Az informatika logikai alapjai
5. előadás

Vaszil György

vaszil.gyorgy@inf.unideb.hu

I. emelet 110-es szoba

Az első zárthelyi dolgozatról

- **Október 18-án** kedden **12.00 – 14.00**
- IK épület **F0 terem**
- A dolgozatban ,,elmélet" nem lesz, csak a gyakorlaton megoldottakhoz hasonló típusú feladatok.
- A téma az első **öt vagy hat előadás** anyaga (ezt még pontosítjuk, ha látom, hogy meddig jutunk előre a tananyagban).
- Aki a fenti időpontban **nem tud megjelenni**, annak a **félév végén** lesz alkalma a ZH-t **bepótolni**.

A múlt órán

- Az igazságfunktorok (logikai műveletek) tulajdonságai
  - nevezetes logikailag ekvivalens formulák
  - logikai műveletek kifejezhetősége egymással
  - nevezetes logikai következmények
  - nevezetes logikai törvények (érvényes formulák)
- Logikai műveletek egymással való kifejezhetősége
- Formulák kielégíthetőségének vizsgálata: A szemantikus táblák módszere
  - A módszer helyessége, teljessége

Például: Nevezetes logikai ekvivalenciák

Logikailag ekvivalens formulák

- Kettős tagadás törvénye: $\neg\neg A \Leftrightarrow A$
- Kommutativitás: $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$, $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$ és $A \equiv B \Leftrightarrow B \equiv A$
  - Asszociatívitás: $A \wedge (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$, $A \vee (B \vee C) \Leftrightarrow (A \vee B) \vee C$ és $A \equiv (B \equiv C) \Leftrightarrow (A \equiv B) \equiv C$
- Idempotencia: $A \wedge A \Leftrightarrow A$ és $A \vee A \Leftrightarrow A$
- Disztibutivitás:
  - $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
  - $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
- Elnyelés: $A \wedge (B \vee A) \Leftrightarrow A$ és $A \vee (B \wedge A) \Leftrightarrow A$
- De Morgan: $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$ és $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

Például: Nevezets logikai következmények

Logikai következmények

- $A \supset \neg A \models \neg A$
- $\neg A \supset A \models A$
- $A \wedge B \models A$ és $A \wedge B \models B$
- $A \models A \vee B$
- $\{A \vee B, \neg A\} \models B$
- $\{A \supset B, A\} \models B$ modus ponens: leválasztási szabály
- $\{A \supset B, \neg B\} \models \neg A$ modus tollens: indirekt cáfolás sémája
- $\{A \supset B, B \supset C\} \models A \supset C$ láncszabály
- $\{A \supset B, A \supset \neg B\} \models \neg A$ redukcio ad abszurdum
- $\neg A \models A \supset B$
- $B \models A \supset B$

A múlt órán

- Az igazságfunktorok (logikai műveletek) tulajdonságai
  - nevezetes logikailag ekvivalens formulák
  - logikai műveletek kifejezhetősége egymással
  - nevezetes logikai következmények
  - nevezetes logikai törvények (érvényes formulák)
- Logikai műveletek egymással való kifejezhetősége
- Formulák kielégíthetőségének vizsgálata: A szemantikus táblák módszere
  - A módszer helyessége, teljessége

Milyen logikai műveletek vannak

(két argumentummal?)

x_1	x_2	$\circ_1$	$\circ_2$	$\circ_3$	$\circ_4$	$\circ_5$	$\circ_6$	$\circ_7$	$\circ_8$
T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	F	T	T	T	T	F	F	F	F
F	T	T	T	F	F	T	T	F	F
F	F	T	F	T	F	T	F	T	F

x_1	x_2	$\circ_9$	$\circ_{10}$	$\circ_{11}$	$\circ_{12}$	$\circ_{13}$	$\circ_{14}$	$\circ_{15}$	$\circ_{16}$
T	T	F	F	F	F	F	F	F	F
T	F	T	T	T	T	F	F	F	F
F	T	T	T	F	F	T	T	F	F
F	F	T	F	T	F	T	F	T	F

$\circ_2$: diszjunkció ($\vee$)
$\circ_5$: implikáció ($\supset$)
$\circ_7$: ekvivalencia ($\equiv$)

$\circ_8$: konjunkció ($\wedge$)
$\circ_{10}$: kizáró vagy

(papír 59: 2, 5, 7, 8, 10)

- $A \supset B \Leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$
- $A \supset B \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$
- $A \wedge B \Leftrightarrow \neg(A \supset \neg B)$
- $A \vee B \Leftrightarrow (\neg A \supset B)$
- $A \vee B \Leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$
- $A \wedge B \Leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)$
- $A \equiv B \Leftrightarrow (A \supset B) \wedge (B \supset A)$

Kifejezhetőség

Tétel

$\vee, \wedge, \supset, \equiv$ bármelyike kifejezhető ezek közül bármely kettővel:

- $\neg, \vee$
- $\neg, \wedge$
- $\neg, \supset$

Bizonyítás

- $\neg, \vee$: $\wedge$ kifejezhető, $\supset$ kifejezhető, $\equiv$ kifejezhető $\supset, \wedge$ -sel
- $\neg, \wedge$: $\vee$ kifejezhető, $\supset$ kifejezhető, $\equiv$ kifejezhető $\supset, \wedge$ -sel
- $\neg, \supset$: $\wedge$ kifejezhető, $\vee$ kifejezhető, $\equiv$ kifejezhető $\supset, \wedge$ -sel

A többi lehetséges művelet is kifejezhető mindegyik párossal.

Két változós művelet

x_1	x_2	$\circ_1$	$\circ_2$	$\circ_3$	$\circ_4$	$\circ_5$	$\circ_6$	$\circ_7$	$\circ_8$
T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	F	T	T	T	T	F	F	F	F
F	T	T	T	F	F	T	T	F	F
F	F	T	F	T	F	T	F	T	F

x_1	x_2	$\circ_9$	$\circ_{10}$	$\circ_{11}$	$\circ_{12}$	$\circ_{13}$	$\circ_{14}$	$\circ_{15}$	$\circ_{16}$
T	T	F	F	F	F	F	F	F	F
T	F	T	T	T	T	F	F	F	F
F	T	T	T	F	F	T	T	F	F
F	F	T	F	T	F	T	F	T	F

$\circ_9$: "nand"
(a konjunkció tagadása)

$\circ_{15}$: "nor"
(a diszjunkció tagadása)

Ki lehet fejezni azokat egyetlen művelettel?

Igen: A **nand** vagy **nor** önmagában is elegendő.

Például:

Fejezzük ki $\wedge$-t **nand** segítségével:

- $\boxed{A \wedge B} \Leftrightarrow \neg\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg(A \text{ nand } B)$

$\Leftrightarrow \neg((A \text{ nand } B) \wedge (A \text{ nand } B)) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \boxed{(A \text{ nand } B) \text{ nand } (A \text{ nand } B)}$

- $\boxed{\neg A} \Leftrightarrow \neg(A \wedge A) \Leftrightarrow \boxed{A \text{ nand } A}$

Melyik lépés miért jogos?

$\neg\neg A \Leftrightarrow A$

$A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$, $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$ és $A \equiv B \Leftrightarrow B \equiv A$

$A \wedge (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$, $A \vee (B \vee C) \Leftrightarrow (A \vee B) \vee C$ és $A \equiv (B \equiv C) \Leftrightarrow (A \equiv B) \equiv C$

$A \wedge A \Leftrightarrow A$ és $A \vee A \Leftrightarrow A$

$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

$A \wedge (B \vee A) \Leftrightarrow A$ és $A \vee (B \wedge A) \Leftrightarrow A$

$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$ és $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

A múlt órán

- Az igazságfunktorok (logikai műveletek) tulajdonságai
  - nevezetes logikailag ekvivalens formulák
  - logikai műveletek kifejezhetősége egymással
  - nevezetes logikai következmények
  - nevezetes logikai törvények (érvényes formulák)
- Logikai műveletek egymással való kifejezhetősége
- Formulák kielégíthetőségének vizsgálata: A szemantikus táblák módszere
  - A módszer helyessége, teljessége

Formulák felbontása literálokra

$L^{(0)} = (LC, Con, Form)$

nemlogikai konstansok vagy atomi formulák

- **Literál**: atomi formula — pozitív literál
  atomi formula negáltja — negatív literál
- **Komplemens literálpár**: $p, \neg p$, ahol $p \in Con$

Például: $\{\neg p, q, r, \neg r\}$

pozitív literál

negatív literál

komplemens literálpár

Miért működik ez az egész?

(Formulák felbontása literálokra)

Kielégíthető-e:

$p \wedge (\neg q \vee \neg p)$

$$
\begin{tikzcd}
 & p \wedge (\neg q \vee \neg p) \arrow[d] & \\
 & p, \neg q \vee \neg p \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
p, \neg q & & p, \neg p \\
\text{nyitott} & & \text{zárt}
\end{tikzcd}
$$

Kielégíthető, ha $\{p, \neg q\}$ vagy $\{p, \neg p\}$ kielégíthető.

Milyen szabályok szerint konstruáljuk a táblázat?

α	α_1	α_2	β	β_1	β_2
$\neg\neg A_1$	A_1				
$A_1 \wedge A_2$	A_1	A_2	$\neg(B_1 \wedge B_2)$	$\neg B_1$	$\neg B_2$
$\neg(A_1 \vee A_2)$	$\neg A_1$	$\neg A_2$	$B_1 \vee B_2$	B_1	B_2
$\neg(A_1 \supset A_2)$	A_1	$\neg A_2$	$B_1 \supset B_2$	$\neg B_1$	B_2

- $\boxed{\alpha}$ típusú formulák esetén bővítettük a formulahalmazt
- $\boxed{\beta}$ típusú formulák esetén elágaztunk, és alternatívákkal bővítettük a formulahalmazt
- A leveleket megjelöltük ~~[illegible]~~ (nyitott / zárt)

Következmények

- $A \in Form$ akkor és csak akkor kielégíthető, ha T nyitott (nem zárt).

- $A \in Form$ érvényes (logikai törvény) akkor és csak akkor, ha a $T\neg A$-hoz tartozó tábla zárt.

- A szemantikus tábla konstrukciója segítségével eldönthető, hogy egy formula érvényes-e.

„eldöntési eljárás" ⟶

A múlt órán

- Az igazságfunktorok (logikai műveletek) tulajdonságai
  - nevezetes logikailag ekvivalens formulák
  - logikai műveletek kifejezhetősége egymással
  - nevezetes logikai következmények
  - nevezetes logikai törvények (érvényes formulák)
- Logikai műveletek egymással való kifejezhetősége
- Formulák kielégíthetőségének vizsgálata: A szemantikus táblák módszere
  - A módszer helyessége, teljessége

Vizsgáljuk meg részletesebben az (1) összevetést:

(1) • A formula kielégíthetetlen akkor és csak akkor, ha a tábla minden levele zárt (⇔ A „tábla zárt")

Helyesség és teljesség

A szemantikus tábla konstrukciója egy módszer a formulák kielégíthetetlenségének eldöntésére.

• A módszer $\boxed{\text{helyes}}$:

Ha a módszerrel kapott eredmény szerint a formula kielégíthetetlen, akkor a formula valóban kielégíthetetlen.

• A módszer $\boxed{\text{teljes}}$:

Bármilyen kielégíthetetlen formulára alkalmazom is a módszert, a módszerrel kapott eredmény az, hogy a formula kielégíthetetlen.

Vizsgáljuk meg részletesebben az (1) összefüggést:

(1) • A formula kielégíthetetlen akkor és csak akkor, ha a tábla minden levele zárt ($\Leftrightarrow$ A „tábla zárt")

Helyesség és teljesség

A szemantikus tábla konstrukciója egy módszer a formulák kielégíthetetlenségének eldöntésére.

• A módszer helyes:

Ha a kapott tábla zárt,
akkor a formula valóban kielégíthetetlen.

• A módszer teljes:

Bármilyen kielégíthetetlen formulára alkalmazom is a módszert,
minden kapott tábla zárt.

Példák nyitott táblákra

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
& p \wedge (\neg q \vee \neg p) \arrow[d] & \\
& p,\ \neg q \vee \neg p \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
p, \neg q & & p, \neg p \\
\odot & & \times
\end{tikzcd}
$$

nyitott — zárt

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
& p \vee (q \wedge \neg q) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
p & & q \wedge \neg q \arrow[d] \\
\odot & & q, \neg q \\
& & \times
\end{tikzcd}
$$

nyitott — zárt

A múlt órán

- Az igazságfunktorok (logikai műveletek) tulajdonságai
  - nevezetes logikailag ekvivalens formulák
  - logikai műveletek kifejezhetősége egymással
  - nevezetes logikai következmények
  - nevezetes logikai törvények (érvényes formulák)
- Logikai műveletek egymással való kifejezhetősége
- Formulák kielégíthetőségének vizsgálata: A szemantikus táblák módszere
  - A módszer helyessége, teljessége

„Módszerek” helyességének és teljességének a kérdésére még visszatérünk!

A mai órán

- Szekvent, érvényes szekvent
- Szekvent kalkulus – axiómák és levezetési szabályok
- Levezetési fa, levezetési fa bővítése, bizonyítás
- A szekvent kalkulus helyessége és teljessége

(Aszalós László tananyagának segítségével)

Born	November 24, 1909 Greifswald, Germany
Died	August 4, 1945 (aged 35) Prague, Czechoslovakia
Cause of death	Starvation
Nationality	German
Alma mater	University of Göttingen
Scientific career	
Fields	Mathematics
Doctoral advisor	Paul Bernays

Gerhard Gentzen

Gerhard Gentzen in Prague, 1945.

A Wikipediából

Szekvent kalkulus – Mi az, hogy szekvent

<u>Szintaxis:</u> Ha Γ és Δ két (esetleg üres) formulahalmaz, akkor a $\Gamma \vdash \Delta$ egy **szekvent**.

<u>Szemantika</u>: Az $\{A_1, \ldots, A_n\} \vdash \{B_1, \ldots, B_m\}$ szekvent **érvényes**, ha minden olyan ϱ interpretáció esetén, ahol $|A_1|_\varrho = \ldots = |A_n|_\varrho = 1$ van olyan i, hogy $|B_i|_\varrho = 1$.

Vagyis: Ha egy szekvent **nem érvényes – azaz cáfolható** –, akkor van olyan ϱ interpretáció, melyre $|A_1|_\varrho = \ldots = |A_n|_\varrho = 1$, míg $|B_1|_\varrho = \ldots = |B_m|_\varrho = 0$.

Az érvényesség még egyszer

A szekvent érvényes, ha **minden baloldali** formula teljesülése szükségszerűen maga után vonja, hogy **valamelyik jobboldali** formula teljesül.

A szekvent érvényes, ha **nincs olyan** eset (interpretáció), hogy **egyik jobboldali formula sem** teljesül, miközben az **összes baloldali** teljesül.

Érvényes szekvent:

$A, B, C \vdash \neg A, B \wedge C$

Nem érvényes szekvent!

$A, B, C \vdash \neg A, \neg B$

(Elhagyjuk a halmazt jelölő „{ }”-ket)

Az érvényesség még egyszer

A szekvent érvényes, ha **minden baloldali** formula teljesülése szükségszerűen maga után vonja, hogy **valamelyik jobboldali** formula teljesül.

A szekvent érvényes, ha **nincs olyan** eset (interpretáció), hogy **egyik jobboldali formula sem** teljesül, miközben az **összes baloldali** teljesül.

Azaz:

$A_1, \ldots, A_n \vdash B_1, \ldots, B_m$ érvényes szekvent

akkor és csak akkor, ha

$A_1, \ldots, A_n \vDash B_1 \vee \ldots \vee B_m$ fennáll

A mai órán

- Szekvent, érvényes szekvent
- Szekvent kalkulus – axiómák és levezetési szabályok
- Levezetési fa, levezetési fa bővítése, bizonyítás
- A szekvent kalkulus helyessége és teljessége

Mit jelent itt a „kalkulus” elnevezés?

Szekvent kalkulus – Axiómák és levezetési szabályok

- A szekvent kalkulus **axiómái** a következő alakúak (axiómaséma):

  $$\Gamma, A \vdash \Delta, A$$

  ahol A egy atomi formula, Γ és Δ pedig formulahalmazok.
- A szekvent kalkulus **levezetési szabályai**:

konjunkció:

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \wedge B} \qquad \frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}$$

diszjunkció:

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}$$

implikáció:

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \supset B} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \supset B \vdash \Delta}$$

negáció:

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}$$

(premissza és konklúzió) Vegyük észre: Ezek mind „szintaktikai fogalmak”

A levezetési szabályok megőrzik a szekventek érvényességét

Tétel. Ha a levezetési szabály premisszája/premisszái érvényes(ek), akkor a konklúziója is.

Azaz: Ha egy ϱ interpretáció cáfolja a levezetési szabály konklúzióját, akkor cáfolja a levezetési szabály valamely premisszáját is.

Vegyük észre: A tétel a szemantikai fogalmak (érvényesség) és a szintaktikai fogalmak (szabályok) kapcsolatáról szól

Igazoljuk!

Tétel. Ha a levezetési szabály premisszája/premisszái érvényes(ek), akkor a konklúziója is.

Azaz: Ha egy ϱ interpretáció cáfolja a levezetési szabály konklúzióját, akkor cáfolja a levezetési szabály valamely premisszáját is.

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \wedge B} \qquad\qquad \frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B} \qquad\qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \supset B} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \supset B \vdash \Delta}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}$$

(Nézzük végig a szabályokat)

Még egy tétel

Tétel. Ha a levezetési szabály premisszája/premisszái érvényes(ek), akkor a konklúziója is.

Tétel. A szekvent kalkulus axiómái érvényesek.

Még egy tétel

A szekvent kalkulus axiómái a következő alakúak:

$$\Gamma, A \vdash \Delta, A$$

Tétel. Ha a levez

érvényes(ek), akkor a konklúziója is.

Tétel. A szekvent kalkulus axiómái érvényesek.

Bizonyítás. Ha a ϱ modellje a szekvent első formulahalmazának, akkor az abban szereplő atomi formulák halmazának is modellje. Ezek közül legalább egy a definíció szerint a szekvent második formulahalmazában is szerepel, így a szekvent érvényes.

A mechanikus eljárás (a szabályalkalmazás) és a szemantikai fogalmak közötti kapcsolat

Tétel. Ha a levezetési szabály premisszája/premisszái érvényes(ek), akkor a konklúziója is.

Tétel. A szekvent kalkulus axiómái érvényesek.

A mechanikus eljárás: Ha axiómákból kiindulva a szabályok alkalmazásával le tudunk vezetni egy szekventet, akkor az érvényes.

Milyen axiómákból induljunk ki? Nem tudjuk, haladjunk tehát „visszafelé”, a szekventtől az axiómák felé.

Például

Próbáljuk ki: http://logitext.mit.edu/main

X->Y, ~Y|- ~X

$$X \supset Y,\ \neg Y \vdash \neg X$$

Jelölések:

-> (implikáció),
~ (negáció),
|- (levezethetőség)
/\ (konjunkció)
\/ (diszjunkció

Mi is történt

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \wedge B} \qquad \frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \supset B} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \supset B \vdash \Delta}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{X \vdash X, Y \qquad X, Y \vdash Y}{X, X \to Y \vdash Y}\,(\to l)}{X, X \to Y, \neg Y \vdash}\,(\neg l)}{X \to Y, \neg Y \vdash \neg X}\,(\neg r)$$

A mai órán

- Szekvent, érvényes szekvent **(→szintaxis és szemanitka)**
- Szekvent kalkulus – axiómák és levezetési szabályok **(→szintaktikai szabályok, kapcsolatuk a szemantikai érvényesség fogalommal)**
- Levezetési fa, levezetési fa bővítése, bizonyítás **(→szintaktikai szabályok alkalmazása: szemantikai vizsgálódástól mentes mechanikus eljárás – bizonyítás, bizonyíthatóság)**
- A szekvent kalkulus helyessége és teljessége **(→bizonyíthatóság és érvényesség kapcsolata)**

Levezetési fa, levezetési fa bővítése

- A **levezetési fa** egy olyan fa, melynek **csúcsaiban szekventek** állnak, és a **levezetési szabályok szerint** épül fel.

- Speciális esetben: Egy $\Gamma \vdash \Delta$ szekvent egyben egy **levezetési fa** is, melynek ez a szekvent a **gyökere**, sőt **egyetlen levele** is.

Most úgy képzeljük a fát, hogy ,,lent” van a gyökere, és ,,felfelé nő”, azaz ,,fent” vannak a levelei.

Levezetési fa, levezetési fa bővítése

- Legyen F egy **levezetési fa**, melynek egyik **levele** a $\Gamma \vdash \Delta$ szekvent. Tegyük fel, hogy van egy olyan **levezetési szabály**, melynek a **konklúziója** „illeszthető” a $\Gamma \vdash \Delta$ szekventre, míg a **premisszái** a $\Gamma 1 \vdash \Delta 1$, ..., $\Gamma n \vdash \Delta n$ szekventek.

- **Bővítsük az F levezetési fát** a $\Gamma \vdash \Delta$ szekvent felett a $\Gamma 1 \vdash \Delta 1$, ..., $\Gamma n \vdash \Delta n$ szekventekkel (megfelelő „illesztés” és „helyettesítés” után), így kapjuk a F’ levezetési fát, melynek a **gyökere** az F gyökere, **leveleit** pedig az F levelei (mínusz $\Gamma \vdash \Delta$) és a $\Gamma 1 \vdash \Delta 1$, ..., $\Gamma n \vdash \Delta n$ szekventek alkotják

levél

levél

$$\dfrac{A \vdash A \qquad \dfrac{A \vdash A, B}{A \vdash A \vee B}\,(\vee r)}{A \vdash A \wedge (A \vee B)}\,(\wedge r)$$

gyökér

Levezetési fa, levezetési fa bővítése

- Legyen F eg… a $\Gamma \vdash \Delta$ szekvent. T… si szabály, melynek a … 1⊢Δ1, ..., Γn⊢Δn szek…

- Bővítsük az … a Γ1⊢Δ1, ..., Γn⊢Δn szek… t, melynek a gyökere az … mínusz Γ⊢Δ) és a Γ1⊢Δ1, ..., Γn⊢Δn szekventek alkotják

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \wedge B} \qquad \frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \supset B} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \supset B \vdash \Delta}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}$$

$$\cfrac{A \vdash A \qquad \cfrac{A \vdash A, B}{A \vdash A \vee B}\,(\vee r)}{A \vdash A \wedge (A \vee B)}\,(\wedge r)$$

A szekvent kalkulus mechanikus (szintaktikai szabályokon alapuló) eljárás bizonyítások konstruálására

- Egy levezetési fa **bizonyítás**, ha minden levele axióma.

Például:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{X \vdash X, Y \qquad X, Y \vdash Y}{X, X \to Y \vdash Y}\,(\to l)}{X, X \to Y, \neg Y \vdash}\,(\neg l)}{X \to Y, \neg Y \vdash \neg X}\,(\neg r)$$

$$\dfrac{A \vdash A \qquad \dfrac{A \vdash A, B}{A \vdash A \vee B}\,(\vee r)}{A \vdash A \wedge (A \vee B)}\,(\wedge r)$$

Mit ,,bizonyít”?

Vegyük észre, hogy itt a „bizonyítás” szintaktikai fogalom:

A gyökér egy szekvent, a fa a szintaktikai szabályoknak megfelelően épül fel, a levelek axiómák.

A mai órán

- Szekvent, érvényes szekvent **(→szintaxis és szemanitka)**
- Szekvent kalkulus – axiómák és levezetési szabályok **(→szintaktikai szabályok, kapcsolatuk a szemantikai érvényesség fogalommal)**
- Levezetési fa, levezetési fa bővítése, bizonyítás **(→szintaktikai szabályok alkalmazása: szemantikai vizsgálódástól mentes mechanikus eljárás – bizonyítás, bizonyíthatóság)**
- A szekvent kalkulus helyessége és teljessége **(→bizonyíthatóság és érvényesség kapcsolata)**

Vágjunk egy rendet még egyszer…

Szintaktikai fogalmak:

- szekvent
- axióma
- levezetési szabályok, levezetési fa, levezetési fa bővítése
- **bizonyítás** (gyökérszekvent, minden levél axióma)

Szemantikai fogalmak:

- szekvent érvényessége
- az axiómák érvényessége
- a levezetési szabályok alapján átalakított szekventek érvényességének megmaradása
- **teljesség, helyesség** (ha egy szekvent érvényes, akkor van bizonyítása illetve ha egy fa bizonyítás, akkor a gyökérszekventje érvényes

A „$\vdash$” egy szintaktikai reláció („szintaktikai következményreláció”, „bizonyíthatóság”),
míg „$|=$” egy szemantikai reláció („szemantikai következményreláció”)

A szekvent kalkulus mint bizonyítási eljárás **helyessége** és **teljessége**

Egy levezetési fa **bizonyítás**, ha minden levele axióma.

Tétel.
Minden bizonyítás gyökérszekventje érvényes.

Tétel.
Ha az S szekvent érvényes, akkor létezik olyan bizonyítás, melynek a gyökérszekventje S.

Melyik melyik?

A szekvent kalkulus mint bizonyítási eljárás **helyessége** és **teljessége**

Egy levezetési fa **bizonyítás**, ha minden levele axióma.

Tétel. ← Helyesség
Minden bizonyítás gyökérszekventje érvényes.

Tétel. ← Teljesség
Ha az S szekvent érvényes, akkor létezik olyan bizonyítás, melynek a gyökérszekventje S.

A gyökérszekventtel ekvivalens következmény reláció ,,bizonyítása"

A szekvent kalkulus helyes

Bizonyítás. Tegyük fel indirekt, hogy van egy bizonyítás cáfolható gyökérszekventtel.

- Strukturális indukcióval belátható, hogy egy cáfolható gyökerű levezetési fának van cáfolható levele.
- Levezetési fa cáfolható levéllel nem bizonyítás.
- Ellentmondáshoz jutottunk, így a gyökérnek érvényesnek kell lenni.

„Strukturális indukcióval belátható, hogy egy cáfolható gyökerű levezetési fának van cáfolható levele.” **Miért is?**

- Ha egy csúcsnál lévő szekvent cáfolható (nem érvényes), akkor a „felette” lévő csúcsok legalább egyike is cáfolható
- A gyökér cáfolható

Azaz: lesz olyan levél, ami cáfolható.

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \wedge B} \qquad \frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \supset B} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \supset B \vdash \Delta}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}$$

A szekvent kalkulus teljes

Azaz: Ha az S szekvent érvényes, akkor létezik olyan bizonyítás, melynek a gyökérszekventje S.

1. Lemma. Egy csak atomi formulákat tartalmazó szekvent, pontosan akkor érvényes, ha axióma.

2. Lemma. Bármely levezetési fa kiterjeszthető olyan levezetési fává, melynek levelei csak atomi formulákat tartalmaznak.

3. Lemma. Bármely érvényes gyökerű levezetési fának csak érvényes levelei vannak.

Igazoljuk a lemmákat!

A szekvent kalkulus axiómái a következő alakúak:

$$\Gamma, A \vdash \Delta, A$$

1. Lemma. Egy csak atomi formulákat tartalmazó szekvent **pontosan akkor** érvényes, ha axióma, azaz:

- **ha axióma, akkor érvényes,** (könnyű)
- ha érvényes, akkor axióma.

Igazoljuk a lemmákat!

A szekvent kalkulus axiómái a következő alakúak:

$$\Gamma, A \vdash \Delta, A$$

1. Lemma. Egy csak atomi formulákat tartalmazó szekvent **pontosan akkor** érvényes, ha axióma, azaz:

- ha axióma, akkor érvényes,
- **ha érvényes, akkor axióma.**

Igazoljuk a lemmákat!

A szekvent kalkulus axiómái a következő alakúak:

$$\Gamma, A \vdash \Delta, A$$

1. Lemma. Egy csak atomi formulákat tartalmazó szekvent **pontosan akkor** érvényes, ha axióma, azaz:

- ha axióma, akkor érvényes,
- ha érvényes, akkor axióma, azaz **ha nem axióma, akkor nem érvényes.**

Valóban:

$A_1,\dots,A_n \vdash B_1, \dots, B_m$, ahol $A_i \neq B_j$ bármely i, j esetén.

Legyen ϱ az az interpretáció, ahol $|A_i|_\varrho=1$ és $|B_j|_\varrho=0$.

Igazoljuk a lemmákat!

2. Lemma. Bármely levezetési fa kiterjeszthető olyan levezetési fává, melynek levelei csak atomi formulákat tartalmaznak.

Valóban: A szabályalkalmazás során „egyszerűsödnek” a formulák.

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \wedge B} \qquad \frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \supset B} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \supset B \vdash \Delta}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}$$

Igazoljuk a lemmákat!

3. Lemma. Bármely érvényes gyökerű levezetési fának csak érvényes levelei vannak.

Valóban: Ha a konklúzió szekventje érvényes, akkor a premisszá(k) szekventje(i) is érvényes(ek).

- Azaz: ha a premisszák nem érvényesek, akkor a konklúzió sem érvényes.
- Azaz: ha van olyan interpretáció, amiben legalább az egyik premissza jobb oldalán minden formula hamis, és a bal oldalán minden formula igaz, akkor ebben az interpretációban a konklúzió baloldalán lévő formulák is igazak lesznek, míg a jobboldalon lévők hamisak.

Ha van olyan interpretáció, amiben legalább az egyik premissza **jobb oldalán minden formula hamis**, és a **bal oldalán minden formula igaz**, akkor ebben az interpretációban a konklúzió baloldalán lévő formulák is igazak lesznek, míg a jobboldalon lévők hamisak. **(Szemléletesebben: A szabályalkalmazás „megőrzi” a cáfolhatóságot.)**

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \wedge B} \qquad\qquad \frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B} \qquad\qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \supset B} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \supset B \vdash \Delta}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}$$

A szekvent kalkulus teljességéről

Azaz: Ha az S szekvent érvényes, akkor létezik olyan bizonyítás, melynek a gyökérszekventje S.

1. Lemma. Egy csak atomi formulákat tartalmazó szekvent, pontosan akkor érvényes, ha axióma.

2. Lemma. Bármely levezetési fa kiterjeszthető olyan levezetési fává, melynek levelei csak atomi formulákat tartalmaznak.

3. Lemma. Bármely érvényes gyökerű levezetési fának csak érvényes levelei vannak.

A szekvent kalkulus teljes

Azaz: Ha az S szekvent érvényes, akkor létezik olyan bizonyítás, melynek a gyökérszekventje S.

Bizonyítás: Legyen S egy érvényes szekvent!

- Terjesszük ki ebből a gyökérből álló levezetési fát olyan fává, melynek a levelei csak atomi formulákat tartalmaznak. (A **2. lemma** szerint ez lehetséges.)
- Mivel a gyökér érvényes, a fa minden levele érvényes (a **3. lemma** szerint).
- Ha egy szekvent érvényes és csak atomi formulákat tartalmaz, akkor (az **1. lemma** szerint) axióma, így a levezetési fa minden levele axióma, tehát ez a levezetési fa bizonyítás.

Mit is bizonyítottunk: A szekvent kalkulus **helyessége** és **teljessége**

Tétel.
Minden bizonyítás gyökérszekventje érvényes.

Tétel.
Ha az S szekvent érvényes, akkor létezik olyan bizonyítás, melynek a gyökérszekventje S.

Azaz: Ha egy szekvent érvényes, akkor be lehet bizonyítani, továbbá ha egy szekventnek van bizonyítása, akkor az érvényes.
Azaz: A szekvent pontosan akkor érvényes, ha bizonyítható.

Ismét: A „⊢” egy szintaktikai reláció („bizonyíthatóság”), míg a szekvent érvényessége egy szemantikai relációt „|=” fejez ki (,,logikai következmény”)

Megjegyzés: Cáfoló modell létezése

Tétel. Ha az S szekvent nem bizonyítható, akkor létezik egy interpretáció, mely cáfolja.

Bizonyítás.

- Készítsük el S egy olyan levezetési fáját ami a leveleken csak atomi formulákat tartalmaz.
- Mivel S nem bizonyítható, létezik egy nem axióma levélszekvent: $A_1,...,A_n \vdash B_1, ..., B_m$, ahol $A_i \neq B_j$ bármely i, j esetén.
- Definiáljuk a ϱ interpretációt úgy, hogy minden i,j-re legyen $|A_i|_\varrho=1$ és $|B_j|_\varrho=0$.
- ϱ cáfolja a levél szekventjét, s így a gyökérszekventet is.

$|A_i|_\varrho=1$ és $|B_j|_\varrho=0$. „ϱ cáfolja a levél szekventjét, s így a gyökérszekventet is” **Miért is?**

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \wedge B} \qquad \frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \supset B} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \supset B \vdash \Delta}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}$$

Például

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A, A, B \vdash C, B}{A, B \vdash C, \neg A, B}(\neg r) \quad \dfrac{\boxed{A, A, B \vdash C, C}}{A, B \vdash C, \neg A, C}(\neg r)}{A, B \vdash C, \neg A, B \wedge C}(\wedge r) \quad \dfrac{\dfrac{A, A, B, B \vdash B}{A, B, B \vdash \neg A, B}(\neg r) \quad \dfrac{\boxed{A, A, B, B \vdash C}}{A, B, B \vdash \neg A, C}(\neg r)}{A, B, B \vdash \neg A, B \wedge C}(\wedge r)}{A, B, C \to B \vdash \neg A, B \wedge C}(\to l)$$

A leveleket cáfoló interpretáció:

$|A|_\varrho=1$

$|B|_\varrho=1$

$|C|_\varrho=0$

cáfolja a gyökeret is

$$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \wedge B} \qquad \dfrac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}$$

$$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B} \qquad \dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}$$

$$\dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \supset B} \qquad \dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \supset B \vdash \Delta}$$

$$\dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A} \qquad \dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}$$

A mai órán

- Szekvent, érvényes szekvent
- Szekvent kalkulus – axiómák és levezetési szabályok
- Levezetési fa, levezetési fa bővítése, bizonyítás
- A szekvent kalkulus helyessége és teljessége