INBPM0207G **Kalkulus** **Második zárthelyi dolgozat** **mintadolgozatának megoldásai** **2024. május 10.**

Név, Neptun-kód: ....

Kérem, hogy tegyen X-et a gyakorlatvezetője neve mellé.

Gselmann Eszter	
Kiss Tibor	
Nagy Gergő	
Muzsnay Anna	
Tóth Mariann	
Tóth Norbert	
Tóth Péter	

Igaz-hamis kérdések[1]

1. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ egy intervallum, $f, g\colon \mathbb{R}$ szigorúan monoton növekedő függvények. Ekkor az $f \cdot g$ függvény is szigorúan monoton növekedő.

   Megoldás. Hamis. Tekintsük az

   $$f(x) = x - 1 \qquad \text{és} \qquad g(x) = x - 2 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

   módon megadott $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényeket. Ekkor f és g is szigorúan monoton növekedőek $\mathbb{R}$-en, hiszen minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

   $$f'(x) = 1 \geq 0 \qquad \text{és} g'(x) = 1 \geq 0$$

   teljesül és nincs olyan $I \subset \mathbb{R}$ valódi intervallum, melyen $f'(x) = 0$, illetve $g'(x) = 0$ állna fenn. Azonban

   $$(f \cdot g)(x) = (x-1) \cdot (x-2) = x^2 - 3\,x + 2 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

   Figyeljük meg, hogy ekkor

   $$(f \cdot g)'(x) = 2x - 3 \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

   ami mutatja, hogy az $f \cdot g$ függvény monoton csökkenő a $]-\infty, 3/2[$ intervallumon. □

2. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ egy nyílt intervallum, $f\colon I \to \mathbb{R}$ pedig egy differenciálható függvény. Ha $f'(x) \geq 0$ teljesül minden $x \in I$ esetén, akkor az f függvény monoton növekedő az I intervallumon.

   Megoldás. Igaz. Ez egy előadáson tanult állítás. □

3. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ egy nyílt intervallum, $f\colon I \to \mathbb{R}$ pedig egy olyan függvény, mely kétszer differenciálható az $x_0 \in I$ pontban. Ha $f'(x_0) = 0$ és $f''(x_0) > 0$, akkor az x_0 pont lokális minimumhelye az f függvénynek.

   Megoldás. Igaz. Ez két, előadáson tanult állításból következik:

   1. Ha az $f\colon]a, b[\to \mathbb{R}$ függvénynek az $x_0 \in]a, b[$ pontban lokális minimuma/maximuma van, és f differenciálható az x_0 pontban, akkor $f'(x_0) = 0$.

[1] A zárthelyi dolgozatban az igaz-hamis kérdések esetében nem szükséges indoklást írni.

2. Ha az $f:]a, b[\to \mathbb{R}$ függvény k-szor differenciálható ($k > 1$), és $f'(x_0) = \ldots = f^{(k-1)}(x_0) = 0$ és $f^{(k)}(x_0) \neq 0$, akkor
   - ha k páratlan, akkor $f(x_0)$ nem szélsőérték;
   - ha k páros, akkor
     - ha $f^{(k)}(x_0) > 0$, akkor $f(x_0)$ szigorú lokális minimum;
     - ha $f^{(k)}(x_0) < 0$, akkor $f(x_0)$ szigorú lokális maximum.

□

4. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ egy intervallum, $f: I \to \mathbb{R}$ pedig egy konvex függvény. Ekkor a $-f$ függvény konkáv az I intervallumon.

Megoldás. Igaz. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ egy intervallum, $f: I \to \mathbb{R}$ pedig egy konvex függvény. Ekkor minden $x, y \in I$ és $\lambda \in [0, 1]$ esetén

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

teljesül. Szorozzuk meg ennek az egyenlőtlenségnek mindkét oldalát (-1)-gyel, ekkor

$$-f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq -\lambda f(x) - (1-\lambda)f(y),$$

azaz,

$$(-f)(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda(-f)(x) + (1-\lambda)(-f)(y),$$

minden $x, y \in I$ és $\lambda \in [0, 1]$ esetén, ami mutatja, hogy a $-f$ függvény valóban konkáv. □

5. Van olyan $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, melynek nem létezik a primitív függvénye.

Megoldás. Igaz. Például az

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x > 0 \\ 0, & \text{ha } x \leq 0 \end{cases} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

módon megadott $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény ilyen. □

6. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ egy nyílt intervallum, $f, g: I \to \mathbb{R}$ pedig olyan függvények, melyeknek létezik a primitív függvényük. Ekkor az $f + g$ függvénynek is létezik a primitív függvénye.

Megoldás. Igaz. Ez az állítás a Határozatlan integrál linearitásáról szóló tétel egyik következménye. □

7. Az $\int (x^2 + x + 1)e^x dx$ határozatlan integrál a parciális integrálás tételének felhasználásával számítható ki.

Megoldás. Igaz. Erre az integrálra kétszer kell alkalmazni a parciális integrálás tételét úgy, hogy mindkét esetben az exponenciális függvény választjuk g-nek, a polinomot pedig f'-nak és akkor azt kapjuk, hogy

$$\int (x^2 + x + 1)e^x dx = \left(x^2 - x + 2\right) e^x + C.$$

□

8.

$$\int 1 dx = 0$$

Megoldás. Hamis.

$$\int 1dx = x + C.$$

$\square$

9.

$$\int x + 1dx = \frac{x^2}{2} + x + C$$

Megoldás. Igaz. $\square$

10.

$$\int 2\sqrt{x}dx = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$$

Megoldás. Hamis.

$$\int 2\sqrt{x}dx = \int 2x^{\frac{1}{2}}dx = 2\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C == 2\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{4}{3}\sqrt{x^3} + C$$

$\square$

11.

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \ln(1+x^2) + C$$

Megoldás. Hamis.

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \mathrm{arctg(x)} + C$$

$\square$

12.

$$\int \sin(x)dx = \cos(x) + C$$

Megoldás. Hamis.

$$\int \sin(x)dx = -\cos(x) + C$$

$\square$

13.

$$\int \frac{1}{\sinh^2(x)}dx = \frac{1}{\coth(x)} + C$$

Megoldás. Hamis.

$$\int \frac{1}{\sinh^2(x)}dx = -\frac{1}{\coth(x)} + C$$

$\square$

14.

$$\int 2^x dx = x2^{x-1} + C$$

Megoldás. Hamis.

$$\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln(2)} + C$$

□

15.

$$\int \frac{1}{(x-1)(x-2)} dx = A\ln(|x-1|) + B\ln(|x-2|) + C,$$

valamilyen A, B valós számokkal.

Megoldás. Igaz. Az integrandust először parciális törtekre bonatva,

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = -\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2},$$

majd integrálva

$$\int \frac{1}{(x-1)(x-2)} dx = \int -\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-1} dx = -\ln(|x-1|) + \ln(|x-2|) + C.$$

□

Kérdés	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
Válasz	H	I	I	I	I	I	I	H	I	H	H	H	H	H	I

Helyes válasz 1 pont, helytelen válasz −1 pont, üresen hagyott mező 0 pont. Ez a pontozási módszer bünteti a tippelést. Kérem, hogy a saját érdekében ne tippeljen.

Feladatok

1. Vizsgálja meg az

$$f(x) = x^2 - \ln(x^2) \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

módon megadott függvényt monotonitás szempontjából.

(5 pont)

Megoldás. A megoldás során az alábbi állítást fogjuk használni. Ha az $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ függvény differenciálható, akkor

— ha $f' \geq 0$, akkor f monoton növekedő $]a, b[$-n;

— ha $f' \leq 0$, akkor f monoton csökkenő $]a, b[$-n.

Legyen

$$f(x) = x^2 - \ln(x^2) \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

Ekkor az f függvény differenciálható az $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ halmazon és

$$f'(x) = 2x - \frac{2}{x} \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

Ezért

$$\begin{aligned} f'(x) &\geq 0 \\ 2x - \frac{2}{x} &\geq 0 \\ x - \frac{1}{x} &\geq 0 \\ \frac{1}{x}\left(x^2 - 1\right) &\geq 0 \\ x \geq 1 \quad &\text{vagy} \quad -1 \leq x < 0. \end{aligned}$$

Így az f függvény

— a $]-\infty, -1[$ intervallumon monoton csökkenő;

— a $[-1, 0[$ intervallumon monoton növekedő;

— a $]0, 1]$ intervallumon monoton csökkenő;

— az $]1, +\infty]$ intervallumon monoton növekedő.

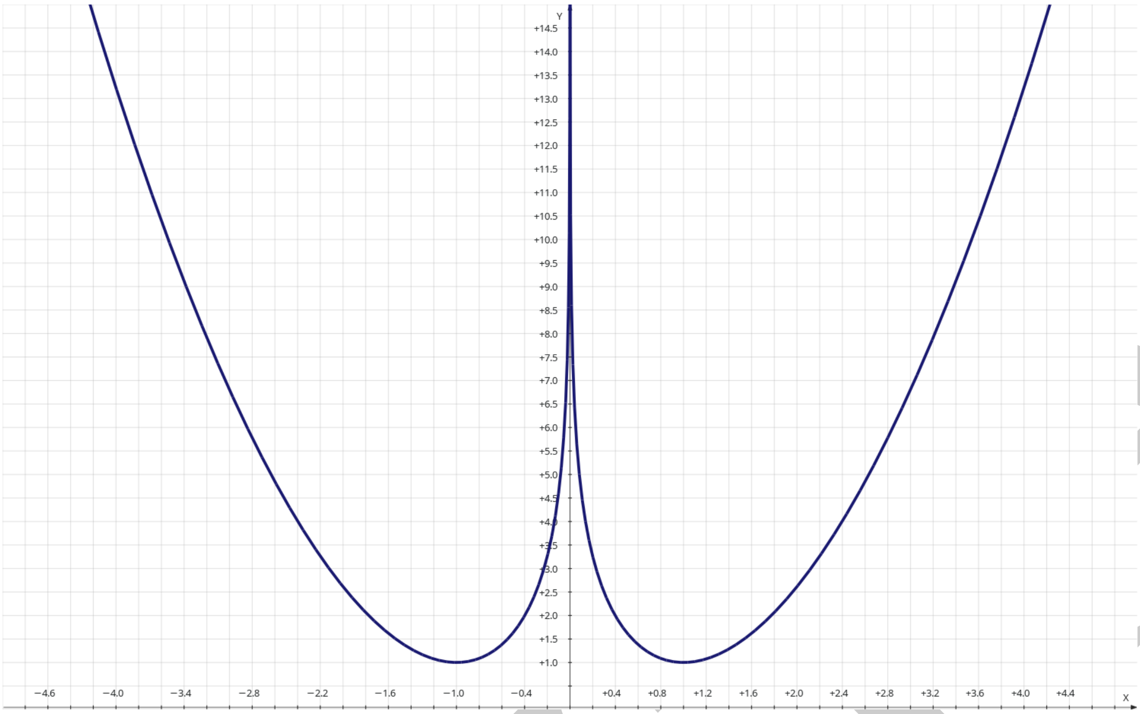
□

2. Vizsgálja meg az

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

módon megadott függvényt konvexitás szempontjából.

(5 pont)



1. ábra. Az $f(x) = x^2 - \ln(x^2)$ függvény

Megoldás. A megoldás során az alábbi állítást fogjuk használni. Legyen $f\colon\,]a,b[\to \mathbb{R}$ egy olyan függvény, amely kétszer differenciálható az $]a,b[$ intervallumon. Ekkor f pontosan akkor konvex az $]a,b[$ intervallumon, ha $f''(x) \geq 0$ teljesül minden $x \in]a,b[$ esetén.

Ebben az esetben

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ezért

$$f'(x) = (-1)(1+x^2)^{-2} \cdot 2x = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

és

$$f''(x) = \frac{(-2)(1+x^2)^2 - (-2x) \cdot 2(1+x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)^4} = \frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^2} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

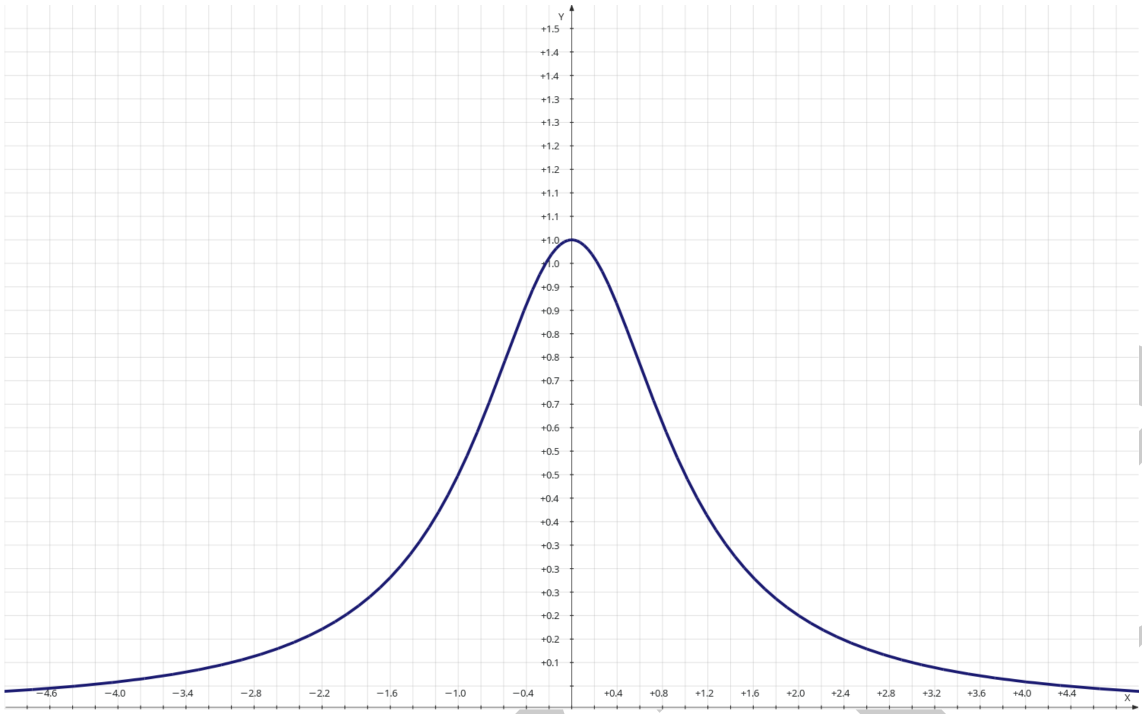
Ezért

$$\begin{aligned} f''(x) &\geq 0 \\ \frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^2} &\geq 0 \\ 3x^2 - 1 &\geq 0 \\ x &\in]-\infty, -\sqrt{3}/3[\cup]\sqrt{3}/3, +\infty[. \end{aligned}$$

Így, az f függvény

- konvex a $]-\infty, -\sqrt{3}/3[$ intervallumon,
- konkáv a $]-\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3[$ intervallumon,
- konvex a $]-\sqrt{3}/3, +\infty[$ intervallumon.

□



2. ábra. Az $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ függvény

3. Határozza meg az

$$f(x) = \left(x^2 - 5x + 7\right) e^x \qquad (x \in \mathbb{R})$$

módon megadott függvény stacionárius pontjait és osztályozd azokat.

(10 pont)

Megoldás. A megoldás során az alábbi két állítást fogjuk alkalmazni.

1. Ha az $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ függvénynek az $x_0 \in]a, b[$ pontban lokális minimuma/maximuma van, és f differenciálható az x_0 pontban, akkor $f'(x_0) = 0$.
2. Ha az $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ függvény k-szor differenciálható ($k > 1$), és $f'(x_0) = \ldots = f^{(k-1)}(x_0) = 0$ és $f^{(k)}(x_0) \neq 0$, akkor
   — ha k páratlan, akkor $f(x_0)$ nem szélsőérték;
   — ha k páros, akkor
     – ha $f^{(k)}(x_0) > 0$, akkor $f(x_0)$ szigorú lokális minimum;
     – ha $f^{(k)}(x_0) < 0$, akkor $f(x_0)$ szigorú lokális maximum.

Legyen

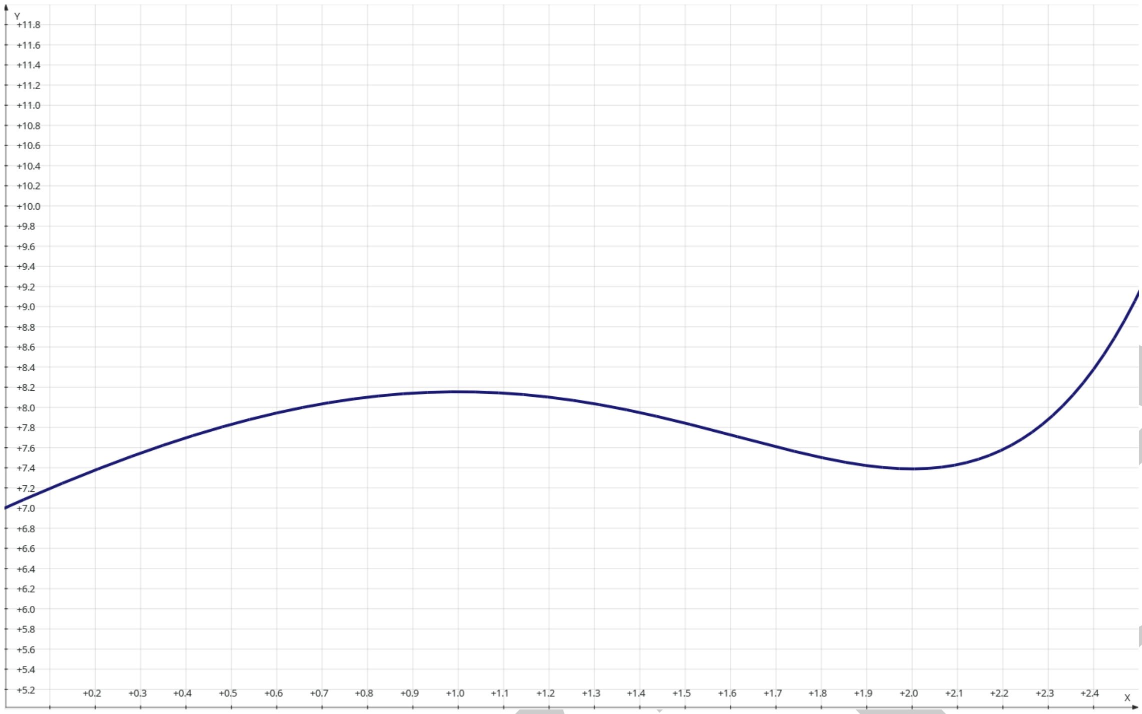
$$f(x) = \left(x^2 - 5x + 7\right) e^x \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ekkor

$$f'(x) = \left(x^2 - 3x + 2\right) e^x \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Így az f függvény stacionárius pontjainak meghatározásához meg kell oldanunk az

$$f'(x) = 0$$



3. ábra. Az $f(x) = (x^2 - 5x + 7)e^x$ függvény

egyenletet. Mivel

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \left(x^2 - 3x + 2\right) e^x &= 0 \\ x^2 - 3x + 2 &= 0 \\ x_1 = 1 \quad &\text{és} \quad x_2 = 2, \end{aligned}$$

ezért az f függvénynek két stacionárius pontja van, az egyik $x_1 = 1$, míg a másik $x_2 = 2$. Mivel

$$f''(x) = \left(x^2 - x - 1\right) e^x$$

és

$$f''(1) = -e < 0 \qquad \text{és} \qquad f''(2) = e^2 > 0,$$

ezért az $x_1 = 1$ pont lokális maximumhely, az $x_2 = 2$ pont pedig lokális minimumhely.

$\square$

4. Számítsa ki az alábbi határozatlan integrálokat.

(a)
$$\int 5^x + 5e^x + 5\sin(x) - 5\cosh(x) - \frac{5}{x} + x^5 dx$$

(b)
$$\int x\ln(x) + x^2 e^x dx$$

(c)
$$\int \frac{xe^{x^2}}{e^{x^2} + 1} dx$$

(d)
$$\int \frac{\sin(x)}{\sqrt{\cos^3(x)}} dx$$

(e)
$$\int \frac{x + 2}{x^2 - 1} dx$$

(f)
$$\int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx$$

Kalkulus
Második zárthelyi dolgozat
INBPM0207G **mintadolgozatának megoldásai** **2024. május 10.**

(5 – 5 pont)

Megoldás. (a)

$$\int 5^x + 5e^x + 5\sin(x) - 5\cosh(x) - \frac{5}{x} + x^5 dx$$
$$= \frac{5^x}{\ln(5)} + 5e^x - 5\cos(x) - 5\sinh(x) - 5\ln|x| + \frac{x^6}{6} + C.$$

(b) A parciális integrálás tétele szerint ha az $f, g :]a,b[\to \mathbb{R}$ függvények differenciálhatóak $]a,b[$-n, és létezik $\int f' \cdot g$, akkor létezik $\int f \cdot g'$ is, és létezik olyan $C \in \mathbb{R}$ konstans, hogy

$$\int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) dx + C \quad (x \in]a,b[).$$

Így,

$$\int x\ln(x) dx = \frac{x^2}{2}\ln(x) - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^2\ln(x)}{x} - \frac{1}{2}\int x dx = \frac{x^2\ln(x)}{2} - \frac{x^2}{4} + C$$

és

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2xe^x dx$$
$$= x^2e^x - 2\left[xe^x - \int 1 \cdot e^x dx\right] = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C = (x^2 - 2x + 2)e^x + C.$$

Ezért

$$\int x\ln(x) + x^2 e^x dx = \frac{x^2\ln(x)}{2} - \frac{x^2}{4} + (x^2 - 2x + 2)e^x + C.$$

(c) Azt fogjuk használni, hogy ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos $[a,b]$-n, $f(x) \neq 0$ $(x \in [a,b])$, f differenciálható $]a,b[$-n, akkor az $\frac{f'}{f}$ függvénynek létezik a primitív függvénye, és létezik olyan $C \in \mathbb{R}$, hogy

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln(|f(x)|) + C.$$

Legyen ugyanis

$$f(x) = e^{x^2} + 1,$$

ekkor

$$f'(x) = 2xe^{x^2}.$$

Ezért

$$\int \frac{xe^{x^2}}{e^{x^2}+1} dx = \frac{1}{2}\int \frac{2xe^{x^2}}{e^{x^2}+1} dx = \frac{1}{2}\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \frac{1}{2}\ln(|f(x)|) + C = \frac{1}{2}\ln\left(\left|e^{x^2}+1\right|\right) + C.$$

(d) A feladat megoldása során azt fogjuk használni, hogy ha $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ egy olyan függvény, mely differenciálható az $]a,b[$ intervallumon, α pedig egy tetszőleges, -1-től különböző valós szám, akkor az $f^\alpha \cdot f'$ függvénynek létezik primitív függvénye, továbbá van olyan $C \in \mathbb{R}$, mellyel

$$\int f^\alpha(x) \cdot f'(x) dx = \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + C$$

teljesül. Az

$$\int \frac{\sin(x)}{\sqrt{\cos^3(x)}}dx$$

integrál meghatározásához legyen

$$f(x) = \cos(x),$$

ekkor $f'(x) = -\sin(x)$, legyen továbbá $\alpha = -\frac{3}{2}$. Ekkor

$$\int \frac{\sin(x)}{\sqrt{\cos^3(x)}}dx = \int \sin(x)\left(\cos(x)\right)^{-\frac{3}{2}}dx = -\int (-\sin(x))\cdot(\cos(x))^{-\frac{3}{2}}dx$$

$$= -\frac{(\cos(x))^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{\sqrt{\cos(x)}} + C.$$

(e) Az integrandust

$$\frac{x+2}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

alakban keressünk, ahol az A, B valós számok egyelőre még ismeretlenek. Közös nevezőre hozva,

$$\frac{x+2}{x^2-1} = \frac{(A+B)x + (A-B)}{x^2-1},$$

vagyis

$$\begin{cases} A+B=1 \\ A-B=2 \end{cases}$$

Ennek az egyenletrendszernek a megoldása

$$A = \frac{3}{2} \quad \text{és} \quad B = -\frac{1}{2},$$

ezért

$$\frac{x+2}{x^2-1} = \frac{3}{2}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{x+1}.$$

Mindezekből azonban az adódik, hogy

$$\int \frac{x+2}{x^2-1}dx = \int \frac{3}{2}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{x+1}dx = \frac{3}{2}\ln(|x-1|) - \frac{1}{2}\ln(|x+1|) + C.$$

(f) A helyettesítéses integrálás tétele szerint ha $f\colon]a,b[\to\mathbb{R}$, $g\colon]c,d[\to\mathbb{R}$ olyan függvények, melyek esetén létezik $g'\colon]c,d[\to]a,b[$ és létezik $\int f$ is, akkor létezik $\int (f\circ g)\cdot g'$ is, és van olyan $C\in\mathbb{R}$, hogy

$$\int f(g(x))\cdot g'(x)dx = \left(\left(\int f\right)\circ g\right)(x) + C = \int f(t)dt\Big|_{t=g(x)} + C \qquad (x\in]c,d[).$$

Legyen

$$t = e^x = g^{-1}(x) \implies x = g(t) = \ln(t) \implies g'(t) = \frac{1}{t}.$$

Ebben az esetben

$$\int \frac{1}{e^x+e^{-x}}dx = \int \frac{1}{t+\frac{1}{t}}\cdot\frac{1}{t}dt\Bigg|_{t=g^{-1}(x)} = \int \frac{1}{t^2+1}dt\Big|_{t=g^{-1}(x)} = \operatorname{arctg}(t) + C\Big|_{t=e^x} = \operatorname{arctg}(e^x) + C.$$

□

A dolgozatban összesen $15+50=65$ *pont szerezhető. A dolgozat* ***legalább*** 39 ***pont*** *megszerzése esetén tekinthető sikeresnek.*