

7. Vektorterek

7.1. Legyen

$$a = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Számítsa ki az alábbi kifejezések értékét!

$$a + b, \quad -5c, \quad 12a + 4b - 3c + d$$

7.2. Legyen

$$a = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Számítsa ki az alábbi kifejezések értékét!

$$a + b, \quad -3c, \quad 2a + 4b - c$$

7.3. Állapítsa meg, hogy alteret alkot-e

- (a) \mathbb{R}^2 -ben a $\{(0, a) \mid a \in \mathbb{R}\}$ halmaz,
- (b) \mathbb{R}^2 -ben az $\{(1, a) \mid a \in \mathbb{R}\}$ halmaz,
- (c) \mathbb{R}^3 -ban az $\{(x, 0, z) \mid x, z \in \mathbb{R}\}$ halmaz
- (d) \mathbb{R}^2 -ben az $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\}$ halmaz,
- (e) \mathbb{R}^2 -ben az $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\}$ halmaz,
- (f) \mathbb{R}^4 -ben az $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 = x_3\}$ halmaz,
- (g) \mathbb{R}^3 -ban az $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_2 = x_3\}$ halmaz,
- (h) \mathbb{R}^3 -ban az $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 = x_3\}$ halmaz,
- (i) \mathbb{R}^2 -ben az $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1, x_2 \geq 0\}$ halmaz,
- (j) a legfeljebb n -edfokú valós polinomok terében azon legfeljebb n -edfokú valós p polinomok halmaza, melyekre $p(0) = 0$ teljesül,
- (k) a legfeljebb n -edfokú valós polinomok terében azon legfeljebb n -edfokú valós p polinomok halmaza, melyekre $p(0) = 1$ teljesül,
- (l) a legfeljebb n -edfokú valós polinomok terében a páros fokszámú polinomok halmaza,
- (m) a valós számsorozatok terében a számtani sorozatok halmaza.

7.4. Mutassa meg, hogy az

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

vektorok lineárisan függetlenek \mathbb{R}^2 -ben!

7.5. Lineárisan függetlenek-e \mathbb{R}^3 -ban az alábbi vektorrendszerek?

(a)

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

(b)

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

(c)

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix};$$

(d)

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix};$$

7.6. Határozza meg az alábbi vektorok által generált alteret \mathbb{R}^2 -ben!

(a) $(1, 0), (0, 1);$ (d) $(3, 2);$ (b) $(-2, 0), (0, 1);$ (e) $(1, 2), (3, 1);$ (c) $(1, -2), (2, -4);$ (f) $(1, 0), (2, -4), (0, 2).$

7.7. Határozza meg a

(a) $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1),$ (d) $(0, 0, 1),$ (b) $(1, 0, 0), (0, 1, 0),$ (e) $(1, 1, 1), (0, 0, 1), (0, 1, 0),$ (c) $(1, 1, 0), (0, 1, 0),$ (f) $(1, 0, 0), (2, 2, 0), (0, -1, 0).$

vektorok által generált alteret \mathbb{R}^3 -ban!

7.8. Írja fel az $(1, 2)$ vektor koordinátáit \mathbb{R}^2 alábbi bázisaira vonatkozóan!

(a) $(1, 0), (0, 1);$ (c) $(3, 1), (1, 2);$ (b) $(-1, 2), (1, 1);$ (d) $(1, -1), (1, 3).$

7.9. Írja fel az $(1, -1, 2)$ vektor koordinátáit az \mathbb{R}^3 alábbi bázisaira vonatkozóan!

(a) $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1);$ (c) $(-1, 2, 1), (2, -3, 1), (1, 1, 2);$ (b) $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 1);$ (d) $(1, 2, 2), (-1, -1, 3), (2, 3, 0).$