A teljes indukciós bizonyítás

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$: a természetes számok halmaza
A halmaz struktúrája olyan, hogy ha egy tételt (pl. egy képletet) a természetes számokra szeretnénk igazolni, akkor alkalmazhatjuk a teljes indukciós bizonyítási elvet:

(1) **Igazoljuk** az állítást $n = 1$-re.
(2a) **Feltesszük**, hogy az állítás igaz egy tetszőleges k természetes számra,
(2b) majd **bebizonyítjuk** az állítást $k + 1$-re.

(2a): indukciós feltevés $n = k$-ra

Példák a teljes indukciós bizonyításra:

1. Az első n természetes szám összege $\frac{n(n+1)}{2}$. Erre alkalmazható. ✓
2. $x + \frac{1}{x} \geq 2$, $\forall x > 0$. Erre nem alkalmazható!

Példák a teljes indukciós bizonyításra – folytatás

3. Igazoljuk, hogy
$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$
4. Bizonyítsuk be, hogy
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Jelölések

$$\sum_{i=1}^{n} \text{ szumma – összegzés,} \qquad \prod_{i=1}^{n} \text{ produktum – szorzás}$$

Példa

Igazoljuk, hogy

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(1) **Belátjuk** az állítást $n=1$-re:
baloldal: 1 jobboldal: $1^2=1$.
$\Longrightarrow$ az állítás igaz $n=1$-re

(2a) **Feltesszük** hogy az állítás igaz egy tetszőleges k természetes számra:

$$1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$$

(2b) ezután **belátjuk**, hogy igaz $(k+1)$-re:
Amit be akarunk látni:

$$1+3+5+\cdots+(2k-1)+(2k+1)=(k+1)^2$$

A bizonyítás (felhasználva az indukciós feltevést):

$$\underbrace{1+3+5+\cdots+(2k-1)}_{k^2}+(2k+1)=k^2+2k+1=(k+1)^2$$

Biz. be, hogy

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1} \qquad \forall n\in\mathbb{N}$$

(1) Belátjuk $n=1$-re

a baloldal : $\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{2}$

a jobboldal : $\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$ ✓

(2a) (Indukciós feltevés)

Feltesszem, hogy $n=k$-ra igaz

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\dots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1}$$

(2b) Belátom $n=k+1$-re, azaz

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\dots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}$$

A baloldal:

$$\boxed{\underbrace{\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}}_{\frac{k}{k+1}}}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=$$

(indukciós feltevés)

$$=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}\quad\checkmark$$

Biz. be, hogy

$$\frac{n^3}{3} + \frac{n^5}{5} + \frac{7n}{15} \quad \text{egész szám} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

① Belátjuk $n=1$-re

$$\frac{1^3}{3} + \frac{1^5}{5} + \frac{7\cdot 1}{15} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{7}{15} = \frac{5+3+7}{15}$$

$$= \frac{15}{15} = 1 \quad \checkmark$$

②a Feltesszük $n=k$-ra

$$\frac{k^3}{3} + \frac{k^5}{5} + \frac{7\cdot k}{15} \quad \text{egész szám}$$

②b Belátom $n=k+1$-re

$$\frac{(k+1)^3}{3} + \frac{(k+1)^5}{5} + \frac{7\cdot(k+1)}{15}$$

$(a+b)^n \qquad a^k \cdot b^{n-k}$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

$$\frac{(k+1)^3}{3}+\frac{(k+1)^5}{5}+\frac{7(k+1)}{15}=\frac{k^3+3k^2+3k+1}{3}+$$

$$\frac{k^5+5k^4+10k^3+10k^2+5k+1}{5}+\frac{7k+7}{15}$$

$$=\boxed{\frac{k^3}{3}+\frac{k^5}{5}+\frac{7k}{15}}+k^2+k+\boxed{\frac{1}{3}}+k^4+2k^3+2k^2+k$$

escira

$$+\boxed{\frac{1}{5}}+\boxed{\frac{7}{15}}$$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{7}{15}=1$$

A természetes számok halmaza

Axiomatikus bevezetése a Peano-axiómákkal történik.

Definíció – Peano-axiómák

- (P1) Az 1 természetes szám. (Ez egy kitüntetett elem.)
- (P2) Bármely n természetes számhoz egyértelműen megadható egy „1-gyel nagyobb” természetes szám, amit az n rákövetkezőjének nevezünk.
- (P3) Az 1 egyetlen természetes számnak sem a rákövetkezője.
- (P4) Ha két természetes szám rákövetkezője megegyezik, akkor ez a két szám is megegyezik.
- (P5) A teljes indukció elve: ha A egy olyan halmaz, amely
  - tartalmazza az 1 kitüntetett elemet és
  - minden elemével együtt annak a rákövetkezőjét is tartalmazza,

  akkor A az összes természetes számot tartalmazza.

A (P1)–(P5) feltételek egyértelműen meghatároznak egy halmazt, amit a természetes számok halmazának nevezünk. Jele: $\mathbb{N}$.

Megjegyzések a Peano-axiómákhoz

(P2) Bármely n természetes számhoz egyértelműen megadható egy „1-gyel nagyobb" természetes szám, amit az n rákövetkezőjének nevezünk.
$\rightsquigarrow$ $n+1$, $S(n)$ (S: rákövetkező függvény, successor function)

(P4) Ha két természetes szám rákövetkezője megegyezik, akkor ez a két szám is megegyezik.
Másképpen: a rákövetkező függvény injektív.

(P5) A teljes indukció elve: ha A egy olyan halmaz, amely

- tartalmazza az 1 kitüntetett elemet és
- minden elemével együtt annak a rákövetkezőjét is tartalmazza,

akkor A az összes természetes számot tartalmazza.
Másképpen: A induktív halmaz. $\Rightarrow$ $\mathbb{N}$ a legszűkebb induktív halmaz.
Egyéb példa induktív halmazra: pozitív számok halmaza ($\mathbb{R}^+$).

A Peano-axiómák matematikai formalizmussal

Definíció – Peano-axiómák

Legyen $\mathbb{N}$ egy halmaz, amely eleget tesz az alábbi feltételeknek:

- P1 $1 \in \mathbb{N}$
- P2 $\forall n \in \mathbb{N} : \exists S(n) \in \mathbb{N},\ S(n) =: n+1$
  vagy: $\exists S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ún. rákövetkező függvény
- P3 $\nexists n \in \mathbb{N} : S(n) = 1$
- P4 $n, m \in \mathbb{N} : S(n) = S(m) \Rightarrow n = m$
- P5
$$\left.\begin{array}{l} 1 \in A \\ n \in A \Rightarrow S(n) \in A \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathbb{N} \subset A$$

Ekkor $\mathbb{N}$ egyértelműen meghatározott, és ezt a halmazt a természetes számok halmazának nevezzük.

Teljes indukciós bizonyítás

A definíció alapján $\mathbb{N}$ elemei:

$$1,\ S(1),\ S(S(1)),\ S(S(S(1))),\ldots,S(S(\ldots(S(1))\ldots)),\ldots$$
$$S(1)=1+1=:2$$
$$S(S(1))=S(1)+1=:3$$

A teljes indukció elve azt fejezi ki, hogy az összes természetes szám felírható az 1 kitüntetett elem és az S rákövetkező függvény segítségével. Így ha egy tételt (pl. egy képletet) a természetes számokra szeretnénk igazolni, akkor alkalmazhatjuk a teljes indukciós bizonyítási elvet:

(1) Igazoljuk az állítást $n=1$-re.
(2a) Feltesszük, hogy az állítás igaz egy tetszőleges k természetes számra,
(2b) majd bebizonyítjuk az állítást $k+1$-re.

(2a): indukciós feltevés $n=k$-ra

Az egész számok halmaza

Az egész számok halmazát a már bevezetett természetes számok segítségével lehet definiálni, az egzakt definíciótól itt eltekintünk.

Szemléletesen: az egész számok halmaza a legszűkebb olyan számhalmaz, mely tartalmazza a természetes számokat és zárt a kivonásra nézve.

Oszthatóság

Legyen $a, b \in \mathbb{Z}$.

$3|6$ $6 = 3 \cdot 2$
a b c

Definíció

Azt mondjuk, hogy *a osztója b-nek*, vagy *b osztható a-val*, ha létezik $c \in \mathbb{Z}$, hogy $b = a \cdot c$.
Jelölés: $a|b$

Tétel – az oszthatóság tulajdonságai

$0 = a \cdot 0$

1. $\forall a \neq 0, a \in \mathbb{Z} : a|0,\ 1|a,\ a|a$
2. Ha $a|b$ és $c \in \mathbb{Z}$, akkor $a|bc$. $(a|b \wedge c \in \mathbb{Z} \Rightarrow a|bc)$ $3|6 \Rightarrow 3|6 \cdot 5$
3. Ha $a|b_1$ és $a|b_2$, akkor $a|(b_1 + b_2)$. $3|6$ $3|15 \Rightarrow 3|(6+15)$
4. Ha $a|b$ és $b|c$, akkor $a|c$. $3|6$ $6|30 \Rightarrow 3|30$
5. Ha $a|b$ és $b|a$, akkor $a = \pm b$.

2 és 3 $\Rightarrow$ Ha $a|b_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ és $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{Z}$, akkor

$$a|(b_1c_1 + b_2c_2 + \cdots + b_nc_n).$$

Oszthatósági szabályok

$A \in \mathbb{N} \Rightarrow$ $\qquad 7892 = 7\cdot 10^3 + 8\cdot 10^2 + 9\cdot 10 + 2$

$\overline{a_n a_{n-1} \cdots a_0}$

$$A = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0,$$

$$a_i \in \{0, 1, \ldots, 9\},\ a_n \neq 0.$$

- 2-vel való oszthatóság:

$$A = (a_n \cdot 10^{n-1} + a_{n-1} \cdot 10^{n-2} + \cdots + a_2 \cdot 10 + a_1) \cdot 10 + a_0$$

$2|10$, ezért ha $2|a_0$, akkor $2|A$

- 5-tel való oszthatóság: $A =$mint az előbb
  $5|10$, ezért ha $5|a_0$, akkor $5|A$

Oszthatósági szabályok

$A \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$$A = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0,$$

$$a_i \in \{0, 1, \ldots, 9\},\ a_n \neq 0.$$

- 4-gyel való oszthatóság: $4 \nmid 10$, de $4 | 100$

$$A = (a_n \cdot 10^{n-2} + a_{n-1} \cdot 10^{n-3} + \cdots + a_2) \cdot 100 + \underbrace{a_1 \cdot 10 + a_0}$$

$4|100$, ezért ha $4|(a_1 \cdot 10 + a_0)$, akkor $4|A$

$4 \mid 968128$, mert $4|28$

- 25-tel való oszthatóság: hasonlóan

Oszthatósági szabályok

- 8-cal való oszthatóság: $8 \nmid 100$, de $8 | 1000 \Rightarrow$

$$8|A \iff 8|(100a_2 + 10a_1 + a_0)$$

$100a_2 + 10a_1 + a_0$ éppen A-nak az 1000-rel vett osztási maradéka.

$8 \mid 789\underline{072}$, mert $8 \mid 72$

$8 \nmid 892\underline{126}$, mert $8 \nmid 126$

- 3-mal és 9-cel való oszthatóság: $10^k - 1 = 99\dots9$
$\Rightarrow 3|(10^k - 1)$, $9|(10^k - 1)$

$$A = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0 =$$
$$= a_n(10^n - 1) + a_{n-1}(10^{n-1} - 1) + \cdots + a_1(10 - 1) +$$
$$+ \underline{a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0}$$

$\Rightarrow$ A pontosan akkor osztható 3-mal, illetve 9-cel, ha számjegyeinek összege osztható 3-mal, illetve 9-cel.

$3 \mid 781569$, mert $7+8+1+5+6+9 = 36$ $\quad 3 \mid 36$

- 11-gyel való oszthatóság: $10^1 + 1 = 11$, $10^2 - 1 = 99$, $10^3 + 1 = 1001$, $10^4 - 1 = 9999$, ...

$$\begin{cases} 11 \mid (10^k + 1), & \text{ha } k \text{ páratlan} \\ 11 \mid (10^k - 1), & \text{ha } k \text{ páros} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} A &= a_0 + a_1(10^1 + 1) - a_1 + a_2(10^2 - 1) + a_2 + \cdots = \\ &= \left(a_1(10^1 + 1) + a_2(10^2 - 1) + \dots\right) + \left(a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots\right) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ A pontosan akkor osztható 11-gyel, ha számjegyeinek alternáló összege osztható 11-gyel.

$11 \nmid 781092$ $\qquad 7 - 8 + 1 - 0 + 9 - 2 = 7$

Bia. te. Gaaoo

$6 \mid (10^{17} - 88)$

$2 \mid 10^{17} - 88$

ps ps

$100\ldots0 - 88 = 99\ldots912$

$3 \mid 99\ldots912$

Definíció

Azt mondjuk, hogy $d \in \mathbb{N}$ az $a \in \mathbb{Z}$ és $b \in \mathbb{Z}$ számok legnagyobb közös osztója, ha

- $d|a$ és $d|b$,
- bármely $\bar{d} \in \mathbb{N}$ melyre $\bar{d}|a$ és $\bar{d}|b$, teljesül $\bar{d}|d$ is.

Jele: $d = (a, b)$.

Továbbá $d \in \mathbb{N}$ az $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ számok legnagyobb közös osztója, ha

- $d|a_i$, $i \in \{1, \ldots, n\}$,
- bármely $\bar{d} \in \mathbb{N}$ melyre $\bar{d}|a_i$ $(i \in \{1, \ldots, n\})$, teljesül $\bar{d}|d$ is.

Definíció

Az a és b egész számok relatív prímek, ha $(a, b) = 1$.

Definíció

Azt mondjuk, hogy $k \in \mathbb{N}$ az $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ számok legkisebb közös többszöröse, ha

- $a_i|k$, $i \in \{1, \ldots, n\}$,
- bármely $\bar{k} \in \mathbb{N}$ melyre $a_i|\bar{k}$ $(i \in \{1, \ldots, n\})$, teljesül $k|\bar{k}$ is.

Jele: $k = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$.

A maradékos osztás tétele, Euklideszi algoritmus

Tétel – a maradékos osztás tétele

Tetszőleges $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$ esetén egyértelműen léteznek olyan $q, r \in \mathbb{Z}$ számok, hogy

$$a = b \cdot q + r, \quad 0 \leq r < |b|.$$

Euklideszi algoritmus

$a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, előző tétel $\Rightarrow$ $q, r \in \mathbb{Z}$, jelöljük ezeket q_0, r_0-lal:

$$a = b \cdot q_0 + r_0$$

Ismételjük meg az eljárást b-vel és r_0-lal $\Rightarrow$ $q_1, r_1 \in \mathbb{Z}$,
majd r_0-lal és r_1-gyel ($\Rightarrow$ $q_2, r_2 \in \mathbb{Z}$):

$$b = r_0 \cdot q_1 + r_1$$

$$r_0 = r_1 \cdot q_2 + r_2.$$

Mindig a keletkező maradékokkal folytatva az algoritmust, az véges sok lépésben véget ér, hiszen

$$|b| > |r_0| > |r_1| > |r_2| > \cdots > |r_i| > \cdots \geq 0.$$

Tétel

Az a és $b \neq 0$ számokkal végzett euklideszi algoritmus utolsó nem 0 maradéka az a és b legnagyobb közös osztója. Továbbá, ha $d := (a, b)$, akkor az

$$ax + by = d \tag{1}$$

egyenlet megoldható az egész számok halmazán (azaz létezik olyan $x, y \in \mathbb{Z}$, hogy (1) teljesül).

Példa: $(1227, 216) = ?$, $(-1227, -216) = ?$

$$1227 = 216 \cdot 5 + 147$$
$$216 = 147 \cdot 1 + 69$$
$$147 = 69 \cdot 2 + 9$$
$$69 = 9 \cdot 7 + 6$$
$$9 = 6 \cdot 1 + \boxed{3} \leftarrow$$
$$6 = 3 \cdot 2 + 0$$

$(1227, 216) = 3$

$(2100, 1078) = ?$

$2100 = 1078 \cdot 1 + 1022$

$1078 = 1022 \cdot 1 + 56$

$1022 = 56 \cdot 18 + \boxed{14}$ $\quad (2100, 1078) = 14$

$56 = 14 \cdot 4 + 0$

$(168, 45) = ?$

$168 = 45 \cdot 3 + 33$

$45 = 33 \cdot 1 + 12$

$33 = 12 \cdot 2 + 9$

$12 = 9 \cdot 1 + \boxed{3}$ $\quad (168, 45) = 3$

$9 = 3 \cdot 3 + 0$

Diofantikus egyenletek

$\overset{a}{\boxed{168}} x \overset{b}{\boxed{-45}} y = 12$ $(a,b)=3$

Definíció

Az $ax + by = c$ alakú egyenleteket (ahol $a, b, c \in \mathbb{Z}$ ismertek, $x, y \in \mathbb{Z}$ ismeretlenek) lineáris diofantikus egyenleteknek nevezzük.

Tétel

Az $ax + by = c$ lineáris diofantikus egyenlet pontosan akkor oldható meg, ha $(a, b)|c$.

Tétel

Ha az $ax + by = c$ diofantikus egyenlet megoldható, akkor végtelen sok megoldása van, ezek

$$x = \boxed{x_0 + t\frac{b}{(a,b)},} \quad y = \boxed{y_0 - t\frac{a}{(a,b)},} \quad t \in \mathbb{Z},$$

alakban írhatók fel, ahol (x_0, y_0) egy adott megoldás.

$$a\boxed{x} + b\boxed{y} = c$$

$$a x_0 + \underbrace{t \cdot \frac{a \cdot b}{(a,b)}} + b y_0 - \underbrace{t \cdot \frac{a \cdot b}{(a,b)}} = a x_0 + b y_0 = c$$

$$168x - 45y = 12$$

1. megvizsgáljuk, hogy igaz-e, hogy
$(168, 45) \mid 12$
(Euklideszi algoritmus)

2. Az Euklideszi algoritmusban szereplő számsorozat tagjait kikombináljuk 168-ból és 45-ből

jelölés:
$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ jelentése: $168 \cdot u + 45 \cdot v$

$$168x - 45y = 12$$

$$\overset{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}}{168} = 3 \cdot \overset{\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}}{45} + \overset{\begin{bmatrix}1\\-3\end{bmatrix}}{33}$$

$$\overset{\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}}{45} = 1 \cdot \overset{\begin{bmatrix}1\\-3\end{bmatrix}}{33} + \overset{\begin{bmatrix}-1\\4\end{bmatrix}}{12}$$

$$\overset{\begin{bmatrix}1\\-3\end{bmatrix}}{33} = 2 \cdot \overset{\begin{bmatrix}-1\\4\end{bmatrix}}{12} + \overset{\begin{bmatrix}3\\-11\end{bmatrix}}{9}$$

$$\overset{\begin{bmatrix}-1\\4\end{bmatrix}}{12} = 1 \cdot \overset{\begin{bmatrix}3\\-11\end{bmatrix}}{9} + \overset{\begin{bmatrix}-4\\15\end{bmatrix}}{\boxed{3}}$$

$$9 = 3 \cdot 3 + 0$$

$$\boxed{12 = 168x - 45y}$$

$$3 = -4 \cdot 168 + 15 \cdot 45 \quad / \cdot 4$$

$$\boxed{12 = -16 \cdot 168 + 60 \cdot 45}$$

$(168, 45) = 3 \mid 12 \Rightarrow$ megoldható az egyenlet

$x_0 = -16$ és $y_0 = -60$ megoldja az egyenletet

Az általános megoldás:

$$x = \underset{-16}{x_0} + t \cdot \frac{\overset{-45}{b}}{\underset{3}{(a,b)}} = -16 - t \cdot 15 \qquad t \in \mathbb{Z}$$

$$y = \underset{-60}{y_0} - t \, \frac{\overset{168}{a}}{\underset{3}{(a,b)}} = -60 - t \cdot 56$$

$$700x + 539y = 21$$

$$\overset{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}}{700} = \overset{\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}}{539} \cdot 1 + \overset{\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}}{161}$$

$$\overset{\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}}{539} = \overset{\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}}{161} \cdot 3 + \overset{\begin{bmatrix}-3\\4\end{bmatrix}}{56}$$

$$\overset{\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}}{161} = \overset{\begin{bmatrix}-3\\4\end{bmatrix}}{56} \cdot 2 + \overset{\begin{bmatrix}7\\-9\end{bmatrix}}{49}$$

$$\overset{\begin{bmatrix}-3\\4\end{bmatrix}}{56} = \overset{\begin{bmatrix}7\\-9\end{bmatrix}}{49} \cdot 1 + \overset{\begin{bmatrix}-10\\13\end{bmatrix}}{\boxed{7}}$$

$$49 = 7 \cdot 7 + 0$$

$$7 = -10 \cdot 700 + 13 \cdot 539 \quad / \cdot 3$$

$$21 = \underset{x_0}{-30} \cdot 700 + \underset{y_0}{39} \cdot 539$$

$(700, 539) = 7 \mid 21$ van megoldás

Az általános megoldás

$$x = x_0 + t \cdot \frac{b}{(a,b)} = -30 + t \cdot \underbrace{\frac{539}{7}}_{77} = -30 + 77 \cdot t$$

$$y = y_0 - t \frac{a}{(a,b)} = 39 - t \cdot \frac{700}{7} = 39 - 100 \cdot t$$

$$t \in \mathbb{Z}$$