

Valós függvények

Korlátosság, monotonitás, folytonosság

1. Definíció. Legyen $D \subset \mathbb{R}$ egy nemüres halmaz, ekkor az $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt **valós függvénynek** nevezzük.

Korlátosság

2. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ függvény **alulról/felülről korlátos**, ha létezik olyan $K \in \mathbb{R}$ konstans, hogy

$$f(x) \geq K, \quad \text{illetve} \quad f(x) \leq K$$

teljesül minden $x \in D$ esetén. Azt mondjuk továbbá, hogy az $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ függvény **korlátos**, ha mind alulról, mind felülről korlátos.

1. Megjegyzés. Az $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor korlátos (alulról/felülről), ha az $f(D) \subset \mathbb{R}$ halmaz korlátos (alulról/felülről).

Monotonitás

3. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ valós függvény **monoton növekedő/csökkenő**, ha minden olyan $x, y \in D$ esetén, melyre $x \leq y$,

$$f(x) \leq f(y), \quad \text{illetve} \quad f(x) \geq f(y)$$

teljesül. Ha a fenti egyenlőtlenségek minden $x \neq y$ esetén szigorúak, akkor **szigorú monoton növekedésről**, illetve **szigorú monoton csökkenésről** beszélünk.

Folytonosság

4. Definíció. Az $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ függvény **folytonos az $x_0 \in D$ pontban**, ha bármely $\varepsilon \geq 0$ esetén van olyan $\delta \geq 0$, hogy ha $x \in D$ és $|x - x_0| \leq \delta$, akkor $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$ teljesül.

1. Tétel (Átviteli elv). Az $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor folytonos az $x_0 \in D$ pontban, ha tetszőleges (x_n) D -beli elemekből álló, x_0 -hoz konvergáló sorozat esetén $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$.

2. Megjegyzés. Az $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor **nem folytonos** az $x_0 \in D$ pontban, ha van olyan (x_n) D -beli elemekből álló, x_0 -hoz konvergáló sorozat, melyre $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \neq f(x_0)$.

2. Tétel (Folytonosság és műveletek). Ha az $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ függvények folytonosak az $x_0 \in D$ pontban, akkor

(i) az $f + g$ függvény is folytonos az x_0 pontban;

(ii) tetszőleges $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén a λf függvény is folytonos az x_0 pontban;

(iii) az $f \cdot g$ függvény is folytonos az x_0 pontban;

(iv) ha tetszőleges $x \in D$ esetén $g(x) \neq 0$, akkor az $\frac{f}{g}$ függvény is folytonos az x_0 pontban.

3. Tétel (Az összetett függvény folytonossága). Legyenek $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ és $g : f(D) \rightarrow \mathbb{R}$ adott függvények. Ha az f függvény folytonos az $x_0 \in D$ pontban, a g pedig az $f(x_0) \in f(D)$ pontban, akkor a $g \circ f$ függvény folytonos az x_0 pontban.

Feladatok

1. Feladat. Legyenek $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ rögzítettek. Vizsgáljuk meg korlátosság és monotonitás szempontjából az

$$f(x) = ax + b \quad (x \in \mathbb{R})$$

módon értelmezett függvényt.

2. Feladat. Legyenek $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Vizsgáljuk meg az

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvényt korlátosság szempontjából.

3. Feladat. Vizsgáljuk meg az alábbi függvényeket korlátosság szempontjából.

(a) $f(x) = \frac{1}{x} \quad (x \in]0, +\infty[)$

(c) $f(x) = 5 - x^2 \quad (x \in \mathbb{R})$

(b) $f(x) = x^2 - 4x + 6 \quad (x \in \mathbb{R})$

(d) $f(x) = -\frac{2x+3}{x-1} \quad (x \in]1, +\infty[)$

4. Feladat. Vizsgáljuk meg az alábbi függvényeket monotonitás szempontjából.

(a) $f(x) = \frac{1}{x} \quad (x \in]0, +\infty[)$

(b) $f(x) = |x - \pi| \quad (x \in \mathbb{R})$

5. Feladat. Legyen $n \in \mathbb{N}$ tetszőleges, de rögzített. Vizsgáljuk meg monotonitás szempontjából az

$$f(x) = x^n \quad (x \in \mathbb{R})$$

módon megadott $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt.

6. Feladat. Adjunk példát olyan $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ függvényekre, melyekre az alábbiak egyidejűleg teljesülnek.

(a) f, g nem folytonos az $x_0 \in D$ pontban és $f + g$ folytonos x_0 -ban.

(b) f, g nem folytonos az $x_0 \in D$ pontban és $f + g$ nem folytonos x_0 -ban.

(c) f, g nem folytonos az $x_0 \in D$ pontban és $f \cdot g$ folytonos x_0 -ban.

(d) f, g nem folytonos az $x_0 \in D$ pontban és $f \cdot g$ nem folytonos x_0 -ban.

(e) f a D halmaz egyetlen pontjában sem folytonos, és az $|f|$ függvény a D minden pontjában folytonos.

(f) f a D halmaz egyetlen pontjában sem folytonos, és az f^2 függvény a D minden pontjában folytonos.

7. Feladat. Legyen $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$ és $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ függvények, $x_0 \in D$.

(a) Igaz-e, hogy az $f + g$ függvénynek az x_0 szakadási helye, ha f folytonos az x_0 pontban, g azonban nem?

(b) Igaz-e, hogy az $f + g$ függvénynek az x_0 szakadási helye, ha az x_0 pont szakadási helye mind az f , mind a g függvénynek?

(c) Igaz-e, hogy az $f \cdot g$ függvénynek az x_0 szakadási helye, ha f folytonos az x_0 pontban, g azonban nem?

(d) Igaz-e, hogy az $f \cdot g$ függvénynek az x_0 szakadási helye, ha az x_0 pont szakadási helye mind az f , mind a g függvénynek?

(e) Igaz-e, hogy az $f \circ g$ függvénynek az x_0 szakadási helye, ha f folytonos az x_0 pontban, g azonban nem?

(f) Igaz-e, hogy az $f \circ g$ függvénynek az x_0 szakadási helye, ha az x_0 pont szakadási helye mind az f , mind a g függvénynek?

8. Feladat. Legyen $[a, b] \subset \mathbb{R}$ és $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ egy folytonos függvény. Igazoljuk, hogy ekkor az

(a)

(b)

$$m(x) = \inf \{f(\xi) \mid a \leq \xi \leq x\} \quad (x \in [a, b]) \quad M(x) = \sup \{f(\xi) \mid a \leq \xi \leq x\} \quad (x \in [a, b])$$

módon megadott $m, M: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvények is folytonosak.

9. Feladat. Legyen $[a, b] \subset \mathbb{R}$ és $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvények. Igazoljuk, hogy ekkor az

(a)

(b)

$$\phi(x) = \min \{f(x), g(x)\} \quad (x \in [a, b]) \quad \psi(x) = \max \{f(x), g(x)\} \quad (x \in [a, b])$$

módon megadott $\phi, \psi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvények is folytonosak.

10. Feladat. Vizsgáljuk meg az alábbi függvényeket folytonosság szempontjából.

(a) $f(x) = |x| \quad (x \in \mathbb{R})$

(d) $f(x) = |x^2 - 4| \quad (x \in \mathbb{R})$

(b) $f(x) = ax + b \quad (x \in \mathbb{R}, a, b \in \mathbb{R} \text{ rögzítettek})$

(c) $f(x) = ax^2 + bx + c \quad (x \in \mathbb{R}, a, b, c \in \mathbb{R} \text{ rögzítettek})$ (e) $f(x) = x^r \quad (x \in]0, +\infty[, r \in \mathbb{Q} \text{ rögzített})$

11. Feladat. Vizsgáljuk meg az alábbi függvényeket folytonosság szempontjából.

(a)

(b)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x + 2} & \text{ha } x \neq -2 \\ 0 & \text{ha } x = -2 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x + 2} & \text{ha } x \neq -2 \\ -4 & \text{ha } x = -2 \end{cases}$$

12. Feladat. Vizsgáljuk meg az alábbi függvényeket folytonosság szempontjából.

(a)

(c)

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & \text{ha } x \geq 0 \\ x^2 - 2x, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{ha } x < 4 \\ 2 & \text{ha } x = 4 \\ x^2 - 12x + 39 & \text{ha } x > 4 \end{cases}$$

(b)

(d)

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{ha } x \leq 1 \\ x^2 - 5x & \text{ha } x > 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \sin(\pi x) & \text{ha } x > 2 \\ 2 & \text{ha } x = 2 \\ \frac{1}{x - 2} & \text{ha } x < 2 \end{cases}$$

13. Feladat. Vizsgáljuk meg az alábbi függvényeket folytonosság szempontjából.

(a)

(b)

(c)

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 0 & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \\ \sqrt{|x|}, & \text{ha } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

14. Feladat. Vizsgáljuk meg az alábbi függvényeket folytonosság szempontjából.

(a)

(b)

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$f(x) = [x] \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$(c) \quad f(x) = \{x\} \quad (x \in \mathbb{R}), \quad (d) \quad f(x) = \operatorname{sgn}(x^2 - 3x + 2) \quad (x \in \mathbb{R})$$

ahol $[x]$ az x valós szám egészrészét, míg $\{x\}$ az x valós szám törtrészét jelöli.

15. Feladat. Vizsgáljuk meg az alábbi függvényeket folytonosság szempontjából.

$$(a) \quad f(x) = \operatorname{sgn}(3x^2 - x) \quad (x \in \mathbb{R}) \quad (d) \quad f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } x \in [-1, 1] \\ 1, & \text{egyébként} \end{cases}$$

$$(b) \quad f(x) = \operatorname{sgn}(x(1 - x^2)) \quad (x \in \mathbb{R}) \quad (e) \quad f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } x \in [-1, 1] \\ x^3, & \text{egyébként} \end{cases}$$

$$(c) \quad f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{ha } x \in [0, 1] \\ 2 - x, & \text{egyébként} \end{cases} \quad (f) \quad f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{ha } x \in [0, 1] \\ -\sqrt{|x|}, & \text{egyébként} \end{cases}$$