Témák, alapvető fogalmak, tételek

Tartalom

Halmazok

- Halmaz, halmaz eleme (nem definiáljuk külön, de meg lehet mondani, hogyan "szerveződik")
- halmaz számossága (tudjon példát mondani véges vagy végtelen számosságú halmazra.
- részhalmaz

Relációk

- Mit értünk alatta?
- tudjon példát adni
- hogyan szemléltethető (nyíldiagram)
- Mit jelent az egyértelmű hozzárendelés?
- Mit jelent a nem egyértelmű hozzárendelés?

Függvények

- Milyen tulajdonságú hozzárendelés?
- Van mindig képlete?
- grafikon a koordinátarendszerben (hogyan készül, általában nem ábrázoljuk az összes megfelelő pontpárt, csak kiválasztunk néhányat, és az ábrázolt pontokat összekötjük. Ha több pontot választunk, akkor a grafikon "simább" lesz.)

Görbék

- ***Explicit alak***ban adott függvények: $y = f(x)$ alakban vannak megadva, pl. a polinomok
  - Polinomiális függvények
  - általános alak
  - példák
  - elsőfokú polinom ($y = ax + b$)
    - grafikonja egyenes
    - egyenes ábrázolása
    - 2 pontra egyenes illesztése (egyenletrendszer megoldása)

- több pontra egyenes illesztése (általában nem határoznak meg egy egyenest. Ilyenkor olyan egyenest lehet keresni, amely minden pontot közelít valamennyire. approximáció)
- két egyenes metszéspontja (egyenletrendszer megoldását jelenti)

- másodfokú polinomok ($y = ax^2 + bx + c$)
  - grafikonja parabola
  - teljes négyzetté alakítás segít a grafikon rajzolásában
  - 3 előre adott pontra tudunk parabolát illeszteni. (három egyenletből álló egyenletrendszert kell megoldani)
- harmadfokú polinom ($y = ax^3 + bx^2 + cx + d$)
  - grafikonja hullámzó (egy "hegy" és egy "völgy" van)
  - 4 előre adott pontra illeszthető
- magasabb fokszámú polinommal leírt függvények grafikonja több hullámot ír le, ezért nem annyira kedvelt a grafikában
- Olyan egyszerű forma, mint egy teljes kör nem írható le polinom segítségével, ezért más függvényekkel is kell foglalkoznunk.

- ***Implicit alak***ban adott függvények: $F(x, y) = 0$
  - az x-hez és y-hoz egyszerre számolunk értéket
  - Az explicit alakból átrendezéssel kapjuk, de ennél bonyolultabb kapcsolat is lehet az x és y között
  - már egy teljes kör is megadható
  - "maga alá hajló" görbe is leírható (egy x értékhez több y érték tartozhat)
  - Ábrázolás: pixelenkénti kiértékeléssel, nagyon lassú!
  - ábrázolás néhány pontból: gyorsabb, de ekkor kérdés, hogy hogyan lehet azokat összekötni
  - Az implicit függvények ábrázolása nem túl népszerű a grafikában
  - tulajdonságok:
    - Azt nagyon könnyen lehet ellenőrizni, hogy egy pont illeszkedik-e a grafikonra. (x_0, y_0) pont pontosan akkor illeszkedik, ha $F(x_0, y_0) = 0$
    - Ha nem illeszkedik, akkor $F(x_0, y_0) \neq 0$, és az előjeléből el tudjuk dönteni, hogy a (x_0, y_0) pont a görbe melyik oldalán van. (az egyik oldalon mindig + előjelet, a másikon mindig – előjelet kapunk.)
    - (Implicit formában megadott) polinomokkal leírható görbéket ***algebrai görbék***nek nevezzük.
    - elsőfokú polinom ($ax + by + c = 0$), mindig egyenest ad meg => elsőrendű görbe
    - másodfokú polinom (x^2, y^2 és xy tagok közül legalább az egyiket tartalmazza, és alacsonyabb fokszámú tagok is lehetnek benne), mindig kúpszeletet ad => másodrendű görbe
      (kúpszelet: kör, ellipszis, parabola, hiperbola összefoglaló neve)
    - n-ed fokú polinom (olyan polinom, melyben a tagokban a kitevők összege max. n lehet) => n-ed rendű görbe
    - Egy n-ed és egy m-ed rendű görbének legfeljebb $n \cdot m$ db metszéspontja lehet.
      Következménye: két egyenes közös pontjainak száma: 1 vagy 0, egy

kör és egy egyenes közös pontjainak száma: 2 vagy 1 vagy 0.
Egy görbe rendje: egyenessel metszve legfeljebb hány metszéspontot kaphatunk.

- ***Vektorfüggvények*** (egy [a,b] intervallumot a sík vektorainak halmazába képezünk le.)
  - két ún. koordinátafüggvénnyel írhatjuk le. $(x(t), y(t))$
  - könnyű rajzolni, mivel az intervallum bejárása megadja az összekötés sorrendjét
  - Bármilyen alakú lehet, akár spirál is
  - könnyen kiterjeszthető térbe egy $z(t)$ koordinátafüggvénnyel

Felületek

- ***Explicit*** megadás: $z = f(x, y)$
  - általában egy téglalaptartomány fölött ábrázoljuk
  - határgörbék, paramétervonalak
  - dróthálós megjelenítés
  - előny: könnyű ábrázolás paramétervonalakkal
  - hátrány, hogy egy (x, y) párhoz csak egy z érték tartozhat
- ***Implicit*** megadás: $F(x, y, z) = 0$
  - Azt nagyon könnyen lehet ellenőrizni, hogy egy pont illeszkedik-e a felületre. (x_0, y_0, z_0) pont pontosan akkor illeszkedik, ha $F(x_0, y_0, z_0) = 0$
  - (Implicit formában megadott) polinomokkal leírható felületeket ***algebrai felületek***nek nevezzük.
  - elsőfokú polinom ($ax + by + cz + d = 0$), mindig síkot ad meg => elsőrendű felület
  - másodfokú polinom (x^2, y^2, z^2 négyzetes tagok és az $xy,\ xz, yz$ vegyes tagok közül legalább az egyiket tartalmazza, és alacsonyabb fokszámú tagok is lehetnek benne) => másodrendű felület
    (gömb, ellipszoid, nyeregfelület, egyköpenyű hiperboloid stb.)
  - n-ed fokú polinom (olyan polinom, melyben a tagokban a kitevők összege max. n lehet) => n-ed rendű felület
  - Egy n-ed rendű felületnek és egy m-ed rendű görbének legfeljebb $n \cdot m$ db látható metszéspontja lehet.
    Következménye: sík és egyenes közös pontjainak száma: 1 vagy 0, egy gömb és egy egyenes közös pontjainak száma: 2 vagy 1 vagy 0, gömb és egy hiperbola metszéspontjainak száma max. 4 lehet.
  - Egy n-ed rendű és egy m-ed rendű felület metszésvonala $n \cdot m$ -ed rendű görbe.
- ***Paraméteres megadás*** (egy (u, v) téglalaptartományt a tér vektorainak halmazába képezünk le.)
  - A felület pontjaiba mutató helyvektorok 3 koordinátafüggvénnyel írhatók le, minden függvény kétváltozós: $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$
  - paramétervonal: az egyik változó értékét rögzítjük, akkor az eredmény egy felületi görbe lesz. Mindkét változó külön-külön rögzíthető => két vonalsereget kapunk.
  - Nem elég a határgörbéket ábrázolni, azok nem mutatják a felület belsejében lévő kilengéseket.

Vektorok

- Mi a vektor?
- Műveletek:
  - Skalárral való szorzás („vektorok nyújtása”), valós szám és vektor szorzataként egy újabb vektort kapunk.
  - Összeadás: paralelogramma módszer, összefűzési módszer
  - Kivonás: „ellentett vektor hozzáadása”
  - Skaláris szorzás (belső szorzás): két vektorhoz egy valós számot rendel
    - definíció
    - kiszámítása a koordináták ismeretében
    - A vektorok által közbezárt szög kiszámítható
    - gyakran elég a szög cosinusa, vagy ennek az előjele is.
    - Merőlegességi feltétel!!
  - Vektoriális szorzás (külső szorzás): két vektorhoz egy újabb vektort rendel.
    - definíció
    - jobbsodrású rendszer
    - kiszámítás a koordináták ismeretében
    - egy síklap esetén a felületi normálvektor kiszámítható a vektoriális szorzás segítségével
    - párhuzamossági feltétel!!
    - Vektorok által felfeszített paralelogramma területe számítható
  - Vegyesszorzat: három vektorhoz egy számot rendel
    - definíció
    - kiszámítás a koordináták ismeretében
    - a vektorok által felfeszített paralelepipedon térfogata számolható
    - jobbsodrású rendszer esetén a vegyesszorzat >0
    - balsodrású rendszer esetén a vegyesszorzat <0
- Vektorok kölcsönös helyzete
    - két vektor párhuzamosságának feltétele
    - két vektor merőlegességének feltétele
    - három vektor függőségének (egy síkban létének) feltétele

Függvényvizsgálat

- A differenciálszámítás NEM anyaga ennek a kurzusnak, de muszáj volt megemlíteni.
- $f'(x)$ geometriai jelentése
- adott pontbeli érintő = az adott pontból indított szelők határhelyzete
- Helyi minimum / maximum helyek keresése
- a függvény növekvő / csökkenő szakaszainak felismerése

Geometriai módon megadott alakzatok

- Szemléletváltás: Nem adott képlet / egyenlet alapján akarunk ábrázolni, hanem feltételeket mondunk arra vonatkozólag, hogy egy görbe milyen pontokon, milyen sorrendben, milyen érintőkkel.. stb haladjon át.
- a görbét parametrikus alakban keressük
- polinomokat használunk, melyek gyorsan és stabilan számolhatók.

- 2 adott pontra egy egyenes illeszthető, lineáris (első fokú polinommal írhatók le a koordinátafüggvényei
- 3 pont esetén másodfokú polinommal írhatjuk le a görbét. (A polinom együtthatói kiszámíthatók az adott pontok koordinátái és a pontokhoz rendelt paraméterértékek felhasználásával)
- Lagrange interpoláció alapelve: n db pontra (n-1)-ed fokú görbe illeszthető.
- Paraméterezési lehetőségek:
  - uniform módszer
  - húrhossz szerinti paraméterezés
- Hermite-ív
  - Előadáson 2 adott pont és azokban az érintővektorok voltak adottak.
  - Ebből előállítható egy olyan ív, amely áthalad az adott pontokon, és az adott vektorok az érintővektorai. (Nem kell a képletre emlékezni)
  - 2 pont + 2 érintővektor = 4 adat ➔harmadfokú polinomokkal adható meg az ív.
- Bézier görbe
  - Előadáson 4 kontrollpont volt adott.
  - Ebből olyan Bézier görbe számolható, amely az első és utolsó pontokon áthalad, a közbenső pontokat közelíti, és a kezdő- és végpontokban az érintőket a kontrollpoligon első és utolsó szakasza adja.