Lineáris egyenletrendszerek

Példa

Egy faipari kisvállalkozás kétféle játékot gyárt: kisautókat és vonatokat. Egy kisautó, illetve egy kisvonat legyártásához szükséges faanyag és festék mennyiségét az alábbi táblázat tartalmazza.

	kisautó	kisvonat
faanyag	2	3
festék	5	4

Határozzuk meg egy adott napon a legyártott kisautók és vonatok számát, ha tudjuk, hogy 540 egység faanyagot és 1070 egység festéket használtak fel.

x_1 : az autók száma

x_2 : a vonatok száma

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 540 \\ 5x_1 + 4x_2 &= 1070 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\to \; x_1 + \tfrac{3}{2}x_2 = 270 \\ &\underline{II} - 5\cdot\underline{I} \end{aligned}$$

$$4x_2 - 5 \cdot \frac{3}{2}x_2 = 1070 - 5 \cdot 270$$

$$-\frac{7}{2}x_2 = -280 \implies x_2 = 80$$

$$x_1 = 150$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot x_1 + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} x_2 = \begin{pmatrix} 540 \\ 1070 \end{pmatrix}$$

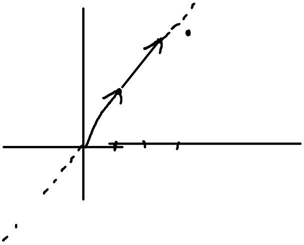
$$\uparrow$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}}_{A :=} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{x :=} = \underbrace{\begin{pmatrix} 540 \\ 1070 \end{pmatrix}}_{b :=}$$

$$Ax = b$$

Példa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} x_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad & x_1 + 2x_2 = 3 \\ \text{II.} \quad & 2x_1 + 4x_2 = 5 \end{aligned}$$

$\text{II} - 2 \cdot \text{I} \implies \quad 0 = -1$ ellentmondás

nincs megoldása a rendszernek (a $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ vektort nem lehet kikombinálni az $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ vektorokból)

Ha
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} x_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

pl. $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ vagy $x = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

végtelen sok megoldás

I. $x_1 + 2x_2 = 3$ $\qquad x_2 = t \in \mathbb{R}$

II. $2x_1 + 4x_2 = 6$ $\qquad x_1 = 3 - 2t$

$\text{II} - 2 \cdot \text{I} \implies 0 = 0$

(az A oszlopai lin függőek, de a b vektort is lehet kombinálni belőlük)

Lineáris egyenletrendszerek

Definíció

m db egyenlet
n db ismeretlen

Az

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2\\
\vdots \qquad\qquad\qquad & \quad \vdots\\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

alakú egyenletrendszert, ahol az a_{ij} ($i \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$) és a b_k ($k \in \{1, \ldots, m\}$) számok ismertek, $x_1, \ldots, x_n$ ismeretlenek, lineáris egyenletrendszernek nevezzük.

- a_{ij}: az egyenletrendszer együtthatói
- b_k: szabad tagok, vagy konstansok

(vagy együtthatómátrix)

Az egyenletrendszer alapmátrixa, ill. kibővített mátrixa:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad \text{és} \quad (A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Az egyenletrendszer jobboldali vektora és ismeretlen vektora

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m \quad \text{és} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

A lineáris egyenletrendszer mátrixos alakja: $\underset{m\times n}{A}\,\underset{n\times 1}{x} = b$.

$m \times 1$

$$Ax = b$$

$$\begin{pmatrix} a^{(1)} & a^{(2)} & \cdots & a^{(n)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = b$$

$$a^{(1)} \cdot x_1 + a^{(2)} \cdot x_2 + \dots + a^{(n)} x_n = b$$

A b vektort elő akarom állítani az A mátrix oszlopainak lin. kombinációjaként

Definíció

A lineáris egyenletrendszer

- megoldható, ha van megoldása, azaz létezik olyan x vektor, hogy $Ax = b$ fennáll;
    - határozott, ha pontosan 1 megoldása van;
    - határozatlan, ha több megoldása van;
- ellentmondásos, ha nincs megoldása.

Megjegyzés

A lineáris egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha a b vektor előállítható az A mátrix oszlopvektorainak lineáris kombinációjaként. Ez azt jelenti, hogy a b vektor benne van az A oszlopvektorai által felfeszített térben.
Ha b egyértelműen állítható elő (mivel az A oszlopvektorai lineárisan függetlenek), akkor pontosan 1 megoldás van.
Ha a b előállítása nem egyértelmű (A oszlopvektorai függőek), akkor több megoldás van.

Definíció

Egy mátrix rangja alatt a mátrix sorai (vagy oszlopai), mint vektorok által alkotott vektorrendszer rangját értjük. Jelölés: $\text{rang}(A)$.

Tétel – rangkritérium

- Egy lineáris egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha $\text{rang}(A) = \text{rang}(A|b)$.
- Ha megoldható és $\text{rang}(A) = n$ (ahol n az ismeretlenek száma), akkor határozott, ha $\text{rang}(A) < n$, akkor határozatlan.

Lineáris egyenletrendszerek megoldáshalmaza

Definíció

A lineáris egyenletrendszer homogén, ha $b = 0$, azaz ekkor mátrixos alakja $Ax = 0$. Egyébként a lineáris egyenletrendszer inhomogén.

Megjegyzés: egy homogén lineáris egyenletrendszernek a nullvektor mindig megoldása. Ezt nevezzük triviális megoldásnak.

Állítás

Egy homogén lineáris egyenletrendszernek pontosan akkor van a triviálistól különböző megoldása, ha az A mátrix oszlopvektorai lineárisan függőek.

Homogén lineáris egyenletrendszer megoldásai

Egy valós együtthatós homogén lineáris egyenletrendszer összes megoldása alteret alkot $\mathbb{R}^n$-ben, melynek dimenziója $n - \text{rang}(A)$. Ezt az alteret megoldástérnek nevezzük.

$Ax = 0$

$$\begin{pmatrix} & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix} = 0 \nwarrow \text{nullvektor}$$

$$a^{(1)} \cdot x_1 + a^{(2)} \cdot x_2 + \dots + a^{(n)} x_n = 0$$

$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ triviális mo.

Mikor van a triviálistól különböző megoldás?

Ha az oszlopok lin. függőek.

$Ax = b$ Ha x^* megoldás, akkor $Ax^* = b$

Ha y az $Ax = 0$ homogén rendszer megoldása

akkor $x = x^* + ty$

$$Ax = A(x^* + ty) = \underbrace{Ax^*}_{b} + t \cdot \underbrace{Ay}_{0} = b$$

Inhomogén lineáris egyenletrendszer megoldásai

Ha $Ax = b$ megoldható, akkor megoldásai $x^* + y$ alakúak, ahol

- x^* a lineáris egyenletrendszer egy rögzített megoldása;
- y a megfelelő homogén lineáris egyenletrendszer (azaz $Ax = 0$) egy tetszőleges megoldása.

Lineáris egyenletrendszerek megoldása

Gauss-elimináció: Az alábbi ekvivalens átalakítások nem változtatják meg a lineáris egyenletrendszer megoldáshalmazát:

- Egyenlet szorzása $\lambda \neq 0$-val. (Egyenlet $\rightsquigarrow$ kibővített mátrix sorai.)
- Egy egyenlethez hozzáadni egy másik egyenlet λ-szorosát.
- Egyenletek sorrendjének megváltoztatása.
- Elhagyni olyan egyenletet, amely egy másik egyenlet λ-szorosa.
- Ismeretlenek felcserélése együtthatóikkal együtt, minden egyenletben. (Alapmátrixban: oszlopcsere.)

Ezen átalakítások segítségével az egyenletrendszer kibővített mátrixában (ahol a mátrix sorai felelnek meg 1-1 egyenletnek) a főátló alatti elemeket „kinullázzuk”, ahonnan visszahelyettesítéssel adódnak a megoldások.

- Ha az eljárás közben $(0 \ldots 0 | \neq 0)$ sor adódik, akkor az egyenletrendszer ellentmondásos.
- Ha az eljárás végén n nem azonosan 0 sor marad, akkor az egyenletrendszer határozott, ha kevesebb, akkor határozatlan.

1 Példa

3 ismeretlen, 3 egyenlet

Oldjuk meg az $Ax = b$ lineáris egyenletrendszert Gauss-eliminációval.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -4 & -1 & -5 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -4 \\ 12 \\ 10 \end{pmatrix}$$

kibővített mátrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 3 & -4 \\ -4 & -1 & -5 & 12 \\ -2 & 4 & 0 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathrm{III}+\mathrm{I}]{\mathrm{II}+2\cdot\mathrm{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 6 & 3 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\mathrm{III}-2\cdot\mathrm{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -4$

$3x_2 + \overset{-2}{x_3} = 4$

$\boxed{x_3 = -2}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$\text{rang}(A) = 3 = \text{rang}(A|b)$ $\Rightarrow$ van megoldás

Visszahelyettesítés: (alulról felfele haladva)

Mivel rang(A) = az ismeretlenek száma $\Rightarrow$ egyetlen megoldás

$$\begin{aligned} x_3 &= -2 \\ 3x_2 + x_3 &= 4 \quad \rightarrow \boxed{x_2 = 2} \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= -4 \quad \rightarrow \boxed{x_1 = -1} \end{aligned}$$

$$x = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Példa

3 ismeretlen, 3 egyenlet

Oldjuk meg az $Ax = b$ lineáris egyenletrendszert Gauss-eliminációval, ha

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -8 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 7 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & -8 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 7 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[III-3I]{II+\frac{1}{2}I} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & -8 & 2 \\ 0 & 5 & -5 & 5 \\ 0 & -10 & 10 & -10 \end{array}\right) \xrightarrow{III+2II} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & -8 & 2 \\ 0 & 5 & -5 & 5 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0} & & & 0 \end{array}\right)$$

$\mathrm{rang}(A) = 2$

$\mathrm{rang}(A|b) = 2$

$\Rightarrow$ van megoldás

mivel $\mathrm{rang}(A) < 3$ $\Rightarrow$ végtelen sok mo.

$$-2x_1 + 4x_2 - 8x_3 = 2$$
$$5x_2 - 5x_3 = 5$$

$x_3 = t \in \mathbb{R}$

$x_2 - x_3 = 1 \Rightarrow x_2 = 1 + x_3 = 1 + t$

$x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -1 \qquad (\mathrm{I} : (-2))$

$x_1 = -1 + 2x_2 - 4x_3 = -1 + 2(1+t) - 4 \cdot t =$

$= 1 - 2t$

$$x = \begin{pmatrix} 1-2t \\ 1+t \\ t \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{x^*} + t \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{y}$$

$$Ax^* = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -8 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = b$$

$$Ay = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -8 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(y a homogén egyenletrendszer megoldása)

Példa

Oldjuk meg az $Ax = b$ lineáris egyenletrendszert Gauss-eliminációval, ha

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -7 \\ 3 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & -6 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -7 & -2 \\ 3 & 2 & -1 & 6 \\ -2 & 2 & -6 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{III}-2\text{I}]{\text{II}+3\text{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -7 & -2 \\ 0 & 11 & -22 & 0 \\ 0 & -4 & 8 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{II}/11} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -7 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 8 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{III}+4\cdot\text{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -7 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 1$$

$\text{rang}(A) = 2 \neq \text{rang}(A|b)$

ellentmondásos a rendszer

Példa

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -2 & 1\\ 3 & 1 & 0 & -4\end{pmatrix} \qquad b=\begin{pmatrix}-4\\ 5\end{pmatrix}$$

4 ismeretlen és 2 egyenlet

$$\left(\begin{array}{cccc|c}-1 & 2 & -2 & 1 & -4\\ 3 & 1 & 0 & -4 & 5\end{array}\right) \xrightarrow{II+3\cdot I} \begin{array}{c}\left(\begin{array}{cccc|c}-1 & 2 & -2 & 1 & -4\\ 0 & 7 & -6 & -1 & -7\end{array}\right)\end{array}\begin{array}{l} I.\\ II.\end{array}$$

$\text{rang}(A)=2=\text{rang}(A|b)$

$\Rightarrow$ van megoldás

Mivel $\text{rang}(A)<4 \Rightarrow$ végtelen sok megoldás

II.

$$7x_2-6x_3-x_4=-7 \qquad x_4=t\in\mathbb{R},\quad x_3=s\in\mathbb{R}$$

$$x_2=\frac{1}{7}\left(-7+6x_3+x_4\right)=-1+\frac{6}{7}s+\frac{1}{7}t$$

I:

$$-x_1+2x_2-2x_3+x_4=-4$$

$$\Rightarrow \quad x_1=4+2x_2-2x_3+x_4=4+2\left(-1+\frac{6}{7}s+\frac{1}{7}t\right)-2s+t$$

$$x_1 = 2 - \frac{2}{7}s + \frac{9}{7}t$$

$$x = \begin{pmatrix} 2 - \frac{2}{7}s + \frac{9}{7}t \\ -1 + \frac{6}{7}s + \frac{1}{7}t \\ s \\ t \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{x^*} + s \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{2}{7} \\ \frac{6}{7} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{y} + t \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{9}{7} \\ \frac{1}{7} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{z}$$

$$Ax^* = b$$

$$Ay = 0$$

$$Az = 0$$

Mátrix rangja, determinánsa

Az alábbi átalakítások nem változtatják meg a mátrix rangját:

- Egy sor szorzása $\lambda \neq 0$-val.
- Egy sorhoz hozzáadni egy másik sor λ-szorosát.
- Sorok sorrendjének megváltoztatása.

- Mátrix determinánsa nem változik, ha egy sorához hozzáadjuk egy másik sor λ-szorosát.
- A determináns (-1)-szeresére változik, ha a mátrix két sorát felcseréljük.
- Háromszögmátrix determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata.

$\Longrightarrow$ a Gauss-eliminációt használhatjuk mátrix (vektorrendszer) rangjának megállapítására és mátrix determinánsának kiszámítására.

Példa

Határozzuk meg az alábbi mátrix rangját és determinánsát!

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\boxed{\mathrm{I} \leftrightarrow \mathrm{II}}} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & -6 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathrm{III}+2\cdot\mathrm{I}]{\mathrm{II}+3\cdot\mathrm{I}} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\mathrm{III}+2\cdot\mathrm{II}} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies \operatorname{rang}(A) = 3$$

Az utolsó mátrix determinánsa $(-1)(-1) \cdot 1 = 1$. Mivel az eljárás során egyszer sort cseréltünk, így $\det(A) = -1$.

Mátrix inverze

Egyenletrendszerek szimultán megoldása

Ha az $Ax = b$ és $Ax = c$ egyenletrendszereket akarjuk megoldani, akkor az eliminációt elvégezhetjük szimultán módon, az $(A|b\ \ c)$ mátrixból indulva.

Mátrix inverze Gauss-eliminációval

Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ egy invertálható mátrix, jelölje X az inverzét. Az inverz meghatározása n darab lineáris egyenletrendszer szimultán megoldását jelenti.

$$(A|E) \to \cdots \to (E|X)$$

Példa

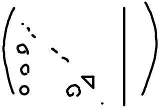
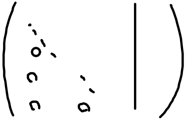
Határozzuk meg az alábbi mátrix inverzét!

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

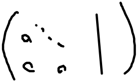
$Ax = b$ $\qquad\qquad$ $Ax = c$

$(A \mid b)$ $\qquad\qquad$ $(A \mid c)$

$\downarrow$ $\qquad\qquad$ $\downarrow$

$(A \mid b \; c)$



Az A mátrix inverze az az X mátrix amelyre

$$A \cdot X = E$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} x^{(1)} & x^{(2)} & \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underset{e_1}{\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}} & \underset{e_2}{\begin{pmatrix}\\\\\\\end{pmatrix}} & \cdots & \underset{e_n}{\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}} \end{pmatrix}$$

$$A \cdot x^{(1)} = e_1$$
$$A \cdot x^{(2)} = e_2$$
$$\vdots$$
$$A \cdot x^{(n)} = e_n$$

n db lineáris egyenlet-rendszer ugyanazzal a mátrixszal

$$\left(A \,\middle|\, \underbrace{e_1\, e_2 \dots e_n}_{E}\right) = (A|E) \to (E|\underset{\uparrow\, A^{-1}}{X})$$

Az ① Példából

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

ezt folytathatjuk valahogy úgy, hogy kinullázhatjuk az átló feletti elemeket is

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[I - 3\cdot III]{II - III} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \leftarrow$$

az egyenletrendszer megoldása

[Gauss-Jordan elimináció]

$$
\left(\overbrace{\begin{matrix} 3 & 5 & -6 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & 6 & 5 \end{matrix}}^{A}\middle|\overbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}^{E}\right)
\xrightarrow{\mathrm{I}\leftrightarrow\mathrm{II}}
\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & -6 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow[\mathrm{III}+2\cdot\mathrm{I}]{\mathrm{II}+3\mathrm{I}}
\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)
\xrightarrow{\mathrm{III}+2\cdot\mathrm{II}}
\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 8 & 1 \end{array}\right)
\xrightarrow[\mathrm{I}-\mathrm{III}]{\mathrm{II}+3\cdot\mathrm{III}}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -2 & 0 & -2 & -7 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 7 & 27 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 8 & 1 \end{array}\right)
\xrightarrow{\mathrm{I}-2\mathrm{II}}
\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & -16 & -61 & -7 \\ 0 & -1 & 0 & 7 & 27 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 8 & 1 \end{array}\right)
$$

$$
\longrightarrow
\left(\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\middle|\underbrace{\begin{matrix} 16 & 61 & 7 \\ -7 & -27 & -3 \\ 2 & 8 & 1 \end{matrix}}_{A^{-1}}\right)
\Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 16 & 61 & 7 \\ -7 & -27 & -3 \\ 2 & 8 & 1 \end{pmatrix}
$$