Kombinatorika – Permutáció

Legyen $n \in \mathbb{N}$ és tekintsük az $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ halmazt.

Definíció

A egy *permutáció*ján A-nak egy önmagára vett bijektív leképezését értjük, azaz az $1, 2, \ldots, n$ elemek valamilyen sorrendben való felsorolását.

Jelölje P_n az A halmaz összes permutációinak számát.

- Ekkor $P_1 = 1$.
- Belátjuk, hogy $P_n = n \cdot P_{n-1}$.
  Az n elemű halmazból rögzítünk egy elemet. A maradék $n-1$ elemet P_{n-1}-féleképpen rendezhetjük sorba, majd a rögzített elemet n helyre sorolhatjuk be. Így $P_n = n \cdot P_{n-1}$, azaz $P_n = n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1 = n!$.

Tétel

n különböző elem lehetséges sorbarendezéseinek a száma $P_n = n!$.

Példák: (1) Hányféleképpen érhet célba 10 futó egy futóversenyen, ha nincs holtverseny? $10!$

(2) Hányféleképpen állíthatunk sorba 5 különböző magasságú embert úgy, hogy a legmagasabb és a legalacsonyabb egymás mellett álljon?

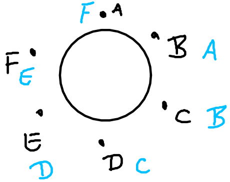
(3) Hány 5-jegyű szám írható fel a 3,4,5,7,9 számjegyekből, ha minden számjegy csak egyszer szerepelhet? $5!$ És a 2,2,2,7,7 számjegyekből?

(2) $4! \cdot 2$

A, B, C, D, E $\qquad |AE|$

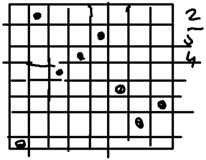
$\underset{\uparrow \atop 2}{\boxed{AE}}, B, C, D \rightarrow 4!$

Hányféleképpen ültethető egy kerek asztal köré 6 ember, ha az egymásba átforgatható ülésrendek azonosak?



$5!$

6.4 Sakktábla $\rightarrow$ 8 bástya



$8!$

ha a bástyák különbözőek, akkor $(8!)^2$

(3) $2, 2, 2, 7\ 7 \rightarrow \dfrac{5!}{3! \cdot 2!}$

Ismétléses permutáció

Hány 5-jegyű szám írható fel a 2,2,2,7,7 számjegyekből?

Megoldás: Ha megkülönböztetnénk egymástól a ketteseket és a heteseket, akkor 5! lenne a sorrend, viszont a kettesek illetve a hetesek cserélgetésével nem kapunk új 5-jegyű számot. $\Rightarrow$ Az ismétlődő elemek lehetséges sorrendjeivel osztanunk kell az 5!-t, azaz a végeredmény:

$$\frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10.$$

Tétel

Ha n elemünk van k különböző fajtából, az 1. fajtából ℓ_1, a 2.-ból ℓ_2, stb. (azaz $\ell_1 + \ell_2 + \cdots + \ell_k = n$), akkor az n elem lehetséges sorrendjeinek a száma

$$P_n^{\ell_1,\ldots,\ell_k} = \frac{n!}{\ell_1! \ldots \ell_k!}$$

Példa: Van 2 piros, 1 narancs és 3 sárga muskátlink. Hányféleképpen rakhatjuk ki az ablakunkba ezeket a virágokat? $\frac{6!}{2! \cdot 3!}$

Variáció

Definíció és tétel

Egy n elemű halmaz *k-ad osztályú ismétlés nélküli variációi* alatt a halmaz elemeiből kiválasztott k hosszúságú sorozatokat értjük. Ezek száma:

$$V_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \ldots (n-k+1).$$

Itt szükségképpen $n \geq k$.

Azaz a variáció: kiválasztás és sorbarendezés.

Példák:

(1) Hányféleképpen alakulhatnak a dobogós helyezések egy 10 fős futóversenyen, ha nincs holtverseny?

(2) Egy nyereménysorsoláson 5 különböző díj van, a résztvevők száma 200 fő. Hány lehetséges kimenetele van a sorsolásnak, ha mindenki csak egyszer nyerhet? $200 \cdot 199 \cdot 198 \cdot 197 \cdot 196 = \frac{200!}{195!}$

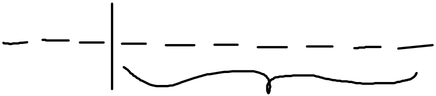
És ha az egyes nyertesek kihúzása után „visszadobják a győztes nevét a kalapba”? $\rightsquigarrow$ visszatevéses kiválasztás 200^5

1 $10 \cdot 9 \cdot 8$

an 1. Möglichkeit

a 2.

3!



$$\frac{10!}{7!} = 10 \cdot 9 \cdot 8$$

Ismétléses variáció

Definíció és tétel

Egy n elemű halmaz k-ad osztályú ismétléses variációi alatt a halmaz elemeiből *visszatevéssel* kiválasztott k hosszúságú sorozatokat értjük. Ezek száma:

$$V_{n,k}^{i} = n^{k}.$$

Ismétléses variáció: kiválasztás és sorbarendezés, de mivel egy elemet többször is választhatunk, ezért itt $n < k$ is lehetséges.

Példák:

(1) Hányféleképpen tölthetünk ki egy totószelvényt? 3^{14}

(2) Hány részhalmaza van egy n elemű halmaznak?

Megoldás: Minden elem esetén döntünk arról, hogy igen vagy nem, azaz bekerüljön-e az elem a részhalmazba, vagy nem.

Tehát 2 elemből n-szer választunk visszatevéssel.

Így az összes részhalmaz megkapható. Összesen $V_{2,n}^{i} = 2^{n}$ lehetőség.

A részhalmazok megfelelnek n hosszúságú bináris sorozatoknak:

$$1001\ldots110.$$

Kombináció

Definíció és tétel

Egy n elemű halmaz k elemű részhalmazait a halmaz *k-ad osztályú ismétlés nélküli kombinációi*nak nevezzük. Számuk:

$$C_{n,k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} =: \binom{n}{k}.$$

Definíció szerint $0! = 1$.
Itt szükségképpen $n \geq k$.

Azaz a kombináció: kiválasztás.

Példák:

(1) Hányféleképpen tölthetünk ki egy ötöslottó szelvényt? $90 \to 5$

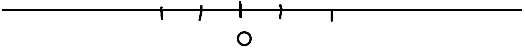
(2) Egy nyereménysorsoláson 5 *egyforma* díj van, a résztvevők száma 200 fő. Hány lehetséges kimenetele van a sorsolásnak, ha mindenki csak egyszer nyerhet? $200 \to 5$

És ha az egyes nyertesek kihúzása után „visszadobják a győztes nevét a kalapba"? $\rightsquigarrow$ visszatevéses kiválasztás

① $\binom{90}{5} = \frac{90!}{5!\,85!}$

$\cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \,|\, \cdot \; \cdots \; \cdot$ $\qquad \frac{90!}{5!\,85!}$

③



± 1

10 lépés Hányféleképpen fordulhat elő, hogy visszaér a 0-ba?

5 db $+1$ és 5 db -1

$$\frac{10!}{5!\cdot 5!} = \binom{10}{5}$$

J J J B J B B J B B

— — — — — — — — — —

hova kerüljön az 5 J betű? $\binom{10}{5}$

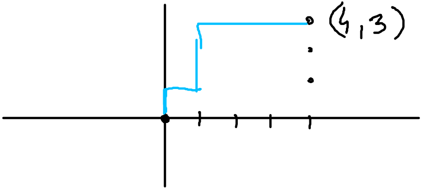
---

10 lépés +2-be érünk

6 jobbra + 4 balra

$$\binom{10}{6} = \binom{10}{4}$$

$$\frac{10!}{6!\cdot 4!} = \frac{10!}{4!\cdot 6!}$$



$\to \; \uparrow$

$$\frac{7!}{4!\cdot 3!}$$

3F + 4Ǝ

$$\binom{7}{3} = \binom{7}{4}$$

F Ǝ F F Ǝ Ǝ Ǝ

Térben a $(4,3,2)$ pontba

összesen $4+3+2=9$ lépés, ebből

4 x irányban $+1$

3 y -||- $+1$

2 z -||- $+1$

$$\frac{9!}{4!\cdot 3!\cdot 2!}$$

másik megoldás:

$$\binom{9}{4}\cdot\binom{5}{3} = \frac{9!}{4!\cdot 5!}\cdot\frac{5!}{3!\cdot 2!}$$

Ismétléses kombináció

Definíció és tétel

Ha egy n elemű halmaz elemeiből úgy képezünk k elemű halmazt, hogy egy elemet többször is választhatunk (azaz visszatevéssel), akkor az n elem *k-ad osztályú ismétléses kombinációjá*ról beszélünk. Számuk:

$$C^i_{n,k} = \left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = \binom{n+k-1}{k}.$$

Ismétléses kombináció: kiválasztás, de mivel egy elemet többször is választhatunk, ezért itt $n < k$ is lehetséges.

Példák: $\overset{n}{4}$ ember $\rightarrow$ $\overset{k}{10}$-ed ismétléssel $\binom{13}{10}$

(1) Hányféleképpen oszthatunk szét 10 (egyforma) almát 4 ember között?

(2) Feldobva 3 dobókockát, hányféleképpen alakulhat a dobott számok eloszlása? $\overset{n}{6}$ értékből $\overset{k}{3}$ ismétléssel, sorrend nem számít $\binom{8}{3}$

Állítás

Legyen $k, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $n \geq k$. Ekkor

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

(1)

$$\underbrace{\circ\ \circ\ \circ}_{\text{az 1. emberé}}\ \Big|\ \underbrace{\circ\ \circ}_{\text{a másodiké}}\ \Big|\Big|\ \circ\ \circ\ \circ\ \circ\ \circ$$

a negyedikié

a harmadiké ☹

10 kör és 3 vonal összes sorrendje:

$$\frac{13!}{10!\cdot 3!} = \binom{13}{10}$$

(2)

$$\Big|\ \circ\ \Big|\Big|\ \circ\ \Big|\Big|\ \circ$$

$$\frac{8!}{5!\cdot 3!} = \binom{8}{5}$$

0 db 1-es

1 db 2-es

0 db 3-as

1 db 4-es

0 db 5-ös

1 db 6-os

6.29. 4 gyerek között 7 alma és
9 körte

az almák: $\overset{n}{4}$ gyerekből $\overset{k}{7}$-et választok
ismétléssel, sorrend nem számít

$$\binom{4+7-1}{7} = \binom{10}{7}$$

$$\circ \ \ \circ \ \Big| \ \circ \ \ \circ \ \Big| \ \circ \ \Big| \ \circ \ \ \circ \qquad \leftarrow 7 \text{ alma}$$

$$\frac{10!}{3!\cdot 7!} = \binom{10}{7}$$

a körték: $$\binom{4+9-1}{9} = \binom{12}{9}$$

összesen: $$\binom{10}{7}\cdot\binom{12}{9}$$

Binomiális tétel

Tétel – binomiális tétel

Legyen $x, y \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$. Ekkor

$$(x+y)^n = \binom{n}{n}x^n + \binom{n}{n-1}x^{n-1}y + \binom{n}{n-2}x^{n-2}y^2 + \\ + \cdots + \binom{n}{1}xy^{n-1} + \binom{n}{0}y^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Definíció

Az $\binom{n}{k}$ kifejezést binomiális együtthatónak nevezzük.

Állítás

Minden $n \in \mathbb{N}$, $0 < k < n$ esetén

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Következmények: Pascal-háromszög; n elemű halmaz részhalmazai.

$$(x+5)^5 = (x+y)(x+y)(x+y)(x+y)(x+y)$$

$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ x & x & y & y & y \end{matrix}$$

$$\binom{5}{2} x^2 y^3$$

$$\binom{n}{k} \cdot x^k \cdot y^{n-k}$$

$$\boxed{0! = 1}$$

$$\begin{matrix} & & & 1 & & & \\ & & \binom{1}{0} 1 & & \binom{1}{1} 1 & & \\ & \binom{2}{0} 1 & & \binom{2}{1} 2 & & \binom{2}{2} 1 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \end{matrix}$$

Példa: Hányféleképpen lehet kiolvasni az alábbi táblázatból a kombinatorika szót?

K	O_1	M_1	B_1	I_1	N_1	A_1	T_1
O_1	M_2	B_3	I	N	A	T	O
M_1	B_3	I	N	A	T	O	R
B_1	I_4	N	A	T	O	R	I
I_1	N	A	T	O	R	I	K
N_1	A	T	O	R	I	K	A

12 lépés

7 jobbra

5 le

$\binom{12}{7}$

Igazoljuk az alábbi összefüggéseket!

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n = (1+1)^n$$

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0 = (1-1)^n$$

1	4	4	8	17	*
1	3		4	9	15
1	2	3	4	5	6
*	1	1	1	1	1

15 + 17

↑ →

6.24. 15 férfi és 16 nő

7 embert visz, hogy pontosan 4 ffi

15 ffi 16 nő

4 7 3

$$\binom{15}{4} \cdot \binom{16}{3}$$

6.20. n db 0 és k db 1-es sorrendjeinek a száma $(k \leq n+1)$ úgy, hogy két 1-es ne legyen egymás mellett

6 db 0
és 4 db 1

_ 0 _ 0 _ 0 _ 0 _ 0 _ 0 _

az 1-esek lehetséges helyei. Ebből kell 4-et választani $\binom{7}{4}$

n db 0
k db 1

$$\binom{n+1}{k}$$

6 fiú, 4 lány, két lány ne legyen egymás mellett

$$\binom{7}{4}\cdot 6!\cdot 4!$$

Egy adott héten hányféleképpen fordulhat elő, hogy hármas találatunk van a lottón?

5 nyerő szám + 85 nem nyerő

3 + 2

5-öt jelöltem be

$$\binom{5}{3}\cdot\binom{85}{2}$$

Legalább 3 találat?

3 találatosak száma + 4 találatosak száma + 5 találatosak száma

$$\binom{5}{3}\cdot\binom{85}{2} + \binom{5}{4}\binom{85}{1} + \underbrace{\underset{1}{\binom{5}{5}}\underset{1}{\binom{85}{0}}}_{1}$$

Legalább 1 számot eltaláltam?

$$\binom{90}{5} - \underbrace{\binom{5}{0}\cdot\binom{85}{5}}$$

az összes kitöltések száma

azon kitöltések amikor 1 találat sincs

3 matek + 2 kémia és 4 fizika könyv.
Hányféleképpen lehet sorba rakni a polcon,
ha az azonos tantárgyhoz tartozóknak egymás
mellett kell állni?

$$3! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 4!$$

a 3 tantárgy sorrendje

a matek

a kémia sorrendje

a fizika

6.12.

6 ajánlott levél

3 postás

3^6

Aladár

Béla

Cecil

1. levél $\Leftarrow$ A, B, C

2. levél $\Leftarrow$ A, B, C

⋮

6. levél $\Leftarrow$ A, B, C

Logikai szita

Pl.: Egy osztályban 32 gyerek van, a következő idegen nyelveket tanulják:

- 16-an angolt, 13-an németet, 13-an franciát;
- 5-en németet és franciát, 7-en németet és angolt, 6-an angolt és fr.-t;
- 4-en mindhárom nyelvet tanulják.

Hányan nem tanulnak idegen nyelvet?

Logikai szita formula

Legyen A egy véges halmaz, $A_1, A_2, \ldots, A_k$ ennek bizonyos részhalmazai. Tegyük fel, hogy a halmazok és azok metszeteinek számosságát ismerjük csak. Jelölje S_j az A halmaz azon elemeinek a számát, amelyek $A_1, \ldots, A_k$ közül legalább j darabban bene vannak, $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Azaz például:

- $S_1 = \#A_1 + \#A_2 + \cdots + \#A_k$
- $S_2 = \#(A_1 \cap A_2) + \#(A_1 \cap A_3) + \cdots = \sum_{1 \le i < j \le k} \#(A_i \cap A_j)$
- $\ldots, S_k = \#(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k)$

Legyen továbbá $S_0 = \#(A \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_k))$ és $S = \#A$. Ekkor

$$S_0 = S - S_1 + S_2 - S_3 + \cdots + (-1)^k S_k.$$

Még egy példa a logikai szita formula használatára

Feladat

Egy n házaspárból álló társaság táncol. Hányféleképpen állhatnak úgy párba, hogy senki sem táncol a saját házastársával?

Megoldás: Összesen $n!$ lehetőség.
A kérdés visszavezethető arra, hogy hány olyan permutációja van az $\{1, \ldots, n\}$ halmaznak, amikor semelyik szám nem áll „a helyén”.

- Legalább 1 férfi a feleségével táncol: $\binom{n}{1}(n-1)!$ lehetőség.
- Legalább 2 férfi a feleségével táncol: $\binom{n}{2}(n-2)!$ lehetőség.
- ...
- Minden férfi a feleségével táncol: $\binom{n}{n}0! = 1$ lehetőség.

Válasz:

$$n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} 0! = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{k!}.$$