Az informatika logikai alapjai
10. feladatsor

1. Igazoljuk az implikációval kapcsolatos „kvantorkiemelés”-es szabályokat.

Tétel

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy **elsőrendű nyelv**, $A, B \in Form$ két formula és $x \in Var$ egy változó.

Ha $x \notin FreeVar(A)$, akkor

1. $A \supset \forall x B \Leftrightarrow \forall x(A \supset B)$
2. $\forall x B \supset A \Leftrightarrow \exists x(B \supset A)$

Ha $x \notin FreeVar(A)$, akkor

1. $A \supset \exists x B \Leftrightarrow \exists x(A \supset B)$
2. $\exists x B \supset A \Leftrightarrow \forall x(B \supset A)$

Definíció

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy tetszőleges **elsőrendű nyelv**.

Az $A \in Form$ formulát $\boxed{\text{prenex alakúnak nevezzük}}$, ha az alábbi két feltétel valamelyike teljesül:

1. az A formula kvantormentes, azaz sem a $\forall$ sem a $\exists$ kvantor nem szerepel benne;
2. az A formula $Q_1 x_1 Q_2 x_2 \ldots Q_n x_n B$ $(n = 1, 2, \ldots)$ alakú, ahol
    a. $B \in Form$ kvantormentes formula;
    b. $x_1, x_2 \ldots x_n \in Var$ különböző változók;
    c. $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n \in \{\forall, \exists\}$ kvantorok.

Megjegyzés

- A definíció értelmében ha az A formula kvantormentes, azaz egyetlen kvantor sem szerepel benne, akkor az A formula prenex alakú.

Például: Prenexformulák: $\neg P(x, x)$, $\forall x \forall y (Q(x, y) \supset \neg P(x))$

Nem prenexformula: $\forall x \forall y Q(x, y) \supset \neg P(x)$

1. $\neg\exists x A \Leftrightarrow \forall x \neg A$
2. $\neg\forall x A \Leftrightarrow \exists x \neg A$

Ha $x \notin FreeVar(A)$, akkor

1. $A \supset \forall x B \Leftrightarrow \forall x(A \supset B)$
2. $\forall x B \supset A \Leftrightarrow \exists x(B \supset A)$

Ha $x \notin FreeVar(A)$, akkor

1. $A \supset \exists x B \Leftrightarrow \exists x(A \supset B)$
2. $\exists x B \supset A \Leftrightarrow \forall x(B \supset A)$

Ha $x \notin FreeVar(A)$, akkor

1. $A \wedge \forall x B \Leftrightarrow \forall x(A \wedge B)$
2. $A \wedge \exists x B \Leftrightarrow \exists x(A \wedge B)$

Ha $x \notin FreeVar(A)$, akkor

1. $A \vee \forall x B \Leftrightarrow \forall x(A \vee B)$
2. $A \vee \exists x B \Leftrightarrow \exists x(A \vee B)$

Hozzuk a

$$\forall x(\forall y Q(x,y) \supset \neg\exists x P(x)) \supset \forall y Q(x,y)$$

formulát prenex alakúra.

1. Változóiban tiszta alakra hozás:

$$\forall v(\forall w Q(v,w) \supset \neg\exists z P(z)) \supset \forall y Q(x,y)$$

2. De Morgan törvényeinek alkalmazása:

$$\forall v(\forall w Q(v,w) \supset \forall z \neg P(z)) \supset \forall y Q(x,y)$$

3. Kvantorkiemelés:

$$\forall v \exists w \forall z(Q(v,w) \supset \neg P(z)) \supset \forall y Q(x,y)$$

4. Kvantorkiemelés:

$$\exists v \forall w \exists z \forall y((Q(v,w) \supset \neg P(z)) \supset Q(x,y))$$

2.13. FELADAT. Határozzuk meg az alábbi formulák prenex alakját!

a) $\forall x P(x) \supset \neg \exists x P(x) \vee Q(x, c)$

b) $\exists x \forall y\ P(x,y) \vee \exists x \forall y Q(x, y)$

h) $\forall x(\exists y Q(x, y) \supset \forall x P(x)) \supset \neg(\forall x P(x) \vee \forall x R(x))$

$$\forall x(p(x) \vee q(x)),\ \neg p(a_2),\ \neg q(a_1)$$
$$\downarrow$$
$$\forall x(p(x) \vee q(x)),\ p(a_1) \vee q(a_1),\ \neg p(a_2),\ \neg q(a_1)$$
$$\downarrow$$
$$\forall x(p(x) \vee q(x)),\ p(a_2) \vee q(a_2),\ p(a_1) \vee q(a_1),\ \neg p(a_2),\ \neg q(a_1).$$

$$\forall x(P(x) \vee Q(x)),\ P(a_2),\ P(a_1) \vee Q(a_1),\ \neg P(a_2),\ \neg Q(a_1)$$

$$\forall x(P(x) \vee Q(x)),\ P(a_2),\ P(a_1),\ \neg P(a_2),\ \neg Q(a_1)$$

zárt

$$\forall x(P(x) \vee Q(x)),\ P(a_2),\ Q(a_1),\ \neg P(a_2),\ \neg Q(a_1)$$

zárt

$$\forall x(P(x) \vee Q(x)),\ Q(a_2),\ P(a_1) \vee Q(a_1),\ \neg P(a_2),\ \neg Q(a_1)$$

$$\forall x(P(x) \vee Q(x),\ Q(a_2),\ P(a_1),\ \neg P(a_2),\ \neg Q(a_1)$$

nem zárt

$$\forall x(P(x) \vee Q(x)),\ Q(a_2),\ Q(a_1),\ \neg P(a_2),\ \neg Q(a_1)$$

zárt

Tablók : A szabályok

α	α_1	α_2
$\neg\neg A_1$	A_1	
$A_1 \wedge A_2$	A_1	A_2
$\neg(A_1 \vee A_2)$	$\neg A_1$	$\neg A_2$
$\neg(A_1 \supset A_2)$	A_1	$\neg A_2$

β	β_1	β_2
$\neg(B_1 \wedge B_2)$	$\neg B_1$	$\neg B_2$
$B_1 \vee B_2$	B_1	B_2
$B_1 \supset B_2$	$\neg B_1$	B_2

γ	$\gamma(a)$
$\forall x A(x)$	$A(a)$
$\neg\exists x A(x)$	$\neg A(a)$

δ	$\delta(a)$
$\exists x A(x)$	$A(a)$
$\neg\forall x A(x)$	$\neg A(a)$

Tétel: Az algoritmus

Adott: Φ formula

fa

Eredmény: Egy gráf (szemantikus tábla), ahol az ágak végződhetnek nyílt levéllel, zárt levéllel, vagy lehetnek végtelenek.

konstansok

- A fa egy csúcsa ℓ, $U(\ell)$, $C(\ell)$

formulák

Kezdetben Φ és a benne lévő konstansok.

Az algoritmus / folytatás

Vegyünk egy levelet, ami még nyitottnak vagy zártnak jelölve. Figyelve a sorrendre tegyük az alábbiakat:

1. • Ha $U(l)$-ben van komplementer literálpár, jelöljük l-et zárttal
2. • Ha $U(l)$-ben vannak olyan formulák, amik nem literálok, vegyünk egy α, β, δ formulát, A-t
   - Ha A α formula, járjunk el szokásosan
   - Ha A β formula, járjunk el szokásosan

a konstansok halmazát ne változtassuk

Az algoritmus / folytatás 2

- Ha A δ formula, akkor l' egy új csúcs, ahol

$$U(l') = U(l) - \{A\} \cup \{\delta(a')\}$$

$$C(l') = C(l) \cup \{a'\}$$

• a' új konstans

• δ(a) a szabály szerint

δ	$\delta(a)$
$\exists x A(x)$	$A(a)$
$\neg\forall x A(x)$	$\neg A(a)$

Ha nincs komplemens literálpár és elfogytak az α, β, δ formulák:

• Az $U(l)$ beli γ formulái legyenek $\{\gamma_{l_1}, \ldots, \gamma_{l_m}\}$, és $C(l) = \{c_{l_1}, \ldots, c_{l_k}\}$,

$$U(l') = U(l) \cup \left\{ \bigcup_{i=1}^{m} \bigcup_{j=1}^{k} \gamma_{l_i}(c_{l_j}) \right\}$$

$$C(l') = C(l)$$

- Ha csak γ formulák vannak, és $U(l') = U(l)$, akkor l-et jelöljük nyitottnak.

7.P.5. Logikai törvények-e az alábbi formulák?

(a) $\neg\exists x \neg P(x) \vee \forall x \neg P(x)$

(b) $\exists x P(x) \wedge \neg\forall x P(x)$

(c) $\exists x \forall y Q(x,y) \supset \forall y \exists x Q(x,y)$

(d) $\forall x \exists y Q(x,y) \supset \forall y \exists x Q(x,y)$

(e) $\forall x P(x) \vee \exists x R(x) \supset \forall x (P(x) \vee R(x))$

A c) és az e) formulákat vizsgáljuk meg a szemantikus tablók módszerével.

7.P.17. Ellenőrizzük, hogy helyesek-e az alábbi következtetések!

(d) Premisszák:
Minden hegymászó bátor. Minden hegymászó óvatos.
Konklúzió:
Van, aki bátor, de óvatos.

(e) Premisszák:
A vizsgán volt olyan feladat, amelyiket minden hallgató megoldott.
Konklúzió:
Tehát minden hallgató meg tudott oldani legalább egy feladatot.

(g) Premisszák:
Csak azok a hallgatók tanulnak logikát, akik vagy matematikát, vagy informatikát tanulnak. Van olyan hallgató, aki matematikát ugyan nem, de logikát tanul.
Konklúzió:
Van, aki informatikát tanul, de matematikát nem.