1. Véges automata → reguláris nyelvtan
(jegyzet, 97-98. oldal)

5.31. példa - Ekvivalens reguláris nyelvtan megadása véges automatához 1. feladat

Feladat: Adjunk meg az $A=(\{q_0,q_1,q_2\},\{a,b\},q_0,\delta,\{q_0,q_2\})$

$\delta(q_0,a)=\{q_1,q_2\}$, $\delta(q_0,b)=\{q_2\}$,
$\delta(q_1,a)=\{q_0\}$, $\delta(q_2,b)=\{q_1\}$

véges automatával ekvivalens G reguláris nyelvtant!

Megoldás:

A G nyelvtan nemterminálisainak halmaza az automata állapothalmazával egyezik meg, a terminálisok halmazát az automata bemenő jeleinek halmaza alkotja, a startszimbólum az automata kezdőállapota lesz.

A G nyelvtan szabályainak halmazát két csoportba oszthatjuk.
Az első csoportba tartoznak azok a szabályok, melyeket az átmenetfüggvényből kaphatunk meg.
Ha az A automata a q_i állapotból az x bemenőjel hatására a q_j állapotba megy át,
akkor a szabályok közé bekerül a $q_i \to xq_j$ szabály.
A második csoportba azok a szabályok tartoznak, melyeket a végállapotok alapján adhatunk meg.
Amennyiben a q_k állapot szerepel az A automata végállapotainak a halmazában,
úgy fel kell vennünk G nyelvtan szabályai közé a $q_k \to \lambda$ szabályt.

Jelen esetben:
$G=(\{q_0,q_1,q_2\},\{a,b\},q_0,H)$,
$H=\{\ q_0 \to aq_1,\ q_0 \to aq_2,\ q_0 \to bq_2,\ q_1 \to aq_0,\ q_2 \to bq_1,\ q_0 \to \lambda,\ q_2 \to \lambda\ \}$. ★

5.32. példa - Ekvivalens reguláris nyelvtan megadása véges automatához 2. feladat

Adjunk meg az $A=(\{q_0,q_1\},\{x,y\},q_0,\delta,\{q_1\})$,

$\delta(q_0,x)=\{q_0,q_1\}$, $\delta(q_1,y)=\{q_0\}$

véges automatával ekvivalens G reguláris nyelvtant!

Megoldás:
G=($\{q_0,q_1\},\{x,y\},q_0,H$),
H=$\{\ q_0 \rightarrow xq_0,\ q_0 \rightarrow xq_1,\ q_1 \rightarrow yq_0,\ q_1 \rightarrow \lambda\ \}$. ★

5.33. példa - Ekvivalens reguláris nyelvtan megadása véges automatához 3. feladat

Adjunk meg az A=($\{q_0,q_1,q_2\},\{x,y\},q_0,\delta,\{q_2\}$),

$\delta(q_0,x)=\{q_1\}$, $\delta(q_0,y)=\{q_2\}$, $\delta(q_1,x)=\{q_0,q_2\}$,
$\delta(q_1,y)=\{q_1,q_2\}$, $\delta(q_2,x)=\{q_0\}$, $\delta(q_2,y)=\{q_1\}$

véges automatával ekvivalens G reguláris nyelvtant!

Megoldás:
G=($\{q_0,q_1,q_2\},\{x,y\},q_0,H$),
H=$\{\ q_0 \rightarrow xq_1,\ q_0 \rightarrow yq_2,\ q_1 \rightarrow xq_0,\ q_1 \rightarrow xq_2,\ q_1 \rightarrow yq_1,$
$q_1 \rightarrow yq_2,\ q_2 \rightarrow xq_0,\ q_2 \rightarrow yq_1,\ q_2 \rightarrow \lambda\ \}$. ★

5.34. példa - Ekvivalens reguláris nyelvtan megadása véges automatához 4. feladat

Adjunk meg az A=($\{q_0,q_1,q_2,q_3\},\{x,y,z\},q_0,\delta,\{q_0,q_2,q_3\}$),

$\delta(q_0,x)=\{q_1,q_3\}$, $\delta(q_0,y)=\{q_2\}$, $\delta(q_1,z)=\{q_0,q_2\}$,
$\delta(q_2,x)=\{q_0\}$, $\delta(q_3,y)=\{q_1\}$.

véges automatával ekvivalens G reguláris nyevtant!

Megoldás:
G=($\{q_0,q_1,q_2,q_3\},\{x,y,z\},q_0,H$),
H=$\{\ q_0 \rightarrow\ xq_1,\ q_0 \rightarrow\ xq_3,\ q_0 \rightarrow\ yq_2,\ q_1 \rightarrow\ zq_0,\ q_1 \rightarrow\ zq_2,$
$q_2 \rightarrow\ xq_0,\ q_3 \rightarrow\ yq_1,\ q_0 \rightarrow\ \lambda,\ q_2 \rightarrow \lambda,\ q_3 \rightarrow \lambda\ \}$. ★

1. Reguláris nyelvtan → véges automata

(jegyzet, 99 - 103. oldal)

5.35. példa - Ekvivalens véges automata megadása reguláris nyelvtanhoz 1. feladat

Adjunk meg a $G=(\{S,A,B\},\{a,b\},S,H)$ $H=\{\ S \to abaB,\ A \to B,\ A \to cacb,\ B \to bA,\ B \to S,\ B \to \lambda\ \}$ nyelvtannal ekvivalens véges üresszóátmenet nélküli automatát!

Megoldás:

(I.) Első lépésben megadunk egy G_1 nyelvtant, ami ekvivalens a G nyelvtannal és nem szerepelnek benne $Y \to y_1y_2 \ldots y_n$ és $Y \to y_1y_2 \ldots Y_n$, $n \geq 3$ alakú szabályok. A H szabályhalmaz ilyen alakú szabályait helyettesítjük új szabályokkal, a többi szabályt pedig változtatás nélkül átvesszük a H_1 szabályhalmazba.

Minden $Y \to y_1y_2 \ldots y_n$, $n \geq 3$ alakú szabályhoz vezessünk be $Z_1,Z_2, \ldots ,Z_{n-1}$ új nemterminálisokat, Z_i-ből fogjuk levezetni az $y_{i+1} \ldots y_n$. Ehhez az összes $Y \to y_1y_2 \ldots y_n$, $n \geq 3$ alakú szabályt helyettesítsük a következő szabályokkal:

$Y \to y_1Z_1,$
$Z_1 \to y_2Z_2,$
.
.
.
$Z_{n-2} \to y_{n-1}Z_{n-1},$
$Z_{n-1} \to y_n.$

Minden $Y \to y_1y_2 \ldots Y_n$, $n \geq 3$ alakú szabályhoz vezessünk be $Z_1,Z_2, \ldots,Z_{n-2}$ új nemterminálisokat. Z_i-ből az $y_{i+1} \ldots y_n$ szót fogjuk levezetni:
az összes $Y \to y_1y_2 \ldots Y_n$, $n \geq 3$ alakú szabályt helyettesítsük a következő szabályokkal:

$Y \to y_1Z_1,$
$Z_1 \to y_2Z_2,$
.
.
.
$Z_{n-3} \to y_{n-2}Z_{n-2},$
$Z_{n-2} \to y_{n-1}Y_n.$

Jelen esetben:

$\{G_1=(\{S,A,B,Z_1,Z_2,Z_3,Z_4,Z_5\},\{a,b\},S,H_1)$. $H_1=\{ S \rightarrow aZ_1,\ Z_1 \rightarrow bZ_2,\ Z_2 \rightarrow aB,\ A \rightarrow B,\ A \rightarrow cZ_3,\ Z_3 \rightarrow aZ_4,\ Z_4 \rightarrow cZ_5,\ Z_5 \rightarrow b,\ B \rightarrow bA,\ B \rightarrow S,\ B \rightarrow \lambda \}$

(II.) Második lépésben megadunk egy G' nyelvtant, ami ekvivalens a G nyelvtannal és nem szerepelnek benne $X \rightarrow Z$ alakú szabályok. Ehhez két lépésre van szükség.

- Először meghatározunk egy $U(Z)$ halmazt minden olyan Z nemterminálishoz, mely levezethető legalább egy másik nemterminálisból a G_1 nyelvtanban és szerepel olyan H_1 halmazban lévő szabály bal oldalán, amelynek jobb oldalán egy terminális, vagy egy terminális és egy nemterminális betű, vagy pedig az üresszó áll. Az $U(Z)$ halmaz tartalmazni fogja az összes olyan nemterminálist, melyből egy vagy több lépésben levezethető a Z betű.

Jelen esetben:
$U(B)=\{A\}, U(S)=\{B,A\}$.

- Majd a H' szabályhalmazba átvesszük a H_1 szabályhalmaz mindazon szabályait, melyek nem $X \rightarrow Z$ alakúak, majd hozzávesszük mindazon szabályokat, melyeket úgy kapunk, hogy a már átvett szabályok bal oldalán szereplő betűt a hozzá tartozó U halmaz elemeivel helyettesítjük.

Formálisan:

$H_2=(H_1 \cup \{W \rightarrow p \mid Z \rightarrow p \in H_1, W \in U(Z)\}) \setminus \{X \rightarrow Y \mid X,Y \in N_1\}$.

Jelen esetben:

$G'=(\{S,A,B,Z_1,Z_2,Z_3,Z_4,Z_5\},\{a,b\},S,H')$. $H'=\{ S \rightarrow aZ_1,\ B \rightarrow aZ_1,\ A \rightarrow aZ_1,\ Z_1 \rightarrow bZ_2,\ Z_2 \rightarrow aB,\ A \rightarrow cZ_3,\ Z_3 \rightarrow aZ_4,\ Z_4 \rightarrow cZ_5,\ Z_5 \rightarrow b,\ B \rightarrow bA,\ A \rightarrow bA,\ B \rightarrow \lambda,\ A \rightarrow \lambda \}$

(III.) Harmadik lépésben megadjuk a G nyelvtannal ekvivalens A véges automatát. Az A automata állapothalmazát úgy kapjuk, hogy a G' nyelvtan nemterminálisainak a halmazához hozzáadunk egy új q_v állapotot. Az automata bemenő jeleinek a halmaza megegyezik a G nyelvtan terminálisainak a halmazával, a kezdőállapota a startszimbólum lesz, a végállapotok halmaza pedig tartalmaz minden olyan X állapotot, mely szerepelt $X \rightarrow \lambda$ alakú szabályban, valamint tartalmazza az újonnan bevezett q_v állapotot is.

Az A automata δ átmenetfüggvényét úgy kapjuk, hogy minden H' halmazban szereplő $X \rightarrow yZ$ szabály esetén felvesszük a $\delta(X,y)=Z$ átmenetet, valamint az $X \rightarrow y$ alakú szabályok esetén a $\delta(X,y)=q_v$ átmenetet.

Jelen esetben:
$A=(\{S,A,B,Z_1,Z_2,Z_3,Z_4,Z_5,q_v\},\{a,b\},S,\delta,\{B,A,q_v\})$.

$\delta(S,a)=\{Z_1\}$, $\delta(B,a)=\{Z_1\}$, $\delta(A,a)=\{Z_1\}$, $\delta(Z_1,b)=\{Z_2\}$, $\delta(Z_2,a)=\{B\}$, $\delta(A,c)=\{Z_3\}$, $\delta(Z_3,a)=\{Z_4\}$, $\delta(Z_4,c)=\{Z_5\}$, $\delta(Z_5,b)=\{q_v\}$, $\delta(B,b)=\{A\}$, $\delta(A,b)=\{A\}$ ★

5.36. példa - Ekvivalens véges automata megadása reguláris nyelvtanhoz feladat

Adjunk meg a $G=(\{S,A,B\},\{x,y\},S,H)$
$H=\{\ S \to xA,\ S \to yyB,\ A \to B,\ B \to yS,\ B \to xyx,\ B \to \lambda\ \}$

nyelvtannal ekvivalens véges automatát!

Megoldás:
(I.)
$G_1=(\{S,A,B,Z_1,Z_2,Z_3\},\{x,y\},S,H_1)$.
$H_1=\{\ S \to xA,\ S \to yZ_1,\ Z_1 \to yB,\ A \to B,$
$B \to yS,\ B \to xZ_2,\ Z_2 \to yZ_3,\ Z_3 \to x,$
$B \to \lambda\ \}$

(II.)
$U(B)=\{A\}$.
$G'=(\{S,A,B,Z_1,Z_2,Z_3\},\{a,b\},S,H')$.
$H'=\{\ S \to xA,\ S \to yZ_1,\ Z_1 \to yB,\ B \to yS, A \to yS,$
$B \to xZ_2, A \to xZ_2,\ Z_2 \to yZ_3,\ Z_3 \to x,\ B \to \lambda, A \to \lambda\ \}$

(III.)
$A=(\{S,A,B,Z_1,Z_2,Z_3,q_v\},\{x,y\},S,\delta,\{B,A,q_v\})$.

$\delta(S,x)=\{A\},\ \delta(S,y)=\{Z_1\},\ \delta(Z_1,y)=\{B\},\ \delta(B,y)=\{S\},\ \delta(A,y)=\{S\},$
$\delta(B,x)=\{Z_2\},\ \delta(A,x)=\{Z_2\},\ \delta(Z_2,y)=\{Z_3\},\ \delta(Z_3,x)=\{q_v\}$ ★

5.37. példa - Ekvivalens véges automata megadása reguláris nyelvtanhoz feladat

Adjunk meg a $G=(\{S,A,B\},\{x,y\},S,H)$
$H=\{\ S \to xA,\ S \to yB,\ S \to B,\ B \to A,\ A \to xS,\ A \to y\ \}$
nyelvtannal ekvivalens véges automatát!

Megoldás:
(I.)
Mivel a G nyelvtanban nincs $Y \to y_1y_2 \ldots y_n$ és $Y \to y_1y_2 \ldots Y_n$, $n \geq 3$ alakú szabály, ezért
$G_1=G$.

(II.)
$U(A)=\{B,S\}$.
$G'=(\{S,A,B\},\{x,y\},S,H')$.
$H'=\{\ S \to xA,\ S \to yB,\ A \to xS,\ B \to xS,\ S \to xS,\ A \to y,\ B \to y,\ S \to y\ \}$

(III.)
$A=(\{S,A,B,q_v\},\{x,y\},S,\delta,\{q_v\})$.

$\delta(S,x)=\{A\}$, $\delta(S,y)=\{B\}$, $\delta(A,x)=\{S\}$, $\delta(B,x)=\{S\}$,
$\delta(S,x)=\{S\}$, $\delta(A,y)=\{q_v\}$, $\delta(B,y)=\{q_v\}$, $\delta(S,y)=\{q_v\}$ ★

5.38. példa - Ekvivalens véges automata megadása reguláris nyelvtanhoz 4. feladat

Adjunk meg a $G=(\{S,A,B\},\{x,y\},S,H)$
$H=\{\ S \to xxxA,\ S \to yyyB,\ A \to yS,\ B \to xS,\ A \to xx,\ B \to yy\ \}$

nyelvtannal ekvivalens véges automatát!

Megoldás:
(I.)
$G'=(\{S,A,B,Z_v,Z_2,Z_3,Z_4,Z_5,Z_6\},\{x,y\},S,H')$.
$H'=\{\ S \to xZ_1,\ Z_1 \to xZ_2,\ Z_2 \to xA,\ S \to yZ_3,\ Z_3 \to yZ_4,\ Z_4 \to yB,$
$A \to yS,\ B \to xS,\ A \to xZ_5,\ Z_5 \to x,\ B \to yZ_6,\ Z_6 \to y\ \}$

(II.)
Mivel a G_1 nyelvtanban nincs $X \to Z$ alakú szabály, ezért $G_2=G_1$.

(III.)
$A=(\{S,A,B,Z_1,Z_2,Z_3,Z_4,Z_5,Z_6,q_v\},\{x,y\},S,\delta,\{q_v\})$.

$\delta(S,x)=\{Z_1\}$, $\delta(Z_1,x)=\{Z_2\}$, $\delta(Z_2,x)=\{A\}$, $\delta(S,y)=\{Z_3\}$, $\delta(Z_3,y)=\{Z_4\}$, $\delta(Z_4,y)=\{B\}$,
$\delta(A,y)=\{S\}$, $\delta(B,x)=\{S\}$, $\delta(A,x)=\{Z_5\}$, $\delta(Z_5,x)=\{q_v\}$, $\delta(B,y)=\{Z_6\}$, $\delta(Z_6,y)=\{q_1\}$ ★

5.39. példa - Ekvivalens véges automata megadása reguláris nyelvtanhoz 5. feladat

Adjunk meg a $G=(\{S,X,Y\},\{x,y,z\},S,H)$

$H=\{\ S \to xX,\ S \to z,\ S \to \lambda,\ X \to yY,\ X \to zS,\ X \to x,\ Y \to xX,\ Y \to y,\ \}$

nyelvtannal ekvivalens véges automatát!

Megoldás:

(I.)
Mivel a G nyelvtanban nincs $Y \rightarrow y_1y_2 \dots y_n$ és
$Y \rightarrow y_1y_2 \dots Y_n$, $n \geq 3$ alakú szabály, ezért G_1=G.

(II.)
Mivel a G_1 nyelvtanban nincs $X \rightarrow Z$ alakú szabály, ezért G_2=G_1.

(III.)
$A=(\{S,X,Y,q_v\},\{x,y,z\},S,\delta,\{S,q_v\})$.

$\delta(S,x)=\{X\}$, $\delta(S,z)=\{q_v\}$, $\delta(X,y)=\{Y\}$, $\delta(X,x)=\{q_v\}$, $\delta(X,z)=\{S\}$, $\delta(Y,y)=\{q_v\}$, $\delta(Y,x)=\{X\}$ ★

5.40. példa - Ekvivalens véges automata megadása reguláris nyelvtanhoz 6 feladat

Adjunk meg a $G=(\{S,A\},\{0,1\},S,H)$
$H=\{ S \rightarrow 0, S \rightarrow 1A, A \rightarrow 0A, A \rightarrow 1A, A \rightarrow \lambda \}$

nyelvtannal ekvivalens véges automatát!

Megoldás:
(I.)
Mivel a G nyelvtanban nincs $Y \rightarrow y_1y_2 \dots y_n$ és $Y \rightarrow y_1y_2 \dots Y_n$, $n \geq 3$
alakú szabály, ezért G_1=G.

(II.)
Mivel a G_1 nyelvtanban nincs $X \rightarrow Z$ alakú szabály, ezért G_2=G_1.

(III.)
$A=(\{S,A,q_v\},\{0,1\},S,\delta,\{A,q_v\})$.

$\delta(S,0)=\{q_v\}$, $\delta(S,1)=\{A\}$, $\delta(A,0)=\{A\}$, $\delta(A,1)=\{A\}$ ★

5.41. példa - Ekvivalens véges automata megadása reguláris nyelvtanhoz 7 feladat

Adjunk meg a $G=(\{S,A\},\{0,1,+,-\},S,H)$
$H=\{ S \rightarrow 0, S \rightarrow 1A, S \rightarrow -1A, A \rightarrow 0A,$
$A \rightarrow 1A, A \rightarrow \lambda, A \rightarrow +1A, A \rightarrow -1A \}$

nyelvtannal ekvivalens véges automatát!

Megoldás:

(I.)
$G_1=(\{S,A,Z_1,Z_2,Z_3\},\{0,1,+,-\},S,H)$
$H=\{\ S \to 0,\ S \to 1A,\ S \to -Z_1,\ Z_1 \to 1A,\ A \to 0A,\ A \to 1A,$
$A \to \lambda,\ A \to +Z_2,\ Z_2 \to 1A,\ A \to -Z_3,\ Z_3 \to 1A\ \}$

(II.)
Mivel a G_1 nyelvtanban nincs $X \to Z$ alakú szabály, ezért $G_2=G_1$.

(III.)
$A=(\{S,A,Z_1,Z_2,Z_3,q_v\},\{0,1\},S,\delta,\{A,q_v\})$.

$\delta(S,0)=\{q_v\},\ \delta(S,1)=\{A\},\ \delta(S,-)=\{Z_1\},\ \delta(Z_1,1)=\{A\},\ \delta(A,0)=\{A\},$
$\delta(A,1)=\{A\},\ \delta(A,+)=\{Z_2\},\ \delta(Z_2,1)=\{A\},\ \delta(A,-)=\{Z_3\},\ \delta(Z_3,1)=\{A\}$ ★

2. Környezetfüggetlen nyelvtan megadása környezetfüggetlen nyelvhez

2.1 Adjunk nyelvtant az alábbi nyelvekhez, az ábécé minden esetben a {0,1} halmaz.

a, A legalább három 1-est tartalmazó szavak nyelve.

b, Azok a nemüres szavak, melyek ugyanazzal a betűvel kezdődnek, mint amivel végződnek.

c, A páratlan hosszúságú szavakból álló nyelv.

d, Azok a páratlan hosszú szavak, melyek középső betűje 0.

e, A palindrómák nyelve.

f, Az üres halmaz.

Megoldások: (A nagybetűk nemterminálisok, a kezdőszimbólum az S, az üres szó jele epszilon.)

(a) $S \to R1R1R1R$
$R \to 0R \mid 1R \mid \varepsilon$

b) S → 1A1 | 0A0 | 1 | 0
A → 0A | 1A | ε

c) S→ 0S0 | 0S1 | 1S0 | 1S1 | 0 | 1

(d) $S \to 0 \mid 0S0 \mid 0S1 \mid 1S0 \mid 1S1$

e) S → 0S0 | 1S1 | 0 | 1 | ε

f) Olyan nyelvtan, melyben a szabályhalmaz üres.

2.2 Adjunk környezetfüggetlen grammatikát az alábbi nyelvhez.

a, Azok az *{a,b}* feletti szavak, melyekben több *a* van mint *b*.

Megoldás:

(a) $S \rightarrow T\mathtt{a}T$

$T \rightarrow TT \mid \mathtt{a}T\mathtt{b} \mid \mathtt{b}T\mathtt{a} \mid \mathtt{a} \mid \varepsilon$

<u>3. Chomsky normálforma</u> (jegyzet 146 - 148. oldal)

7.5. példa - Chomsky normálforma 1.feladat

Adjunk meg a $G=(\{S,A,B\},\{a,b,c\},S,H)$ nyelvtannal ekvivalens Chomsky-féle normálalakú nyelvtant, ahol $H = \{ S \rightarrow ABaba, A \rightarrow B, A \rightarrow c, B \rightarrow AbA, B \rightarrow S \}$.

Megoldás:

(I.) Első lépésben megadunk egy G_1 nyelvtant, ami ekvivalens a G nyelvtannal
Ehhez először a G nyelvtan minden olyan x_i terminális betűjéhez, amely szerepel olyan szabályban, ami nem normálalakú, új X_i nemterminálist vezetünk be.
Ezután a G_1 nyelvtan H_1 szabályhalmazát úgy kapjuk, hogy felvesszük az $X_i \rightarrow x_i$ szabályokat, valamint a H szabályhalmaz elemeit átvesszük úgy, hogy a szabályokban az x_i betűk azon előfordulásait, melyek nem (terminális) normálalakú szabályban szerepelnek, X_i-re cseréljük.

Jelen esetben legyenek az új nemterminálisok az X_a és az X_b, ekkor:
$G_1=(\{S,A,B,X_a,X_b\},\{a,b,c\},S,H_1)$, ahol
$H_1=\{ X_a \rightarrow a, X_b \rightarrow b, S \rightarrow ABX_aX_bX_a, A \rightarrow B, A \rightarrow c, B \rightarrow AX_bA, B \rightarrow S \}$

(II.) Második lépésben megadunk egy G_2 nyelvtant, ami ekvivalens
az eredeti nyelvtannal, és nem szerepel benne $Y \rightarrow Y_1Y_2...Y_n$, $n>2$ alakú szabály.
Ehhez a G_1 nyelvtanból indulunk ki.
A H_1 szabályhalmaz $Y \rightarrow Y_1Y_2...Y_n$, $n>2$ alakú szabályait helyettesítjük új szabályokkal, a többi szabályt pedig változtatás nélkül átvesszük a H_2 szabályhalmazba.
Minden $Y \rightarrow Y_1Y_2...Y_n$, $n>2$ alakú szabályhoz
vezessünk be $Z_1,Z_2, ... ,Z_{n-2}$ új nemterminálisokat,
úgy, hogy Z_i-ből az $Y_{i+1}...Y_n$ szót tudjuk levezetni:
az összes $Y \rightarrow Y_1Y_2...Y_n$, $n>2$ alakú szabályt helyettesítsük
a következő szabályokkal:
$Y \rightarrow Y_1Z_1,$

$Z_1 \rightarrow Y_2Z_2$,

.

.

.

$Z_{n-3} \rightarrow Y_{n-2}Z_{n-2}$,
$Z_{n-2} \rightarrow Y_{n-1}Y_n$.

Jelen esetben:
$G_2=(\{S,A,B,X_a,X_b,Z_1,Z_2,Z_3,Z_4\},\{a,b,c\},S,H_2)$, ahol
$H_2=\{ X_a \rightarrow a, X_b \rightarrow b, S \rightarrow AZ_1, Z_1 \rightarrow BZ_2, Z_2 \rightarrow X_aZ_3, Z_3 \rightarrow X_bX_a, A \rightarrow B, A \rightarrow c, B \rightarrow AZ_4, Z_4 \rightarrow X_bA, B \rightarrow S \}$

(III.) Harmadik lépésben megadjuk az eredeti nyelvtannal ekvivalens
G' Chomsky-féle normálalakú nyelvtant. Ehhez két lépésre van szükség.
Első lépésben meghatározunk egy $U(Z)$ halmazt minden olyan Z nemterminálishoz, mely levezethető legalább egy másik nemterminálisból a G_2 nyelvtanban és
szerepel olyan H_2 halmazban lévő szabály bal oldalán, amelynek jobb oldalán egy terminális vagy pedig két nemterminális betű áll.
Az $U(Z)$ halmaz tartalmazni fogja az összes olyan nemterminálist,
melyből egy vagy több lépésben levezethető a Z betű.

Jelen esetben:
$U(B)=\{A\}$,
$U(S)=\{B,A\}$.
Második lépésben a H' szabályhalmazba átvesszük a H_2 szabályhalmaz mindazon szabályait,
melyek jobb oldalán egy terminális betű vagy pedig kettő nemterminális található,
majd hozzávesszük mindazon szabályokat, melyeket úgy kapunk, hogy a már
átvett szabályok bal oldalán szereplő betűt a hozzá tartozó U halmaz elemeivel helyettesítjük.

Formálisan:
$H'=(H_2\cup\{Z \rightarrow p \mid X \rightarrow p\in H_2, Z\in U(X)\})\setminus\{X \rightarrow Y \mid X,Y\in N\}$.Jelen esetben:
$G'=(\{S,A,B,X_a,X_b,Z_1,Z_2,Z_3,Z_4\},\{a,b,c\},S,H')$, ahol
$H'=\{ X_a \rightarrow a, X_b \rightarrow b, S \rightarrow AZ_1, B \rightarrow AZ_1, A \rightarrow AZ_1, Z_1 \rightarrow BZ_2, Z_2 \rightarrow X_aZ_3, Z_3 \rightarrow X_bX_a, A \rightarrow c, B \rightarrow AZ_4, A \rightarrow AZ_4, Z_4 \rightarrow X_bA \}$ ★

7.6. példa - Chomsky normálforma 2.feladat

Adjunk meg a $G=(\{S,A,B\},\{x,y,z\},S,H)$ nyelvtannal ekvivalens Chomsky-féle normálalakú nyelvtant, ahol $H=\{ S \rightarrow BB, A \rightarrow S, A \rightarrow xxzz, A \rightarrow y, B \rightarrow AxzxA, B \rightarrow A \}$.

Megoldás:
(I.)
Legyenek az új nemterminálisok az X és a Z, ekkor:
$G_1=(\{S,A,B,X,Z\},\{x,y,z\},S,H_1)$, ahol
$H_1=\{ X \rightarrow x, Z \rightarrow z, S \rightarrow BB, A \rightarrow S, A \rightarrow XXZZ, A \rightarrow y, B \rightarrow AXZXA, B \rightarrow A \}$

(II.)
G_2=($\{S,A,B,X,Z,Z_1,Z_2,Z_3,Z_4,Z_5\},\{x,y,z\},S,H_2$), ahol
H_2=$\{ X \to x, Z \to z, S \to BB, A \to S, A \to XZ_1, Z_1 \to XZ_2, Z_2 \to ZZ, A \to y, B \to AZ_3,$
$Z_3 \to XZ_4, Z_4 \to ZZ_5, Z_5 \to XA, B \to A \}$
(III.)
$U(S)=\{A,B\}, U(A)=\{B\}$.
G'=($\{S,A,B,X,Z,Z_1,Z_2,Z_3,Z_4,Z_5\},\{x,y,z\},S,H'$), ahol
H'=$\{ X \to x, Z \to z, S \to BB, A \to BB, B \to BB, A \to XZ_1, B \to XZ_1, Z_1 \to XZ_2, Z_2 \to ZZ,$
$A \to y, B \to y, B \to AZ_3, Z_3 \to XZ_4, Z_4 \to ZZ_5, Z_5 \to XA \}$ ★

7.7. példa - Chomsky normálforma 3.feladat

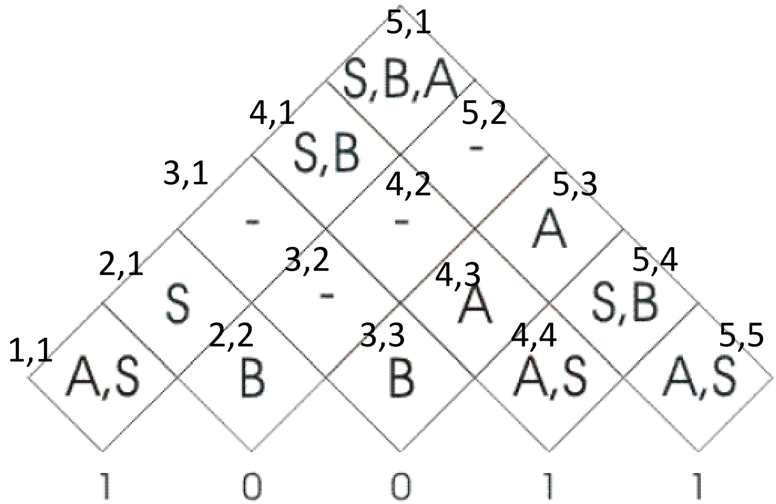
Adjunk meg a G=($\{S,A,B\},\{x,y\},S,H$) nyelvtannal ekvivalens Chomsky-féle normálalakú nyelvtant, ahol
H=$\{ S \to ABBAB, S \to x, A \to BB, A \to S, A \to B, B \to ASA, B \to y \}$.

Megoldás: Mivel az első lépésben új nemterminálisok bevezetésére nincs szükség,
(I.) ezért $G_1=G$.
(II.)
G_2=($\{S,A,B,Z_1,Z_2,Z_3,Z_4\},\{x,y\},S,H_2$), ahol
H_2=$\{ S \to AZ_1, Z_1 \to BZ_2, Z_2 \to BZ_3, Z_3 \to AB, S \to x, A \to BB, A \to S, A \to B,$
$B \to AZ_4, Z_4 \to SA, B \to y \}$
(III.)
$U(S)=\{A\}, U(B)=\{A\}$.
G'=($\{S,A,B,Z_1,Z_2,Z_3,Z_4\},\{x,y\},S,H'$), ahol
H'=$\{ S \to AZ_1, A \to AZ_1, Z_1 \to BZ_2, Z_2 \to BZ_3, Z_3 \to AB, S \to x, A \to x, A \to BB, B \to AZ_4,$
$A \to AZ_4, Z_4 \to SA, B \to y, A \to y \}$ ★

<u>4. Cocke – Younger – Kasami algoritmus</u> (jegyzet 178 – 180. oldal)

7.35. példa - Cocke-Younger-Kasami algoritmus 1. feladat

Tekintsük a következő grammatikát!
G=($\{S,A,B\},\{0,1\},S,H$),ahol H szabályai:
$\{S \to SA, S \to AB, A \to BS, B \to SA, A \to 1, S \to 1, B \to 0\}$
Bizonyítsuk be, hogy az 10011 szó benne van a grammatika
által generált nyelvben, majd adjuk meg az összes lényegesen különböző levezetését.



Megoldás: Jelölje $V_{i,j}$ az (i,j) rekeszt.

1. levezetés: $S \Rightarrow SA \Rightarrow SAA \Rightarrow ABAA \Rightarrow 1BAA \Rightarrow 10AA \Rightarrow 10BSA \Rightarrow 100SA \Rightarrow 1001A \Rightarrow 10011$

Nézzük, hogyan kerültek a levezetésbe az új nemterminálisok!

$S \in V_{5,1}$, mert $S \in V_{4,1}$ és $A \in V_{5,5}$, ahol $S \to SA$-t használtuk. Kövessük a baloldali nemterminálist!

$S \in V_{4,1}$, mert $S \in V_{2,1}$ és $A \in V_{4,3}$, ahol $S \to SA$-t használtuk ismét. Most ismét a balodali nemterminálist követjük

$S \in V_{2,1}$, mert $A \in V_{1,1}$ és $B \in V_{2,2}$, ahol $S \to AB$-t használtuk.

$A \in V_{1,1}$, mert $A \to 1 \in H$

$B \in V_{2,2}$, mert $B \to 0 \in H$

$A \in V_{4,3}$, mert $B \in V_{3,3}$ és $S \in V_{4,4}$, ahol $A \to BS$-t használtuk.

$B \in V_{3,3}$, mert $B \to 0 \in H$

$S \in V_{4,4}$, mert $S \to 1 \in H$

$A \in V_{5,5}$, mert $A \to 1 \in H$

2. levezetés: $S \Rightarrow SA \Rightarrow ABA \Rightarrow 1BA \Rightarrow 10A \Rightarrow 10BS \Rightarrow 100S \Rightarrow 100SA \Rightarrow 1001A \Rightarrow 10011$

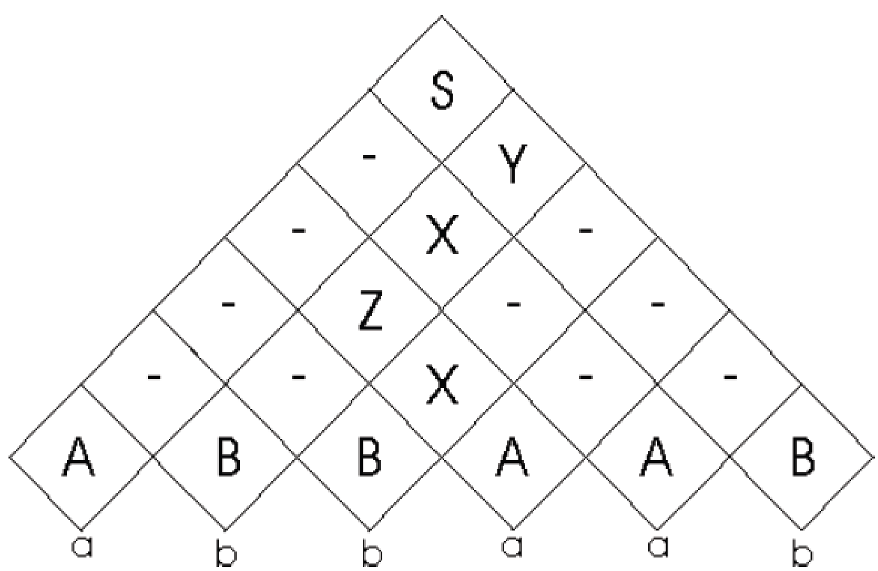
$S \in V_{5,1}$, mert $S \in V_{2,1}$ és $A \in V_{5,3}$, ahol $S \to SA$-t használtuk. Kövessük a baloldali nemterminálist!
$S \in V_{2,1}$, mert $A \in V_{1,1}$ és $B \in V_{2,2}$, ahol $S \to AB$-t használtuk. Kövessük a baloldali nemterminálist!
$A \in V_{1,1}$, mert $A \to 1 \in H$
$B \in V_{2,2}$, mert $B \to 0 \in H$
$A \in V_{5,3}$, mert $B \in V_{3,3}$ és $S \in V_{5,4}$, ahol $A \to BS$-t használtuk. Kövessük ismét a baloldali nemterminálist!
$B \in V_{3,3}$, mert $B \to 0 \in H$
$S \in V_{5,4}$, mert $S \in V_{4,4}$ és $A \in V_{5,5}$, ahol $S \to SA$-t használtuk. Kövessük a baloldali nemterminálist!
$S \in V_{4,4}$, mert $S \to 1 \in H$
$A \in V_{5,5}$, mert $A \to 1 \in H$

★

7.36. példa - Cocke-Younger-Kasami algoritmus 2. feladat

Tekintsük a $G=(\{S,A,B,X,Y,Z\},\{a,b\},S,H)$ grammatikát, ahol H szabályai:
$\{S \to AY,\ Y \to XB,\ X \to BA,\ X \to ZA,\ Z \to BX,$
$A \to a,\ B \to b\}$!
Benne van-e a G nyelvtan által generált nyelvben az *abbaab* szó?

Megoldás:

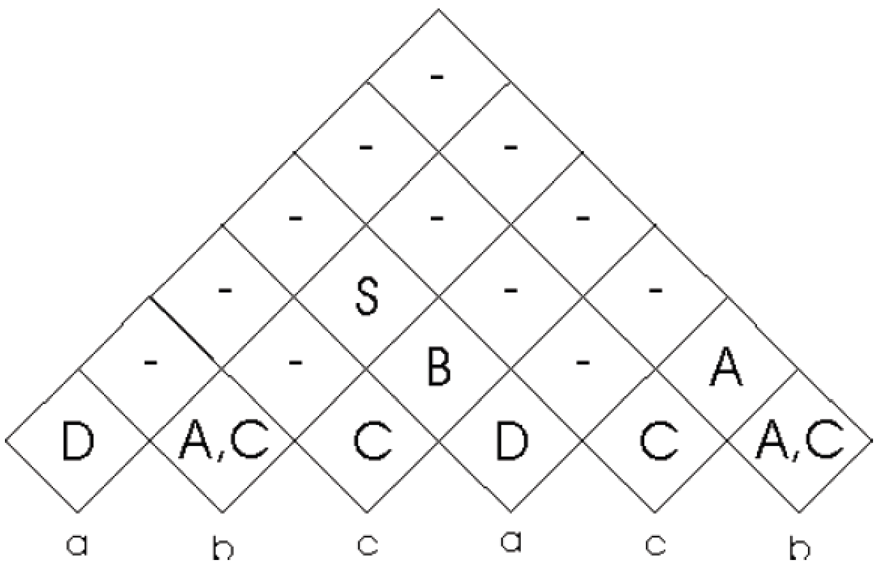


Mivel $S \in V_{6,1}$, ezért a abbaab szó benne van a G grammatika által generált nyelvben. ★

7.37. példa - Cocke-Younger-Kasami algoritmus 3. feladat

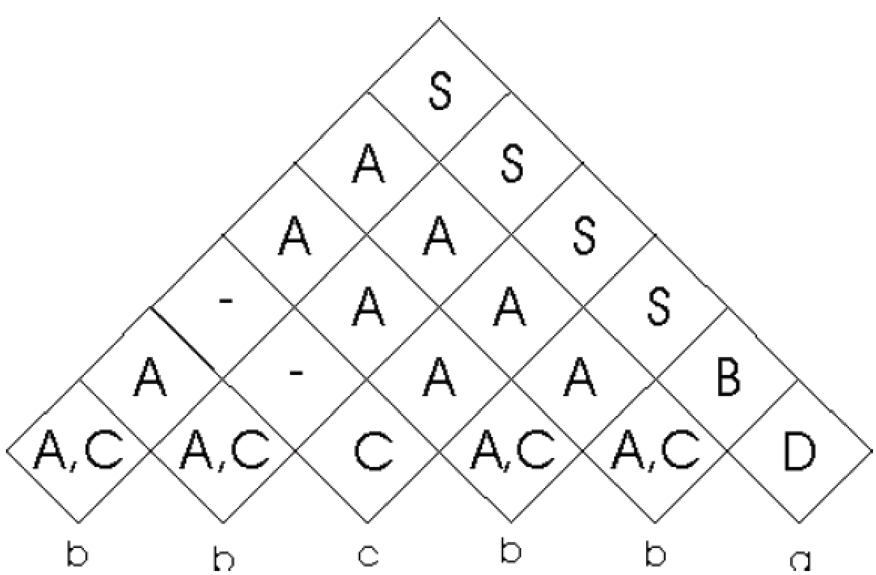
Tekintsük a $G=(\{S,A,B,C,D\},\{a,b,c\},S,H)$ grammatikát, ahol H szabályai:
$\{S \to AB,\ A \to CA,\ A \to SS,\ B \to CD,$
$A \to b,\ D \to a,\ C \to c,\ C \to b\}$.
Döntsük el, benne van-e a grammatika által generált nyelvben az *abcacb* és a *bbcbba* szó, majd ha lehet adjuk meg az összes levezetését!

Megoldás:



Mivel $S \notin V_{6,1}$, ezért az *abcacb* szó
nincs benne az adott grammatika által generált nyelvben.

Nézzük most a másik keresett szót:

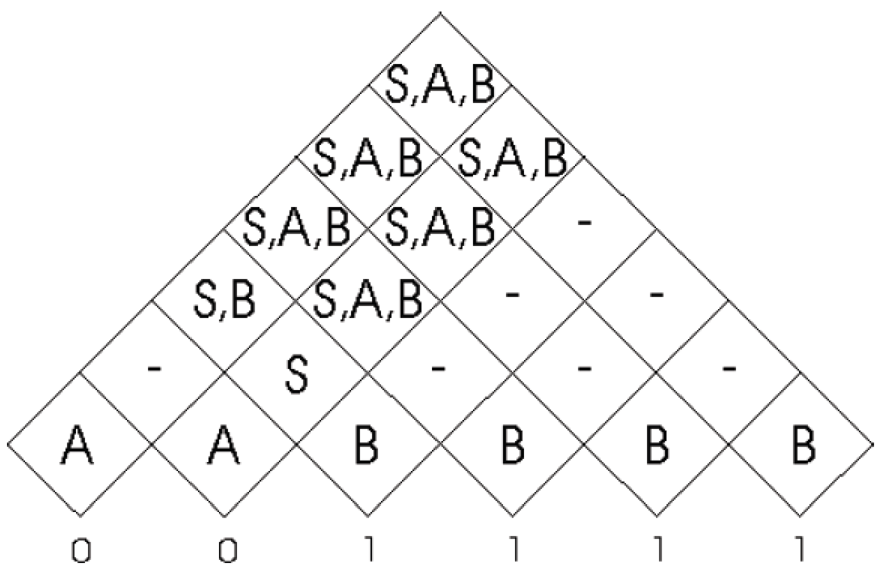


Mivel $S \in V_{6,1}$, ezért a *bbcbba* szó benne van az adott grammatika által generált nyelvben.
Az egyik levezetés pedig:
$S \Rightarrow AB \Rightarrow CAB \Rightarrow bAB \Rightarrow bCAB \Rightarrow bbAB \Rightarrow bbCAB \Rightarrow bbcAB \Rightarrow bbcbB \Rightarrow bbcbCD \Rightarrow bbcbbD \Rightarrow bbcbba$ ★

7.38. példa - Cocke-Younger-Kasami algoritmus 4. feladat

Tekintsük a $G=(\{S,A,B\},\{0,1\},S,H)$ grammatikát ,ahol H szabályai:
$\{S \rightarrow AS,\ S \rightarrow SB,\ S \rightarrow AB,\ B \rightarrow SB,\ A \rightarrow SB,\ B \rightarrow AS,$
$A \rightarrow 0, B \rightarrow 1\}$.
Döntsük el CYK-algoritmus segítségével, hogy levezethető-e a nyelvtanban a 001111 szó!

Megoldás:



Tehát mivel $S \in V_{6,1}$, ezért a 001111 szó benne van az adott grammatika által generált nyelvben. ★

5. Pumpálási lemma környezetfüggetlen nyelvekre

(jegyzet 152 - 153. oldal, a jegyzet szóhasználata szerint „Bar-Hillel lemma”)

7.9. példa - A Bar-Hillel lemma alkalmazása

Az $\{a^j b^j c^j | j \geq 1\}$ nyelv nem környezetfüggetlen.

Ha volna olyan környezetfüggetlen nyelvtan, amely generálja ezt a nyelvet, akkor a lemma szerint volna olyan $z=uvwxy$ szó, hogy $vx \neq \lambda$, és minden $i \geq 0$- ra $uv^i wx^i y$ ehhez a nyelvhez tartozik. Az $uv^i wx^i y=a^j b^j c^j$ összefüggést azonban az u, v, w, x, y szavak semmilyen konkrét választása mellett sem lehet végtelen sok i- re és j- re kielégíteni. Ugyanis v és x közül egyik sem tartalmazhat többféle betűt (hiszen ekkor a pumpálás során létrejövő szó alakja nem $a^* b^* c^*$ lenne). Ha viszont csak egyfélét tartalmaznak, akkor az a, b, c közül legalább az egyiknek a kitevője i- től független lesz. ★

7.10. példa - Bar-Hillel lemma 1. feladat

Bizonyítsa be, hogy az $L = \{a^i b^j c^i d^j |\ i,j \geq 1\}$ nyelv nem környezetfüggetlen.

Megoldás:
Tegyük fel indirekt, hogy megadható olyan n természetes szám, amely a Bar-Hillel lemma szerint minden környezetfüggetlen nyelv esetében létezik!
Tekintsük az $a^{2n} b^{2n} c^{2n} d^{2n}$ szót, ami nyilvánvalóan eleme a nyelvnek és hosszabb n -nél.

Legyen $a^{2n} b^{2n} c^{2n} d^{2n} = uvwxy$, ahol $vx \neq \lambda$, ekkor $uv^2 wx^2 y \in L$.

Ha v és x közül valamelyik tartalmaz a-t, akkor $|vwx| \leq n$ miatt egyikük sem tartalmazhat c-t.
Így a pumpálás kivezet a nyelvből.

Ha viszont v és x közül valamelyik tartalmaz b-t, akkor $|vwx| \leq n$ miatt egyikük sem tartalmazhat d-t; a pumpálás így is kivezet a nyelvből.

Így tehát sem v, sem x nem tartalmazhat sem a-t, sem b-t, akkor viszont a szó hossza nem változhat, ami ellentmond a lemma állításának. ★

7.11. példa - Bar-Hillel lemma 2. feladat

Bizonyítsa be, hogy a $L=\{wcw \mid w \in \{a,b\}^*\}$ nyelv nem környezetfüggetlen.

Megoldás:
Tegyük fel indirekt, hogy L környezetfüggetlen, ekkor legyen n a lemma által adott konstans.
Tekintsük az $a^{2n}b^{2n}ca^{2n}b^{2n}$ szót. Ekkor $vx \neq \lambda$ miatt a v az első
$a^{2n}b^{2n}$ blokk részszava kell, hogy legyen, amíg az x a c utáni blokk részszava.

Ellenkező esetben vagy a c-k száma változna a pumpálás során, vagy a c előtti, illetve utáni blokkok hossza változna különbözőre.

$\mid vwx \mid \leq n$ miatt viszont így a v csak b-ket, az x pedig csak a-kat tartalmazhat, így viszont az iteráció kivezet a nyelvből. ★

7.12. példa - Bar-Hillel lemma 3. feladat

Bizonyítsa be, hogy az $L=\{a^{k^2} \mid k \geq 1\}$ nyelv nem környezetfüggetlen!
Megoldás:
Tegyük fel indirekt, hogy L környezetfüggetlen!
Ekkor igaz rá a Bar-Hillel lemma, tehát létezik olyan n szám,
hogy minden n-től hosszabb L-beli szó felírható a lemma szerinti $uvwxy$ alakban,
hogy $uvvwxxy$, $uvvvwxxxy$ ... is L-beli.
Legyen $m^2 > n$ és $a^{m^2}=uvwxy$ és $|vx| = c > 0$!
Ekkor m^2+c, m^2+2c, m^2+3c... is négyzetszám kell legyen.
Kérdés tehát, hogy van-e olyan szigorúan monoton növekvő számtani sorozat,
melynek minden eleme négyzetszám?
Mivel két szomszédos négyzetszám különbsége minden határon túl nő,
ezért egyszer meghaladja c-t is, tehát nincs.
Vagyis ellentmondásra jutottunk. Az ellentmondás oka csak az indirekt feltétel hamis volta lehet. ★

5.4 Mutassuk meg, hogy az alábbi nyelvek nem környezetfüggetlenek.

a, A $0^n1^n0^n1^n$ alakú szavak nyelve, ahol n egy nullánál nagyobb vagy vele egyenlő szám.
b, A $0^n\#0^{2n}\#0^{3n}$ alakú szavak nyelve, ahol n egy nullánál nagyobb vagy vele egyenlő szám.
c, A *w#w* alakú szavak nyelve, ahol *w* tetszőleges *{a,b}* feletti szó.

Megoldások:

a, A gondolatmenet hasonló a 7.9 feladathoz.

b, Legyen p a pumpálási lemmában szereplő konstans, és legyen $s= 0^p\#0^{2p}\#0^{3p}$. Megmutatjuk, hogy $s=uvxyz$ nem pumpálható, semmilyen a feltételeknek megfelelő u,v,x,y,z esetén.

A v és y pumpálandó részek nem tartalmazhatnak # betűt, mert akkor az uv^2xy^2z szó több mint két darab #-t tartalmazna (és így nem lenne eleme a nyelvnek). Az előbbiek miatt, v és y a három 0-ból álló rész közül legfeljebb kettőből tartalmazhat betűket, ami azt jelenti, hogy uv^2xy^2z nem lehet eleme a nyelvnek, hiszen a 0 szegmensek 1:2:3 hossz-aránya nem teljesül.

c, Legyen p a pumpálási lemmában szereplő konstans, és legyen $s=a^pb^p\#a^pb^p$. Megmutatjuk, hogy $s=uvxyz$ nem pumpálható, semmilyen a feltételeknek megfelelő u,v,x,y,z esetén.

Sem v, sem y nem tartalmazhatja a # betűt, hiszen ha tartalmazná, akkor uv^0xy^0z-ban nem szerepelne #, tehát ez a szó nem lehetne a nyelvben. Ha v és y mindketten a # bal (vagy jobb) oldalán szerepelnek, akkor az uv^2xy^2z szó nem lehet eleme a nyelvnek, hiszen a szó bal (vagy a jobb) oldala hosszabb lenne mint a másik. Ugyanez a helyzet, ha v és y közül az egyik az üres szó (mindkettő nem lehet üres).

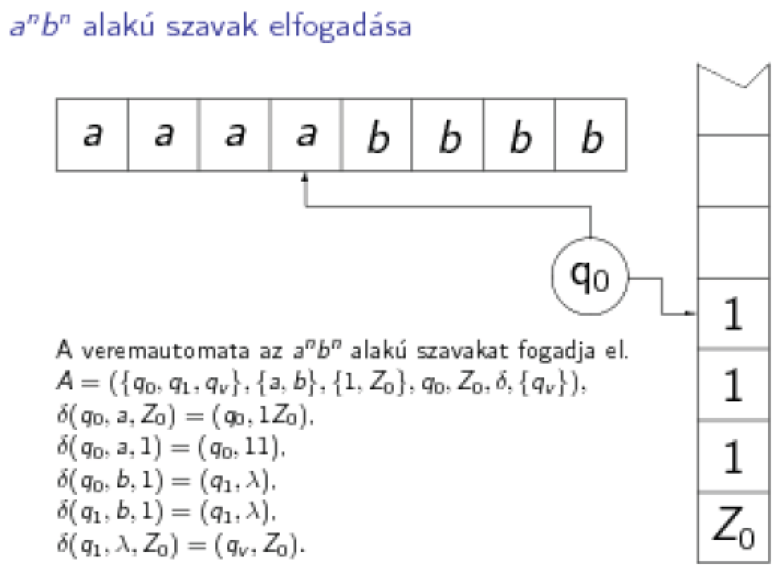
Ha sem v, sem y nem üres, és az egyik a # bal oldalán, a másik a # jobb oldalán van, akkor v-ben csak b betű lehet, y-ban pedig csak a betű lehet, mert a lemma harmadik feltétele szerint a vxy rész hossza kisebb vagy egyenlő mint p. Ezek szerint az uv^2xy^2z szóban több b betű van a # bal oldalán mint a másikon, azaz nem lehet a nyelv eleme.

<u>6. Veremautomaták</u> (jegyzet 159 – 160. oldal)

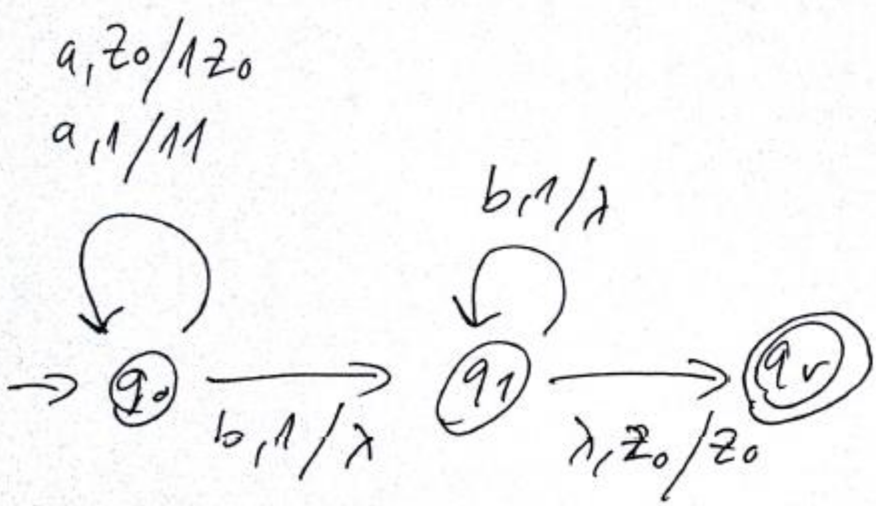
A jegyzet ún. üres veremmel elfogadó veremautomatákat is tárgyal, de mi az előadáson és a ZH-ban csak végállapottal elfogadó veremautomatákkal foglalkozunk.

7.21. példa - Végállapottal elfogadó veremautomata működése

Olyan veremautomata működés közben, mely az $a^n b^n$ alakú szavakat fogadja el:

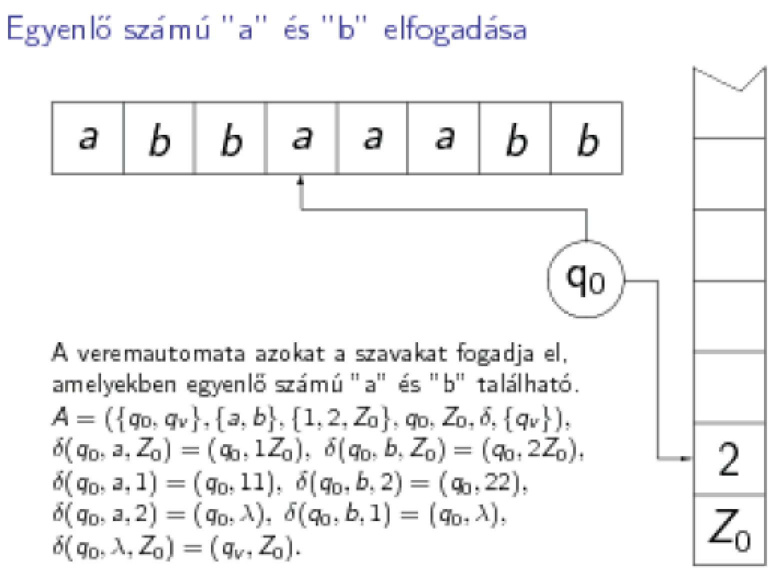


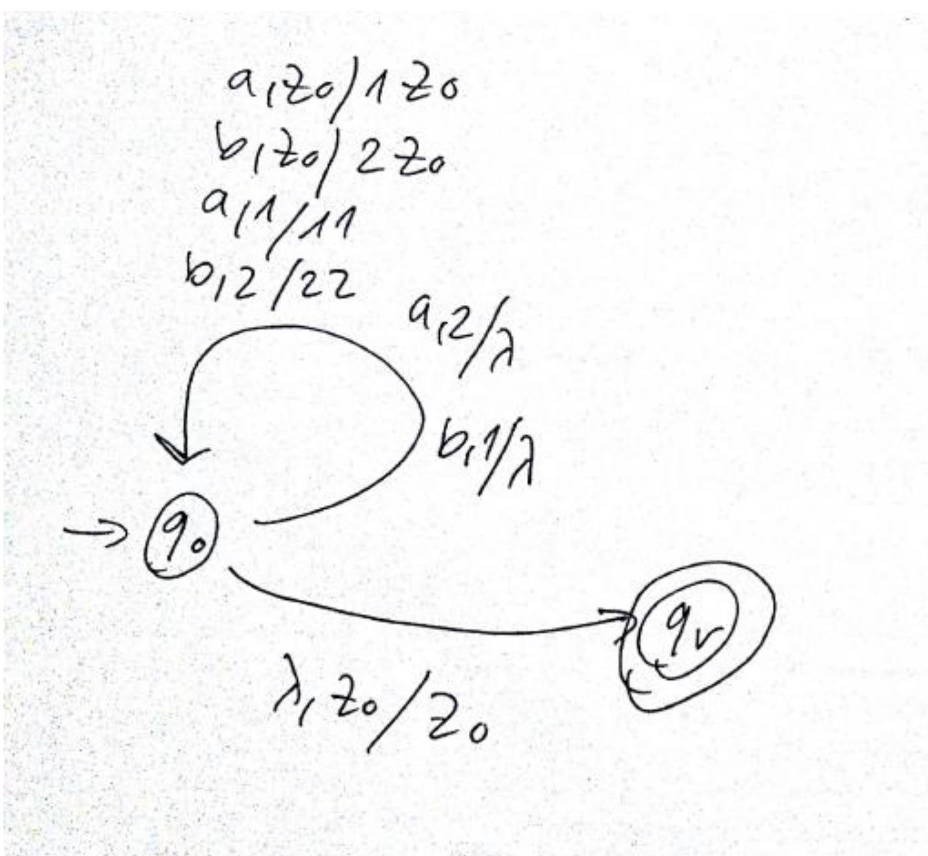
★



7.22. példa - Az azonos számú *a* és *b* betűből álló szavakat végállapottal elfogadó veremautomata

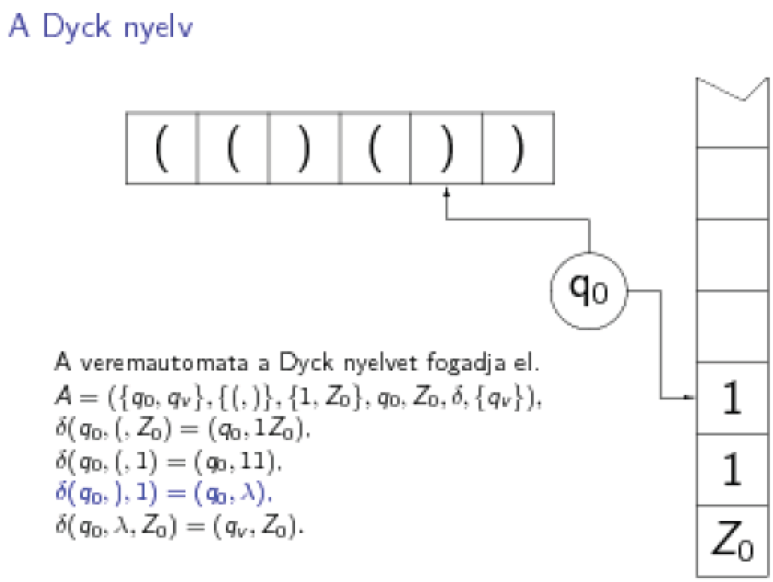
A következő veremautomata olyan szavakat fogad el, melyekben az *a*- k és *b*- k száma megegyezik.



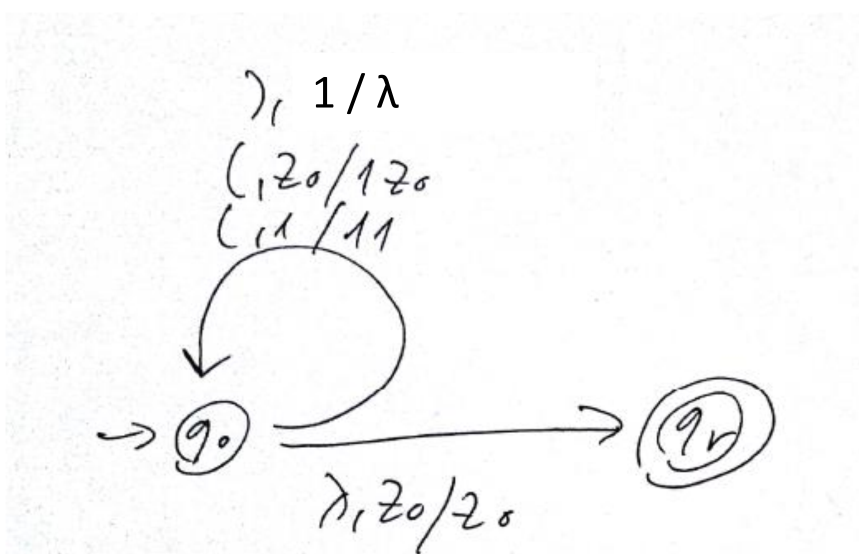


7.23. példa - A Dyck nyelvet végállapottal elfogadó automata

Az alábbi veremautomata a helyes zárójelek nyelvét (Dyck nyelvet) fogadja el.



★



7.25. példa - Veremautomaták 1. feladat

Veremautomata konstrukciója grammatika alapján, „top-down” módszer

Adjunk meg a G 2-es típusú grammatikához egy olyan veremautomatát, amely a G grammatika által generált nyelvet ismeri fel, majd mutassuk meg, hogy az 10011 szót felismeri az automata!

$G=(\{S,A,B\},\{0,1\},S,H)$,ahol H szabályai:

$S \to SA,\ S \to AB,$

$A \to BS,\ B \to SA,$

$A \to 1,\ S \to 1,\ B \to 0.$

Megoldás:

Egy olyan megoldást fogunk adni, amely a G nyelvtan által generált nyelv szavait egyszerre fogadja el végállapottal és üres veremmel.

- A szalagábécé álljon a grammatika terminálisaiból,
- A veremábécé pedig tartalmazza a terminálisokat, a nemterminálisokat és a kezdő veremszimbólumo
- A belső állapotok halmaza 3 elemből áll, melyből egy kezdő- egy általános- és egy végállapot.
- Az átmenetfüggvény definiálása:
  - Kell egy olyan szabály, hogy a kezdő veremszimbólum fölé írja az S kezdőszimbólumot, és átviszi az automatát általános állapotba!
  - Kellenek olyan szabályok, hogy az automata a szalagról nem olvas, a verem tetejéről olvassa a H-beli szabályok bal oldalát, majd visszaírja fordított sorrendben a jobb oldalát!
  - Kellenek olyan szabályok, hogy a szalagról és a verem tetejéről ugyanazt olvassuk, majd nem írunk semmit a verem tetejére!

$PDA = (\{q_0, q_1, q_2\},\{0, 1\}, \{S, A, B, 0, 1,z_0\}, q_0, z_0, \delta, \{q_2\})$.

$\delta(q_0, \lambda, z_0)=\{(q_1, Sz_0)\}$,

$\delta(q_1, \lambda, S)=\{(q_1, SA), (q_1, AB), (q_1, 1)\}$,

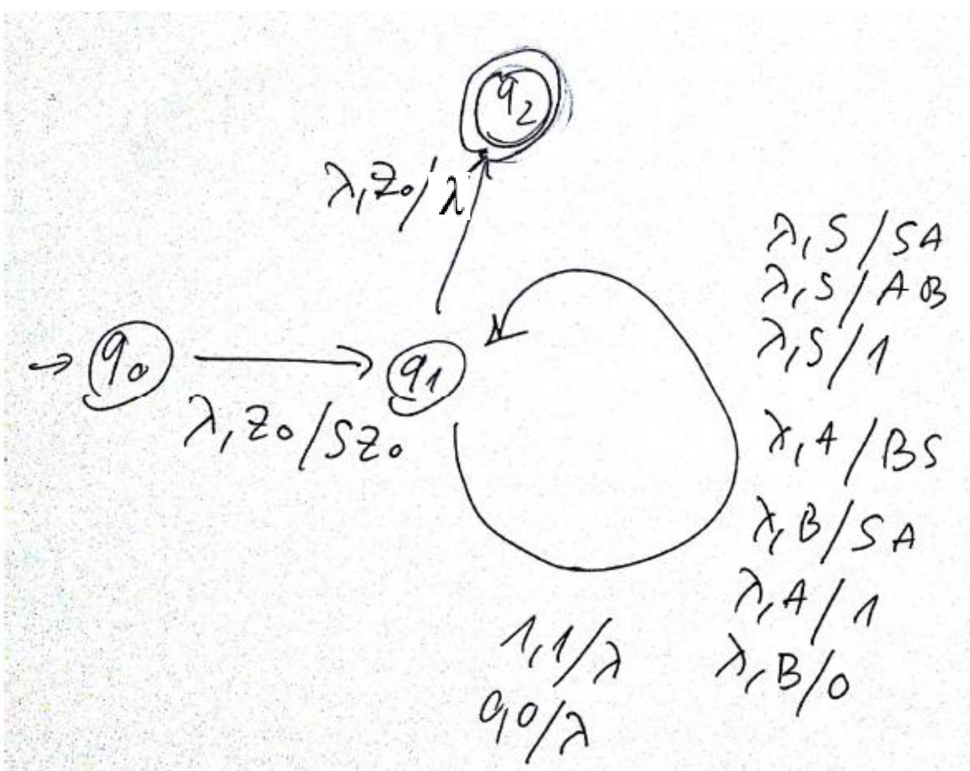
$\delta(q_1, \lambda, A)=\{(q_1, BS), (q_1, 1)\}$,

$\delta(q_1, \lambda, B)=(q_1, SA), (q_1, 0)\}$,

$\delta(q_1, 1, 1)=\{(q_1, \lambda)\}$,

$\delta(q_1, 0, 0)=\{(q_1, \lambda)\}$,

$\delta(q_1, \lambda, z_0)=\{(q_2, \lambda)\}$.



A Cocke-Younger-Kasami algoritmusos fejezet 7.35. példa - Cocke-Younger-Kasami algoritmus 1. f
segítségével találhatunk a következő legbaloldalibb levezetésére az 10011 szónak:

$S \Rightarrow SA \Rightarrow SAA \Rightarrow ABAA \Rightarrow 1BAA \Rightarrow 10AA \Rightarrow 10BSA \Rightarrow 100SA \Rightarrow 1001A \Rightarrow 10011$.

Ezt levezetést használva mutatjuk meg az automata miyen lépéseken át ismerheti fel az 10011 szót:

Az automata müködése előtt a konfiguráció: (szalagon még hátra lévő inputrész, állapot, verem)

$(10011, q_0, z_0)$

1. lépés: Írjuk a kezdő veremszimbólum felé S-t! Ezt megteheti az automata, mert $(q_1, Sz_0) \in \delta(q_0, \lambda, z_0)$.

$(10011, q_1, Sz_0)$

2. lépés: Az automata a verem tetejét SA-ra cserélheti mivel $(q_1, SA) \in \delta(q_1, \lambda, S)$. (Alkalmaztuk az $S \rightarrow SA$ szabályt.)

$(10011, q_1, SAz_0)$

3. lépés: Az automata a verem tetejét SA-ra cserélheti mivel $(q_1, SA) \in \delta(q_1, \lambda, S)$. (Alkalmazzuk az $S \rightarrow SA$ szabályt.)

$(10011, q_1, SAAz_0)$

4. lépés: A verem tetején az S helyett egy B-t majd egy A-t rakhat, mivel $(q_1, AB) \in \delta(q_1, \lambda, S)$. (Alkalmazzuk az $S \rightarrow AB$ szabályt.)

$(10011, q_1, ABAAz_0)$

5. lépés: A verem tetején lévő A-t 1-esre cserélheti, mert $(q_1, 1) \in \delta(q_1, \lambda, A)$. (Alkalmazzuk az $A \rightarrow 1$ szabályt.)

$(10011, q_1, 1BAAz_0)$

6. lépés: A szalagról olvashat az automata és a veremből törölhet, mert $(q_1, \lambda) \in \delta(q_1, 1, 1)$.

$(0011, q_1, BAAz_0)$

7. lépés: A verem tetején lévő B-t 0-ásra cserélheti az automata, mert $(q_1, 0) \in \delta(q_1, \lambda, B)$. (Alkalmazzuk a $B \rightarrow 0$ szabályt.)

$(0011, q_1, 0AAz_0)$

8. lépés: A szalagról olvashat és a veremből törölhet az automata, mert $(q_1, \lambda) \in \delta(q_1, 0, 0)$.

$(011, q_1, AAz_0)$

9. lépés: A verem tetején az A helyett egy S-t majd egy B-t rakhat, mivel $(q_1, BS) \in \delta(q_1, \lambda, A)$. (Alkalmazzuk az $A \rightarrow BS$ szabályt.)

$(011, q_1, BSAz_0)$

10. lépés: A verem tetején lévő B-t 0-ásra cserélheti az automata, mert $(q_1, 0) \in \delta(q_1, \lambda, B)$. (Alkalmazzuk a $B \rightarrow 0$ szabályt.)

$(011, q_1, 0SAz_0)$

11. lépés: A szalagról olvashat és a veremből törölhet az automata, mert $(q_1, \lambda) \in \delta(q_1, 0, 0)$.

$(11, q_1, SAz_0)$

12. lépés: A verem tetején lévő S-t 1-esre cserélheti az automata, mert $(q_1, 1) \in \delta(q_1, \lambda, S)$. (Alkalmazzuk az $S \rightarrow 1$ szabályt.)

$(11, q_1, 1Az_0)$

13. lépés: A szalagról olvashat és a veremből törölhet az automata, mert $(q_1, \lambda) \in \delta(q_1, 1, 1)$.

$(1, q_1, Az_0)$

14. lépés: A verem tetején lévő A-t 1-esre cserélheti az automata, mert $(q_1, 1) \in \delta(q_1, \lambda, A)$. (Alkalmazzuk az $A \rightarrow 1$ szabályt.)

$(1, q_1, 1z_0)$

15. lépés: A szalagról olvashat és a veremből törölhet az automata, mert $(q_1, \lambda) \in \delta(q_1, 1, 1)$.

(λ, q_1, z_0)

16. lépés: Az automata átmehet végállapotba és kiürítheti a vermet, mert $(q_2,\lambda) \in \delta(q_1, \lambda, z_0)$

(λ, q_2, λ),

vagyis az automata üres veremmel és végállapottal felismerte az 10011 szót.

II. megoldás:

Mivel a nyelvtanunk (terminális) normálalakú, azaz terminális csak $X \to x$ szabályokban fordul elő, ahol $X \in N$ és $x \in T$, ezért az átmenetfüggvény a következő lehet:
- Kell egy olyan szabály, hogy a kezdő veremszimbólum fölé írja az S kezdőszimbólumot, és átviszi az automatát általános állapotba!
- Kellenek olyan szabályok, hogy az automata a szalagról nem olvas, a verem tetejéről olvassa a H-beli szabályok bal oldalát, majd visszaírja a jobb oldalát, ha a jobboldal nem tartalmaz terminálist!
- Kellenek olyan szabályok, hogy a szalagról x-et és a verem tetejéről X-et olvassuk, majd nem írunk semmit a verem tetejére, ha $X \to x \in H$, és $X \in N$, $x \in T$!
- És kell egy olyan szabály, hogy ha általános állapotban olvassa az automata a kezdő veremszimbólt akkor menjen át végállapotba!

Ekkor a veremautomata:

$A(\{q_0, q_1, q_2\}, \{0, 1\}, \{S, A, B, 0, 1, z_0\}, q_0, z_0, \delta, \{q_2\})$.
$\delta(q_0, \lambda, z_0)=\{(q_1, Sz_0)\}$,
$\delta(q_1, \lambda, S)=\{(q_1, SA),(q_1, AB)\}$
$\delta(q_1, \lambda, A)=\{(q_1, BS)\}$,
$\delta(q_1, \lambda, B)=\{(q_1, SA)\}$,
$\delta(q_1, 1, A)=\{(q_1, \lambda)\}$,
$\delta(q_1, 1, S)=\{(q_1, \lambda)\}$,
$\delta(q_1, 0, B)=\{(q_1, \lambda)\}$,
$\delta(q_1, \lambda, z_0)=\{(q_2, \lambda)\}$.

A második automata müködése:

$(10011, q_0, z_0)$

1. lépés: Írjuk a kezdő veremszimbólum felé S-t! Ezt megteheti az automata, mert $(q_1, Sz_0) \in \delta(q_0, \lambda, z_0)$.

$(10011, q_1, Sz_0)$

2. lépés: Az automata a verem tetejét kicserélheti SA-ra mivel $(q_1, SA) \in \delta(q_1, \lambda, S)$. (Alkalmaztuk az $S \to SA$ szabályt.)

$(10011, q_1, SAz_0)$

3. lépés: Az automata a verem tetejét kicserélheti SA-ra mivel $(q_1, SA) \in \delta(q_1, \lambda, S)$. (Alkalmaztuk az $S \to SA$ szabályt.)

$(10011, q_1, SAAz_0)$

4. lépés: Alkalmazzuk az $S \to AB$ szabályt! $(q_1, AB) \in \delta(q_1, \lambda, S)$.

$(10011, q_1, ABAAz_0)$

5. lépés: A szalagról olvasunk, a veremből törlünk. $(q_1, \lambda) \in \delta(q_1, 1, A)$.

$(0011, q_1, BAAz_0)$

6. lépés: A szalagról olvasunk, a veremből törlünk. $(q_1, \lambda) \in \delta(q_1, 0, B)$.

$(011, q_1, AAz_0)$

7. lépés: $(q_1, BS) \in \delta(q_1, \lambda, A)$. (Alkalmazzuk az $A \to BS$ szabályt.)

$(011, q_1, BSAz_0)$

8. lépés: A szalagról olvasunk, a veremből törlünk. $(q_1, \lambda) \in \delta(q_1, 0, B)$.

$(11, q_1, SAz_0)$

9. lépés: A szalagról olvasunk, a veremből törlünk. $(q_1, \lambda) \in \delta(q_1, 1, S)$.

$(1, q_1, Az_0)$

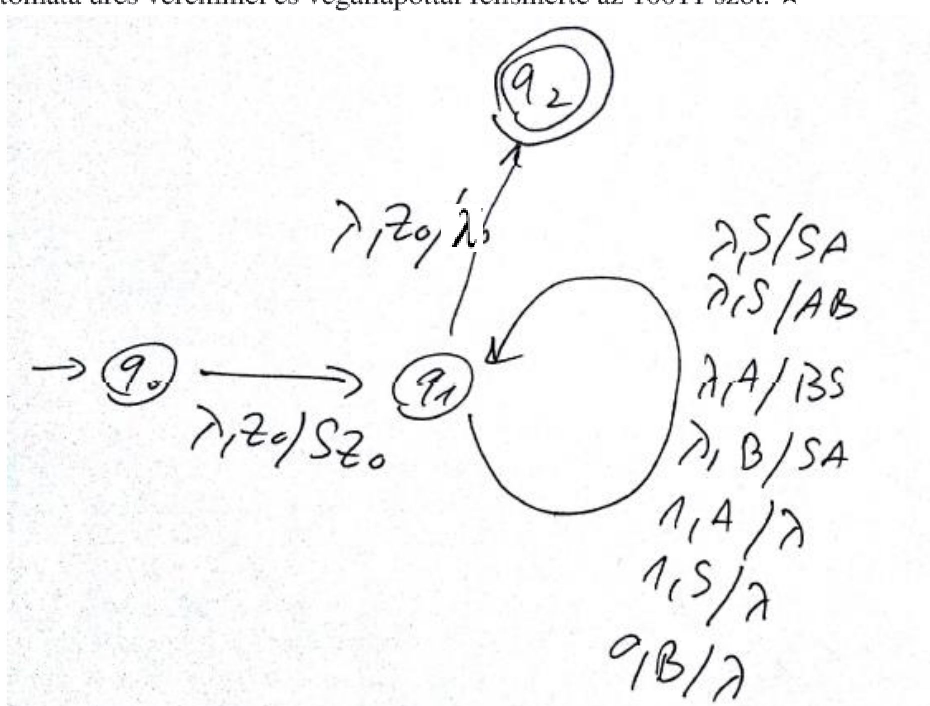
10. lépés: A szalagról olvasunk, a veremből törlünk. $(q_1, \lambda) \in \delta(q_1, 1, A)$.

(λ, q_1, z_0)

11. lépés: $(q_2,\lambda) \in \delta(q_1, \lambda, z_0)$

(λ, q_2, λ),

vagyis az automata üres veremmel és végállapottal felismerte az 10011 szót. ★



7.26. példa - Veremautomaták 2. feladat

Veremautomata konstrukciója grammatika alapján, „top-down” módszer

Adjunk meg olyan veremautomatát, amely pontosan a következő grammatika által generált nyelv sza
ismeri fel, és mutassuk meg, hogy a *bbcbba* szót is elfogadja!

$G=(\{S,A,B,C,D\},\{a,b,c\},S,H)$, ahol H szabályai:

$S \to AB$, $A \to CA$, $A \to SS$, $B \to CD$,

$A \to b$, $D \to a$, $C \to c$, $C \to b$.

Megoldás:

$A(\{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b, c\}, \{S, A, B, C, D, a, b, c, z_0\}, q_0, z_0, \delta, \{q_2\})$.

$(q_1, Sz_0) \in \delta(q_0, \lambda, z_0)$,

$(q_1, AB) \in \delta(q_1, \lambda, S)$,

$(q_1, CA) \in \delta(q_1, \lambda, A)$,

$(q_1, SS) \in \delta(q_1, \lambda, A)$,

$(q_1, CD) \in \delta(q_1, \lambda, B)$,

$(q_1, b) \in \delta(q_1, \lambda, A)$,

$(q_1, a) \in \delta(q_1, \lambda, D)$,

$(q_1, c) \in \delta(q_1, \lambda, C)$,

$(q_1, b) \in \delta(q_1, \lambda, C)$,

$(q_1, \lambda) \in \delta(q_1, a, a)$,

$(q_1, \lambda) \in \delta(q_1, b, b)$,

$(q_1, \lambda) \in \delta(q_1, c, c)$,

$(q_2, \lambda) \in \delta(q_1, \lambda, z_0)$. Az egyetlen legbaloldalibb levezetés (pl. a Cocke-Younger-Kasami algoritmusc
7.37. példa - Cocke-Younger-Kasami algoritmus 3. feladat alapján):

$S \Rightarrow AB \Rightarrow CAB \Rightarrow bAB \Rightarrow bCAB \Rightarrow bbAB \Rightarrow bbCAB \Rightarrow bbcAB \Rightarrow bbcbB \Rightarrow bbcbCD \Rightarrow bbcbbD \Rightarrow bbcbba$

A szó felismerésének lépései:

$(bbcbba, q_0, z_0)$

1. lépés $(q_1, Sz_0) \in \delta(q_0, \lambda, z_0)$
$(bbcbba, q_1, Sz_0)$

2. lépés $(q_1, AB) \in \delta(q_1, \lambda, S)$
$(bbcbba, q_1, ABz_0)$

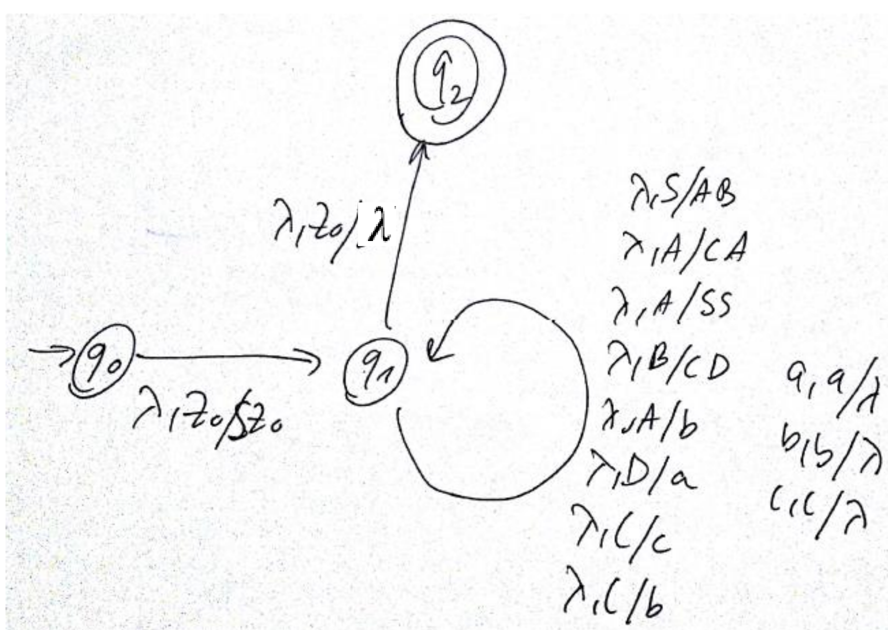
3. lépés $(q_1, CA) \in \delta(q_1, \lambda, A)$
$(bbcbba, q_1, CABz_0)$

4. lépés $(q_1, b) \in \delta(q_1, \lambda, C)$
$(bbcbba, q_1, bABz_0)$

5. lépés $(q_1, \lambda) \in \delta(q_1, b, b)$
$(bcbba, q_1, ABz_0)$

6. lépés $(q_1, CA) \in \delta(q_1, \lambda, A)$
$(bcbba, q_1, CABz_0)$

7. lépés $(q_1, b) \in \delta(q_1, \lambda, C)$
$(bcbba, q_1, bABz_0)$



8. lépés $(q_1, \lambda) \in \delta(q_1, b, b)$
$(cbba, q_1, ABz_0)$

9. lépés $(q_1, CA) \in \delta(q_1, \lambda, A)$
$(cbba, q_1, CABz_0)$

10. lépés $(q_1, c) \in \delta(q_1, \lambda, C)$
$(cbba, q_1, cABz_0)$

11. lépés $(q_1, \lambda) \in \delta(q_1, c, c)$
(bba, q_1, ABz_0)

12. lépés $(q_1, b) \in \delta(q_1, \lambda, A)$
(bba, q_1, bBz_0)

13. lépés $(q_1, \lambda) \in \delta(q_1, b, b)$
(ba, q_1, Bz_0)

14. lépés $(q_1, CD) \in \delta(q_1, \lambda, B)$
(ba, q_1, CDz_0)

15. lépés $(q_1, b) \in \delta(q_1, \lambda, C)$
(ba, q_1, bDz_0)

16. lépés $(q_1, \lambda) \in \delta(q_1, b, b)$
(a, q_1, Dz_0)

17. lépés $(q_1, a) \in \delta(q_1, \lambda, D)$
(a, q_1, az_0)

18. lépés $(q_1, \lambda) \in \delta(q_1, a, a)$
(λ , q_1, z_0)

19. lépés $(q_2, \lambda) \in \delta(q_1, \lambda, z_0)$
$(\lambda, , q_2, \lambda)$

Tehát az automata végállapottal és üres veremmel felismerte a szót! ★

7.27. példa - Veremautomaták 3. feladat

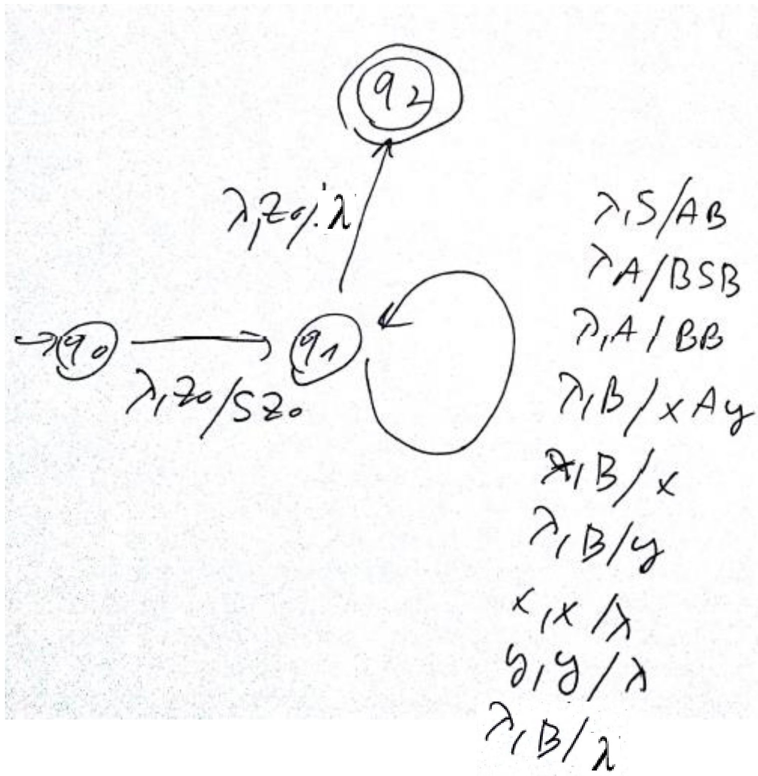
Veremautomata konstrukciója grammatika alapján, „top-down” módszer

Adjunk meg olyan veremautomatát, mely pontosan a G grammatika által generált nyelv szavait ismeri fel!
$G=(\{S, A, B\},\{x, y\}, S, H)$, ahol H a következő szabályokból áll:
$S \to AB,\ A \to BSB,\ A \to BB,\ B \to xAy,$
$B \to \lambda,\ B \to x,\ B \to y.$

Megoldás:

$A(\{q_0, q_1, q_2\}, \{x, y\}, \{S, A, B, x, y, z_0\}, q_0, z_0, \delta, \{q_2\})$.

$(q_1, Sz_0) \in \delta(\lambda, q_0, z_0)$,
$(q_1, AB) \in \delta(\lambda, q_1, S)$,
$(q_1, BSB) \in \delta(\lambda, q_1, A)$,
$(q_1, BB) \in \delta(\lambda, q_1, A)$,
$(q_1, xAy) \in \delta(\lambda, q_1, B)$,
$(q_1, \lambda) \in \delta(\lambda, q_1, B)$,
$(q_1, x) \in \delta(\lambda, q_1, B)$,
$(q_1, y) \in \delta(\lambda, q_1, B)$,
$(q_1, \lambda) \in \delta(x, q_1, x)$,
$(q_1, \lambda) \in \delta(y, q_1, y)$,
$(q_2, \lambda) \in \delta(\lambda, q_1, z_0)$. ★



Feladat

Veremautomata konstrukciója grammatika alapján, „bottom-up” módszer

5.34. In each case below, you are given a CFG G and a string x that it generates. For the nondeterministic bottom-up PDA $NB(G)$, trace a sequence of moves by which x is accepted, showing at each step the stack contents and the unread input. Show at the same time the corresponding rightmost derivation of x (in reverse order) in the grammar. See Example 5.24 for a guide.

a. The grammar has productions $S \rightarrow S[S] \mid \Lambda$, and $x = [\,][[\,]]$.

b. The grammar has productions $S \rightarrow [S]S \mid \Lambda$, and $x = [\,][[\,]]$.

5.34(a). See Table 5.

Table 5

Stack (reversed)	Unread Input	Derivation Step
Z_0	[][[]]	
Z_0 [	][[]]	
Z_0 [S	][[]]	$\Rightarrow$ [][[]]
Z_0 [S]	[[]]	
Z_0 [S][	[]]	
Z_0 [S][[	]]	
Z_0 [S][[S	]]	$\Rightarrow$ [S][[]]
Z_0 [S][[S]	]	
Z_0 [S][[S]S	]	$\Rightarrow$ [S][[S]]
Z_0 [S][S	]	$\Rightarrow$ [S][[S]S]
Z_0 [S][S]		
Z_0 [S][S]S		$\Rightarrow$ [S][S]
Z_0 [S]S		$\Rightarrow$ [S][S]S
Z_0 S		$\Rightarrow$ [S]S
		S

Környezetfüggetlen nyelv → Veremautomata

7. Adjunk veremautomatát a 2.2 feladat a) pontjában szereplő nyelvhez.

Megoldás:

a, A veremautomata a bemenet olvasása közben a következőt teszi: Ha *a*-t olvas és a verem tetején *b* van, kiveszi a *b*-t a veremből; ha *b*-t olvas és a verem tetején *a* van, kiveszi az *a*-t a veremből; különben beteszi az olvasott betűt a verembe. Ha a bement végigolvasása után a verem tetején *a* betű van, elfogadja a bemenetet.

8. LL(1) elemzés

(Aszalós L., Herendi T. feladatai, http://www.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop425/0046_forditoprogramok_feladatgyujtemeny/0046_forditoprogramok_feladatgyujtemeny.pdf)

2. Készítse el az S → Aa|Bb, A → cA|c, B→cB|c nyelvtanhoz tartozó LL(1) elemző táblázatot!

Ennek alapján elkészítve a táblázatot, láthatjuk, hogy miért nem LL(1) nyelvtanról van szó.

	a	b	c	$
S			Aa, Bb	
A			c, cA	
B			c, cB	

3. Készítse el az S → aA|bBc, A → Bd|Cc, B → e|λ, C → f|λ nyelvtanhoz tartozó LL(1) elemző táblázatot!
Megoldás

Készítsük el az elemző táblázatot! Mint látjuk, nincs ütközés, így a nyelvtan LL(1).

	a	b	c	d	e	f
S	aA	bBc				
A			Cc	Bd	Bd	Cc
B			λ	λ	e	
C			**λ**			**f**

7. Készítse el az S → aAab|bAbb, A → λ|c yelvtanhoz tartozó LL(1) elemző táblázatot!

	a	b	c
S	aAab	bAbb	
A	λ	λ	c

10. Turing gépek (jegyzet 210 – 214. oldal)

9.1. példa - Turing gépek 1.feladat

Adjunk meg olyan Turing-gépet, amely az $\{a,b\}$ feletti tükörszavakat ismeri fel!

(A „tükörszó” ugyanaz mint a palindróma, azaz olyan szó, amiben a betűk sorrendje odafelé olvasva ugyanaz mint visszafelé olvasva.)

Megoldás:

Állapodjunk meg abban, hogy a kezdő konfigurációban a fej a szó első betűjétől balra eső üres szalag-cellán van és az üres cella jele legyen a „#” szimbólum.

Ha a Turing gép q_i állapotban t-t olvas, v-t ír, átmegy q_j állapotba és m irányba tovább lépteti a fejet, aza $(q_j,v,m)\in d(q_i,t)$, akkor jelöljük ezt (q_i,t,v,q_j,m) ötössel! A fej mozgásának irányát pedig annak kezdőbetűjével rövidítjük.

Legyen a $T=(\{q_0,q_1,q_2,q_3,q_4,q_5,q_a\},\{a,b\},\{a,b,\#\},q_0,\#,\delta,\{q_a\})$, ahol δ a következő:

$(q_0,a,\#,q_1,J)$ Ha az első betű a, akkor q_1 állapotba megy a gép
$(q_0,b,\#,q_2,J)$ Ha az első betű b, akkor q_2 állapotba megy a gép
$(q_0,\#,\#,q_a,J)$ Ha az első betű # (az üresszó van a szalagon), akkor q_a állapotba megy a gép

(q_1,a,a,q_1,J)
(q_1,b,b,q_1,J)
$(q_1,\#,\#,q_3,B)$ Végig megy a gép az input szón, majd annak utolsó betűjére áll q_3 állapottal

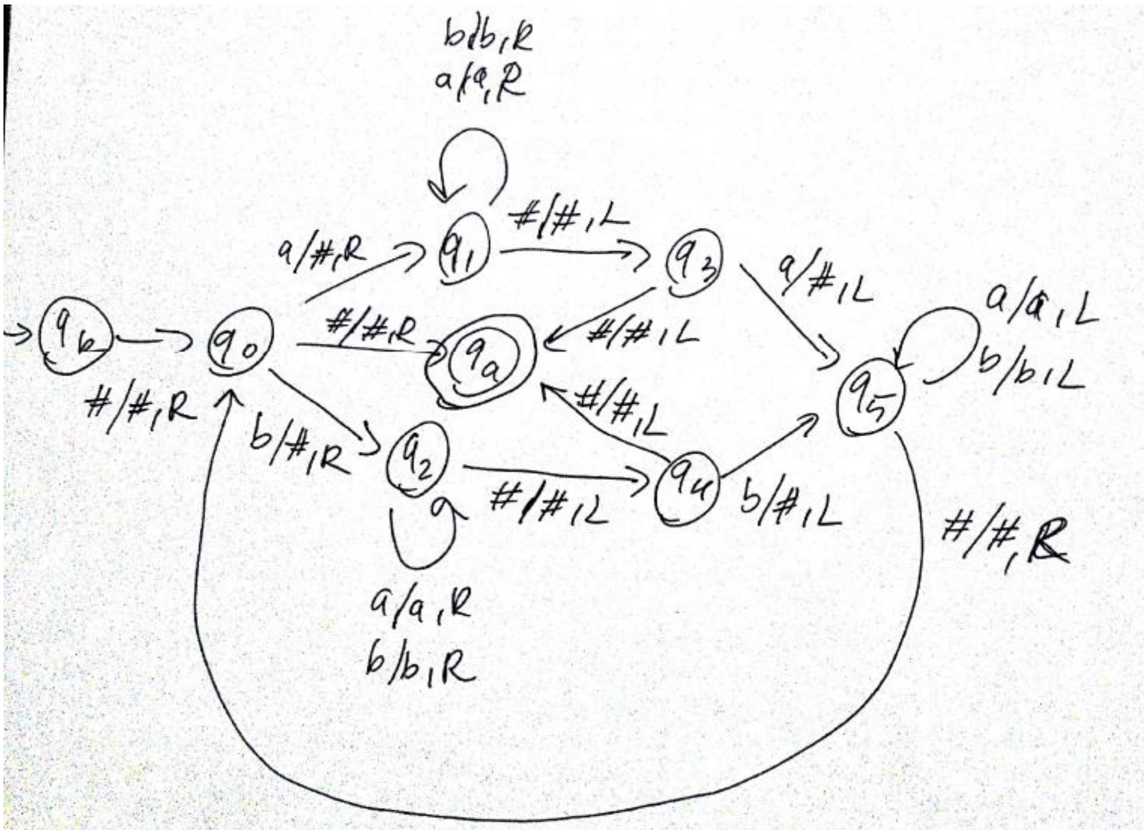
(q_2,a,a,q_1,J)
(q_2,b,b,q_1,J)
$(q_2,\#,\#,q_4,B)$ Végig megy a gép az INPUT szón, majd annak utolsó betűjére áll q_4 állapottal

$(q_3,a,\#,q_5,B)$ Ha az utolsó betű a, akkor töröljük, és mehet a gép a szó elejére q_5 állapottal

$(q_4,b,\#,q_5,B)$ Ha az utolsó betű b, akkor töröljük, és mehet a gép a szó elejére q_5 állapottal

$(q_3,\#,\#,q_a,B)$
$(q_4,\#,\#,q_a,B)$ Ha az input szó páratlan hosszú volt, akkor elfogadjuk

(q_5,a,a,q_5,B)
(q_5,b,b,q_5,B)
$(q_5,\#,\#,q_0,J)$ Újra a szó elejére és a kezdőállapotba megyünk!



9.3. példa - Turing gépek 3.feladat

Adjunk meg olyan Turing-gépet, amely az $L=\{a^n b^n c^n | \ n \geq 0\}$ nyelvet ismeri fel!

Megoldás:
Az első *a*-t átírjuk *A*-vá, majd más állapotba megyünk, az első *b*-ig.
Az első *b*-t átírjuk *B*-vé, majd más állapotba megyünk, az első *c*-ig.
Az első *c*-t átírjuk *C*-vé, majd más állapotba megyünk visszafelé az első *a*-ig.
Az *A,B,C* betűkön csak tovább megyünk mindig.
Ha a végén csak # marad, akkor felismeri a gép a szót!

Legyen T3=($\{q_k, q_0, q_1, q_2, q_3, q_a\}$, {a,b,c}, {a,b,c,A,B,C,#}, q_k, $\delta, \{q_a\}$), ahol δ a következő:

(q_k, #,#,q_0,J)

(q_0, #, #, q_a, B) üresszón állunk q_0-nál, akkor a beolvasott szót felismeri a gép

(q_0, a, A, q_1, J) a legbaloldalibb a-t átírjuk A-vá, és átmegyünk q_1-be

(q_0, B, B, q_0, J)
(q_0, C, C, q_0, J) a B és C betűkön csak jobbra átmegyünk q_0-lal

(q_1, a, a, q_1, J)
(q_1, B, B, q_1, J) az a-kon és a B-ken jobbra haladva átmegyünk az első b-ig

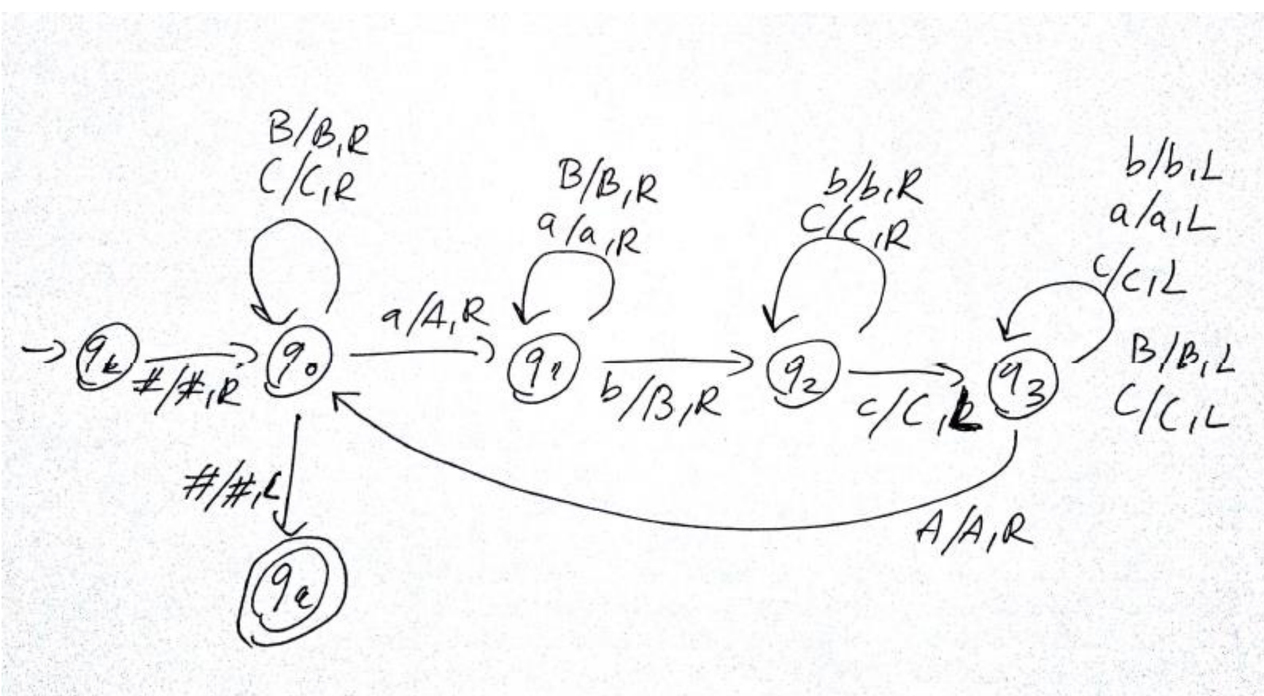
(q_1, b, B, q_2, J) a legbaloldalibb b-t átírjuk B-vé, és átmegyünk q_2-be

(q_2, b, b, q_2, J)
(q_2, C, C, q_2, J) a b-ken és a C-ken jobbra haladva átmegyünk az első c-ig

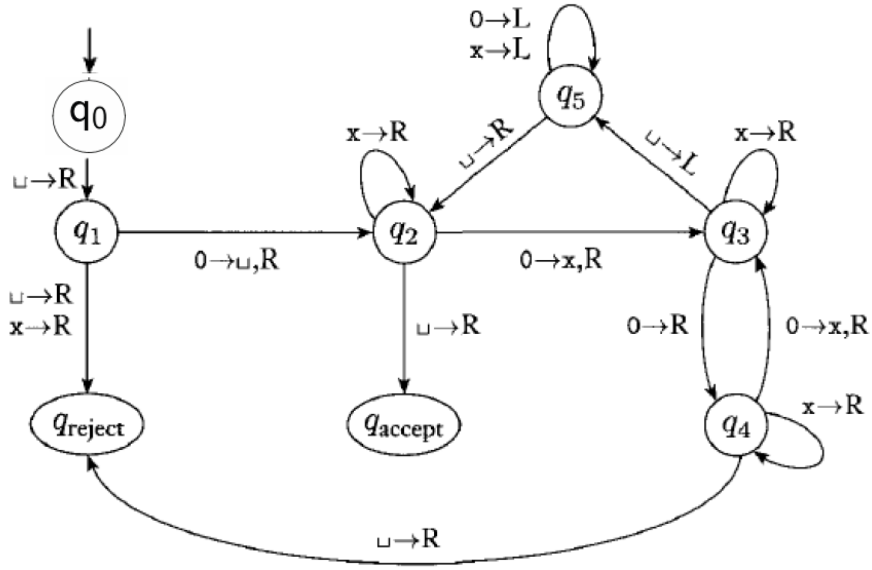
(q_2, c, C, q_3, B) a legbaloldalibb c-t átírjuk C-vé, és átmegyünk q_3-ba, majd balra lépünk egyet

(q_3, a, a, q_3, B)
(q_3, b, b, q_3, B)
(q_3, c, c, q_3, B)
(q_3, B, B, q_3, B)
(q_3, C, C, q_3, B) q_3 állapottal elmegyünk a legbaloldalibb A-ig, majd jobbra lépünk 1-et

(q_3, A, A, q_0, J) az első A-t követő karakteren állunk kezdőállapotban.



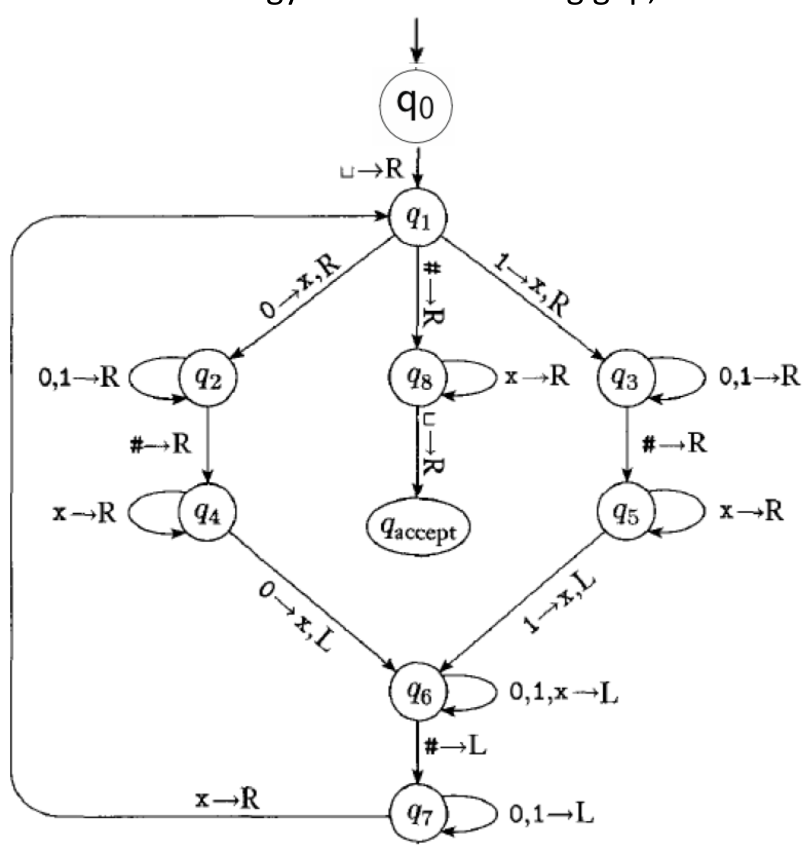
5. Milyen konfigurációsorozaton megy át az alábbi Turing gép, ha 00 bemenettel indítjuk el.



Megoldás:

$q_0 \sqcup 00, q_1 00, \sqcup q_2 0, \sqcup \mathrm{x} q_3 \sqcup, \sqcup q_5 \mathrm{x} \sqcup, q_5 \sqcup \mathrm{x} \sqcup, \sqcup q_2 \mathrm{x} \sqcup, \sqcup \mathrm{x} q_2 \sqcup, \sqcup \mathrm{x} \sqcup q_{\mathrm{accept}}$

6. Milyen konfigurációsorozaton megy át az alábbi Turing gép, ha 11 bemenettel indítjuk el.



Megoldás:

$q_0 \sqcup 11, q_1 11, \mathrm{x} q_3 1, \mathrm{x} 1 q_3 \sqcup, \mathrm{x} 1 \sqcup q_{\mathrm{reject}}$

7. Írjuk le annak a Turing gépnek a működését, ami olyan szavakat fogad el, melyek egyező számú 0-ból és 1-ből állnak.

Megoldás:

1. Balról jobbra olvasva a bemenetet, jelöljük meg az első olyan 0-t, ami még nincs megjelölve, és térjünk vissza a szalag elejére. Ha nincs jelöletlen 0, folytatás a 4. pontnál.
2. Balról jobbra olvasva, jelöljük meg az első jelöletlen 1-et és térjünk vissza a szalag elejére. Ha nincs ilyen, utasítsuk el a bemenetet.
3. Folytassuk az 1. pontnál.
4. Térjünk vissza a szalag elejére. Ha eközben csak jelölt szimbólumokat látunk, fogadjuk el a bemenetet, különben utasítsuk el.