Alkalmazott matematika Labor

Baran Ágnes

Sajátérték feladatok

1. példa (Leslie-modell)

Tegyük fel, hogy nyulak egy zárt populációjáról a következőket tudjuk: a nőstény nyulak nem élnek 3 évnél tovább, az első évben nem születik utóduk, a második és harmadik évben átlagosan 1-1 nőstény utódot hoznak világra. A nyulak 80%-a éli meg a második évet, míg a kétéves egyedek 25%-a a harmadik évet. Keressünk olyan kiinduló koreloszlást, melyre igaz, hogy az évek során állandó marad.

Jelölje x_i az i éves nyulak számát $(i = 1, 2, 3)$ kiinduláskor.
A következő évben a nyulak száma:

$$Ax := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Olyan x vektort keresünk, melyre valamely $\lambda > 0$ szám esetén teljesül, hogy

$$Ax = \lambda x$$

Sajátérték, sajátvektor Matlab-bal

Az A mátrix sajétértékeire és sajátvektoraira van szükségünk.

A megoldáshoz használjuk a Matlab `eig` függvényét.

- `u=eig(A)`

  egy u vektorral tér vissza, melynek elemei az A sajátértékei

- `[V,U]=eig(A)`

  Két mátrixszal tér vissza, az első mátrix oszlopvektorai az A sajátvektorai, a második mátrix diagonálisában lévő értékek az A sajétértékei (a sajátvektoroknak megfelelő sorrendben).

A feladatban szereplő A mátrixszal:

```
>> [V,U]=eig(A)
V =

   0.77152  -0.64982   0.24821
   0.61721   0.71842  -0.71842
   0.15430  -0.24821   0.64982

U =

   1.00000         0         0
         0  -0.72361         0
         0         0  -0.27639
```

Látjuk, hogy A-nak egyetlen pozitív sajátértéke van, a $\lambda = 1$, a hozzátartozó (normált) sajátvektor: $x = (0.77152, 0.61721, 0.15430)^T$.

Az előbb kiszámolt x-ből meghatározhatjuk a megfelelő koreloszlást:

```
>> x/sum(x)
ans =
   0.500000
   0.400000
   0.100000
```

Így megadhatunk egy olyan kiinduló egyedszámot, mely eleget tesz a feltételeknek (sőt, mivel $\lambda = 1$ ezért nem csak az igaz, hogy a koreloszlás változatlan marad az évek során, hanem az is, hogy az egyedszám nem változik).
Egy ilyen kiinduló egyedszám pl.: $x = (100, 80, 20)^T$.

Ellenőrizhetjük, hogy

$$Ax = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 \\ 80 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 80 \\ 20 \end{bmatrix} = x$$

1. feladat

Adjuk meg a lenti x vektorban a hiányzó elemeket úgy, hogy x az

$$A = \begin{bmatrix} 69 & 180 & 30 \\ -28 & -73 & -12 \\ 11 & 30 & 8 \end{bmatrix}$$

mátrix legnagyobb sajátértékéhez tartozó sajátvektor legyen.

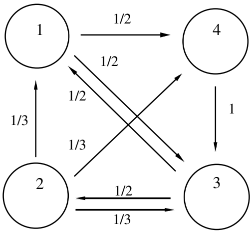
$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. feladat

Halak egy zárt populációjára a következő teljesül: a halak nem élnek 3 évnél tovább, az első évben nem keletkezik utóduk, a második évben átlagosan 6, a harmadik évben átlagosan 8 utóduk lesz. Az 1 és 2 éves halak 50 – 50%-a éli meg a következő évet. Írja fel a megfelelő Leslie-mátrixot és határozzon meg egy stabil koreloszlást.

3. feladat

Oldjuk meg az alábbi nagyon egyszerű internet modellhez tartozó PageRank problémát. (Ld. gyakorlat, 2. példa.)



4. feladat

Egy cégnek egy adott városon belül 3 telephelye van. Minden év elején a dolgozók jelentős részét másik telephelyre küldik dolgozni: az első telephelyen a korábbi dolgozók 10%-a ottmarad, és ide helyezik át a második telephely dolgozóinak 50%-át, illetve a 3. telephely dolgozóinak 40%-át. A második telephelyen szintén marad a dolgozók 10%-a, és még ide kerül az 1. telephely dolgozónak 30%-a, illetve a 3. telephely dolgozóinak 50%-a. A harmadik telephelyen 10% marad a korábbi dolgozókból, és ide helyezik az 1. telephely dolgozóinak 60%-át, illetve a 2. telephely dolgozóinak 40%-át. Lehet-e olyan kiinduló eloszlást mondani a dolgozók számára, mely az évek során nem változik?

5. feladat

Az ábrán látható rács bal alsó rácspontjában ül egy bolha. Elkezd ugrálni: minden ugrása során az adott rácspont szomszédai közül választ egyet egyenletes eloszlás szerint, majd oda ugrik át. Jelölje p_N annak a valószínűségét, hogy N ugrás után a jobb szélső rácspontban lesz a bolha. Írjon egy Matlab-függvényt, amely adott N esetén p_N-et adja vissza. (Két rácspont szomszédos, ha össze vannak kötve.) Legyen V_N az a vektor, melynek elemei annak a valószínűségét adják, hogy az N-edik lépésben az egyes rácspontokban van a bolha. $N \to \infty$ esetén hova tart ez a V_N vektor?