Komplex számok

Példa

Oldjuk meg az alábbi egyenleteket!

(a) $x^2 + 5x + 6 = 0$

(b) $x^2 + 2x + 1 = 0$

(c) $x^2 + 2x + 2 = 0$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\boxed{(x+2)(x+3) = 0}$$

(a) $x^2 + 5x + 6 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 6}}{2} = \frac{-5 \pm 1}{2} \begin{matrix} \nearrow & -2 \\ \searrow & -3 \end{matrix}$$

Ket különböző valós gyök

(b) $x^2+2x+1=0$ $\qquad (x+1)^2=0$

$$x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4-4\cdot 1}}{2}=\frac{-2\pm 0}{2}=-1$$

Egy valós gyök, kétszeres multiplicitással

(c) $x^2+2x+2=0$

$$x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4-4\cdot 2}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{-4}}{2}=-1\pm\underbrace{\boxed{\sqrt{-1}}}_{i}$$

$$=-1\pm i$$

$x_1=1+i$

$x_2=1-i$

Komplex számok

Egyenletek megoldhatóságának kérdése különböző számhalmazokban:

- $\mathbb{N}$-ben: $5 + x = 3 \Rightarrow$ nem megoldható
- $\mathbb{Z}$-ben: $5 \cdot x = 3 \Rightarrow$ nem megoldható
- $\mathbb{Q}$-ban: $x^2 = 3 \Rightarrow$ nem megoldható
- $\mathbb{R}$-ben: $x^2 = -3 \Rightarrow$ nem megoldható

$\rightsquigarrow$ „bővítsük ki” $\mathbb{R}$-et $\sqrt{-1}$-gyel!

Jelölés, definíció

Az $i := \sqrt{-1}$ szimbólum a képzetes egység.

Definíció

Az $a + bi$ alakú számokat, ahol $a, b \in \mathbb{R}$ és $i^2 = -1$, komplex számoknak nevezzük. Ezt a számhalmazt $\mathbb{C}$-vel jelöljük.

Legyen $z = a + bi \in \mathbb{C}$. Ez a z komplex szám algebrai alakja.

$a = Re(z)$: z valós része

$b = Im(z)$: z képzetes része

$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

$a + 0 \cdot i$

Alapműveletek komplex számokkal

Alapműveletek $\mathbb{C}$-ben

Ha $z = a + bi$ és $w = c + di$ komplex számok, akkor

$$z + w := (a + c) + (b + d)i,$$

$$z \cdot w := (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Példa

(a) Legyen $z = 2 - 3i$ és $w = -1 + 4i$. $z + w =?$, $zw =?$

(b) Adja meg az i^{13}, $(2 - i)^2$ és az $(1 + 2i)^3$ komplex számok algebrai alakját.

(a) $z + w = (2 + (-1)) + (-3 + 4)i = 1 + i$

$z \cdot w = (2 - 3i)(-1 + 4i) = -2 + 8i + 3i - 12\underbrace{\boxed{i^2}}_{-1} =$

$= 10 + 11i$

b) $i^{13} = i^{12} \cdot i = i$

$$\left[\begin{array}{l} i \\ i^2 = -1 \\ i^3 = -i \\ i^4 = 1 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} i^5 = i \\ i^6 = -1 \\ i^7 = -i \end{array}\right.$$

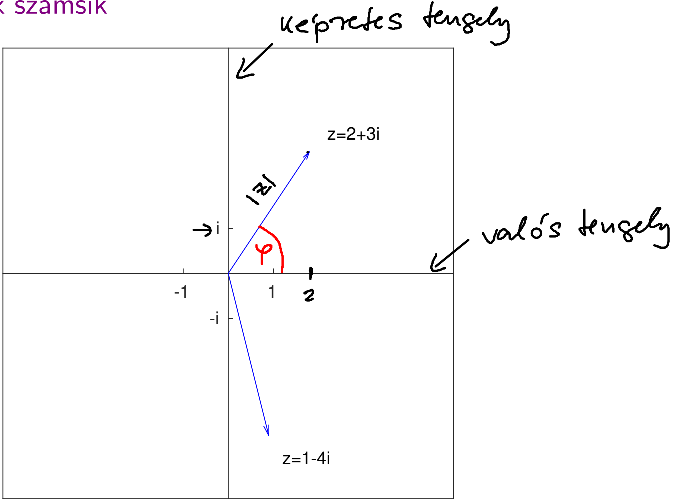
$$(2-i)^2 = 4 - 4i + \underbrace{\boxed{i^2}}_{-1} = 3 - 4i$$

$$(1+2i)^3 = 1 + 6i + 12\underbrace{i^2}_{-1} + 8\underbrace{i^3}_{-i} = -11 - 2i$$

Komplex számok ábrázolása

A $z = a + bi$ komplex számot egyértelműen meghatározza az (a, b) pár.

Gauss-féle komplex számsík



Definíció

A $z = a + bi$ komplex szám abszolútértéke: $|z| := \sqrt{a^2 + b^2}$.
A $z = a + bi$ komplex szám konjugáltja: $\overline{z} = a - bi$.

Megjegyzés

$z \cdot \overline{z} = |z|^2$

$$(a+bi)(a-bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2$$

Példa

Adja meg az alábbi komplex számok algebrai alakját!

$$\overline{(2-4i)}(1+3i), \quad \frac{2-i}{-1+3i}, \quad \frac{1}{4-i}$$

$$\overline{(2-4i)}(1+3i) = (2+4i)\cdot(1+3i) = 2 + 6i + 4i + 12i^2$$
$$= -10 + 10i$$

$$\frac{2-i}{-1+3i} = \frac{2-i}{-1+3i} \cdot \frac{-1-3i}{-1-3i} = \frac{(2-i)(-1-3i)}{\underbrace{10}_{(-1)^2+3^2}} =$$

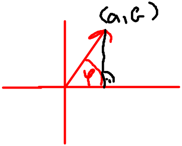
$$= \frac{-2-6i+i+3i^2}{10} = \frac{-5-5i}{10} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$\frac{1}{4-i} = \frac{1}{4-i} \cdot \frac{4+i}{4+i} = \frac{4+i}{17} = \frac{4}{17} + \frac{1}{17}i$$

Komplex számok trigonometrikus alakja

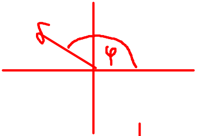
A $z = a + bi$ komplex számot egyértelműen meghatározza az (a, b) pár, de két másik érték is:

- z abszolútértéke: $r := |z| := \sqrt{a^2 + b^2}$
- z irányszöge : φ, ami az a szög, amit az (a, b) vektor és a valós tengely pozitív fele zár be (pozitív forgásirányban).



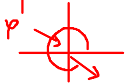
Ekkor

$$a = r \cdot \cos\varphi,$$
$$b = r \cdot \sin\varphi,$$



és a komplex szám trigonometrikus alakja

$$z = |z| \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi),$$



ahol $\varphi \in [0, 2\pi[$.

Trigonometrikus alak

Példa

Mi annak a komplex számnak az algebrai alakja, melynek abszolútértéke 3, irányszöge pedig $\frac{\pi}{4}$?

$$z = 3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \cdot \sin\frac{\pi}{4}\right) \leftarrow \text{trigonometrikus}$$

$$z = \frac{3\sqrt{2}}{2} + i \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} \leftarrow \text{algebrai alak}$$

ha

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \cdot \sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$z = \sqrt{3} + i$$

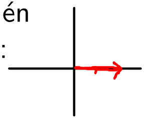
Példa

Mi a 2, -5, $3i$, $-2i$, $1 + \sqrt{3}i$, $-2 + 2i$, $-\sqrt{3} - i$ és $1 - i$ komplex számok trigonometrikus alakja?

Példa

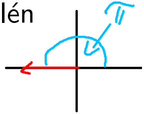
Adja meg a 2, -5, $3i$, $-2i$ komplex számok trigonometrikus alakját.

1. Ha $z = 2$, akkor $|z| = 2$ és a szám a valós tengely pozitív felén helyezkedik el, így a szöge $\phi = 0$. Ebből a trigonometrikus alak:



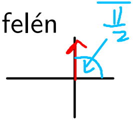
$$z = 2(\cos 0 + i \sin 0)$$

2. Ha $z = -5$, akkor $|z| = 5$ és a szám a valós tengely negatív felén helyezkedik el, így a szöge $\phi = \pi$. Ebből a trigonometrikus alak:



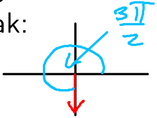
$$z = 5(\cos \pi + i \sin \pi)$$

3. Ha $z = 3i$, akkor $|z| = 3$ és a szám a képzetes tengely pozitív felén helyezkedik el, így a szöge $\phi = \frac{\pi}{2}$. Ebből a trigonometrikus alak:



$$z = 3\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)$$

4. Ha $z = -2i$, akkor $|z| = 2$ és a szám a képzetes tengely negatív felén helyezkedik el, így a szöge $\phi = \frac{3\pi}{2}$. Ebből a trigonometrikus alak:



$$z = 2\left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}\right)$$

Példa

Adja meg az $1+\sqrt{3}i$, $-2+2i$, $-\sqrt{3}-i$ és $1-i$ komplex számok trigonometrikus alakját.

Megoldás.

Ha a $z=a+bi$ komplex szám nem a tengelyek valamelyikén helyezkedik el, akkor

1. számoljuk ki $|z|$ értékét és állapítsuk meg melyik síknegyedben helyezkedik el z (ábrázoljuk a komplex számsíkon!)
2. A $\tan\phi_0 = \frac{|b|}{|a|}$ összefüggésből határozzuk meg $0<\phi_0<\frac{\pi}{2}$ értékét
3. A z trigonometrikus alakja: $z=|z|(\cos\phi + i\sin\phi)$, ahol

- $\phi=\phi_0$, ha z az első síknegyedben van
- $\phi=\pi-\phi_0$, ha z a második síknegyedben van
- $\phi=\pi+\phi_0$, ha z a harmadik síknegyedben van
- $\phi=2\pi-\phi_0$, ha z a negyedik síknegyedben van

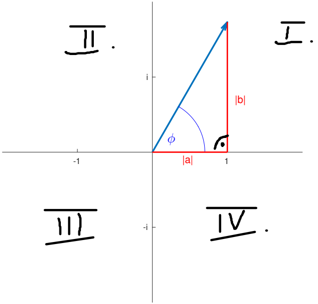
Ha $z = 1 + \sqrt{3}i$, akkor $a = 1$, $b = \sqrt{3}$ $a^2 + b^2 = 4$

1. $|z| = 2$

2. $\tan \phi_0 = \frac{|b|}{|a|} = \sqrt{3}$, így $\phi_0 = \frac{\pi}{3}$

3. z az első síknegyedben van, így $\phi = \phi_0 = \frac{\pi}{3}$, azaz z trigonometrikus alakja

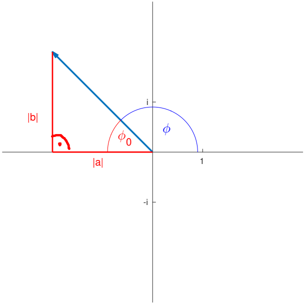
$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$



Ha $z = -2 + 2i$, akkor $a = -2$ $b = 2$ $a^2 + b^2 = 8$

1. $|z| = \sqrt{8}$ $= 2\sqrt{2}$
2. $\tan \phi_0 = \frac{|b|}{|a|} = 1$, így $\phi_0 = \frac{\pi}{4}$
3. z a második síknegyedben van, így $\phi = \pi - \phi_0 = \frac{3\pi}{4}$, azaz z trigonometrikus alakja

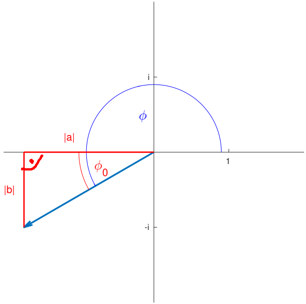
$$z = \sqrt{8}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$



Ha $z=-\sqrt{3}-i$, akkor $a=-\sqrt{3}$ $b=-1$ $a^2+b^2=4$

1. $|z|=2$
2. $\tan\phi_0=\frac{|b|}{|a|}=\frac{1}{\sqrt{3}}$, így $\phi_0=\frac{\pi}{6}$
3. z a harmadik síknegyedben van, így $\phi=\pi+\phi_0=\frac{7\pi}{6}$, azaz z trigonometrikus alakja

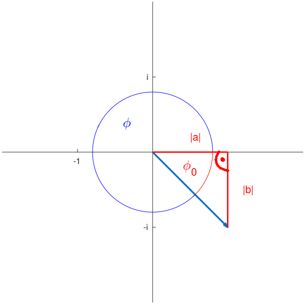
$$z=2\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$$



Ha $z = 1 - i$, akkor $a=1$ $b=-1$ $a^2+b^2=z$

1. $|z| = \sqrt{2}$
2. $\tan \phi_0 = \frac{|b|}{|a|} = 1$, így $\phi_0 = \frac{\pi}{4}$
3. z a negyedik síknegyedben van, így $\phi = 2\pi - \phi_0 = \frac{7\pi}{4}$, azaz z trigonometrikus alakja

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$$



Műveletek a trigonometrikus alakkal

Legyen

$$z_1 = r_1 \cdot (\cos\varphi_1 + i \cdot \sin\varphi_1) \quad \text{és} \quad z_2 = r_2 \cdot (\cos\varphi_2 + i \cdot \sin\varphi_2).$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \left(\boxed{\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2} + i \boxed{\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 + \sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2} \right)$$

- Szorzás: $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 \cdot \big(\boxed{\cos(\varphi_1 + \varphi_2)} + i \cdot \boxed{\sin(\varphi_1 + \varphi_2)} \big)$
- Osztás (ha $z_2 \neq 0$): $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \big(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \big)$
- Hatványozás: ha $z = r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$ és $n \in \mathbb{Z}$, akkor

$$z^n = r^n \cdot \big(\cos(n\varphi) + i \cdot \sin(n\varphi) \big) \qquad \text{(Moivre-képlet).}$$

Példa

Adja meg a $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$ és z_1^4 komplex számokat, ha

$$z_1 = 3(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}), \quad z_2 = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$$

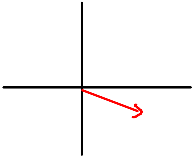
$$z_1 \cdot z_2 = 6\left(\cos\left(\frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{3}\right)\right) =$$

$$6 \cdot \left(\cos\frac{8\pi}{15} + i \cdot \sin\frac{8\pi}{15}\right)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$= \frac{3}{2}\left(\cos \frac{-2\pi}{15} + i \cdot \sin \frac{-2\pi}{15}\right)$$

$$= \frac{3}{2}\left(\cos \frac{28\pi}{15} + i \cdot \sin \frac{28\pi}{15}\right)$$



$$z_1^4 = 3^4\left(\cos \frac{4\pi}{5} + i \cdot \sin \frac{4\pi}{5}\right)$$

$$z_1^{14} = 3^{14}\left(\cos \frac{14\pi}{5} + i \cdot \sin \frac{14\pi}{5}\right)$$

$$= 3^{14} \cdot \left(\cos \frac{4\pi}{5} + i \cdot \sin \frac{4\pi}{5}\right)$$

Gyökvonás $\mathbb{C}$-ben

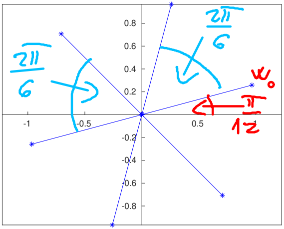
Tétel (Komplex szám n-edik gyökei)

Ha $z = |z| \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)$ és $n \in \mathbb{N}$, akkor az $x^n = z$ egyenletnek pontosan n darab megoldása van, ezek z komplex szám n-edik gyökei, és az alábbi módon számíthatóak:

$$w_k = \sqrt[n]{|z|} \cdot \left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \cdot \sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

A $z = i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$ szám 6. gyökei:

$$w_0 = \cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}, \quad w_1 = \cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}$$
$$w_2 = \cos\frac{9\pi}{12} + i\sin\frac{9\pi}{12}, \quad w_3 = \cos\frac{13\pi}{12} + i\sin\frac{13\pi}{12}$$
$$w_4 = \cos\frac{17\pi}{12} + i\sin\frac{17\pi}{12}, \quad w_5 = \cos\frac{21\pi}{12} + i\sin\frac{21\pi}{12}$$



$$z = |z| \left(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi \right)$$

$$w_0 = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\varphi}{n} + i \cdot \sin \frac{\varphi}{n} \right) \leftarrow$$

$$w_0^n = |z| \left(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi \right) = z$$

$$w_1 = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}\right) \right) \leftarrow$$

$$w_1^n = |z| \left(\cos(\varphi + 2\pi) + i \cdot \sin(\varphi + 2\pi) \right) =$$

$$|z| \cdot \left(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi \right)$$

$$w_k = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\varphi}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n}\right) \right)$$

$$w_k^n = |z| \left(\cos(\varphi + k \cdot 2\pi) + i \cdot \sin(\varphi + k \cdot 2\pi) \right)$$

$$= |z| \cdot \left(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi \right) = z$$

Egységgyökök

Definíció

Az 1 (komplex) szám n-edik gyökeit (azaz az $x^n = 1$ egyenlet gyökeit) n-edik egységgyököknek nevezzük.

Mivel

$$z = 1 = 1 + 0 \cdot i = \cos 0 + i \cdot \sin 0,$$

és egy komplex szám n-edik gyökei az

$$\sqrt[n]{r} \cdot \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \cdot \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

képletből adódnak, ezért az n-edik egységgyökök:

$$\varepsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \cdot \sin \frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Megjegyzés: $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén $\varepsilon_0 = 1$.

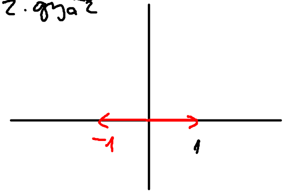
Példák: Mik az n-edik egységgyökök $n = 2$, $n = 3$, ill. $n = 4$ esetén? Ábrázoljuk ezeket a komplex számsíkon!

$z = 1 = \cos 0 + i \cdot \sin 0$

2. gyök

$w_0 = \cos 0 + i \cdot \sin 0 = 1$

$w_1 = \cos \pi + i \cdot \sin \pi = -1$

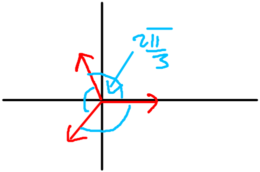


Harmadik egységgyök

$w_0 = \cos 0 + i \cdot \sin 0$

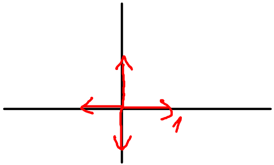
$w_1 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \cdot \sin \frac{2\pi}{3}$

$w_2 = \cos \frac{4\pi}{3} + i \cdot \sin \frac{4\pi}{3}$



Negyedik egységgyökök

$$z = \cos\alpha + i\cdot\sin\alpha$$



$$w_0 = \cos 0 + i\cdot\sin 0$$

$$w_1 = \cos\frac{\pi}{2} + i\cdot\sin\frac{\pi}{2} = i$$

$$w_2 = \cos\pi + i\cdot\sin\pi = -1$$

$$w_3 = \cos\frac{3\pi}{2} + i\cdot\sin\frac{3\pi}{2} = -i$$

Valós együtthatós másodfokú egyenletek

$ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$. Lehetséges esetek:

1. $b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow$ két valós gyök
2. $b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow$ egy valós gyök kétszeres multiplicitással
3. $b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow$ két komplex gyök, egymás konjugáltjai:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b}{2a} \pm i \cdot \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$