jelenti, hogy az $\int_0^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx$ *improprius integrál konvergens és*

$$\int_0^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx=6.$$

□

(f)

$$\int_{-2}^{3} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx,$$

(g)

$$\int_{-2}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx,$$

(h)

$$\int_{-1}^{1} \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}dx,$$

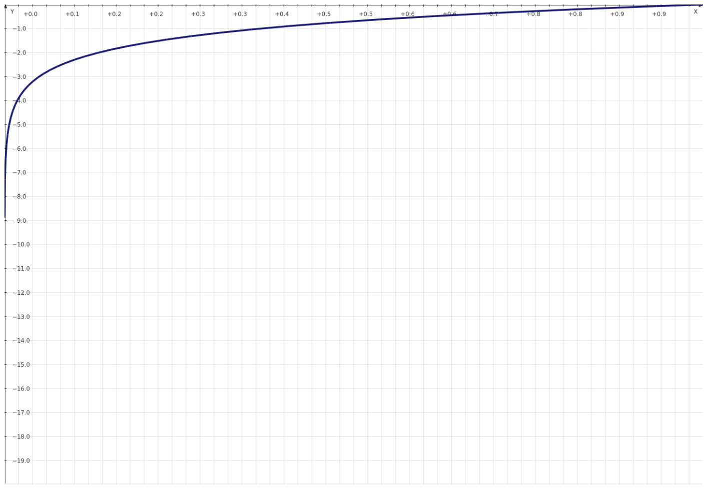
(i)

$$\int_0^1 \ln(x)dx,$$

Megoldás. *Az integrandus, azaz az*

$$f(x)=\ln(x)\qquad (x\in]0,1])$$

függvény nem korlátos a $]0,1]$ *intervallumon, azonban tetszőleges* $x\in]0,1]$ *esetén az* $[x,1]$ *intervallumon korlátos és Riemann-integrálható.*



Legyen

$$F(x) = \int_x^1 \ln(t)dt = [t\ln(t) - t]_x^1 = -1 - (x\ln(x) - x) = x - x\ln(x) - 1 \qquad (x \in]0,8]).$$

Ekkor

$$\lim_{x\to 0+} F(x) = \lim_{x\to 0+} x - x\ln(x) - 1 = -1$$

Ezt azt jelenti, hogy az $\int_0^1 \ln(x)dx$ *improprius integrál konvergens és*

$$\int_0^1 \ln(x)dx = -1.$$

□

7. Feladat. *Döntsük el, hogy az alábbi improprius integrálok közül melyek konvergensek.*

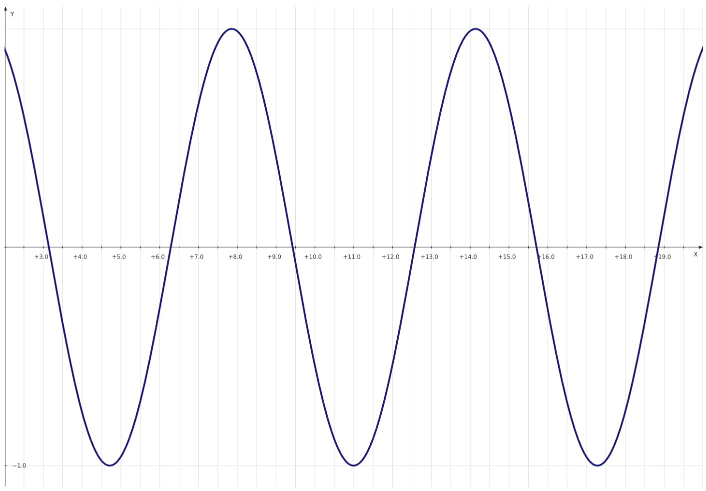
(a)

$$\int_2^{+\infty} \sin(x)dx$$

Megoldás. *A* $[2,+\infty[$ *intervallum felülről nem korlátos, azonban tetszőleges* $x \in [2,+\infty[$ *esetén az integrandus, azaz az*

$$f(t) = \sin(t) \qquad (t \in [2,x])$$

függvény Riemann-integrálható a $[2,x]$ *intervallumon.*



Továbbá,

$$F(x) = \int_2^x f(t)dt = \int_2^x \sin(t)dt = [-\cos(t)]_2^x = -\cos(x) - (-\cos(2)) = \cos(2) - \cos(x).$$

Azonban a

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x\to\infty} \cos(2) - \cos(x)$$

határérték nem létezik, ezért az $\int_2^{+\infty} \sin(x)dx$ *improprius integrál divergens.* □

(b)

$$\int_2^{+\infty} \frac{\cos^2(x)}{x^2} dx$$

Megoldás. *A* $[1, +\infty[$ *intervallum felülről nem korlátos, azonban tetszőleges* $x \in [1, +\infty[$ *esetén az integrandus, azaz az*

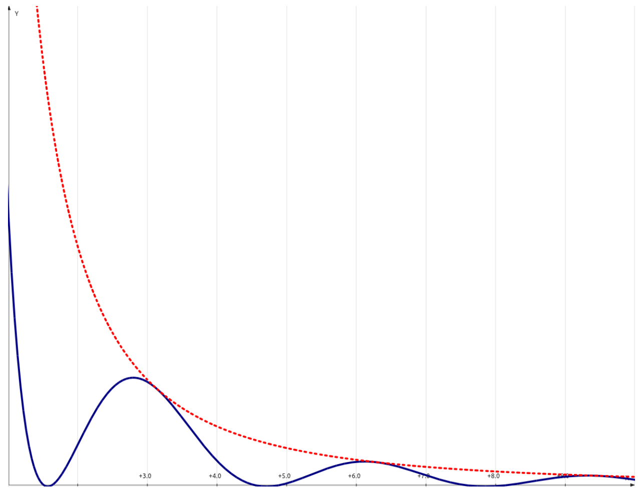
$$f(t) = \frac{\cos^2(x)}{x^2} \qquad (t \in [1, x])$$

függvény Riemann-integrálható az $[1, x]$ *intervallumon. A probléma azonban az, hogy ebben az esetben nem tudjuk alkalmazni a korábbi gondolatmenetet, ugyanis az integrandusnak létezik ugyan primitív függvénye (hiszen folytonos a szóban forgó intervallumon), azonban ez a primitív függvény* ***nem elemi függvény****, így a Newton–Leibniz-formulát nem tudjuk használni. Ennek megfelelően az integrál értékét sem fogjuk tudni megmondani, csak azt, hogy a feladatban szereplő integrál divergens.*

Az Összehasonlító kritérium I. segítségével azt fogjuk megmutatni, hogy az

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos^2(x)}{x^2} dx$$

improprius integrál abszolút konvergens.



Valóban, tetszőleges $x \in]0, +\infty[$ *esetén*

$$\left|\frac{\cos^2(x)}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$$

teljesül, valamint

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1$$

Ez utóbbi az 5. Feladat (a) részéhez teljesen hasonlóan mutatható meg. □

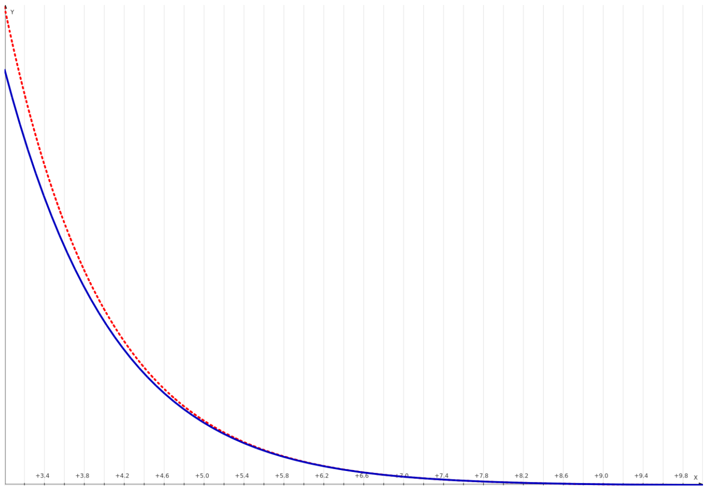
(c)

$$\int\limits_3^{+\infty} \frac{1}{x+e^x} dx$$

Megoldás. *Az Összehasonlító kritérium I. segítségével azt fogjuk megmutatni, hogy az*

$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{x+e^x} dx$$

improprius integrál abszolút konvergens.



Valóban, tetszőleges $x \in [3, +\infty[$ *esetén*

$$\frac{1}{x+e^x} < \frac{1}{e^x}$$

teljesül, valamint

$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{e^x} dx = e^3$$

Ez utóbbi az 5. Feladat (l) részéhez teljesen hasonlóan mutatható meg. □

(d)

$$\int\limits_3^{+\infty} \frac{1}{x-e^{-x}} dx$$

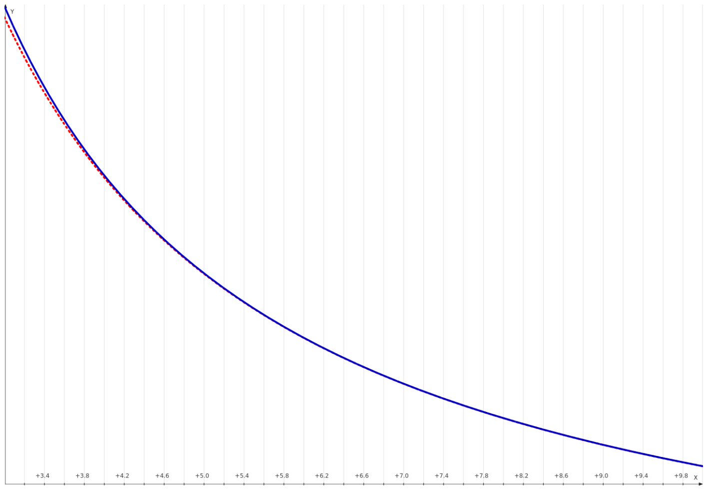
Megoldás. *Az*

$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{x-e^{-x}} dx$$

improprius integrál divergens, hiszen minden $x \in [3, +\infty[$ *esetén*

$$\frac{1}{x-e^{-x}} > \frac{1}{x}$$

teljesül.



Továbbá, az 5. Feladatban ismertetett módszereket felhasználva,

$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{x} = +\infty,$$

amiből az Összehasonlító kritérium I. felhasználásával adódik a fenti improprius integrál divergenciája.

□

(e)

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx$$

(f)

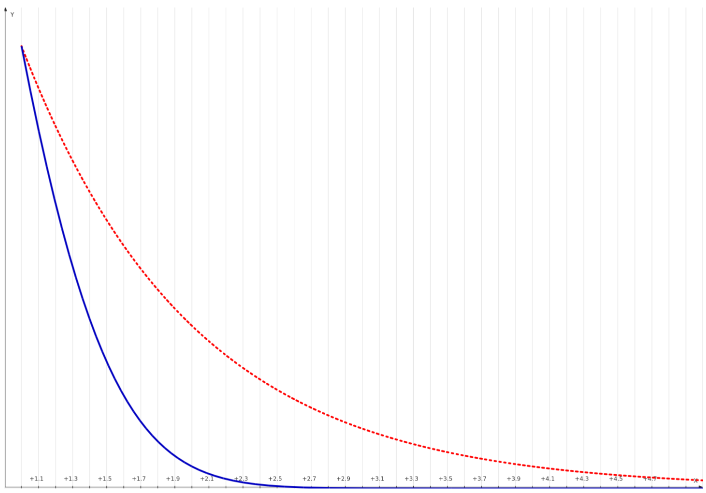
$$\int\limits_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

Az

$$\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

improprius integrál konvergens, hiszen, ha $x \in]1, +\infty[$, *akkor*

$$e^{-x^2} < e^{-x}.$$



Továbbá, az 5. Feladat (l) része szerint

$$\int_1^{+\infty} e^{-x} dx$$

improprius integrál konvergens. Így, az Összehasonlító kritérium I. alkalmazásával azt kapjuk, hogy az $\int\limits_1^{+\infty} e^{-x^2}dx$ *improprius integrál konvergens.*

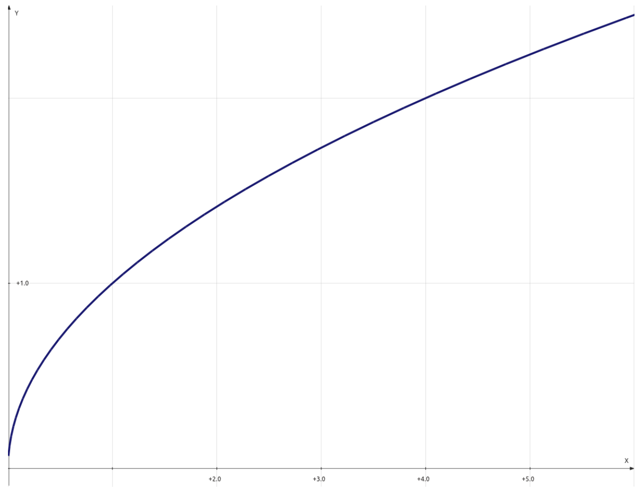
(g)

$$\int\limits_0^{+\infty} x^2 2^{-x} dx$$

(h)

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-x} x^n dx \ \ (n \in \mathbb{N})$$

8. Feladat. *Határozzuk meg az* $y = \sqrt{x}$ *függvény és az* x*-tengely által határolt területet az* $a = 0$*-tól a* $b = 6$ *abszcisszájú pontig.*



Megoldás. A megoldás során azt fogjuk használni, hogy Az $\int\limits_a^b f(x)dx$ Riemann-integrál annak a tartománynak az **előjeles területe**, melyet az $y = f(x)$ görbe, az x-tengely, valamint az $x = a$ és $x = b$ egyenletű egyenes határol.

Ennek megfelelően ebben az esetben

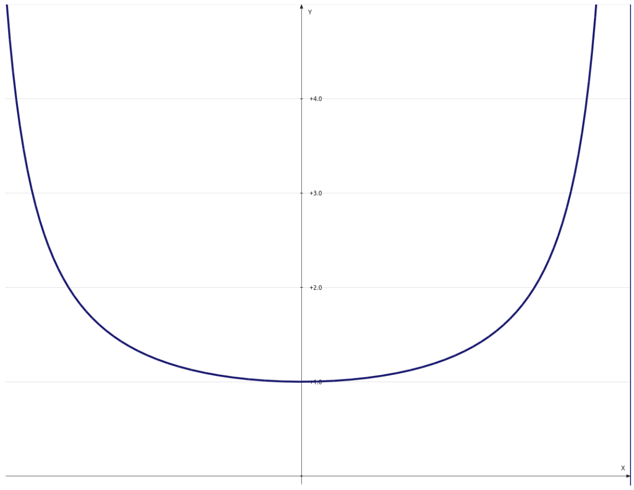
$$f(x) = \sqrt{x} \qquad (x \in [0, +\infty[)\,,$$

a kérdéses terület pedig

$$T = \int_0^6 \sqrt{x}dx = 4\sqrt{6}.$$

□

9. Feladat. *Határozzuk meg az* $y = \dfrac{1}{1-x^2}$ *függvény görbéje, az* x*-tengely és az* $a = 0$*,* $b = 0,5$ *abszcisszájú pontokhoz tartozó ordinátatengelyek által meghatározott síkrész területét.*



Megoldás. Az

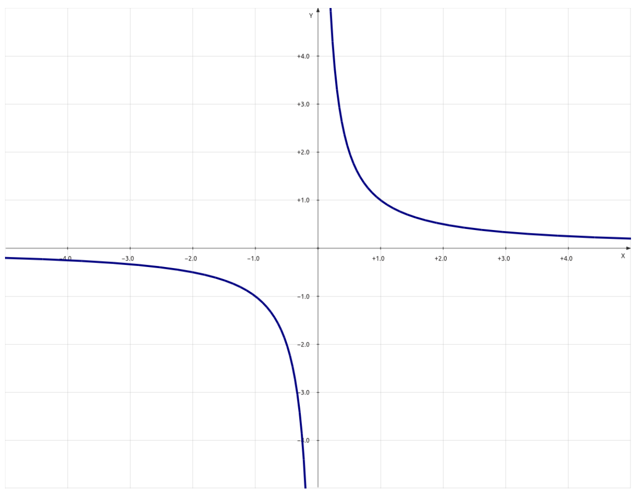
$$f(x) = \frac{1}{1-x^2} \qquad (x \in]-1,1[)$$

függvény folytonos (így Riemann-integrálható is) a $[0, 0,5]$ intervallumon, ezért a kérdéses terület

$$T = \int_0^{0,5} \frac{1}{1-x^2} dx = \left[\frac{1}{2}\left(\ln(|x+1|) - \ln(|x-1|)\right)\right]_0^{0,5} = \frac{1}{2}\left(\ln(3) - \ln(1)\right) = \frac{1}{2}\ln(3).$$

□

10. Feladat. *Határozzuk meg az $y = \frac{1}{x}$ függvény görbéje és az x-tengely közé eső területet a következő intervallumok felett:*



(a) $[0, a]$*, ahol* $a > 0$ *adott;*

(b) $[a, +\infty[$*, ahol* $a > 0$ *adott;*

(c) $[3, 10]$

(d) $[-2, -1]$.

Megoldás. (a) $[0, a]$, ahol $a > 0$ adott.

Legyen $a > 0$ tetszőleges. Ekkor a kérdéses terület

$$T = \int_0^a \frac{1}{x} dx.$$

Az

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad (]0, +\infty[)$$

módon megadott f függvény nem korlátos a $]0, a]$ halmazon, viszont tetszőleges $x \in]0, a]$ esetén már korlátos az $[x, a]$ intervallumon. Legyen

$$F(x) = \int_x^a \frac{1}{t} dx = [\ln(t)]_x^a = \ln(a) - \ln(x) \qquad (x \in]0, a]).$$

Mivel

$$\lim_{x\to 0+} F(x) = \lim_{x\to 0+} \ln(a) - \ln(x) = +\infty,$$

ezért a kérdéses terület $+\infty$.

(b) $[a, +\infty[$, ahol $a > 0$ adott;

Legyen most $a > 0$ tetszőleges, de rögzített. Ebben az esetben tetszőleges $x \in [a, +\infty[$ esetén az

$$f(t) = \frac{1}{t} \qquad (t \in [a, x])$$

függvény Riemann-integrálható az $[a, x]$ intervallumon. Továbbá,

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt = \int_a^x \frac{1}{t}dt = [\ln|t|]_a^x = \ln|x| - \ln|a| = \ln(x) - \ln(a),$$

ezért

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x\to\infty} \ln(x) - \ln(a) = +\infty,$$

vagyis

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x}dx$$

miatt a kérdéses terület $+\infty$.

(c) $[3, 10]$

Ebben az esetben a kérdéses tartomány területe

$$T = \int_3^{10} \frac{1}{x}dx = [\ln(|x|)]_3^{10} = \ln\left(\frac{10}{3}\right).$$

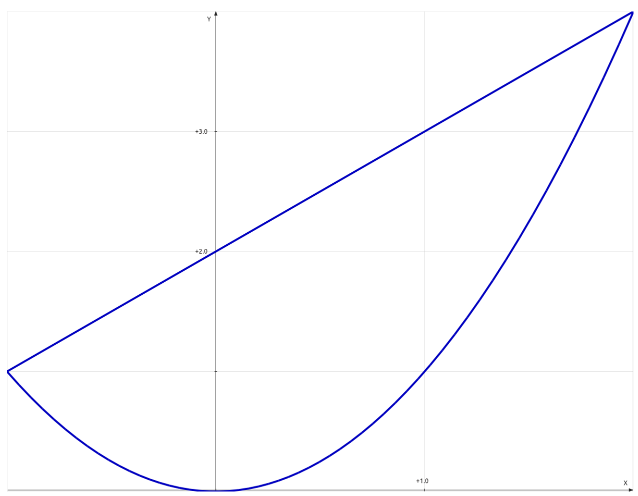
(d) $[-2, -1]$

Ebben az esetben a kérdéses tartomány területe

$$T = \int_{-2}^{-1} \frac{1}{x}dx = [\ln(|x|)]_{-2}^{-1} = \ln(|-1|) - \ln(|-2|) = \ln(1) - \ln(2) = -\ln(2).$$

□

11. Feladat. *Határozzuk meg az $y = x^2$ függvény görbéje és az $y = x + 2$ egyenes által határolt területrészt.*



Megoldás. A kérdéses terület kiszámításához először határozzuk meg a feladatban szereplő görbék metszéspontjait. Ehhez meg kell oldanunk az

$$x^2 = x + 2$$

másodfokú egyenletet, melynek megoldásai

$$x_1 = -1 \qquad \text{és} \qquad x_2 = 2.$$

Figyeljük meg, hogy ekkor a kérdéses területet megkaphatjuk, ha az $y = x + 2$ görbe alatti területből levonjuk az $y = x^2$ görbe alatti területet, vagyis

$$T = \int_{-1}^{2} (x+2)dx - \int_{-1}^{2} x^2 dx = \int_{-1}^{2} -x^2 + x + 2dx = \frac{9}{2}.$$

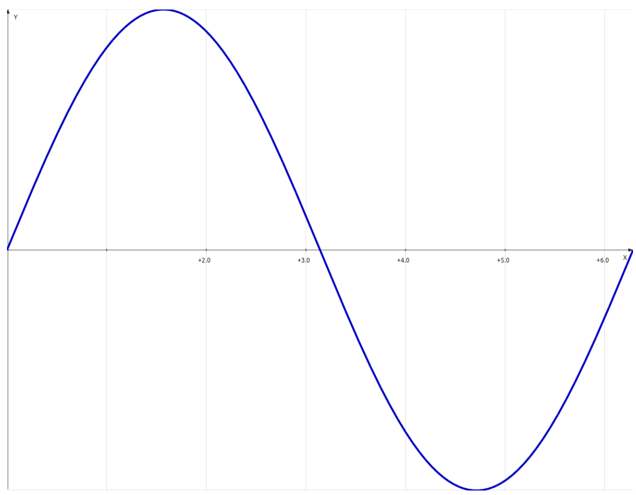
□

12. Feladat. *Határozzuk meg az $y = \sin(x)$ függvény görbéje és az x-tengely által határolt területet a*

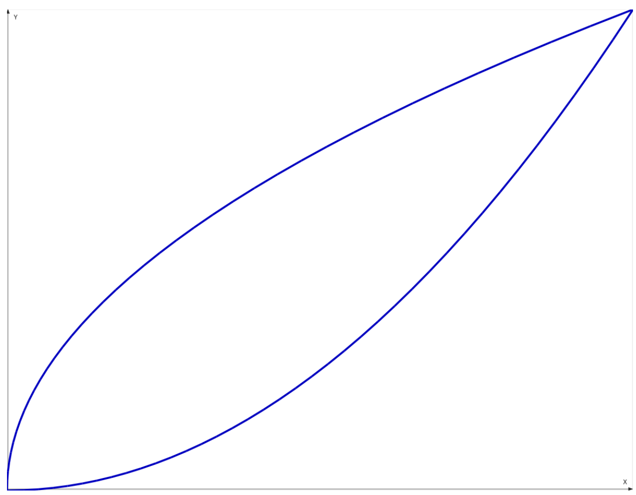
(a) $[0, \pi]$*;*

(b) $[0, 2\pi]$*;*

intervallumok felett.



13. Feladat. *Határozzuk meg az $y = x^2$ és az $y^2 = x$ görbék által határolt területet.*



Megoldás. A kérdéses terület kiszámításához először határozzuk meg a feladatban szereplő görbék metszéspontjait. Ehhez meg kell oldanunk az

$$x^2 = \sqrt{x}$$

algebrai egyenletet, melynek megoldásai

$$x_1 = 0 \qquad \text{és} \qquad x_2 = 1.$$

Figyeljük meg, hogy ekkor a kérdéses területet megkaphatjuk, ha az $y = \sqrt{x}$ görbe alatti területből levonjuk az $y = x^2$ görbe alatti területet, vagyis

$$T = \int_0^1 \sqrt{x}dx - \int_0^1 x^2dx = \int_0^1 \sqrt{x} - x^2dx = \frac{1}{3}.$$

□