Riemann-integrál

Házi feladatok

Feladatok gyakorláshoz

1. Feladat. *A Newton–Leibniz-formula felhasználásával számítsuk ki az alábbi Riemann-integrálokat.*

(a)
$$\int_2^9 x^5 dx,$$

(b)
$$\int_1^2 8\sqrt{x} + 7dx,$$

(c)
$$\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{2}}{x^2}dx,$$

(d)
$$\int_3^{30} \frac{5}{\sqrt[3]{x}}dx,$$

(e)
$$\int_1^8 \frac{5}{x}dx,$$

(f)
$$\int_{12}^{120} \frac{77}{x}dx,$$

(g)
$$\int_5^{55} \frac{2}{x-3}dx,$$

(h)
$$\int_{-3}^{1} \frac{2}{x-3}dx,$$

2. Feladat. *A Newton–Leibniz-formula felhasználásával számítsuk ki az alábbi Riemann-integrálokat.*

(a)
$$\int_0^{\pi/4} \sin(x)dx,$$

(b)
$$\int_0^{2\pi} \cos(x)dx,$$

(c)
$$\int_0^{\pi/3} \sin(3x)dx,$$

(d)
$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{\sin^2(x)}dx,$$

(e)
$$\int_2^4 e^x dx$$

(f)
$$\int_2^6 3^x dx,$$

3. Feladat. *A Newton–Leibniz-formula felhasználásával számítsuk ki az alábbi Riemann-integrálokat.*

(a)
$$\int_{-4}^{7} \frac{1}{1+x^2}dx,$$

(b)
$$\int_2^4 \sinh(x)dx,$$

(c)
$$\int_{\frac{1}{2}}^{3} \frac{\cosh(x)}{2}dx,$$

(d)
$$\int_{\pi}^{2\pi} \sin(x) + \sinh(x) - \cos(x) - \cosh(x)dx$$

4. Feladat. *A parciális integrálás tételének segítségével számítsuk ki a következő Riemann-integrálokat.*

(a)
$$\int_5^{125} \ln(x)dx,$$

(b)
$$\int_3^9 x^n \ln(x)dx, \ (n \neq -1)$$

(c)
$$\int_4^{49} \sqrt{x}\ln^2(x)dx,$$

(d)
$$\int_1^2 xe^{-x}dx,$$
(e)
$$\int_5^6 x^2e^{-2x}dx,$$
(f)
$$\int_{10}^{100} (x^2+2)\ln(x)dx,$$
(g)
$$\int_8^{12} (x-1)e^xdx,$$
(h)
$$\int_3^4 (x^2+x+1)e^xdx,$$
(i)
$$\int_5^9 x^2e^{x+1}dx,$$
(j)
$$\int_2^3 x^3e^{-x^2}dx,$$
(k)
$$\int_\pi^{3\pi} x\cos(x)dx,$$
(l)
$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} x^2\sin(2x)dx,$$
(m)
$$\int_e^{e^2} x\sinh(x)dx,$$
(n)
$$\int_{-2}^{-1} x^3\cosh(3x)dx,$$
(o)
$$\int_2^4 e^{\sqrt{x}}dx,$$
(p)
$$\int_\pi^{3\pi} x\sin(\sqrt{x})dx,$$
(q)
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2(x)}dx,$$
(r)
$$\int_0^1 \frac{xe^x}{(x+1)^2}dx,$$
(s)
$$\int_{-\pi}^{\pi} e^x\cos(x)dx,$$
(t)
$$\int_0^1 e^{2x}\sin(3x)dx,$$
(u)
$$\int_0^{2\pi} e^{2x}\sin^2(x)dx,$$
(v)
$$\int_2^3 \left(e^x-\cos(x)\right)^2dx,$$

Nehezebb feladatok

5. Feladat. *Számítsuk ki az alábbi Riemann-integrálokat.*

(a)
$$\int_0^3 \operatorname{sign}(x-x^3)dx$$
(b)
$$\int_0^2 e^{[x]}dx$$
(c)
$$\int_0^6 [x]\sin\left(\frac{\pi x}{6}\right)dx$$
(d)
$$\int_0^\pi x\operatorname{sign}(\cos(x))dx$$
(e)
$$\int_0^1 \operatorname{sign}\left(\sin(\ln(x))\right)dx$$
(f)
$$\int_1^{n+1} \ln\left([x]\right)dx$$

ahol $n \in \mathbb{N}, n > 1$ rögzített és $[x]$ jelöli az x valós szám egészrészét.

6. Feladat. *Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy olyan folytonos függvény, melyre minden $x \in \mathbb{R}$ esetén*
$$\int_0^x f(t)dt = -\frac{1}{2} + x^2 + x\sin(2x) + \frac{1}{2}\cos(2x)$$

teljesül. Határozzuk meg az $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ és az $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ értékeket.

7. Feladat. *Legyen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy folytonos függvény, melyre*

$$\int_c^x f(t)dt = \cos(x) - \frac{1}{2} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Határozzuk meg a c konstans értékét és az f függvényt.

8. Feladat. *Legyen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy folytonos függvény, melyre*

$$\int_0^x f(t)dt = \int_x^1 t^2 f(t)dt + \frac{x^{16}}{8} + \frac{x^{18}}{9} + c \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Határozzuk meg a c konstans értékét és az f függvényt.

9. Feladat. *Definiáljuk az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt az*

$$f(x) = 3 + \int_0^x \frac{1 + \sin(t)}{2 + t^2} dt \qquad (x \in \mathbb{R})$$

képlettel, legyen továbbá

$$p(x) = a + bx + cx^2.$$

Határozzuk meg az a, b, c konstansokat, ha tudjuk, hogy

$$p(0) = f(0) \qquad p'(0) = f'(0) \qquad p''(0) = f''(0).$$

10. Feladat. *Számítsuk ki az $f(2)$ értéket, ha*

(a)

$$\int_0^x f(t)dt = x^2(1 + x)$$

(b)

$$\int_0^{x^2} f(t)dt = x^2(1 + x)$$

(c)

$$\int_0^{f(x)} t^2 dt = x^2(1 + x)$$

(d)

$$\int_0^{x^2(1+x)} f(t)dt = x$$

11. Feladat. *Számítsuk ki az alábbi, paramétertől függő integrálokat és ábrázoljuk az $I(\alpha)$ függvény, ha*

(a)

$$I(\alpha) = \int_0^1 x|x - \alpha| dx$$

(b)

$$I(\alpha) = \int_0^\pi \frac{\sin^2(x)}{1 + 2\alpha\cos(x) + \alpha^2} dx$$

12. Feladat. *Legyen $a \in]0, +\infty[$ rögzített és $f\colon [-a, a] \to \mathbb{R}$ egy folytonos függvény. Igazoljuk, hogy ha az f függvény páros, akkor*

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx,$$

ha az f függvény páratlan, akkor pedig

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0$$

teljesül. Adjunk geometriai magyarázatot ezekre az eredményekre.

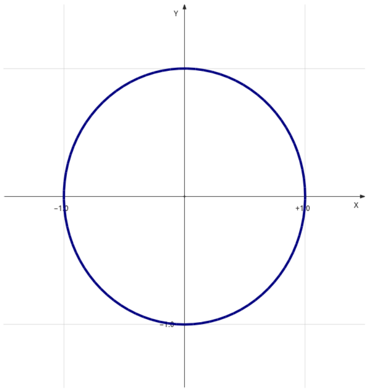
13. Feladat. *Legyen $f\colon [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ egy pozitív, folytonos függvény és*

$$\Phi(x) = \frac{\displaystyle\int_0^x t f(t) dt}{\displaystyle\int_0^x f(t) dt} \qquad (x \in]0,+\infty[) .$$

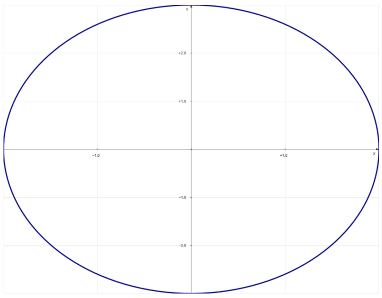
Igazoljuk, hogy az így megadott $\Phi\colon]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ függvény monoton növekedő.

14. Feladat. *Legyen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ egy olyan függvény, melyre az $|f|$ függvény Riemann-integrálható az $[a,b]$ intervallumon. Igaz-e, hogy ekkor az f függvény is Riemann-integrálható az $[a,b]$ intervallumon?*

15. Feladat. *Számítsuk ki az origó középpontú $r > 0$ sugarú körlap területét.*



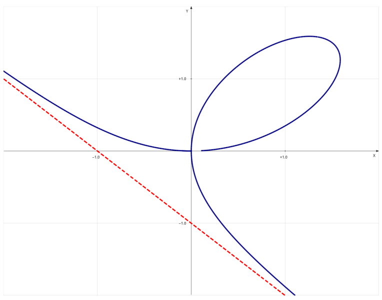
16. Feladat. *Legyenek $a,b > 0$ adottak. Határozzuk meg az a kistengelyű és b nagytengelyű ellpiszis területét.*



17. Feladat. *Legyen $a > 0$ adott. Határozzuk meg az*

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0$$

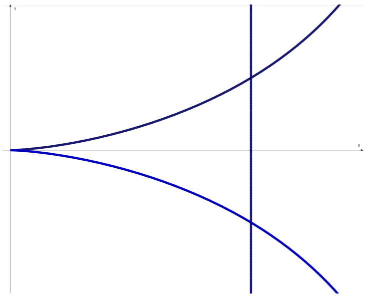
egyenletű, ún. Descartes-féle levél által határolt korlátos tartomány területét.



18. Feladat. *Határozzuk meg az $x = \dfrac{1}{2}$ egyenletű egyenes és az*

$$x^3 + (x-1)y^2 = 0$$

egyenletű cisszoid által határolt korlátos tartomány területét.



19. Feladat. *Határozzuk meg az alábbi görbékkel határolt síkidom területét.*

(a)
$$x = 2x - x^2,\ x + y = 0$$

(b)
$$y = 2^x,\ y = 2,\ x = 0$$

(c)
$$y = |\ln(x)|\,,\ y = 0,\ x = \frac{1}{10},\ x = 10$$

(d)
$$y = (x+1)^2,\ x = \sin(\pi y),\ y = 0$$

(e)
$$y = x,\ y = x + \sin^2(x) \quad (x \in [0,\pi])$$

(f)
$$y = \frac{a^3}{a^2 + x^2},\ y = 0$$

(g)
$$y^2 = x^2\left(a^2 - x^2\right)$$

20. Feladat. *Számítsuk ki az alábbi görbék ívhosszát.*

(a)
$$\begin{aligned} y &= \sqrt{x^3} \\ x &\in [0,4] \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} y^2 &= 2px \\ x &\in [0,x_0] \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} y &= a\cosh\left(\tfrac{x}{a}\right) \\ x &\in [0,a] \end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned} y &= e^x \\ x &\in [0,x_0] \end{aligned}$$

(e)
$$\begin{aligned} x &= \frac{y^2}{4} - \frac{\ln(y)}{2} \\ y &\in [1,e] \end{aligned}$$

(f)
$$\begin{aligned} y &= a\ln\left(\frac{a^2}{a^2 - x^2}\right) \\ x &\in [0,a/2] \end{aligned}$$

(g)
$$\begin{aligned} y &= \ln\left(\cos(x)\right) \\ x &\in \left[0,\tfrac{\pi}{4}\right] \end{aligned}$$