Valós függvények differenciálszámítása
Teljes függvényvizsgálat

Elméleti áttekintés

1. Tétel (Lokális minimum/maximum szükséges feltétele). *Ha az* $f\colon]a,b[\to\mathbb{R}$ *függvénynek az* $x_0\in]a,b[$ *pontban lokális minimuma/maximuma van, és* f *differenciálható az* x_0 *pontban, akkor* $f'(x_0)=0$.

2. Tétel. *Ha az* $f\colon]a,b[\to\mathbb{R}$ *függvény* k*-szor differenciálható (ahol* $k>1$*), és* $f'(x_0)=\ldots=f^{(k-1)}(x_0)=0$ *és* $f^{(k)}(x_0)\neq 0$*, akkor*

(A) ha k páratlan, akkor $f(x_0)$ *nem szélsőérték;*

(B) ha k páros, akkor

(i) ha $f^{(k)}(x_0)>0$*, akkor* $f(x_0)$ *szigorú lokális minimum;*

(ii) ha $f^{(k)}(x_0)<0$*, akkor* $f(x_0)$ *szigorú lokális maximum.*

3. Tétel (Monotonitás elegendő feltétele). *Ha az* $f:]a,b[\to\mathbb{R}$ *függvény differenciálható, akkor*

(A) ha $f'(x)\geq 0\,(x\in]a,b[)$*, akkor* f *monoton növekedő* $]a,b[$*-n;*

(B) ha $f'(x)\leq 0\,(x\in]a,b[)$*, akkor* f *monoton csökkenő* $]a,b[$*-n.*

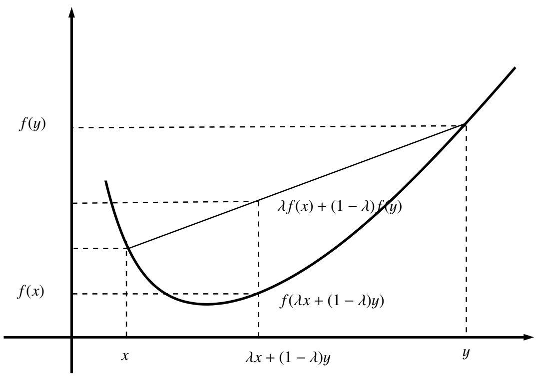
1. Definíció. *Legyen* $I\subset\mathbb{R}$ *nemüres intervallum. Azt mondjuk, hogy az* $f\colon I\to\mathbb{R}$ *függvény* ***konvex****, ha minden* $x,y\in I$ *és minden* $\lambda\in[0,1]$ *esetén*

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leq\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

teljesül. Azt mondjuk, hogy az $f\colon I\to\mathbb{R}$ *függvény* ***konkáv****, ha minden* $x,y\in I$ *és minden* $\lambda\in[0,1]$ *esetén*

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\geq\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

teljesül.



4. Tétel (Konvexitás). *Az* $f:]a,b[\to\mathbb{R}$ *kétszer differenciálható függvény pontosan akkor konvex, ha minden* $x\in]a,b[$ *esetén* $f''(x)\geq 0$ *teljesül.*

5. Tétel (Inflexiós pont). *Az* $f:]a,b[\to\mathbb{R}$ *differenciálható függvénynek az* $x_0\in]a,b[$ *pont pontosan akkor inflexiós pontja, ha* x_0 *szélsőértékhelye az* f' *függvénynek.*

Egy f függvény **teljes függvényvizsgálat**ánál az alábbiakat határozzuk meg:

(i) f értelmezési tartományát ($\mathscr{D}_f$);

(ii) f értékkészletét ($\mathscr{R}_f$);

(iii) f páros, páratlan, periodikus függvény-e;

(iv) f zérushelyeit;

(v) $\mathscr{D}_f$ azon részhalmazait, ahol f előjele állandó;

(vi) f határértékeit $\mathscr{D}_f$ határpontjaiban;

(vii) $\mathscr{D}_f$ azon részhalmazait, ahol f monoton növekedő/csökkenő;

(viii) f szakadási helyeit;

(ix) f derivált függvényeit;

(x) f szélsőérték helyeit és szélsőértékeit;

(xi) $\mathscr{D}_f$ azon részhalmazait, ahol f konvex/konkáv;

(xii) f aszimptotáit.

Feladatok

1. Feladat. *Vizsgáljuk meg **monotonitás** szempontjából az alábbi függvényeket.*

(a) $2 + x - x^2$

(b) $3x - x^3$

(c) $x + \sin(x)$

(d) $x^2 - \ln(x^2)$

(e) $x^\alpha e^{-x}$

(f) $(x + 7)^3$

(g) $x^2 \sqrt{5 - x}$

(h) $x^4 - 8x^2 + 16$

(i) $x^3 e^x$

(j) $x \sinh(x)$

(k) $\ln\left(x^2 + x + 1\right)$

(l) $\dfrac{x + 2}{x + 1}$

(m) $\dfrac{2x}{x^2 + 1}$

(n) $\sqrt{\dfrac{1 + x}{1 - x}}$

(o) $\dfrac{2}{x} + \ln(x^2)$

2. Feladat. *Vizsgáljuk meg a következő függvényeket **konvexitás** szempontjából.*

(a) $3x^2 - x^3$

(b) $\dfrac{1}{1 + x^2}$

(c) $\sqrt{1 + x^2}$

(d) e^{-x^2}

(e) $\ln(1 + x^2)$

(f) $a(x - b)^4$

(g) $\dfrac{3x^2}{1 - x}$

(h) $3x - \sqrt{x - 3}$

3. Feladat. *Határozzuk meg, hogy a következő függvényeknek mely pontokban van **szélsőértékhely**ük.*

(a) $2 + x - x^2$

(b) $(x - 1)^3$

(c) $(x - 1)^\alpha$

(d) $2x^2 - x^4$

(e) $x(x - 1)^2(x - 2)^3$

(f) $x + \dfrac{1}{x}$

(g) $\sqrt[3]{x(1 - x)^2}$

(h) $x^\alpha(1 - x)^\beta$

(i) $(x + 10)^{10} e^{-x}$

(j) xe^{-x}

(k) $\sqrt{x}\ln(x)$

(l) $e^x \sin(x)$

(m) $\dfrac{(x + 3)^3}{(x + 2)^2}$

(n) $a(x - b)^4$

(o) $\dfrac{x}{\ln(x)}$

(p) $\mathrm{arctg}(x) - \dfrac{1}{2}\ln(1 + x^2)$

(q) $\cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x)$

(r) $\dfrac{e^x}{\sin(x - a)}$

(s) $\dfrac{\ln^2(x)}{x}$

4. Feladat. *Végezzünk **teljes függvényvizsgálat**ot az alábbi függvényekre.*

(a) $x^2 + x - 6$

(b) $2x^2 - 3x - 4$

(c) $5x^3 - 4x^4$

(d) $x^3 - 5x^2$

(e) $2x^3 - 6x^2 - 2x + 6$

(f) $x + \dfrac{1}{x}$

(g) $x^2 + \dfrac{1}{x^2}$

(h) $\dfrac{3x - 5}{x - 2}$

(i) $\sqrt{2 - x}$

(j) xe^x

(k) $x\ln(x)$

(l) $x + \mathrm{arctg}(x)$

(m) $2x - \mathrm{tg}(x)$

(n) e^{-x^2}

(o) $\dfrac{x}{(1 - x)^2(1 + x)}$

(p) $\sin(x)\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$