

Valós függvények határértéke

Házi feladatok

1. Feladat. Vizsgáljuk meg a definíció, illetve az Átviteli elv segítségével, hogy léteznek-e az alábbi függvény-határértékek. Amennyiben igen, számítsuk ki a határértékeket is.

(a)	$\lim_{x \rightarrow 2} 8 - 3x + 12x^2$	(e)	$\lim_{x \rightarrow 2} x^3 - 1$	(i)	$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \sin(x) \cos(x)$
(b)	$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{6 + 4x}{x^2 + 1}$	(f)	$\lim_{x \rightarrow 2} 5$	(j)	$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{3x + 1}{1 - x}$
(c)	$\lim_{x \rightarrow 5} 3 - x$	(g)	$\lim_{x \rightarrow 3} x^2 - 3x + 7$	(k)	$\lim_{x \rightarrow 5} 10 + x - 5 $
(d)	$\lim_{x \rightarrow 3} x^2 - 3$	(h)	$\lim_{x \rightarrow \pi} \left(\frac{x - 3}{x + 5} \right)^7$	(l)	$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 1}{ x + 1 }$

2. Feladat. Legyenek $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olyan függvények, melykre az alábbiak teljesülnek.

$$\lim_{x \rightarrow 9} f(x) = 6 \quad \text{és} \quad \lim_{x \rightarrow 9} g(x) = 3$$

valamint

$$\lim_{x \rightarrow 6} f(x) = 9 \quad \text{és} \quad \lim_{x \rightarrow 6} g(x) = 3.$$

Mit mondhatunk ekkor az alábbi függvényhatárértékekről?

(a)	$\lim_{x \rightarrow 9} f(x) + g(x)$	(d)	$\lim_{x \rightarrow 9} g(f(x))$
(b)	$\lim_{x \rightarrow 9} \frac{3f(x)}{g(x)}$	(e)	$\lim_{x \rightarrow 6} f(g(x))$
(c)	$\lim_{x \rightarrow 6} \frac{f(x)}{3 - g(x)}$	(f)	$\lim_{x \rightarrow g} g(f(f(x)))$
		(g)	$\lim_{x \rightarrow 6} f(x)g(x) - f^2(x) + g^2(x)$

3. Feladat. Legyenek $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olyan függvények, melykre az alábbiak teljesülnek.

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2 \quad \text{és} \quad \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 0$$

valamint

$$\lim_{x \rightarrow 10} f(x) = 1 \quad \text{és} \quad \lim_{x \rightarrow 10} g(x) = \pi.$$

Mit mondhatunk ekkor az alábbi függvényhatárértékekről?

$$\begin{array}{lll}
 (a) & \lim_{x \rightarrow 1} f(x)^{g(x)} & (c) \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x)g(x) \\
 (b) & \lim_{x \rightarrow 10} \cos(g(x)) & (d) \quad \lim_{x \rightarrow 1} g(5f(x))
 \end{array}$$

4. Feladat. Legyen $f: [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ egy olyan függvény, melyre

$$3x - 2 \leq f(x) \leq x^3$$

teljesül minden $x \in [0, 3]$ esetén. mit állíthatunk a $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ határértékről?

5. Feladat. Legyen $f: [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ egy olyan függvény, melyre

$$6x - 9 \leq f(x) \leq x^2$$

teljesül minden $x \in [0, 3]$ esetén. mit állíthatunk a $\lim_{x \rightarrow 3-} f(x)$ határértékről?

6. Feladat. Legyen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ egy olyan függvény, melyre

$$2x \leq f(x) \leq x^4 - x^2 + 2$$

teljesül minden $x \in \mathbb{R}$ esetén. mit állíthatunk a $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ határértékről?

7. Feladat. Legyen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ egy olyan függvény, melyre

$$4x - 9 \leq f(x) \leq x^2 - 4x + 7$$

teljesül minden $x \in \mathbb{R}$ esetén. Mit állíthatunk a $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ határértékről?

8. Feladat. Tekintsük az

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 5x - 1, & \text{ha } x < 0 \\ \sin(x), & \text{ha } x \geq 0 \end{cases}$$

módon megadott $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt. Mit állíthatunk az alábbi határértékekről?

$$\begin{array}{llll}
 (a) & \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) & (b) & \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) \\
 (c) & \lim_{x \rightarrow 0} f(x) & (d) & f(0)
 \end{array}$$

9. Feladat. Tekintsük az

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{ha } x \leq 1 \\ x^2 - 5, & \text{ha } x > 1 \end{cases}$$

módon megadott $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt. Mit állíthatunk az alábbi határértékekről?

$$\begin{array}{llll}
 (a) & \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) & (c) & \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \\
 (e) & \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) & (g) & \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \\
 (b) & \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) & (d) & f(1) \\
 (f) & \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) & (h) & f(0)
 \end{array}$$

10. Feladat. Tekintsük az

$$f(x) = \begin{cases} 7 - 4x, & \text{ha } x < 1 \\ x^2 + 2, & \text{ha } x \geq 1 \end{cases}$$

módon megadott $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt. Mit állíthatunk az alábbi határértékekről?

(a)	(c)	(e)	(g)
$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$
(b)	(d)	(f)	(h)
$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x)$	$f(1)$	$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x)$	$f(0)$

11. Feladat. Tekintsük az

$$f(x) = \begin{cases} 6x, & \text{ha } x \leq -4 \\ 1 - 9x, & \text{ha } x > -4 \end{cases}$$

módon megadott $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt. Mit állíthatunk az alábbi határértékekről?

(a)	(b)	(c)	(d)
$\lim_{x \rightarrow -4-} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow -4+} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow -4} f(x)$	$f(-4)$

12. Feladat. Tekintsük az

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 8}{x - 2}, & \text{ha } x < 2 \\ x^3 + 1, & \text{ha } x \geq 2 \end{cases}$$

módon megadott $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt. Mit állíthatunk az alábbi határértékekről?

(a)	(b)	(c)	(d)
$\lim_{x \rightarrow 2-} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$	$f(2)$

13. Feladat. Tekintsük az

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 5x}{x}, & \text{ha } x < 0 \\ 1, & \text{ha } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{x}{\sqrt{x-1} + 1}, & \text{ha } x > 1 \end{cases}$$

módon megadott $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt. Mit állíthatunk az alábbi határértékekről?

(a)	(c)	(e)	(g)
$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$
(b)	(d)	(f)	(h)
$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x)$	$f(0)$	$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x)$	$f(1)$

14. Feladat. Tekintsük az

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{ha } x < -1 \\ x^3 + 1, & \text{ha } -1 \leq x \leq 1 \\ x^2 + 1, & \text{ha } x > 1 \end{cases}$$

módon megadott $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt. Mit állíthatunk az alábbi határértékekről?

(a)	(c)	(e)	(g)
$\lim_{x \rightarrow -1-} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$
(b)	(d)	(f)	(h)
$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x)$	$f(-1)$	$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x)$	$f(1)$

15. Feladat. Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi függvényhatárértékek közül melyek léteznek. Amennyiben a megadott függvényhatárérték létezik, határozzuk meg az értékét is.

(a)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(x-1)(x-2)}{x^2 + 6x - 9}$$

(e)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3 - 8}{x^4 + 16} \right)^{10}$$

(b)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x + 1}{5x}$$

(f)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3}{2x^2 - 1} - \frac{x^2}{2x + 1} \right)$$

(c)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^2 + 2x + 1}{x^2 - 3x + 2} \right)^4$$

(g)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^2 - \frac{x^4 - 1}{x^2 - 2} \right)$$

(d)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$$

(h)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[4]{x^5} + \sqrt[5]{x^3} + \sqrt[6]{x^8}}{\sqrt[3]{x^2} + 2}$$

16. Feladat. Tekintsük az

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x), & \text{ha } x < \pi \\ \sin(x), & \text{ha } x \geq \pi \end{cases}$$

módon megadott $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt. Mit állíthatunk az alábbi határértékekről?

(a)

$$\lim_{x \rightarrow \pi-} f(x)$$

(b)

$$\lim_{x \rightarrow \pi+} f(x)$$

(c)

$$\lim_{x \rightarrow \pi} f(x)$$

(d)

$$f(\pi)$$

17. Feladat. Legyen $a \in \mathbb{R}$ adott és tekintsük az

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \cos^2(x), & \text{ha } x < a \\ \sin^2(x), & \text{ha } x \geq a \end{cases}$$

módon megadott $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt. Mit állíthatunk az alábbi határértékekről?

(a)

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x)$$

(b)

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x)$$

(c)

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

(d)

$$f(a)$$

18. Feladat. Megválasztható-e az $\alpha \in \mathbb{R}$ (és ha igen, akkor hogyan) úgy, hogy az

$$f(x) = \begin{cases} |x|, & \text{ha } x < 1 \\ \frac{x^2 - \alpha^2}{x - \alpha}, & \text{ha } x \geq 1 \end{cases}$$

módon megadott függvénynek létezzen az $x_0 = 1$ pontban a határértéke?

Rutinfeladatok

Polinom-per-polinom típusú függvények határértéke $\pm\infty$ -ben

19. Feladat. Számítsuk ki az alábbi függvényhatárértékeket.

(a)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-13x^3 - 5x^2 + x}{-2x^3 + 8x^2 - 2x + 1}$$

(b)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^3 - x^2 - 3x - 15}{10x^3 - 14x^2 - 6x + 8}$$

(c)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-8x^3 - 14x^2 - 11x + 12}{-13x^3 + 5x^2 + 10x + 9}$	(j)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-13x^3 - 3x^2 - 11x - 10}{15x^3 - 8x^2 + 9x + 11}$
(d)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{15x^3 + 10x^2 + 13x + 9}{-6x^3 + 4x^2 + 9x + 7}$	(k)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{11x^3 + 5x^2 + 14x + 3}{9x^3 - 14x^2 - 10x - 13}$
(e)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{15x^3 - 5x^2 - 10}{3x^3 + x^2 - 8x + 10}$	(l)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-7x^3 - 9x^2 + 10x + 10}{-9x^3 - 6x^2 + 7x + 14}$
(f)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{15x^3 + 5x^2 - 15x - 14}{-15x^3 + x^2 + 12x - 9}$	(m)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x^3 - 5x^2 - 14x - 2}{-13x^3 - 11x^2 - 10x + 5}$
(g)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{12x^3 - 8x^2 + 2x + 8}{-12x^3 - 6x^2 + 7x + 4}$	(n)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9x^3 - 9x^2 - 9x + 3}{15x^3 - 3x^2 - 6x + 6}$
(h)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{15x^3 - 4x - 2}{-4x^3 + 8x^2 - 15x - 5}$	(o)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{15x^3 + 11x^2 + 15x + 13}{3x^3 - 4x^2 + 7x + 4}$
(i)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{14x^3 - 2x^2 + 6x + 12}{-8x^3 + 6x^2 - 14x + 11}$	(p)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x^3 + 3x^2 + 9x + 15}{9x^3 + 10x^2 - 11x - 7}$

20. Feladat. Vizsgáljuk meg az előző feladatban szereplő függvények határértékeit $+\infty$ helyett $-\infty$ -ben.

Polinom-per-polinom típusú függvények határértéke véges valós helyen

21. Feladat. Számítsuk ki az alábbi függvényhatárértékeket.

(a)	$\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + 7x + 12}{x^2 + 6x + 8}$	(g)	$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 + 2x - 3}$
(b)	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x}{x^2 + 5x}$	(h)	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 3x}{x^2 - 2x}$
(c)	$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1}$	(i)	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 + 2x - 8}$
(d)	$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 + 2x - 15}$	(j)	$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - x - 2}$
(e)	$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 8x + 15}$	(k)	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 4x}{2x^2 + 3x}$
(f)	$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6}$	(l)	$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)^2(x-1)}{x^3 + 1}$

(m)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 2x^2 + x}{2x^3 + x^2 - 2x}$$

(p)

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x + 6}{x^3 + 8}$$

(n)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{(x - 1)^2}$$

(q)

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{x^2 - 5x + 6}$$

(o)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x + 1)^2}{2 - x}$$

(r)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$$

Gyökök különbsége típusú függvényhatárértékek

22. Feladat. Vizsgáljuk meg, hogy léteznek-e az alábbi függvényhatárértékek. Amennyiben igen, számítsuk is ki ezeket az értékeket.

(a)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x + 2} - \sqrt{x}$$

(j)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{3x^2 + 2x + 10} - \sqrt{3x^2 + 3x + 4}$$

(b)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + x} - x$$

(k)

(c)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x - 3} - \sqrt{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x + 2} - \sqrt{2}}{x}$$

(d)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} (\sqrt{x - 3} - \sqrt{x})$$

(l)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x + 5} - \sqrt{5}}{\sqrt{x} - \sqrt{5}}$$

(e)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x (\sqrt{x^2 + x} - x)$$

(m)

(f)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 1} - x$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x - 1} - 2x}{x - 7}$$

(g)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{3x^2 + 5x + 9} - \sqrt{3x^2 + x + 7}$$

(n)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} - 6x}{3x + 1}$$

(h)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{7x^2 + 5x + 5} - \sqrt{7x^2 + 4x + 9}$$

(o)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt{x^3}}{\sqrt[4]{x^5} + x\sqrt{x}}$$

(i)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 9x + 8} - x$$

(p)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^2 + 1} - x}$$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ típusú függvényhatárértékek

23. Feladat. Számítsuk ki az alábbi függvényhatárértékeket.

(a)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x + 5}{5x + 4} \right)^{9x+2}$$

(c)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{10x + 2}{10x - 2} \right)^{5x+7}$$

(b)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{9x + 8}{9x + 6} \right)^{5x+6}$$

(d)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{7x + 4}{7x + 3} \right)^{x+9}$$