Valószínűségszámítás és statisztika

István Fazekas

Tartalomjegyzék

1. fejezet. A valószínűségszámítás alapfogalmai 5
   1.1. A valószínűség 5
   1.2. Halmazalgebrák és σ-algebrák 11
   1.3. A feltételes valószínűség 15
   1.4. Események függetlensége 20

2. fejezet. Diszkrét valószínűségi változók 25
   2.1. Véletlentől függő mennyiségek 25
   2.2. Diszkrét valószínűségi változók várható értéke 30
   2.3. A szórás 33
   2.4. A korrelációs együttható 37
   2.5. Nevezetes diszkrét eloszlások 41

3. fejezet. Valószínűségi változók 49
   3.1. Valószínűségi változók, eloszlások, eloszlásfüggvények 49
   3.2. Sűrűségfüggvények 55
   3.3. A várható érték és a szórás 59
   3.4. Valószínűségi változók együttes eloszlása 63
   3.5. Valószínűségi vektorváltozók 69
   3.6. A nagy számok törvényei 73
   3.7. A központi határeloszlás-tétel 78

4. fejezet. Nevezetes abszolút folytonos eloszlások 85
   4.1. Az egyenletes eloszlás 85
   4.2. Az exponenciális eloszlás 87
   4.3. A normális eloszlás 89
   4.4. A többdimenziós normális eloszlás 92
   4.5. A normális eloszlásból származó eloszlások 97

5. fejezet. A statisztika alapfogalmai 103
   5.1. A minta 103
   5.2. Statisztikák 110
   5.3. Statisztikai adatok áttekintése 112

6. fejezet. Statisztikai eljárások 117
   6.1. Statisztikai becslések 117
   6.2. Paraméteres próbák 120
   6.3. Khi-négyzet próbák 126
   6.4. Szórásanalízis, regresszióanalízis 131

7. fejezet. Appendix 137

Megoldások 142

Táblázatok 152

Irodalomjegyzék 168

1. FEJEZET

A valószínűségszámítás alapfogalmai

1.1. A valószínűség

A valószínűségszámítás témája: a véletlen tömegjelenségekre vonatkozó törvényszerűségek megállapítása. Véletlen jelenség az, aminek a kimenetelét a tekintetbe vett (rendelkezésre álló) feltételek nem határozzák meg egyértelműen. Tömegjelenségen pedig olyan jelenséget értünk, amely nagy számban megy végbe egyszerre (pl. atomi bomlás), vagy sokszor megismételhető (pl. szerencsejátékok). A levonható törvényszerűségek statisztikai jellegűek, azaz nagy számú végrehajtás során átlagosan érvényes törvények.

A véletlen jelenségek leírására sztochasztikus modelleket használunk. Ilyen modellek esetén az adott feltételrendszer nem határozza meg egyértelműen, hogy egy esemény bekövetkezik-e, vagy sem. Ezzel ellentétben, az ún. determinisztikus modellek esetén a tekintetbe vett feltételrendszer egyértelműen meghatározza, hogy egy adott esemény bekövetkezik-e vagy sem.

1.1.1. Az eseménytér Tekintsünk egy véletlen kísérletet. A kísérlet lehetséges kimeneteleit *elemi események*nek nevezzük. Az elemi esemény karakterisztikus tulajdonsága, hogy csak egyféleképp következhet be. Az elemi eseményeket $\omega_1, \dots, \omega_n$ szimbólumokkal jelöljük. Az adott kísérlethez tartozó összes elemi esemény halmazát *eseménytér*nek (mintatérnek) nevezzük és Ω-val jelöljük. Az elemi eseményekből álló halmazokat (azaz Ω részhalmazait) *események*nek nevezzük. Az egyes eseményeket $A, B, C, \dots$ betűkkel, míg az összes esemény halmazát $\mathcal{F}$-fel jelöljük.

1.1.1. Example. (1) Dobjunk fel egy dobókockát. Ennek a kísérletnek 6 lehetséges kimenetele van, így az elemi események: $\omega_1 = 1, \omega_2 = 2, \dots, \omega_6 = 6$. Az eseménytér $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$. Jelentse A azt az eseményt, hogy párosat dobtunk, B azt, hogy 3-nál nagyobbat. Ekkor

$$A = \{2, 4, 6\}, \quad B = \{4, 5, 6\}.$$

(2) Húzzunk egy kártyát egy 32 lapos pakliból. Ekkor Ω egy 32 elemű halmaz. Jelölje A azt az eseményt, hogy pirosat húztunk, B azt, hogy 7-est húztunk. Ekkor

$$A = \{p7, p8, p9, p10, pa, pf, pk, pá\}, \quad B = \{p7, z7, m7, t7\}.$$

(Itt $p7$ a piros hetest szimbolizálja,...)

(3) Dobjunk fel egy érmét kétszer egymás után. Itt $\Omega = \{II, IF, FI, FF\}$, ahol IF jelöli, hogy az első dobás írás, a második fej,...

(4) Dobjunk egy pontot véletlenszerűen a $[0, 1]$ intervallumra. Ekkor $\Omega = [0, 1]$. Jelölje A_1, hogy a pont a $[0, \frac{1}{2})$-re esik, A_2, hogy $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$-re, A_3, hogy $[\frac{3}{4}, \frac{7}{8})$-ra,....

Ekkor

$$A_1 = \Big[0, 1/2\Big), \quad A_2 = \Big[1/2, 3/4\Big), \quad A_3 = \Big[3/4, 7/8\Big), \dots$$

1.1.2. Műveletek események között Eseményekből a szokásos logikai műveletek segítségével alkothatunk új eseményeket. Mivel az események tulajdonképpen halmazok (elemi események halmazai), így a logikai műveletek és a megfelelő halmazelméleti műveletek közötti kapcsolat nyilvánvaló.

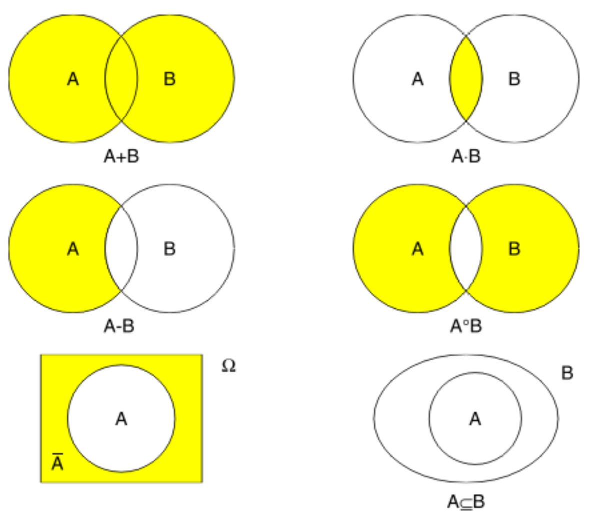
Az A és B esemény *összegén* azt az $A+B$ eseményt értjük, amely akkor következik be, ha vagy A, vagy B, vagy mindkettő bekövetkezik. Nyilván $A+B = A \cup B$ a halmazelméleti unió műveletét használva. Tetszőleges (véges vagy végtelen) sok esemény összege olyan esemény, mely akkor következik be, ha az összeadandók valamelyike bekövetkezik.

Az A és B esemény *szorzatán* azt az $A \cdot B$ eseményt értjük, mely akkor következik be, ha mind A, mind B bekövetkezik. Nyilván $A \cdot B = A \cap B$. Tetszőleges sok esemény szorzata az az esemény, amely akkor következik be, ha a tényezők mindegyike bekövetkezik.

Az A esemény *ellentetjén* azt az $\overline{A}$ eseményt értjük, mely akkor következik be, ha A nem következik be. $\overline{A}$ nyilván A-nak Ω-ra vonatkozó komplementere.

Szokás még használni két esemény *különbségét*: $A - B$ akkor következik be, ha A bekövetkezik, de B nem. A és B *szimmetrikus differenciája*: $A \circ B$ akkor következik be, ha A és B közül pontosan egy következik be.

1.1.1. ábra. Műveletek és relációk események között



1.1.2. Exercise. (1) Igazoljuk, hogy a szorzás és az összeadás kommutatív, asszociatív és idempotens művelet. Igazoljuk a kétféle disztributív törvényt is! Bizonyítsuk be, hogy $\overline{\overline{A}} = A$.

(2) Igazoljuk a de Morgan-féle azonosságokat:

$$\overline{A+B} = \overline{A} \cdot \overline{B}, \quad \overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}.$$

Magyarázzuk ezt a két azonosságot események nyelvén! Írjuk fel és igazoljuk a de Morgan azonosságokat kettő helyett tetszőleges sok eseményre!

Két kitüntetett esemény van. A *biztos esemény*, amely mindig bekövetkezik; ez nyilván Ω. A *lehetetlen esemény*, amely soha sem következik be; ez nyilván $\emptyset$ (az üres halmaz).

1.1.3. EXERCISE. Igazoljuk, hogy $\overline{\Omega} = \emptyset$, $\overline{\emptyset} = \Omega$, továbbá $A \cdot \Omega = A$, $A + \Omega = \Omega$, $A \cdot \emptyset = \emptyset$, $A + \emptyset = A$ bármely A eseményre.

1.1.4. NOTE. Azt mondjuk, hogy A és B *kizárja egymást*, ha egyszerre nem következhetnek be. Ez pont azt jelenti, hogy A és B diszjunkt halmazok: $A \cap B = \emptyset$. Ha A bekövetkezéskor B mindig bekövetkezik, akkor azt modjuk, hogy A *maga után vonja* B-t. Ez halmazok nyelvén pontosan azt jelenti, hogy $A \subseteq B$.

A továbbiakban a $+$ és az $\cup$ ill. a $\cdot$ és a $\cap$ műveleti jeleket egymás szinonimájaként fogjuk használni (ezek a szakirodalomban általában keverednek).

1.1.5. EXAMPLE. Az 1.1.1 példákban bevezetett eseményeket használjuk.

(1) $A \cdot B = \{4, 6\}$, azaz háromnál nagyobb páros dobás.

(2) $A \cdot B = \{p7\}$, azaz piros 7-est húzunk; $A + B$ pedig azt jelenti, hogy vagy pirosat, vagy 7-est húzunk.

(3) Ha A jelöli azt, hogy elsőre írást, B azt, hogy másodikra fejet dobunk, akkor $A \cdot B = \{IF\}$.

(4) Az $A_1, A_2, \ldots$ események egymást páronként kizárják és $A_1 \cup A_2 \cup \cdots = [0, 1)$.

1.1.3. A valószínűség fogalmának statisztikai jellegű megvilágítása

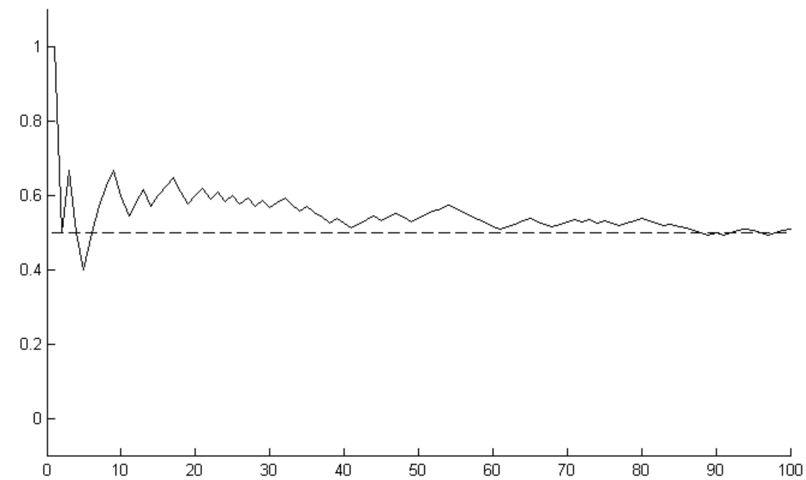
Dobjunk fel egy szabályos érmét egymás után sokszor, és jegyezzük fel a kapott fej-írás sorozatot. Például az $F\,I\,I\,F\,I\,F\,F\,F\ldots$ sorozatot kaphatjuk. Ha n dobásból k fejet kapunk, akkor k-t a fej dobások gyakoriságának, míg k/n-et a fej dobások relatív gyakoriságának nevezzük. A fenti példában a relatív gyakoriságok sorozata:$\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{8}$,... Az így kapott sorozat nem „szabályos” sorozat, a hagyományos matematikai értelemben (egyelőre) nem állíthatjuk róla, hogy konvergens. Csupán annyi látható, hogy „szabálytalan”, „véletlen ingadozásokat” mutató sorozat, és a kísérlet újabb végrehajtásakor egy másik „szabálytalan” sorozat jön ki. Csupán annyit remélhetünk, hogy k/n valamilyen homályos értelemben $1/2$ körül ingadozik (lévén az érme szabályos). A ténylegesen elvégzett kísérletek ezt igazolják is (pl. Buffon 4040 dobásból 2048-szor kapott fejet, míg Pearson 24000 dobásból 0,5005 relatív gyakoriságot kapott).

Figyeljük meg az alábbi, ténylegesen elvégzett (nem számítógépen szimulált) 100 hosszúságú dobássorozat lefolyását!

$$\begin{array}{ccccc} FIFII & FFFFI & IFFIF & FFIIF & FIFIF \\ IFIFI & FFIIF & IIIFI & IFFFI & FFIIF \\ FFFFI & IIIII & IFFFF & IIIFF & FIFIF \\ IIFFF & IIIFI & IIIIF & IFFFI & IIFFF \end{array}$$

Sorszám	1	2	3	4	5	6	···	100
Dobás	F	I	F	I	I	F	···	F
Fej gyak.	1	1	2	2	2	3	···	51
Fej rel. gyak.	1	0.5	0.67	0.5	0.4	0.5	···	0.51

1.1.2. ábra. Fej-dobások relatív gyakorisága



Ábrázoljuk a relatív gyakoriságok grafikonját! Az eredmény a 1.1.3. ábrán látható. Megjegyezzük, hogy a fej-írás sorozatban hosszabb homogén blokkok (azaz tiszta F vagy tiszta I részek) fordulhatnak elő, mint azt a laikusok fletételezik.

A jelenségek egy részénél a relatív gyakoriság stabilitást mutat. Pontosabban fogalmazva, tekintsünk egy kísérletet, és ehhez kapcsolódva egy A eseményt. Hajtsuk végre a kísérletet n-szer egymástól függetlenül, azonos körülmények között. Jelölje k_A az A bekövetkezései számát. Ha a k_A/n relatív gyakoriság nagy n esetén egy fix szám körül ingadozik, akkor ezt az A-ra jellemző számot $P(A)$-val jelöljük és A valószínűségének nevezzük.

A napjainkban általánosan elfogadott (Kolmogorov-féle) elmélet a relatív gyakoriságokra vonatkozó fenti heurisztikus gondolatmenetből csupán a valószínűségre vonatkozó néhány egyszerű következményt tart meg, ezeket axiómaként tekinti, és erre épít fel egy konzekvens matematikai elméletet.

1.1.4. A valószínűség axiómái A k_A/n relatív gyakoriság mindig nemnegatív, így

(1.1.1) $$\boxed{P(A) \geq 0 \text{ minden } A \text{ eseményre.}}$$

A biztos esemény mindig bekövetkezik: $k_\Omega/n = 1$, így

(1.1.2) $$\boxed{P(\Omega) = 1.}$$

Ha A és B egymást kizáró események, akkor $k_{A+B} = k_A + k_B$. Ezért

$$P(A+B) \sim k_{A+B}/n = k_A/n + k_B/n \sim P(A) + P(B)$$

alapján

(1.1.3) $$\boxed{P(A+B) = P(A) + P(B)},$$

ha A és B egymást kizáró események.

Az eseményeken értelmezett (1.1.1)-(1.1.3) tulajdonságokkal rendelkező P függvényt nevezzük *valószínűségnek*. Tehát nem a valószínűség „fizikai mibenlétét” határozzuk meg, csupán a statisztikai szemléletmódból eredő néhány egyszerű tulajdonságot fogadunk el axiómaként.

Az Ω eseményteret, az események $\mathcal{F}$ halmazát és a P valószínűséget együttesen *valószínűségi mező*nek fogjuk nevezni. A pontos definíciót a 2. fejezetben fogjuk csak megadni.

1.1.5. A valószínűség tulajdonságai

1.1.6. THEOREM. *Ha $A_1, A_2, \dots, A_n$ páronként kizáró események, akkor*

$$P(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n). \tag{1.1.4}$$

BIZONYÍTÁS. Alkalmazzuk az (1.1.3) formulát. □

Az ekvivalens (1.1.3) és (1.1.4) azonosságokat a valószínűség (végesen) *additív* tulajdonságának nevezzük.

1.1.7. EXERCISE. Legyen A és B két tetszőleges esemény. Az (1.1.1)-(1.1.3) axiómákból vezessük le az alábbiakat!

$$\boxed{P(\emptyset) = 0.}$$

$$\boxed{P(A - B) = P(A) - P(A \cdot B).}$$

$$\boxed{P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B).} \tag{1.1.5}$$

A feladatok megoldásához úgy is jó útmutatót kaphatunk, ha az eseményeket Venn-diagrammal szemléltetjük, a valószínűségüket a területükként fogjuk fel, miközben az egész Ω területét 1-nek választjuk.

1.1.6. Véges valószínűségi mezők A fenti (1.1.1)-(1.1.3) axiómák elegendőek olyan véletlen kísérletek leírására, melyeknek csak véges sok kimenetelük van. Tegyük fel tehát, hogy a kísérlet kimenetelei (az elemi események) száma N, azaz

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}.$$

Jelölje p_i az ω_i elemi esemény valószínűségét: $p_i = P(\omega_i)$, $i = 1, 2, \dots, N$. Mivel a valószínűség additív, így

$$\sum_{i=1}^{N} p_i = \sum_{i=1}^{N} P(\omega_i) = P(\Omega) = 1.$$

Tehát a p_i számok összege 1. Továbbá

$$P(A) = P\Big(\sum_{\omega_i \in A} \omega_i\Big) = \sum_{\omega_i \in A} p_i. \tag{1.1.6}$$

Ezek alapján véges valószínűségi mezők a következőképp írhatók le. Ha az elemi események száma N, akkor meg kell adni N db nemnegatív, 1 összegű számot (az elemi események valószínűségeit): $p_1, \ldots, p_N$. Egy A esemény valószínűségét pedig úgy számítjuk ki, hogy az A-t alkotó elemi események valószínűségeit összeadjuk.

1.1.7. A klasszikus valószínűségi mező Egy szabályos érme, ill. kocka feldobásakor a lehetséges kimenetelek egyforma valószínűségüek. Számos olyan véletlen kísérlet van (pl. a szerencsejátékok esetén), ahol a lehetséges kimenetelek száma véges, és a kimenetelek egyforma esélyűek (pl. szimmetria okokból). Ekkor az elemi események valószínűségeire $p_i = 1/N$, $i = 1, 2, \ldots, N$ és az (1.1.6) képlet alapján

$$\boxed{P(A) = \frac{k}{N} = \frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes esetek száma}}}. \tag{1.1.7}$$

Itt N jelenti a lehetséges kimentelek számát (azaz az összes elemi esemény számát), míg k az A számára kedvező kimenetelek számát (vagyis az A-ban levő elemi események számát).

Az (1.1.7) képlet a *valószínűség klasszikus kiszámítási módja.* Kezdetben ezt tekintették a valószínűség definíciójának. Bár (1.1.7) számos esetben alkalmazható, általános definícióként nem használható.

1.1.8. Example. Az 1.1.1 és 1.1.5 példák folytatása.

(1) Egy szabályos kocka feldobásakor minden elemi esemény valószínűsége $1/6$. A páros dobás valószínűsége $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

(2) Egy kártya kihúzásának valószínűsége $1/32$. A piros húzás valószínűsége $P(A) = 8/32 = 1/4$.

(3) Két érme feldobásakor (vagy, ami ugyanaz, egy érme kétszeri feldobásakor) mind a 4 elemi esemény $1/4$ valószínűségű. Felhívjuk a figyelmet, hogy az IF és az FI „egybemosása" hibához vezet. A kísérlet tényleges végrehajtása azt igazolja, hogy a kísérlet három egyenlően valószínű eseménnyel (nevezetesen „két fej", „két írás" és „egy fej és egy írás") való leírása ellentmond a tapasztalatoknak.

(4) Egy pont [0,1] intervallumra történő dobása nyilván nem írható le véges valószínűségi mezővel.

1.1.9. Note. *A valószínűség monotonitása:*

$$\boxed{\text{ha } B \subseteq A, \text{ akkor } P(B) \leq P(A)}.$$

Az ellentett esemény valószínűsége:

$$\boxed{P(\overline{A}) = 1 - P(A)}.$$

Gyakorlatok

(1) Keressünk egyszerű kifejezéseket az alábbi eseményekre:

$$(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}), (A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup B), \; (A \cup B) \cap (B \cup C).$$

(2) Legyenek A, B és C tetszőleges események. Az események közötti műveletekkel fejezzük ki, hogy A, B és C közül a) mindhárom bekövetkezik; b) legalább kettő bekövetkezik; c) legalább egy bekövetkezik; d) egy sem következik be; e) legfeljebb kettő következik be.

(3) Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $A_1, A_2, \dots, A_n$ eseményekre fennáll, hogy

$$P(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} S_k^{(n)},$$

ahol $S_k^{(n)} = \sum P(A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_k})$ és ezen utóbbi összegzés az $1, 2, \dots, n$ számok $i_1, i_2, \dots, i_k$ k-adrendű kombinációira terjed ki.

(4) Bizonyítsuk be az alábbi összefüggéseket, és szemléltessük őket Venn-diagram segítségével!
   (a) Ha $B \subseteq A$, akkor $P(B) \leq P(A)$. (A valószínűség monotonitása.)
   (b) $P(A) + P(\overline{A}) = 1$. (Ezt leggyakrabban $P(A) = 1 - P(\overline{A})$ alakban használjuk.)
   (c) $P(A+B+C) = P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$.

(5) Hatszor feldobunk egy dobókockát. a) Mennyi a valószínűsége, hogy minden dobás páros? b) Mennyi a valószínűsége, hogy legalább egy 6-ost dobunk?

(6) Véletlenszerűen választva egy legfeljebb ötjegyű számot, mennyi a valószínűsége, hogy mind az öt jegy különböző? (A 0 is „értékes” jegynek számít a „rövidebb” számok elején.)

(7) n golyót helyezünk el n dobozba véletlenszerűen. Mennyi a valószínűsége, hogy minden dobozban lesz golyó?

(8) Mennyi a valószínűsége, hogy egy szabályos kockával 6-szor dobva, minden dobás eredménye más?

(9) Valakinek a zsebében n kulcs van, amelyek közül egy nyitja a lakása ajtaját. A kulcsokat egymás után véletlenszerűen próbálja ki. Mennyi a valószínűsége, hogy a k-dikra elővett kulcs nyitja az ajtót?

(10) Szabályos dobókockával dobálunk. Mennyi a valószínűsége, hogy a negyedik hatost a tizedikre dobjuk?

(11) Mi a valószínűbb, 6 kockával legalább egy hatost dobni, vagy 12 kockával legalább két hatost dobni?

(12) Egy sakktáblára véletlenszerűen elhelyezünk 8 bástyát. Mennyi a valószínűsége, hogy a bástyák nem ütik egymást?

Ellenőrző kérdések

(1) Mit nevezünk eseménynek, elemi eseménynek, eseménytérnek?
(2) Milyen műveleteket értelmezünk események között?
(3) Mi a relatív gyakoriság?
(4) Mik a valószínűség axiómái?
(5) Mi a valószínűség klasszikus kiszámítási módja?

1.2. Halmazalgebrák és σ-algebrák

Bonyolultabb szituációk vizsgálatakor az a meglepő helyzet állhat elő, hogy az elemi események nem minden halmaza tekinthető eseménynek. Célszerű tehát az eseményeket úgy kijelölni, hogy jól kezelhető struktúrákat alkossanak.

Az Ω részhalmazainak $\mathcal{F}$ rendszerét σ-algebrának nevezzük, ha $\Omega \in \mathcal{F}$és $\mathcal{F}$ -ből nem vezet ki a komplementer képzés és a megszámlálható unió képzés.

1.2.1. Exercise. (1) Bizonyítsuk be, hogy Ω összes részhalmazainak halmaza (azaz 2^{Ω}) σ-algebra.

(2) Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges sok σ-algebra metszete σ-algebra.

Legyen $\mathcal{G}$ Ω részhalmazainak egy rendszere. A $\mathcal{G}$-t tartalmazó összes σ-algebra metszete éppen a $\mathcal{G}$-t tartalmazó legszűkebb σ-algebra. Ezt a legszűkebb σ-algebrát nevezzük a $\mathcal{G}$ által generált σ-algebrának és $\sigma(\mathcal{G})$-vel jelöljük.

1.2.1. A valószínűség σ-additivitása Már viszonylag egyszerű feladatok megoldása során felmerül annak a kérdése, hogy hogyan lehet meghatározni (megszámlálhatóan) végtelen sok (páronként kizáró) esemény összegének a valószínűségét.

1.2.2. Example. Dobjunk fel egy szabályos érmét egymás után annyiszor, míg fejet nem kapunk. Mennyi a valószínűsége, hogy a kísérlet véges számú lépésben véget ér?

Jelölje A a szóban forgó eseményt, ekkor $A = A_1 + A_2 + A_3 + \dots$, ahol A_i jelöli azt, hogy az i-edik dobás fej, viszont a megelőzőek mindegyike írás. A klasszikus képlet szerint $P(A_i) = 1/2^i$, $i = 1, 2, \dots$. Ha kihasználhatnánk azt, hogy a valószínűség megszámlálható sok diszjunkt esemény esetén is additív módon viselkedik, akkor

$$P(A) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots = 1$$

eredményt kapnánk. Ez pedig összhangban áll a tapasztalattal.

1.2.3. Definition. Az $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ hármast *Kolmogorov-féle valószínűségi mezőnek* nevezzük, ha Ω egy nemüres halmaz (eseménytér), $\mathcal{F}$ Ω részhalmazainak egy σ-algebrája (az események halmaza), P pedig egy $P : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ halmazfüggvény (valószínűség) a következő tulajdonságokkal:

$$P(A) \geq 0, \quad A \in \mathcal{F}; \tag{1.2.1}$$

$$P(\Omega) = 1; \tag{1.2.2}$$

$$P(A_1 + A_2 + \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots, \tag{1.2.3}$$

ha $A_i \in \mathcal{F}$, $i = 1, 2, \dots$ és $A_i A_j = \emptyset$, ha $i \neq j$.

Az (1.2.3) tulajdonság a valószínűség σ-additivitása. Ez nem következik szemléletes tényekből, mint az additivitás. Azonban elfogadásával hatékony matematikai elmélet építhető fel, amely a jelenségek tág körét leírja. Napjainkban a Kolmogorov-féle axiómákon nyugvó valószínűségelmélet használatos a legszélesebb körben.

1.2.2. A valószínűség folytonossága Az (1.2.1)-(1.2.3) axiómákból következik, hogy

$$P(\emptyset) = 0.$$

Ennek igazolására elegendő (1.2.3) képletben $A_1 = \Omega,\ A_i = \emptyset,\ i \neq 1$ helyettesítést elvégezni.

Továbbá, ha P eleget tesz az (1.2.1)-(1.2.3) axiómáknak, akkor P végesen additív, azaz

$$P(A_1 + \cdots + A_n) = P(A_1) + \cdots + P(A_n), \tag{1.2.4}$$

ha $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$, $n = 1, 2, \dots$ és $A_i A_j = \emptyset$, ha $i \neq j$. (1.2.4) igazolásához elegendő (1.2.3)-ban $A_{n+1} = A_{n+2} = \cdots = \emptyset$-t helyettesíteni.

Tehát az előző fejezetben a valószínűségre megadott tulajdonságok következnek az (1.2.1)-(1.2.3) Kolmogorov-féle axiómákból. Így az 1. fejezet megállapításai érvényesek Kolmogorov-féle valószínűségi mezőkben. Továbbá, ha Ω véges, akkor a σ-additivitás nyilván ekvivalens az additivitással. Így az 1. fejezetben leírt véges valószínűségi mező speciális esete a Kolmogorov-féle valószínűségi mezőnek.

A σ-additivitás ekvivalens a véges additivitás és egy folytonossági feltétel teljesülésével:

1.2.4. THEOREM. *Legyen $\mathcal{F}$ σ-algebra, $P : \mathcal{F} \to \mathbf{R}$ teljesítse az* (1.2.1) *és* (1.2.2) *feltételeket. Ekkor* (1.2.3) *teljesülésének szükséges és elegendő feltétele* (1.2.4) *és az alábbi tulajdonság egyidejű teljesülése:*

$$B_i \in \mathcal{F}, \quad i = 1, 2, \dots, B_1 \supset B_2 \supset \dots, \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i = \emptyset \textit{ esetén } \lim_{n\to\infty} P(B_n) = 0. \tag{1.2.5}$$

1.2.3. Megszámlálható valószínűségi mezők A megszámlálható számosságú valószínűségi mezők (azaz az olyan kísérletek, melyeknek megszámlálható sok kimenetele van) teljesen leírhatók az ún. diszkrét valószínűségeloszlások segítségével.

1.2.5. DEFINITION. A $p_1, p_2, \dots$ számsorozatot *diszkrét valószínűségeloszlásnak* (röviden eloszlásnak) nevezzük, ha

$$p_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, \quad \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1.$$

Ha $p_1, p_2, \dots$ egy diszkrét valószínűségeloszlás, akkor legyen $\Omega = \{w_1, w_2, \dots\}$ egy tetszőleges megszámlálható halmaz, $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$. A

$$P(A) = \sum_{w_i \in A} p_i, \quad A \in \mathcal{F}$$

képlet nyilván valószínűséget definiál, melyre $P(w_i) = p_i$, $i = 1, 2, \dots$.

1.2.6. EXAMPLE. Legyen $p_k = e^{-\lambda}\lambda^k/k!$, $k = 0, 1, 2, \dots$, ahol $\lambda > 0$ konstans. Az ismert

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k/k! = e^{\lambda}$$

összefüggés alapján látható, hogy $p_1, p_2, \dots$ eloszlást alkot. Ezt nevezzük *Poisson-eloszlásnak.*

1.2.4. A valószínűség geometriai kiszámítási módja A valószínűség tulajdonságai hasonlóak a hossz, a terület, ill. a térfogat tulajdonságaihoz.

1.2.7. Example. Dobjunk egy pontot véletlenszerűen a $[0,1]$ intervallumra. A pont 0-tól mért távolságát jelölje x. Mennyi a valószínűsége, hogy az $1/2$, x, $1-x$ hosszúságú szakaszokból háromszöget lehet szerkeszteni?

A háromszög szerkeszthetőségének feltétele: $x < 1-x+1/2$, $1-x < x+1/2$, $1/2 < x+1-x$. Ezek a feltételek ekvivalensek az $x \in [1/4, 3/4]$ feltétellel. Vagyis a $[0,1]$ intervallum „fele" kedvező számunkra, így a kérdéses valószínűséget 1/2-nek tippeljük. Ennek előfeltétele szemléletes módon az, hogy tetszőlegesen rögzített $0 < \delta < 1$ esetén a $[0,1]$ intervallum bármely δ hosszúságú szakaszára a pont (a szakasz helyétől függetlenül) ugyanolyan valószínűséggel essen.

Legyen G az $\mathbb{R}^n$ egy részhalmaza, és dobjunk egy pontot véletlenszerűen G-re. Legyen $A \subseteq G$. Ekkor annak a valószínűsége, hogy a pont A-ba esik

$$\boxed{P(A) = \frac{\lambda(A)}{\lambda(G)}}, \tag{1.2.6}$$

ahol λ a hossz, a terület, ill. a térfogat attól függően, hogy az egyenesen, a síkon, ill. a térben vagyunk (nyilván a $0 < \lambda(G) < \infty$ esetre szorítkozunk). Az (1.2.6) képlet *a valószínűség geometriai kiszámítási módja*, mely nyilvánvaló analógiát mutat a klassszikus kiszámítási móddal.

Jelöljük $\mathcal{T}$-vel az $\mathbb{R}^n$ félig nyílt (pontosabban alulról zárt, felülről nyílt) tégláinak, azaz a

$$T = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i), \tag{1.2.7}$$

$a_i \le b_i$, $i = 1, \dots, n$ alakú halmazoknak az összességét.

A $\mathcal{T}$ által generált σ-algebrát $\mathcal{B}$-vel jelöljük, és elemeit Borel-halmazoknak nevezzük.

A térfogatnak megfelelő mértéket kívánunk definiálni $\mathcal{B}$-n. Ha T az (1.2.7) által definiált, akkor legyen

$$\lambda(T) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i). \tag{1.2.8}$$

1.2.8. Theorem. *Egyértelműen létezik $\mathbb{R}^n$ Borel-halmazain egy olyan λ nemnegatív, σ-additív halmazfüggvény, melyre* (1.2.8) *teljesül. Ezt a λ-t n-dimenziós* Lebesgue-mértéknek *nevezzük.*

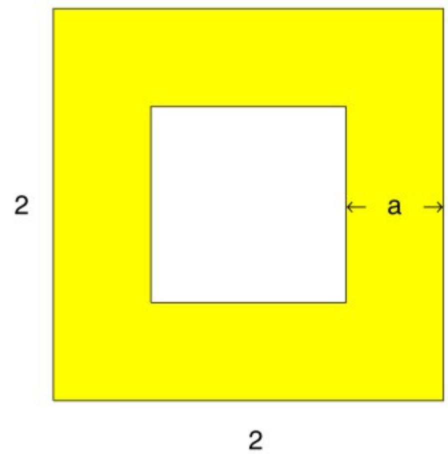
1.2.9. Example. Dobjunk egy pontot véletlenszerűen egy 2×2-es négyzetre. Jelölje ξ a pont távolságát a legközelebbi oldaltól. Határozzuk meg $P(\xi < a)$-t!

Nyilván $P(\xi < a) = 0$, ha $a < 0$, és $P(\xi < a) = 1$, ha $a > 1$. Ha $0 < a \le 1$, akkor a „kedvező rész" egy „a szélességű sáv" a négyzet „szélén" (1.2.9. ábra), aminek a területe $4-(2-2a)^2$. Ezért $P(\xi < a) = (4-(2-2a)^2)/4 = 1-(1-a)^2 = 2a-a^2$, $0 < a \le 1$.

Gyakorlatok

(1) Legyen $\mathcal{F}$ σ-algebra. Bizonyítsuk be, hogy $\mathcal{F}$-ből nem vezet ki a megszámlálható metszet képzés!

1.2.1. ábra. Az a szélességű sáv az 1.2.9. példában



(2) Határozzuk meg a Poisson-eloszlás maximális tagját! (Útmutató: vizsgáljuk két szomszédos tag nagyságviszonyát.)
(3) Bizonyítsuk be, hogy $p_k = p^{k-1}(1-p)$, $k = 1, 2, \dots$ diszkrét eloszlást alkot, ahol $0 < p < 1$ (ún. geometriai eloszlás). (A $0^0 = 1$ konvenciót használjuk.)
(4) Helyezzünk el golyókat véletlenszerűen n dobozban. A kísérletet addig folytassuk, amíg nem kerül golyó az első dobozba. Mennyi a valószínűsége, hogy a kísérlet r számú lépésben véget ér?
(5) Bizonyítsuk be, hogy a 1.2.4 Tételben szereplő (1.2.5) feltétel helyettesíthető a következő feltételek bármelyikével.

$$\lim_{n\to\infty} P(B_n) = P(B), \tag{1.2.9}$$

ha $B_i \in \mathcal{F}$, $i = 1, 2, \dots, B_1 \supseteq B_2 \supseteq \cdots, \cap_{i=1}^{\infty} B_i = B$.

$$\lim_{n\to\infty} P(B_n) = P(B), \tag{1.2.10}$$

ha $B_i \in \mathcal{F}$, $i = 1, 2, \dots, B_1 \subseteq B_2 \subseteq \cdots, \cup_{i=1}^{\infty} B_i = B$. A (1.2.9) és (1.2.10) feltételeket is a valószínűség folytonosságának nevezik.

Ellenőrző kérdések

(1) Mit nevezünk σ-algebrának?
(2) Mi a Kolmogorov-féle valószínűségi mező?
(3) Mi a valószínűség geometriai kiszámítási módja?

1.3. A feltételes valószínűség

1.3.1. A feltételes valószínűség fogalma Tegyük fel, hogy az A esemény valószínűségére vagyunk kíváncsiak, de ismeretes számunkra, hogy a B esemény bekövetkezett. A valószínűség bevezetésekor használt relatív gyakoriságos megközelítést alkalmazzuk most is. Ismételjük meg a kísérletünket n-szer, de csak azokat a végrehajtásokat vegyük figyelembe, amelyekben B bekövetkezett. Ezen részsorozatban az A relatív gyakorisága

$$\frac{k_{AB}}{k_B} = \left(\frac{k_{AB}}{n}\right) : \left(\frac{k_B}{n}\right).$$

Ez utóbbi pedig $P(AB)/P(B)$ körül ingadozik. Így ezt érdemes elfogadni a feltételes valószínűségnek.

1.3.1. Definition. Legyen A és B esemény, $P(B) > 0$. Ekkor az A esemény B-re vonatkozó *feltételes valószínűségén* a

$$\boxed{P(A|B) = P(AB)/P(B)}$$

mennyiséget értjük.

1.3.2. Example. (a) A feltételes valószínűség végeredményben az egész eseménytér egy részére leszűkített valószínűség. Ez leginkább a részsokaságból történő mintavétellel szemléltethető. Tekintsünk egy 10000 fős populációt, ebben 5050 nő és 4950 férfi van. A nők között 100, a férfiak között 900 180 cm-nél magasabb található. Ha véletlenszerűen kiválasztunk egy embert a populációból, akkor annak a valószínűsége, hogy az 180 cm-nél magasabb (a klasszikus képlet alapján) $1000/10000 = 0,1$. Ha a nők közül választunk ki egyet, akkor ugyanez a valószínűség $100/5050 = 0,0198$. A feltételes valószínűség $P(A|B) = P(AB)/P(B)$ képletével számolva:

$$\frac{100}{10000} : \frac{5050}{10000} = 100/5050,$$

tehát a két felfogás azonos eredményre vezet. Klasszikus valószínűségi mező esetén a kétféle számolás mindig csak az „összes esetek számával" történő bővítésben (egyszerűsítésben) különbözik egymástól.

(b) Egy szelvénnyel lottózunk. A lottóhúzást figyeljük; az első négy kihúzott szám szerepel a szelvényünkön. Most következik az ötödik húzás. Mennyi a valószínűsége, hogy ötösünk lesz?

Jelölje A azt az eseményt, hogy ötösünk lesz, B azt, hogy az első 4 kihúzott számot eltaláltuk.

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{1}{\binom{90}{5}} : \frac{\binom{5}{4}}{\binom{90}{4}} = \frac{1}{86}.$$

Ugyanerre az eredményre jutnánk akkor is, ha úgy okoskodnánk, hogy mivel négyet már eltaláltuk, a maradék 86-ból kell egyet eltalálnunk. Ez utóbbi esélye $1/86$.

Általában is igaz, hogy a feltételes valószínűséget úgy is ki lehet számítani, hogy az eseményteret „leszűkítjük" a feltételben szereplő B eseményre. Ennek hátterét világítja meg a következő állítás.

1.3.3. Theorem. *Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mező, B egy rögzített esemény, $P(B) > 0$. Jelölje $\mathcal{F}_B$ az AB alakú halmazokat, ahol $A \in \mathcal{F}$. Legyen $P_B(C) = P(C|B)$ minden $C \in \mathcal{F}_B$-re. Ekkor $(B, \mathcal{F}_B, P_B)$ valószínűségi mező.*

Az is nyilvánvaló, hogy $\mathcal{F}_B$ éppen azon eseményekből áll, melyek B részei. P_B pedig az eredeti való színűség ezekre való megszorításával majd „normálásával" adódik. Konkrét feladatok megoldásában éppen a P_B valószínűség megtalálása a probléma.

1.3.4. EXAMPLE. Egy osztályban n diák van, közülük r-et kisorsolunk, akik dolgozatot írnak. Mennyi a valószínűsége, hogy a legrosszabb tanuló dolgozatot ír, feltéve, hogy a legjobb ír?

Jelölje A azt az eseményt, hogy a legrosszabb ír, B azt, hogy a legjobb ír. Ekkor

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\binom{n-2}{r-2}}{\binom{n}{r}} : \frac{\binom{n-1}{r-1}}{\binom{n}{r}}.$$

Közvetlen okoskodással is megoldhatjuk a feladatot. Szorítsuk meg a sorsolást arra, hogy a legjobbat már eleve kisorsoltuk. Így $(n-1)$ diákból kell kiválasztani $(r-1)$-et, és kérdés annak a valószínűsége, hogy a legrosszabb tanuló benne lesz a kiválasztottak között. Így a klasszikus képlettel az

$$\binom{n-2}{r-2} : \binom{n-1}{r-1}$$

eredményre jutunk, ami megegyezik az előzővel.

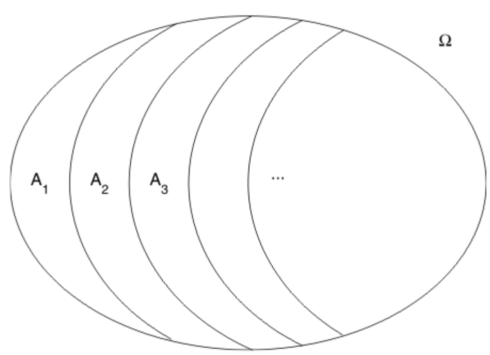
1.3.2. A teljes valószínűség tétele

A valószínűségi mező gyakran felbontható olyan részekre, amelyeket külön-külön már jól tudunk kezelni.

1.3.5. DEFINITION. Események egy $A_1, A_2, \dots$ sorozatát *teljes eseményrendszernek* nevezzük, ha egymást páronként kizárják és összegük az egész eseménytér.

Tehát egy teljes eseményrendszer nem más, mint Ω egy diszjunkt eseményekre történő felbontása (1.3.5. ábra). Egy teljes eseményrendszerre nyilván $P(A_1) + P(A_2) + \dots = 1$.

1.3.1. ábra. Teljes eseményrendszer



Tágabb értelemben teljes eseményrendszernek szoktuk nevezni események olyan sorozatát is, amelyek egymást páronként kizárják és valószínűségeik összege 1.

1.3.6. THEOREM. *Legyen $B_1, B_2, \dots$ egy pozitív valószínűségű eseményekből álló teljes eseményrendszer. Ekkor bármely A eseményre*

$$\boxed{P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \dots}.$$

Bizonyítás. Az $A = AB_1 + AB_2 + \dots$ diszjunkt részekre bontás fennáll. Így a $P(AB_i) = P(A|B_i)P(B_i)$ összefüggés felhasználásával a valószínűség σ-additivitásából adódik az állítás. $\square$

A teljes valószínűség tételét úgy alkalmazzuk, hogy a valószínűségi mezőt részekre bontjuk úgy, hogy az egyes részeken belül a (feltételes) valószínűség egyszerűen kiszámítható, és ezen valószínűségeket a részek valószínűségeivel súlyozva összeadjuk. Az eljárás pont az, amit különböző koncentrációjú keverékek összeöntésével kapott keverék koncentrációjának kiszámítására használunk. Egy tipikus példa a következő

1.3.7. Example. Három gép gyárt csavarokat. Az első gép 1%, a második 2%, a harmadik 3% selejtet produkál. Az első gép az össztermék 50%-át, a második 30%-át, a harmadik 20%-át állítja elő. Az össztermékből véletlenszerűen választva egyet, mennyi a valószínűsége, hogy selejtes.

A teljes valószínűség tétele alapján a megoldás

$$P(\text{selejt}) = 0,01 \cdot 0,5 + 0,02 \cdot 0,3 + 0,03 \cdot 0,2.$$

1.3.8. Example. Dobjunk fel egy kockát, és a dobás eredményétől függően másmás „hamis” érmét. Nevezetesen, ha a kockával i-t dobunk, akkor olyan érmét dobunk fel, amelyen a fej dobás valószínűsége $1/i$. Mennyi a valószínűsége, hogy az érmével fejet dobunk?

$$P(F) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}.$$

Megjegyezzük, hogy a teljes valószínűség tétele különösen alkalmas „kétfázisú” kísérletek leírására, miként ezt az 1.3.8. Példa is mutatja.

1.3.3. Bayes tétele Ha egy „kétfázisú” kísérletben a második fázis eredményeiből akarunk visszakövetkeztetni az első fázis eredményére, akkor a Bayes-tétel hasznos segédeszköz.

Legyen A és B két, pozitív valószínűségű esemény. A feltételes valószínűség definíciójából

$$\boxed{P(B|A) = P(A|B)P(B)/P(A)}$$

Ez a *Bayes-formula.*

1.3.9. Theorem. *Legyen A egy esemény, $B_1, B_2, \dots$ teljes eseményrendszer, $P(A) > 0, P(B_i) > 0, i = 1, 2 \dots$. Ekkor*

$$\boxed{P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum\limits_{j=1}^{\infty} P(A|B_j)P(B_j)}}$$

minden j-re.

Bizonyítás. Alkalmazzuk a Bayes-formulát, majd $P(A)$ kifejtésére a teljes valószínűség tételét. $\square$

1.3.10. Example. Az 1.3.7. Példában leírt kísérletet tekintjük. Ha egy találomra kiválasztott csavar selejtes, mennyi a valószínűsége, hogy az első gép gyártotta?

$$P(1.|\text{selejt}) = \frac{0,01 \cdot 0,5}{0,01 \cdot 0,5 + 0,02 \cdot 0,3 + 0,03 \cdot 0,2}.$$

Gyakorlatok

(1) Tegyük fel, hogy N db termék között M db selejt van. Megvizsgálunk n db terméket. Feltéve, hogy az első három vizsgált termék hibátlan, mennyi a valószínűsége, hogy a n megvizsgált termékből m selejt lesz? Oldjuk meg a feladatot a feltételes valószínűség definíciója alapján és „közvetlen” számolással is!

(2) Bizonyítsuk be, hogy

$$P(A_1A_2\dots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\dots A_{n-1}),$$

ahol $A_1,\dots,A_n$ olyan események, melyekre $P(A_1A_2\dots A_{n-1}) > 0$.

(3) Legyen $P(A) = 0.9$, $P(B) = 0.5$. Lássuk be, hogy $P(A \mid B) \geq 0.8$.

(4) Pistike anyukája elrejt egy csokit 3 doboz egyikébe. Pistike kiválaszt egy dobozt. Ezután az anyuka a maradék két doboz közül felnyit egyet, melyről tudja, hogy nincs benne csoki. Ezután megkérdezi Pistikét, hogy akarja-e az általa kiválasztott doboz helyett inkább a másikat (természetesen a nem felnyitottat). Érdemes-e Pistikének váltani?

(5) Ulti. 32 lapos kártyát 3 játékos között véletlenszerűen elosztunk, az első játékos 12 lapot, a másik kettő 10-10 lapot kap.
   (a) Mennyi a valószínűsége, hogy a piros tízes és a piros hetes egy kézben lesz?
   (b) Feltéve, hogy az első játékos kezében van az összes piros, kivéve a 10-est és a 7-est, valamint a zöld ász, király, felső és 10-es, mennyi a valószínűsége, hogy a piros 10-es és 7-es egy kézben van?

(6) Egy urnában z db zöld és s db sárga golyó van. Véletlenszerűen húzunk egyet a golyók közül. A golyót visszatesszük, és vele együtt u számú ugyanolyan és e számú ellentétes színű golyót teszünk az urnába. Mennyi a valószínűsége, hogy 4 húzásra a „zöld, zöld, zöld, sárga” sorozat adódjék?

(7) Az előző feldatot tekintsük $e = 0$ esetén. Mennyi a valószínűsége, hogy n húzásból valamely rögzített k helyen zöld, a maradék $n - k$ helyen sárga golyó adódik.

(8) Egy 1000 fős városkában a választáson két párt indul. Kezdetben mindkét pártnak 500-500 szimpatizánsa van. Minden nap interjút készítek egy véletlenszerűen kiválasztott emberrel a városból. Minden meginterjúvolt 100 embert átcsábít a saját táborába. Mennyi a valószínűsége, hogy 5 nap múltán már csak az egyik pártnak lesznek hívei?

(9) A diffúzió Ehrenfest-féle modellje. Két tartályban összesen k molekula helyezkedik el. Minden lépésben véletlenszerűen választunk egy molekulát, és azt áttesszük a másik tartályba. Legyen kiindulásul az első tartályban m molekula, a másodikban $k - m$. Milyen lesz a tartályok között a molekulák eloszlása 1, 2, illetve 3 lépés múlva?

(10) Dobjunk fel egy kockát. Azután dobjunk fel annyi kockát, amennyi az első dobás eredménye.
   (a) Mennyi a valószínűsége, hogy a másodszorra feldobott kockák valamelyikén 6-ost kapunk?

(b) Mennyi a valószínűsége, hogy az első dobás 6-os volt feltéve, hogy a második dobás során nem kaptunk 6-ost?

Ellenőrző kérdések

(1) Mit nevezünk feltételes valószínűségnek?
(2) Mit állít a teljes valószínűség tétele?
(3) Mit állít a Bayes-tétel?

1.4. Események függetlensége

1.4.1. Két esemény függetlensége A köznapi életben akkor mondjuk, hogy két jelenség független egymástól, ha egyik sem befolyásol(hat)ja a másikat. Események nyelvén ez azt jelenti, hogy az egyik esemény bekövetkezése nem befolyásolja (nem is rontja, nem is javítja) a másik bekövetkezési esélyét. Mivel a B esemény ($P(B) > 0!$) bekövetkezésekor az A bekövetkezésének esélyét a $P(A \mid B)$ feltételes valószínűség jellemzi, így azt mondhatjuk, hogy az A akkor független B-től, ha

$$P(A|B) = P(A). \tag{1.4.1}$$

Ennek a definíciónak az a hátránya, hogy nem szimmetrikus A-ban és B-ben, valamint csak $P(B) > 0$ esetén értelmes. A definíció finomítása előtt azonban tekintsünk példákat.

1.4.1. Example. Jelentse A azt az eseményt, hogy egy szelvénnyel játszva, ötösünk lesz a lottón. Ekkor $P(A) = 1/\binom{90}{5}$. Ha a lottóhúzást figyeljük és B jelenti azt, hogy már négy számunkat kihúzták, és még egy szám húzása hátravan, akkor $P(A|B) = 1/86$. Az ötös találat esélye nyilván nem független attól, hogy már legalább négyesünk van. A fenti számok is mutatják, hogy B bekövetkezte jelentősen „megnövelte A esélyét".

Tekintsünk egy másik esetet.

1.4.2. Example. Két kockát dobunk fel. Jelentse B azt, hogy az elsőn, A pedig azt, hogy a másodikon 6-ost dobunk. Ekkor

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{1}{36} : \frac{1}{6} = \frac{1}{6} = P(A).$$

A tapasztalat is azt mutatja, hogy az egyik kockán kijövő szám nem befolyásolja azt, hogy a másikon mi adódik.

A fenti példák azt sugallják, hogy az (1.4.1) képlet jól ragadja meg a függetlenség szemléletes fogalmát. Szorozzuk most meg (1.4.1) mindkét oldalát $P(B)$-vel. Ekkor

$$P(AB) = P(A)P(B) \tag{1.4.2}$$

adódik. Ha $P(A) \neq 0$, akkor (1.4.2)-t $P(A)$-val osztva

$$P(B|A) = P(B) \tag{1.4.3}$$

adódik.

Nyilván P(B)>0 esetén (1.4.2) ekvivalens (1.4.1)-gyel, $P(A) > 0$ esetén (1.4.2) ekvivalens (1.4.3)-mal, míg ha vagy $P(B) = 0$, vagy $P(A) = 0$, akkor (1.4.2) a $0 = 0$ triviális egyenlőségbe megy át, azaz mindig tejesül, semmilyen plusz feltételt nem jelent A-ra és B-re. Így (1.4.1), azaz A független B-től, vagy (1.4.3), azaz B független A-tól, definíciók helyett (1.4.2)-t érdemes elfogadni.

1.4.3. Definition. Azt mondjuk, hogy A és B *független események*, ha

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

1.4.4. Exercise. a) Bizonyítsuk be, hogy ha A és B független, akkor $\overline{A}$ és B, A és $\overline{B}$, valamint $\overline{A}$ és $\overline{B}$ is független eseménypárok.

b) Bizonyítsuk be, hogy A akkor és csak akkor független bármely eseménytől, ha $P(A) = 0$ vagy $P(B) = 1$.

A függetlenség (1.4.2) definiáló egyenletéhez a feltételes valószínűség közbeiktatása nélkül, közvetlen heurisztikus úton is eljuthatunk. Legyen pl. $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.6$. A és B függetlenségén azt akarjuk érteni, hogy B bekövetkezése nem befolyásolja A bekövetkezésének az esélyét. Az A esemény sok kísérletből az esetek kb. 30%-ban következik be. Ugyancsak 30%-ban kell tehát akkor is bekövetkeznie A-nak, ha B bekövetkezik (és persze akkor is, ha B nem következik be, de ezt már ki sem kell használni). Viszont az összes esetekből B kb. 60%-ban következik be és ezen belül kell A bekövetkezési esélyének 30%-nak lennie. Így B és A együttes bekövetkezési esélye $0.6 \cdot 0.3(\cdot 100\%)$. Azaz $P(AB) = 0.6 \cdot 0.3 = P(A)P(B)$ kell legyen.

1.4.2. Több esemény függetlensége

1.4.5. Definition. Az $A_1, A_2, \dots$ eseményeket *páronként függetlennek* nevezzük, ha közülük bármely két esemény független:

$$P(A_iA_j) = P(A_i)P(A_j), \quad i \neq j.$$

A köznapi szóhasználatban több jelenség (teljes) függetlensége azonban azt jelenti, hogy a jelenségek bármely csoportja együttesen sem képes befolyásolni egyetlen másikat sem. Három eseményre megfogalmazva ez a következő. Legyenek A, B, C események. Ezek páronkénti függetlensége azt jelenti, hogy

$$P(AB) = P(A)P(B),\ P(AC) = P(A)P(C),\ P(BC) = P(B)P(C)\ . \tag{1.4.4}$$

Az, hogy A és B együttesen sem befolyásolják C-t, azt jelenti, hogy AB és C független, ez pedig $P(ABC) = P(AB)P(C)$, ami (1.4.4) figyelembe vételével

$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C). \tag{1.4.5}$$

Látható, hogy AC és B valamint BC és A függetlensége is ehhez a relációhoz vezet.

1.4.6. Exercise. a) Bizonyítsuk be, hogy (1.4.5)-ból nem következik (1.4.4).

b) Bizonyítsuk be, hogy (1.4.4)-ből nem következik (1.4.5).

A fentiek azt mutatják, hogy több esemény (teljes) függetlenségéhez a felírandó relációkat nem spórolhatjuk meg.

1.4.7. Definition. Azt mondjuk, hogy az $A_1, A_2, \dots, A_n$ események (teljesen) *függetlenek*, ha bármely $k = 1, 2, \dots, n$-re és az $1, 2, \dots, n$ számok bármely $i_1, \dots, i_k$ kombinációjára

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\dots A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k}).$$

Tehát n esemény függetlensége azt jelenti, hogy közülük akárhány különböző eseményt kiválasztva azok szorzatának a valószínűsége egyenlő a valószínűségük szorzatával. Azt sem nehéz belátni, hogy ez a definíció - eredeti célunkkal összhangban - pontosan azt jelenti, hogy az $A_1, \ldots, A_n$ események közül tetszőlegesen kiválasztva két diszjunkt csoportot, az egyik csoport együttesen sem befolyásolhatja a másik csoport esélyét.

1.4.8. DEFINITION. Események egy tetszőleges $\{A_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$, rendszerét *függetlennek* nevezzük, ha annak bármely $A_{\lambda_1}, \ldots, A_{\lambda_n}$ véges részrendszere független.

Legyen $\mathcal{G}_1$ és $\mathcal{G}_2$ két eseményrendszer. Ezeket *függetlennek* nevezzük, ha bármely $A_1 \in \mathcal{G}_1$ és $A_2 \in \mathcal{G}_2$ események függetlenek egymástól.

Legyen $\{\mathcal{G}_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ eseményrendszerek egy tetszőleges halmaza. Ezeket az eseményrendszereket függetlennek nevezzük, ha bármely $\{A_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ eseményrendszer, ahol $A_\lambda \in \mathcal{G}_\lambda, \lambda \in \Lambda$, független.

1.4.9. THEOREM. *(Borel-Cantelli-lemma) a) Ha* $\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) < \infty$*, akkor 1 a valószínűsége annak, hogy az* A_i *események közül csak véges sok következik be.*

b) Legyenek az $A_1, A_2, \ldots$ *események függetlenek. Ha* $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$*, akkor 1 annak a valószínűsége, hogy az* A_n *események közül végtelen sok bekövetkezzék.*

1.4.3. A valószínűség geometriai kiszámítási módja és a függetlenség

1.4.10. EXAMPLE. Ketten megbeszélik, hogy du. 1 és 3 óra között adott helyen találkoznak, és fél órát várnak a másikra. Mennyi a valószínűsége, hogy a találkozó realizálódik? Jelölje ξ_1, ill. ξ_2 a két érkezés időpontját. A feladat szövegében implicit módon benne van, hogy a két személy egymástól függetlenül érkezik, és érkezésük 1 és 3 között egyenletes. Ezért mindkét érkezést külön-külön a geometriai kiszámítási mód írja le:

$$P(\xi_i \in [a, b)) = (b - a)/2 \quad (1 \le a \le b \le 3).$$

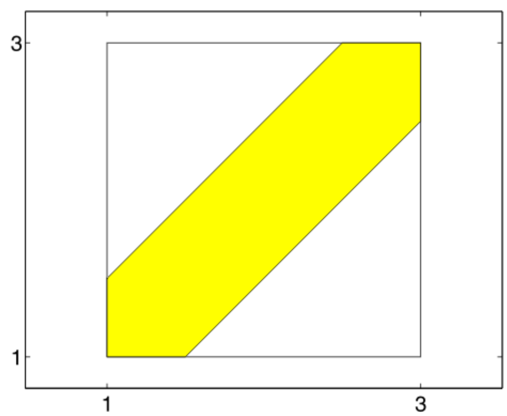
A függetlenség miatt

$$\begin{gathered} P((\xi_1, \xi_2) \in [a_1, b_1) \times [a_2, b_2)) = \\ = P(\xi_1 \in [a_1, b_1))P(\xi_2 \in [a_2, b_2)) = \\ = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)/4 = \lambda([a_1, b_1) \times [a_2, b_2))/\lambda([1, 3) \times [1, 3)). \end{gathered}$$

Ez pedig éppen azt jelenti, hogy (ξ_1, ξ_2) együttes viselkedésére is a geometriai kiszámítási mód alkalmazható, csak már a sík alkalmas tartományát kell alapul venni. (Valójában ezt csak téglalapokra igazoltuk, de a téglalapok valószínűsége meghatározza a Borel-halmazok valószínűségét.) Így példánkban az „összes terület” 4, a „kedvező terület” 7/4 (ábrázoljuk a kedvező érkezések tartományát!). Így a keresett valószínűség 7/16.

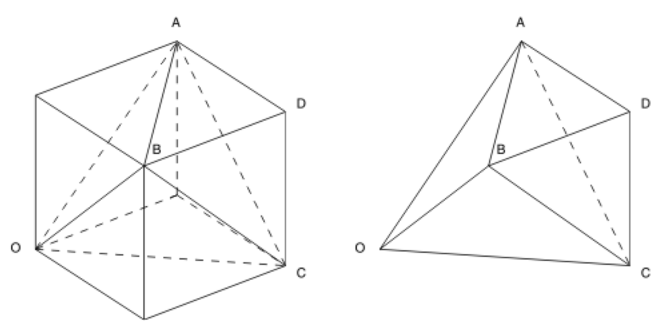
Az előző példa általánosítása kedvéért idézzük emlékezetünkbe, hogy az n-dimenziós Lebesgue-mérték bevezetésekor egy n-dimenziós tégla mértékét az oldalai mértékének szorzataként adtuk meg. Ez azzal analóg, ahogyan az események függetlenségét definiáltuk. Ennek alapján belátható, hogy ha a $K_1, \ldots, K_n$ kísérleteket a valószínűség geometriai kiszámítási módjával írhatjuk le a $G_1, \ldots, G_n \subset \mathbb{R}$ tartományokon, akkor a kísérletek független végrehajtását szintén a valószínűség geometriai kiszámítási módjával írhatjuk le, de már $G_1 \times \cdots \times G_n \subset \mathbb{R}^n$-en.

1.4.1. ábra. A kedvező terület az 1.4.10. példában



1.4.11. Example. Vegyünk három, egységnyi hosszúságú szakaszt. Mindegyikből vágjunk le találomra egy darabot. Mennyi a valószínűsége, hogy a megmaradó három szakaszból háromszög szerkeszthető?

1.4.2. ábra. A kedvező térfogat az 1.4.11. példában



A kísérlet az egységkocka segítségével írható le. Az „összes térfogat” 1 (az egész egységkocka térfogata). A feladat szempontjából kedvező pontok az egységkocka

$$x < y + z, \quad y < x + z, \quad z < x + y$$

feltételnek eleget tevő pontjai. Ábrát készítve azonnal láthatjuk, hogy az egységkockából három 1/6 térfogatú gúlát kell levágni. Így a „kedvező térfogat” 1/2, azaz a keresett valószínűség 1/2.

Gyakorlatok

(1) Dobjunk fel egy kockát kétszer egymás után! Milyen függetlenségi relációk állnak fenn az alábbi A, B, C események között? $A =${Az első dobás 1,2 vagy 3}, $B =${Az első dobás 3,4 vagy 5}, $C =${a két dobás összege 9}. Mi a helyzet az alábbi eseményeknél: $A =${Az első dobás 4-nél kisebb}, $B =${A második dobás 3-nál nagyobb}, $C =${A két dobás összege 7}?

(2) Legyen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ egy független eseményrendszer. Bizonyítsuk be, hogy az A_i-k közül tetszőleges sokat $\overline{A}_i$-re cserélve is független eseményrendszert kapunk!
(3) Három játékos X, Y és Z vesz részt egy sakkversenyen. Mindhárman egyforma erősek, azaz egy-egy partiban 1/2-1/2 eséllyel nyernek, illetve veszítenek. A versenyt X és Y kezdi. Minden forduló után a vesztes átadja a helyét az addig pihenő játékosnak. A versenyt az nyeri meg, aki két egymás utáni partiban győz. Mennyi a valószínűsége, hogy X, Y, illetve Z nyeri meg a versenyt? Írjuk le az eseményteret!
(4) Tekintsünk egy kísérletet és benne egy pozitív valószínűségű A eseményt. Ismételjük meg a kísérletet független módon végtelen sokszor. Bizonyítsuk be, hogy 0 annak a valószínűsége, hogy A csak véges sokszor következik be!
(5) Adjunk példát két, egymástól független, de egymást kizáró eseményre!
(6) Az egér két lyukon tud bemenni a konyhába, onnan szintén két lyukon keresztül a kamrába. Mind a 4 lyuknál (egymástól függetlenül) p valószínűséggel ül egy macska. Feltéve, hogy az egér nem jutott be a kamrába, mennyi a valószínűsége, hogy bejutott a konyhába?
(7) Az autók 10%-a fékhibás. Egy műszeres vizsgálat 90%-os eséllyel ad helyes eredményt. Minden autót kétszer vizsgálnak meg (egymástól függetlenül). Mennyi a valószínűsége, hogy egy autó fékhibás, feltéve, hogy
   (a) mindkét vizsgálat hibásnak mutatta,
   (b) pontosan az egyik vizsgálat mutatta hibásnak?
(8) Legyen n egy rögzített pozitív egész. Jelölje $\varphi(n)$ az n-hez relatív prím, n-nél kisebb pozitív egészek számát. Jelölje A_p azt az eseményt, hogy az $1, \ldots, n$ számok közül találomra kiválasztott szám p-vel osztható. Lássuk be a következőket!
   (a) $P(A_p) = 1/p$, ha $p|n$ (azaz p osztója n-nek).
   (b) Ha $p_1, \ldots, p_r$ az n különböző törzstényezői, akkor $A_{p_1}, \ldots, A_{p_r}$ független események.
   (c) $\varphi(n)/n = P(\prod_{p|n} \overline{A}_p)$.
   (d) $\varphi(n) = n \prod_{p|n}(1 - 1/p)$. (Itt és az előző képletben a produktum n összes különböző törzstényezőjére terjed ki.)
(9) Találomra választunk három pontot a $(0, 1)$ intervallumban, legyenek ezek x, y, z. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az x, y és z élekkel bíró téglatest testátlója kisebb 1-nél?
(10) Egy egységnyi oldalú négyzet két átellenes oldalán találomra választunk egy-egy pontot. Mennyi a valószínűsége, hogy a két pont távolsága kisebb, mint x?

Ellenőrző kérdések

(1) Mikor mondunk két eseményt függetlennek?
(2) Mi a különbség a páronkénti függetlenség és a teljes függetlenség között?
(3) Mi a valószínűség geometriai kiszámítási módja az egyenesen, a síkon, illetve a térben?

2. FEJEZET

Diszkrét valószínűségi változók

2.1. Véletlentől függő mennyiségek

2.1.1. Mennyit nyerünk? A valószínűség fogalma támaszt nyújt ahhoz, hogy elemezzük a nyerési esélyünket bizonyos szerencsejátékok esetén. De az sem mindegy, hogy mennyit nyerünk (vagy pláne nem, hogy mennyit vesztünk)!

2.1.1. Example. Dobjunk fel két dobókockát, egy fehéret és egy feketét! Annyi forintot nyerünk, amennyi a fehéren és a feketén adódó számok különbsége. (Pl. a fehéren 2-est, a feketén 5-öst dobva $2-5=-3$ a nyereség, azaz 3 forintot vesztünk.) Szabályos kocka esetén - szimmetria okokból - az adódik, hogy nyerésre és vesztésre is egyenlő az esély. De az is érdekelhet bennünket, hogy milyen eséllyel vesztünk, mondjuk, 5 forintot. Jelölje ξ a nyereményt. Ekkor ξ értéke $5, 4, \dots, -5$ lehet. A $P(\xi = k)$, $k = 5, 4, \dots, -5$ valószínűségek a nyereményünk „eloszlását” adják. Az is látható, hogy $\xi = \xi_1 - \xi_2$, ahol ξ_1 a fehér, ξ_2 pedig a fekete kockán adódó számot jelöli.

2.1.2. Definition. Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mező, $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ (az elemi eseményektől függő valós értékű) függvény. ξ-t diszkrét *valószínűségi változónak* nevezzük, ha értékkészlete megszámlálható és

$$\{\omega : \xi(\omega) = x\} \in \mathcal{F}, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2.1.1}$$

(2.1.1) azt fejezi ki, hogy azon elemi események halmaza, amelyben ξ valamely konstans értéket vesz fel, legyen esemény. Ez szükséges ahhoz, hogy beszélhessünk a $\{\xi = x\}$ valószínűségéről (hisz csak eseményeknek értelmeztük a valószínűségét, és elemi események tetszőlges halmaza nem feltétlenül esemény).

2.1.3. Exercise. Igazoljuk, hogy ha $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ értékkészlete $x_1, x_2, \dots$, úgy ξ akkor és csak akkor diszkrét valószínűségi változó, ha

$$\{\omega : \xi(\omega) = x_i\} \in \mathcal{F}, \quad i = 1, 2, \dots!$$

2.1.2. Valószínűségi változók eloszlása A továbbiakban, a rövidség kedvéért, a

$$\{\xi = x\} = \{\omega : \xi(\omega) = x\}, \quad \{\xi \in B\} = \{\omega : \xi(\omega) \in B\}$$

jelöléseket fogjuk használni.

Legyen ξ olyan diszkrét valószínűségi változó, melynek értékkészlete $x_1, x_2, \dots$. Jelölje A_i a $\{\xi = x_i\}$ eseményt, $i = 1, 2, \dots$. Ekkor az A_i, $i = 1, 2, \dots$, halmazok teljes eseményrendszert alkotnak. Ebből következik, hogy a

$$p_i = P(A_i) = P\{\xi = x_i\}, \quad i = 1, 2, \dots$$

számok diszkrét eloszlást alkotnak (azaz $p_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots$, és $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$).

2.1.4. Definition. A $p_1, p_2, \ldots$ számokat ξ *eloszlásának* nevezzük.

2.1.5. Example. Jelölje ξ a dobókockán adódó számot. Ekkor ξ eloszlása

$$p_1 = P(\xi = 1) = 1/6, \ \ldots, \ p_6 = P(\xi = 6) = 1/6.$$

A fenti $A_i = \{\xi = x_i\}$, $i = 1, 2, \ldots$, eseményekből álló teljes eseményrendszert a ξ által generált teljes eseményrendszernek nevezzük, és $\mathcal{E}(\xi)$-vel jelöljük. Az $\mathcal{E}(\xi)$-t tartalmazó legszűkebb σ-algebrát a ξ által generált σ-algebrának nevezzük, és $\sigma(\xi)$-vel jelöljük. $\sigma(\xi)$ elemei nyilván az $\cup_k A_{i_k}$ alakban felírható események (azaz azon események, melyek az A_i-k közül tetszőlegesen kiválasztottak uniójaként állnak elő).

Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tetszőleges valós függvény. Ekkor az $\eta = f(\xi)$ összetett függvény is diszkrét valószínűségi változó, mivel

$$\{\eta = y\} = \bigcup_{\{i: f(x_i) = y\}} \{\xi = x_i\}, \quad \forall y \in \mathbb{R},$$

tehát (2.1.1) teljesül. Másrészt η értékkészlete $f(x_1), f(x_2), \ldots$ (viszont ebben a számsorozatban ismétlődések is felléphetnek, ha f nem egy-egyértelmű). Például $\xi^2, |\xi|, \cos\xi, \ldots$ is diszkrét valószínűségi változók (ha ξ az). Ha ξ nemnegatív (azaz $x_i \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots$), akkor $\sqrt{\xi}$ is diszkrét valószínűségi változó.

A valószínűségi változók közötti műveleteket „pontonként” értelmezzük. Például

$$(\xi + \eta)(\omega) = \xi(\omega) + \eta(\omega), \quad \omega \in \Omega.$$

Könnyű belátni, hogy $\xi + \eta$, $\xi - \eta$, $\xi \cdot \eta$, ξ/η (ha $\eta \neq 0$) diszkrét valószínűségi változók, amennyiben ξ és η is azok.

Általában, ha $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kétváltozós függvény, valamint ξ és η diszkrét valószínűségi változók, akkor az

$$f(\xi, \eta)(\omega) = f(\xi(\omega), \eta(\omega))$$

által definiált $f(\xi, \eta) : \Omega \to \mathbb{R}$ függvény is diszkrét valószínűségi változó.

2.1.6. Example. (1) Egy urnában M piros és $N - M$ fehér golyó van ($M < N$). Visszatevés nélkül húzzunk ki n golyót ($n < N$)! Jelölje ξ a kihúzott piros golyók számát. Ekkor ξ *hipergeometrikus eloszlású*:

$$P(\xi = k) = \binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k} \Big/ \binom{N}{n}, k = \max\{n - N + M, 0\}, \ldots, \min\{n, M\}.$$

(2) Ha az előző példában visszatevéses húzást tekintünk, akkor binomiális eloszlású valószínűségi változóhoz jutunk:

$$P(\xi = k) = \binom{n}{k}\left(\frac{M}{N}\right)^k \left(1 - \frac{M}{N}\right)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Általánosabban, ha egy kísérletet n-szer függetlenül megismételünk, és ξ jelenti a p valószínűségű A esemény bekövetkezéseinek a számát, akkor

$$P(\xi = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n. \tag{2.1.2}$$

A (2.1.2)-t teljesítő ξ-t n és p paraméterű *binomiális eloszlásúnak* nevezzük. Ha $n = 1$, akkor ξ-t *Bernoulli-eloszlásúnak* nevezzük.

(3) Azt mondjuk, hogy ξ λ paraméterű *Poisson-eloszlású*, ha

$$P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

ahol $\lambda > 0$ konstans.

(4) A ξ valószínűségi változót r-edrendű, p paraméterű *negatív binomiális eloszlásúnak* nevezzük, ha

$$P(\xi = r + k) = \binom{k + r - 1}{r - 1} p^r (1 - p)^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

ahol $0 < p \leq 1$. $r = 1$ esetén a *geometriai eloszláshoz* jutunk.

Tekintsük a $p_i = P(\xi = x_i)$, $i = 1, 2, \ldots$, eloszlású valószínűségi változót. Legyen $D = \{x_1, x_2, \ldots\}$ és $h : D \to \mathbb{R}$ a $h(x_i) = p_i$ szerint definiálva. A h függvény lokális maximumhelyét az eloszlás *móduszának* hívjuk. Amennyiben csak egy módusz van, akkor az eloszlást *unimodálisnak* (egycsúcsosnak) nevezzük. Ekkor a módusz éppen a legnagyobb p_i-hez tartozó x_i.

2.1.3. Együttes eloszlások Az alábbi (nyilvánvaló) példa két valószínűségi változó egymáshoz való viszonyának két szélsőséges esetét mutatja be.

2.1.7. EXAMPLE. Dobjunk fel két kockát! Jelölje ξ és η az első, illetve a második kockán kapott számot. A klasszikus képlettel számolva:

$$P(\xi = i, \eta = j) = \frac{1}{36} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = P(\xi = i) \cdot P(\eta = j), \quad \forall i, j.$$

Azaz a $\{\xi = i\}$ és $\{\eta = j\}$ események függetlenek. Másrészt, ha ξ is és η is az első kockán dobott számot jelenti, akkor

$$P(\xi = i, \eta = j) = \begin{cases} 1/6, & \text{ha } i = j, \\ 0, & \text{ha } i \neq j. \end{cases}$$

Ebben az esetben $\{\xi = i\}$ nemhogy független $\{\eta = j\}$-től, hanem meghatározza azt.

A példa arra is rámutat, hogy ξ és η külön-külön vett eloszlása nem határozza meg ξ és η együttes eloszlását.

2.1.8. DEFINITION. Legyen a ξ és az η diszkrét valószínűségi változók értékkészlete $x_1, x_2, \ldots$, illetve $y_1, y_2, \ldots$. Ekkor ξ és η *együttes eloszlásán* a

$$p_{ij} = P(\xi = x_i, \eta = y_j), \quad i, j = 1, 2, \ldots \tag{2.1.3}$$

számokat értjük. Ebben a vonatkozásban a ξ és η külön-külön tekintett eloszlása *marginális* (más szóval *perem*-) eloszlásként jelenik meg, amint azt az ún. *kontingencia táblázat* mutatja:

$\xi \backslash \eta$	y_1	y_2	$\ldots$	$\sum$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\ldots$	$p_{1\cdot}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\ldots$	$p_{2\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
$\sum$	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	$\ldots$	1

Itt

$$p_{i\cdot} = P(\xi = x_i) = \sum\nolimits_{j=1}^{\infty} p_{ij}$$

és

$$p_{\cdot j} = P(\eta = y_j) = \sum\nolimits_{i=1}^{\infty} p_{ij}.$$

Tehát a peremeloszlások a kontingencia táblázat peremén szereplő eloszlások. Nyilván

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = 1, \quad \sum_{i=1}^{\infty} p_{i\cdot} = 1, \quad \sum_{j=1}^{\infty} p_{\cdot j} = 1,$$

és az itt szereplő mennyiségek nemnegatívak.

2.1.9. THEOREM. *A ξ és η együttes eloszlása meghatározza a peremeloszlásokat, de a peremeloszlások nem határozzák meg egyértelműen az együttes eloszlást.*

BIZONYÍTÁS. Lásd a 2.1.7 példát. □

2.1.10. EXERCISE. Három valószínűségi változó együttes eloszlását a

$$p_{ijk} = P(\xi = x_i, \eta = y_j, \zeta = z_k), \quad i, j, k = 1, 2, \ldots$$

szerint definiáljuk. Hogyan határozható meg a p_{ijk} mennyiségekből ξ és η együttes eloszlása (jelölése $p_{ij\cdot}$) és ξ eloszlása ($p_{i\cdot\cdot}$)? Terjesszük ki az együttes eloszlás fogalmát tetszőleges véges számú valószínűségi változóra!

2.1.4. Függetlenség Legyen ξ és η együttes eloszlása a (2.1.3)-ban megadott. ξ és η függetlensége a következőt jelenti: az, hogy ξ felvesz valamilyen x értéket, nem befolyásolja annak az esélyét, hogy η valamely y értéket vegyen fel.

2.1.11. DEFINITION. Azt mondjuk, hogy ξ és η *független*, ha

$$P(\xi = x_i, \eta = y_j) = P(\xi = x_i)P(\eta = y_j), \quad i, j = 1, 2, \ldots.$$

A $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ valószínűségi változókat *páronként függetleneknek* nevezzük, ha közülük bármely kettő független.

A $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ valószínűségi változókat *(teljesen) függetleneknek* nevezzük, ha

(2.1.4)
$$P(\xi_1 = x_{k_1}, \xi_2 = x_{k_2}, \ldots, \xi_n = x_{k_n}) = P(\xi_1 = x_{k_1})P(\xi_2 = x_{k_2}) \cdots P(\xi_n = x_{k_n})$$

teljesül minden $x_{k_1}, \ldots, x_{k_n}$-re a valószínűségi változók értékészletéből.

2.1.12. EXERCISE. Legyenek $\xi_1, \ldots, \xi_n$ függetlenek. Lássuk be, hogy ekkor $\xi_1, \ldots, \xi_n$ bármely részrendszere is független!

2.1.13. DEFINITION. Valószínűségi változók egy tetszőleges rendszerét *függetlennek* nevezünk, ha bármely véges részrendszere független.

2.1.14. NOTE. A definícióból adódik, hogy valószínűségi változók tetszőleges $\{\xi_i, i \in I\}$ családja akkor és csak akkor független, ha az általuk generált teljes eseményrendszerek $\{\mathcal{E}(\xi_i), i \in I\}$ családja független.

2.1.15. THEOREM. *Ha $\xi_1, \ldots, \xi_n$ független diszkrét valószínűségi változók és $g_1, \ldots, g_n$ valós függvények, akkor az $\eta_1 = g_1(\xi_1), \ldots, \eta_n = g_n(\xi_n)$ valószínűségi változók is függetlenek.*

2.1.5. A konvolúció Legyenek ξ és η független valószínűségi változók $P\{\xi = x_i\} = p_i$, $P\{\eta = y_i\} = q_i$, $i = 1, 2, \dots$ eloszlással. Ekkor a $\zeta = \xi + \eta$ eloszlása

$$P(\zeta = z) = \sum_{x_n + y_m = z} P(\xi = x_n, \eta = y_m) = \sum_{x_n + y_m = z} p_n q_m. \tag{2.1.5}$$

Ha ξ és η csak egész értékeket vehetnek fel, azaz $P(\xi = n) = p_n$, $P(\eta = m) = q_m$, ahol $n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, akkor $\zeta = \xi + \eta$-ra

$$s_k = P(\zeta = k) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} p_j q_{k-j}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \tag{2.1.6}$$

Ha ξ és η csak nemnegatív egész értékeket vehetnek fel, akkor

$$s_k = P(\zeta = k) = \sum_{j=0}^{k} p_j q_{k-j}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

2.1.16. Definition. A (2.1.5)-(2.1.6) által meghatározott s_k mennyiségeket (azaz ζ eloszlását) a $\{p_n\}$ és $\{q_m\}$ eloszlások *konvolúciójának* nevezzük.

2.1.17. Example. Legyenek ξ és η független n_1, illetve n_2 rendű és p paraméterű binomiális eloszlású valószínűségi változók, azaz

$$P(\xi = j) = \binom{n_1}{j} p^j (1-p)^{n_1 - j}, \quad j = 0, 1, \dots, n_1,$$

$$P(\eta = l) = \binom{n_2}{l} p^l (1-p)^{n_2 - l}, \quad l = 0, 1, \dots, n_2.$$

Ekkor $\zeta = \xi + \eta$-ra

$$P(\zeta = k) = \sum_j P(\xi = j) P(\eta = k - j) =$$

$$= \sum_j \binom{n_1}{j} \binom{n_2}{k-j} p^k (1-p)^{n_1 + n_2 - k} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},$$

ahol $n = n_1 + n_2$. Így a konvolúció is binomiális eloszlású. Az utolsó lépésben az ismert

$$\sum_j \binom{n_1}{j} \binom{n_2}{k-j} = \binom{n_1 + n_2}{k}$$

összefüggést (az ún. Vandermonde-konvolúciót) alkalmaztuk. Az összegzés minden esetben olyan j-kre terjed ki, melyekre $0 \le k - j \le n_2$ és $0 \le j \le n_1$.

Tekintsünk egy $\mathcal{K}$ kísérletet, és ezzel összefüggésben egy p valószínűségű A eseményt. Ismételjük meg a kísérletet n-szer, egymástól függetlenül. Jelölje ξ_k annak indikátorát, hogy az A esemény a k-adik kísérletben bekövetkezik. Ekkor ξ_k Bernoulli-eloszlású:

$$P(\xi_k = 1) = p, \quad P(\xi_k = 0) = 1 - p.$$

A $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ valószínűségi változók függetlenek és egyforma Bernoulli-eloszlásúak. Ha ξ jelenti az A esemény bekövetkezései számát az n ismétlésből, akkor $\xi = \xi_1 + \cdots + \xi_n$. Mivel ξ n-edrendű p paraméterű binomiális eloszású, így a következőt kaptuk.

2.1.18. THEOREM. *n darab független, p paraméterű Bernoulli-eloszlású valószínűségi változó összege n-edrendű, p paraméterű binomiális eloszlású.*

Tekintsük megint a $\mathcal{K}$ kísérlet független ismétléseit és a p valószínűségű A esemény bekövetkezéseit. Jelölje η_1 azt, hogy az A hányadik ismétlés során következik be először, η_2 azt, hogy az első bekövetkezés után hányadik lépésben következik be újra A, η_3 azt, hogy a második bekövetkezés után hányadik lépésben következik be újra A, ... Nyilván $\eta_1, \eta_2, \dots$ független elsőrendű negatív binomiális eloszlású, $\eta = \eta_1 + \dots + \eta_n$ pedig n-edrendű negatív binomiális eloszlású. Ebből adódik:

2.1.19. THEOREM. *n darab, azonos p paraméterű, független, elsőrendű negatív binomiális eloszlású valószínűségi változó összege n-edrendű, p paraméterű negatív binomiális eloszlású.*

Gyakorlatok

(1) Adjunk meg két olyan valószínűségi változót, amelyek különböznek egymástól, de eloszlásuk megegyezik! (Akkor mondjuk, hogy a ξ és η diszkrét valószínűségi változók eloszlása megegyezik, ha $P(\xi = x) = P(\eta = x)$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén.)
(2) Legyen adott egy $p_1, p_2, \dots$ eloszlás és az $x_1, x_2, \dots$ páronként különböző számok. Adjunk meg olyan ξ valószínűségi változót, melyre $P(\xi = x_i) = p_i, i = 1, 2, \dots$!
(3) Igazoljuk, hogy egy λ és egy μ paraméterű Poisson-eloszlás konvolúciója $(\lambda + \mu)$ paraméterű Poisson-eloszlás!
(4) Mi a lottón kihúzott öt szám közül a legkisebbnek az eloszlása?
(5) Legyen ξ geometriai eloszlású:
$$P(\xi = k) = p(1-p)^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots$$
Lássuk be, hogy ξ örökifjú, azaz
$$P(\xi = k + m \quad | \quad \xi > k) = P(\xi = m), \qquad k, m = 1, 2, \dots$$
(6) Legyen ξ pozitív egész értékű valószínűségi változó. Vizsgáljuk meg, hogy a ξ örökifjú tulajdonságából következik-e, hogy ξ geometriai eloszlású.
(7) Egy gép p valószínűséggel gyárt jó, $1 - p$ valószínűséggel selejt terméket. Adjuk meg két egymás utáni selejt között gyártott jó termékek mennyiségének eloszlását! Adjuk meg a tiszta selejt szériák hosszának eloszlását is!

Ellenőrző kérdések

(1) Mit nevezünk diszkrét valószínűségi változónak?
(2) Mikor mondjuk, hogy ξ hipergeometrikus-, binomiális-, illetve Poisson-eloszlású?
(3) Mikor mondjuk, hogy ξ és η függetlenek?

2.2. Diszkrét valószínűségi változók várható értéke

2.2.1. A várható nyeremény A szerencsejátékokban a nyeremény pontos nagysága nyilván nem látható előre. A játékosok azonban legalább annyit szeretnének tudni, hogy számukra kedvező vagy kedvezőtlen-e a játék.

2.2.1. EXAMPLE. Dobókockával dobva annyit nyerünk, amilyen számot dobtunk. Ekkor a nyeremény átlagos értéke:

$$\frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 3.5.$$

Ha azonban hamis kockával játszunk, például olyannal, amelynél a 6-os dobás esélye $1/4$, az 1-es dobásé $1/12$, a többié $1/6$, akkor az átlagos nyeremény nyilván nagyobb lesz. Ekkor az

$$\frac{1}{12}\cdot 1+\frac{1}{6}\cdot 2+\frac{1}{6}\cdot 3+\frac{1}{6}\cdot 4+\frac{1}{6}\cdot 5+\frac{1}{4}\cdot 6 \approx 3.91$$

súlyozott számtani középpel érdemes a várható nyereményt jellemezni.

2.2.2. DEFINITION. Azt mondjuk, hogy a $p_k = P(\xi = x_k),\ k = 1, 2, \dots$ eloszlású ξ valószínűségi változónak létezik véges várható értéke, ha a $\sum\limits_k p_k x_k$ sor abszolút konvergens. Ekkor az

$$\boxed{\mathbb{E}\xi = \sum_{k=1}^{\infty} p_k x_k}$$

számot a ξ *várható értékének* nevezzük.

2.2.3. NOTE. (1) ξ várható értéke a ξ által felvett értékek súlyozott számtani közepe. A valószínűségi változó a várható értéke körül mutat véletlen ingadozást.

(2) A $\sum p_k x_k$ sor abszolút konvergenciája biztosítja, hogy a várható érték az x_k-k sorszámozásától független véges szám.

2.2.4. EXERCISE. (1) Adjunk példát olyan ξ valószínűségi változóra, amelyre a $\sum p_k x_k$ sor divergens, illetve értéke $+\infty$ vagy $-\infty$! (Ha ξ értékkészlete véges, akkor ezek nyilván nem fordulhatnak elő.)

(2) Adjunk példát olyan valószínűségi változóra, mely a várható értékét nem veszi fel értékként sohasem!

2.2.5. EXAMPLE. A

$$P(\xi = k) = e^{-\lambda}\lambda^k/k!, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Poisson-eloszlású ξ valószínűségi változó várható értéke az alábbi módon számítható ki:

$$\mathbb{E}\xi = \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\cdot\lambda\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = e^{-\lambda}\cdot\lambda\cdot e^{\lambda} = \lambda.$$

Itt az $e^\lambda = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \lambda^k/k!$ összefüggést alkalmaztuk.

2.2.6. THEOREM. *Legyen ξ eloszlása $p_k = P(\xi = k),\ k = 1, 2, \dots$. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $\eta = f(\xi)$. Ekkor*

$$\mathbb{E}\eta = \sum_{k=1}^{\infty} p_k f(x_k),$$

feltéve, hogy az egyenlőség valamelyik oldalát definiáló sor abszolút konvergens.

A következő tétel a várható érték és a valószínűségi változókon értelmezett műveletek kapcsolatát mutatja be.

2.2.7. Theorem. *A várható érték lineáris funkcionál (a véges várható értékkel rendelkező valószínűségi változók terén). Részletesebben, ha* $\mathbb{E}\xi$ *és* $\mathbb{E}\eta$ *létezik és véges,* c *konstans, akkor*

$\mathbb{E}(\xi+\eta)$ *is létezik és véges, és* $\mathbb{E}(\xi+\eta) = \mathbb{E}\xi + \mathbb{E}\eta$*;*

$\mathbb{E}(c\xi)$ *is létezik és véges, és* $\mathbb{E}(c\xi) = c\mathbb{E}\xi$*.*

2.2.8. Corollary. *Ha a* $\xi_1, \ldots, \xi_n$ *valószínűségi változóknak létezik véges várható értékük, és* $c_1, \ldots, c_n$ *konstansok, akkor*

$$\boxed{\mathbb{E}(\sum_{k=1}^{n} c_k \xi_k) = \sum_{k=1}^{n} c_k \mathbb{E}\xi_k}.$$

2.2.9. Example. Legyen ξ n-edrendű p paraméterű binomiális eloszlású. Ekkor a 2.1.18 Tétel alapján $\xi = \xi_1 + \cdots + \xi_n$, ahol ξ_i Bernoulli-eloszlású. $\mathbb{E}\xi_i = p \cdot 1 + (1-p) \cdot 0 = p$ minden i-re. Ekkor

$$\mathbb{E}\xi = \mathbb{E}\xi_1 + \cdots + \mathbb{E}\xi_n = np.$$

Az eredmény úgy interpretálható, hogy ha egy esemény átlagosan a végrehajtások p-edrészében következik be, akkor n végrehajtásból átlagosan np-szer következik be.

Vizsgáljuk meg a várható értéket negatív binomiális eloszlású valószínűségi változók összegére is.

2.2.10. Example. Legyen ξ r-edrendű p paraméterű negatív binomiális eloszlású. Ekkor $\xi = \xi_1 + \cdots + \xi_r$, ahol $\xi_1, \ldots, \xi_r$ elsőrendű negatív binomiális eloszlásúak (2.1.19. Tétel): $P(\xi_i = 1+k) = p(1-p)^k, \quad k = 0, 1, \ldots$

$$\mathbb{E}\xi_i = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)p(1-p)^k = p\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)(1-p)^k =$$

$$= p(-\sum_{k=0}^{\infty}(1-p)^k)' = p\left(\frac{-1}{p}\right)' = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}.$$

(A számolás során azt használtuk ki, hogy konvergens hatványsor tagonként deriválható.) A fentiek alapján $\mathbb{E}\xi = r/p$. Az eredmény úgy interpretálható, hogy ha egy esemény valószínűsége p, akkor átlagosan $1/p$-szer kell elvégezni a kísérletet ahhoz, hogy az esemény egyszer bekövetkezzék, továbbá r/p-szer ahhoz, hogy r-szer következzék be az esemény.

2.2.2. A várható érték és a függetlenség

2.2.11. Theorem. *Ha* ξ *és* η *független valószínűségi változók,* $\mathbb{E}\xi$ *és* $\mathbb{E}\eta$ *létezik és véges, akkor* $\mathbb{E}(\xi\eta)$ *is létezik és véges, és*

$$\mathbb{E}(\xi\eta) = \mathbb{E}\xi\mathbb{E}\eta.$$

Bizonyítás. Ha $\mathbb{E}(\xi\eta)$ létezik és véges, akkor

$$\mathbb{E}(\xi\eta) = \sum_k \sum_l x_k y_l \; P(\xi = x_k, \eta = y_l). \tag{2.2.1}$$

A függetlenség miatt

$$\mathbb{E}(\xi\eta) = \sum_k \sum_l x_k y_l \; P(\xi = x_k) \; P(\eta = y_l) =$$

$$= \sum_k x_k P(\xi = x_k) \sum_l y_l P(\eta = y_l) = \mathbb{E}\xi \mathbb{E}\eta.$$

Viszont $\mathbb{E}(\xi\eta)$ létezik és véges, hisz $\mathbb{E}\xi$ és $\mathbb{E}\eta$ végességéből következik a (2.2.1) alatti sor abszolút konvergenciája. Ez utóbbit lényegében az előző levezetés $x_k y_l$ helyett $|x_k||y_l|$-re történő elvégzésével láthatjuk be. $\square$

Gyakorlatok

(1) Egy szabályos érmével dobunk. Fej esetén 1 Ft-ot nyerünk, írás esetén 1 Ft-ot vesztünk. Ekkor a nyeremény várható értéke 0. Ezt a játékot nem igazán „érdemes" játszani. Adjunk példát olyan játékra, amelynél a nyeremény várható értéke 0, valamilyen szempontból mégis „érdemes" játszani, illetve olyanra, amelynek 0 a várható értéke, de egyáltalán nem „érdemes" játszani!
(2) Dobjunk fel egy kockát háromszor egymás után! Jelölje ξ a dobott számok összegét. $\mathbb{E}\xi =$?
(3) Bizonyítsuk be, hogy ha $\xi \geq 0$, akkor $\mathbb{E}\xi \geq 0$!
(4) Bizonyítsuk be, hogy ha $\xi \geq 0$ és $\mathbb{E}\xi = 0$, akkor $P(\xi = 0) = 1$!
(5) Bizonyítsuk be, hogy ha $|\xi| \leq |\eta|$ és $\mathbb{E}\eta$ létezik és véges, akkor $\mathbb{E}\xi$ is létezik és véges!
(6) Bizonyítsuk be, hogy ha $P(\xi = c) = 1$, akkor $\mathbb{E}\xi = c$.
(7) Számítsuk ki a binomiális eloszlás várható értékét közvetlenül a várható érték definíciója alapján!
(8) A várható érték definíciója alapján közvetlen számolással igazoljuk, hogy a hipergeometrikus eloszlás várható értéke $n\,M/N$.
(9) Egy játékos a pénzfeldobásnál úgy játszik, hogy mindig a „fejre" fogad. Ha nem nyer, akkor duplázza a tétet, és az első nyerésnél abbahagyja a játékot. Mennyi a nyereményének várható értéke?
(10) Legyen ξ Poisson-eloszlású. Határozzuk meg $1/(\xi^2 + 3\xi + 2)$ várható értékét!
(11) Tegyük fel, hogy $\mathbb{E}\xi^4 + \mathbb{E}\xi^2 = 2\mathbb{E}\xi^3$. Bizonyítsuk be, hogy ξ csak 0 vagy 1 értéket vehet fel!

Ellenőrző kérdések

(1) Mi a várható érték definíciója?
(2) Mit jelent az, hogy a várható érték lineáris funkcionál?
(3) Mikor igaz, hogy $\mathbb{E}(\xi\eta) = \mathbb{E}\xi\mathbb{E}\eta$?

2.3. A szórás

2.3.1. Az ingadozás mértéke A várható érték önmagában nem tökéletes jellemzője az eloszlásnak.

2.3.1. Example. Egy érme feldobásához kapcsolódva kétféle játékot tekintsünk. Mindkét esetben nyerünk, ha fejet dobunk, és vesztünk, ha írást, csak a tét különbözik: az első esetben 100 Ft, a második esetben 100000 Ft. Az első játékot ξ, a másodikat η írja le: $P(\xi = \pm 100) = 1/2, P(\eta = \pm 100000) = 1/2$. A nyeremény várható értékét tekintve a játékok nem különböznek egymástól: $\mathbb{E}\xi = \mathbb{E}\eta = 0$. A második játékot azonban csak a kockázatot kedvelők választanák, ott sokat lehet nyerni, de veszteni is. A két játék közötti különbség abban van, hogy a második esetben a nyeremény értékei nagy ingadozást mutatnak, azaz nagyon szóródnak a várható érték körül.

2.3.2. DEFINITION. Legyen ξ valószínűségi változó, tegyük fel, hogy $\mathbb{E}\xi = m$ létezik és véges. A

$$\boxed{\mathbb{D}^2\xi = \mathbb{E}(\xi - m)^2} \tag{2.3.1}$$

mennyiséget (feltéve, hogy véges) ξ *szórásnégyzetének* nevezzük. A szórásnégyzet pozitív négyzetgyökét pedig szórásnak hívjuk:

$$\mathbb{D}\xi = +\sqrt{\mathbb{D}^2\xi}.$$

A szórás a ξ ingadozásának mérőszáma. A szórás a valószínűségi változó értékeinek a várható értéktől való átlagos négyzetes eltérése. Technikai okokból a szórásnégyzettel gyakrabban dolgozunk, mint a szórással.

2.3.3. EXERCISE. (1) Adjunk példát olyan ξ-re, amely esetén $\mathbb{E}\xi$ létezik, de $\mathbb{D}^2\xi = \infty$!

(2) Mutassuk meg, hogy $\mathbb{E}(\xi - m) = 0$ (azaz a szórást nem lehetne ilyen egyszerűen definiálni)!

2.3.4. THEOREM. *Ha $\mathbb{D}^2\xi < \infty$, akkor*

$$\boxed{\mathbb{D}^2\xi = \mathbb{E}\xi^2 - \mathbb{E}^2\xi} \tag{2.3.2}$$

(ahol $\mathbb{E}^2\xi$ az $(\mathbb{E}\xi)^2$ rövid jelölése).

BIZONYÍTÁS. $\mathbb{D}^2\xi = \mathbb{E}(\xi - m)^2 = \mathbb{E}(\xi^2 - 2m\xi + m^2) = \mathbb{E}\xi^2 - 2m\mathbb{E}\xi + m^2 = \mathbb{E}\xi^2 - 2m^2 + m^2 = \mathbb{E}\xi^2 - \mathbb{E}^2\xi$. □

A szórásnégyzetet az alábbi módon számolhatjuk ki.

2.3.5. THEOREM. *Ha $\mathbb{D}^2\xi < \infty$, akkor*

$$\boxed{\mathbb{D}^2\xi = \sum_{n=1}^{\infty} p_n (x_n - m)^2} \tag{2.3.3}$$

illetve

$$\mathbb{D}^2\xi = \sum\nolimits_{n=1}^{\infty} p_n x_n^2 - m^2, \tag{2.3.4}$$

ahol m a ξ várható értéke, p_n pedig a ξ eloszlása: $P(\xi = x_n) = p_n$, $n = 1, 2, \dots$

BIZONYÍTÁS. Alkalmazzuk 2.2.6 Tételt (2.3.1)-re, akkor kapjuk (2.3.3)-et, illetve (2.3.2)-ra, akkor kapjuk (2.3.4)-et. □

Megjegyezzük, hogy az $\mathbb{E}\xi^k$, ill. $\mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^k$ mennyiségeket k-adik *momentumnak*, ill. k-adik *centrált momentumnak* nevezik ($k = 1, 2, \dots$). A kiszámítás

$$\boxed{\mathbb{E}\xi^k = \sum_{i=1}^{\infty} p_i x_i^k}$$

alapján történik.

A magasabb rendű momentum létezéséből és végességéből következik az alacsonyabb rendű létezése és végessége; fordítva azonban nem.

A várható érték az első momentum, a szórásnégyzet pedig a második centrált momentum.

2.3.6. Example. A 2.3.1 példában $\mathbb{D}^2\xi = 100^2 \cdot 1/2 + (-100)^2 \cdot 1/2 = 10^4$, $\mathbb{D}^2\eta = 100000^2 \cdot 1/2 + (-100000)^2 \cdot 1/2 = 10^{10}$.

Legyen ξ Poisson-eloszlású. Ekkor

$$\mathbb{E}\xi^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{(k-1)!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} [(k-1)+1] \frac{\lambda^k}{(k-1)!} =$$

$$= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda^2 e^{-\lambda} e^{\lambda} + \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda^2 + \lambda.$$

Innen és a 2.2.4 példa alapján

$$\mathbb{D}^2\xi = \mathbb{E}\xi^2 - \mathbb{E}^2\xi = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

2.3.2. A szórás tulajdonságai Az alábbiakban szereplő valószínűségi változókról feltesszük, hogy véges a szórásuk. Először az ún. Steiner-formulát adjuk meg.

2.3.7. Theorem. *Tetszőleges a valós számra*

$$\mathbb{D}^2\xi = \mathbb{E}(\xi - a)^2 - (\mathbb{E}\xi - a)^2, \tag{2.3.5}$$

$$\mathbb{E}(\xi - a)^2 \geq \mathbb{D}^2\xi. \tag{2.3.6}$$

(2.3.6)*-ben akkor és csak akkor áll fenn egyenlőség, ha* $a = \mathbb{E}\xi$.

A bizonyítást az olvasóra bízzuk. ((2.3.5) a várható érték linearitásából, (2.3.6) pedig (2.3.5)-ból adódik).

(2.3.6) jelentése a következő: az ingadozásnak a szórásban is testet öltő mérőszáma, azaz ún. legkisebb négyzetes eltérés értelmében éppen a várható érték az a szám, amely leginkább ξ középértékének tekinthető, tehát amelytől való ingadozás a legkisebb.

2.3.8. Theorem. $\mathbb{D}^2\xi \geq 0$*;* $\mathbb{D}^2\xi = 0$ *akkor és csak akkor, ha* $P(\xi = \mathbb{E}\xi) = 1$.

Bizonyítás. Mivel $\mathbb{D}^2\xi = \mathbb{E}(\xi - m)^2$ és $(\xi - m)^2 \geq 0$, így $\mathbb{D}^2\xi \geq 0$. Továbbá $\mathbb{D}^2\xi$ akkor és csak akkor 0, ha $P((\xi - m)^2 = 0) = 1$, azaz $P(\xi = m) = 1$. □

Az is nyilván igaz, hogy $\mathbb{D}^2\xi = 0$ akkor és csak akkor áll fenn, ha ξ 1 valószínűséggel konstans.

2.3.9. Theorem. *Bármely* $a, b \in \mathbb{R}$ *esetén*

$$\boxed{\mathbb{D}^2(a\xi + b) = a^2\mathbb{D}^2\xi}$$

Bizonyítás. $\mathbb{E}(a\xi + b) = am + b$ miatt $\mathbb{D}^2(a\xi + b) = \mathbb{E}((a\xi + b) - (am + b))^2 = \mathbb{E}a^2(\xi - m)^2 = a^2\mathbb{D}^2\xi$. □

2.3.10. Theorem. *Legyenek* $\xi_1, \ldots, \xi_n$ *páronként független valószínűségi változók. Ekkor*

$$\mathbb{D}^2(\xi_1 + \cdots + \xi_n) = \mathbb{D}^2\xi_1 + \cdots + \mathbb{D}^2\xi_n.$$

Bizonyítás. Csak $n = 2$ esetén végezzük el az állítás igazolását.

$$\mathbb{D}^2(\xi_1 + \xi_2) = \mathbb{E}(\xi_1 + \xi_2)^2 - (\mathbb{E}\xi_1 + \mathbb{E}\xi_2)^2 =$$
$$= \mathbb{E}\xi_1^2 + 2\mathbb{E}(\xi_1\xi_2) + \mathbb{E}\xi_2^2 - (\mathbb{E}^2\xi_1 + 2\mathbb{E}\xi_1\mathbb{E}\xi_2 + \mathbb{E}^2\xi_2) =$$
$$= \mathbb{E}\xi_1^2 + \mathbb{E}\xi_2^2 - (\mathbb{E}^2\xi_1 + \mathbb{E}^2\xi_2) = \mathbb{D}^2\xi_1 + \mathbb{D}^2\xi_2.$$

Azt használtuk ki, hogy független esetben $\mathbb{E}(\xi_1\xi_2) = \mathbb{E}\xi_1\mathbb{E}\xi_2$. □

2.3.11. Example. a) Legyen ξ_1 Bernoulli-eloszlású: $P(\xi_1 = 1) = p$, $P(\xi_1 = 0) = 1 - p$. Ekkor

$$\mathbb{E}\xi_1^2 = 1^2 \cdot p + 0^2 \cdot (1 - p) = p. \quad \mathbb{D}^2\xi_1 = \mathbb{E}\xi_1^2 - \mathbb{E}^2\xi_1 = p - p^2 = p(1 - p).$$

b) Legyen ξ binomiális eloszlású:

$$P(\xi = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \quad k = 0, \ldots, n.$$

Ekkor $\xi = \xi_1 + \cdots + \xi_n$, ahol $\xi_1, \ldots, \xi_n$ független Bernoulli-eloszlásúak. Így

$$\mathbb{D}^2\xi = \mathbb{D}^2\xi_1 + \cdots + \mathbb{D}^2\xi_n = np(1 - p).$$

2.3.12. Definition. Legyen $0 < \mathbb{D}^2\xi < \infty$. A ξ *standardizáltján* az

$$\eta = (\xi - \mathbb{E}\xi)/\mathbb{D}\xi$$

valószínűségi változót értjük. Ha η a ξ standardizáltja, akkor $\mathbb{E}\eta = 0$ és $\mathbb{D}^2\eta = 1$.

2.3.3. A Csebisev-egyenlőtlenség A szórás segítségével felső korlátot adhatunk a várható értéktől való eltérés valószínűségére. Ez a Csebisev-egyenlőtlenség lényege. A Csebisev-egyenlőtlenség bizonyítását a Markov-egyelőtlenségre támaszkodva végezzük el.

2.3.13. Theorem. *(Markov-egyenlőtlenség) Legyen η nemnegatív valószínűségi változó, $\delta > 0$ rögzített szám. Ekkor*

$$\boxed{P(\eta \geq \delta) \leq \mathbb{E}\eta/\delta}.$$

Bizonyítás. A következő egyenlőtlenségek érvényesek:

$$\mathbb{E}\eta = \sum_i y_i P(\eta = y_i) \geq \sum_{\{i : y_i \geq \delta\}} y_i P(\eta = y_i) \geq$$
$$\geq \delta \sum_{\{i : y_i \geq \delta\}} P(\eta \geq y_i) = \delta P(\eta \geq \delta).$$

□

2.3.14. Theorem. *(Csebisev-egyenlőtlenség) Tegyük fel, hogy $\mathbb{D}^2\xi < \infty$, $\mathbb{E}\xi = m$ és $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Ekkor*

$$\boxed{P(|\xi - m| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{D}^2\xi}{\varepsilon^2}}.$$

Bizonyítás. Legyen $\eta = (\xi - m)^2$, $\delta = \varepsilon^2$. Alkalmazzuk a Markov-egyenlőtlenséget! □

Gyakorlatok

(1) Számítsuk ki a binomiális eloszlás szórását (2.3.4) segítségével közvetlenül (nem a Bernoulli-eloszlásra visszavezetve)!
(2) Igazoljuk, hogy a hipergeometrikus eloszlás szórásnégyzete

$$\mathbb{D}^2\xi = n\frac{M}{N}\left(1-\frac{M}{N}\right)\left(1-\frac{n-1}{N-1}\right).$$

(3) Igazoljuk, hogy az elsőrendű negatív binomiális eloszlás szórásnégyzete $\mathbb{D}^2\xi_1 = (1-p)/p^2$. Az r-edrendű negatív binomiális eloszlású ξ-t független elsőrendűek összegeként előállítva, bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{D}^2\xi = r(1-p)/p^2$.
(4) Egy szabályos kockával egymás után háromszor dobunk. Jelölje ξ a hatos dobások számát. $\mathbb{E}\xi = ?$, $\mathbb{D}^2\xi = ?$
(5) Igazoljuk, hogy a magasabb rendű momentum végességéből következik az alacsonyabb rendű végessége az alábbi értelemben. Ha $k \geq l > 0$ és $\mathbb{E}|\xi|^k < \infty$, akkor $\mathbb{E}|\xi|^l < \infty$. (A bizonyításnál külön-külön vizsgáljuk a $|\xi| \leq 1$ és a $|\xi| > 1$ részeket.)
(6) Mennyi a várható értéke és szórásnégyzete a $P(\xi = \frac{1}{k}) = \frac{1}{55}k^2$, $k = 1, 2, 3, 4, 5$ eloszlású valószínűségi változónak?

Ellenőrző kérdések

(1) Mi a szórásnégyzet jelentése?
(2) Hogyan számoljuk ki a szórásnégyzetet?
(3) Mit állít a Csebisev-egyenlőtlenség?

2.4. A korrelációs együttható

2.4.1. A kovariancia A szórás tulajdonképpen a ξ és az $\mathbb{E}\xi$ távolsága, a $\mathbb{D}^2\xi$ kifejtése nyilvánvaló analógiát mutat az euklideszi távolsággal. A kovariancia pedig a belső szorzat megfelelője lesz.

2.4.1. Definition. Legyen ξ és η valószínűségi változó, $\mathbb{D}^2\xi < \infty$, $\mathbb{D}^2\eta < \infty$, $\mathbb{E}\xi = m_\xi$, $\mathbb{E}\eta = m_\eta$. A ξ és η kovarianciáján a

$$\boxed{\operatorname{cov}(\xi,\eta) = \mathbb{E}[(\xi - m_\xi)(\eta - m_\eta)]} \tag{2.4.1}$$

mennyiséget értjük.

A definícióból közvetlenül adódik, hogy

$$\mathbb{D}^2\xi = \operatorname{cov}(\xi,\xi).$$

A kovariancia kiszámítását segíti a

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta) = \mathbb{E}(\xi\eta) - m_\xi m_\eta \tag{2.4.2}$$

képlet, amely a várható érték linearitásából következik. Ha $p_{ij} = P(\xi = x_i, \eta = y_j)$, $i, j = 1, 2, \ldots$ jelöli ξ és η együttes eloszlását, akkor

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta) = \sum_i \sum_j (x_i - m_\xi)(y_j - m_\eta)p_{ij},$$

illetve

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta) = \sum_i \sum_j x_i y_j p_{ij} - m_\xi \cdot m_\eta$$

azonnal adódik (2.3.6)-ből, illetve (2.4.2)-ből.

2.4.2. THEOREM. *Ha* $\mathbb{D}^2\xi < \infty$, $\mathbb{D}^2\eta < \infty$, *továbbá* ξ *és* η *függetlenek, akkor* $cov(\xi, \eta) = 0$.

BIZONYÍTÁS. $\mathbb{E}(\xi\eta) = \mathbb{E}\xi\mathbb{E}\eta$ alapján (2.4.2)-ből adódik az állítás. □

Az állítás megfordítása nem igaz, amint az alábbi példa is mutatja.

2.4.3. EXAMPLE. Legyen ξ és η értékkészlete $-1, 0, +1$, együttes eloszlása

$$P(\xi = 0, \eta = -1) = P(\xi = 0, \eta = +1) =$$

$$= P(\xi = -1, \eta = 0) = P(\xi = +1, \eta = 0) = 1/4.$$

A kontingencia táblázat:

$\xi\backslash\eta$	-1	0	1	$\sum$
-1	0	1/4	0	1/4
0	1/4	0	1/4	1/2
1	0	1/4	0	1/4
$\sum$	1/4	1/2	1/4	1

Ekkor

$$\mathbb{E}\xi = \mathbb{E}\eta = (-1) \cdot 1/4 + 0 \cdot 1/2 + 1 \cdot 1/4 = 0.$$

$$\mathbb{E}(\xi\eta) = (-1) \cdot (-1) \cdot 0 + (-1) \cdot 0 \cdot 1/4 + (-1) \cdot 1 \cdot 0 +$$

$$+0 \cdot (-1) \cdot 1/4 + 0 \cdot 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \cdot 1/4 + 1 \cdot (-1) \cdot 0 + 1 \cdot 0 \cdot 1/4 + 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

(ez a kontigencia táblázatból könnyen adódik). Így $\mathrm{cov}(\xi, \eta) = 0$. Viszont

$$P(\xi = 0, \eta = 0) = 0 \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(\xi = 0) \cdot P(\eta = 0),$$

azaz ξ és η nem függetlenek.

2.4.4. THEOREM. *A kovariancia bilineáris funkcionál. Részletesebben: ha* $\mathbb{D}^2\xi_i < \infty$, $\mathbb{D}^2\eta_i < \infty$, $b_i, c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, *akkor*

$$cov(\sum_{i=1}^{n} b_i\xi_i, \sum_{j=1}^{n} c_j\eta_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_i c_j \, cov(\xi_i, \eta_j).$$

BIZONYÍTÁS. Elegendő belátni, hogy $\mathrm{cov}(c\xi, \eta) = c\,\mathrm{cov}(\xi, \eta)$ és $\mathrm{cov}(\xi_1 + \xi_2, \eta) = \mathrm{cov}(\xi_1, \eta) + \mathrm{cov}(\xi_2, \eta)$. Ezek közül az első nyilvánvaló; a második:

$$\mathrm{cov}(\xi_1 + \xi_2, \eta) = \mathbb{E}[(\xi_1 + \xi_2 - \mathbb{E}\xi_1 - \mathbb{E}\xi_2) \cdot (\eta - \mathbb{E}\eta)] =$$

$$= \mathbb{E}[(\xi_1 - \mathbb{E}\xi_1)(\eta - \mathbb{E}\eta)] + \mathbb{E}[(\xi_2 - \mathbb{E}\xi_2)(\eta - \mathbb{E}\eta)] = \mathrm{cov}(\xi_1, \eta) + \mathrm{cov}(\xi_2, \eta)$$

□

2.4.2. A korrelációs együttható Két valószínűségi változó közötti kapcsolat szorosságát kifejezhetjük a korrelációs együtthatóval. A korrelációs együttható lényegében két vektor által bezárt szög koszinuszát jelenti.

2.4.5. DEFINITION. Legyen $0 < \mathbb{D}^2\xi,\ \mathbb{D}^2\eta < \infty$. A ξ és η korrelációs együtthatóján a

$$\boxed{\mathrm{corr}(\xi,\eta) = \frac{\mathrm{cov}(\xi,\eta)}{\mathbb{D}\xi\mathbb{D}\eta}}$$

mennyiséget értjük. Ha $\mathrm{corr}(\xi,\eta) = 0$, akkor ξ-t és η-t *korrelálatlanoknak* nevezzük. Ha ξ és η függetlenek, akkor korrelálatlanok, de ez fordítva nem igaz.

2.4.6. THEOREM. *a) corr(ξ,η) értéke mindig -1 és $+1$ közé esik.*

b) $|corr(\xi,\eta)| = 1$ akkor és csak akkor, ha valamely $a \neq 0$ és b valós számokra

$$\eta = a\xi + b \tag{2.4.3}$$

teljesül 1 valószínűséggel. $a > 0$, illetve $a < 0$ aszerint, hogy corr$(\xi,\eta) = +1$, illetve corr$(\xi,\eta) = -1$.

BIZONYÍTÁS. Legyen $\xi' = (\xi - \mathbb{E}\xi)/\mathbb{D}\xi$, illetve $\eta' = (\eta - \mathbb{E}\eta)/\mathbb{D}\eta$ a ξ és az η standardizáltja. Ekkor $\mathrm{corr}(\xi,\eta) = \mathrm{cov}(\xi',\eta')$. Másrészt

$$0 \le \mathbb{E}(\xi' \pm \eta')^2 = \mathbb{D}^2\xi' \pm 2\mathrm{cov}(\xi',\eta') + \mathbb{D}^2\eta' = 2 \pm 2\mathrm{corr}(\xi,\eta). \tag{2.4.4}$$

Innen adódik, hogy $-1 \le \mathrm{corr}(\xi,\eta) \le 1$.

Másrészt $\mathrm{corr}(\xi,\eta) = 1$ akkor és csak akkor teljesül, ha (2.4.4)-ben egyenlőség áll fenn $\xi' - \eta'$-vel, azaz $\mathbb{E}(\xi' - \eta')^2 = 0$. Innen $\xi' = \eta'$ 1 valószínűséggel, azaz

$$\xi = (\mathbb{D}\xi/\mathbb{D}\eta)\eta - (\mathbb{D}\xi/\mathbb{D}\eta)\mathbb{E}\eta + \mathbb{E}\xi.$$

Tehát (2.4.3) fennáll $a = \mathbb{D}\xi/\mathbb{D}\eta$ és $b = \mathbb{E}\xi - (\mathbb{D}\xi/\mathbb{D}\eta)\mathbb{E}\eta$ választással. A $\mathrm{corr}(\xi,\eta) = -1$ eset hasonlóan kezelhető. □

2.4.3. Valószínűségi vektorváltozók

2.4.7. DEFINITION. Legyenek $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ valószínűségi változók. Ekkor a $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)^\top$ n-dimenziós vektort *valószínűségi vektorváltozónak* nevezzük. (Itt $^\top$ a transzponálás jele.) A

$$p_{k_1\ldots k_n} = P(\xi_1 = x_{k_1}, \ldots, \xi_n = x_{k_n})$$

számokat a $\boldsymbol{\xi}$ *eloszlásának* nevezzük (itt x_{k_i} végigfut ξ_i értékkészletén). $\boldsymbol{\xi}$ eloszlása nem más, mint komponenseinek együttes eloszlása.

$\boldsymbol{\xi}$ *várható érték vektorát* koordinátánként képezzük. A $\boldsymbol{\xi}$ *szórásmátrixa* (*kovariancia mátrixa*) a $\mathrm{cov}(\xi_i,\xi_j)$ elemekből álló $n \times n$-es $\mathrm{var}(\boldsymbol{\xi})$ mátrix. A ξ, az $\mathbb{E}\boldsymbol{\xi}$ vektorok és a $\mathrm{var}(\boldsymbol{\xi}) = \mathrm{cov}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi})$ mátrix struktúrája:

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix}\xi_1\\ \vdots \\ \xi_n\end{pmatrix}, \quad \mathbb{E}\boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix}\mathbb{E}\xi_1\\ \vdots \\ \mathbb{E}\xi_n\end{pmatrix}, \quad \mathrm{var}(\boldsymbol{\xi}) = \begin{pmatrix}\mathrm{cov}(\xi_1,\xi_1) & \ldots & \mathrm{cov}(\xi_1,\xi_n)\\ \vdots & & \vdots\\ \mathrm{cov}(\xi_n,\xi_1) & \ldots & \mathrm{cov}(\xi_n,\xi_n)\end{pmatrix}.$$

2.4.8. Example. Legyen a $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$ valószínűségi változók együttes eloszlása polinomiális eloszlás:

$$P(\xi_1 = k_1, \ldots, \xi_r = k_r) = \frac{n!}{k_1! \cdots k_r!} p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r},$$

$0 \le k_i \le n$, $k_1 + \cdots + k_r = n$, $0 < p_i < 1$, $p_1 + \cdots + p_r = 1$. Ekkor ξ_i binomiális eloszlású p_i paraméterrel, így $\mathbb{E}\xi_i = np_i$ és $\mathbb{D}^2\xi_i = np_i(1-p_i)$. Meghatározható ξ_i és ξ_j együttes eloszlása is. ξ_1-re és ξ_2-re felírva:

$$P(\xi_1 = k_1, \xi_2 = k_2) = \frac{n!}{k_1! k_2! k!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} p^k,$$

ahol $p = 1 - p_1 - p_2$ és $k = n - k_1 - k_2$.

$$\mathbb{E}(\xi_1\xi_2) = \sum_{k_1}\sum_{k_2} k_1 k_2 \frac{n!}{k_1!k_2!k!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} p^k =$$

$$= n(n-1)p_1p_2 \sum_{k_1}\sum_{k_2} \frac{(n-2)!}{(k_1-1)!(k_2-1)!k!} p_1^{k_1-1} p_2^{k_2-1} p^k =$$

$$= n(n-1)p_1p_2(p_1+p_2+p)^{n-2} = n(n-1)p_1p_2,$$

ahol a polinomiális tételt alkalmaztuk. Ezek alapján $\operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j) = -np_ip_j$,

$$\operatorname{corr}(\xi_i, \xi_j) = \frac{n(n-1)p_ip_j - np_inp_j}{\sqrt{np_i(1-p_i) \cdot np_j(1-p_j)}} = -\sqrt{\frac{p_ip_j}{(1-p_i)(1-p_j)}},$$

ha $i \ne j$. A negatív korreláció természetes, hiszen egyik komponens növelése a másik komponens csökkenését vonja maga után.

2.4.4. A legkisebb négyzetes predikció Közelítsük η-t a ξ valamely függvénye segítségével. Azt mondjuk, hogy $f_0(\xi)$ az η legjobb predikciója (becslése, jóslása) (a legkisebb négyzetek elve szerint) valamely Λ függvényosztályra nézve, ha $f_0 \in \Lambda$ és

$$\mathbb{E}(\eta - f_0(\xi))^2 = \min_{f\in\Lambda} \mathbb{E}(\eta - f(\xi))^2.$$

Ha Λ a lineáris függvények osztálya, akkor legjobb lineáris predikcióról beszélünk.

2.4.9. Theorem. *Legyen $0 < \mathbb{D}^2\xi$, $\mathbb{D}^2\eta < \infty$. Ekkor η legjobb lineáris predikciója a ξ segítségével:*

$$\hat{\eta} = \operatorname{corr}(\xi,\eta)\frac{\mathbb{D}\eta}{\mathbb{D}\xi} \cdot \xi + \mathbb{E}\eta - \operatorname{corr}(\xi,\eta)\frac{\mathbb{D}\eta}{\mathbb{D}\xi} \cdot \mathbb{E}\xi. \tag{2.4.5}$$

Bizonyítás. A cél a

$$g(a,b) = \mathbb{E}[\eta - (a\xi + b)]^2 = \mathbb{E}\eta^2 - 2a\mathbb{E}(\xi\eta) - 2b\mathbb{E}\eta + a^2\mathbb{E}\xi^2 + 2ab\mathbb{E}\xi + b^2$$

függvény minimalizálása. A parciális deriváltak:

$$\frac{\partial g(a,b)}{\partial a} = -2\mathbb{E}(\xi\eta) + 2a\mathbb{E}\xi^2 + 2b\mathbb{E}\xi,$$

$$\frac{\partial g(a,b)}{\partial b} = -2\mathbb{E}\eta + 2a\mathbb{E}\xi + 2b.$$

A fenti parciális deriváltak az

$$a = \operatorname{cov}(\xi,\eta)/\mathbb{D}^2\xi,$$

$$b = -a\mathbb{E}\xi + \mathbb{E}\eta$$

helyen 0-k, ami épp (2.4.5)-nek felel meg. Mivel a második parciális derivátakból álló mátrix

$$\begin{pmatrix} 2\mathbb{E}\xi^2 & 2\mathbb{E}\xi \\ 2\mathbb{E}\xi & 2 \end{pmatrix},$$

így g-nek tényleg minimuma van. □

A 2.4.6 Tétel alapján, ha $\operatorname{corr}(\xi, \eta) = \pm 1$, akkor a (2.4.5) közelítés pontosan η-t adja.

Gyakorlatok

(1) Feldobunk két szabályos kockát. Jelölje ξ az első kockával dobott számot, η pedig a két dobott szám maximumát. Határozzuk meg ξ és η együttes eloszlását! Lássuk be, hogy $\mathbb{E}\xi = 3.5$; $\mathbb{E}\eta = 161/36$ és $\operatorname{cov}(\xi, \eta) = 105/72$.
(2) Egy szabályos kockát n-szer földobunk. Lássuk be, hogy az 1-es és a 6-os dobások kovarianciája $-n/36$.
(3) Tegyük fel, hogy a ξ és η valószínűségi változók mindegyike két értéket vesz föl. Bizonyítsuk be, hogy ha $\operatorname{cov}(\xi, \eta) = 0$, akkor ξ és η független.
(4) Legyenek ξ és η független, Poisson-eloszlású valószínűségi változók λ_1, illetve λ_2 paraméterrel. Lássuk be, hogy ξ-nek $(\xi+\eta)$-ra vonatkozó feltételes eloszlása binomiális, azaz

$$P(\xi = k \mid \xi + \eta = n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, \dots, n,$$

ahol $p = \lambda_1/(\lambda_1 + \lambda_2)$.
(5) Cauchy-féle egyenlőtlenség. Tegyük fel, hogy $\mathbb{E}\xi^2 < \infty$, $\mathbb{E}\eta^2 < \infty$. Ekkor

$$\mathbb{E}|\xi\eta| \le \sqrt{\mathbb{E}\xi^2}\sqrt{\mathbb{E}\eta^2}.$$

Egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $|\xi|$ és $|\eta|$ lineárisan függőek.
(6) Legyen $\xi_1, \dots, \xi_n$ polinomiális eloszlású. Lássuk be, hogy

$$\xi_1/\sqrt{p_1}, \dots, \xi_n/\sqrt{p_n}$$

kovariancia mátrixa $n(I - \boldsymbol{v}\boldsymbol{v}^\top)$, ahol I az $n \times n$-es egységmátrix, $\boldsymbol{v}^\top = (\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_n})$ n-dimenziós egységvektor ($^\top$ a transzponálás jele).

Ellenőrző kérdések

(1) Mi a kovariancia definíciója és kiszámítási módja?
(2) Mi a korrelációs együttható definíciója?
(3) A korrelálatlanságból következik-e a függetlenség?

2.5. Nevezetes diszkrét eloszlások

2.5.1. A hipergeometrikus eloszlás Egy urnában M piros és $N - M$ fehér golyó van ($M < N$). Visszatevés nélkül húzzunk ki n ($n < N$) golyót. Mennyi a valószínűsége, hogy a kihúzott golyók között k piros van? A kérdéses eseményt C_k-val jelölve

$$\boxed{P(C_k) = \binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k} \Big/ \binom{N}{k}, \quad \max\{0, n-N+M\} \le k \le \min\{n, M\}}$$

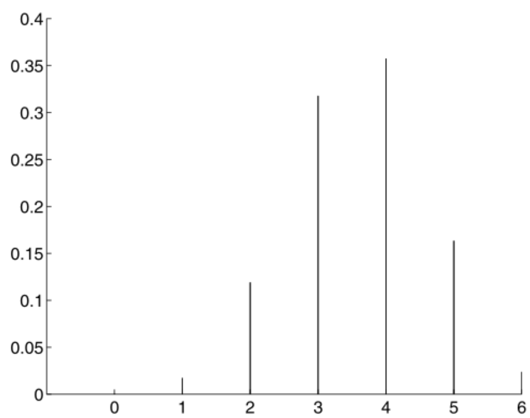
adódik a klasszikus képlet alapján. Ezt nevezzük *hipergeometrikus eloszlásnak*. Ha ξ hipergeometrikus eloszlású valószínűségi változó, akkor a várható értéke:

$$\mathbb{E}\xi = \frac{nM}{N},$$

a szórásnégyzete:

$$\mathbb{D}^2\xi = n\frac{N-n}{N-1} \cdot \frac{M}{N}\left(1 - \frac{M}{N}\right).$$

A $P(\xi = k)$ valószínűségek növekvőek, amíg k meg nem haladja $(n+1)(M+1)/(N+2)$-t. Ha $(n+1)(M+1)/(N+2)$ egész, akkor két maximumhely van: $k = (n+1)(M+1)/(N+2) - 1$ és $k = (n+1)(M+1)/(N+2)$.



2.5.1. ábra. A hipergeometrikus eloszlás $N = 20$, $M = 12$ és $n = 6$ esetén

2.5.1. Theorem. *Amennyiben N úgy tart a végtelenhez, hogy közben $M/N \to p$ (ahol $p \in (0,1)$), akkor a hipergeometrikus eloszlás tart a binomiális eloszláshoz:*

$$\lim_{N\to\infty,\ N/M\to p} \binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k} \Big/ \binom{N}{n} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

2.5.2. A polihipergeometrikus eloszlás Legyen egy urnában r különböző színű golyó, az i-edik színből N_i, $i = 1, \ldots, r$. Legyen $N = N_1 + \cdots + N_r$. Jelölje $C_{k_1,\ldots,k_r}$ azt az eseményt, hogy n-szer húzva visszatevés nélkül, az első színből $k_1, \ldots,$ az r-edik színből k_r adódik $(k_1 + \cdots + k_r = n)$. Ekkor

$$\boxed{P(C_{k_1,\ldots,k_r}) = \binom{N_1}{k_1} \cdots \binom{N_r}{k_r} \Big/ \binom{N}{n}\,,} \tag{2.5.1}$$

$k_i = 0, \ldots, \min\{N_i, n\}, i = 1, \ldots, r,\ k_1 + \cdots + k_r = n.$

Az ilyen eloszlást *polihipergeometrikus eloszlásnak* nevezzük.

2.5.3. A binomiális eloszlás Egy urnában M piros és $N-M$ fehér golyó van ($M < N$). Visszatevéssel húzunk ki n golyót. (A visszatevéses húzás azt jelenti, hogy kihúzunk egy golyót, feljegyezzük a színét, visszatesszük, ezután még egyszer húzunk, feljegyezzük a színét, ...) Mennyi a valószínűsége, hogy a kihúzott golyók között k piros van?

A kérdéses eseményt B_k-val jelölve, a klasszikus képlet alapján

$$P(B_k) = \binom{n}{k}\left(\frac{M}{N}\right)^k\left(1-\frac{M}{N}\right)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n. \tag{2.5.2}$$

Ezt nevezzük *binomiális eloszlásnak.*

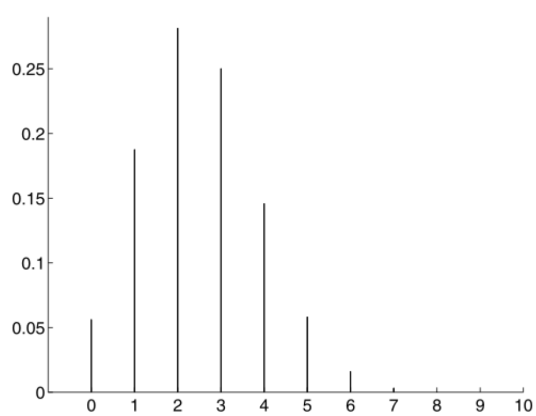
2.5.3.1. Véges Bernoulli-féle kísérletsorozat A binomiális eloszláshoz vezető kísérletet a következő módon általánosíthatjuk. Tekintsünk egy kísérletet és ebben egy A eseményt. Ismételjük meg a kísérletet n-szer, egymástól függetlenül. Jelölje B_k azt az eseményt, hogy az n végrehajtásból k-szor következik be az A esemény, ξ pedig jelölje A bekövetkezései számát. $P(B_k) = P(\xi = k) = ?$

A háttérben levő valószínűségi mezőt a következő módon lehet megkonstruálni. Mivel csak az A és $\overline{A}$ bekövetkezését figyeljük, így a kiinduló $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1)$ valószínűségi mező két elemi eseményre redukálható: $\Omega_1 = \{0, 1\}$, 1 jelöli az A, 0 az $\overline{A}$ bekövetkezését. $P_1\{0\} = 1-p, P_1\{1\} = p$. A kísérlet n-szeri független végrehajtását az $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1)$ önmagával képzett n-szeres szorzata írja le. Ez a valószínűségi mező a 0-ákból és 1-ekből álló n hosszúságú sorozatokból áll. Ha egy ω sorozatban k db 1-es és $n-k$ db 0 áll (pl. $\omega = (1, 1, \ldots, 1, 0, 0, \ldots, 0)$, azaz az első k helyen 1, a maradék $n-k$ helyen 0), akkor $P(\omega) = p^k(1-p)^{n-k}$. B_k az összes olyan sorozatból áll, amelyben k db 1-es és $n-k$ db 0 van. Egy ilyen sorozat valószínűsége (a 0-ák és 1-esek sorrendjétől függetlenül) $p^k(1-p)^{n-k}$. Összesen $\binom{n}{k}$ számú ilyen sorozat van. Így

$$\boxed{P(B_k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.} \tag{2.5.3}$$

Ez a *binomiális eloszlás általános alakja.*

2.5.2. ábra. $p = 0.25$, $n = 10$ esetén a binomiális eloszlás



2.5.2. EXERCISE. a) A szorzat valószínűségi mező fogalma nélkül, csupán a függetlenség fogalmára támaszkodva vezessük le a (2.5.3) összefüggést!

b) Vezessük le a (2.5.2) összefüggést a függetlenség felhasználása nélkül, csak arra támaszkodva, hogy mind az N^n számú elemi esemény egyformán valószínű!

A $P(\xi = k)$ valószínűségek növekvőek, amíg k eléri azt az egészet, melyre

$$(n+1)p - 1 < k \leq (n+1)p,$$

utána pedig csökkenőek. Ha $(n+1)p$ egész, akkor két maximumhely van: $k = (n+1)p - 1$ és $k = (n+1)p$. $p = 0.25, n = 10$ esetén a $P(\xi = k)$ valószínűségek a 2.5.3.1. ábrán láthatóak.

2.5.3.2. A Bernoulli-eloszlás A véges Bernoulli-féle kísérletsorozatban jelölje ξ_i az i-edik kísérletben az A esemény bekövetkezései számát. Ekkor ξ_i Bernoulli-eloszlású:

$$P(\xi_i = 1) = p, \quad P(\xi_i = 0) = 1 - p.$$

A kísérlet leírásából azonnal adódik, hogy a binomiális eloszlású ξ előáll $\xi = \xi_1 + \cdots + \xi_n$ alakban, ahol $\xi_1, \ldots, \xi_n$ független Bernoulli-eloszlásúak.

2.5.3.3. A binomiális eloszlás jellemzői A momentumok:

$$\mathbb{E}\xi = np,$$

$$\mathbb{E}\xi^2 = np + n(n-1)p^2.$$

A szórásnégyzet:

$$\mathbb{D}^2\xi = np(1-p).$$

2.5.4. A binomiális eloszlás további tulajdonságai Ha ξ_1 és ξ_2 független, binomiális eloszlású valószínűségi változók n_1, p, illetve n_2, p paraméterrel, akkor $\xi_1 + \xi_2$ is binomiális eloszlású $n_1 + n_2, p$ paraméterrel.

A binomiális eloszlás standardizáltja aszimptotikusan normális eloszlású:

$$\frac{\xi - np}{\sqrt{np(1-p)}} \Longrightarrow \mathcal{N}(0,1), \quad \text{ha } n \to \infty.$$

Amennyiben n úgy tart a végtelenhez, hogy közben p úgy változik, hogy $np = \lambda > 0$ konstans marad, akkor viszont a határeloszlás Poisson:

$$\lim_{n\to\infty, np=\lambda} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Ha ξ_1 és ξ_2 független binomiális eloszlású valószínűségi változók n_1, p, illetve n_2, p paraméterrel, akkor ξ_1 feltételes eloszlása $\xi_1 + \xi_2 = n$-re vonatkozóan hipergeometrikus:

$$P(\xi_1 = k | \xi_1 + \xi_2 = n) = \frac{\binom{n_1}{k}\binom{n_2}{n-k}}{\binom{n_1+n_2}{n}}.$$

2.5.5. A polinomiális eloszlás Tekintsünk egy kísérletet és ehhez kapcsolódva egy teljes eseményrendszert: $A_1, \dots, A_r$. Legyen $p_1 = P(A_1) > 0, \dots, p_r = P(A_r) > 0$. Nyilván $p_1 + \dots + p_r = 1$. Ismételjük meg a kísérletet n-szer, egymástól függetlenül. Jelölje $B_{k_1,\dots,k_r}$ azt az eseményt, hogy az A_1 esemény k_1-szer,..., az A_r k_r-szer következik be. Ekkor

$$\boxed{P(B_{k_1,\dots,k_r}) = \frac{n!}{k_1! \dots k_r!} p_1^{k_1} \dots p_r^{k_r},} \tag{2.5.4}$$

ahol $k_1 \geq 0, \dots, k_r \geq 0$, s $k_1 + \dots + k_r = n$.

2.5.3. Example. A (2.5.3) képlethez vezető okoskodást általánosítva, igazoljuk a (2.5.4) formulát!

2.5.6. A negatív binomiális eloszlás Tekintsünk egy kísérletet, ebben egy p valószínűségű A eseményt. Ismételjük a kísérletet (független módon). Jelölje $A_k^{(r)}$ azt az eseményt, hogy a A esemény r-edszerre a $(k+r)$-edik ismétlésnél fordul elő. Ekkor

$$\boxed{P(A_k^{(r)}) = \binom{k+r-1}{r-1} p^r (1-p)^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots .} \tag{2.5.5}$$

A várható érték:

$$\mathbb{E}\xi = \frac{r}{p},$$

A szórásnégyzet:

$$\mathbb{D}^2\xi = \frac{r(1-p)}{p^2}.$$

Ha ξ_1 és ξ_2 független, p paraméterű és r_1, illetve r_2 rendű negatív binomiális eloszlasúak, akkor $\xi_1 + \xi_2$ p paraméterű, $r_1 + r_2$ rendű negatív binomiális eloszlású.

2.5.4. Exercise. Bizonyítsuk be, hogy a negatív binomiális eloszláshoz vezető kísérlet $p > 0$ esetén 1 valószínűséggel véges sok lépésben véget ér!

2.5.5. Example. A negatív binomiális eloszlás $r = 1$ esetén az ún. *geometriai eloszlást* szolgáltatja.

A geometriai eloszlás „örökifjú”:

$$P(\xi = t + k | \xi > t) = p(1-p)^{k-1},$$

azaz ha ξ t-nél „tovább él”, akkor a t utáni élettartama ugyanolyan eloszlású, mintha a t időpontban „született” volna. Ez a tulajdonság jellemzi is a geometriai eloszlást a pozitív egész értékű valószínűségi változók között.

2.5.7. A Poisson-eloszlás Legyen $\lambda > 0$. A

$$\boxed{p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots}$$

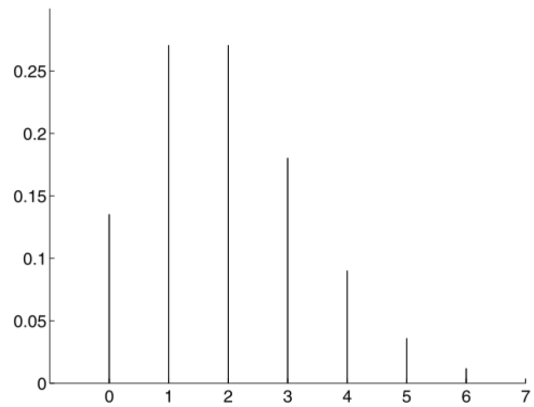
által definiált eloszlást, ahol $\lambda > 0$ állandó, *Poisson-eloszlásnak* nevezzük. Nyilván $p_k > 0$, és a

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k / k! = e^{\lambda}$$

képlet alapján $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$. Így a fenti számok tényleg eloszlást alkotnak.

A $P(\xi = k)$ valószínűségek növekvőek, amíg k eléri $[\lambda]$-t (egészrész), utána csökkenőek (ha λ egész, akkor $k = \lambda - 1$ és $k = \lambda$ esetén is maximum van).

2.5.3. ábra. $\lambda = 2$paraméterű Poisson eloszlás



A várható érték:

$$\mathbb{E}\xi = \lambda,$$

a szórásnégyzet:

$$\mathbb{D}^2\xi = \lambda.$$

Ha ξ_1 és ξ_2 független Poisson-eloszlásúak λ_1, illetve λ_2 paraméterrel, akkor $\xi_1 + \xi_2$ is Poisson-eloszlású $\lambda_1 + \lambda_2$ paraméterrel.

Legyen ξ_1 és ξ_2 független Poisson-eloszlású λ_1, illetve λ_2 paraméterrel. Ekkor

$$P(\xi_1 = k | \xi_1 + \xi_2 = n) = \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^{n-k},$$

azaz a feltételes eloszlás n, $\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$ paraméterű binomiális.

A Poisson-eloszlás gyakran fellép véletlen elhelyezkedési problémákban. Figyeljünk egy N egyenlő részre osztott földterületet. n számú fűmagot hoz a területre véletlenszerűen a szél. Mennyi a valószínűsége, hogy egy részre éppen k mag esik? Ha feltételezzük, hogy a fűmagvak egymástól függetlenül érkeznek, és az N területrész mindegyikére azonos valószínűséggel kerülnek, akkor binomiális eloszláshoz jutunk:

$$b_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n, \tag{2.5.6}$$

ahol $p = 1/N$. Viszont a binomiális eloszlás, bizonyos feltételekkel, jól közelítő Poisson-eloszlással.

2.5.6. Theorem. *Ha $n \to \infty$ úgy, hogy $np = \lambda > 0$ konstans marad, akkor az n, p paraméterű binomiális eloszlás tart a λ paraméterű Poisson-eloszláshoz.*

Bizonyítás. Beírva (2.5.6) képletbe $p = \lambda/n$-et:

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} =$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!}\frac{n}{n}\frac{(n-1)}{n}\cdots\frac{n-k+1}{n}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n} \to \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},$$

mivel $(1-\lambda/n)^n \to e^{-\lambda}$. □

Gyakorlatok

(1) Bizonyítsuk be (valószínűségszámítási meggondolásokkal és más úton is), hogy az (2.5.1) képletbenben szereplő mennyiségekre $\sum P(C_{k_1,\ldots,k_r}) = 1$, ahol az összegzés a $k_i = 0,\ldots,\min\{N_i,n\},\ i = 1,\ldots,r, k_1+\cdots+k_r = n$ számokra terjed ki.

(2) Egy urnában M piros és $N-M$ fehér golyó van. Visszatevés nélkül húzunk. Mennyi a valószínűsége, hogy a $(k+1)$-edik húzásra jön ki először piros?

(3) Határozzuk meg a binomiális eloszlás maximális tagját!

(4) Egy tóban N hal van, ezek közül M-et kifogunk, megjelöljük majd visszadobjuk őket. Néhány nap múlva ismét kifogunk M halat. Jelölje $p_{n,N}$ annak a valószínűségét, hogy ezek között n megjelölt hal van. $p_{n,N} =?$ Rögzített n esetén melyik $N = N_{(n)}$-re lesz $p_{n,N}$ maximális? (Mivel N ismeretlen, n viszont a kísérlet elvégzése után ismertté válik számunkra, így $N_{(n)}$ az N becslésére használható: $N_{(n)}$ az ún. maximum-likelihood becslése N-nek.)

(5) Egy $2N$ fiúból és $2N$ lányból álló társaságot véletlenszerűen két egyenlő létszámú csoportra bontunk. Mennyi a valószínűsége, hogy a csoportokon belül azonos lesz a fiúk és a lányok száma ?

(6) Négy dobókockát feldobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy két 1-es és egy 2-es adódik?

(7) Lássuk be az alábbi rekurzív összefüggéseket a hipergeometrikus eloszlásra:

$$h(0) = \frac{(N-M)(N-M-1)\cdots(N-M-n+1)}{N(N-1)\cdots(N-n+1)},$$

$$h(k+1) = h(k)\cdot\frac{M-k}{k+1}\cdot\frac{n-k}{N-M-n+k+1}, k = 1,2,\ldots\min\{n,M\},$$

ahol $h(k) = \binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}\Big/\binom{N}{n}$ a hipergeometrikus eloszlás k-adik tagja (feltesszük, hogy $0 \le M \le N$, $0 \le n \le N-M$).

(8) Lássuk be a következő rekurzív összefüggéseket a binomiális eloszlásra:

$$b(0) = (1-p)^n,\ b(k+1) = b(k)\frac{n-k}{k+1}\cdot\frac{p}{1-p}, \qquad k = 0,1,2,\ldots n,$$

ahol $b(k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ a binomiális eloszlás k-adik tagja.

(9) Oldjuk meg az előző feladatot Poisson-eloszlás esetén is:

$$p_0 = e^{-\lambda},\ p_{k+1} = p_k\frac{\lambda}{k+1}, \quad k = 0,1,2,\ldots,$$

ahol $p_k = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ a Poisson-eloszlás k-adik tagja.

(10) Ábrázoljuk (számítógépen) a hipergeometrikus, a binomiális és a Poisson-eloszlás oszlopdiagramját különböző paraméterek esetén! Használjuk az előző feladatok rekurzív képleteit!

(11) Ábrázoljuk közös koordinátarendszerben a p, n paraméterű binomiális és az N, M, n paraméterű hipergeometrikus eloszlást, ahol $M = pN$. Figyeljük meg a konvergenciát, ha $N \to \infty$.
(12) Ábrázoljuk közös koordinátarendszerben a λ paraméterű Poisson- és a p, n paraméterű binomiális eloszlást, ahol $np = \lambda$. Figyeljük meg a konvergenciát, ha $n \to \infty$.
(13) Egy 10 méteres wolfram szálban átlagosan 5 hiba van. A szálat 6 cm-es darabokra vágjuk, melyekből izzó-spirált készítünk. Várhatóan hány hibátlan izzó-spirált kapunk?

Ellenőrző kérdések

(1) Melyik eloszlás írja le a visszatevés nélküli és melyik a visszatevéses mintavételt?
(2) Milyen feltételek esetén lesz a binomiális eloszlás határeloszlása a Poisson-eloszlás, és milyenek esetén a normális eloszlás?
(3) Mi a kapcsolat a Bernoulli- és a binomiális eloszlás között?

3. FEJEZET

Valószínűségi változók

3.1. Valószínűségi változók, eloszlások, eloszlásfüggvények

3.1.1. A valószínűségi változó fogalma Olyan véletlen mennyiségekkel foglalkozunk, melyek nemcsak megszámlálható sok értéket vehetnek fel.

3.1.1. EXAMPLE. Dobjunk egy pontot véletlenszerűen az $[a, b]$ intervallumra ($a < b$). Jelölje ξ a pont helyét. Legyen $x, y \in \mathbb{R}$, $x \leq y$. $P(\xi \in [x, y])$-t szeretnénk meghatározni. A valószínűség geometriai kiszámítási módja alapján

$$P(\xi \in [x, y]) = \lambda\{[a, b] \cap [x, y]\}/(b - a),$$

ahol λ a Lebesgue-mérték (azaz az intervallum hossza).

A fenti példában szereplő ξ ún. egyenletes eloszlású valószínűségi változó. Természetes igényként merül fel, hogy minden véletlentől függő mennyiség esetén meg tudjuk mondani, hogy milyen valószínűséggel esik bele egy rögzített intervallumba. Az alábbi (1.1) feltétel ezt garantálja.

Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ egy valószínűségi mező. A $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ leképezést *valószínűségi változónak* nevezzük, ha bármely rögzített $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\{\omega : \xi(\omega) < x\} \in \mathcal{F}. \tag{3.1.1}$$

A fenti feltétel azt jelenti, hogy azon ω elemi események halmaza, melyekre $\xi(\omega) < x$, legyen esemény (azaz beszélhessünk a valószínűségről). Ezen egyszerű feltételből már adódik ξ számos fontos tulajdonsága.

A továbbiakban tetszőleges $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ és $B \subseteq \mathbb{R}$ esetén $\xi^{-1}(B)$ jelöli a B ξ általi inverz képét:

$$\xi^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : \xi(\omega) \in B\},$$

azaz $\xi^{-1}(B)$ azon ω-k halmaza, melyeket ξ B-be visz. Más jelöléssel

$$\{\xi \in B\} = \{\omega : \xi(\omega) \in B\} = \xi^{-1}(B).$$

Ezzel a jelöléssel (3.1.1) éppen a $\xi^{-1}((-\infty, x)) \in \mathcal{F}$ feltételt jelenti.

3.1.2. DEFINITION. Legyen Ω most egy tetszőleges halmaz, és $\mathcal{F}$ legyen Ω részhalmazainak egy σ-algebrája. Jelölje $\mathcal{B}$ $\mathbb{R}$ Borel-halmazait. A $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ leképezést mérhetőnek (pontosabban, $\mathcal{F}$-mérhetőnek) nevezzük, ha $\xi^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ minden $B \in \mathcal{B}$ esetén. Speciálisan, egy $\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt *Borel-mérhetőnek* nevezünk, ha $\xi^{-1}(B) \in \mathcal{B}$ minden $B \in \mathcal{B}$ esetén, azaz Borel-halmaz inverz képe Borel-halmaz.

3.1.3. THEOREM. *Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mező. $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ akkor és csak akkor valószínűségi változó, ha mérhető.*

A következő tételt is használni fogjuk.

3.1.4. Theorem. *Legyen ξ valószínűségi változó, f pedig Borel-mérhető valós függvény. Ekkor $\eta = f(\xi)$ is valószínűségi változó.*

Bizonyítás. Legyen B Borel-halmaz. Ekkor

$$\eta^{-1}(B) = \xi^{-1}(f^{-1}(B)) \in \mathcal{F},$$

mivel $f^{-1}(B)$ Borel-halmaz, és ξ valószínűségi változó. □

Megjegyezzük, hogy a fentiek alapján ξ-nek minden monoton, illetve folytonos függvénye (pl. ξ^2, $|\xi|$, e^ξ,...) valószínűségi változó.

3.1.2. Eloszlások A gyakorlati feladatok zömében a véletlen jelenséget leíró valószínűségi mezőt nem tudjuk megfigyelni, csupán bizonyos vele kapcsolatos mennyiségeket vagyunk képesek mérni.
Például egy műtrágya hatásának vizsgálatakor a kezelt növények bizonyos jellemzőit (a termés mennyisége, annak néhány minőségi jellemzője,...) mérjük. Ami adódik, az a háttérben álló valószínűségi mező egy valószínűségi változó általi képe (a jelen esetben pl. a termés súlyeloszlása). Így gyakran nem az $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, nem is a $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$, hanem csupán a P ξ általi „képe" érdekelhet bennünket.

3.1.5. Definition. A ξ valószínűségi változó *eloszlásán* a

$$\boxed{P_\xi(B) = P(\xi^{-1}(B))}$$

$(B \in \mathcal{B})$ halmazfüggvényt értjük.

3.1.6. Theorem. *ξ eloszlása valószínűség a számegyenes Borel-halmazain (azaz $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_\xi)$ valószínűségi mező).*

Bizonyítás. Nyilván $P_\xi(B) \geq 0$, és $P_\xi(\mathbb{R}) = P(\xi^{-1}(\mathbb{R})) = P(\Omega) = 1$. Legyenek most $B_1, B_2, \ldots$ diszjunkt Borel-halmazok. Ekkor $\xi^{-1}(B_1), \xi^{-1}(B_2), \ldots$ egymást kizáró események. Így

$$P_\xi(\cup B_i) = P(\xi^{-1}(\cup B_i)) = P(\cup \xi^{-1}(B_i)) = \sum P(\xi^{-1}(B_i)) = \sum P_\xi(B_i).$$

Tehát P_ξ σ-additív is, azaz valószínűség. □

3.1.7. Example. Diszkrét valószínűségi változók eloszlását könnyen szemléltethetjük súlyokkal. Ha ξ eloszlása $p_i = P(\xi = x_i), i = 1, 2, \ldots$, akkor helyezzünk el p_i súlyt az x_i pontba. Egy Borel-halmaz P_ξ szerinti valószínűsége a benne levő súlyok összege: $P_\xi(B) = \sum\limits_{\{i: x_i \in B\}} p_i$.

3.1.3. Eloszlásfüggvények Az eloszlások szemléltetésére és kezelésére az eloszlásfüggvények jelentik az egyik fontos - általánosan alkalmazható - eszközt.

3.1.8. Definition. A ξ valószínűségi változó *eloszlásfüggvényének* az

$$\boxed{F(x) = P\{\omega :\ \xi(\omega) < x\}, \quad x \in \mathbb{R}}$$

valós függvényt nevezzük.

Eloszlásfüggvénye minden valószínűségi változónak létezik.

3.1.9. Example. A 3.1.1 Példában szereplő ξ-re $F(x) = 0$, ha $\xi \leq a$, $F(x) = 1$, ha $x > b$, míg $F(x) = (x - a)/(b - a)$, ha $a < x \leq b$. Ezt nevezzük az $[a, b]$ intervallumon *egyenletes eloszlásnak*.

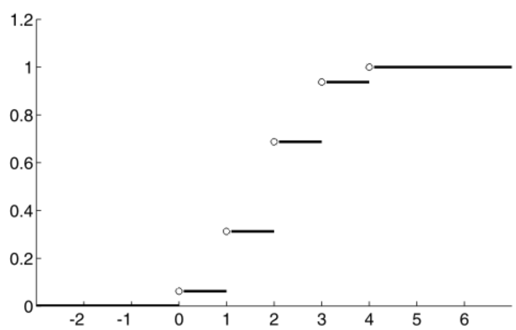
Megjegyezzük, hogy egy valószínűségi változó eloszlásfüggvényének kiszámításakor először „rögzíteni kell az x értéket”, és így kiszámítani a $P(\xi < x)$ valószínűséget, ezután tekinthetjük x-et „futó pontnak a számegyenesen”. Legtöbbször $F(x)$ szakaszonként más-más képlettel adható meg.

3.1.10. EXAMPLE. Legyen a ξ diszkrét valószínűségi változó eloszlása $P(\xi = x_i) = p_i, i = 1, 2, \dots$. Ekkor ξ eloszlásfüggvénye

$$F(x) = P(\xi < x) = \sum_{\{i:x_i<x\}} P(\xi = x_i) = \sum_{\{i:x_i<x\}} p_i.$$

Azaz ξ eloszlásfüggvénye olyan „lépcsőzetesen” növekvő függvény, mely x_i-ben p_i-t „ugrik”. Például a $\xi = c$ konstans valószínűségi változó eloszlásfüggvénye: $F(x) = 0$, ha $x \le c$, $F(x) = 1$, ha $x > c$.

3.1.1. ábra. A $p = 1/2$, $n = 4$ paraméterű binomiális eloszlás eloszlásfüggvénye



3.1.11. EXERCISE. a) Ábrázoljuk az egyenletes és a Bernoulli-eloszlás eloszlásfüggvényét!

b) Ábrázoljuk a $p = 1/2, n = 4$ paraméterű binomiális eloszlás eloszlásfüggvényét! (3.1.3. ábra.)

c) Dobjunk egy pontot véletlenszerűen a $[-1, 1]$ intervallumra! Tegyük fel, hogy egy mágnes van a -1 pontban, mely a ledobott pontot magához vonzza, ha az a $[-1, 0]$-ra esik. Jelölje ξ a ledobott pont végső helyét. Ábrázoljuk ξ eloszlásfüggvényét! (3.1.3. (a) ábra.)

3.1.12. THEOREM. *Egy $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény akkor és csak akkor eloszlásfüggvénye valamely valószínűségi változónak, ha*

a) monoton nemcsökkenő;

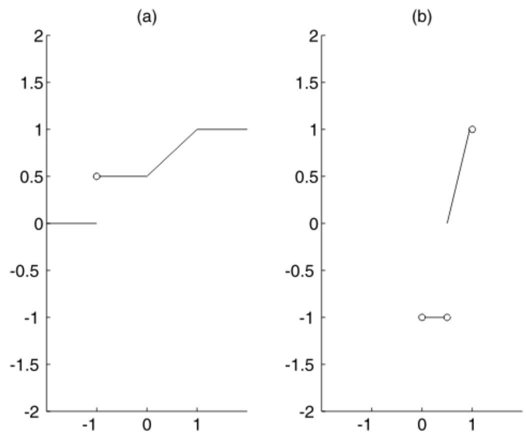
b) balról folytonos;

c) $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$, $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$.

BIZONYÍTÁS. Legyen F a ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye.

a) Legyen $x < y$. Ekkor $\{\omega : \xi(\omega) < x\} \subseteq \{\omega : \xi(\omega) < y\}$. Így a valószínűség monotonitása miatt $F(x) = P(\xi < x) \le P(\xi < y) = F(y)$.

3.1.2. ábra. Eloszlásfüggvény és inverze



b) Azt kell belátni, hogy $\lim_{n\to\infty} F(x_n) = F(x)$, ha $\{x_n\}$ az x-hez balról konvergáló sorozat. Legyen $\{x_n\}$ az x-hez konvergáló, monoton nemcsökkenő sorozat. Ekkor $\{\omega : \xi(\omega) < x_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, olyan növekvő eseménysorozat, melynek uniója $\{\omega : \xi(\omega) < x\}$. A valószínűség folytonosságából $F(x_n) = P(\xi < x_n) \to P(\xi < x) = F(x)$. Speciálisan, $F(x - 1/n) \to F(x)$. Legyen most $\{x_k\}$ az x-hez balról konvergáló tetszőleges (nem monoton) sorozat. $\varepsilon > 0$ számot rögzítve, az előzőek alapján létezik n_ε úgy, hogy

$$F(x) - F(x - 1/n_\varepsilon) < \varepsilon. \tag{3.1.2}$$

Mivel $x_k \to x$, így létezik k_ε, amelyre $x - x_k < 1/n_\varepsilon$, ha $k > k_\varepsilon$. Az F monotonitása és (3.1.2) miatt

$$|F(x) - F(x_k)| < \varepsilon, \quad \text{ha } k > k_\varepsilon.$$

c) $\lim\limits_{x_n\to\infty} F(x_n) = 1$ monoton növő $\{x_n\}$ sorozatra a valószínűség folytonosságából adódik. A nem monoton $\{x_n\}$ sorozat esete pedig - a b) részhez hasonlóan - visszavezethető a monoton esetre. $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$ ugyanígy bizonyítható.

A másik irány bizonyításához tegyük fel, hogy F rendelkezik az a)-c) tulajdonságokkal. Legyen először speciálisan F szigorúan monoton és folytonos függvény. Ekkor F-nek létezik inverze, mely szintén szigorúan monoton és folytonos. Legyen most $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ a $(0,1)$ intervallum a Borel-halmazokkal és a Lebesgue-mértékkel ellátva (másszóval $(0,1)$-en a valószínűség geometriai kiszámítási módját alkalmazzuk). Legyen $\xi = F^{-1}$. Ekkor $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ mérhető, így valószínűségi változó. ξ eloszlásfüggvénye:

$$F_\xi(x) = P(\xi < x) = P\{\omega : F^{-1}(\omega) < x\} = P\{\omega : \omega < F(x)\} = F(x).$$

Legyen most F tetszőleges a)-c) tulajdonságokkal rendelkező függvény. Definiáljuk F „inverzét” az $F^{-1}(x) = \inf\{y : F(y) > x\}, \quad x \in (0,1)$ képlettel. (Például a (3.1.3) (a) ábrán lévő eloszlásfüggvńy ilyen „inverze” a (3.1.3) (b) ábrán látható.) A szigorúan monoton és folytonos F-ek esetére az előzőekben alkalmazott gondolatmenet erre az esetre is átvihető. $\square$

3.1.13. EXAMPLE. $F(x) = (1/\pi)\arctan x + 1/2$ teljesíti a)-c)-t, tehát eloszlásfüggvény. Ezt $(\lambda = 1,\ \mu = 0)$ *paraméterű Cauchy-eloszlásnak* nevezzük.

3.1.14. THEOREM. *Legyen F a ξ eloszlásfüggvénye. Ekkor*

a) $P(\xi \in [a, b)) = F(b) - F(a)$;

b) $P(\xi = a) = F(a + 0) - F(a)$;

c) $P(\xi \in [a, b]) = F(b + 0) - F(a)$.

BIZONYÍTÁS. a) $P(\xi \in [a, b)) = P(\xi < b) - P(\xi < a) = F(b) - F(a)$.
b) $\{\xi = a\} = \cap_{n=1}^{\infty}\{\xi \in [a, a + 1/n)\}$. Így a valószínűség folytonosságából adódik az állítás.
c) az a) és b) következménye. □

Megjegyezzük, hogy b) alapján F akkor és csak akkor folytonos egy x pontban, ha $P(\xi = x) = 0$.

3.1.15. EXERCISE. Lássuk be, hogy

$$P(\xi \in (a, b)) = F(b) - F(a + 0),$$

és

$$P(\xi \in (a, b]) = F(b + 0) - F(a + 0).$$

3.1.4. Kvantilisek Egy ξ valószínűségi változó mediánjának azt a számot nevezzük, melynél nagyobb, illetve kisebb értékeket ξ ugyanolyan valószínűséggel vesz fel.

A μ számot a ξ valószínűségi változó *mediánjának* nevezzük, ha

$$P(\xi < \mu) \le 1/2, \quad P(\xi > \mu) \le 1/2.$$

3.1.16. THEOREM. *A medián mindig létezik.*

BIZONYÍTÁS. Legyen F a ξ eloszlásfüggvénye. Legyen

$$\mu = \sup\{x : F(x) \le 1/2\}.$$

Mivel F balról folytonos, így $P(\xi < \mu) = F(\mu) \le 1/2$. Másrészt, $\varepsilon > 0$ esetén $P(\xi \ge \mu + \varepsilon) = 1 - F(\mu + \varepsilon) < 1/2$. A valószínűség folytonossága miatt $P(\xi > \mu) \le 1/2$. □

3.1.17. EXERCISE. Mutassuk meg, hogy az $[a, b]$-n egyenletes eloszlás mediánja $\mu = (a + b)/2$.

A következő problémák is igen tanulságosak:

3.1.18. EXERCISE. a) Lássuk be, hogy ha F szigorúan monoton és folytonos eloszlásfüggvény, akkor a medián az $F(x) = 1/2$ egyenlet egyértelmű megoldása!
b) Adjunk példát olyan F eloszlásfüggvényre, melyre a medián nem egyértelmű!
c) Lássuk be, hogy a mediánt nem lehetne az $F(x) = 1/2$ megoldásaként definiálni!
d) A medián definiálható a

$$P(\xi \le \mu) \ge 1/2, \quad P(\xi \ge \mu) \ge 1/2$$

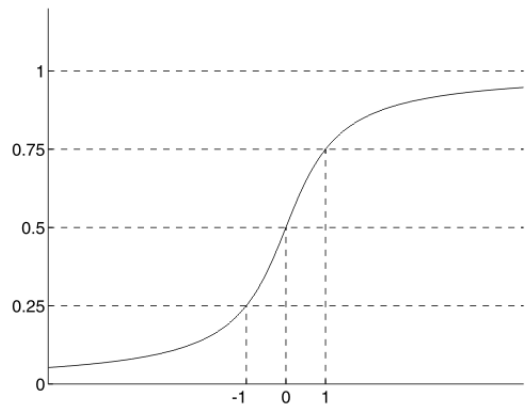
feltételek egyidejű teljesülésével is.

3.1.19. Definition. Legyen $0 < q < 1$. A ξ *q-kvantilisén* azt a $Q(q)$ számot értjük, melyre

$$P(\xi < Q(q)) \leq q, \quad P(\xi > Q(q)) \leq 1 - q.$$

A 0.25-kvantilist *alsó kvartilisnek* a 0.75-kvantilist *felső kvartilisnek* nevezzük. A Cauchy-eloszlás kvartilisei és mediánja a 3.1.19. ábrán láthatóak.

3.1.3. ábra. A Cauchy-eloszlás kvartilisei és mediánja



3.1.20. Example. a) $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, ha $x \geq 0$, $F(x) = 0$, ha $x < 0$ (ahol $\lambda > 0$ rögzített) képlet által definiált F függvény eloszlásfüggvény. Az ehhez tartozó eloszlást *exponenciális eloszlásnak* nevezzük.

b) Az exponenciális eloszlás q-kvantilise: $Q(q) = -[\log(1-q)]/\lambda$.

3.1.21. Definition. ξ-t *szimmetrikusnak* nevezzük, ha ξ és $-\xi$ eloszlása megegyezik.

3.1.22. Note. A ($\lambda = 1, \mu = 0$ paraméterű) Cauchy-eloszlás, a $[-a, +a]$-n egyenletes eloszlás szimmetrikus, míg az exponenciális eloszlás nem az.

3.1.23. Exercise. a) Lássuk be, hogy a szimmetrikus eloszlások mediánja $\mu = 0$.

b) Milyen alakú a szimmetrikus valószínűségi változók eloszlásfüggvénye?

Gyakorlatok

(1) Az alábbi függvények közül melyek eloszlásfüggvények? Ábrázolja is őket! (Az alábbiakban $F(x) = 0$ az adott intervallum „alatt”, és $F(x) = 1$ „felette”.)
  (a) $F(x) = \sin(x)$, ha $0 \leq x \leq \pi/2$,
  (b) $F(x) = x^p$, ha $0 \leq x \leq 1$,
  (c) $F(x) = \frac{ax}{1+x}$, ha $0 \leq x < \infty$ és a valós paraméter,
  (d) $F(x) = \ln x$, ha $1 \leq x \leq e$.

(2) Van-e olyan F és G eloszlásfüggvény, melyekre $F(x) < G(x)$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén? Van-e az $F(x) \leq 0.9G(x)$ egyenlőtlenséget teljesítő eloszlásfüggvénypáros?

(3) Adjunk példát két különböző valószínűségi változóra, melyeknek egyforma az eloszlásfüggvényük!
(4) Legyen ξ λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Számítsuk ki $\eta = e^{-\xi}$ eloszlásfüggvényét!
(5) Legyen ξ egyenletes eloszlású a $(0, 1)$ intervallumban. Határozzuk meg a következő valószínűségi változók eloszlásfüggvényét: a) $\eta = \xi + 1$; b) $\eta = 3\xi$; c) $\eta = \xi^3$; d) $\eta = \sqrt{\xi}$; e) $\eta = 1/\xi$; *f)* $\eta = |\xi - 1/2|$.
(6) Legyen ξ $\lambda = 1$ paraméterű exponenciális eloszlású. Lássuk be, hogy $\eta = 1 - e^{-\xi}$ $[0, 1]$-en egyenletes eloszlású!
(7) Legyen ξ eloszlásfüggvénye F. Tegyük fel, hogy F folytonos típusú, azaz egy $[a, b]$ intervallumon szigorúan monoton és folytonos, továbbá $F(a) = 0$ és $F(b) = 1$. Lássuk be, hogy $F(\xi)$ a $[0, 1]$-en egyenletes eloszlású! Milyen viszonyban van ez az állítás azzal, hogy ξ és F^{-1} eloszlása megegyezik?
(8) Tegyük fel, hogy $\xi \geq 0$ és ξ^2 egyenletes eloszlású $(0, 1)$-en. Számítsuk ki ξ eloszlásfüggvényét! Milyen kapcsolatot látunk az előző feladattal?
(9) Alkatrészek élettartama a megfigyelések szerint közelítőleg exponenciális eloszlású. Tegyük fel, hogy egy izzó élettartama exponenciális eloszlású λ paraméterrel. Azonban $2/\lambda$ idő után akkor is kicserélik, ha még nem égett ki. Számítsuk ki az ilyen módon „csonkított” élettartamú izzó élettartamának eloszlásfüggvényét!
(10) Legyen ξ $\lambda = 1$ paraméterű exponenciális eloszlású. Határozzuk meg azt a legrövidebb intervallumot, melybe ξ $1/2$ valószínűséggel esik!
(11) Lássuk be, hogy $F(x) = 0$, ha $x \leq 0$; $F(x) = (2/\pi) \arcsin \sqrt{x}$, ha $0 < x \leq 1$; $F(x) = 1$, ha $x > 1$, által definiált F függvény eloszlásfüggvény (ún. arkusz szinusz eloszlás).

Ellenőrző kérdések

(1) Hogyan definiáljuk az eloszlásfüggvényt?
(2) Igaz-e, hogy minden monoton növekvő függvény eloszlásfüggvény?

3.2. Sűrűségfüggvények

3.2.1. A sűrűségfüggvény fogalma Az eloszlásoknak egyik jól kezelhető családját alkotják azok, amelyeknek létezik ún. sűrűségfüggvényük.

3.2.1. Definition. Legyen ξ eloszlásfüggvénye F. Azt mondjuk, hogy ξ eloszlása *abszolút folytonos*, ha létezik olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borel-mérhető függvény, melyre

$$\boxed{F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt, \quad \forall x \in \mathbb{R}} \tag{3.2.1}$$

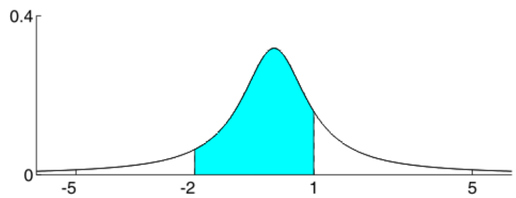
teljesül. f-et ξ *sűrűségfüggvényének* nevezzük.

3.2.2. Example. (1) Ha ξ az $[a, b]$-n egyenletes eloszlású, akkor sűrűségfüggvénye $f(x) = 1/(b - a)$, ha $x \in [a, b]$, és $f(x) = 0$, ha $x \notin [a, b]$.

(2) Ha ξ exponenciális eloszlású, akkor sűrűségfüggvénye $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, ha $x \geq 0$, és $f(x) = 0$, ha $x < 0$.

(3) Ha ξ ($\lambda = 1$, $\mu = 0$ paraméterű) Cauchy-eloszlású, akkor sűrűségfüggvénye $f(x) = 1/(\pi(1 + x^2))$, $x \in \mathbb{R}$. (Igazoljuk, hogy a fenti függvények tényleg kielégítik (3.2.1)-et a megfelelő F eloszlásfüggvények esetén! Ábrázoljuk a fenti eloszlásfüggvény-sűrűségfüggvény párokat!)

3.2.1. ábra. A Cauchy-eloszlás sűrűségfüggvénye



Annak valószínűsége, hogy egy valószínűségi változó beleesik egy $[a, b)$ intervallumba, a sűrűségfüggvénye alatti területnek az $[a, b)$ fölé eső részével egyenlő. A ($\lambda = 1$, $\mu = 0$ paraméterű) Cauchy-eloszlás esetén ezt a 3.2.1 ábra szemlélteti. A $[-2, 1]$ intervallumba esés valószínűsége a besatírozott rész területével egyenlő.

3.2.3. Theorem. *Ha ξ sűrűségfüggvénye f, akkor*

$$\boxed{P(\xi \in B) = \int_B f(x)\, dx}$$

a számegyenes minden B Borel-halmazára. Speciálisan, sűrűségfüggvénnyel rendelkező ξ esetén $P(\xi = x) = 0$ bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén.

Az következő tétel ennek következménye:

3.2.4. Theorem. *Az abszolút folytonos eloszlások eloszlásfüggvénye folytonos. Egyetlen diszkrét eloszlásnak sincs sűrűségfüggvénye.*

A diszkrét, illetve az abszolút folytonos eloszlások csupán szűk speciális családjai az összes eloszlás halmazának. Az alábbi ún. csonkított Cauchy-eloszlás sem nem diszkrét, sem nem abszolút folytonos. Legyen η ($\lambda = 1$, $\mu = 0$ paraméterű) Cauchy-eloszlású. Legyen $\xi = \eta$, ha $|\eta| < a$ ($a > 0$ rögzített); $\xi = a$, ha $\eta \geq a$; és $\xi = -a$, ha $\eta \leq -a$. Ekkor ξ eloszlása:

$$P(\xi < -a) = P(\xi > a) = 0, P(\xi = -a) = P(\xi = +a) = \int_a^\infty 1/(\pi(1 + x^2))dx,$$

míg $(-a, a)$-ban ξ eloszlását az $1/(\pi(1 + x^2))$ sűrűségfüggvény írja le. (A fentiek alapján adjuk meg ξ eloszlásfüggvényét!)

3.2.5. Theorem. *$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ akkor és csak akkor sűrűségfüggvénye valamely ξ valószínűségi változónak, ha f Borel-mérhető, nemnegatív (a Lebesgue-mérték szerint majdnem mindenütt) és*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

Bizonyítás. A tétel pontos bizonyítása a Lebesgue-integrál tulajdonságai alapján könnyen megadható. Az alábbiakban a Riemann-integrálra támaszkodó részleges bizonyítást közlünk.

Legyen (speciálisan) f nemnegatív, Riemann-integrálható, továbbá $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$. Ekkor az $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ összefüggés által definiált F függvény teljesíti az eloszlásfüggvények jellemző tulajdonságait. A balról folytonosság abból adódik, hogy az integrál mint a felső határ függvénye folytonos. A monoton nemcsökkenő-ség pedig az f nemnegativitásából és az integrál intervallum szerinti additivitásából következik. Végül $F(\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$. Így f a fenti F-hez tartozó sűrűség-függvény.

Megfordítva, legyen f az F-hez tartozó sűrűségfüggvény. Ekkor $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = F(\infty) = 1$. Továbbá, $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \geq 0$. Tehát f integrálja minden intervallumon nemnegatív. Ha most még azt is feltesszük (speciálisan), hogy f folytonos, akkor a nemnegativitása azonnal adódik. □

Megjegyezzük, hogy a gyakorlatban szakaszonként folytonos és mindenütt nemnegatív sűrűségfüggvények fordulnak elő.

3.2.6. Example. Legyen $f(x) = \sin x$, ha $x \in [0, \pi/2]$ és $f(x) = 0$ egyébként. Ekkor $f(x)$ egy pont kivételével folytonos, így Borel-mérhető. $f(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_0^{\pi/2} \sin x dx = -\cos(\pi/2) + \cos 0 = 1.$$

Így f sűrűségfüggvény.

Az esetek többségében az eloszlásfüggvényt „szakaszonként differenciálva" kapjuk meg a sűrűségfüggvényt.

3.2.7. Example. Dobjunk egy pontot véletlenszerűen az egységnégyzetre! Jelölje ξ a pont távolságát a legközelebbi oldaltól. Ekkor ξ eloszlásfüggvénye: $F(x) = 0$, ha $x \leq 0$; $F(x) = 1 - (1-2x)^2 = 4x - 4x^2$, ha $0 < x \leq 1/2$; $F(x) = 1$, ha $x > 1/2$. A sűrűségfüggvény: $f(x) = 4 - 8x$, ha $x \in [0, 1/2]$; $f(x) = 0$, ha $x \notin [0, 1/2]$.

3.2.2. A normális eloszlás

A statisztikában alapvető szerepet játszik az ún. normális eloszlás.

A ξ valószínűségi változót *normális eloszlásúnak* nevezzük, ha sűrűségfüggvénye

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-m)^2/(2\sigma^2)} \quad x \in \mathbb{R}}$$

alakú, ahol m tetszőleges, σ pedig pozitív valós szám. Azt, hogy ξ m és σ paraméterű normális eloszlású, azaz sűrűségfüggvénye a fenti, $\xi \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ jelöli. Ha $\xi \sim \mathcal{N}(0,1)$, akkor ξ-t *standard normális eloszlásúnak* nevezzük.

A fenti f függvény határozatlan integrálja (azaz a megfelelő eloszlásfüggvény) nem adható meg zárt alakban. Az, hogy f tényleg sűrűségfüggvény, külön bizonyítást igényel, amit a következő fejezetben végzünk el.

f az $x = m$-re szimmetrikus, harang alakú görbe, mely σ növelésével egyre „laposabbá" válik. A standard normális eloszlás szimmetrikus. Így eloszlásfüggvényére $F(-x) = 1 - F(x)$.

3.2.8. Theorem. *Ha η standard normális eloszlású, $\sigma \neq 0$, akkor $\xi = \sigma\eta + m$ eloszlása $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Megfordítva, ha $\xi \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, akkor $\eta = (\xi - m)/\sigma$ standard normális eloszlású.*

Bizonyítás. Legyen $\eta \sim \mathcal{N}(0,1)$. Ekkor $\xi = \sigma\eta + m$-re (ha $\sigma > 0$)

$$F_\xi(x) = P(\xi < x) = P(\sigma\eta + m < x) = P\left(\eta < \frac{x-m}{\sigma}\right) = F_\eta\left(\frac{x-m}{\sigma}\right).$$

Így ξ sűrűségfüggvénye

$$f_\xi(x) = f_\eta\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)\cdot\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-(x-m)^2/2\sigma^2}.$$

A megfordítás bizonyítása hasonlóan történik. □

A fenti állítás alapján adódik, hogy normális eloszlású valószínűségi változó lineáris függvénye is normális eloszlású.

3.2.3. Valószínűségi változók függvényei

3.2.9. Example. Legyen $\xi \sim \mathcal{N}(0,1)$. Ekkor az $\eta = \xi^2$ valószínűségi változót 1 szabadsági fokú khi-négyzet eloszlásúnak nevezzük (jele: $\eta \sim \chi_1^2$). η eloszlásfüggvénye:

$$F_\eta(x) = P(\eta < x) = P(\xi^2 < x) = P(-\sqrt{x} < \xi < \sqrt{x}) =$$
$$F_\xi(\sqrt{x}) - F_\xi(-\sqrt{x}) = 2F_\xi(\sqrt{x}) - 1,$$

ha $x > 0$. Így η sűrűségfüggvénye:

$$f_\eta(x) = F_\eta'(x) = \frac{d\,2F_\xi(\sqrt{x})}{dx} = 2f_\xi(\sqrt{x})\cdot\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot e^{-x/2},$$

ha $x > 0$, egyébként $f_\eta(x) = 0$.

Gyakorlatok

(1) Lássuk be, hogy $f(x) = (1/2)e^{-|x|}$, $x \in \mathbb{R}$, sűrűségfüggvény! Ábrázoljuk a megfelelő eloszlásfüggvényt! Legyen ξ a fenti sűrűségfüggvényű valószínűségi változó. Határozzuk meg az alábbi események valószínűségét: $\{|\xi| < 2\}$, $\{e^{\sin\pi\xi} \geq 1\}$, $\{\xi$ irracionlis$\}$.
(2) Az alábbiak közül melyek sűrűségfüggvények? (Az alábbi tartományokon kívül a függvények mindenütt nullák.)
  (a) $f(x) = a\sin(x)$, $0 \leq x \leq \pi$,
  (b) $f(x) = \frac{1}{x^p}$, $1 \leq x < \infty$,
  (c) $f(x) = \ln\frac{1}{x}$, $0 < x < 1$.
(3) Teljesítheti-e két sűrűségfüggvény az $f(x) \leq 0.99g(x)$ feltételt minden x esetén?
(4) Legyen ξ $\lambda = 1$ paraméterű exponenciális eloszlású. Legyen $\eta = \xi$, ha $\xi \leq 1$ és $\eta = 1/\xi$, ha $\xi > 1$. Számítsuk ki η eloszlásfüggvényét! Mutassuk meg, hogy η abszolút folytonos, és határozzuk meg a sűrűségfüggvényét!
(5) Legyen ξ egyenletes eloszlású $[-1,1]$-en. Határozzuk meg $\eta = e^{-\xi}$ eloszlás- és sűrűségfüggvényét!
(6) Legyen ξ sűrűségfüggvénye f_ξ. Lássuk be, hogy $P(\xi \in [a,b]) = 1$ akkor és csak akkor teljesül, ha $f_\xi(x) = 0$ minden $x \notin [a,b]$ esetén (eltekintve egy nulla Lebesgue-mértékű halmaztól)!
(7) Legyen ξ sűrűségfüggvénye f_ξ. Lássuk be, hogy ξ akkor és csak akkor szimmetrikus, ha f_ξ szimmetrikus az y tengelyre!
(8) Ábrázoljuk a normális eloszlás sűrűségfüggvényét! Határozzuk meg, hogy a görbének hol van maximuma, illetve inflexiós pontja!
(9) Legyen $\xi \sim \mathcal{N}(m,\sigma^2)$. Határozzuk meg, hogy ξ milyen valószínűséggel esik az $[m-k\sigma, m+k\sigma]$ intervallumba $k = 1,2,3$ esetén!
(10) Lássuk be, hogy a legrövidebb olyan intervallum, melybe $\xi \sim \mathcal{N}(m,\sigma^2)$ adott α valószínűséggel esik, m-re szimmetrikus!

(11) Mutassuk meg, hogy az arkusz szinusz eloszlás sűrűségfüggvénye $f(x) = 1/(\pi\sqrt{x(1-x)})$ $(0 < x < 1)$.

(12) Az η valószínűségi változót (λ, μ)-paraméterű Cauchy-eloszlásúnak nevezzük, ha eloszlásfüggvénye

$$F(y) = (1/\pi)\arctan[(y-\mu)/\lambda] + 1/2,$$

ahol $\lambda > 0$. Lássuk be, hogy ha ξ $(1,0)$ paraméterű Cauchy-eloszlású, akkor $\eta = \lambda\xi + \mu$ (ahol $\lambda > 0$) (λ, μ)-paraméterű Cauchy-eloszlású! Lássuk be, hogy η sűrűségfüggvénye

$$f(y) = (1/\pi)\{\lambda/[\lambda^2 + (y-\mu)^2)]\}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Ellenőrző kérdések

(1) Mi a sűrűségfüggvény definíciója?
(2) Mik a sűrűségfüggvény jellemző tulajdonságai?
(3) Van-e sűrűségfüggvénye a binomiális eloszlásnak?

3.3. A várható érték és a szórás

3.3.1. A várható érték definíciója A diszkrét eloszlások esetén a várható értéket az

$$\mathbb{E}\xi = \sum_i x_i P(\xi = x_i) \tag{3.3.1}$$

képlettel határoztuk meg. Ezt a képletet abszolút folytonos eloszlásokra nem lehet közvetlenül átvinni, hiszen ott $P(\xi = x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$. A fenti képlettel analóg formulát akkor kapunk, ha ξ-t „rövid" intervallumokon egyetlen értékkel, pl. az intervallum egyik végpontjával helyettesítjük:

$$\mathbb{E}\xi \approx \sum_i x_i P(x_i \le \xi < x_{i+1}) = \sum_i x_i[F_\xi(x_{i+1}) - F_\xi(x_i)]. \tag{3.3.2}$$

A képletben a ξ-nek olyan középértéke szerepel, amelyben minden részintervallum olyan súllyal kerül számításba, amilyen valószínűséggel ξ abba esik. A fenti középértékeket egyre „pontosabbnak" gondolhatjuk, ha a beosztás részintervallumainak hossza a 0-hoz tart. Így végeredményben a Lebesgue-, illetve a Lebesgue-Stieltjes-féle integrálhoz jutunk:

$$\mathbb{E}\xi = \int_\Omega \xi(\omega)dP(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\,dF_\xi(x). \tag{3.3.3}$$

A ξ várható értékére ténylegesen a (3.3.3) képletbeni integrálokat használják, azonban a Lebesgue-féle integrálelmélet apparátusa nélkül is lehet értelmezni az abszolút folytonos eloszlások várható értékét. A (3.3.2) képlet alapján ugyanis

$$\mathbb{E}\xi \approx \sum_i x_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} f_\xi(x)dx \approx \int_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x)dx.$$

3.3.1. Definition. Legyen a ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye f. Ha $\int_{-\infty}^{+\infty}|x|f(x)dx$ véges, akkor azt mondjuk, hogy ξ-nek *létezik véges várható értéke.* Ekkor az

$$\boxed{\mathbb{E}\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx} \tag{3.3.4}$$

által meghatározott mennyiség létezik és véges. Az $\mathbb{E}\xi$ számot ξ *várható értékének* nevezzük.

Megjegyezzük, hogy $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|f(x)dx = \infty$ esetén lehet, hogy $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \infty$ (vagy $-\infty$), de az is előfordulhat, hogy a várható értéket még ilyen tágabb értelemben sem tudnánk definiálni, hiszen $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$-nek mind a pozitív, mind a negatív része lehet egyszerre ∞. Így (ha mást nem mondunk), csak az $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|f(x)dx < \infty$ esetet vizsgáljuk.

Be lehet bizonyítani, hogy a (3.3.4) képlet (miként (3.3.1) is) (3.3.3) speciális esete. Az általunk kimondott tételek az általános esetre fognak vonatkozni (hacsak mást nem állítunk), a bizonyításokat azonban legfeljebb a (3.3.4) képlettel kiszámítható várható értékre tudjuk elvégezni. A várható érték csak a ξ eloszlásától (de nem magától ξ-től) függ.

3.3.2. Example. Legyen ξ egyenletes eloszlású $[a, b]$-n. Ekkor

$$\mathbb{E}\xi = \int_{-\infty}^{\infty} xf_\xi(x)dx = \int_a^b x\frac{1}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{a+b}{2}.$$

Tehát ξ várható értéke éppen az $[a, b]$ intervallum középpontja.

A Cauchy-eloszlásnak nem létezik várható értéke. Ezt mutatja be az alábbi példa.

3.3.3. Example. Legyen ξ $\lambda = 1$, $\mu = 0$ paraméterű Cauchy-eloszlású. Ekkor

$$\int_0^{\infty} xf_\xi(x)dx = \int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^2}dx = \left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^{\infty} = \infty.$$

Hasonlóan, $\int_{-\infty}^{0} xf_\xi(x)dx = -\infty$. Így $\int_{-\infty}^{+\infty} xf_\xi(x)dx$ határozatlan kifejezés, azaz a Cauchy-eloszlásnak valóban nem létezik várható értéke.

3.3.2. Momentumok

3.3.4. Theorem. *Legyen a ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye f. Legyen g Borel-mérhető. Ha $\int |g(x)|f(x)dx < \infty$, akkor*

$$\boxed{\mathbb{E}g(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx}.$$

3.3.5. Definition. Legyen $k \geq 0$. A ξ valószínűségi változó *k-adik momentumának* az $\mathbb{E}\xi^k$ mennyiséget nevezzük (amennyiben létezik).

A k-adik momentum kiszámítása az előző állítás alapján

$$\mathbb{E}\xi^k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f_\xi(x)dx$$

szerint történhet, ha ξ sűrűségfüggvénye f_ξ.

Megjegyezzük, hogy a magasabb rendű momentum végességéből következik az alacsonyabb rendű momentum végessége. Valóban, ha $n > k \geq 0$, és $\mathbb{E}|\xi|^n < \infty$, akkor

$$\mathbb{E}|\xi|^k = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^k f(x)dx = \int_{|x|\leq 1} |x|^k f(x)dx + \int_{|x|>1} |x|^k f(x)dx.$$

Az első tag mindig véges (sőt, 1-nél nem nagyobb), a második tag pedig

$$\int_{|x|>1} |x|^k f(x)\, dx \le \int_{|x|>1} |x|^n f(x)\, dx \le \mathbb{E}|\xi|^n < \infty.$$

3.3.6. Example. (1) Az exponenciális eloszlás momentumai:

$$\mathbb{E}\xi^k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)dx = \int_0^{\infty} x^k \lambda e^{-\lambda x} dx = \left[-x^k e^{-\lambda x}\right]_0^{\infty} -$$

$$- \int_0^{\infty} -k\, x^{k-1} e^{-\lambda x} dx = \frac{k}{\lambda} \int_0^{\infty} x^{k-1} \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{k}{\lambda} \mathbb{E}\xi^{k-1}.$$

Mivel

$$\mathbb{E}\xi^0 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1,$$

így az előző rekurzív képlet alapján, $\mathbb{E}\xi^k = k!/\lambda^k$. Speciálisan, $\mathbb{E}\xi = 1/\lambda$.
(2) A standard normális eloszlás momentumai.

$$\mathbb{E}\xi^k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx.$$

Páratlan k-ra a fenti integrál értéke 0. Páros k-ra (parciálisan integrálva):

$$\mathbb{E}\xi^k = \int_{-\infty}^{\infty} x^{k-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x\, e^{-x^2/2} dx = -\left[x^{k-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\right]_{-\infty}^{+\infty} +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} (k-1) x^{k-2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx = (k-1)\mathbb{E}\xi^{k-2}.$$

Mivel $\mathbb{E}\xi^0 = 1$, így $\mathbb{E}\xi^k = (k-1)!!$, ha k páros (itt $(k-1)!! = (k-1)(k-3)\cdots 1$, azaz $(k-1)$ szemifaktoriális).

3.3.3. A várható érték tulajdonságai

3.3.7. Theorem. *A várható érték lineáris funkcionál a véges várható értékkel rendelkező valószínűségi változók lineáris terén.*

A tétel más szavakkal a következőképp fejezhető ki. Ha ξ várható értéke véges, $c \in \mathbb{R}$, akkor $c\xi$ várható értéke is véges, és

$$\boxed{\mathbb{E}c\xi = c\mathbb{E}\xi,} \tag{3.3.5}$$

továbbá, ha ξ és η várható értéke véges, akkor $\xi + \eta$ várható értéke is véges, és

$$\boxed{\mathbb{E}(\xi + \eta) = \mathbb{E}\xi + \mathbb{E}\eta.} \tag{3.3.6}$$

(3.3.5) a 3.3.4 Tételből következik, hiszen $\eta = c\xi$ várható értéke

$$\mathbb{E}\eta = \int_{-\infty}^{\infty} cx f_\xi(x)dx = c\mathbb{E}\xi.$$

A (3.3.6) képletet speciális esetekben később fogjuk belátni.

3.3.8. Exercise. (3.3.5) és (3.3.6) alapján lássuk be, hogy ha $\xi_1, \ldots, \xi_n$ véges várható értékkel rendelkező valószínűségi változók és $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$, akkor

$$\mathbb{E}(c_1\xi_1 + \cdots + c_n\xi_n) = c_1\mathbb{E}\xi_1 + \cdots + c_n\mathbb{E}\xi_n.$$

3.3.9. THEOREM. *a) Ha $\xi \geq 0$, akkor $\mathbb{E}\xi \geq 0$.*
b) Ha $\xi \geq \eta$, akkor $\mathbb{E}\xi \geq \mathbb{E}\eta$.
c) Ha $\xi \geq 0$ és $\mathbb{E}\xi = 0$, akkor $P(\xi = 0) = 1$.

BIZONYÍTÁS. a) Ha $\xi \geq 0$, akkor $f_\xi(x) = 0$, ha $x < 0$. Így

$$\mathbb{E}\xi = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{0}^{\infty} xf(x)dx \geq 0.$$

b) Az a)-ból közvetlenül adódik. □

3.3.4. A szórás A *szórás* és a *szórásnégyzet* definíciója és tulajdonságai megegyeznek a diszkrét esetben adottakkal:

$$\boxed{\mathbb{D}^2\xi = \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^2 = \mathbb{E}\xi^2 - \mathbb{E}^2\xi}. \tag{3.3.7}$$

3.3.10. EXAMPLE. (1) Legyen ξ egyenletes eloszlású $[a, b]$-n. Ekkor

$$\mathbb{E}\xi^2 = \int_a^b x^2/(b-a)dx = (b^3 - a^3)/(3(b-a)).$$

Ezért

$$\mathbb{D}^2\xi = \mathbb{E}\xi^2 - \mathbb{E}^2\xi = (b^2 + ab + a^2)/3 - (a+b)^2/4 = (b-a)^2/12.$$

Természetes, hogy a szórás az $[a, b]$ intervallum hosszától függ.

(2) Legyen ξ exponenciális eloszlású. Ekkor

$$\mathbb{D}^2\xi = \mathbb{E}\xi^2 - \mathbb{E}^2\xi = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Könnyen látható, hogy minden szórással rendelkező ξ esetén

$$\boxed{\mathbb{D}^2(a\xi + b) = a^2\mathbb{D}^2\xi}. \tag{3.3.8}$$

3.3.11. EXAMPLE. Legyen $\eta \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Ekkor η reprezentálható $\eta = \sigma\xi + m$ alakban, ahol $\xi \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

$$\mathbb{D}^2\xi = \mathbb{E}\xi^2 - \mathbb{E}^2\xi = 1 - 0 = 1.$$

Innen

$$\mathbb{E}\eta = \sigma\mathbb{E}\xi + m = m,$$

továbbá

$$\mathbb{D}^2\eta = \sigma^2\mathbb{D}^2\xi = \sigma^2.$$

Így a normális eloszlás paramétereinek jelentése: m a várható érték, σ^2 pedig a szórásnégyzet.

3.3.12. THEOREM. *Ha $0 < \mathbb{D}^2\xi < \infty$, akkor az $\eta = (\xi - \mathbb{E}\xi)/\mathbb{D}\xi$ valószínűségi változóra $\mathbb{E}\eta = 0$ és $\mathbb{D}^2\eta = 1$. η-t nevezzük a ξ* standardizáltjának.

BIZONYÍTÁS. A várható érték linearitásából és (3.3.8) képletből adódik. □

Gyakorlatok

(1) Számítsuk ki az $f(x) = \log(1/x)$ $(0 < x < 1)$ sűrűségfüggvényű ξ valószínűségi változó várható értékét és szórását!

(2) Számítsuk ki az $f(x) = e^{-|x|}/2$ sűrűségfüggvényű valószínűségi változó várható értékét és szórását!
(3) Adjunk példát olyan valószínűségi változóra, melynek a mediánja nem egyezik meg (illetve megegyezik) a várható értékével!
(4) Legyen ξ eloszlásfüggvénye $F(x) = \sin(x)$, ha $0 \leq x \leq \pi/2$, $F(x) = 0$, ha $x < 0$ és $F(x) = 1$, ha $x > \pi/2$. Számolja ki ξ mediánját és várható értékét!
(5) Legyen $f(x) = 3x^2$, ha $x \in [0, 1]$ és $f(x) = 0$ egyébként. Lássuk be, hogy f sűrűségfüggvény. Határozzuk meg a megfelelő eloszlásfüggvényt, mediánt, várható értéket és szórásnégyzetet!

Ellenőrző kérdések

(1) Mi a várható érték definíciója?
(2) Mi a szórásnégyzet definíciója?
(3) $\mathbb{E}(a\xi + b) =?$, $\mathbb{D}^2(a\xi + b) =?$

3.4. Valószínűségi változók együttes eloszlása

3.4.1. Együttes eloszlásfüggvények ξés η külön-külön vett eloszlása nem határozza meg ξ és η együttes viselkedését.

A ξ és η valószínűségi változók *együttes eloszlásán* a sík B Borel-halmazaira értelmezett

$$P_{\xi,\eta}(B) = P\left((\xi, \eta) \in B\right)$$

halmazfüggvényt értjük.

Belátható, hogy $P_{\xi,\eta}$ valószínűség a sík Borel-halmazain. Az eloszlásnál könnyebben kezelhető az eloszlásfüggvény.

A ξ és η valószínűségi változók együttes eloszlásfüggvényén az

$$\boxed{F(x, y) = P(\xi < x, \eta < y) \quad x, y \in \mathbb{R}}$$

által definiált kétváltozós valós függvényt értjük.

Belátható, hogy az eloszlás és az eloszlásfüggvény egymást kölcsönösen meghatározzák.

3.4.1. Theorem. *$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ akkor és csak akkor együttes eloszlásfüggvénye valamely ξ, η valószínűségi változó párnak, ha*

a) F mindkét változójában monoton nem csökkenő;

b) F mindkét változójában balról folytonos;

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x, y) = \lim\limits_{y \to -\infty} F(x, y) = 0, \quad \lim\limits_{x \to \infty, y \to \infty} F(x, y) = 1;$

d) $F(b_1, b_2) - F(a_1, b_2) - F(b_1, a_2) + F(a_1, a_2) \geq 0$ minden $a_1 < b_1, a_2 < b_2$ feltételt teljesítő $(a_1, a_2), (b_1, b_2)$ számpárokra.

Bizonyítás. Legyen F ξ és η együttes eloszlásfüggvénye. Az első három tulajdonság igazolása ugyanúgy történik, mint az egydimenziós esetben. Az pedig könnyen látható, hogy a d)-ben szereplő négytagú összeg éppen $P\{(\xi, \eta) \in [a_1, b_1) \times [a_2, b_2)\}$, ez pedig nemnegatív. Tehát d) éppen azt fejezi ki, hogy nemnegatív annak valószínűsége, hogy a ξ, η pár beleessen egy téglalapba.

Teljesítse most F az a)-d) tulajdonságokat. Belátható, hogy a téglalapokon a

$$P([a_1, b_1) \times [a_2, b_2)) = F(b_1, b_2) - F(a_1, b_2) - F(b_1, a_2) + F(a_1, a_2)$$

által definiált függvény kiterjeszthető $\mathbb{R}^2$ Borel-halmazaira valószínűséggé. Ezen valószínűséget véve alapul, a $\xi(x, y) = x$, $\eta(x, y) = y$ által az $\mathbb{R}^2$-en definiált valószínűségi változó pár eloszlásfüggvénye éppen F. □

3.4.2. Note. (1) a)-c)-ből nem következik d). Legyen ugyanis $F(x, y) = 0$, ha $x + y \leq 1$, és $F(x, y) = 1$, ha $x + y > 1$. Ekkor F teljesíti a)-c)-t, de nem teljesíti d)-t (pl. $(a_1, a_2) = (0, 0)$, $(b_1, b_2) = (2, 2)$ esetén).
(2) Legyen speciálisan $\xi = \eta$. Ekkor ξ és η együttes eloszlásfüggvénye:

$$F(x, y) = P(\xi < x, \eta < y) = P(\xi < \min\{x, y\}) = F_\xi(\min\{x, y\}).$$

Így $\lim\limits_{x\to\infty} F(x, y) = F_\xi(y)$. Tehát, ha ξ tetszőlegesen nagy értékeket felvehet (pl. exponenciális eloszlású), akkor $\lim\limits_{x\to\infty} F(x, y) \neq 1$. Ezért c) második felében mindkét változónak a ∞-be kell tartania ahhoz, hogy $F(x, y)$ 1-hez konvergáljon.

3.4.3. Theorem. *Ha ξ és η együttes eloszlásfüggvénye $F(x, y)$, akkor ξ eloszlásfüggvénye $F_\xi(x) = \lim\limits_{y\to\infty} F(x, y)$ és η eloszlásfüggvénye $F_\eta(y) = \lim\limits_{x\to\infty} F(x, y)$. F_ξ-t és F_η-t $F(x, y)$* marginális (perem-) eloszlásfüggvényeinek *nevezzük.*

Bizonyítás. A valószínűség folytonossága miatt.

$$F_\xi(x) = P(\xi < x) = P(\xi < x, \eta \in \mathbb{R}) = \lim_{y_n\to\infty} P(\xi < x, \eta < y_n) = \lim_{y_n\to\infty} F(x, y_n),$$

□

3.4.4. Example. (1) Legyen $F(x, y) = 1 - e^{-\lambda x} - e^{-\mu y} + e^{-(\lambda x + \mu y)}$, ha $x, y > 0$, és $F(x, y) = 0$ különben. Ekkor $F(x, y)$ eloszlásfüggvény. Ennek belátásához alakítsuk F-et szorzattá: $F(x, y) = (1 - e^{-\lambda x})(1 - e^{-\mu y})$, ha $x, y > 0$. Innen a)-d) azonnal látható. F marginális eloszlásai exponenciális eloszlások. $F_\xi(x) = \lim\limits_{y\to\infty} F(x, y) = 1 - e^{-\lambda x}$, ha $x > 0$, egyébként $F_\xi(x) = 0$. Hasonlóan adódik, hogy F_η pedig μ paraméterű exponenciális eloszlásfüggvény. Nyilván $F(x, y) = F_\xi(x) \cdot F_\eta(y)$, $x, y \in \mathbb{R}$. (Később látni fogjuk, hogy ez a független ξ és η együttes eloszlásfüggvénye.)
Az $F(x, y)$ függvény $\lambda = 1$, $\mu = 2$ esetén a 3.4.4. ábrán látható.
(2) Legyen $F(x, y) = \min\{(1 - e^{-\lambda x}), (1 - e^{-\lambda y})\}$, ha $x, y > 0$, $F(x, y) = 0$ egyébként. Ekkor - a 3.4.2 Megjegyzés (2) része értelmében - a marginális eloszlások λ paraméterű exponenciálisak. Ezt a példát összevetve az előző példa $\lambda = \mu$ speciális esetével látjuk, hogy különböző kétváltozós eloszlásfüggvényeknek lehetnek azonos marginálisaik.

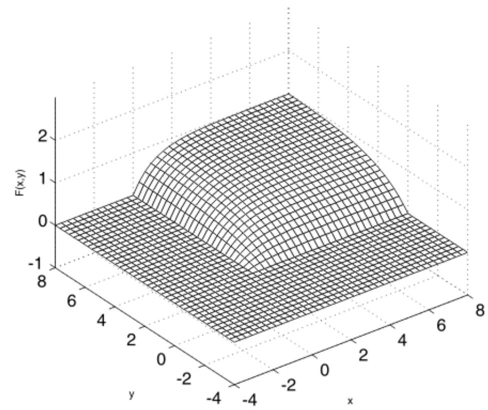
3.4.2. Együttes sűrűségfüggvények

3.4.5. Definition. A ξ és η együttes eloszlását abszolút folytonosnak nevezzük, ha létezik olyan $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény, melyre ξ és η együttes eloszlásfüggvénye

$$\boxed{F(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u, v)\, d\,v\, d\,u \qquad x, y \in \mathbb{R}}$$

alakba írható. f-et ξ és η *együttes sűrűségfüggvényének* nevezzük.

3.4.1. ábra. Kétdimenziós exponenciális eloszlásfüggvény



3.4.6. Note. (1) Együttes sűrűségfüggvény nem mindig létezik.
(2) Ha f a ξ, η pár együttes sűrűségfüggvénye, akkor

$$\boxed{P\left((\xi,\eta)\in B\right) = \int\int_B f(x,y)\, d\, x\, d\, y}$$

$\mathbb{R}^2$ bármely B Borel-halmazára.

3.4.7. Theorem. *$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ akkor és csak akkor együttes sűrűségfüggvénye valamely ξ, η valószínűségi változó párnak, ha*
a) mérhető,
b) nemnegatív és
c) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, d\, x\, d\, y = 1.$

A következő tétel segít a marginális sűrűségfüggvények kiszámításában.

3.4.8. Theorem. *Legyen ξ és η együttes sűrűségfüggvénye f. Ekkor ξ és η is abszolút folytonos, és ξ, valamint η sűrűségfüggvénye (az ún.* marginális sűrűségfüggvények*) az*

$$f_\xi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, d\, y,\ x \in \mathbb{R}; \qquad f_\eta(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, d\, x,\ y \in \mathbb{R}$$

képletekből határozhatók meg.

Bizonyítás. A következő átalakításokat végezzük:

$$\int\limits_{-\infty}^{t} f_\xi(x)\, d\, x = \int\limits_{-\infty}^{t}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, d\, x\, d\, y = F_{\xi,\eta}(t,\infty) = P(\xi < t, \eta < \infty) =$$

$$P(\xi < t) = F_\xi(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

ahol $F_\xi(t)$ ξ eloszlásfüggvényét jelöli. Így $f_\xi(t)$ kielégíti a sűrűségfüggvény definícióját. $\square$

3.4.9. NOTE. Abból, hogy ξ és η abszolút folytonos, nem következik, hogy ξ és η együttes eloszlása is abszolút folytonos (ez a független esetben teljesül, mint később látjuk). Például, legyen ξ abszolút folytonos, legyen $\eta = \xi$; ekkor a ξ, η párnak nincs együttes sűrűségfüggvénye.

3.4.10. EXAMPLE. Legyen $G \subset \mathbb{R}^2$ véges Lebesgue-mértékű Borel-halmaz (azaz G területe véges). Ekkor $f(x,y) = 1/\lambda(G)$, ha $x, y \in G$, $f(x,y) = 0$ egyébként (ahol λ a területet jelöli) függvény sűrűségfüggvény. Az ilyen sűrűségfüggvényű eloszlást G-n *egyenletes eloszlásnak* nevezzük.

A következő példában a kétdimenziós normális eloszlást mutatjuk be.

3.4.11. EXAMPLE. Legyenek A, B, C és m_1, m_2 adott számok, melyekre $A > 0$ és $B^2 < AC$. Ekkor az
(3.4.1)
$$f(x,y) = \frac{\sqrt{AC - B^2}}{2\pi} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left[A(x-m_1)^2 + 2B(x-m_1)(y-m_2) + C(y-m_2)^2 \right] \right\}$$
$x, y \in \mathbb{R}$, sűrűségfüggvényű eloszlást (nem elfajult) *kétdimenziós normális eloszlásnak* nevezzük. Ahhoz, hogy (3.4.1) ténylegesen sűrűségfüggvényt határoz meg, be kell látni, hogy $\int\int f(x,y)\,dx\,dy = 1$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx =$$
$$= \frac{\sqrt{AC - B^2}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left[\sqrt{A}(x-m_1) + \frac{B}{\sqrt{A}}(y-m_2) \right]^2 \right\} dx \times$$
$$\times \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left[C(y-m_2)^2 - \frac{B^2}{A}(y-m_2)^2 \right] \right\} =$$
$$= \sqrt{\frac{AC - B^2}{A}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \cdot \frac{AC - B^2}{A} (y-m_2)^2 \right\}.$$
(Az első lépésben az exponensben teljes négyzetté alakítottunk, a második lépésben pedig kihasználtuk, hogy - alkalmas paraméterű - normális sűrűségfüggvény integrálja 1.) Azt kaptuk, hogy $\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx$ éppen $\mathcal{N}\left(m_2, A/(AC - B^2)\right)$ sűrűségfüggvénye. Ezen sűrűségfüggvény y szerinti integrálja 1, így $\int\int f(x,y)\,dx\,dy = 1$.

Melléktermékként azt is kaptuk, hogy a kétdimenziós normális eloszlás marginálisai is normálisak:
$$\xi \sim \mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2), \quad \eta \sim \mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2),$$
ahol $\sigma_1^2 = C/(AC - B^2)$ és $\sigma_2^2 = A/(AC - B^2)$.
Figyeljük meg, hogy a
$$D^{-1} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho \\ \rho & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$
mátrixok egymás inverzei, ahol $\rho = -B/(AC - B^2)$. ρ-t ξ és η *kovarianciájának*, a D mátrixot pedig a *szórásmátrixuknak* fogjuk nevezni. Ezek alapján látható, hogy a (3.4.1) sűrűségfüggvényben az exponensben éppen a szórásmátrix inverzével

képezett kvadratikus forma áll, míg a $\sqrt{AC-B^2}$ konstans szorzó éppen az inverz determinánsának négyzetgyöke.

3.4.3. A függetlenség

3.4.12. Definition. Azt mondjuk, hogy ξ és η *független* valószínűségi változók, ha együttes eloszlásfüggvényük felbomlik a két marginális eloszlásfüggvény szorzatára:

$$F_{\xi,\eta}(x,y) = F_\xi(x)\cdot F_\eta(y), \quad x,y\in\mathbb{R}.$$

Be lehet látni, hogy ez a feltétel ekvivalens a következővel:

$$P(\xi\in B_1,\eta\in B_2) = P(\xi\in B_1)P(\eta\in B_2) \tag{3.4.2}$$

bármely B_1 és B_2 Borel-halmazra. (3.4.2) már ténylegesen azt mutatja, hogy a ξ-vel kapcsolatos események függetlenek az η-val kapcsolatos eseményektől.

3.4.13. Exercise. Lássuk be (3.4.2) alábbi speciális esetét! ξ és η akkor és csak akkor függetlenek, ha

$$P\left(\xi\in[a_1,b_1),\eta\in[a_2,b_2)\right) = P\left(\xi\in[a_1,b_1)\right)\cdot P\left(\eta\in[a_2,b_2)\right)$$

ha $a_1<b_1$, $a_2<b_2$.

3.4.14. Note. Ha adott az F_1 és F_2 eloszlásfüggvény, akkor $F(x,y)=F_1(x)F_2(y)$, $x,y\in\mathbb{R}$, teljesíti a kétdimenziós eloszlásfüggvények jellemző tulajdonságait. Ennek marginálisai éppen F_1 és F_2. Így mindig van értelme a következő megfogalmazásnak: „legyenek ξ és η független valószínűségi változók F_1 és F_2 eloszlásfüggvénnyel".

3.4.15. Example. A 3.4.4 Példa (1) részében szereplő ξ és η független (exponenciális eloszlású) valószínűségi változók.

3.4.16. Theorem. *Legyen ξ,η együttes eloszlása abszolút folytonos. Ekkor ξ és η akkor és csak akkor függetlenek, ha együttes sűrűségfüggvényük a marginális sűrűségfüggvények szorzata:*

$$f_{\xi,\eta}(x,y) = f_\xi(x)\cdot f_\eta(y), \quad x,y\in\mathbb{R}. \tag{3.4.3}$$

Bizonyítás. (1) Ha (3.4.3) teljesül, akkor az együttes eloszlásfüggvény

$$F_{\xi,\eta}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{\xi,\eta}(u,v)\,dv\,du = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(v)\,dv\int_{-\infty}^{y} f_\eta(u)\,du = F_\xi(x)F_\eta(y),$$

$x,y\in\mathbb{R}$. Tehát ξ és η tényleg függetlenek.

(2) Legyen most ξ és η független. Tekintsük a $g(x,y)=f_\xi(x)f_\eta(y)$, $x,y\in\mathbb{R}$, függvényt. Ez kielégíti a sűrűségfüggvények tulajdonságait. Ennek marginálisai éppen f_ξ és f_η. Az előző rész értelmében g marginálisai függetlenek. A függetlenség definíciója szerint a független esetben a marginálisok egyértelműen meghatározzák az együttes eloszlást. Így a g sűrűségfüggvényhez tartozó eloszlás nem lehet más, mint ξ és η együttes eloszlása. □

3.4.17. Example. (1) Lássuk be, hogy ha ξ és η abszolút folytonosak és függetlenek, akkor ξ,η együttes eloszlása is abszolút folytonos! Ennek igazolása lényegében az előző állítás bizonyításának második részével azonos.

(2) Ha a (ξ,η) pár egyenletes eloszlású a $G=[a_1,a_2]\times[b_1,b_2]$ téglalapon, akkor marginálisai egyenletes eloszlásúak az $[a_1,a_2]$, illetve $[b_1,b_2]$ intervallumon, és függetlenek.

(3) Ha ξ, η együttes eloszlása kétdimenziós normális, és kovarianciájuk $\rho = 0$ (azaz $B = 0$ a (3.4.1) képletben), akkor a marginálisok független normális eloszlások.

3.4.4. A kovariancia A kovariancia és a korrelációs együttható definíciója és tulajdonságai megegyeznek a diszkrét esetben adottakkal. Így részletezni csak a kiszámítási módjukat fogjuk. Először is megjegyezzük, hogy ha $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mérhető függvény, akkor $g(\xi, \eta)$ valószínűségi változó. Ha a ξ, η pár együttes sűrűségfüggvénye $f(x, y)$, akkor

$$\boxed{\mathbb{E}g(\xi, \eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f(x, y)\, d\,x\, d\,y,}$$

feltéve, hogy a fenti egyenlőség egyik oldalán szereplő mennyiség létezik.
Ezért

$$\boxed{\operatorname{cov}(\xi, \eta) = \mathbb{E}\left((\xi - \mathbb{E}\xi)(\eta - \mathbb{E}\eta)\right)}$$

kiszámítása a

$$\operatorname{cov}(\xi, \eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - E\xi)(y - E\eta) f(x, y)\, d\,x\, d\,y,$$

illetve a

$$\operatorname{cov}(\xi, \eta) = \mathbb{E}(\xi\eta) - \mathbb{E}\xi\mathbb{E}\eta$$

összefüggés és az

$$\mathbb{E}\xi\eta = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f(x, y)\, d\,x\, d\,y$$

képlet alapján történhet.

3.4.18. Note. Ha ξ és η függetlenek és véges a várható értékük, akkor

$$\mathbb{E}(\xi\eta) = \mathbb{E}\xi\mathbb{E}\eta.$$

Ez abban az esetben, ha létezik együttes sűrűségfüggvény, az

$$\mathbb{E}(\xi\eta) = \int \int xy f(x, y)\, d\,x\, d\,y = \int x f_\xi(x)\, d\,x \int y f_\eta(y)\, d\,y = \mathbb{E}\xi\mathbb{E}\eta$$

egyenlőség alapján látható be.

3.4.19. Example. Legyen ξ és η együttes eloszlása normális, (3.4.1) alatti sűrűségfüggvénnyel. Ugyanúgy eljárva, mint a 3.4.11 Példában

$$\mathbb{E}(\xi\eta) = \int \int xy f(x, y)\, d\,x\, d\,y =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{AC - B^2}{A}} y \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{AC - B^2}{A} \cdot (y - m_2)^2\right]\right\} \times$$

$$\times \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{2\pi}} x \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\sqrt{A}(x - m_1) + \frac{B}{\sqrt{A}}(y - m_2)\right]^2\right\} d\,x\, d\,y.$$

A belső integrál az $\mathcal{N}\left(m_1 - (B/A)(y - m_2), 1/A\right)$ eloszlás várható értéke, így $\mathbb{E}(\xi\eta)$ az alábbival egyenlő

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{AC - B^2}{A}} \left[m_1 - \frac{B}{A}(y - m_2)\right] y \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{AC - B^2}{A}(y - m_2)^2\right\} d\,y =$$

$$= m_1\mathbb{E}(\zeta) - (B/A)\mathbb{D}^2(\zeta),$$

ahol

$$\zeta \sim \mathcal{N}\left(m_2, \frac{A}{AC-B^2}\right).$$

Így

$$\mathbb{E}(\xi\eta) = m_1m_2 - \frac{B}{A}\frac{A}{AC-B^2} = m_1m_2 - \frac{B}{AC-B^2} = m_1m_2 + \rho.$$

Tehát

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta) = \mathbb{E}(\xi\eta) - \mathbb{E}\xi\mathbb{E}\eta = \rho.$$

Ezzel igazoltuk a korábban már jelzett tényt.

Gyakorlatok

(1) Válasszunk egymástól függetlenül két pontot (ξ-t és η-t) az egységintervallumban! Lássuk be, hogy a szorzatuk sűrűségfüggvénye $f(z) = -\ln z$, ha $0 < z < 1$ és 0 egyébként!
(2) Legyen (ξ, η) egyenletes eloszlású az $1/2 \leq \sqrt{\xi^2+\eta^2} \leq 1$ körgyűrűben. Határozzuk meg ξ sűrűségfüggvényét!
(3) Legyenek ξ és η azonos eloszlású, független valószínűségi változók F eloszlásfüggvénnyel és folytonos f sűrűségfüggvénnyel. Lássuk be, hogy $\max(\xi,\eta)$ sűrűségfüggvénye $2F(x)f(x)$.
(4) Határozzuk meg $\max\{|\xi|, |\eta|\}$ sűrűségfüggvényét, ha ξ, η együttes sűrűségfüggvénye $f(x,y) = (1/(2\pi\sigma^2))\exp[-(x^2+y^2)/(2\sigma^2)]$.
(5) Lássuk be, hogy diszkrét valószínűségi változókra a függetlenség $F_{\xi,\eta}(x,y) = F_\xi(x)F_\eta(y)$ és $P(\xi = x, \eta = y) = P(\xi = x)P(\eta = y)$ definíciói egybeesnek!
(6) Lássuk be, hogy $\mathbb{E}(\xi+\eta) = \mathbb{E}\xi + \mathbb{E}\eta$ (ha $\mathbb{E}\xi$ és $\mathbb{E}\eta$ véges) abban az esetben, ha létezik ξ-nek és η-nak együttes sűrűségfüggvénye!
(7) Dobjunk egy pontot véletlenszerűen egyenletes eloszlás szerint a (0,0), (0,1), (1,0) csúcsokkal rendelkező háromszögre. Jelölje (ξ, η) a pont helyzetét. Független-e ξ és η?

Ellenőrző kérdések

(1) A perem eloszlásfüggvények meghatározzák-e az együttes eloszlásfüggvényt?
(2) Mit nevezünk együttes sűrűségfüggvénynek?
(3) Mikor mondjuk, hogy két valószínűségi változó független?

3.5. Valószínűségi vektorváltozók

3.5.1. Többdimenziós eloszlások Ebben a részben csupán felsoroljuk a valószínűségi vektorváltozók legfontosabb tulajdonságait (bizonyítás helyett az egy-, illetve kétdimenziós esettel való analógiára utalunk), és példákat adunk.

Legyenek $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ valószínűségi változók. Ekkor a $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)^\top$ vektort *valószínűségi vektorváltozónak* nevezzük ($^\top$ a transzponáltat jelöli). A valószínűségi vektorváltozó koordinátáit mindig oszlopvektorba rendezve képzeljük el.

3.5.1. Definition. A $\boldsymbol{\xi}$ valószínűségi vektorváltozó *eloszlásfüggvényén* az

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \dots, \xi_n < x_n)$$

n-változós, valós értékű függvényt értjük.

3.5.2. Theorem. *$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ akkor és csak akkor eloszlásfüggvénye valamely valószínűségi vektorváltozónak, ha*

a) minden változójában monoton nemcsökkenő;

b) minden változójában balról folytonos;

c) $\lim_{x_i \to -\infty} F(x_1, \ldots, x_n) = 0$, $\forall i$; $\lim_{x_1 \to \infty} \ldots \lim_{x_n \to \infty} F(x_1, \ldots, x_n) = 1$;

d)

$$\sum (-1)^{\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k} F(c_1, c_2, \ldots, c_n) \geq 0 \tag{3.5.1}$$

minden $a_1 \leq b_1, \ldots, a_n \leq b_n$ esetén, ahol $c_k = \varepsilon_k a_k + (1 - \varepsilon_k) b_k$, és az összegzés a 0 és 1 számokból álló összes lehetséges $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ sorozatra terjed ki. (Tehát az (3.5.1) *bal oldalán szereplő összeg 2^n számú tagból áll.)*

3.5.3. Exercise. (1) Lássuk be, hogy az (3.5.1)-ben szereplő összeg éppen $P(a_1 \leq \xi_1 < b_1, \ldots, a_n \leq \xi_n < b_n)$!

3.5.4. Example. (2) Lássuk be, hogy a marginális eloszlásfüggvények az

$$F_{\xi_k}(x_k) = \lim_{x_i \to \infty, i \neq k} F(x_1, \ldots, x_n)$$

képlettel számolhatók ki (ahol x_k kivételével minden x_i a ∞-hez tart) !

A $\boldsymbol{\xi}$ valószínűségi vektorváltozó eloszlását abszolút folytonosnak nevezzük, ha létezik $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, melyre

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \ldots \int_{-\infty}^{x_n} f(t_1, \ldots, t_n)\, dt_n \ldots dt_1$$

$\forall x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. f-et ξ *sűrűségfüggvényének* nevezzük.

Ha f a $\boldsymbol{\xi}$ sűrűségfüggvénye, akkor

$$P(\boldsymbol{\xi} \in B) = \int \ldots \int_B f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n$$

bármely $B \subseteq \mathbb{R}^n$ Borel-halmazra.

3.5.5. Exercise. Fogalmazzuk meg annak szükséges és elégséges feltételét, hogy $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sűrűségfüggvény legyen. (Az analógia teljes az egy-, illetve kétdimenziós esettel.)

3.5.6. Example. Belátható, hogy a marginális sűrűségfüggvények az

$$f_{\xi_k}(x_k) = \int \ldots \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \, \ldots \, dx_{k-1}\, dx_{k+1} \, \ldots \, dx_n$$

képlettel nyerhetők (ahol az integrálás nem terjed ki a k-adik változóra).

A következő példa ismét az egyváltozós eset analógiája.

3.5.7. Exercise. Adjuk meg az egyenletes eloszlás definícióját valószínűségi vektorváltozóra!

A $\boldsymbol{\xi}$ valószínűségi vektorváltozó $\xi_1, \ldots, \xi_n$ komponenseit (teljesen) *függetleneknek* nevezzük, ha

$$F_{\boldsymbol{\xi}}(x_1, \ldots, x_n) = F_{\xi_1}(x_1) F_{\xi_2}(x_2) \cdots F_{\xi_n}(x_n)$$

$\forall x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. Abszolút folytonos eloszlás esetén a függetlenség ekvivalens

$$f_{\boldsymbol{\xi}}(x_1, \ldots, x_n) = f_{\xi_1}(x_1) f_{\xi_2}(x_2) \cdots f_{\xi_n}(x_n)$$

$\forall x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ teljesülésével.

3.5.2. A várható érték vektor és a szórásmátrix

3.5.8. Example. Ha $\boldsymbol{X} = (\xi_{ij})$ egy valószínűségi változókból álló mátrix, akkor $\boldsymbol{X}$ várható értéke a komponensei várható értékeiből álló mátrix (ha létezik a komponensek várható értéke):

$$\boxed{\mathbb{E}\boldsymbol{X} = (\mathbb{E}\,\xi_{ij})}.$$

Így a $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)^\top$ valószínűségi vektorváltozó *várható érték vektora*

$$\mathbb{E}\boldsymbol{\xi} = (\mathbb{E}\xi_1, \ldots, \mathbb{E}\xi_n)^\top \in \mathbb{R}^n.$$

$\boldsymbol{\xi}$ *szórásmátrixán* (variancia mátrixán) az alábbi $n \times n$-es mátrixot értjük:

$$\boxed{\mathrm{var}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbb{E}\left((\boldsymbol{\xi} - \mathbb{E}\boldsymbol{\xi})(\boldsymbol{\xi} - \mathbb{E}\boldsymbol{\xi})^\top\right)}.$$

Mivel a $(\boldsymbol{\xi} - \mathbb{E}\boldsymbol{\xi})(\boldsymbol{\xi} - \mathbb{E}\boldsymbol{\xi})^\top$ mátrix (i,j)-edik eleme $(\xi_i - \mathbb{E}\xi_i)(\xi_j - \mathbb{E}\xi_j)$, így $\mathrm{var}(\boldsymbol{\xi})$ (i,j)-edik eleme $\mathrm{cov}(\xi_i, \xi_j)$:

$$\mathrm{var}(\boldsymbol{\xi}) = \left(\mathrm{cov}(\xi_i, \xi_j)\right).$$

Részletesebben

$$\mathrm{var}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbb{E}\left(\begin{pmatrix} \xi_1 - \mathbb{E}\xi_1 \\ \xi_2 - \mathbb{E}\xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n - \mathbb{E}\xi_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 - \mathbb{E}\xi_1, & \xi_2 - \mathbb{E}\xi_2, & \cdots, & \xi_n - \mathbb{E}\xi_n \end{pmatrix}\right) =$$

$$\begin{pmatrix} \mathbb{D}^2\xi_1 & \mathrm{cov}(\xi_1, \xi_2) & \cdots & \mathrm{cov}(\xi_1, \xi_n) \\ \mathrm{cov}(\xi_2, \xi_1) & \mathbb{D}^2\xi_2 & \cdots & \mathrm{cov}(\xi_2, \xi_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{cov}(\xi_n, \xi_1) & \mathrm{cov}(\xi_n, \xi_2) & \cdots & \mathbb{D}^2\xi_n \end{pmatrix}.$$

A szórásmártix főátlójában a $\xi_1, \ldots, \xi_n$ szórásnégyzetei állnak.

A többváltozós várható érték és szórás legalapvetőbb tulajdonságait a következő példa mutatja.

3.5.9. Exercise. (1) Legyen A és $\boldsymbol{b}$ (alkalmas méretű) konstans mátrix, ill. vektor. Igazoljuk, hogy

$$\boxed{\mathbb{E}(A\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{b}) = A\,\mathbb{E}\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{b}}$$

és

$$\boxed{\mathrm{var}(A\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{b}) = A\,\mathrm{var}(\boldsymbol{\xi}) A^\top}.$$

(2) Lássuk be, hogy minden szórásmátrix szimmetrikus, pozitív szemidefinit!

3.5.3. A többdimenziós normális eloszlás

3.5.10. DEFINITION. Legyenek $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ független standard normális eloszlású valószínűségi változók. Ekkor a $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)^\top$ valószínűségi vektorváltozót *n-dimenziós standard normális eloszlásúnak* nevezzük. Mivel $\mathbb{E}\xi_i = 0$, $\mathbb{D}^2\xi_i = 1$ és $\operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j) = 0$ $(i \neq j)$, így $\mathbb{E}\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$ (n-dimenziós nullvektor) és $\operatorname{var}(\boldsymbol{\xi}) = I$ ($n \times n$-es egységmátrix). $\boldsymbol{\xi}$ eloszlásának jelölése $\boldsymbol{\xi} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, I)$.

Legyen most $\boldsymbol{m} \in \mathbb{R}^n$, A $n \times n$-es mátrix és $\boldsymbol{\xi} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, I)$. Ekkor $\boldsymbol{\eta} = A\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{m}$-et *n-dimenziós normális eloszlásúnak* nevezzük. A várható érték vektor és a szórásmátrix transzformációs formulája alapján $\mathbb{E}\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{m}$ és $\operatorname{var}(\boldsymbol{\eta}) = AA^\top = D$. $\boldsymbol{\eta}$ eloszlásának jelölése $\boldsymbol{\eta} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{m}, D)$.

Ha $\boldsymbol{\eta} = A\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{m}$, ahol $\boldsymbol{\xi} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, I)$, akkor nem invertálható A esetén (azaz, ha $\det A = 0$) $\boldsymbol{\eta}$ eloszlása $\mathbb{R}^n$ n-nél kevesebb dimenziós lineáris sokaságára (konkrétan $\{A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{m} : x \in \mathbb{R}^n\}$-re) koncentrálódik, így nem lehet sűrűségfüggvénye. Mivel $\boldsymbol{\eta}$ szórásmátrixa éppen $D = \operatorname{var}(\boldsymbol{\eta}) = AA^\top$, így A pontosan akkor nem invertálható, ha D nem invertálható. Ezért $\boldsymbol{\eta} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{m}, D)$-t *elfajult n-dimenziós normális eloszlásnak* nevezzük, ha D nem invertálható.

Invertálható A esetén létezik sűrűségfüggvény, ami a következő módon határozható meg.

$\boldsymbol{\xi} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, I)$ esetén $\boldsymbol{\xi}$ koordinátái független standard normálisak. Ezért $\boldsymbol{\xi}$ sűrűségfüggvénye n db egydimenziós standard normális sűrűségfüggvény szorzata:

$$f_{\boldsymbol{\xi}}(\boldsymbol{x}) = \prod_{i=1}^{n} f_{\xi_i}(x_i) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x_i^2}{2}\right\} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{x}\right\},$$

ahol $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$.

$\boldsymbol{\eta} = A\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{m}$sűrűségfüggvénye:

$$f_{\boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{y}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}(\det D)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{m})^\top D^{-1}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{m})\right\}, \quad \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n,$$

ahol $D = AA^\top$.

Ez mutatja, hogy a nem elfajult n-dimenziós normális eloszlást meghatározza a várható érték vektora és a szórásmátrixa. (Ez a tény igaz az elfajult esetben is, amit jelöléseinkben már ki is használtunk.)

Tetszőleges normális eloszlás esetén igaz, hogy koordinátái pontosan akkor függetlenek, ha korrelálatlanok. Jelenlegi ismereteink alapján ezt a nem elfajult esetben tudjuk bebizonyítani.

3.5.11. EXERCISE. Lássuk be, hogy ha egy (nem elfajult) n-dimenziós normális eloszlású valószínűségi vektorváltozó koordinátái korrelálatlanok, akkor függetlenek!

3.5.4. A konvolúció Legyenek ξ és η független valószínűségi változók f, illetve g sűrűségfüggvénnyel. Ekkor $\xi + \eta$-nak létezik sűrűségfüggvénye, melyet a

$$h(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(z - x)\,dx$$

képlettel számolhatunk ki. h-t f és g *konvolúciójának* nevezzük.

3.5.12. EXAMPLE. Számítsuk ki normális eloszlások konvolúcióját! $\xi \sim \mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$ és tőle független $\eta \sim \mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$ esetén $\xi + \eta$ sűrűségfüggvénye:

$$h(z) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-m_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(z-x-m_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\} dx.$$

Az exponensben teljes négyzetté alakítunk (a $\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$, $m = m_1 + m_2$ és $s = \sigma_1\sigma_2/\sigma$ jelölésekkel élünk):

$$\frac{(x-m_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(z-x-m_2)^2}{\sigma_2^2} =$$

$$\left(x - \frac{(z-m_2)\sigma_1^2 + m_1\sigma_2^2)}{\sigma^2}\right)^2 \Big/ \left(\frac{\sigma_1\sigma_2}{\sigma}\right)^2 + \frac{(z-m)^2}{\sigma^2} =$$

$$= \frac{(x-\mu)^2}{s^2} + \frac{(z-m)^2}{\sigma^2}.$$

Ennélfogva

$$h(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(z-m)^2}{2\sigma^2}\right\} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}s} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2s^2}\right\} dx\,.$$

Az integrandus éppen normális sűrűségfüggvény, így az integrál értéke 1. Ezért $h(z)$ pont az $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ sűrűségfüggvénye. Tehát $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$ és $\mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$ konvolúciója éppen $\mathcal{N}(m_1 + m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$. Más szóval, független normális eloszlású valószínűségi változók összege is normális eloszlású.

Gyakorlatok

(1) Legyenek ξ, η, ρ független, a $[0, 1]$-en egyenletes eloszlású valószínűségi változók. Lássuk be, hogy $P(\rho^2 < \xi \cdot \eta) = 4/9$.
(2) Legyenek a $\boldsymbol{\xi}$ 3-dimenziós valószínűségi vektorváltozó koordinátái független, $\mathcal{N}(0, 1)$ eloszlásúak. Lássuk be, hogy $\boldsymbol{\xi}$ hosszának sűrűségfüggvénye

$$f(w) = \sqrt{2/\pi}w^2 \exp(-w^2/2),$$

ha $w \geq 0$ (Maxwell-féle sebességeloszlás).
(3) Legyen $\boldsymbol{\eta}$ normális eloszlású valószínűségi vektorváltozó. Lássuk be, hogy $\boldsymbol{\eta}$ koordinátáinak bármely lineáris kombinációja is normális eloszlású!

Ellenőrző kérdések

(1) Mi a várható érték vektor és mi a szórásmátrix?
(2) Mit nevezünk n-dimenziós standard normális eloszlásnak?

3.6. A nagy számok törvényei

3.6.1. A Markov- és a Csebisev-egyenlőtlenség

3.6.1. THEOREM. *(Markov-egyenlőtlenség.) Legyen $\eta \geq 0$ valószínűségi változó és $\delta > 0$ rögzített szám. Ekkor*

$$P(\eta \geq \delta) \leq \mathbb{E}(\eta)/\delta.$$

Bizonyítás. Abszolút folytonos η-ra bizonyítunk. Mivel $\eta \geq 0$, így sűrűségfüggvényére: $f(x) = 0$, ha $x < 0$.

$$\mathbb{E}\eta = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx = \int_{0}^{\infty} xf(x)\,dx \geq \int_{\delta}^{\infty} xf(x)\,dx \geq \delta \int_{\delta}^{\infty} f(x)\,dx = \delta P(\eta \geq \delta).$$

□

3.6.2. Theorem. *(Csebisev-egyenlőtlenség.) Tegyük fel, hogy a ξ valószínűségi változónak véges a szórása. Ekkor $\varepsilon > 0$ rögzített szám esetén*

$$P(|\xi - \mathbb{E}\xi| \geq \varepsilon) \leq \mathbb{D}^2(\xi)/\varepsilon^2.$$

Bizonyítás. Legyen $\eta = (\xi - \mathbb{E}\xi)^2$, $\delta = \varepsilon^2$. Alkalmazzuk a Markov-egyenlőtlenséget. □

3.6.2. A nagy számok gyenge törvényei Ebben a részben $\xi_1, \xi_2, \ldots$ valószínűségi változók egy sorozatát fogja jelölni, $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$, $n = 1, 2, \ldots$, pedig az ún. részletösszegek sorozatát. A nagy számok gyenge törvénye az alkalmasan normált S_n sorozat sztochasztikus konvergenciáját állítja.

3.6.3. Definition. Azt mondjuk, hogy az $\eta_1, \eta_2, \ldots$ valószínűségi változó sorozat sztochasztikusan konvergál az η valószínűségi változóhoz, ha $\forall\ \varepsilon > 0$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} P(|\eta_n - \eta| > \varepsilon) = 0.$$

Ennek jelölésére a $P - \lim\limits_{n\to\infty} \eta_n = \eta$ formulát használjuk. A sztochasztikus konvergenciát más néven valószínűségben való (mértékben való) konvergenciának is hívják.

3.6.4. Theorem. *Legyenek $\xi_1, \xi_2, \ldots$ páronként független, azonos eloszlású valószínűségi változók. Tegyük fel, hogy $\mathbb{E}\xi_i^2 < \infty$. Jelölje $m = \mathbb{E}\xi_i$ a közös várható értéket. Ekkor*

$$P - \lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = m.$$

Bizonyítás. A Csebisev-egyenlőtlenség alapján $\varepsilon > 0$-ra

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| > \varepsilon\right) = P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n}\right)\right| > \varepsilon\right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon^2}\mathbb{D}^2\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{\varepsilon^2 n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{D}^2\xi_i = \frac{1}{\varepsilon^2 n}\mathbb{D}^2\xi_1 \to 0,$$

ha $n \to \infty$. (A számolás során kihasználtuk, hogy páronként független összeadandók esetén a szórásnégyzet additív.) □

A nagy számok gyenge törvényének jelentése a következő. $\xi_1, \xi_2, \ldots$ úgy tekinthető, mint egy ξ valószínűségi változóra vonatkozó független megfigyeléssorozat (hisz ξ_i-k azonos eloszlásúak). Így S_n/n a megfigyelések átlaga, míg az m várható érték az elméleti átlag. Tehát a megfigyelések átlaga konvergál az elméleti átlaghoz. A törvény „gyenge" jelzője azt jelenti, hogy a konvergencia „csak" sztochasztikus, azaz „nagy n esetén kicsi a valószínűsége, hogy S_n/n nagyon eltérjen m-től".

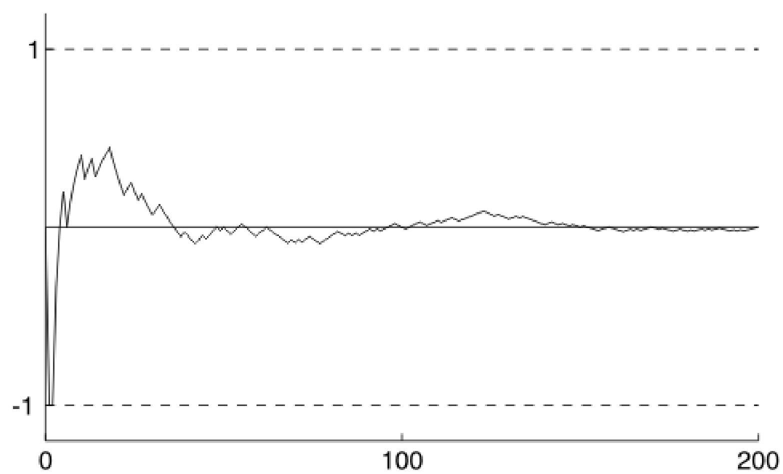
Megjegyezzük, hogy Hincsin bebizonyította, hogy a tétel érvényben marad akkor is, ha $\mathbb{E}\xi_i^2 < \infty$ helyett csupán a $\mathbb{E}|\xi_i| < \infty$ feltételt követeljük meg.

3.6.3. A nagy számok Bernoulli-féle törvénye Tekintsünk egy $\mathcal{K}$ kísérletet és abban egy A eseményt, legyen $P(A) = p$. Ismételjük meg $\mathcal{K}$-t n-szer egymástól függetlenül. Jelölje k_A/n az A relatív gyakoriságát. Ekkor k_A/n éppen S_n/n alakba írható, ha $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$, ahol ξ_i jelenti az A bekövetkezései számát a kísérlet i-edik végrehajtásában. A ξ_i-k független Bernoulli-eloszlásúak, $P(\xi_i = 1) = p$, $P(\xi_i = 0) = 1 - p$. Ez pont a 3.6.4 Tételbeni szituáció speciális esete. Így

$$P - \lim_{n\to\infty} \frac{k_A}{n} = P(A), \tag{3.6.1}$$

hisz $m = \mathbb{E}\xi_i = p = P(A)$. Az S_n/n sorozat első 200 tagjának viselkedése ($p = 1/2$ esetén) a 3.6.3. ábrán látható.

3.6.1. ábra. A nagy számok Bernoulli-féle törvénye



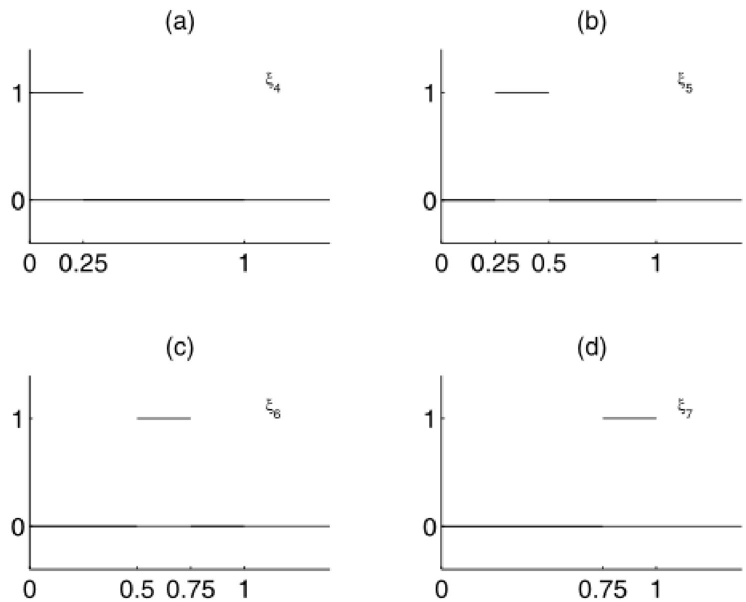
(3.6.1)-et a nagy számok Bernoulli-féle törvényének nevezik. Ennek jelentése az, hogy a relatív gyakoriság (sztochasztikusan) konvergál a valószínűséghez. Jelentősége pedig az, hogy a valószínűségszámítás általunk ismert modelljében (tételként) megjelenik az a törvényszerűség, amelyet a modell felállításakor mint empirikus tényt vettünk figyelembe az axiómák alkalmas megválasztásához.

3.6.4. A nagy számok erős törvényei Az erős törvények ún. majdnem biztos (más szóval majdnem mindenütti, ill. 1 valószínűséggel való) konvergenciát mondanak ki.

3.6.5. Definition. Azt mondjuk, hogy az $\eta_1, \eta_2, \ldots$ valószínűségi változó sorozat majdnem biztosan konvergál az η valószínűségi változóhoz, ha $\lim_{n\to\infty} \eta_n(\omega) = \eta(\omega)$, ha $\omega \in \Omega - N$, ahol $P(N) = 0$.

Tehát a majdnem biztos konvergencia - egy nulla valószínűségű halmaz kivételével - pontonkénti konvergenciát jelent. Ezen konvergencia más elnevezése 1 valószínűséggel való, ill. (mértékelméleti nyelven) majdnem mindenütti konvergencia.

3.6.2. ábra. Sztochasztikus konvergencia a 3.6.6. példában



3.6.6. Example. Olyan sorozatot konstruálunk, mely sztochasztikusan konvergál, majdnem biztosan azonban nem. Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ a $[0,1]$ intervallum a Borel-halmazokkal és a Lebesgue-mértékkel ellátva. Legyen $\xi_1(\omega) = 1$, $\omega \in [0,1]$; $\xi_2(\omega) = 1$, ha $\omega \in [0,1/2]$ és 0 egyébként; $\xi_3(\omega) = 1$, ha $\omega \in [1/2,1]$, és 0 egyébként; $\xi_4(\omega) = 1$, ha $\omega \in [0,1/4]$ és 0 egyébként, $\dots$, $\xi_8(\omega) = 1$, ha $\omega \in [0,1/8]$ és 0 egyébként, $\dots$ Mivel azon intervallum hossza, ahol $\xi_n \neq 0$, 0-hoz tart, így $\xi_n \to 0$ sztochasztikusan. Viszont az az intervallum, ahol $\xi_n = 1$, „végtelen sokszor visszatér" bármely pont fölé, így a $\xi_n(\omega)$ sorozatban végtelen sok 0, és végtelen sok 1 van. Ezért $\xi_n(\omega)$ nem konvergens, $\omega \in [0,1]$. A sorozat 4 tagja $(\xi_4, \xi_5, \xi_6, \xi_7)$ a .3.6.4 ábrán látható.

Megjegyezzük, hogy a majdnem biztos konvergenciából viszont következik a sztochasztikus konvergencia. Ezek alapján az erős törvények ténylegesen erősebb konvergenciát mondanak ki, mint a gyengék. A *Kolmogorov-féle erős törvény* az alábbi.

3.6.7. Theorem. *Legyenek $\xi_1, \xi_2, \dots$ (teljesen) független, azonos eloszlású valószínűségi változók, tegyük fel, hogy $\mathbb{E}|\xi_i| < \infty$. Ekkor $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = m$ majdnem biztosan, ahol $m = \mathbb{E}\xi_i$ (és $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$).*

Az utóbbi időben derült ki, hogy nemcsak a gyenge törvény, hanem az erős is érvényes csupán páronkénti (azaz nem teljes) függetlenséget feltételezve. Azaz az alábbi tétel mind a Hincsin-féle, mind a Kolmogorov-féle törvényt maga után vonja.

3.6.8. Theorem. *(Etemadi tétele.) Legyenek $\xi_1, \xi_2, \dots$ páronként független, azonos eloszlású valószínűségi változók. Tegyük fel, hogy $\mathbb{E}|\xi_i| < \infty$. Ekkor*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = m$$

majdnem biztosan, ahol $m = \mathbb{E}\xi_i$ (és $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$).

A Kolmogorov-féle erős törvény alábbi általánosítása Marcinkiewicztől származik.

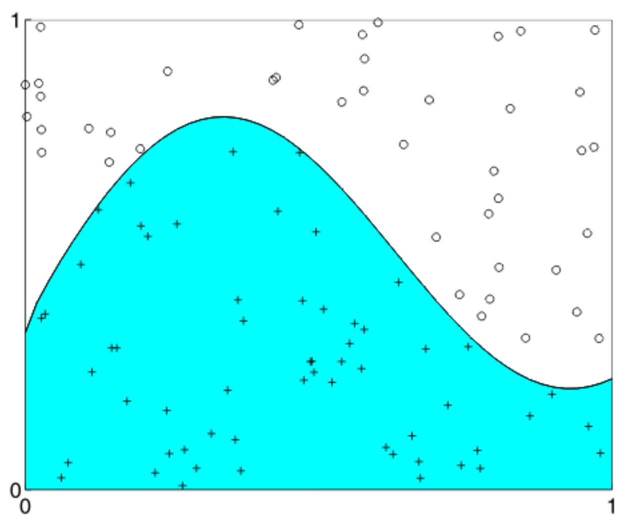
Legyenek $\xi_1, \xi_2, \ldots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók. Tegyük fel, hogy $\mathbb{E}|\xi_i|^r < \infty$, ahol $0 < r < 2$, és $\mathbb{E}\xi_i = 0$, ha $r \geq 1$. Ekkor

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n^{1/r}} = 0$$

majdnem biztosan. A fenti tétel bizonyítása (miként a jelen szakasz további tételeié is) meghaladja a jegyzet kereteit.

A Marcinkievicz-féle törvényből úgy tűnik, hogy ha ξ_i-nek „elég magas momentuma létezik", akkor S_n „alkalmasan normálva" majdnem biztosan 0-hoz tart. Azonban $r = 2$-nél a törvényszerűség jellegében változás történik: ha $\mathbb{E}|\xi_i|^2 < \infty$, akkor $S_n/\sqrt{n}$ nem egy konstanshoz tart, hanem normális eloszláshoz (eloszlásban). Ez már az ún. központi határeloszlás-tétel „vadászterülete" (a $\sqrt{n}$-nel való normálás miatt).

3.6.3. ábra. Integrál közelítő kiszámítása



3.6.9. Example. A nagy számok törvényének alkalmazásaként bemutatjuk, hogy hogyan lehet integrálokat az ún. Monte Carlo-módszerrel kiszámolni. Legyen $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$. Határozzuk meg $\int_0^1 f(x)\,dx$ értékét. Ebből a célból tekintsük a $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2, \ldots$ független, $[0,1]$-en egyenletes eloszlású valószínűségi változók sorozatát. Ekkor (ξ_i, η_i), $i = 1, 2, \ldots$ független, az egységnégyzeten egyenletes eloszlású kétdimenziós valószínűségi vektorváltozók. Legyen

$$\varrho_i = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad f(\xi_i) > \eta_i \\ 0, & \text{ha} \quad f(\xi_i) \leq \eta_i \end{cases}.$$

Ekkor ϱ_i-k függetlenek és azonos eloszlásúak. Továbbá

$$\mathbb{E}\varrho_i = P\left(f(\xi_i) > \eta_i\right) = \int_0^1 f(x)\,dx$$

(a valószínűség geometriai kiszámítási módja alapján). A nagy számok erős törvénye miatt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \varrho_i = \int_0^1 f(x)\, dx$$

majdnem biztosan. A fentiek alapján a (ξ_i, η_i), $i = 1, 2, \ldots$ sorozat megfigyelésével kiszámíthatjuk $\int_0^1 f(x)\, dx$-et. Az integrál közelítő értéke a függvény görbe alá eső (ξ_i, η_i) pontok száma osztva az összes (ξ_i, η_i) pontok számával. Lásd a 3.6.4. ábrát!

Gyakorlatok

(1) Legyen $f : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ nemcsökkenő függvény. Legyen η nemnegatív, korlátos valószínűségi változó: $0 \le \eta \le c$. Lássuk be, hogy $\varepsilon > 0$ esetén
$$P(\eta \ge \varepsilon) \ge \frac{\mathbb{E} f(\eta) - f(\varepsilon)}{f(c)}.$$
(Ez a Markov-egyenlőtlenség megfordításának tekinthető.) Legyen ξ korlátos valószínűségi változó: $|\xi| < c$. Igazoljuk, hogy
$$P(|\xi - \mathbb{E}\xi| \ge \varepsilon) \ge \frac{\mathbb{D}^2\xi - \varepsilon^2}{4c^2}.$$
(Ez a Csebisev-egyenlőtlenség megfordítása.)

(2) Legyen ξ binomiális eloszlású $p = 1/2$ és $n = 10$ paraméterrel. Adjunk alsó becslést a $V = P(4 \le \xi \le 6)$ valószínűségre a Csebisev-egyenlőtlenség felhasználásával.

(3) Legyenek $\xi_1, \ldots, \xi_{16}$ független, standard normális eloszlásúak. Adjuk meg $\overline{\xi} = (\xi_1 + \cdots + \xi_{16})/16$ eloszlását. A Csebisev-egyenlőtlenség felhasználásával adjunk felső becslést a $p = P(|\overline{\xi}| \ge 1)$ valószínűségre.

(4) Számítsuk ki az $\int_0^1 \sin x\, dx$ értékét a 3.6.9. példában megadott módszerrel.

Ellenőrző kérdések

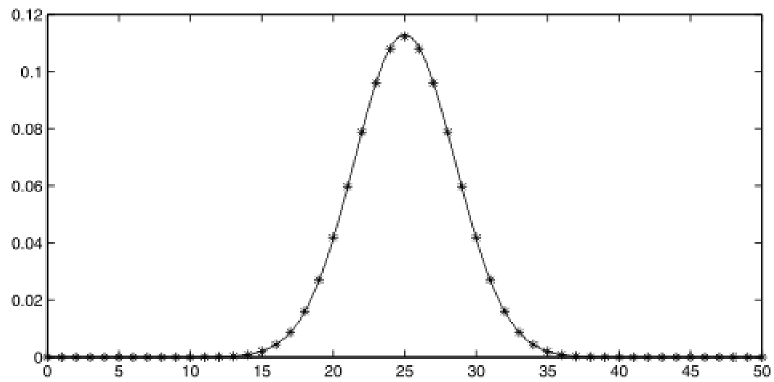
(1) Mit mond ki a Markov- és a Csebisev-egyenlőtlenség?
(2) Mi a különbség a nagy számok erős és gyenge törvényei között?
(3) Mit állít a nagy számok Kolmogorov-féle erős törvénye?
(4) Mit állít a nagy számok törvénye a relatív gyakoriságokról?

3.7. A központi határeloszlás-tétel

3.7.1. A határeloszlás-tétel lokális alakja Bernoulli-féle kísérletsorozatra Legyenek $\xi_1, \xi_2, \ldots$ független, azonos Bernoulli-eloszlású valószínűségi változók: $P(\xi_i = 1) = p$, $P(\xi_i = 0) = q = 1 - p$ $(0 < p < 1)$, $i = 1, 2, \ldots$. Legyen $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$, $n = 1, 2, \ldots$, az ún. n-edik részletösszeg. Ekkor S_n binomiális eloszlású, $\mathbb{E}S_n = np$, $\mathbb{D}^2 S_n = npq$.

3.7.1. Exercise. Ábrázoljuk közös koordinátarendszerben az (n, p) paraméterű binomiális eloszlást és az (np, npq) paraméterű normális eloszlás sűrűségfüggvényét! (A 3.7.1. ábrán a $p = 1/2, n = 50$ eset látható.) Ugyanezt végezzük el a binomiális eloszlás standardizáltjával és a standard normális eloszlással! Mit tapasztalunk, ha n nagy (p rögzített)?

3.7.1. ábra. A binomiális eloszlás közelítése normálissal



A központi határeloszlás-tétel azt állítja, hogy S_n „közelítőleg” normális eloszlású, ha n „nagy”. A pontosabb megfogalmazáshoz emlékeztetünk arra, hogy a $g(n) = \mathrm{o}\,(h(n))$ jelölés alatt azt értjük, hogy $\lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{h(n)} = 0$. Továbbá, $g(n) \sim h(n)$ azt jelenti, hogy $\lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{h(n)} = 1$. Jelölje $P_n(k)$ S_n eloszlását: $P_n(k) = \binom{n}{k}\, p^k\, q^{n-k}$, $k = 0, 1, \ldots, n$.

3.7.2. Theorem. *Legyen $0 < p < 1$. Ekkor azon k-kra, melyekre $|k - np| = \mathrm{o}(npq)^{2/3}$, egyenletesen teljesül a következő:*

$$P_n(k) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp\left\{-\frac{(k-np)^2}{2npq}\right\}. \tag{3.7.1}$$

A tétel állítása részletesebben kifejtve:

$$\sup_{\{k\,:\,|k-np|\le g(n)\}} \left| \frac{P_n(k)}{\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp\left\{-\frac{(k-np)^2}{2npq}\right\}} - 1 \right| \to 0, \tag{3.7.2}$$

ha $n \to \infty$, ahol $g(n) = \mathrm{o}(npq)^{2/3}$.

Megjegyezzük, hogy (3.7.1) jobb oldalán (ill. (3.7.2)-ben is) $\mathcal{N}(np, npq)$ sűrűségfüggvényének a k-helyen vett értéke szerepel. (3.7.1) jelentése tehát az, hogy a „farkak” kivételével a binomiális eloszlás egyenletesen közelíthető normális eloszlással.

3.7.3. Exercise. A binomiális eloszlás standardizáltjára mutassuk meg, hogy

$$P\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} = x\right) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-x^2/2}\ , \quad x = \mathrm{o}(npq)^{1/6},$$

ahol $x\sqrt{npq} + np$ nemnegatív egész. Innen

$$t_k = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} \quad \text{és} \quad \Delta t_k = t_{k+1} - t_k = \frac{1}{\sqrt{npq}}$$

jelöléssel

$$P\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} = t_k\right) \sim \frac{\Delta t_k}{\sqrt{2\pi}} e^{-t_k^2/2}, \quad t_k = \mathrm{o}(npq)^{1/6}.$$

Mit jelent ez utóbbi a standardizált binomiális eloszlás és a standard normális eloszlás sűrűségfüggvénye alatti terület viszonyára vonatkozóan?

3.7.2. A határeloszlás-tétel integrál alakja Bernoulli-féle kísérletsorozatra Az előzőek alapján természetesnek tűnik, hogy az (n, p) paraméterű binomiális eloszlásfüggvény közel van $\mathcal{N}(np, npq)$ eloszlásfüggvényéhez. Ez igaz is, és pontos bizonyítása az alábbi tételből (és a szakasz végi gyakorlatokból) fog adódni. Szemléltetése pedig a 3.7.2. ábrán látható a $p = 1/2, n = 25$ esetben.

A binomiális eloszlás standardizáltjának eloszlásfüggvénye az egész számegyenesen egyenletesen konvergál a standard normális eloszlás eloszlásfüggvényéhez. Ez részletesebben kifejtve az alábbit jelenti.

3.7.4. THEOREM. *Jelölje Φ a standard normális eloszlásfüggvényt:*

$$\Phi(b) = \int_{-\infty}^{b} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \quad b \in \mathbb{R},$$

F_n pedig jelölje a binomiális eloszlás standardizáltjának eloszlásfüggvényét:

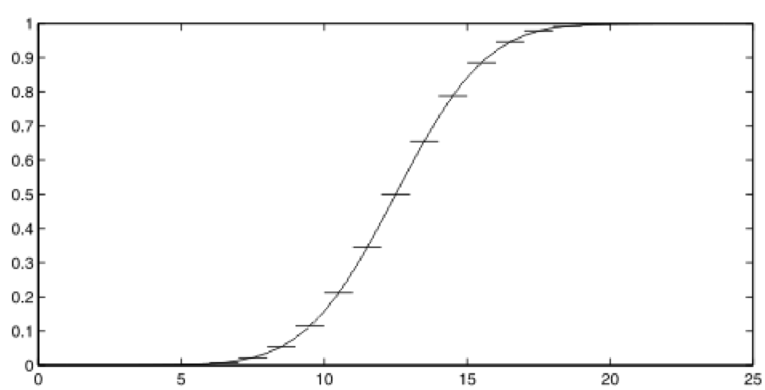
$$F_n(b) = P\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} < b\right) = \sum_{x<b} P_n\left(np + x\sqrt{npq}\right), \quad b \in \mathbb{R},$$

ahol az összegzés olyan x-ekre értendő, melyekre P_n argumentumában nemnegatív egész áll. Ekkor

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{-\infty \le b \le \infty} |F_n(b) - \Phi(b)| = 0.$$

A 3.7.2 és 3.7.4 tételek az ún. *Moivre-Laplace-tétel* változatai.

3.7.2. ábra. A binomiális eloszlásfüggvény közelítése normálissal



3.7.5. EXERCISE. Vezessük le a nagy számok gyenge törvényét a Moivre-Laplace-tételből!

3.7.3. Valószínűségeloszlások konvergenciája A majdnem biztos, ill. a sztochasztikus konvergencia valamilyen értelemben maguknak a valószínűségi változóknak a „közelségén” alapul, míg a most bevezetendő konvergencia csupán az eloszlások „közelségén”.

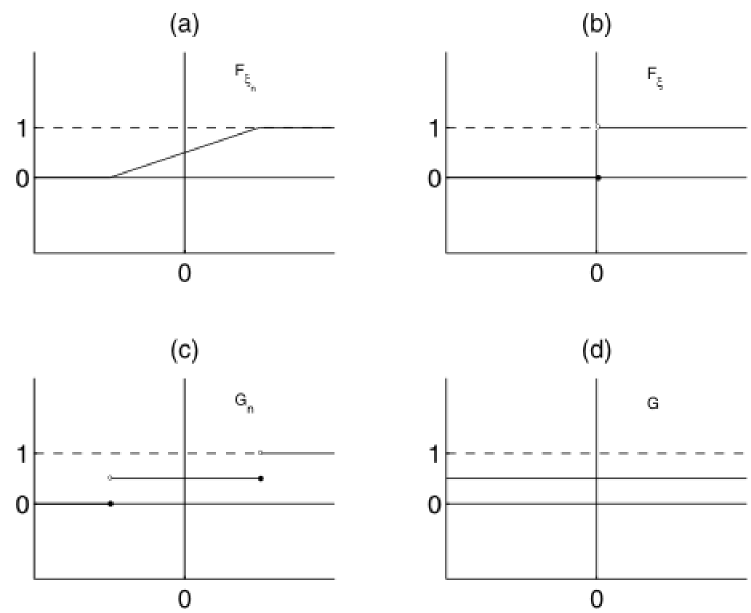
3.7.6. Definition. Azt mondjuk, hogy az F_n, $n = 1, 2, \ldots$ eloszlásfüggvény sorozat *gyengén konvergál* az F eloszlásfüggvényhez, ha

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$$

teljesül minden olyan x pontban, ahol F folytonos.

Azt mondjuk, hogy a $\xi_n, n = 1, 2, \ldots$ valószínűségi változó sorozat *eloszlásban konvergál* a ξ valószínűségi változóhoz, ha F_{ξ_n} gyengén konvergál F_ξ-hez.

3.7.3. ábra. Eloszlásfüggvények konvergenciája



3.7.7. Example. (1) Ha ξ_n egyenletes eloszlású a $[-1/n, +1/n]$ intervallumon, és $\xi \equiv 0$, akkor ξ_n eloszlásban tart ξ-hez, de $\lim_{n\to\infty} F_{\xi_n}(0) \neq F_\xi(0)$, azaz az F_ξ ugrási helyén nem áll fenn az eloszlásfüggvények konvergenciája. F_{ξ_n} és F_ξ a 3.7.3 ábra (a) és (b) részén látható. Másrészt, ha η_n egyenletes eloszlású $[0, 1/n]$-en, akkor η_n eloszlásban tart ξ-hez, és $\lim_{n\to\infty} F_{\eta_n}(x) = F_\xi(x)$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén.

(2) Ha ξ_n egyenletes eloszlású $[-n, n]$-en, akkor (eloszlásfüggvényét G_n-nel jelölve)

$$\lim_{n\to\infty} G_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x+n}{2n} = \frac{1}{2} = G(x)\,, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Azaz eloszlásfüggvények határértéke nem feltétlenül eloszlásfüggvény. G_n és G a 3.7.3 ábra (c) és (d) részén látható.

3.7.4. A központi határeloszlás-tétel az általános esetben A matematikai statisztika módszereinek jelentős része arra a feltevésre épül, hogy a megfigyelt mennyiség normális eloszlású. Azt, hogy a megfigyelt mennyiségek igen gyakran (közelítőleg) normális eloszlást követnek, egyrészt a tapasztalat mutatja, másrészt elméletileg a központi határeloszlás-tételek támasztják alá.

3.7.8. THEOREM. *Legyenek $\xi_1, \xi_2, \dots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$. Tegyük fel, hogy $\sigma^2 = \mathbb{D}^2\xi_1$ véges és pozitív, és legyen $m = \mathbb{E}\xi_1$. Ekkor*

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n - nm}{\sqrt{n}\sigma} < x\right) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\, dt,} \tag{3.7.3}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$.

A (3.7.3) képlet jelentése: S_n standardizáltjának eloszlásfüggvénye a standard normális eloszlásfüggvényhez tart $n \to \infty$ esetén. Megjegyezzük, hogy a központi határeloszlás tétel általánosabb alakjai a fentinél jóval gyengébb feltételek esetén állítják, hogy valószínűségi változók összegei normális eloszláshoz tartanak.

3.7.5. A központi határeloszlás-tétel lokális alakja

3.7.9. THEOREM. *Legyenek $\xi_1, \xi_2, \dots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$. Tegyük fel, hogy $\sigma^2 = \mathbb{D}^2\xi_1$ véges és pozitív és $\mathbb{E}\xi_1 = 0$. Jelölje $S_n^* = S_n/(\sqrt{n}\sigma)$ az S_n standardizáltját. Tegyük fel, hogy ξ_1-nek létezik sűrűségfüggvénye, mely szakaszonként folytonos. Jelölje f_n az S_n^* sűrűségfüggvényét (amely a feltételek miatt létezik). Tegyük fel, hogy valamely n_0-ra f_{n_0} korlátos. Ekkor*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2},\ x \in \mathbb{R},$$

és a konvergencia x-ben egyenletes.

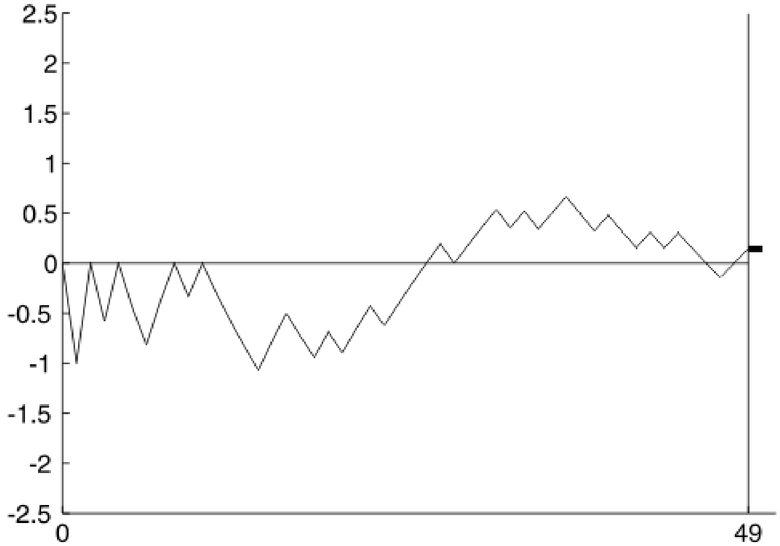
Tehát a standardizált részletösszegek sűrűségfüggvénye a standard normális sűrűségfüggvényhez konvergál. A tétel bizonyítása megtalálható pl. Rényi (1981) könyvében.

3.7.6. A központi határeloszlás-tétel szemléltetése Legyenek $\xi_1, \xi_2, \dots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, $m = \mathbb{E}\xi_1$, $\sigma^2 = \mathbb{D}^2\xi_1$, $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$. A központi határeloszlás-tétel alapján, nagy n esetén $(S_n - nm)/(\sqrt{n}\sigma)$ közelítőleg standard normális eloszlású. Tehát annak a valószínűsége, hogy valamely $[a, b]$ intervallumba esik, nagyjából annyi, mint a $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ függvény alatti terület $[a, b]$-n. Ezt kísérletileg úgy láthatjuk, hogy $(S_n - nm)/(\sqrt{n}\sigma)$-et sokszor megfigyeljük, és meghatározzuk ezen mennyiség $[a, b]$-be való esésének relatív gyakoriságát.

Ennek számítógépes szimulációval való szemléltetése a következő. Generáljuk (nagy n-re) $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$-et. Határozzuk meg $(S_n - nm)/(\sqrt{n}\sigma)$ konkrét értékét. Ezt ismételjük sokszor. Ábrázoljuk az egyes részintervallumokba esés (relatív) gyakoriságát.

Konkrétan a szimmetrikus véletlen bolyongás esetére készítettük el a 3.7.6. ábrát. Most $P(\xi_i = +1) = P(\xi_i = -1) = 0.5, m = 0, \sigma^2 = 1$, így az $S_n/\sqrt{n}$-et kell ábrázolni. A $0, S_1/\sqrt{1}, S_2/\sqrt{2}, \dots, S_n/\sqrt{n}$ sorozat (töröttvonallal összekötve) látható

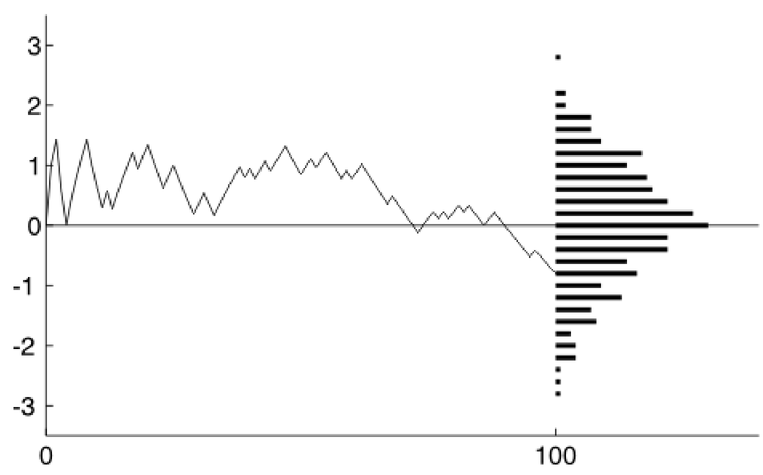
3.7.4. ábra. A standardizált bolyongás



az ábrán. Az n értékét 49-nek választottuk (hogy a bolyongás lefolyása jól látható legyen), a becsapódás helyén pedig 1 egységnyi súlyt helyeztünk el.

Ezután egy $n = 100$ hosszúságú kísérletsorozatot sokszor (konkrétan 300-szor) megismételtünk. A sok hosszú bolyongás becsapódásai az $n = 100$-nál lévő függőleges falon megközelítőleg a haranggörbét domborítják ki (3.7.6 ábra).

3.7.5. ábra. A standardizált bolyongás ismétléseinek eredménye



Gyakorlatok

(1) A központi határeloszlás-tétel lokális alakjából (azaz a 3.7.9 Tételből) vezessük le annak integrál alakját (azaz a 3.7.8 Tételt).
(2) Legyenek $\xi_1, \xi_2, \dots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, $m = \mathbb{E}\xi_1, \sigma^2 = \mathbb{D}^2\xi_1, S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$. Jelölje F_n az S_n eloszlásfüggvényét, Φ_n pedig az $\mathcal{N}(nm, n\sigma^2)$ eloszlásfüggvényét. Bizonyítsuk be, hogy
$$\lim_{n\to\infty} |F_n(x) - \Phi_n(x)| = 0$$
minden x valós számra. Azaz S_n eloszlása a neki megfelelő várható értékű és szórású normálishoz van közel. A bizonyításhoz használjuk a 3.7.8 Tételt és azt a tényt, hogy az eloszlásfüggvények konvergenciája egyenletes, ha a határ-eloszlásfüggvény folytonos.
(3) Legyenek $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{12}$ független, a $[0, 1]$-en egyenletes eloszlású valószínűségi változók, $S = \xi_1 + \cdots + \xi_{12}$. A központi határeloszlás-tétel és a normális eloszlás táblázata segítségével adjunk közelítést a $P(4.5 \le S \le 7.5)$ valószínűségre.

Ellenőrző kérdések

(1) Miben különbözik a nagy számok törvénye és a központi határeloszlás-tétel?
(2) Mondja ki a központi határeloszlás-tételt!

4. FEJEZET

Nevezetes abszolút folytonos eloszlások

4.1. Az egyenletes eloszlás

4.1.1. Az egyenletes eloszlás jelentése Ha egy véges intervallumra úgy dobunk egy pontot, hogy az intervallum bármely részintervallumára annak hosszával arányos valószínűséggel essen, akkor a pont x-koordinátája egyenletes eloszlású.

A ξ valószínűségi változót az $[a, b]$ intervallumon *egyenletes eloszlásúnak* nevezzük, ha eloszlásfüggvénye

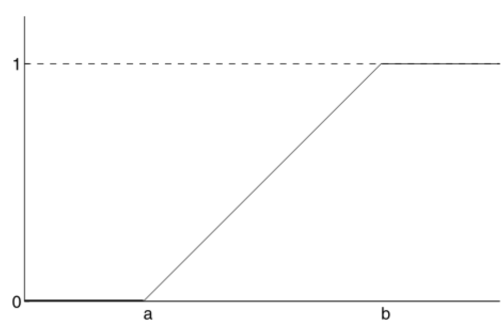
$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x \leq a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{ha} \quad a < x \leq b, \\ 1, & \text{ha} \quad b < x. \end{cases}$$

Az egyenletes eloszlás sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \quad \text{ha} \quad a \leq x \leq b,$$

egyébként $f(x) = 0$.

4.1.1. ábra. Az egyenletes eloszlás eloszlásfüggvénye



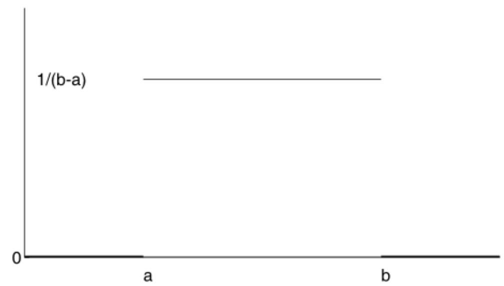
4.1.2. Az egyenletes eloszlás jellemző mennyiségei A várható érték:

$$\mathbb{E}\xi = \frac{a+b}{2}.$$

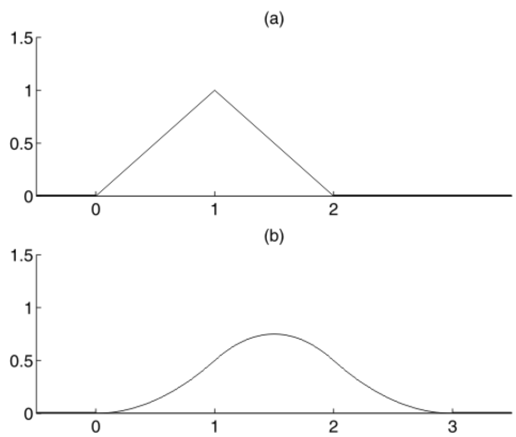
A szórásnégyzet:

$$\mathbb{D}^2\xi = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

4.1.2. ábra. Az egyenletes eloszlás sűrűségfüggvénye



4.1.3. ábra. 2, ill. 3 egyenletes eloszlás konvolúciója



A 4.1.2. ábra (a) részén 2, (b) részén pedig 3 független, $[0,1]$-en egyenletes eloszlású valószínűségi változó összegének sűrűségfüggvénye látható. A konvolúció simító hatása jól megfigyelhető.

4.1.3. A többdimenziós egyenletes eloszlás Legyen $G \subset \mathbb{R}^d$ véges Lebesgue-mértékű Borel-halmaz (azaz G területe, térfogata,... véges). Dobjunk G-re egy pontot úgy, hogy a G bármely Borel-részhalmazára annak Lebesgue-mértékével arányos valószínűséggel essen, akkor a pont $\boldsymbol{\xi}$ helyvektora egyenletes eloszlású G-n. Ekkor $\boldsymbol{\xi}$ sűrűségfüggvénye $f(\boldsymbol{x}) = 1/\lambda(G)$, ha $\boldsymbol{x} \in G$, $f(\boldsymbol{x}) = 0$ egyébként (ahol λ a Lebesgue-mértéket jelöli). Az ilyen sűrűségfüggvényű eloszlást nevezzük G-n egyenletes eloszlásnak.

Gyakorlatok

(1) Számítsuk ki az $[a,b]$-n egyenletes eloszlás centrált momentumait!
(2) Számítsuk ki 2, ill. 3 független, $[0,1]$-en egyenletes eloszlású valószínűségi változó összegének sűrűségfüggvényét!
(3) Igazoljuk, hogy ha $a_n \to c$ és $b_n \to c$, akkor az $[a_n, b_n]$-en egyenletes eloszlás a c-re koncentrálódó (diszkrét) eloszláshoz konvergál! Igazoljuk,

hogy ha $a_n \to -\infty$ és $b_n \to +\infty$, akkor az $[a_n, b_n]$-en egyenletes eloszlás nem konvergál semmilyen eloszláshoz!

(4) Legyen (ξ, η) egyenletes eloszlású az $[a, b] \times [c, d]$ téglalapon. Határozzuk meg (ξ, η) együttes eloszlásfüggvényét! Ábrázoljuk is!

(5) Legyen (ξ, η) egyenletes eloszlású $G \subset \mathbb{R}^2$-n. Milyen G esetén lesz ξ és η független?

Ellenőrző kérdések

(1) Mi az egyenletes eloszlás definíciója?

(2) Mi az egyenletes eloszlás eloszlásfüggvénye, sűrűségfüggvénye, várható értéke?

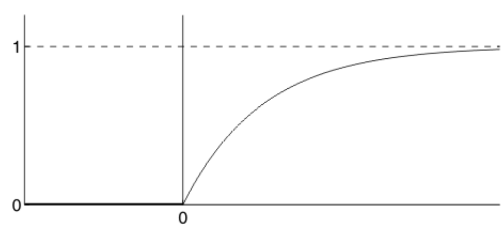
4.2. Az exponenciális eloszlás

4.2.1. Az exponenciális eloszlás definíciója A ξ valószínűségi változót λ paraméterű *exponenciális eloszlásúnak* nevezzük, ha eloszlásfüggvénye:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0. \end{cases}$$

Itt $\lambda > 0$ rögzített.

4.2.1. ábra. Az exponenciális eloszlásfüggvény



Az exponenciális eloszlás élettartamok és várakozási idők eloszlásaként lép fel. Az exponenciális eloszlás és a vele kapcsolatos más eloszlások a sorbanállás-elméletben és a megbízhatóság-elméletben használatosak.

Az exponenciális eloszlás sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0. \end{cases}$$

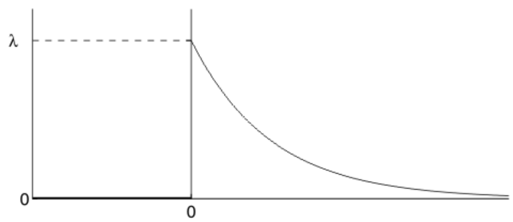
4.2.2. Az exponenciális eloszlás jellemző mennyiségei A momentumok:

$$\mathbb{E}\xi^k = \frac{k!}{\lambda^k}, \qquad k = 1, 2, \ldots.$$

Speciálisan, a várható érték és a szórásnégyzet:

$$\mathbb{E}\xi = \frac{1}{\lambda}, \quad \mathbb{D}^2\xi = \frac{1}{\lambda^2}.$$

4.2.2. ábra. Az exponenciális sűrűségfüggvény



4.2.3. Az exponenciális eloszlás tulajdonságai Az exponenciális eloszlás „örökifjú”:

$$P(\xi < t+s|\xi \geq t) = P(\xi < s), \qquad t>0,\ s>0.$$

A fenti egyenlőség jellemzi is az exponenciális eloszlást az abszolút folytonos eloszlások között.

4.2.1. THEOREM. *Ha $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ független, λ paraméterű exponenciális eloszlású, akkor $\eta_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$ n-edrendű, λ paraméterű Γ-eloszlású, azaz η_n sűrűségfüggvénye:*

$$f_n(t) = \frac{\lambda^n t^{n-1} e^{-\lambda t}}{(n-1)!}, \quad \textit{ha} \quad t>0.$$

Ezt a speciális Γ-eloszlást Erlang-eloszlásnak *is nevezik.*

BIZONYÍTÁS. Ennek igazolása indukcióval történhet. $n=1$ esetén igaz a képlet, hiszen f_1 éppen az exponenciális sűrűségfüggvény. Az $\eta_n = \eta_{n-1} + \xi_n$ felbontást használva (és feltéve, hogy η_{n-1} sűrűségfüggvénye f_{n-1}) η_n sűrűségfüggvénye a konvolúciós képlet alapján:

$$\int_o^t \frac{\lambda^{n-1} u^{n-2} e^{-\lambda u}}{(n-2)!} \cdot \lambda e^{-\lambda(t-u)} du = \frac{\lambda^n e^{-\lambda t}}{(n-2)!} \int_0^t u^{n-2} du = f_n(t).$$

□

4.2.4. A Laplace-eloszlás A ξ valószínűségi változót λ paraméterű *Laplace-eloszlásúnak* nevezzük, ha sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda|x|},$$

ahol $\lambda > 0$ rögzített.

A Laplace-eloszlás más neve: kétoldali exponenciális eloszlás. A Laplace-eloszlás várható értéke és szórásnégyzete:

$$\mathbb{E}\xi = 0, \qquad \mathbb{D}^2\xi = \frac{2}{\lambda^2}.$$

Gyakorlatok

(1) Egy élettartamot jelentő $\xi \geq 0$ valószínűségi változót örökifjúnak nevezünk, ha

$$P(\xi < t + s \mid \xi \geq t) = P(\xi < s)$$

$\forall s, t > 0$ esetén (azaz, ha a t életkort elérte, akkor ugyanolyan eséllyel él még s ideig, mintha éppen akkor született volna).
   (a) Lássuk be, hogy az exponenciális eloszlás örökifjú!
   (b) Lássuk be, hogy ha $\xi \geq 0$ örökifjú, akkor exponenciális eloszlású!
(2) Határozzuk meg a Laplace-eloszlás eloszlásfüggvényét!
(3) Ábrázoljuk a Laplace-eloszlás eloszlás- és sűrűségfüggvényét!
(4) Számítsuk ki a Laplace-eloszlás várható értékét és szórásnégyzetét!

Ellenőrző kérdések

(1) Mi az exponenciális eloszlás sűrűségfüggvénye?
(2) Mit jelent az „örökifjúság”?

4.3. A normális eloszlás

4.3.1. A normális eloszlás definíciója A normális eloszláson alapul a statisztika klasszikus elméletének túlnyomó része. A ξ valószínűségi változót *normális eloszlásúnak* nevezzük, ha sűrűségfüggvénye:

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)}, \tag{4.3.1}$$

ahol $m \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$.

Jelölése: $\xi \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Igazolnunk kell, hogy (4.3.1) valóban sűrűségfüggvényt határoz meg.

4.3.1. Theorem. *A* (4.3.1) *alatti f függvény sűrűségfüggvény.*

Bizonyítás. $f(x) > 0$ nyilvánvaló. f mérhető, mivel folytonos. Továbbá $y = (x-m)/\sigma$ helyettesítéssel

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-y^2/2} dy = \sqrt{\frac{2}{\pi}} I. \tag{4.3.2}$$

Számítsuk ki I^2-et. Kettős integrállá alakítással

$$I^2 = \int_0^\infty e^{-x^2/2} dx \int_0^\infty e^{-y^2/2} dx = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)/2} dx dy.$$

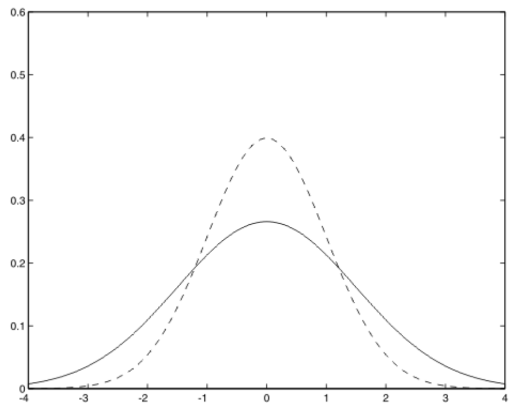
$x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ helyettesítéssel polárkoordinátákra térünk át (a transzformáció Jacobi-determinánsa r) :

$$I^2 = \int_0^{\pi/2} \int_0^\infty r e^{-r^2/2} dr d\varphi = \frac{\pi}{2} \left[-e^{-r^2/2}\right]_0^\infty = \frac{\pi}{2}.$$

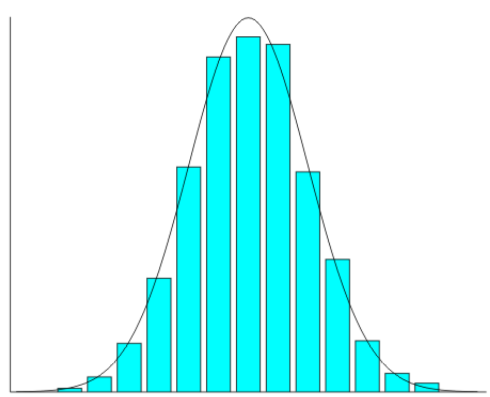
Így (4.3.2) alapján $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$, azaz f tényleg sűrűségfüggvény. $\square$

f grafikonja az ún. haranggörbe (Gauss-görbe). Az f függvény m-re szimmetrikus, f szigorúan monoton növekvő a $(-\infty, m]$ intervallumon. $m \pm \sigma$-ban f-nek inflexiós pontja van. m-ben f-nek maximumhelye van, a maximum értéke $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$. σ növelésével a harang alakú görbe „laposabbá" válik, σ csökkentésével pedig „csúcsosabbá". A 4.3.1. ábrán normális sűrűségfüggvények láthatóak $m = 0$ esetén. A csúcsosabbnál $\sigma = 0.7$, a folytonos vonallal ábrázoltnál $\sigma = 1$.

4.3.1. ábra. Normális sűrűségfüggvények különböző szórásokra



4.3.2. ábra. Hisztogram és normális sűrűségfüggvény

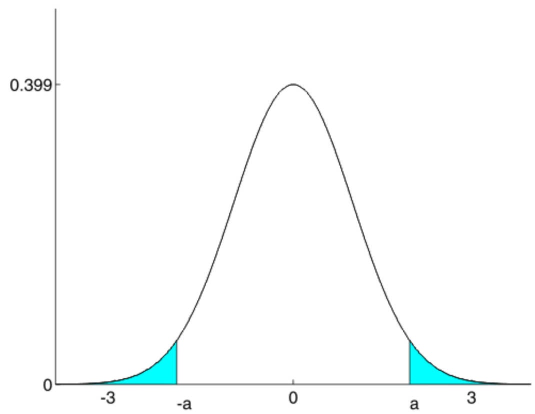


A normális eloszlásfüggvényre nincs zárt formula, de vannak jó numerikus közelítések.

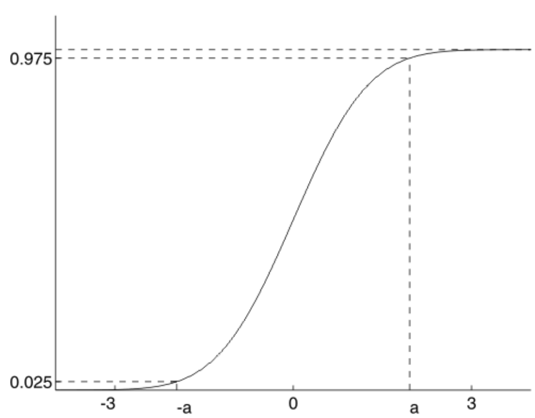
A normális eloszlás a mérési hibák tipikus eloszlása. Ez a gyakorlatban azt jelenti, hogy ha a mérési eredmények oszlopdiagramját (pontosabban szólva, sűrűséghisztogramját) felrajzoljuk, akkor arra általában jól illeszthető haranggörbe (lásd a 4.3.1 ábrát).

4.3.2. A standard normális eloszlás Ha $\xi_0 \sim \mathcal{N}(0,1)$, akkor ξ_0-at *standard normális eloszlásúnak* nevezzük. A 4.3.2 és a 4.3.2 ábrán a standard normális sűrűségfüggvény, ill. eloszlásfüggvény látható. Az ábrákon bejelöltük a 0.025 kvantilist: $-a = -1.96$ és a 0.975 kvantilist: $a = 1.96$. Ez azt jelenti, hogy a sűrűségfüggvény alatt besatírozott két rész mindegyike 0.025 területű. Továbbá, hogy az eloszlásfüggvény értéke a $-a = -1.96$ helyen 0.025, az $a = 1.96$ helyen pedig 0.975.

4.3.3. ábra. A standard normális sűrűségfüggvény



4.3.4. ábra. A standard normális eloszlásfüggvény



A páratlan rendű momentumok nullával egyenlőek, a párosak:

$$\mathbb{E}\xi_0^{2r} = (2r-1)(2r-3)\dots 3\cdot 1 = (2r-1)!!.$$

4.3.3. A normális eloszlás jellemzői Ha $\xi \sim \mathcal{N}(m,\sigma^2)$ és $\eta = a\xi + b$, akkor $\eta \sim \mathcal{N}(am+b, a^2\sigma^2)$. Speciálisan, ξ standardizáltja standard normális eloszlású:

$(\xi - m)/\sigma \sim \mathcal{N}(0,1)$. Másrészt minden normális eloszlás megkapható a standard normális eloszlásból: ha $\xi_0 \sim \mathcal{N}(0,1)$, akkor $\xi = \sigma\xi_0 + m$ −re $\xi \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ teljesül.

A várható érték:

$$\mathbb{E}\xi = m.$$

A páratlan rendű centrált momentumok nullával egyenlőek, a párosak:

$$\mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^{2r} = \sigma^{2r}(2r-1)(2r-3)\dots 3\cdot 1.$$

Speciálisan, a szórásnégyzet:

$$\mathbb{D}^2\xi = \sigma^2.$$

Ha $\xi_1 \sim \mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$, $\xi_2 \sim \mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$, és ξ_1 és ξ_2 függetlenek, akkor

$$\xi_1 + \xi_2 \sim \mathcal{N}(m_1 + m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2).$$

Megemlítjük a standard normális eloszlásfüggvény egy egyszerű approximációját (lásd: Johnson, Kotz (1970), 1. kötet, 55. oldal). Jelölje Φ a standard normális eloszlásfüggvényt. Ekkor

$$\Phi(x) \approx 1 - 0.5(1 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4)^{-4},$$

ha $x \geq 0$, ahol $a_1 = 0.196854$, $a_2 = 0.115194$, $a_3 = 0.000344$, $a_4 = 0.019527$. A közelítés hibája kisebb 2.5×10^{-4}-nél.

Ha $\xi \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, akkor $P(m - 3\sigma < \xi < m + 3\sigma) \approx 0.9972$. Azaz a normális eloszlású valószínűségi változó a saját várható értéke körüli $\pm 3\sigma$ intervallumon kívülre elenyésző (kb. 0.0028) valószínűséggel esik. Ez az ún. **$3\boldsymbol{\sigma}$-*szabály*** (*három szigma szabály*), amelyet az ipari minőségellenőrzésben rutinszerűen használnak.

Gyakorlatok

(1) Bizonyítsuk be, hogy normális eloszlású valószínűségi változó lineáris függvénye is normális eloszlású! Alkalmazzuk az eloszlásfüggvény definícióját.
(2) Határozzuk meg a normális eloszlás momentumait a standard normális eloszlásra visszavezetve!
(3) A sűrűségfüggvények konvolúciós formulájával bizonyítsuk be, hogy normális eloszlások konvolúciója is normális eloszlás.

Ellenőrző kérdések

(1) Mi a normális eloszlás sűrűségfüggvénye?
(2) Mi a 3σ-szabály?

4.4. A többdimenziós normális eloszlás

A többdimenziós normális eloszlás alapvető szerepet játszik a statisztikában, így itt részletesen tárgyaljuk.

4.4.1. A többdimenziós standard normális eloszlás Legyenek $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ független, standard normális eloszlású valószínűségi változók. Ekkor a $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)^\top$ valószínűségi vektorváltozót *n-dimenziós standard normális eloszlásúnak* nevezzük.

Mivel $\mathbb{E}\xi_i = 0$, $\mathbb{D}^2\xi_i = 1$ és $\mathrm{cov}(\xi_i, \xi_j) = 0$ $(i \neq j)$, így $\mathbb{E}\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$ (n-dimenziós nullvektor) és $\mathrm{var}(\boldsymbol{\xi}) = I$ ($n \times n$-es egységmátrix). $\boldsymbol{\xi}$ eloszlásának jelölése $\boldsymbol{\xi} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, I)$. Ha a dimenzióra is utalni akarunk, akkor $\boldsymbol{\xi} \sim \mathcal{N}_n(\mathbf{0}, I)$.

4.4.1. THEOREM. *$\boldsymbol{\xi} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, I)$ sűrűségfüggvénye*

$$f_{\boldsymbol{\xi}}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{x}\right\},$$

ahol $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$.

BIZONYÍTÁS. Mivel $\boldsymbol{\xi} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, I)$ koordinátái független, standard normálisak, ezért $\boldsymbol{\xi}$ sűrűségfüggvénye n db egydimenziós standard normális sűrűségfüggvény szorzata:

$$f_{\boldsymbol{\xi}}(\boldsymbol{x}) = \prod_{i=1}^n f_{\xi_i}(x_i) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x_i^2}{2}\right\} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{x}\right\}.$$

□

4.4.2. A többdimenziós normális eloszlás általános alakja

4.4.2. DEFINITION. Legyen $\boldsymbol{m} \in \mathbb{R}^n$, A $n \times n$-es mátrix és $\boldsymbol{\xi} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, I)$. Ekkor $\boldsymbol{\eta} = A\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{m}$-et *$n$-dimenziós normális eloszlásúnak* nevezzük.

Az $\eta_1, \dots, \eta_n$ valószínűségi változókat *együttesen normális eloszlásúaknak* nevezzük, ha $(\eta_1, \dots, \eta_n)^\top$ n-dimenziós normális eloszlású.

A fenti $\boldsymbol{\eta}$ eloszlása $\mathbb{R}^n$-nek az $\{A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{m} : \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n\}$ lineáris sokaságára koncentrálódik.

A várható érték vektor és a szórásmátrix transzformációs formulája alapján $\mathbb{E}\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{m}$ és $\operatorname{var}(\boldsymbol{\eta}) = AA^\top = D$.

$\boldsymbol{\eta}$ eloszlásának jelölése $\boldsymbol{\eta} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{m}, D)$ vagy $\boldsymbol{\eta} \sim \mathcal{N}_n(\boldsymbol{m}, D)$.

Minden $\boldsymbol{m} \in \mathbb{R}^n$ és D $n \times n$-es szimmetrikus, pozitív szemidefinit mátrix esetén létezik $\mathcal{N}(\boldsymbol{m}, D)$ eloszlás. A kívánt valószínűségi vektorváltozó $\boldsymbol{\eta} = \sqrt{D}\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{m}$, amennyiben $\boldsymbol{\xi} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, I)$.

4.4.3. THEOREM. *$\boldsymbol{\eta} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{m}, D)$-nek akkor és csak akkor van sűrűségfüggvénye, ha D invertálható. Ekkor $\boldsymbol{\eta}$ sűrűségfüggvénye:*

$$\boxed{f_{\boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{y}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}(\det D)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{m})^\top D^{-1}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{m})\right\}},$$

$\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$.

BIZONYÍTÁS. Mivel $D = \operatorname{var}(\boldsymbol{\eta}) = AA^\top$, így A pontosan akkor nem invertálható, ha D nem invertálható. Nem invertálható A esetén $\boldsymbol{\eta}$ eloszlása $\mathbb{R}^n$-nek n-nél kevesebb dimenziós lineáris sokaságára koncentrálódik, így nem lehet sűrűségfüggvénye. Invertálható A esetén a sűrűségfüggvény transzformációval határozható meg. □

Ha D nem invertálható, $\boldsymbol{\eta} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{m}, D)$-t *elfajult $\boldsymbol{n}$-dimenziós normális eloszlásúnak nevezzük.*

Az $\boldsymbol{\eta}$ n-dimenziós normális eloszlású valószínűségi vektorváltozó koordinátáinak bármely lineáris kombinációja egydimenziós normális eloszlású.

Ennek igazolására legyen $\boldsymbol{\eta} = A\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{m}$, ahol $\boldsymbol{\xi}$ standard normális, és legyen $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$. Ekkor $\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{\eta} = \sum_{i=1}^n (b_i \xi_i + c_i m_i)$, ahol b_i a $\boldsymbol{c}^\top A$ vektor i-edik koordinátája. Itt az összeadandók független, egydimenziós normálisak, így az összeg is egydimenziós normális.

A fenti megjegyzésben és a továbbiakban az egyetlen pontra koncentrált eloszlást is (elfajult) normális eloszlásnak tekintjük.

4.4.3. A többdimenziós normális eloszlás szemléltetése Könnyen látható, hogy a (nem elfajult) kétdimenziós standard normális eloszlás sűrűségfüggvényének képe éppen egy harang alakú felület (egy haranggörbe saját tengelye körüli megforgatottja).

Általában az $\boldsymbol{\eta} \sim \mathcal{N}_2(\boldsymbol{m}, D)$ nem elfajult kétdimenziós normális eloszlás sűrűségfüggvénye a fenti harang „eltorzítottja". Középpontja $\boldsymbol{m}$-ben van, szintvonalai pedig ellipszisek. Egy-egy ilyen ellipszis középpontja $\boldsymbol{m}$-ben van, tengelyei pedig $\boldsymbol{s}_1$ és $\boldsymbol{s}_2$ irányúak és hosszuk $\sqrt{\lambda_1}$-gyel, ill. $\sqrt{\lambda_2}$-vel arányos. Itt $\boldsymbol{s}_1$ és $\boldsymbol{s}_2$ a D mátrix λ_1, ill. λ_2 sajátértékekhez tartozó sajátvektorai. Ez a tény az

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}(\det D)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{m})^\top D^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{m})\right\} = c$$

egyenlet megoldásából következik. Ebből ugyanis a $D = S\Lambda S^\top$ felbontás - ahol S az ortonormált sajátvektorok mátrixa, Λ pedig a sajátértékek diagonális mátrixa - alapján

$$\frac{v_1^2}{\lambda_1} + \frac{v_2^2}{\lambda_2} = \tilde{c}$$

adódik. Itt v_1 és v_2 az $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{m}$ vektor két koordinátája az $\boldsymbol{s}_1$ és $\boldsymbol{s}_2$ alkotta bázisban. A 4.4.3. és 4.4.3. ábrához $\boldsymbol{m} = (2,1)^\top$ és

$$D = \begin{bmatrix} \frac{7}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{8} \\ -\frac{\sqrt{3}}{8} & \frac{5}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = S\Lambda S^\top$$

választással éltünk. Így D sajátvektorai

$$\boldsymbol{s}_1 = (\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})^\top$$

és

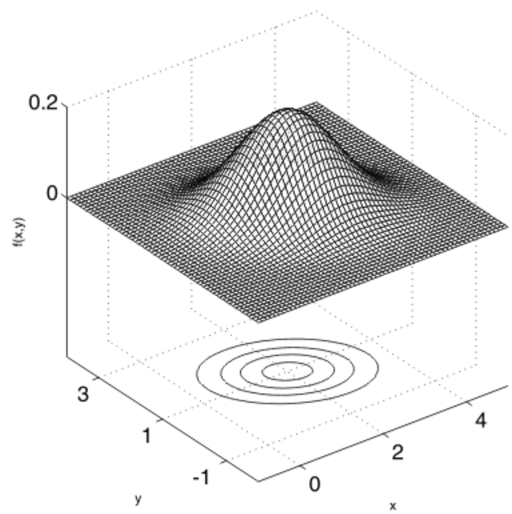
$$\boldsymbol{s}_2 = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})^\top,$$

sajátértékeki pedig $\lambda_1 = 1$ és $\lambda_2 = 1/2$.

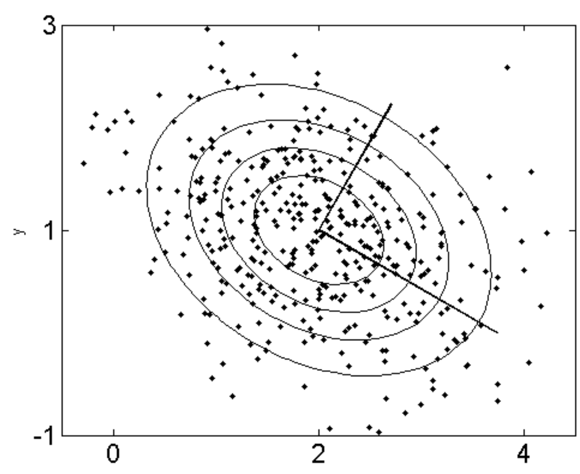
A 4.4.3 ábrán a sűrűségfüggvény harangja és annak ellipszis alakú szintvonalai láthatóak. A 4.4.3 ábrán újra a szintvonalak láthatóak, de most a fenti $\mathcal{N}_2(\boldsymbol{m}, D)$ normális eloszlásból generált 400 véletlen számmal együtt. Ezen 400 pont jól mutatja a fenti ellipszisek koncentráció ellipszis elnevezésének a jogosságát: a normális eloszlású valószínűségi vektorváltozó a belső ellipszisektől kifelé haladva egyre kisebb valószínűséggel esik.

Térjünk rá $\mathcal{N}_3(\boldsymbol{m}, D)$ nem elfajult háromdimenziós normális eloszlás szemléltetésére. Ekkor azon pontok, amelyeken a sűrűségfüggvény azonos értékeket vesz fel, egy-egy ellipszoidon helyezkednek el. Ezek a koncentráció ellipszoidok. Egy-egy ilyen ellipszoid középpontja $\boldsymbol{m}$-ben van, tengelyei pedig $\boldsymbol{s}_1$, $\boldsymbol{s}_2$, $\boldsymbol{s}_3$ irányúak és hosszuk $\sqrt{\lambda_1}$-, $\sqrt{\lambda_2}$-, ill. $\sqrt{\lambda_3}$-mal arányos. Itt $\boldsymbol{s}_i$-k $(i = 1,2,3)$ a D mátrix sajátvektorai, λ_i-k $(i = 1,2,3)$ pedig a sajátértékei. A koncentráció ellipszoidokat úgy képzelhetjük el, mint a Föld (vagy egy csonthéjas gyümölcs) héjszerkezetét: középen a legsűrűbb az anyag, kifelé folyamatosan ritkul. A normális eloszlás ennek megfelelően a középponttól távolodva az ellipszoidok által diktálta ütemben esik egyre kisebb és kisebb valószínűséggel.

4.4.1. ábra. A kétdimenziós normális sűrűségfüggvény



4.4.2. ábra. Koncentráció ellipszisek

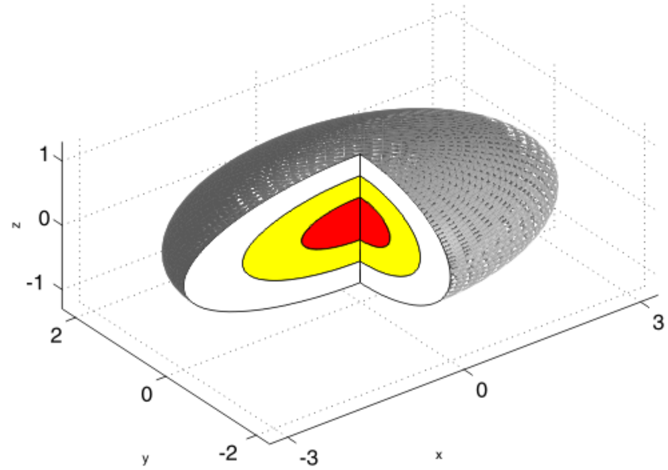


Az egyszerűség kedvéért legyen $\boldsymbol{m} = \mathbf{0}$, D pedig diagonális mátrix $(3, 2, 1)$ elemekkel a főátlóban. A 4.4.3 ábrán $\mathcal{N}_3(\boldsymbol{m}, D)$ egy koncentráció ellipszoidját látjuk a függőleges koordináta síkok mentén felvágva. A metszeten kialakuló ellipszisek az egyre kisebb koncentráció ellipszoidok síkmetszetei.

4.4.4. A többdimenziós normális eloszlás tulajdonságai

4.4.4. Theorem. *Legyen $\boldsymbol{\eta}$ többdimenziós normális eloszlású. Ekkor $\boldsymbol{\eta}$ koordinátái akkor és csak akkor függetlenek, ha korrelálatlanok.*

4.4.3. ábra. Koncentráció ellipszoidok



Általában a függetlenségből következik a páronkénti függetlenség, abból pedig a korrelálatlanság. Hangsúlyozzuk azonban, hogy fordítva általában nem igaz. A fenti állítás szerint viszont az együttesen normális eloszlású esetben a függetlenség, a páronkénti függetlenség és a korrelálatlanság ekvivalens tulajdonságok.

4.4.5. Theorem. *Legyen $\boldsymbol{\eta} \sim \mathcal{N}_n(\boldsymbol{m}, D)$. Bontsuk fel $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \ldots, \eta_n)^\top$-at két részvektorra: $\boldsymbol{\eta}_1 = (\eta_1, \ldots, \eta_k)^\top$, $\boldsymbol{\eta}_2 = (\eta_{k+1}, \ldots, \eta_n)^\top$. Ekkor $\boldsymbol{\eta}_1$ és $\boldsymbol{\eta}_2$ akkor és csak akkor függetlenek, ha korrelálatlanok.*

Normális eloszlású valószínűségi vektorváltozó lineáris függvénye is normális eloszlású.

4.4.6. Theorem. *Ha $\boldsymbol{\eta} \sim \mathcal{N}_n(\boldsymbol{m}, D)$ és $\boldsymbol{\tau} = A\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{b}$, ahol A $q \times n$ típusú mátrix, $\boldsymbol{b}$ q-dimenziós vektor, akkor*

$$\boldsymbol{\tau} \sim \mathcal{N}_q(A\boldsymbol{m} + \boldsymbol{b}, ADA^\top).$$

Gyakorlatok

(1) Legyen $\boldsymbol{\eta}$ nem elfajult n-dimenziós normális eloszlású. A sűrűségfüggvényeket felhasználva lássuk be, hogy $\boldsymbol{\eta}$ koordinátái akkor és csak akkor függetlenek, ha korrelálatlanok! Szintén a sűrűségfüggvényeket felhasználva, bizonyítsunk hasonló állítást $\boldsymbol{\eta}$ koordinátái helyett $\boldsymbol{\eta}$ részvektoraira!

(2) Legyenek $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_p)^\top$ és $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \ldots, \eta_q)^\top$ külön-külön többdimenziós normális eloszlásúak és függetlenek. Lássuk be, hogy az egyesített

$$\boldsymbol{\zeta} = (\boldsymbol{\xi}^\top, \boldsymbol{\eta}^\top)^\top = (\xi_1, \ldots, \xi_p, \eta_1, \ldots, \eta_q)^\top$$

vektor is normális eloszlású!

(3) Legyen ξ, η együttes sűrűségfüggvénye:

$$h(x, y) = \frac{1}{2\pi}\left[\left(\sqrt{2}e^{-\frac{x^2}{2}} - e^{-x^2}\right)e^{-y^2} + \left(\sqrt{2}e^{-\frac{y^2}{2}} - e^{-y^2}\right)e^{-x^2}\right].$$

Mutassuk meg, hogy ξ és η külön-külön normális eloszlásúak, de együttesen nem azok!

(4) Legyen ξ, η együttesen normális eloszlású, azonos szórással. Bizonyítsuk be, hogy $\xi + \eta$ és $\xi - \eta$ függetlenek és normális eloszlásúak!

4.5. A normális eloszlásból származó eloszlások

4.5.1. A gamma-függvény

4.5.1. Definition. A

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty u^{\alpha-1} e^{-u} du,$$

$\alpha > 0$, függvényt *gamma-függvénynek* (Γ-függvénynek) nevezzük.

4.5.2. Theorem. *1.* $\Gamma(1) = 1$.

2. $\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)\Gamma(\alpha - 1), \qquad \alpha > 1$. *Speciálisan,* $\Gamma(n) = (n-1)!$, $n = 1, 2, \ldots$.

3. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Bizonyítás. 2. Parciálisan integrálva:

$$\Gamma(\alpha) = \left[\frac{u^\alpha}{\alpha} e^{-u}\right]_0^\infty + \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty u^\alpha e^{-u} du = \frac{1}{\alpha} \Gamma(\alpha + 1).$$

3. A standard normális sűrűségfüggvény integrálja a pozitív féltengelyen $\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{2}.$$

Átrendezve és az $x = \frac{t^2}{2}$ helyettesítést végrehajtva:

$$\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} = \int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \int_0^\infty e^{-x} \frac{1}{\sqrt{2}} x^{\frac{1}{2}-1} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right).$$

□

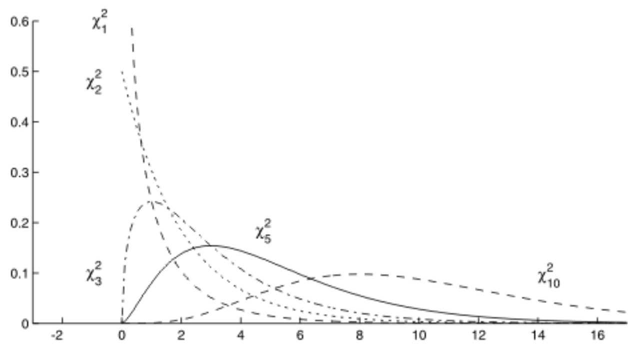
4.5.2. A khi-négyzet eloszlás Az η_n valószínűségi változót n szabadsági fokú *khi-négyzet eloszlásúnak* (χ^2-eloszlásúnak vagy χ^2_n-eloszlásúnak) nevezzük, ha sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} 2^{-\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

A khi-négyzet eloszlást szokták Pearson-féle eloszlásnak, ill. Helmert-féle eloszlásnak is nevezni.

A khi-négyzet eloszlás sűrűségfüggvénye a 4.5.2 ábrán látható.

4.5.1. ábra. A khi-négyzet eloszlás sűrűségfüggvénye



4.5.2.1. A khi-négyzet eloszlás származtatása a normális eloszlásból Legyenek $\xi_1, \ldots, \xi_n$ független standard normális eloszlásúak. Ekkor $\eta_n = \xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2$ n szabadsági fokú khi-négyzet eloszlású.

A khi-négyzet eloszlás kiemelkedő jelentőségét a matematikai statisztika számára éppen a normális eloszlásból való származtatása adja. A khi-négyzet eloszlás a statisztikában normális eloszlású mintaelemek esetén (pl. a széles körben alkalmazott szórásanalízisben) lépten-nyomon használatos. De a nem normális eloszlású mintaelemek esetén is alapvető, pl. a khi-négyzet próbák, ill. a likelihood-hányados próbák esetén ez a határeloszlás.

Ismeretes, hogy $\xi_1 \sim \mathcal{N}(0,1)$ esetén $\mathbb{E}\xi_1^2 = 1$, $\mathbb{D}^2\xi_1^2 = 2$, így a χ_n^2-eloszlás várható értéke és szórásnégyzete:

$$\mathbb{E}\eta_n = n, \quad \mathbb{D}^2\eta_n = 2n.$$

4.5.2.2. A khi-négyzet eloszlás tulajdonságai

4.5.3. Theorem. *(χ^2 addíciós tétel.) Legyenek η_n és η_m független χ^2-eloszlású valószínűségi változók n, ill. m szabadsági fokkal. Ekkor $\eta_n + \eta_m$ $n+m$ szabadsági fokú χ^2-eloszlású.*

A tétel szavakban kifejezve: független χ^2-ek összege χ^2, a szabadsági fokok pedig összeadódnak.

Bizonyítás. Legyenek $\xi_1, \ldots, \xi_{n+m}$ független standard normális eloszlásúak. η_n-et $\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2$-ként, η_m-et pedig $\xi_{n+1}^2 + \cdots + \xi_{n+m}^2$-ként reprezentálva,

$$\eta_n + \eta_m = \xi_1^2 + \cdots + \xi_{n+m}^2$$

adódik, ez pedig $n+m$ szabadsági fokú khi-négyzet eloszlású. □

A khi-négyzet eloszlás aszimptotikusan normális, azaz az alábbi érvényes.

4.5.4. Theorem. *Legyen η_n eloszlása χ_n^2. Ekkor η_n standardizáltja eloszlásban tart a standard normális eloszláshoz:*

$$\frac{\eta_n - n}{\sqrt{2n}} \implies \mathcal{N}(0,1)$$

eloszlásban, midőn $n \to \infty$.

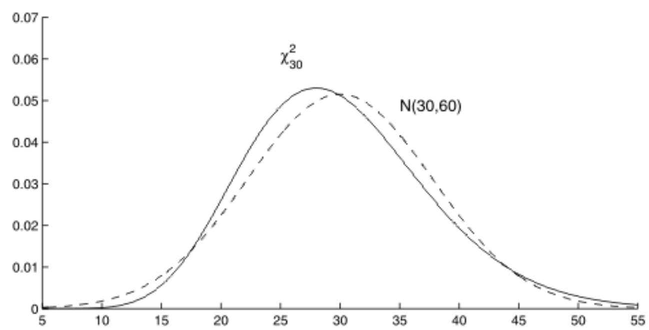
Bizonyítás. Állítsuk elő η_n-et független standard normálisok négyzetösszegeként: $\eta_n = \xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2$. Mivel $\mathbb{E}\eta_n = n$, $\mathbb{D}^2\eta_n = 2n$, így a standardizált:

$$\frac{\eta_n - n}{\sqrt{2n}} = \frac{\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2 - n}{\sqrt{2n}}.$$

De itt az összeadandók függetlenek és azonos eloszlásúak, ezért a központi határeloszlás-tétel miatt a fenti kifejezés eloszlásban $\mathcal{N}(0,1)$-hez konvergál. □

A fenti tételből következik, hogy nagy n esetén a χ_n^2-eloszlás az $\mathcal{N}(n, 2n)$ eloszláshoz van közel. A χ_{30}^2 és $\mathcal{N}(30, 60)$ sűrűségfüggvénye a 4.5.2.2 ábrán látható.

4.5.2. ábra. χ_{30}^2és $\mathcal{N}(30, 60)$ sűrűségfüggvénye

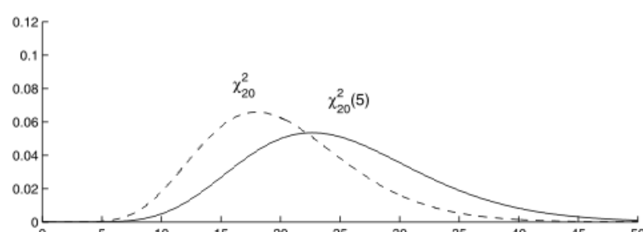


4.5.2.3. A nem-centrált khi-négyzet eloszlás Legyenek $\xi_1, \ldots, \xi_n$ független normális eloszlású valószínűségi változók: $\xi_i \sim \mathcal{N}(a_i, 1)$, $i = 1, \ldots, n$. Ekkor a

$$\zeta_n = \xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2 \tag{4.5.1}$$

valószínűségi változót n szabadsági fokú, $\lambda = \sum_{i=1}^n a_i^2$ nem-centralitási paraméterű nem-centrált khi-négyzet eloszlásúnak nevezzük. Jelölése $\chi_n^2(\lambda)$.

4.5.3. ábra. χ_{20}^2és $\chi_{20}(5)$ sűrűségfüggvénye



A nem-centrált khi-négyzet eloszlás abban a speciális esetben, amikor a kiinduló ξ_i valószínűségi változók 0 várható értékűek, éppen a korábban megismert (centrált) khi-négyzet eloszlás. Azaz $\chi_n^2(0) \equiv \chi_n^2$.

A χ_{20}^2 és $\chi_{20}^2(5)$ sűrűségfüggvénye a 4.5.2.3. ábrán látható.

A következő állítás azt mutatja, hogy nem kell a ξ_i-k a_i várható értékeit külön-külön ismerni, az eloszlás csak a $\lambda = \sum_{i=1}^n a_i^2$ nem-centralitási paramétertől függ.

4.5.5. Theorem. *Legyenek $\tau_1, \ldots, \tau_n$ független normális eloszlású valószínűségi változók:*

$$\tau_1 \sim \mathcal{N}(\sqrt{\lambda}, 1), \tau_2 \sim \mathcal{N}(0,1), \ldots, \tau_n \sim \mathcal{N}(0,1),$$

ahol $\lambda > 0$. Ekkor

$$\tau_1^2 + \cdots + \tau_n^2$$

eloszlása megegyezik a (4.5.1) képletben adott ζ_n eloszlásával, bármilyenek is a $\lambda = \sum_{i=1}^n a_i^2$ feltételt kielégítő $a_1, \ldots, a_n$ számok.

4.5.3. A Student-eloszlás

4.5.6. Definition. Az ζ valószínűségi változót n szabadsági fokú *Student-eloszlásúnak* (t-eloszlásúnak vagy t_n-eloszlásúnak) nevezzük, ha sűrűségfüggvénye:

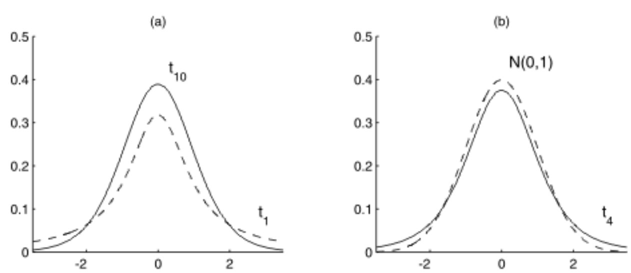
$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\dfrac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} \sqrt{n}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Azonnal látható, hogy fenti sűrűségfüggvény a 0-ra szimmetrikus. A Student-eloszlás sűrűségfüggvénye a 4.5.3 (a) ábrán látható.

$n = 1$ szabadsági fok esetén a Student-eloszlás a ($\lambda = 1, \mu = 0$ paraméterű) Cauchy-eloszlás.

Megjegyezzük, hogy W. S. Gosset írta „Student” név alatt a cikkeit.

4.5.4. ábra. A Student-eloszlás sűrűségfüggvénye



4.5.3.1. A Student-eloszlás származtatása a normális eloszlásból

4.5.7. Theorem. *Ha $\xi \sim \mathcal{N}(0,1)$, $\eta \sim \chi_n^2$, ξ és η független, akkor*

$$\frac{\sqrt{n}\xi}{\sqrt{\eta}}$$

t-eloszlású n szabadsági fokkal.

A Student-eloszlás jelentőségét a matematikai statisztika számára éppen a normális eloszlásból való származtatása adja. A Student-eloszlás a statisztikában normális eloszlású mintaelemek esetén (pl. a t-próba, ill. t-próba a szórásanalízisben) használatos.

4.5.8. Theorem. *Ha $n \to \infty$, akkor az n szabadsági fokú t-eloszlás $\mathcal{N}(0,1)$-hez konvergál.*

A t_4 és az $\mathcal{N}(0,1)$ sűrűségfüggvénye a 4.5.3 (b) ábrán látható. Megjegyezzük, hogy nagyobb n szabadsági fok esetén t_n és az $\mathcal{N}(0,1)$ sűrűségfüggvénye annyira egymásra simul, hogy együtt való ábrázolásuk nehézkes.

4.5.3.2. A Student-eloszlás momentumai Legyen ζ t_n-eloszlású. Ha $k \geq n$, akkor a k-adik momentuma nem létezik (ill. végtelen). A páratlan rendű momentumok (amennyiben léteznek) 0-val egyenlőek.

$$\mathbb{E}\zeta = 0,$$

ha $n > 1$ és

$$\mathbb{D}^2\zeta = \frac{n}{n-2},$$

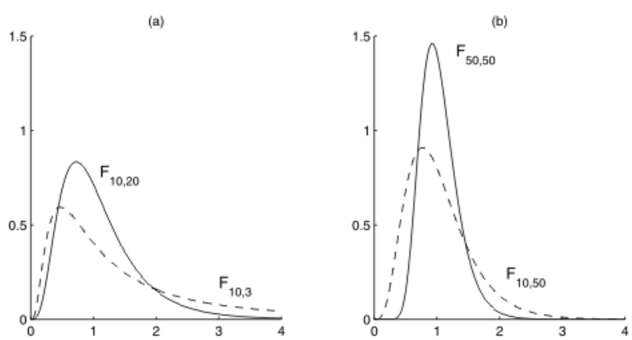
ha $n > 2$.

4.5.4. Az F-eloszlás A ζ valószínűségi változót n, m szabadsági fokú *F-eloszlásúnak* nevezzük, ha sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma\left(\dfrac{n+m}{2}\right) n^{\frac{n}{2}} m^{\frac{m}{2}} x^{\frac{n}{2}-1}}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{m}{2}\right)(nx+m)^{\frac{n+m}{2}}}, & x > 0\,, \\ 0, & x \leq 0\,. \end{cases}$$

Jelölése: $F_{n,m}$.

4.5.5. ábra. Az F-eloszlás sűrűségfüggvénye



Az F-eloszlást szokták Fisher-féle eloszlásnak, vagy Snedecor-féle eloszlásnak is nevezni.

$F_{10,3}$és $F_{10,20}$ sűrűségfüggvénye a 4.5.3. ábra (a) részén, $F_{10,50}$-é és $F_{50,50}$-é pedig a (b) részén látható.

4.5.4.1. Az F-eloszlás származtatása a normális eloszlásból Az F-eloszlás jelentőségét a matematikai statisztika számára éppen a normális eloszlásból való származtatása adja.

4.5.9. THEOREM. *Ha $\xi \sim \chi^2_n$, $\eta \sim \chi^2_m$, továbbá ξ és η független, akkor*

$$\frac{\xi}{n} \Big/ \frac{\eta}{m}$$

F-eloszlású n és m szabadsági fokkal.

4.5.4.2. Az F-eloszlás momentumai A várható érték ($m > 2$ esetén véges):

$$\mathbb{E}\zeta = \frac{m}{m-2}.$$

A szórásnégyzet ($m > 4$ esetén véges):

$$\mathbb{D}^2\zeta = \frac{2m^2(n+m-2)}{n(m-2)^2(m-4)}.$$

Gyakorlatok

(1) A 4.5.4 Tétel alapján lássuk be, hogy nagy n esetén a χ_n^2-eloszlás az $\mathcal{N}(n, 2n)$ eloszláshoz van közel!
(2) Számítsuk ki $\chi_n^2(\lambda)$ várható értékét és szórásnegyzetét!
(3) Igazoljuk, hogy a t_n-eloszlás aszimptotikusan standard normális, az alábbi módon. A
$$\zeta = \frac{\xi}{\sqrt{\frac{\xi_1^2+\cdots+\xi_n^2}{n}}}$$
előállításban $\xi, \xi_1, \ldots, \xi_n$ független standard normálisak. De $\frac{\xi_1^2+\cdots+\xi_n^2}{n} \to 1$ majdnem biztosan, ha $n \to \infty$.
(4) Fogalmazzuk meg és bizonyítsuk be a χ^2 addíciós tételt a nem-centrált khi-négyzet eloszlásra!
(5) Igazoljuk, hogy ha τ t_n-eloszlású, akkor τ^2 $F_{1,n}$-eloszlású!
(6) Lássuk be, hogy ha ζ $F_{n,m}$-eloszlású, akkor $\frac{1}{\zeta}$ $F_{m,n}$-eloszlású!

Ellenőrző kérdések

(1) Hogyan származtatható a χ^2-, t- és F-eloszlás a normálisból?
(2) Mi a χ_n^2 eloszlás várható értéke és szórása?
(3) Mi a χ_n^2 és a t_n eloszlás határeloszlása, ha $n \to \infty$?

5. FEJEZET

A statisztika alapfogalmai

5.1. A minta

5.1.1. A minta és a minta realizáció A matematikai statisztika szemléletmódja szerint a megfigyelendő mennyiség valószínűségi változó. Jelöljük ezt a valószínűségi változót X-szel. Figyeljük meg X-et n-szer, egymástól függetlenül. Jelölje $X_1, X_2, \ldots, X_n$ a megfigyelési eredményeket. Ezeket a megfigyelési eredményeket nevezzük mintának. Azonban $X_1, \ldots, X_n$-et sem egy szám n-esnek tekintjük, hanem olyan objektumnak, amely magába sűríti a megfigyelések eredményeként adódó összes lehetséges szám n-est. Így az $X_1, \ldots, X_n$ mennyiségeket is valószínűségi változóknak tekintjük.

Az $X_1, X_2, \ldots, X_n$ független, azonos eloszlású valószínűségi változókat *mintának* nevezzük. Rögzített $\omega \in \Omega$ esetén az $x_1 = X_1(\omega), x_2 = X_2(\omega), \ldots, x_n = X_n(\omega)$ szám n-est *minta realizációnak* nevezzük. (Itt Ω a háttérben lévő eseményteret jelöli.)

5.1.1. Note. 1. A gyakorlatban mindig minta realizációkat figyelünk meg. Ezek azonban megfigyeléssorozatonként különböznek egymástól. A minta elméleti fogalma az összes lehetséges realizációt magába foglalja.

2. Ha X egy valószínűségi változó, akkor X-re vett minta alatt az X-szel azonos eloszlású, független $X_1, X_2, \ldots, X_n$ valószínűségi változókat értjük.

3. Ha F egy eloszlásfüggvény, akkor F eloszlásfüggvényű populációból vett minta alatt független, F eloszlásfüggvényű $X_1, X_2, \ldots, X_n$ valószínűségi változókat értünk.

4. A statisztika bizonyos fejezeteiben a fentinél tágabban értelmezik a minta fogalmát. Például a többdimenziós statisztikai analízisben az $X_1, \ldots, X_n$ valószínűségi változók többdimenziósak, míg az idősorok analízisében a függetlenség (illetve az azonos eloszlás) feltétele nem teljesül.

5.1.2. A statisztikai mező A valószínűségszámítás tárgyalása során feltételezik, hogy a háttérben egy $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező áll, az X valószínűségi változó Ω-n értelmezett, X eloszlásfüggvénye F, és F ismert. A statisztikában ezzel szemben az F eloszlásfüggvény nem ismert (illetve az F bizonyos paraméterei nem ismertek). A statisztikában megfigyeléseket éppen azért végzünk, hogy az F eloszlásfüggvényt megismerjük.

Legyen Θ egy nem üres halmaz, minden $\vartheta \in \Theta$-ra legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}_\vartheta)$ valószínűségi mező. Az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}_\vartheta), \vartheta \in \Theta$, összességet *statisztikai mezőnek* nevezzük. Θ-t *paramétertérnek*, elemeit pedig *paraméternek* nevezzük.

Az $X_1, X_2, \ldots, X_n$ minta az Ω-n értelmezett, a mintaelemek együttes eloszlásfüggvénye pedig $\prod_{i=1}^{n} F_\vartheta(x_i), x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n$. Itt $F_\vartheta(x)$ egyetlen mintaelem eloszlásfüggvénye, a minta együttes eloszlásfüggvénye pedig a függetlenség miatt szorzat alakú. Az F_ϑ eloszásfüggvény éppen akkor lép fel, amikor a statisztikai mezőn a $\mathbb{P}_\vartheta$ valószínűség az aktuális. A gyakorlatban a statisztikai mező a háttérben marad, ténylegesen az F_ϑ eloszlásfüggvénnyel dolgozunk. Célunk az ismeretlen ϑ paraméter felderítése.

5.1.3. Az empirikus eloszlásfüggvény Próbáljuk meg rekonstruálni a minta alapján az F eloszlásfüggvényt!

Legyen $\omega \in \Omega$ rögzített, jelölje

$$X_1^*(\omega) \leq X_2^*(\omega) \leq \cdots \leq X_n^*(\omega)$$

az $X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_n(\omega)$ minta realizáció elemeinek nagyság szerint növekvő permutációját. Az $X_1^* \leq X_2^* \leq \cdots \leq X_n^*$ valószínűségi változókat *rendezett mintának* nevezzük.

$X_1^*(\omega), X_2^*(\omega), \ldots, X_n^*(\omega)$ az $X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_n(\omega)$ szám n-es egy permutációja. Viszont különböző ω-kra más és más permutáció adja az elemek növekvő sorrendjét. Tulajdonképpen $X_1, X_2, \ldots, X_n$-et mint függvényeket (azaz mint $\omega \in \Omega$ függvényeit) kell sorba rendezni, hogy a rendezett mintához jussunk, tehát a szükséges átrendezés is függ ω-tól.

Legyen $X_1^*, X_2^*, \ldots, X_n^*$ rendezett minta. A következő leképezést *empirikus eloszlásfüggvénynek* nevezzük:

$$F_n^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq X_1^*, \\ \frac{k}{n}, & \text{ha } X_k^* < x \leq X_{k+1}^*, \quad k = 1, \ldots, n-1, \\ 1, & \text{ha } x > X_n^*. \end{cases}$$

Az 5.1.3. ábrán egy 5 elemű minta empirikus eloszlásfüggvénye látható. Az empirikus eloszlásfüggvény olyan lépcsős függvény, amely minden egyes mintaelem helyén $\frac{1}{n}$-et ugrik. Természetesen, ha több mintaelem egybeesik, akkor $\frac{1}{n}$ alkalmas többszörösét ugorja.

Valójában az F_n^* függvény a véletlentől is függ, hiszen a mintaelemek valószínűségi változók.

A továbbiakban legyen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ minta egy F eloszlásfüggvényű populációból. Jelölje $F_n^*(x)$ az empirikus eloszlásfüggvényt.

5.1.2. THEOREM. *Rögzített $x \in \mathbb{R}$ esetén az alábbiak teljesülnek:*

a) $nF_n^*(x)$ binomiális eloszlású;

b) $F_n^*(x)$ várható értéke $F(x)$;

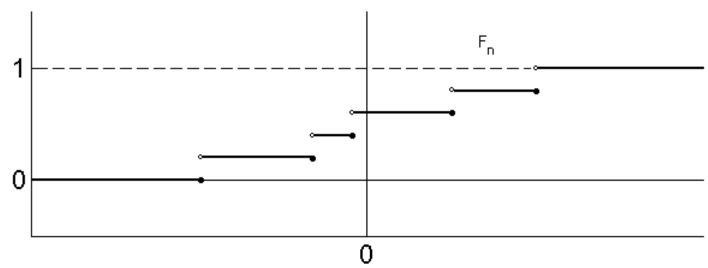
c) $F_n^*(x)$ szórása 0-hoz tart, ha $n \to \infty$;

d) $F_n^*(x) \to F(x)$ sztochasztikusan, ha $n \to \infty$.

BIZONYÍTÁS. a) Nyilván az $\{nF_n^*(x) = k\}$ esemény éppen akkor teljesül, ha pontosan k darab mintaelem kisebb x-nél. Lévén az $\{X_k < x\}, k = 1. \ldots, n$, események függetlenek és $p = F(x)$ valószínűségűek, a binomiális eloszláshoz jutunk:

$$\mathbb{P}\left(nF_n^*(x) = k\right) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n,$$

5.1.1. ábra. 5 elemű minta empirikus eloszlásfüggvénye



minden x-re.
b) Mivel az n rendű, p paraméterű binomiális eloszlás várható értéke np, szórásnégyzete $np(1-p)$, így

$$\mathbb{E}F_n^*(x) = p = F(x)$$

és

$$\mathbb{D}^2 F_n^*(x) = \frac{p(1-p)}{n} = \frac{F(x)(1-F(x))}{n}.$$

c) $\mathbb{D}^2 F_n^*(x) \to 0$ $(n \to \infty)$ az előző képletből adódik.
d) Tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén, a Csebisev-egyenlőtlenség alapján

$$\mathbb{P}\left(|F_n^*(x) - F(x)| > \varepsilon\right) \le \frac{1}{n}\frac{F(x)(1-F(x))}{\varepsilon^2} \to 0,$$

ha $n \to \infty$. □

Az előző állítás szerint az empirikus eloszlásfüggvény az elméleti eloszlásfüggvény jó közelítése, hisz egyrészt $F_n^*(x)$ az $F(x)$ körül ingadozik, másrészt a minta elemszámának növelésével $F_n^*(x)$ sztochasztikusan $F(x)$-hez konvergál. A nagy számok erős törvényét alkalmazva, a sztochasztikus konvergenciánál erősebb, majdnem biztos konvergenciát is igazolhatunk.

5.1.3. Theorem. *Bármely rögzített $x \in \mathbb{R}$ esetén*

$$\lim_{n\to\infty} F_n^*(x) = F(x) \quad \textit{majdnem biztosan},$$

$$\lim_{n\to\infty} F_n^*(x+0) = F(x+0) \quad \textit{majdnem biztosan}.$$

Bizonyítás. Az $I_{(-\infty,x)}(X_1), \dots, I_{(-\infty,x)}(X_n)$ valószínűségi változók egymástól függetlenek, azonos Bernoulli-eloszlásúak. (Itt $I_{(-\infty,x)}(X_1)$ a $(-\infty,x)$ indikátorfüggvényét jelöli az X_1 helyen.)

$$\mathbb{P}(I_{(-\infty,x)}(X_i) = 1) = \mathbb{P}(X_i < x) = F(x)$$

és

$$\mathbb{P}(I_{(-\infty,x)}(X_i) = 0) = 1 - F(x)$$

minden i esetén. Másrészt

$$F_n^*(x) = \frac{1}{n}(I_{(-\infty,x)}(X_1) + \cdots + I_{(-\infty,x)}(X_n)).$$

Ez utóbbi mennyiség a nagy számok erős törvénye értelmében az összeadandók közös várható értékéhez, azaz $F(x)$-hez konvergál majdnem biztosan. A tétel második állítása hasonlóan bizonyítható. □

Az előző állítás tovább finomítható: az is igaz, hogy F_n^* az egész számegyenesen egyenletesen tart F-hez (majdnem biztosan). Azaz az általunk megfigyelt minta alapján képzett F_n^* függvény segítségével rekonstruálhatjuk az általunk nem ismert F eloszlásfüggvényt. Ez adja az alábbi, Glivenkotól és Cantellitől származó tétel jelentőségét.

5.1.4. Theorem. *(A matematikai statisztika alaptétele)*

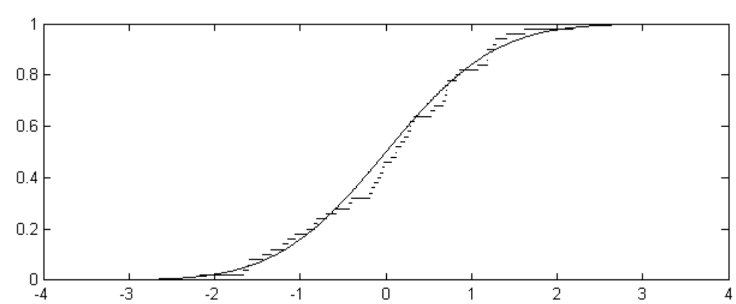
$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |F_n^*(x) - F(x)| \to 0, \quad \textit{ha } n \to \infty$$

teljesül 1 valószínűséggel.

Az előző állításból F_n^* és F monotonitása alapján igazolható a tétel.

5.1.5. Example. Ábrázoljuk közös koordinátarendszerben a standard normális eloszlás Φ elméleti eloszlásfüggvényét és a standard normális eloszlásból vett 50 elemű mintából meghatározott F_{50}^* empirikus eloszlásfüggvényt. A mintát generált véletlen számok jelentették a 5.1.3. ábra elkészítésében.

5.1.2. ábra. 50 elemű minta empirikus eloszlásfüggvénye és az elméleti eloszlásfüggvény



5.1.4. Hisztogramok Tekintsünk egy $X_1, X_2, \ldots, X_n$ mintát. Beosztjuk a számegyenest $y_0 < y_1 < \cdots < y_r$ osztópontokkal. Tegyük fel, hogy minden mintaelem beleesik az (y_0, y_r) intervallumba. Jelölje ν_i az $[y_{i-1}, y_i)$ intervallumba eső mintaelemek számát, $i = 1, \ldots, r$.

Rajzoljunk az $[y_{i-1}, y_i)$ intervallum fölé a ν_i-vel arányos területű téglalapot, $i = 1, \ldots, r$. Így megkapjuk a *hisztogramot*.

Ha a téglalapok összterülete n, akkor a *gyakorisági hisztogramhoz* jutunk. Pontosabban a gyakorisági hisztogram az az f_n valós függvény, melyre

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{\nu_i}{(y_i - y_{i-1})}, & \text{ha } x \in [y_{i-1}, y_i), \quad i = 1, \ldots, r, \\ 0, & \text{ha } x \notin [y_0, y_r). \end{cases}$$

Ha a téglalapok összterülete 1, akkor a sűrűséghisztogramot kapjuk. Ekkor az i-edik téglalap magassága $\frac{\nu_i}{n(y_i - y_{i-1})}$.

5.1.6. Note. 1. A hisztogram alapján következtethetünk az eloszlásra. Az eloszlás (feltételezett) jellegének figyelembe vételével érdemes a hisztogramot megszerkeszteni. A későbbi kiértékelés során figyelembe kell venni, hogy az osztópontokat a mintától függetlenül vettük-e fel. Az osztópontok sűrítésével, vagy ritkításával érhetjük el, hogy a hisztogram ne legyen se túl durva, se ne „ugráljon”.

2. Ha a minta feltételezhetően abszolút folytonos eloszlásból származik, akkor a sűrűséghisztogramból következtethetünk a sűrűségfüggvény alakjára.

3. Ha az eloszlás diszkrét, akkor a hisztogram helyett a relatív gyakoriságokat ábrázoló oszlopdiagramot rajzolhatjuk fel.

5.1.7. Example. Generáljunk 1500 standard normális eloszlású véletlen számot. Ábrázoljuk a sűrűséghisztogramot ekvidisztáns osztópontok esetén. Próbálkozzunk különböző sűrűségű osztópontokkal. A 5.1.4. ábra 4 részintervallum esetét mutatja, ez a hisztogram túlságosan durva. A 5.1.4. ábra 13 részintervalluma megfelelőnek tűnik. A sűrűséghisztogram mellé az elméleti sűrűségfüggvényt is felrajzoltuk. Az 5.1.4. ábra túl sűrű beosztást mutat.

5.1.8. Example. Generáljunk 200 elemű mintát az $n = 7$ rendű $p = \frac{1}{2}$ paraméterű binomiális eloszlásból. Ábrázoljuk közös koordinátarendszerben a relatív gyakoriságokat és az elméleti valószínűségeket. A 5.1.8. ábrán * jelöli az elméleti valószínűségek és $\circ$ a relatív gyakoriságok értékét.

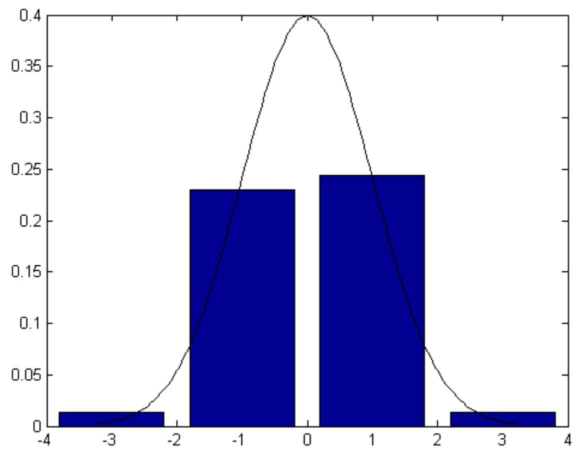
Gyakorlatok

(1) Legyen F_n^* egy empirikus eloszlásfüggvény, F egy folytonos elméleti eloszlásfüggvény. Adjunk algoritmust a
$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n^*(x) - F(x)|$$
mennyiség kiszámolására.

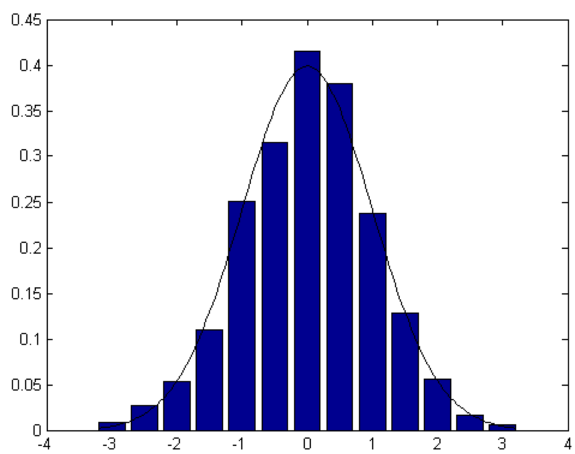
(2) Legyen F_n^* és G_m^* két empirikus eloszlásfüggvény. Adjunk algoritmust a
$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n^*(x) - G_m^*(x)|$$
mennyiség kiszámolására.

(3) Generáljunk 100 elemű mintát $\lambda = 2$ paraméterű exponenciális eloszlásból. Ábrázoljuk az empirikus eloszlásfüggvényt, valamint a sűrűséghisztogramot.

5.1.3. ábra. Durva beosztású hisztogram



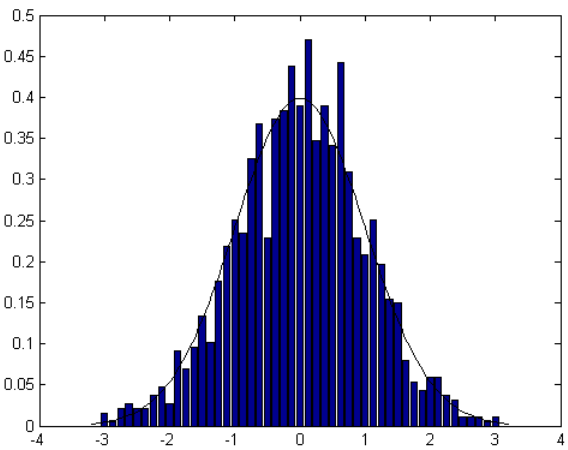
5.1.4. ábra. Megfelelő beosztású hisztogram és az elméleti sűrűségfüggvény



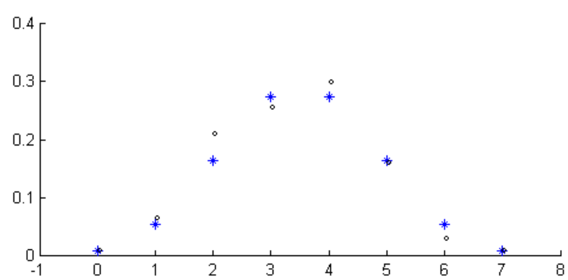
(4) Generáljunk 100 elemű mintát a $[0,1]$-en egyenletes eloszlásból. Ábrázoljuk közös koordinátarendszerben az empirikus eloszlásfüggvényt, valamint az elméleti eloszlásfüggvényt. Cseréljük ki az ábrán az egyenletes elméleti eloszlásfüggvényt az $\mathcal{N}(\frac{1}{2}, \frac{1}{12})$ eloszlásfüggvényére.

(5) Generáljunk 200 elemű mintát $n = 7, p = \frac{1}{2}$ paraméterű binomiális eloszlásból.
   (a) Ábrázoljuk közös koordinátarendszerben a relatív gyakoriságokat és az elméleti valószínűségeket.

5.1.5. ábra. Túl sűrű beosztású hisztogram



5.1.6. ábra. Valószínűségek és relatív gyakoriságok a binomiális eloszlás esetén



(b) Ábrázoljuk közös koordinátarendszerben a sűrűséghisztogramot és az $\mathcal{N}(\frac{7}{2}, \frac{7}{4})$ elméleti sűrűségfüggvényét.

Ellenőrző kérdések

(1) Mi a minta?
(2) Mi az empirikus eloszlásfüggvény?
(3) Mit állít a statisztika alaptétele?
(4) Mi a sűrűséghisztogram?

5.2. Statisztikák

5.2.1. Az empirikus közép Legyen $X_1, \dots, X_n$ minta X-re. Az

$$\overline{X} = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$$

valószínűségi változót *empirikus középnek* (más szóval *minta átlagnak*) nevezzük. Tegyük fel, hogy X-nek létezik véges várható értéke: $m = \mathbb{E}X$. Amennyiben m nem ismert, úgy a minta alapján meghatározható $\overline{X}$ segítségével következtethetünk m-re. $\overline{X}$ várható értéke és szórásnégyzete:

$$\mathbb{E}\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}X_i = m,$$

$$\mathbb{D}^2\overline{X} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{D}^2 X_i = \frac{\sigma^2}{n},$$

ahol $\sigma^2 = \mathbb{D}^2 X$ az elméleti szórásnégyzet.

5.2.2. Az empirikus szórásnégyzet Az

$$s_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

mennyiséget *empirikus szórásnégyzetnek* nevezzük. Az empirikus szórásnégyzet alapján következtethetünk X ismeretlen (elméleti) szórásnégyzetére. Ki fog derülni, hogy erre a célra alkalmasabb s_n^2 alábbi módosítását használni. Az

$$s_n^{*2} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

mennyiséget *korrigált empirikus szórásnégyzetnek* nevezzük. s_n^2 numerikus kiszámolására és elméleti vizsgálatára is alkalmas az alábbi ún. *Steiner-formula*.

5.2.1. Theorem. *Tetszőleges $a \in \mathbb{R}$ esetén*

$$ns_n^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i - a)^2 - n(\overline{X} - a)^2.$$

Bizonyítás. A következő átalakításokat végezzük:

$$\begin{aligned} ns_n^2 &= \sum_{i=1}^{n}\left[(X_i - a) - (\overline{X} - a)\right]^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n}(X_i - a)^2 - 2\sum_{i=1}^{n}(X_i - a)(\overline{X} - a) + \sum_{i=1}^{n}(\overline{X} - a)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n}(X_i - a)^2 - n(\overline{X} - a)^2. \end{aligned}$$

□

s_n^{*2} várható értékét a Steiner-formulába $a = m$-et írva számolhatjuk ki:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}s_n^{*2} &= \mathbb{E}\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)^2 - \frac{n}{n-1}(\overline{X} - m)^2\right] \\
&= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(X_i - m)^2 - \frac{n}{n-1}\mathbb{E}(\overline{X} - m)^2 \\
&= \frac{n}{n-1}\sigma^2 - \frac{n}{n-1}\frac{\sigma^2}{n} = \sigma^2.
\end{aligned}$$

Tehát a korrigált empirikus szórásnégyzet várható értéke éppen az elméleti szórásnégyzet.

5.2.3. A statisztika fogalma Legyen $X_1, \dots, X_n$ minta X-re.

5.2.2. Definition. Legyen $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ Borel-mérhető függvény. Ekkor a $T(X_1, \dots, X_n)$ valószínűségi vektorváltozót *statisztikának* nevezzük.

A fenti definícióban k rögzített pozitív egész szám, k értéke leggyakrabban 1. Az empirikus közép az egyik legegyszerűbb statisztika, ekkor a T függvény:

$$T(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n).$$

Természetesen s_n^2 és s_n^{*2} is statisztikák. Az F_n^* empirikus eloszlásfüggvény is statisztikának tekinthető: rögzített x mellett a fenti értelemben, ha pedig függvénynek tekintjük, akkor kissé általánosabban, $\mathbb{R}^k$ helyett a lépcsős függvények halmazát véve T képterének.

Az empirikus közép és az empirikus szórásnégyzet az empirikus momentumok speciális esetei. A *k-adik empirikus momentum*:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k.$$

A *k-adik empirikus centrált momentum*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^k.$$

5.2.4. Az empirikus korrelációs együttható Tegyük fel, hogy az X és az Y valószínűségi változókat egyszerre meg tudjuk figyelni. Legyen

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix}$$

n megfigyelés az $(X, Y)^\top$ kétdimenziós valószínűségi vektorváltozóra (azaz a fenti valószínűségi vektorváltozók független, $(X, Y)^\top$-vel azonos eloszlásúak). Az

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})$$

mennyiséget *empirikus kovarianciának*, a

$$\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n (Y_i - \overline{Y})^2}}$$

mennyiséget pedig *empirikus korrelációs együtthatónak* nevezzük.

Az empirikus közép és az empirikus szórásnégyzet eloszlását tekintjük normális eloszlásból vett minta esetén. Legyen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ minta az $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ eloszlásból. Ekkor $\overline{X}$ eloszlása $\mathcal{N}(m, \sigma^2/n)$. Valóban, független, normális eloszlású valószínűségi változók összege normális eloszlású, míg $\mathbb{E}\overline{X} = m, \mathbb{D}^2\overline{X} = \sigma^2/n$.

5.2.3. Theorem. *Normális eloszlásból vett minta esetén $\overline{X}$ és s_n^{*2} függetlenek. Ha X eloszlása $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, akkor $\overline{X}$ eloszlása $\mathcal{N}(m, \sigma^2/n)$ és $\frac{(n-1)}{\sigma^2} s_n^{*2}$ eloszlása $\mathcal{X}_{n-1}^2$.*

5.2.4. Corollary. *Normális eloszlásból vett minta esetén*

$$\frac{\sqrt{n}(\overline{X} - m)}{s_n^*}$$

t_{n-1} eloszlású. Ez abból adódik, hogy $\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-m)}{\sigma}$ standard normális, $\frac{(n-1)s_n^{*2}}{\sigma^2}$ pedig $\mathcal{X}_{n-1}^2$ eloszlású, és egymástól függetlenek.

Gyakorlatok

(1) Legyen 37.2, 36.8, 37.9, 36.1, 36.7, 37.1, 36.7 egy minta. Számítsuk ki az empirikus közepet és az empirikus szórásnégyzetet.
(2) Az empirikus kovariancia kiszámításához lássuk be, hogy
$$\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) = \sum_{i=1}^n x_i y_i - n\overline{x} \cdot \overline{y}.$$
(3) Írjunk programot az empirikus közép, az empirikus szórásnégyzet és az empirikus kovariancia kiszámítására.

Ellenőrző kérdések

(1) Mi az empirikus közép és empirikus szórásnégyzet?
(2) Mi lesz az empirikus közép és a korrigált empirikus szórásnégyzet eloszlása normális eloszlásból származó minta esetén?
(3) Mi a Steiner-formula?

5.3. Statisztikai adatok áttekintése

5.3.1. Az adatok elemzésének lépései Általánosan a statisztika feladatai közé tartozik a kísérletek megtervezése, az adatok vételének (a méréseknek, adatgyűjtésnek) a megszervezése, az adatok tárolásának és számítógépes feldolgozásának megoldása. Jelenleg csak arra az esetre koncentrálunk, amikor már megvannak, és számítógépen (vagy írásban) tároltak az adatok.

Az adatok előzetes áttekintésekor figyelembe kell venni, hogy

- milyen formában tároltak az adatok;
- mekkora az adathalmaz;
- homogének-e az adatok;
- vannak-e hiányzó adatok;
- az adatok számértékűek vagy általánosabb értékűek;

- hány dimenziósak az adatok;
- az adatok egészek, vagy törtek;
- az adatok csoportosítottak-e.

Ezek után kerülhet sor a minta numerikus és grafikus jellemzőinek meghatározására.

5.3.2. A minta numerikus jellemzői Ha a mintaelemek az $x_1, \ldots, x_n$ valós számok, akkor az alábbi numerikus jellemzőket kell kiszámítani:

- a középérték jellemzésére: empirikus közép, medián, módusz;
- a szóródás jellemzésére: empirikus szórásnégyzet, szórás, minta terjedelem, minimum, maximum;
- az eloszlás jellemzésére: empirikus kvantilisek, ferdeség, lapultság.

5.3.3. A minta középértékének és szóródásának leírása A minta középértékét az empirikus középen kívül jellemezhetjük a módusszal és a mediánnal is. Az *empirikus módusz* az a mintaelem, amely leggyakrabban fordul elő. (Ha több ilyen érték van, akkor pl. a legkisebbet tekintik ezek közül.) Az *empirikus medián* egy $X_1^* \leq \cdots \leq X_n^*$ (rendezett) minta esetén $X_{(n+1)/2}^*$, ha n páratlan, és $\frac{1}{2}(X_{n/2}^* + X_{n/2+1}^*)$, ha n páros. (Azaz a medián a középső mintaelem, vagy a két középső mintaelem átlaga.)

Az alábbi 11 elemű rendezett mintát tekintjük:

$$0.8, \quad 1.1, \quad 1.3, \quad 1.35, \quad 1.35, \quad 1.42, \quad 1.44, \quad 1.44, \quad 1.44, \quad 1.7, \quad 1.9.$$

Ennek mediánja a 6. rendezett mintaelem: $\mu = x_6^* = 1.42$, módusza a leggyakoribb elem $x_7^* = x_8^* = x_9^* = 1.44$, míg az empirikus közép $\overline{x} = 1.385$.

A minta szóródását az empirikus száráson kívül jellemezhetjük a legkisebb és legnagyobb mintaelem különbségével. Ez a minta *terjedelme* (range): $X_n^* - X_1^*$.

5.3.4. A minta eloszlásának leírása A minta elhelyezkedését jellemezhetjük a kvantilisek segítségével. A t%-os *empirikus kvantilis* az a legkisebb mintaelem, amelynél a mintaelemek t%-a kisebb vagy egyenlő. A 25%-os (ill. 75%-os) kvantilist *alsó* (ill. *felső*) *kvartilisnek* nevezzük.

Az előző példában az alsó kvartilis $x_3^* = 1.3$, a felső kvartilis $x_9^* = 1.44$.

5.3.1. EXAMPLE. Generáljunk 100 elemű mintát a standard normális eloszlásból. Ábrázoljuk az empirikus eloszlásfüggvényt és a 20%-os, 40%-os, 60%-os és 80%-os kvantiliseket. A megoldás az 5.3.1. ábrán látható.

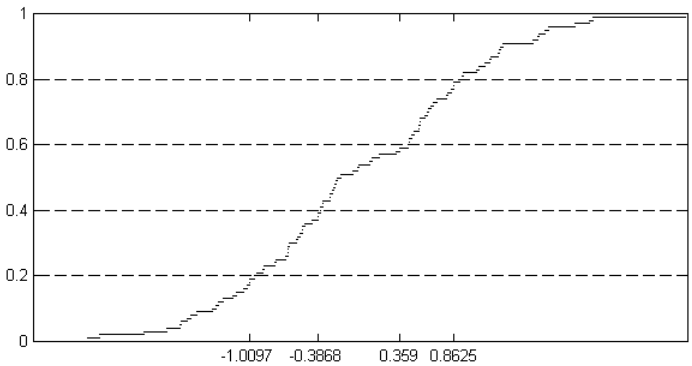
5.3.5. A minta grafikus jellemzői A legismertebb grafikus elemzési módok:

- empirikus eloszlásfüggvény;
- hisztogram;
- kördiagram;
- oszlopdiagram;
- decimális (stem-and-leaf) grafikon;
- boxdiagram;

A két- és többdimenziós adatok grafikus elemzésére is ismertek eljárások.

A minta alapján javasolt az empirikus eloszlásfüggvény és a sűrűséghisztogram felrajzolása. Érdemes velük azonos koordinátarendszerben ábrázolni a szóbajöhető elméleti eloszlás, ill. sűrűségfüggvényt az illeszkedés jóságának megállapítására.

5.3.1. ábra. A 20, 40, 60 és 80 százalékos kvantilisek



Két minta homogenitásának (azaz azonos eloszlásból származásának) vizsgálatára érdemes a két empirikus eloszlásfüggvényt (ill. a két sűrűséghisztogramot) közös koordinátarendszerben ábrázolni.

5.3.6. Diagramok A gyakoriságok szemléltetésére szolgál a kördiagram és az oszlopdiagram. Az *oszlopdiagram* alakja hasonló a hisztogram alakjához, azonban lényeges különbség, hogy oszlopdiagramon nem számértékű jellemzőkre vonatkozó adatok is ábrázolhatóak.

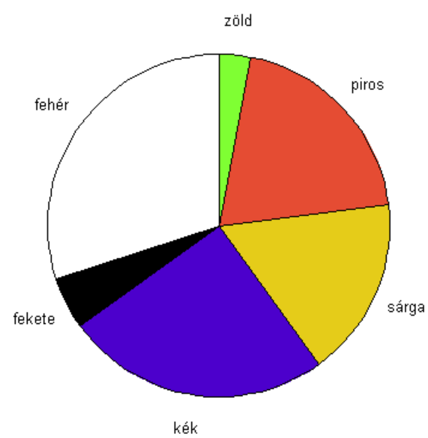
5.3.2. Example. Egy városban megszámolták, hogy milyen színű autóból mennyi van. Az arányok százalékban kifejezve: fehér 30%, fekete 5%, kék 25%, piros 20%, zöld 3%, sárga 17%. A kördiagram az 5.3.2. ábrán, az oszlopdiagram pedig az 5.3.2. ábrán látható.

5.3.7. Boxdiagram A boxdiagram eloszlások elhelyezkedésének és szórásának tömör jellemzésére szolgál. A box (doboz) az alsó és felső kvartilis által határolt. Jelölje h az alsó és felső kvartilis távolságát. A felső kvartilistől fölfelé mért $1.5h$ és $3h$ távolság közötti mintaelemeket *kiugró értékeknek* (*outlier*) nevezzük, míg a $3h$ távolság fölöttieket *extrém értékeknek*. Hasonlóan, az alsó kvartilistól lefelé elhelyezkedő mintaelemek közül kijelölhetők a kiugró és az extrém értékek. Az 5.3.7. ábra bal oldalán egy standard normális eloszlásból generált 100 elemű minta boxdiagramja látható, míg az ábra jobb oldalán $\mathcal{N}(1, 1)$ eloszlásból generált 100 elemű mintáé.

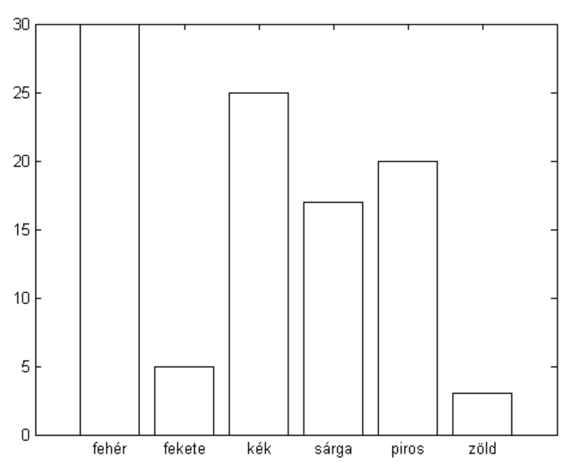
A boxdiagram jól használható különböző csoportok egyazon jellemző alapján való összehasonlítására.

5.3.3. Example. Az 5.3.3. ábra azt mutatja, hogy a standard normális eloszlás esetén -0.68 és +0.68 az elméleti alsó és felső kvartilis. Elméleti extrém értékek a 4.76-nál nagyobb abszolút értékűek, ezek előfordulása gyakorlatilag esélytelen.

5.3.2. ábra. A gyakoriságok kördiagramja



5.3.3. ábra. A gyakoriságok oszlopdiagramja

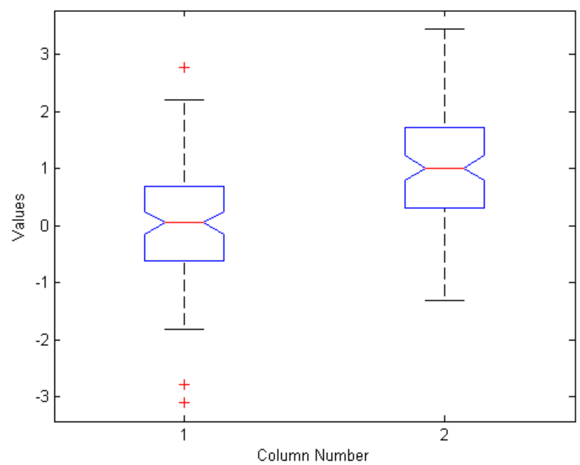


Elméleti kiugró értékek 2.72 és 4.76 közé esnek abszolút értékben, ezek előfordulási esélye is csupán 0.66%.

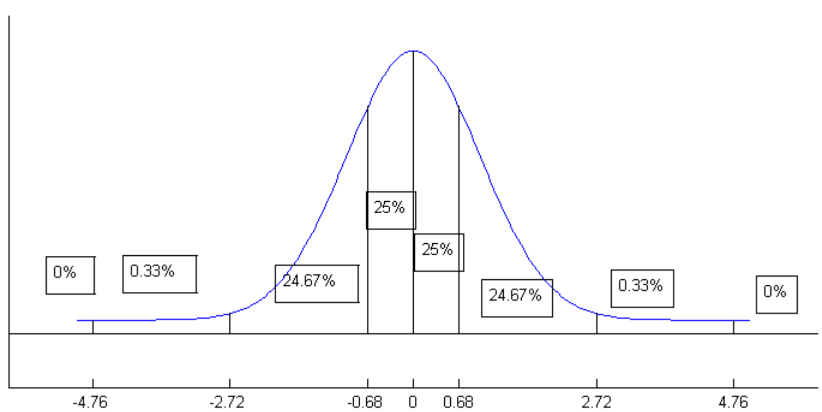
Gyakorlatok

(1) Generáljunk 200 elemű mintát a standard normális eloszlásból, számoljuk ki az empirikus mediánt, kvartiliseket, empirikus közepet, szórást és ezek értékét hasonlítsuk össze a megfelelő elméleti értékekkel.

5.3.4. ábra. Boxdiagram



5.3.5. ábra. Standard normális eloszlás esetén a kiugró és az extrém értékek valószínűsége



(2) Egy statisztikai programcsomag segítségével végezzük el a tárgyalt grafikus elemzéseket.

Ellenőrző kérdések

(1) Mi a medián és mi a kvartilis?
(2) Mi a boxdiagram?

6. FEJEZET

Statisztikai eljárások

6.1. Statisztikai becslések

6.1.1. DEFINITION. A T statisztikát a t paraméter *torzítatlan becslésének* nevezzük, ha $\mathbb{E}T = t$.

A torzítatlanság azt jelenti, hogy a becslés a becsülendő paraméter körül ingadozik.

6.1.2. DEFINITION. A T_n sorozatot a t paraméter *konzisztens* (*erősen konzisztens*) *becslésének* nevezzük, ha $T_n \to t$ sztochasztikusan (majdnem biztosan).

6.1.3. EXAMPLE. Legyen $X_1, \dots, X_n$ minta. Tegyük fel, hogy $\mathbb{E}X_1 = m$ véges. Ekkor $\overline{X}$ az m-nek torzítatlan és konzisztens becslése. Valóban, $\mathbb{E}\overline{X} = m$ nyilvánvaló.

$$\overline{X} = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n) \to m$$

majdnem biztosan teljesül a nagy számok erős törvénye miatt.
Ha $\mathbb{E}X_1^2 < \infty$ és $\sigma^2 = \mathbb{D}^2 X_1$, akkor s_n^{*2} a σ^2 torzítatlan és (erősen) konzisztens becslése. Valóban, $\mathbb{E}s_n^{*2} = \sigma^2$-et már korábban láttuk. Továbbá, a Steiner-formulát használva

$$s_n^{*2} = \frac{n}{n-1}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)^2 - \frac{n}{n-1}(\overline{X} - m)^2 \to \sigma^2 - 0 = \sigma^2$$

a nagy számok törvénye miatt.
Szavakban a fenti képletek az alábbit jelentik. Az empirikus közép az ismeretlen várható érték torzítatlan és konzisztens becslése. A korrigált empirikus szórásnégyzet pedig az ismeretlen elméleti szórásnégyzet torzítatlan és konzisztens becslése.

6.1.1. A maximum-likelihood-becslés A *maximum-likelihood elv* szerint az ismeretlen paraméter azon értékét fogadjuk el, amely mellett a bekövetkezett eredmény maximális valószínűségű.

6.1.4. DEFINITION. Legyen $X_1, \dots, X_n$ minta egy diszkrét eloszlásból, $x_1, \dots, x_n$ pedig a minta realizáció. Legyen ϑ az ismeretlen paraméter. Az

$$L(x_1, \dots, x_n; \vartheta) = P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i)$$

függvényt *likelihood-függvénynek* nevezzük. Az

$$l(x_1, \dots, x_n; \vartheta) = \log L(x_1, \dots, x_n; \vartheta)$$

függvényt pedig *loglikelihood-függvénynek* hívjuk.

A maximum-likelihood elv szerint L-et kellene maximalizálni ϑ szerint. A maximum hely azonban pontosan egybeesik l maximumhelyével, hiszen a természetes alapú logaritmus függvény szigorúan monoton növekvő. Így elegendő az l maximumhelyét meghatározni.

6.1.5. Example. Határozzuk meg a Poisson-eloszlás paraméterének maximum-likelihood becslését! Legyen $x_1, \dots, x_n$ minta λ paraméterű Poisson-eloszlásból:

$$P(X_1 = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

A likelihood-függvény

$$L(x_1, \dots, x_n; \lambda) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda},$$

a loglikelihood-függvény

$$l(x_1, \dots, x_n; \lambda) = \sum_{i=1}^{n} (x_i \log \lambda - \lambda - \log x_i!).$$

A maximumhelyet deriválással határozzuk meg:

$$0 = \frac{\partial l(x_1, \dots, x_n; \lambda)}{\partial \lambda} = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} x_i - n.$$

Innen

$$\widehat{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{X}$$

a maximum-likelihood becslés. (Ez természetes, hiszen itt λ éppen X_1 várható értéke.)

Az abszolút folytonos esetben a likelihood-függvény a mintaelemek együttes sűrűségfüggvénye.

6.1.6. Example. Legyen $X_1, \dots, X_n$ minta exponenciális eloszlásból. Határozzuk meg $\vartheta = \frac{1}{\lambda}$ maximum-likelihood becslését. Ekkor a sűrűségfüggvény

$$f(x, \vartheta) = e^{-\frac{x}{\vartheta}} / \vartheta \quad (x > 0, \vartheta > 0).$$

A likelihood-függvény

$$L(x_1, \dots, x_n; \vartheta) = \prod_{i=1}^{n} e^{-\frac{x_i}{\vartheta}} / \vartheta.$$

A loglikelihood-függvény

$$l(x_1, \dots, x_n; \vartheta) = \sum_{i=1}^{n} \left(-\frac{x_i}{\vartheta} - \log \vartheta \right).$$

A maximum meghatározásához deriválunk:

$$0 = \frac{\partial l(x_1, \ldots, x_n; \vartheta)}{\partial \vartheta} = \frac{1}{\vartheta^2} \sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{n}{\vartheta}.$$

Innen

$$\widehat{\vartheta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{X}$$

a maximum-likelihood becslés. (Ez torzítatlan, hiszen itt $\vartheta = \frac{1}{\lambda}$ a várható érték.)

Most a normális eloszlás paramétereinek becslésére térünk át.

6.1.7. Example. Legyen $X_1, \ldots, X_n$ minta az m és σ^2 paraméterű normális eloszlásból. A sűrűségfüggvények

$$f\left(x, m, \sigma^2\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad m \in \mathbb{R}, \quad \sigma^2 > 0,$$

így a loglikelihood-függvény

$$l\left(x_1, \ldots, x_n; m, \sigma^2\right) = -\frac{n}{2} \log 2\pi - \frac{n}{2} \log \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - m)^2.$$

A megoldandó likelihood egyenletrendszer az alábbi

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial m} l\left(x_1, \ldots, x_n; m, \sigma^2\right) &= \quad \tfrac{1}{\sigma^2}\left(\textstyle\sum_{i=1}^{n} x_i - nm\right) &&= 0 \\ \frac{\partial}{\partial \sigma^2} l\left(x_1, \ldots, x_n; m, \sigma^2\right) &= -\tfrac{n}{2\sigma^2} + \tfrac{1}{2(\sigma^2)^2} \textstyle\sum_{i=1}^{n} (x_i - m)^2 &&= 0, \end{aligned}$$

amelynek egyetlen megoldása $\widehat{m} = \overline{X}$ és $\widehat{\sigma^2} = s_n^2$. Mivel

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 l}{\partial m^2} & \frac{\partial^2 l}{\partial m \partial \sigma^2} \\ \frac{\partial^2 l}{\partial \sigma^2 \partial m} & \frac{\partial^2 l}{(\partial \sigma^2)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{n}{\sigma^2} & -\frac{n}{(\sigma^2)^2}(\overline{X} - m) \\ -\frac{n}{(\sigma^2)^2}(\overline{X} - m) & \frac{n}{2(\sigma^2)^2} - \frac{1}{(\sigma^2)^3} \sum_{i=1}^{n} (X_i - m)^2 \end{pmatrix},$$

így a másodrendű parciális deriváltakból képzett mátrix az $(\overline{X}, s_n^2)$ helyen

$$\begin{pmatrix} -\frac{n}{s_n^2} & 0 \\ 0 & -\frac{n}{2s_n^4} \end{pmatrix},$$

amely negatív definit, ezért $(\overline{X}, s_n^2)$ maximum-likelihood becslése az (m, σ^2) paramétervektornak.

6.1.2. Konfidencia intervallumok Legyen ϑ ismeretlen paraméter, T_1 és T_2 két statisztika. Azt mondjuk, hogy a $[T_1, T_2]$ intervallum $1 - \alpha$ *megbízhatósági szintű konfidencia intervallum* ϑ-ra, ha

$$P(\vartheta \in [T_1, T_2]) \geq 1 - \alpha.$$

Itt α szokásos értékei 0.1, 0.05, 0.01.

6.1.8. Example. Szerkesszünk $1 - \alpha$ szintű konfidencia intervallumot a normális eloszlás várható értékére, ha a szórás ismert.

Legyen $X_1, \ldots, X_n$ minta $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ eloszlásból. Ekkor

$$u = \frac{\overline{X} - m}{\sigma}\sqrt{n} \sim \mathcal{N}(0,1).$$

Tehát megadható olyan $u_{\alpha/2}$, hogy

$$P(-u_{\alpha/2} \le u \le u_{\alpha/2}) = 1 - \alpha.$$

A fenti egyenlőtlenséget átrendezve kapjuk, hogy

$$P(\overline{X} - u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le m \le \overline{X} + u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha.$$

Tehát

$$[\overline{X} - u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$$

$1 - \alpha$ szintű konfidencia intervallum m-re. Speciálisan $\alpha = 0.1$ esetén $u_{0.05} = 1.64$. Így a 90%-os konfidencia intervallum

$$[\overline{X} - 1.64\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + 1.64\frac{\sigma}{\sqrt{n}}].$$

Gyakorlatok

(1) Lássuk be, hogy s_n^2 a σ^2-nek konzisztens, de torzított becslése.
(2) Adjunk maximum-likelihood becslést a Pareto-eloszlás két paraméterére. A Pareto-eloszlás sűrűségfüggvénye ($a > 0$ és $p > 0$ a paraméterek.)

$$f(x, a, p) = \begin{cases} \frac{pa^p}{x^{p+1}}, & \text{ha } a \le x, \\ 0, & \text{egyébként}, \end{cases} .$$

(3) Adjunk konfidencia intervallumot a t-eloszlás segítségével a normális eloszlás várható értékére, ha a szórás nem ismert.
(4) Legyen $X_1, \ldots, X_{16}$ minta $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ eloszlásból. Tegyük fel, hogy $\sigma^2 = 4, \overline{X} = 3$. Adjunk 95%-os konfidencia intervallumot m-re.

Ellenőrző kérdések

(1) Mit nevezünk torzítatlan, illetve konzisztens becslésnek?
(2) Mi a maximum-likelihood-becslés?
(3) Mi a konfidencia intervallum?

6.2. Paraméteres próbák

6.2.1. u-próba. A statisztikai hipotézisek vizsgálatára próbákat (teszteket) alkalmazunk. A legegyszerűbb próba az u-próba.

Legyen $X_1, \ldots, X_n$ minta $\mathcal{N}(0, 1)$ eloszlásból. Tegyük fel, hogy σ^2 ismert. Az m várható értékre az előírás m_0. Tehát a

$$H_0 : m = m_0$$

nullhipotézist kell vizsgálnunk a

$$H_1 : m \ne m_0$$

altenatív hipotézissel (ellenhipotézissel) szemben. H_0 fennállása esetén az

$$u = \frac{\overline{X} - m_0}{\sigma}\sqrt{n}$$

statisztika standard normális eloszlású. Tehát ha H_0 igaz, akkor u nagy valószínűséggel beleesik egy $[-u_{\alpha/2}, u_{\alpha/2}]$ intervallumba. Ha ez nem áll, akkor az H_1 teljesülésére utal.

Tehát a döntési eljárás a következő. Adott α értékhez meghatározzuk azt az $u_{\alpha/2}$ értéket, melyre

$$P(-u_{\alpha/2} \leq \mathcal{N}(0,1) \leq u_{\alpha/2}) = \alpha.$$

α az elsőfajú hiba nagysága. Ha $u \notin [-u_{\alpha/2}, u_{\alpha/2}]$, akkor H_0-at $1-\alpha$ szinten (azaz $(1-\alpha)\cdot 100\%$ szignifikancia szinten) elvetjük. Az α értékét 0.1, 0.05, 0.01-nek szoktuk választani.

6.2.1. Example. Egy gépen 10 mm átmérőjű tengelyeket kell esztergálni. Mintavétel alapján döntsük el, hogy $H_0 : m = 10$ mm igaz-e.

Vegyünk egy mintát: $X_1, \ldots, X_{16}$. Realisztikus feltételezni, hogy a minta normális eloszlásból származik ismert szórással. Legyen $\sigma = 2$. A mintából kiszámoltuk, hogy $\overline{X} = 10.2$. Döntsünk 90%-os szinten H_0 és $H_1 : m \neq 10$ mm között.

A próbastatisztika:

$$u = \frac{10.2 - 10}{2}\sqrt{16} = 0.4.$$

A standard normális eloszlás táblázatából

$$P(\mathcal{N}(0,1) \leq 1.64) = \Phi(1.64) = 0.95.$$

Azaz $u_{\alpha/2} = 1.64$. Mivel most $-1.64 \leq u \leq 1.64$, így H_0-at 90%-os szinten elfogadjuk.

Az $u_{\alpha/2}$ meghatározását a standard normális sűrűségfüggvény segítségével az alábbiakban szemléltetjük (6.2.1. ábra).

A $H_1 : m = m_0$ alternatív hipotézist kétoldali hipotézisnek nevezzük. Az egyoldali hipotézis lehet $H_1 : m < m_0$ vagy $H_1 : m > m_0$ alakú.

Most ismertetni fogjuk az u-próbát egyoldali alternatív hipotézis esetén. Legyen $X_1, \ldots, X_n$ minta $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ eloszlásból és legyen σ ismert. Vizsgáljuk a

$$H_0 : m = m_0$$

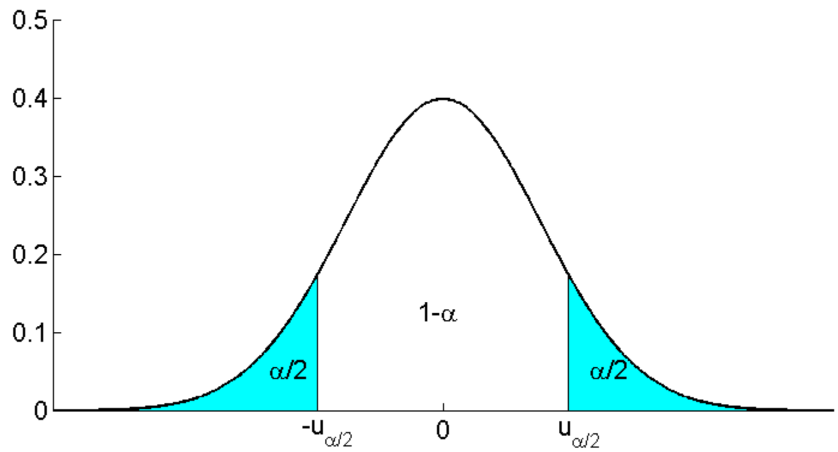
nullhipotézist a

$$H_1 : m > m_0$$

egyoldali ellenhipotézissel szemben. A próbastatisztika most is

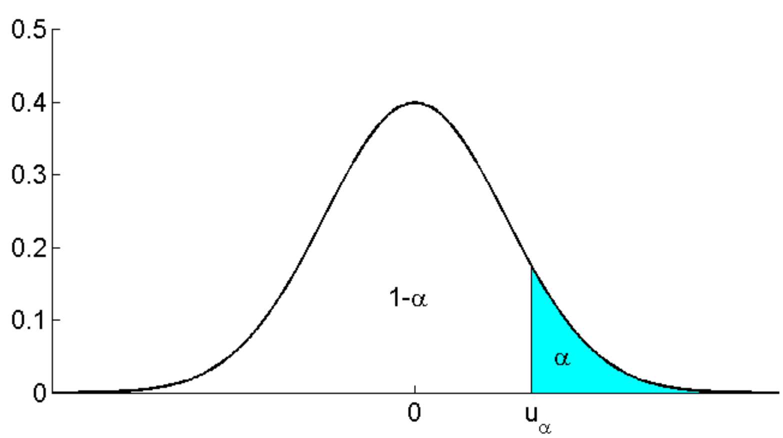
$$u = \frac{\overline{X} - m_0}{\sigma}\sqrt{n}.$$

6.2.1. ábra. A standard normális sűrűségfüggvény és $u_{\alpha/2}$ kapcsolata



Ennek eloszlása akkor és csak akkor standard normális, ha H_0 teljesül. H_1 igaz voltára az utal, ha u túlságosan nagy. Tehát H_0-at elvetjük, ha $u > u_\alpha$, ahol u_α kritikus értéket a standard normális eloszlás Φ eloszlásfüggvénye alapján a $\Phi(u_\alpha) = 1 - \alpha$ képletből határozzuk meg. Itt $\alpha > 0$ az előre megadott elsőfajú hiba. u_α meghatározását a 6.2.1. ábra szemlélteti.

6.2.2. ábra. A kritikus érték és a standard normális sűrűségfüggvény



6.2.2. Elfogadási- és kritikus tartomány Tekintsünk az X valószínűségi változóra vonatkozóan egy n elemű mintát: $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Az általánosság csorbítása nélkül $\mathbb{R}^n$-et tekinthetjük mintatérnek (azaz $X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_n(\omega)$ összes lehetséges értékei halmazának).

6.2.2. Definition. Legyen $H_0 : \vartheta \in \Theta_0$ a nullhipotézis, $H_1 : \vartheta \in \Theta_1$ az ellenhipotézis. H_0-at *egyszerű nullhipotézisnek* mondjuk, ha Θ_0 egyelemű.

A próba konstrukciója során a mintateret két diszjunkt halmazra bontjuk. Jelölje őket C_0 és C_1. Ekkor $C_0 \cup C_1 = \mathbb{R}^n$ és $C_0 \cap C_1 = \emptyset$.

Ha a minta $x_1, x_2, \ldots, x_n$ realizációja a C_0 halmaz eleme, akkor elfogadjuk a nullhipotézist, ha $(x_1, \ldots, x_n) \in C_1$, akkor a H_1 alternatív hipotézist fogadjuk el.

6.2.3. Definition. A C_0 halmazt *elfogadási tartománynak*, a C_1 halmazt *kritikus tartománynak* nevezzük.

A

$$P_\vartheta(C_1) \leq \alpha, \qquad \vartheta \in \Theta_0$$

relációt teljesítő α számot a *próba terjedelmének* (a kritikus tartomány terjedelmének) nevezzük.

A *próba pontos terjedelme*

$$\alpha = \sup_{\vartheta \in \Theta_0} P(C_1).$$

Ha a próba pontos terjedelme α, akkor az $1-\alpha$ értéket a *próba szintjének* nevezzük. (Az $1-\alpha$ százalékban kifejezett értékére szokás a *szignifikancia szint* elnevezést is használni.)

Egy-egy konkrét statisztikai próba elvégzése előtt először a próba szintjét (a döntés szintjét) kell rögzíteni. Mivel a próba szintje egyféle helyes döntés valószínűsége (H_0 fennállása esetén a minta realizáció az elfogadási tartomány eleme), a gyakorlatban kis α értéket választunk: $0.001 \leq \alpha \leq 0.1$. Például $\alpha = 0.05$ azt jelenti, hogy döntésünk megbízhatósági szintje 0.95.

Döntésünk - akár elfogadjuk, akár elvetjük a nullhipotézist - lehet helyes, vagy hibás. A döntés során kétféle hibát követhetünk el.

6.2.4. Definition. Ha H_0 igaz, és ennek ellenére elvetjük, akkor azt mondjuk, hogy *elsőfajú hibát* követtünk el.

Az elsőfajú hiba elkövetésének valószínűsége (egyszerű nullhipotézis esetén): $P((x_1, \ldots, x_n) \in C_1 | H_0) = \alpha$. Tehát a próba szintjével együtt az elsőfajú hiba elkövetésének valószínűségét is rögzítjük.

6.2.5. Definition. Ha a H_1 hipotézis az igaz, és mégis elfogadjuk H_0-at, akkor *másodfajú hibáról* beszélünk.

Egyszerű alternatív hipotézis esetén másodfajú hibát

$$\beta = P((x_1, \ldots, x_n) \in C_0 | H_1)$$

valószínűséggel követhetünk el.

6.2.3. Kétmintás u-próba Ezzel az eljárással két független, ismert szórású, normális eloszlású valószínűségi változó várható értékének azonosságáról dönthetünk.

Legyenek X $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$, ill. Y $\mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$ eloszlású független valószínűségi változók, σ_1 és σ_2 ismert paraméterek. X-re vonatkozóan tekintsünk egy n_1, Y-ra vonatkozóan egy n_2 elemű, egymástól független mintát: $X_1, X_2, \ldots, X_{n_1}$; $\quad Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n_2}$. Legyen a próba szintje $1 - \alpha$. Hipotézisünk:

$$\begin{aligned} H_0 &: \quad m_1 = m_2 \\ H_1 &: \quad m_1 \neq m_2. \end{aligned}$$

A próbastatisztika

$$u = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

standard normális eloszlású, ha H_0 fennáll. A továbbiakban hasonlóan járunk el, mint az egymintás u-próba esetén.

Ha $H_1 : m_1 > m_2$ (vagy $m_1 < m_2$) alakú, akkor az egyoldali próbát kell alkalmazni.

6.2.4. Próbák konstrukciója Tegyük fel, hogy 5 mm átmérőjű csapágygolyókat kell gyártani. A minőségellenőrzés során mely tételeket nyilvánítsanak jónak, és melyeket selejtnek? Tegyük fel az egyszerűség kedvéért, hogy a gyártás során csupán az a hiba léphet fel, hogy a berendezés rossz beállítás miatt túl nagy, vagy túl kicsi golyókat gyárt. Vegyünk mintát, azaz mérjük meg n db kiválasztott golyó átmérőjét. Az átmérők átlaga $\overline{x}$. Ha $\overline{x}$ 5 mm közelében van, akkor jók a golyók, ha $\overline{x}$ túl nagy, vagy túl kicsi, akkor selejtesek. De mik legyenek azok a k_1, k_2 kritikus értékek, amelyek alatt, ill. fölött már selejtesnek minősítjük a golyókat? Ehhez segít hozzá az u statisztika:

$$u = \frac{\overline{X} - 5}{\sigma}\sqrt{n}$$

eloszlása $H_0 : m = 5$ esetén standard normális. A standard normális eloszlású valószínűségi változó azonban nagy valószínűséggel egy (u_1, u_2) intervallumban veszi fel értékeit. Ha ezen az (u_1, u_2) intervallumon kívül esik u értéke, akkor arra gondolhatunk, hogy a kiinduló H_0 hipotézisünk nem volt igaz, így H_0-at elvetjük.

A kritikus tartomány megadása azonban nemcsak a H_0 nullhipotézistől, hanem a H_1 alternatív hipotézistől is függ. Tekintsük most azt az esetet, amikor az élelmiszerbolt vezetője a sütödétől 2 kg-os kenyereket vásárol. $H_0 : m = 2$ a nullhipotézis, $H_1 : m < 2$ pedig az ellenhipotézis, amit a boltvezető tekint, hisz számára csak a túl kicsi kenyér a rossz. Így csak akkor fogja a szállítmányt visszautasítani, ha a megmért kenyerek súlyának $\overline{x}$ átlaga túl kicsi. Egyoldali u-próbát alkalmazhat, és a kritikus (elutasítási) tartománya $\overline{x} < k_2$ alakú lesz. Tehát a kritikus tartományt úgy kell megválasztani, hogy a számunkra „rossz” esetektől óvjon.

Mikor jó egy próbastatisztika? Az u-próba esetén ismeretes, hogy ha a valódi m paraméter közel van a nullhipotézisben szereplő m_0 paraméterhez, akkor H_0-at kis eséllyel vetjük el, míg ha távol van tőle, akkor nagy eséllyel vetjük el a H_0-at.

A fentiek alapján a próbastatisztika legyen olyan, hogy

(1) eloszlása pontosan ismert H_0 esetén,

(2) másképpen viselkedjen, ha H_0 nem igaz, mint akkor, amikor H_0 igaz,
(3) ha H_0 „nagyon nem igaz”, akkor a próbastatisztika viselkedése térjen el nagyon attól, ahogy H_0 esetén viselkedik.

Ha a fenti elveknek megfelelő próbastatisztikát már megtaláltuk, akkor annak alapján már tudjuk, merre van a jó és merre a rossz. De pontosan hol húzzuk meg a határt a jó (az elfogadási tartomány) és a rossz (a kritikus tartomány) között? Ez az α elsőfajú hiba megválasztásával történik. Ha pl. egy precíziós műszert gyártunk, akkor az alkatrészek közül szigorúan válogatunk: vállaljuk, hogy selejtnek minősítünk egy jó alkatrészt is, semmint véletlenül rosszat építsünk be. Tehát az α elsőfajú hibát nagynak választjuk. Azt azonban, hogy a szokásos α értékek (0.1, 0.05, 0.01) közül melyiket választjuk, a konkrét probléma alapján döntjük el.

6.2.5. Egymintás t-próba Legyen X $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ eloszlású valószínűségi változó, ahol az m várható érték és a σ szórás ismeretlenek. Az X valószínűségi változóra vonatkozó n elemű minta $X_1, X_2, \ldots, X_n$. A próba szintje $1-\alpha$. A hipotézis a várható értékre vonatkozik:

$$\begin{aligned} H_0 &: m = m_0 \\ H_1 &: m \neq m_0 \text{ (kétoldali eset).} \end{aligned}$$

Ismert, hogy $\frac{\overline{X}-m}{s_n^*}\sqrt{n}$ valószínűségi változó $(n-1)$ paraméterű t (Student)-eloszlású, ahol

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

és

$$s_n^{*2} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2.$$

Tehát ha a nullhipotézis igaz, a

$$t = \frac{\overline{X} - m_0}{s_n^*}\sqrt{n}$$

próbastatisztika $(n-1)$ paraméterű t-eloszlású. Az $(n-1)$ paraméterű t-eloszlás táblázatából kiolvasható az a $t_{n-1}(\alpha/2)$ kritikus érték, amelyre

$$P(t_{n-1} \geq t_{n-1}(\alpha/2)) = \frac{\alpha}{2}$$

fennáll. Erre az értékre igaz, hogy

$$P(-t_{n-1}(\alpha/2) < t_{n-1} < t_{n-1}(\alpha/2)) = 1 - \alpha.$$

A kritikus tartomány tehát:

$$C_1 = \left\{(x_1, \ldots, x_n) : |t| \geq t_{n-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right\}$$

és az elfogadási tartomány:

$$C_0 = \left\{(x_1, \ldots, x_n) : |t| < t_{n-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right\}.$$

Egyoldali esetben az ellenhipotézis

$$H_1 : m > m_0 \text{ (vagy } m < m_0\text{) alakú.}$$

Ekkor azt a $t_{n-1}(\alpha)$ értéket kell kikeresnünk a táblázatból, amely a következő összefüggést teljesíti:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(t_{n-1} \geq t_{n-1}(\alpha)) &= \alpha \\ (\text{vagy } \mathbb{P}(t_{n-1} \leq -t_{n-1}(\alpha)) &= \alpha). \end{aligned}$$

Az egyoldali ellenhipotézishez tartozó kritikus tartomány:

$$\begin{aligned} C_1 &= \{(x_1, \ldots, x_n) : t \geq t_{n-1}(\alpha)\} \\ (\text{vagy } C_1 &= \{(x_1, \ldots, x_n) : t \leq -t_{n-1}(\alpha)\}). \end{aligned}$$

Gyakorlatok

(1) Automata csővágó gép 1200 mm-es darabok levágására van beállítva. A levágott cső hossza véletlentől függő változó, előzetes adatfelvételből tudjuk, hogy normális eloszlású és szórása 3 mm. Kiválasztunk 16 levágott csövet. A mintából kapott méretek:

1193, 1198, 1203, 1191, 1195, 1196, 1199, 1191,

1201, 1196, 1193, 1198, 1204, 1196, 1198, 1200.

Elfogadható-e 95% -os szinten, hogy az eltérés nem szignifikáns, vagyis a méretek ingadozása csak a véletlen műve?

(2) Adott két független minta a $\sigma = 0.0012$ szórású normális eloszlásból. Az egyik, 9 elemű minta realizációjának átlaga 0.1672; a másik 16 mérésből álló minta realizáció átlaga 0.1683. Elfogadható-e 92% -os szinten, hogy a két sokaság várható értéke megegyezik?

Ellenőrző kérdések

(1) Mi a nullhipotézis, ellenhipotézis, elsőfajú hiba, másodfajú hiba, elfogadási tartomány, kritikus tartomány?

(2) Mi az u-próba?

6.3. Khi-négyzet próbák

6.3.1. Tiszta illeszkedésvizsgálat Legyen $A_1, \ldots, A_r$ egy teljes eseményrendszer. Legyenek $p_1 > 0, \ldots, p_r > 0$ adott számok, $\sum_{i=1}^r p_i = 1$. Döntsünk a

$$H_0 : P(A_i) = p_i, \quad i = 1, \ldots, r$$

nullhipotézis érvényességéről.

Hajtsuk végre az $A_1, \ldots, A_r$ eseményrendszert tartalmazó kísérletet N-szer, egymástól függetlenül. Jelölje k_i az A_i bekövetkezései számát. Képezzük a

$$\mathcal{X}^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{(k_i - Np_i)^2}{Np_i}$$

statisztikát. Ha H_0 fennáll, akkor $\mathcal{X}^2$ aszimptotikus eloszlása $\mathcal{X}^2_{r-1}$.

A $\mathcal{X}^2$ statisztika szerkezete:

$$\sum \frac{(\text{megfigyelt érték } - \text{ várt érték})^2}{\text{várt érték}}.$$

A $\mathcal{X}^2$ statisztika kicsiny volta utal arra, hogy a megfigyelt értékek közel vannak azokhoz, melyeket a H_0 fennállása esetén várunk. Tehát ha $\mathcal{X}^2$ kicsi, akkor H_0-at elfogadjuk. Ha $\mathcal{X}^2$ nagy (azaz meghaladja a kritikus értéket) akkor H_0-at elvetjük.

Adott $1-\alpha$ szinthez a kritikus értéket a $\mathcal{X}^2_{r-1}$ eloszlás táblázatából határozhatjuk meg. A $\mathcal{X}^2$-próba nagy N esetén alkalmazható, mivel a statisztika eloszlása csupán aszimptotikusan $\mathcal{X}^2_{r-1}$.

6.3.1. Example. Állapítsuk meg, hogy egy dobókocka szabályos-e. Jelölje A_i azt az eseményt, hogy a kockán i-t dobunk ($i = 1, \dots, 6$). Ekkor

$$H_0 : P(A_i) = \frac{1}{6},\ i = 1, \dots, 6.$$

A kocka 600-szori feldobásakor az alábbi eredmény adódott:

$$k_1 = 83,\ k_2 = 91,\ k_3 = 122,\ k_4 = 107,\ k_5 = 74,\ k_6 = 123$$

(k_i jelöli A_i gyakoriságát). A $\mathcal{X}^2$-statisztika:

$$\begin{aligned}\mathcal{X}^2 = {} & \frac{(83-100)^2}{100} + \frac{(91-100)^2}{100} + \frac{(122-100)^2}{100} + \\ & + \frac{(107-100)^2}{100} + \frac{(74-100)^2}{100} + \frac{(123-100)^2}{100} = 21.08.\end{aligned}$$

H_0 fennállása esetén a $\mathcal{X}^2$ statisztika aszimptotikusan $\mathcal{X}^2_5$ eloszlású. H_0-at akkor vetjük el $1-\alpha$ szinten, ha $\mathcal{X}^2$ meghaladja az $1-\alpha$ szinthez tartozó kritikus értéket. A kritikus értéket a $\mathcal{X}^2_5$ eloszlás táblázatából keressük ki. $\alpha = 0.1$ esetén ez 9.236, $\alpha = 0.01$ esetén 15.09, míg $\alpha = 0.001$ esetén 20.51. Tehát H_0-at valamennyi használatos szinten elvetjük.

6.3.2. Az illeszkedésvizsgálat végrehajtása A kiinduló probléma az, hogy a megfigyelt X valószínűségi változó eloszlásfüggvénye egyenlő-e az előre megadott F eloszlásfüggvénnyel. Fogalmazzuk át a feladatot az előző sémára. Osszuk fel X értékkészletét páronként diszjunkt $C_1, \dots, C_r$ részhalmazokra. Legyen A_i az az esemény, hogy X értéke C_i-be esik. Ekkor $A_1 = \{X \in C_1\}, \dots, A_r = \{X \in C_r\}$ az a teljes eseményrendszer, amelyre az előző eljárást alkalmazni fogjuk. Jelölje p_i a $P(X \in C_i)$ valószínűséget abban az esetben, ha F az X valódi eloszlásfüggvénye. Az így megadott $p_1, \dots, p_r$ értékek szerepelnek a $\mathcal{X}^2$ próbastatisztikában.

Figyeljük meg X-et N-szer egymástól függetlenül, jelölje k_i az $A_i = \{X \in C_i\}$ gyakoriságát. Az így adódó k_i számokkal készítsük el a

$$\mathcal{X}^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{(k_i - Np_i)^2}{Np_i}$$

statisztikát. Ha $\mathcal{X}^2$ meghaladja az $1-\alpha$ szinthez tartozó kritikus értéket, akkor $1-\alpha$ szinten elvetjük azt a hipotézist, hogy X eloszlásfüggvénye F.

6.3.2. Note. Mivel a statisztikánk $N \to \infty$ esetén vett határeloszlása $\mathcal{X}^2_{r-1}$, így az eljárás nagy N-ekre alkalmazható. A kézikönyvek azt ajánlják, hogy a minta elemszáma olyan nagy legyen, hogy minden k_i gyakoriság legalább 6-nál (más művek szerint 10-nél) nagyobb legyen. Viszont a mintaelemszám általában rögzített. Ilyenkor osztályokat vonunk össze: egyesítjük azokat az A_i eseményeket, melyekre a k_i gyakoriságok kicsik. Az összevonás utáni teljes eseményrendszerre végrehajtjuk a $\mathcal{X}^2$-próbát.

6.3.3. Example. Vizsgálandó, hogy az X valószínűségi változó eloszlása megegyezik-e a $\lambda = 2$ paraméterű Poisson-eloszlással. A Poisson-eloszlás táblázata alapján az $A_i = \{X = i\}$, $i = 0, 1, 2, 3$ és $A_4 = \{X \geq 4\}$ eseményekből álló teljes eseményrendszert érdemes alapul venni, mivel

$$\mathbb{P}_{H_0}(A_0) = 0.135,\ P_{H_0}(A_1) = 0.270,\ P_{H_0}(A_2) = 0.270,$$
$$P_{H_0}(A_3) = 0.180,\ P_{H_0}(A_4) = 0.145.$$

$N = 100$ elemű mintát véve X-re, az A_k események gyakoriságára rendre $12,\ 32,\ 25,\ 21,\ 10$ adódott. Ekkor

$$\mathcal{X}^2 = \frac{(12-13.5)^2}{13.5} + \frac{(32-27)^2}{27} + \frac{(25-27)^2}{27} + \frac{(21-18)^2}{18} + $$
$$+ \frac{(10-14.5)^2}{14.5} = 0.166 + 0.926 + 0.148 + 0.5 + 1.396 = 3.136.$$

$1 - \alpha = 0.9$ szinten a $\mathcal{X}_4^2$ táblázatából 7.779 kritikus érték adódik. Így H_0-at $1 - \alpha = 0.9$ szinten elfogadjuk.

Most azt vizsgáljuk, hogyan dönthető el a normalitás.

6.3.4. Example. $H_0 : X$ eloszlása standard normális.

Jelölje Φ a standard normális eloszlásfüggvényt. A táblázat alapján

$$\Phi(0) = 0.5,\ \Phi(0.5) = 0.6915,\ \Phi(1) = 0.8413,$$
$$\Phi(1.5) = 0.9332,\ \Phi(2) = 0.9772.$$

A

$$-2,\ -1.5,\ -1,\ -0.5,\ 0,\ 0.5,\ 1,\ 1.5,\ 2$$

osztópontokat választjuk. A H_0 fennállása esetén az egyes intervallumok valószínűségei:

$$\begin{aligned}
&p_1 = \Phi(-2) = 0.0228, && p_2 = \Phi(-1.5) - \Phi(-2) = 0.0440,\\
&p_3 = \Phi(-1) - \Phi(-1.5) = 0.0919, && p_4 = \Phi(-0.5) - \Phi(-1) = 0.1498,\\
&p_5 = \Phi(0) - \Phi(-0.5) = 0.1915, && p_6 = \Phi(0.5) - \Phi(0) = 0.1915,\\
&p_7 = \Phi(1) - \Phi(0.5) = 0.1498, && p_8 = \Phi(1.5) - \Phi(1) = 0.0919,\\
&p_9 = \Phi(2) - \Phi(1.5) = 0.0440, && p_{10} = 1 - \Phi(2) = 0.0228.
\end{aligned}$$

Az X-re végzett $N = 1000$ megfigyelés alapján az egyes intervallumokba esések gyakoriságaira az alábbiak adódtak:

$$k_1 = 20,\ \ k_2 = 45,\ \ k_3 = 101,\ k_4 = 132,\ k_5 = 224,$$
$$k_6 = 190,\ k_7 = 156,\ k_8 = 87,\ \ k_9 = 41,\ \ k_{10} = 4.$$

A $\mathcal{X}^2$ statisztika:

$$\mathcal{X}^2 = \frac{(20-22.8)^2}{22.8} + \frac{(45-44)^2}{44} + \frac{(101-91.9)^2}{91.9} + \frac{(132-149.8)^2}{149.8} +$$
$$+ \frac{(224-191.5)^2}{191.5} + \frac{(190-191.5)^2}{191.5} + \frac{(156-149.8)^2}{149.8} + \frac{(87-91.9)^2}{91.9} +$$
$$+ \frac{(41-44)^2}{44} + \frac{(4-22.8)^2}{22.8} = 0.344 + 0.023 + 0.901 + 2.115 +$$
$$+ 5.516 + 0.012 + 0.257 + 0.261 + 0.205 + 15.502 = 25.136$$

H_0-at minden használatos szinten elvetjük, hisz a $\mathcal{X}_9^2$ táblázat alapján a 0.95 szinthez 16.92, a 0.99 szinthez 21.67, sőt még az 0.995 szinthez is csupán 23.59 kritikus érték tartozik. A statisztikánk aktuális értéke még ezen legutóbbit is meghaladja.

6.3.3. Becsléses illeszkedésvizsgálat A gyakorlatban az eloszlásfüggvény alakjára van feltételezésünk, azonban az eloszlásfüggvény bizonyos paraméterei nem ismertek. Legyen

$$H_0 : P(X < t) = F(t; \vartheta_1, \dots, \vartheta_s),$$

ahol az $F(t; \vartheta_1, \dots, \vartheta_s)$ eloszlásfüggvényében a $(\vartheta_1, \dots, \vartheta_s)$ (egydimenziós) paraméterek ismeretlenek. A minta alapján becsüljük meg az ismeretlen paramétereket maximum-likelihood módszerrel. Jelölje $\widehat{\vartheta}_i$ a ϑ_i maximum-likelihood becslését. Vizsgáljuk a

$$H_0' : P(X < t) = F(t; \widehat{\vartheta}_1, \dots, \widehat{\vartheta}_s)$$

hipotézist a korábban ismertetett eljárással. A módszerben a változás csupán annyi, hogy a $\mathcal{X}^2$-eloszlás fokszámát a becsült paraméterek számával kell csökkenteni, azaz a kritikus értéket $\mathcal{X}_{r-1-s}^2$ táblázatából kell kikeresni.

6.3.4. Függetlenségvizsgálat Legyen $A_1, A_2, \dots, A_r$ és $B_1, B_2, \dots, B_s$ két teljes eseményrendszer. A két teljes eseményrendszer függetlenségét vizsgáljuk:

$$H_0 : P(A_i \cap B_j) = P(A_i)P(B_j), \; i = 1, \dots, r, \; j = 1, \dots, s. \tag{6.3.1}$$

Amennyiben a két teljes eseményrendszerhez tartozó valószínűségek ismertek, akkor tiszta illeszkedésvizsgálatra vezethető vissza a feladat:

$$H_0 : P(A_i \cap B_j) = p_i q_j, \; i = 1, \dots, r, \; j = 1, \dots, s,$$

ahol $p_i = P(A_i), \; q_j = P(B_j)$ előre megadott számok. Mivel itt

$$\{A_i \cap B_j : \; i = 1, \dots, r, \; j = 1, \dots, s\}$$

egy teljes eseményrendszer és

$$\{p_i \cdot q_j : \; i = 1, \dots, r, \; j = 1, \dots, s\}$$

egy adott valószínűségeloszlás, az előző rész alapján a próbastatisztika megkonstruálható. A határeloszlás H_0 esetén $\mathcal{X}_{rs-1}^2$ lesz.

Azonban sokkal realisztikusabb az a felfogás, hogy a p_i és q_j számok nem ismertek, így azokat a mintából kell becsülni. Hajtsuk végre a két teljes eseményrendszert tartalmazó kísérletet N-szer, függetlenül. Jelölje k_{ij} az $A_i \cap B_j$ esemény gyakoriságát. A gyakoriságokat foglaljuk ún. *kontingencia táblázatba.*

	B_1	B_2	$\cdots$	B_s	$\sum$
A_1	k_{11}	k_{12}		k_{1s}	$k_{1.}$
A_2	k_{21}	k_{22}		k_{2s}	$k_{2.}$
$\vdots$					
A_r	k_{r1}	k_{r2}		k_{rs}	$k_{r.}$
$\sum$	$k_{.1}$	$k_{.2}$		$k_{.s}$	N

A peremeken található számok:

$$k_{i.} = \sum_{j=1}^{s} k_{ij} \text{ (az } A_i \text{ esemény gyakorisága)}$$

$$k_{.j} = \sum_{i=1}^{r} k_{ij} \text{ (a } B_j \text{ esemény gyakorisága)}$$

Az események ismeretlen valószínűségét a relatív gyakorisággal becsüljük:

$$p_i = P(A_i) \text{ becslése } \frac{k_{i.}}{N},$$
$$q_j = P(B_j) \text{ becslése } \frac{k_{.j}}{N}.$$

Így $A_i \cap B_j$ megfigyelt értéke k_{ij}, várt értéke (H_0 esetén)

$$N \cdot \frac{k_{i.}}{N} \cdot \frac{k_{.j}}{N} = \frac{k_{i.}k_{.j}}{N}$$

lesz. Így a $\mathcal{X}^2$-statisztika:

$$\mathcal{X}^2 = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \frac{\left(k_{ij} - \frac{k_{i.}k_{.j}}{N}\right)^2}{\frac{k_{i.}k_{.j}}{N}}. \tag{6.3.2}$$

Az ismeretlen paraméterek: $p_1, \dots p_r, q_1, \dots, q_s$; azonban a $\sum p_i = 1$ és $\sum q_j = 1$ miatt csupán $r-1$ darab p_i-t és $s-1$ darab q_j-t kell becsülni. Így H_0 (azaz a függetlenség) fennállása esetén a $\mathcal{X}^2$-statisztika aszimptotikusan

$$\mathcal{X}^2_{rs-1-(r+s-2)} = \mathcal{X}^2_{(r-1)(s-1)}$$

eloszlású.

6.3.5. Example. Független-e a hajszín és a szemszín? 200 embert megfigyelve az alábbiak adódtak:

	szőke haj	barna haj	fekete haj	$\sum$
kék szem	42	28	3	73
barna szem	17	89	21	127
$\sum$	59	117	24	200

$$\begin{aligned}\mathcal{X}^2 =& \frac{(42-21.54)^2}{21.54} + \frac{(28-42.71)^2}{42.71} + \frac{(3-8.76)^2}{8.76} + \\ &+ \frac{(17-37.47)^2}{37.47} + \frac{(89-74.30)^2}{74.30} + \frac{(21-15.24)^2}{15.24} = \\ &= 19.43 + 5.06 + 3.79 + 11.18 + 2.91 + 2.18 = 44.56.\end{aligned}$$

A szabadsági fok $(2-1)(3-1) = 2$. Mivel a $\mathcal{X}^2_2$ táblázata alapján még az $\alpha = 0.001$-hez tartozó kritikus érték is csupán 13.82, így H_0-at minden használatos szinten elvetjük.

Ellenőrző kérdések

(1) Mi az illeszkedésvizsgálatra vonatkozó χ^2 próba?
(2) Mi a függetlenségvizsgálatra szolgáló χ^2 próba?

6.4. Szórásanalízis, regresszióanalízis

6.4.1. Szórásanalízis A szórásanalízis (ANOVA=ANalysis Of VAriance) alapkérdése: több minta esetén a várható értékek egyenlőek-e. Alapvető feltétel: minták egymástól is függetlenek, normális eloszlásból származnak, és a szórásaik egyenlőek! Tehát a minták között csak a várható értékeikben lehet eltérés.

6.4.1.1. Egyszeres osztályozás A legegyszerűbb szórásanalízisbeli modell az egyszeres osztályozás (one-way classification, one-way layout). Itt egyetlen tényező szintjeit kell összehasonlítani. Mivel a megfigyelések eredményeit tényezőnként egy-egy oszlopban szokták elhelyezni, a tényezők szintjeinek hatását oszlophatásnak nevezzük. Példaként tekintsünk egy mezőgazdasági kísérletet.

műtrágya tényező		
1. műtrágya	2. műtrágya	3. műtrágya
9.40	22.84	17.35
9.48	15.32	16.36
7.56	11.04	15.88
11.52	17.92	14.28
11.56	19.68	18.60
12.12	26.20	19.32
11.36		14.20
4.60		17.52
14.48		

6.4.1. EXAMPLE. Három különböző műtrágya hatását mérték 9, 6, ill. 8 kísérleti alanyon. Itt az egyetlen tényező a műtrágya, annak 3 szintje van. A műtrágya hatására a terméseredményeket a fenti táblázat mutatja. Vizsgáljuk meg azt a nullhipotézist, hogy a terméseredmények várható értékei egyenlőek!

A megfigyelések: $Y_{ij}, j = 1, \ldots, n_i, i = 1, \ldots, p$. Y_{ij} az i-edik szinten végzett j-edik megfigyelés. Az egyes szinteken nem feltétlen kell azonos számú mérést végezni.

Feltesszük, hogy

$$Y_{ij} \sim \mathcal{N}(\mu + \alpha_i, \sigma^2) \quad \text{és} \quad Y_{ij}\text{-k függetlenek.}$$

Elérhető, hogy $\sum\limits_{i=1}^{p} n_i\alpha_i = 0$ legyen. Vezessük be az $n = n_1 + \cdots + n_p$ jelölést.

Vizsgáljuk a

$$H_0 \,:\, \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_p = 0$$

nullhipotézis teljesülését! H_0 azt jelenti, hogy az egyes szinteknek nincs hatása.

A Steiner-formula alapján az n db Y_{ij} négyzetösszege előáll

$$\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}^2 = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{n_i} \left(Y_{ij} - \overline{Y}_{..}\right)^2 + n\overline{Y}_{..}^2$$

alakban, ahol

$$\overline{Y}_{..} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}$$

a teljes átlag. A fenti felbontásban szereplő első négyzetösszeg jelölése Q, elnevezése teljes négyzetösszeg. Q előáll

$$Q = Q_1 + Q_2 = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{n_i} \left(\overline{Y}_{i\cdot} - \overline{Y}_{\cdot\cdot}\right)^2 + \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{n_i} \left(Y_{ij} - \overline{Y}_{i\cdot}\right)^2$$

alakban, ahol $\overline{Y}_{i\cdot} = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}$ az i-edik szint átlaga.

Q_1 méri a *szintek közötti szóródást*, Q_2 pedig a *szinteken belüli szóródást* (azaz a véletlen hibát). H_0-at akkor vetjük el, ha Q_1 túlságosan nagy Q_2-höz képest.

6.4.2. Theorem. *Q_1 és Q_2 függetlenek. Továbbá $\frac{1}{\sigma^2} Q_2 \sim \chi^2_{n-p}$. $\frac{1}{\sigma^2} Q_1$ akkor és csak akkor χ^2_{p-1}-eloszlású, ha a*

$$H_0 \,:\, \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_p = 0$$

nullhipotézis teljesül.

A próbastatisztikáról szól a következő tétel.

6.4.3. Theorem. *Az*

$$F = \frac{Q_1}{p-1} \bigg/ \frac{Q_2}{n-p}$$

statisztika pontosan akkor $p-1$ és $n-p$ szabadsági fokú F-eloszlású, ha a

$$H_0 \,:\, \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_p = 0$$

nullhipotézis teljesül.

Bizonyítás. Az előző tétel szerint H_0 esetén F két független, a szabadsági fokával elosztott, χ^2-eloszlású valószínűségi változó hányadosa. Ezért az F-eloszlás definíciója alapján ennek eloszlása (H_0 esetén) F-eloszlás $p-1$ és $n-p$ szabadsági fokokkal. □

Az eddigiek alapján az alábbi szórásfelbontó táblázatot adhatjuk meg az egytényezős osztályozásra.

A szóródás forrásai	Szabadsági fokok	Négyzetösszegek	Négyzetátlagok	F-hányad
Részsokaságok (szintek) közötti eltérések	$p-1$	Q_1	$\frac{Q_1}{p-1}$	$F = \frac{Q_1}{p-1} \bigg/$
Szinteken belüli eltérések (véletlen hibák)	$n-p$	Q_2	$\frac{Q_2}{n-p}$	
Teljes	$n-1$	Q_1+Q_2		

H_0-at $1-\alpha$ szinten elvetjük, ha a kapott F-statisztika értéke nagyobb, mint $F_{[p-1,n-p;\alpha]}$, azaz a megfelelő szabadsági fokú F-eloszlás táblázatából kikeresett (felső) kritikus érték.

6.4.4. Example. (A 6.4.1. példa folytatása.) A (számítógépes) eredményt a szórásfelbontó tábla tartalmazza:

ANOVA Table				
Source	SS	df	MS	F
Columns	313.9	2	156.90	13.31
Error	235.8	20	11.79	
Total	549.7	22		

Az elnevezések magyarázata. Source = a szóródás forrása; Columns = oszlophatás (szintek közötti eltérések); Error = véletlen hiba; Total = teljes négyzetösszeg; df (degree of freedom) = szabadsági fok; SS (Sum of Squares) = négyzetösszeg; MS (Mean Square) = tapasztalati szórásnégyzet (négyzet átlag), F = F-statisztika. Annak kérdéséről, hogy a műtrágya három szintjének van-e hatása, az F alatti mennyiség alapján döntünk. Amennyiben H_0 : a tényező szintjeinek nincs hatása nullhipotézis teljesül, az F alatti statisztika F-eloszlású (jelenleg $(2, 20)$ szabadsági fokkal). Ez alapján határozható meg a próba pontos terjedelme: p. Példánkban p=0.00021 érték adódott, azaz minden használatos szinten elvetjük a műtrágyák egyforma hatását. A hagyományos (táblázatos) kiértékelés ugyanerre a következtetésre vezet. F értékét összehasonlítva a $(2, 20)$ szabadsági fokú F-eloszlás $F_{[2,20;0.05]} = 3.49$ kritikus értékével, azt kapjuk, hogy a H_0 nullhipotézist 95%-os szinten el kell vetni. Ez azt jelenti, hogy a műtrágya tényező különböző szintjeinek van hatásuk a terméseredményre. Megjegyezzük, hogy az eljárást formálisan végrehajtottuk, azonban az alapfeltevések nem teljesülnek. Példánkban sem a szórások nem egyenlőek, sem a normalitás nem igaz (ez utóbbi grafikus eljárások, azaz hisztogram és Gauss-papír alapján adódott). Transzformációkkal (logaritmus, illetve törtkitevős hatvány vétele) részleges javulást sikerült elérni, a transzformáció elvégzését az olvasóra bízzuk.

Egy újabb példát tekintünk, melyhez számítógépes megoldás is tartozik.

6.4.5. Example. Három különböző takarmány hatását mérték 11, 10, ill. 9 kísérleti állaton. Itt az egyetlen tényező a takarmány, annak 3 szintje van. A takarmány hatására a súlynövekedések:

`8.41 11.08 10.50 12.12 10.36 13.11 14.41 10.16 13.11 7.23 5.60`

`20.42 17.32 12.04 16.91 19.11 25.21 11.98 19.32 21.11 9.92`

`17.15 12.96 16.18 13.98 18.61 19.12 15.23 19.12 14.77`

Az eredmény a szórásfelbontó tábla:

ANOVA Table					
Source	SS	df	MS	F	Prob > F
Groups	282.2	2	141.1	11.99	0.0002
Error	317.8	27	11.8		
Total	600.0	29			

Annak kérdéséről, hogy a takarmány három szintjének van-e hatása, az F alatti mennyiség alapján döntünk. Amennyiben H_0 : "a tényező szintjeinek nincs hatása" nullhipotézis teljesül, az F alatti statisztika F-eloszlású (jelenleg 2, 27 szabadsági fokkal). Ez alapján határozható meg a próba pontos terjedelme: p. A fenti program `Prob` > `F` = `p` = `0.0002` értéket adott, azaz minden használatos szinten elvetjük a takarmányok egyforma hatását.

6.4.2. Regresszióanalízis

A regresszióanalízis feladata az X és az Y változók közötti függvénykapcsolat felderítése.

6.4.2.1. Egyváltozós lineáris regresszió Legyenek X és Y nem független valószínűségi változók. Az Y értékét (amelyet nehezebb mérni) közelíteni fogjuk az egyszerűbben mérhető X egy lineáris függvényével:

$$Y \approx aX + b.$$

Feladatunk az a és b állandók meghatározása. A közelítés esetén a „hibát” az Y tényleges értéke és a lineáris közelítésének a különbsége, azaz az

$$Y - (aX + b)$$

különbség adja. Az a és b paraméterek értékét úgy határozzuk meg, hogy arra az

$$\mathbb{E}(Y - aX - b)^2$$

várható érték minimális legyen (legkisebb négyzetek elve).

Amennyiben X és Y folytonos valószínűségi változók és ismert a $h(x, y)$ együttes sűrűségfüggvényük, akkor az előbbi várható értéket az

$$\mathbb{E}(Y - aX - b)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (y - aX - b)^2 h(x, y) dx dy$$

alakban felírva adhatjuk meg. Így feladatunk azon a és b értékek meghatározása, amelyre az előbbi kettős integrál értéke minimális lesz.

Az

$$\mathbb{E}X = \mu_1, \quad \mathbb{D}^2 X = \sigma_1^2,$$
$$\mathbb{E}Y = \mu_2, \quad \mathbb{D}^2 Y = \sigma_2^2,$$
$$\varrho = \frac{\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y)))}{\mathbb{D}X\mathbb{D}Y}$$

jelöléseket használva

$$a = \varrho \cdot \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \quad b = \mu_2 - \mu_1 \varrho \cdot \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$$

adódik. Így az Y valószínűségi változónak X-re vonatkozó (elméleti) *regressziós egyenesének egyenlete*:

$$y = \varrho \cdot \frac{\sigma_2}{\sigma_1} x + \mu_2 - \mu_1 \varrho \cdot \frac{\sigma_2}{\sigma_1}.$$

Az a és b mennyiségeket az Y valószínűségi változó X-re vonatkozó lineáris regressziója együtthatóinak nevezzük.

Legyen $X \sim \mathcal{N}(2, 0.09)$, $Y \sim \mathcal{N}(3, 0.16)$ és legyen $\varrho = 0.6$. Ekkor Y-nak X-re vonatkozó regressziós egyenesében szereplő együtthatók értéke:

$$a = 0.6 \cdot \frac{0.4}{0.3} = 0.8, \quad b = 3 - 2 \cdot 0.8 = 1.4.$$

Így Y-nak X-re vonatkozó regressziós egyenese:

$$y = 0.8x + 1.4.$$

6.4.2.2. A regressziós egyenes együtthatóinak becslése Az X és Y együttes eloszlásfüggvényét (s így folytonos esetben az együttes sűrűségfüggvényét) általában nem ismerjük. Emiatt a regressziós egyenes egyenletét nem tudjuk az előbbieknek megfelelő módon meghatározni. Rendelkezésünkre áll viszont az (X, Y) párra egy $(x_i, y_i), i = 1, \ldots, n$, n-elemű minta, amelynek segítségével - a legkisebb négyzetek módszerét használva - becsülni tudjuk a regressziós együtthatókat.

Legyen az Y-nak X-re vonatkozó (elméleti) regressziós egyenesének egyenlete

$$y = ax + b.$$

Ha (x, y) helyébe az (x_i, y_i) mintaelemeket írjuk be, akkor a hibákat az

$$\varepsilon_i = y_i - ax_i - b, \quad i = 1, \ldots, n$$

mennyiségek adják. A legkisebb négyzetek módszerét használva úgy kell meghatározni az a és b regressziós együtthatókat, hogy a

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2$$

négyzetösszeg minimális legyen. Az

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \qquad s_1^{*2} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2,$$

$$\overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i, \qquad s_2^{*2} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2,$$

$$m_{11}^* = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}),$$

$$r = \frac{m_{11}^*}{s_1^* \cdot s_2^*}, \quad \widehat{R} = r \cdot \frac{s_2^*}{s_1^*}$$

jelöléseket bevezetve

$$\widehat{a} = \frac{m_{11}^*}{s_1^{*2}} = r \cdot \frac{s_2^*}{s_1^*} = \widehat{R}, \quad \widehat{b} = \overline{y} - \overline{x}\widehat{R}$$

adódik, ahol $\widehat{a}$ és $\widehat{b}$ az a és b regressziós együtthatók legkisebb négyzetes becslése. Így a tapasztalati regressziós egyenes egyenlete:

$$y = r \cdot \frac{s_2^*}{s_1^*} x + \overline{y} - \overline{x} \cdot r \cdot \frac{s_2^*}{s_1^*} = \widehat{R}(x - \overline{x}) + \overline{y},$$

vagy standardizált alakban:

$$\frac{y - \overline{y}}{s_2^*} = r \cdot \frac{x - \overline{x}}{s_1^*}.$$

6.4.2.3. A lineáris modell $\boxed{\mathbf{Y} = X\beta + \boldsymbol{\varepsilon}}$ a *lineáris modell*, ahol

$\mathbf{Y}$ n-dimenziós megfigyelés vektor,

X $n \times p$ méretű, nem véletlen, megfigyelt mátrix (a magyarázó változók mátrixa),

$\boldsymbol{\beta}$ p-dimenziós ismeretlen paraméter,

$\boldsymbol{\varepsilon}$ nem megfigyelhető n-dimenziós véletlen vektor (hiba).

Általában $n \gg p$, ezt szükség esetén fel fogjuk tenni. A gyakorlatban p a magyarázó változók száma, n pedig a megfigyelt objektumok száma, tehát $n \gg p$ ésszerű feltétel.

6.4.2.4. A legkisebb négyzetek módszere Ha $\mathbb{E}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}$ és $\mathrm{var}\boldsymbol{\varepsilon} = \sigma^2 I$ (σ^2 ismeretlen paraméter), akkor *homoszkedasztikus esetről* beszélünk. Ekkor a legkisebb négyzetes becslést (OLS=Ordinary Least Squares) alkalmazzuk $\boldsymbol{\beta}$-ra: ez lesz $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$. Legyen tehát $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ az $\|\mathbf{Y} - X\boldsymbol{\beta}\|^2$-et minimalizáló vektor. (Itt $\|\,.\,\|$ a norma $\mathbb{R}^n$-ben.)

6.4.6. Theorem. *$\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ legkisebb négyzetes becslés $\Longleftrightarrow$ $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ az*

$$\boxed{X^\top \mathbf{Y} = X^\top X\boldsymbol{\beta}}$$

normálegyenlet megoldása.

BIZONYÍTÁS. $\|\mathbf{Y} - X\boldsymbol{\beta}\|^2$ mikor a legkisebb? Ha $\mathbf{Y} - X\boldsymbol{\beta}$ éppen az $\mathbf{Y}$ ortogonális komplementere az F altérre vonatkozóan. Itt F az X oszlopai által generált altér. Azaz $\mathbf{Y} - X\boldsymbol{\beta}$ merőleges X minden oszlopára, tehát

$$X^\top \mathbf{Y} - X^\top X\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0},$$

vagyis $X^\top X\widehat{\boldsymbol{\beta}} = X^\top \mathbf{Y}$. □

6.4.7. NOTE. $X^\top X$ invertálható $\iff$ $\text{rang}X = p$.

Ha $\text{rang}X = p$, akkor

$$\boxed{\widehat{\beta} = (X^\top X)^{-1}X^\top Y}.$$

Ez éppen a normálegyenlettel ekvivalens, ha $(X^\top X)$ invertálható.

6.4.8. THEOREM. *Legyen* $\mathbb{E}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}, \text{var}\boldsymbol{\varepsilon} = \sigma^2 I$ *és* $\text{rang}X = p$. *Ekkor* $\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (X^\top X)^{-1}X^\top \mathbf{Y}$ *torzítatlan becslése* $\boldsymbol{\beta}$*-nak, továbbá* $var\widehat{\beta} = \sigma^2(X^\top X)^{-1}$.
Ha $\boldsymbol{\varepsilon} \sim \mathcal{N}_n(\mathbf{0}, \sigma^2 I)$*, akkor* $\widehat{\boldsymbol{\beta}} \sim \mathcal{N}_p(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2(X^\top X)^{-1})$.

BIZONYÍTÁS. Ha $\text{rang}X = p$, akkor $(X^\top X)$ invertálható. Ekkor $\mathbb{E}\widehat{\beta} = (X^\top X)^{-1}X^\top \mathbb{E}\mathbf{Y} = \boldsymbol{\beta}$, hiszen $\mathbb{E}\mathbf{Y} = X\boldsymbol{\beta}$. Másrészt

$$\text{var}(\widehat{\beta}) = (X^\top X)^{-1}X^\top(\text{var}(Y))X(X^\top X)^{-1} = \sigma^2(X^\top X)^{-1},$$

ugyanis $\text{var}(\mathbf{Y}) = \text{var}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \sigma^2 I$.
Ha $\boldsymbol{\varepsilon} \sim \mathcal{N}_n(\mathbf{0}, \sigma^2 I)$, akkor $\mathbf{Y} \sim \mathcal{N}_n(X\boldsymbol{\beta}, \sigma^2 I)$, így $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ - lévén $\mathbf{Y}$ lineáris függvénye - maga is normális eloszlású. □

6.4.2.5. A Gauss-Markov-tétel A homoszkedasztikus esetben $\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (X^\top X)^{-1}X^\top \mathbf{Y}$ legkisebb négyzetes becslés a *legjobb lineáris torzítatlan becslés* (BLUE=Best Linear Unbiased Estimator). Ezt mondja ki a Gauss-Markov-tétel.

6.4.9. THEOREM. *(Gauss-Markov.) Ha* $\mathbb{E}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}, \text{var}\boldsymbol{\varepsilon} = \sigma^2 I$ *és* $\text{rang}X = p$*, akkor* $\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (X^\top X)^{-1}X^\top \mathbf{Y}$ *a* $\boldsymbol{\beta}$ *paraméter vektor legjobb lineáris torzítatlan becslése.*

6.4.10. EXAMPLE. Legyen $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ n diák magassága és súlya. Keressünk összefüggést a két adat között!
Jelölje $\mathbf{Y}$ az $(y_1, \ldots, y_n)^\top$ oszlopvektort, az X mátrix első oszlopa legyen 1-esekből álló, a második pedig az $(x_1, \ldots, x_n)^\top$ legyen. Ekkor $\mathbf{Y} = X\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$ éppen a súlynak a magasság lineáris függvényével való közelítését adja. Ha azonban úgy gondoljuk, hogy a súly a magasság másodfokú függvénye, akkor az előző X mátrixot egészítsük ki az $(x_1^2, \ldots, x_n^2)^\top$ vektorral. Ez az $y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$ alakú közelítést írja le.
Könnyen látható, hogy az $\mathbf{Y} = X\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$ általános lineáris modellel tetszőleges fokszámú polinomiális közelítés is leírható.

Ellenőrző kérdések

(1) Mi a szórásfelbontó táblázat?
(2) Mi az egyváltozós lineáris regresszió?

7. FEJEZET

Appendix

7.0.3. Kombinatorika *Faktoriális.* $n! = 1 \cdot 2 \cdots n.$ $0! = 1.$
Szemifaktoriális. $(2n+1)!! = 1 \cdot 3 \cdots (2n+1).$
Binomiális együttható. $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}.$ $\binom{n}{0} = 1.$
Permutáció. n különböző elem összes lehetséges sorrendjének a száma: $n!$.
Ismétléses permutáció. n elem összes lehetséges sorrendjének a száma, ha $n_1, n_2, \ldots, n_r$ egyező van közöttük: $\dfrac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdots n_r!}.$
Variáció. n különböző elemből k darab lehetséges kiválasztásainak a száma, ha nincs visszatevés és a sorrend számít: $\dfrac{n!}{(n-k)!}.$
Ismétléses variáció. n különböző elemből k darab lehetséges kiválasztásainak a száma, ha van visszatevés és a sorrend számít: n^k.
Kombináció. n különböző elemből k darab lehetséges kiválasztásainak a száma, ha nincs visszatevés és a sorrend nem számít: $\binom{n}{k}$.
Ismétléses kombináció. n különböző elemből k darab lehetséges kiválasztásainak a száma, ha van visszatevés és a sorrend nem számít: $\binom{n+k-1}{k}$.
A binomiális tétel.

$$(a+b)^n = \sum\nolimits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \cdots + \binom{n}{n} a^0 b^n \,.$$

A Pascal-háromszög képzési szabálya. $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}.$

7.0.4. Sorozatok, sorok, határértékek Ha $a > 0$, akkor $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$
$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$

Ha $a > 1$, akkor $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^\beta}{a^n} = 0.$
Mértani sorozat. Ha $q \neq 1$, akkor

$$a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n = a\frac{q^{n+1}-1}{q-1}\,.$$

Mértani sor. Ha $|q| < 1$, akkor

$$a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n + \cdots = \frac{a}{1-q}\,.$$

Harmonikus sor. A $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$ sor konvergál, ha $p > 1$, és divergál, ha $p \leq 1$.
Hatványsor. A $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ hatványsor konvergenciasugara $R = 1/\alpha$, ahol

$$\alpha = \limsup\nolimits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}\,.$$

Azaz a $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ sor konvergál, ha $|x| < R$, és divergál, ha $|x| > R$.

Az e szám. $e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x \,.$$

A Stirling-formula. $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$, azaz

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1 \,.$$

7.0.5. Differenciálszámítás *A Taylor-formula.*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \cdots + \frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x_0) +$$

$$\frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(z),$$

ahol z az x és az x_0 között fekvő valamely pont.

Az e^x függvényre a Taylor-formula.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!} e^{\vartheta x} \,, \quad \text{ahol} \quad \vartheta \in (0,1) \,.$$

Az e^x Taylor-sora.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \,.$$

Az $\ln x$ függvényre a Taylor-formula.

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{n-1}}{n-1} + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n(1+\vartheta x)^n} \,,$$

ahol $\vartheta \in (0,1)$.

A L'Hospital-szabály.

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$$

vagy

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} f(x) = \infty$$

esetén

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \,.$$

Kétváltozós függvény szélső értékei. Ha az $f(x,y)$ függvénynek az (x_0,y_0) pontban szélső értéke van (és léteznek a parciális deriváltjai) akkor

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} = 0 \,. \tag{7.0.1}$$

Legyen továbbá

$$\Delta = \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2} - \left[\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x \partial y}\right]^2$$

(és legyenek f első és második parciális deriváltjai az (x_0,y_0) egy környezetében folytonosak). Teljesüljön (7.0.1). Ekkor

a) $\Delta > 0$ esetén az f függvénynek az (x_0,y_0) pontban szélső értéke van, mégpedig

(i) szigorú maximuma, ha $\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2} < 0$,

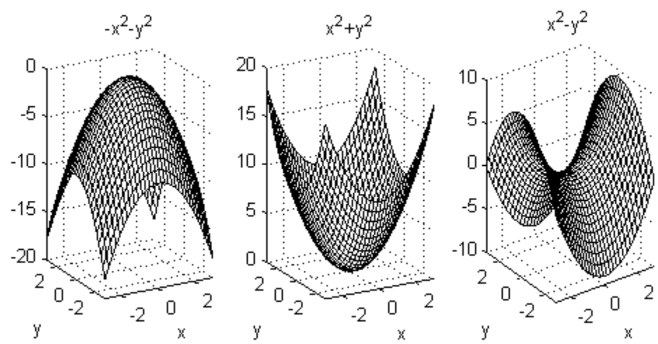
(ii) szigorú minimuma, ha $\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2} > 0$;

b) $\Delta < 0$ esetén az f függvénynek az (x_0, y_0) pontban nincs szélső értéke;

c) $\Delta = 0$ esetén pedig előfordulhat, hogy az (x_0, y_0) pontban van szélső érték, de az is, hogy nincs szélső érték.

Az a) rész (i) esetére példa az $f(x, y) = -x^2 - y^2$ lefelé néző paraboloid, melynek az $(x_0, y_0) = (0, 0)$ pontban maximuma van; az (ii) esetre példa az $f(x, y) = x^2 + y^2$ felfelé néző paraboloid, melynek az $(x_0, y_0) = (0, 0)$ pontban minimuma van; míg a b) részre példa az $f(x, y) = x^2 - y^2$ nyeregfelület, melynek az $(x_0, y_0) = (0, 0)$ pontban nincsen sem maximuma, sem minimuma (7.0.5. ábra).

7.0.1. ábra. Paraboloidok és nyeregfelület



7.0.6. Integrálszámítás Ebben a szakaszban Riemann-integrálról lesz szó.

Integrálás helyettesítéssel. Az $\int_a^b f(x)dx$ integrálba az $x = \varphi(t)$ helyettesítés:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\,,$$

ahol $\varphi(\alpha) = a$ és $\varphi(\beta) = b$.

Parciális integrálás.

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx\,.$$

Helyettesítés kettős integrál esetén. Az $\int\int_{\Gamma^*} f(x,y)dxdy$ integrálba az $x=\varphi(u,v)$, $y=\psi(u,v)$ helyettesítés:

$$\int\int_{\Gamma^*} f(x,y)dxdy = \int\int_{\Gamma} f(\varphi(u,v),\psi(u,v))\,|J(u,v)|\,du\,dv\,,$$

ahol a Γ^* kétdimenziós tartomány a Γ kétdimenziós tartomány képe az $x=\varphi(u,v)$, $y=\psi(u,v)$ folytonosan differenciálható, kölcsönösen egyértelmű leképezés által,

$$J(u,v) = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial\varphi(u,v)}{\partial v} \\ \frac{\partial\psi(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial\psi(u,v)}{\partial v} \end{pmatrix}$$

a leképezés Jacobi-determinánsa.

7.0.7. Vektorok és mátrixok *Transzponálás.* Az n-dimenziós euklideszi tér ($\mathbb{R}^n$) vektorait oszlopvektoroknak tekintjük, a $^\top$ segítségével jelölt transzponáltjaik tehát sorvektorok: $\boldsymbol{y}^\top = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

Belső szorzat és diadikus szorzat. Legyen $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^\top$ és $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^\top$ két $\mathbb{R}^n$-beli vektor. Az $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle = \boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{y}$ skalár a két vektor belső szorzata, míg az $\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^\top$ $n\times n$ méretű mátrix a két vektornak a diadikus szorzata:

$$\boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n x_i y_i\,,$$

$$\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^\top = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \ldots & x_1y_n \\ x_2y_1 & x_2y_2 & \ldots & x_2y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \ldots & x_ny_n \end{pmatrix}.$$

Merőleges (ortogonális) vetítés. Legyen $\boldsymbol{y}$ az n-dimenziós euklideszi tér egy vektora, V pedig egy altere. Ekkor egyértelműen létezik egy $\boldsymbol{v}_0 \in V$, melyre $\boldsymbol{y}-\boldsymbol{v}_0$ merőleges a V-re (azaz merőleges V minden elemére). $\boldsymbol{v}_0$ az $\boldsymbol{y}$ merőleges vetülete V-re, $\boldsymbol{y}-\boldsymbol{v}_0$ pedig a merőleges (ortogonális) komplementere (7.0.7. ábra).

$\boldsymbol{v}_0$ van $\boldsymbol{y}$-hoz a legközelebb a V altérből:

$$\min_{\boldsymbol{v}\in V}\sum_{i=1}^n (y_i - v_i)^2 = \min_{\boldsymbol{v}\in V}\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{v}\|^2 = \|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{v}_0\|^2\,.$$

Ez a legkisebb négyzetek elvének az alapja.

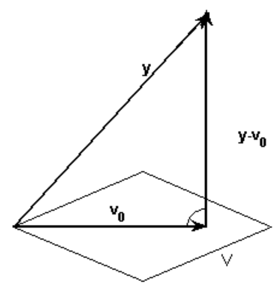
Sajátérték, sajátvektor. Legyen A $n\times n$-es mátrix, $\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^n$, $\lambda\in\mathbb{R}$. Ha $A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$ teljesül, és $\boldsymbol{v}\neq\boldsymbol{0}$, akkor $\boldsymbol{v}$-t az A sajátvektorának, λ-t pedig sajátértékének nevezzük.

Szimmetrikus mátrixok spektrálfelbontása. Az A valós elemű szimmetrikus mátrix sajátértékei valósak, a különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok ortogonálisak. Van a térnek az A sajátvektoraiból álló ortonormált bázisa. Ennek alapján az A spektrálfelbontása:

$$A = V\Lambda V^\top\,, \tag{7.0.2}$$

ahol a V ortogonális mátrix oszlopai az A ortonormált sajátvektorai, a Λ diagonális mátrix főátlójában pedig az A sajátértékei állnak.

7.0.2. ábra. Az $\boldsymbol{y}$ vektor merőleges vetülete a V altérre



Szimmetrikus, pozitív szemidefinit mátrix négyzetgyöke. Legyen az A szimmetrikus, pozitív szemidefinit mátrix spektrálfelbontása (7.0.2). Itt a λ_i-k nemnegatívak. Legyen $\sqrt{A} = V\sqrt{\Lambda}V^\top$, ahol

$$\sqrt{\Lambda} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

A $\sqrt{A}$ szimmetrikus, pozitív szemidefinit mátrix az A négyzetgyöke: $A = \sqrt{A}\sqrt{A}$.

Megoldások

1. fejezet

1.1. szakasz

Szövegközi feladatok

1.1.2. Útmutatás. (1) Az igazolandó összefüggések képletei:

$$A + B = B + A, \quad A \cdot B = B \cdot A \text{ (kommutativitás)},$$
$$A + (B + C) = (A + B) + C, \quad A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C \text{ (asszociativitás)},$$
$$A + A = A, \quad A \cdot A = A \text{ (idempotencia)},$$
$$A(B + C) = AB + AC, \; A + (BC) = (A + B) \cdot (A + C) \text{ disztributivitás.}$$

(2) A de Morgan-féle azonosságok tetszőlegesen sok eseményre:

$$\overline{\left(\bigcup_i A_i\right)} = \bigcap_i \overline{A}_i, \qquad \overline{\left(\bigcap_i A_i\right)} = \bigcup_i \overline{A}_i.$$

A feladatok megoldásához jó támogatást kapunk, ha az eseményeket Venn-diagrammal szemléltetjük, a valószínűségüket a területükként fogjuk fel, miközben az egész Ω területét 1-nek választjuk.

1.1.7. Útmutatás. Alkalmazzuk rendre az $\Omega = \Omega + \emptyset$, $A = A \cdot B + (A - B)$ és $A + B = A + (B - A)$ diszjunkt felbontásokat.

Szakasz-végi feladatok

1. Megoldás:

$$(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A$$
$$(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup B) = A \cap B$$
$$(A \cup B) \cap (B \cup C) = B \cup (A \cap C)$$

4. c) Útmutatás. Alkalmazzuk az (1.1.5) formulát többször.

5. Megoldás. a) $3^6/6^6$, b) $1 - 5^6/6^6 \approx 0,665$ (!).

6. Megoldás. $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6/10^5 = 0.3024$.

7. Megoldás. $n!/n^n$.

8. Megoldás. $6!/6^6 = 0,01543$ (!)

9. Megoldás. $1/n$.

10. Megoldás. $\binom{9}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^6\frac{1}{6}$.

11. Megoldás. $p_1 = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6$, $p_2 = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{12} - 12\left(\frac{5}{6}\right)^{11} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)$.

12. Megoldás. $\frac{8!}{\binom{64}{8}}$.

1.2. szakasz.

Szakasz-végi feladatok

2. Útmutatás. Vizsgáljuk két szomszédos tag nagyságviszonyát! Kiderül, hogy a p_k valószínűségek növekvőek, amíg k eléri $[\lambda]$-t (egészrész).

Megoldás. A maximális tag a $[\lambda]$-edik, ha λ nem egész, ill. két maximális tag van, ha λ egész: a λ-adik és a $(\lambda-1)$-edik.

4. Megoldás.

$$P(\xi \leq r) = \sum_{k=0}^{r-1} \frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^k = 1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^r.$$

5. Útmutatás. Szemléltessünk Venn-diagrammal. a) $B_n^\circ = B_n - B$ halmazsorozat csökkenő, és $\cap_{n=1}^{\infty} B_n^\circ = \emptyset$.

b) Csökkenő halmazsorozat tagjainak komplementeréből álló sorozat növekvő.

1.3. szakasz

Szakasz-végi feladatok

1. Megoldás. $\binom{N-M-3}{n-m-3}\binom{M}{m}/\binom{N-3}{n-3}$.

4. Megoldás. Az eredeti választás esetén 1/3, ha megváltoztatja a választását, úgy 2/3 eséllyel nyeri a csokit.

5. Megoldás. a) $(\frac{30!}{10!10!10!} + 2\frac{30!}{12!10!8!})/\frac{32!}{12!10!10!} \approx 0,31$; b) $2 \cdot \binom{18}{8}/\binom{20}{10} = \frac{9}{19}$.

6. Útmutatás. Alkalmazzuk a 2. gyakorlat eredményét! Megoldás: $\frac{z}{z+s} \cdot \frac{z+u}{z+s+u+e} \cdot \frac{z+2u}{z+s+2u+2e} \cdot \frac{s+3e}{z+s+3u+3e}$.

8. Megoldás. $2 \cdot \frac{5}{10} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{7}{10} \cdot \frac{8}{10} \cdot \frac{9}{10}$.

9. Útmutatás. Jelölje ξ_1, ξ_2, ξ_3 az első tartályban lévő golyók számát az 1., a 2., ill. a 3. lépés után. Nyilván

$$P(\xi_1 = m+1) = \frac{k-m}{k}, \qquad P(\xi_1 = m-1) = \frac{m}{k}.$$

A teljes valószínűség tétele alapján:

$$P(\xi_2 = m+2) = \frac{k-m-1}{k} \cdot \frac{k-m}{k},$$

$$P(\xi_2 = m-2) = \frac{m-1}{k} \cdot \frac{m}{k},$$

$$P(\xi_2 = m) = \frac{m+1}{k} \cdot \frac{k-m}{k} + \frac{k-m+1}{k} \cdot \frac{m}{k}.$$

10. Megoldás. a) $1 - [\frac{1}{6}\frac{5}{6} + \frac{1}{6}(\frac{5}{6})^2 + \cdots + \frac{1}{6}(\frac{5}{6})^6] \approx 0,45$; b) $\approx 0,1$.

1.4. szakasz

Szövegközi feladatok

1.4.4. b) Megoldás. Ha A független minden eseménytől, akkor önmagától is független, így $P(A) = P(AA) = P(A)P(A)$. Megfordítva, ha $P(A) = 0$, akkor $P(AB) = 0 = P(A)P(B)$. Ha $P(A) = 1$, akkor $P(\overline{A}) = 0$, így - az a) feladat alapján - A független minden eseménytől.

1.4.6. a) Legyen $P(C) = 0$, míg A és B két nem független esemény.

b) Első megoldás. Dobjunk fel egy érmét kétszer egymás után. Legyen $A = \{IF, II\}, B = \{FI, II\}, C = \{II, FF\}$.

Második megoldás. Három szabályos érme feldobásakor legyen

$$A = \{III, \quad FII, \quad IFF, \quad FFF\},$$
$$B = \{IIF, \quad IFI, \quad FFI, \quad FFF\},$$
$$C = \{IIF, \quad IFI, \quad FIF, \quad FFF\}.$$

Ekkor

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}, P(ABC) = \frac{1}{8},$$
$$P(AB) = \frac{1}{8}, P(AC) = \frac{1}{8}, P(BC) = \frac{3}{8}.$$

Szakasz-végi feladatok

3. Megoldás. X nyerését jelentő játszmasorozatok:

$$XX, \quad XZYXX, \quad XZYXZYXX, \dots; YZXX, \quad YZXYZXX, \dots,$$
$$P(X \quad \text{nyer}) = P(Y \quad \text{nyer}) = \frac{5}{14}.$$

4. Útmutatás. Alkalmazzuk a Borel-Cantelli-lemmát.

6. Megoldás. $\frac{1-p^2}{2-p^2}$.

7. Megoldás. a) 90%, b) 10%

9. Megoldás. $\pi/6$.

10. Megoldás. $1-(1-\sqrt{x^2-1})^2$, ha $1 < x \le \sqrt{2}$.

2. fejezet

2.1. szakasz

Szövegközi feladat

2.1.12. Útmutatás. Összegezzünk a részrendszerben nem szereplő indexekre (2.1.4) feltételben.

Szakasz-végi feladatok

2. Megoldás. Legyen $\Omega = [0,1)$ és $\xi(\omega) = x_i$, ha $\omega \in [\sum\limits_{k=1}^{i-1} p_k, \sum\limits_{k=1}^{i} p_k)$.

4. Megoldás. $P(\xi = k) = \binom{90-k}{4}/\binom{90}{5}, k = 1, 2, \dots, 86$.

5. Megoldás.

$$P(\xi = k+m \quad | \quad \xi > k) = \frac{P(\xi = k+m)}{P(\xi > k)} =$$
$$= \frac{p(1-p)^{k+m-1}}{\sum_{i=k+1}^{\infty} p(1-p)^{i-1}} = p(1-p)^{m-1} = P(\xi = m).$$

6. Megoldás. Legyen $G(k) = P(\xi > k), k = 1, 2, \dots$ Ekkor a

$$P(\xi = k+m \quad | \quad \xi > k) = P(\xi = m)$$

egyenleteket összegezve $m > \ell$-re,

$$G(k+\ell) = G(k)G(\ell), k, \ell = 1, 2, \dots$$

adódik. Innen a $G(1) = q$ definícióval $G(2) = q^2, G(3) = q^3$. Ebből

$$P(\xi = 1) = 1-q, \ P(\xi = 2) = q - q^2 = q(1-q), \dots,$$
$$P(\xi = k) = q^{k-1} - q^k = q^{k-1}(1-q), \dots.$$

$p = 1-q$ jelöléssel a geometriai eloszlás szokásos képlete adódik. Nyilván $0 \leq q \leq 1$. $q = 0$ esetén az 1 pontba koncentrált eloszlást, míg $q = 1$ esetén a ∞-be koncentrált nem valódi eloszlást kapjuk.

7. Megoldás. A jó termékekre

$$P(\xi = k) = p^k q, \quad k = 0, 1, 2\dots,$$

a selejt szériákra

$$P(\xi = k+1) = q^k p, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

2.2. szakasz

Szakasz-végi feladatok

1. Útmutatás. A lottó játék, illetve a biztosítás adhat ötletet.

2. Megoldás. $\mathbb{E}\xi = 10.5$.

4. Útmutatás. Az

$$\mathbb{E}\xi = \sum_{i=1}^{\infty} p_i x_i$$

összeg minden tagja nemnegatív, az összeg azonban mégis 0.

8 Megoldás.

$$\mathbb{E}\xi = \sum_k k \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \frac{Mn}{N} \sum_k \frac{\binom{M-1}{k-1}\binom{N-1-(M-1)}{n-1-(k-1)}}{\binom{N-1}{n-1}} = \frac{Mn}{N}.$$

2.3. szakasz

Szakasz-végi feladatok

1. Útmutatás. A számolás analóg a Poisson-eloszláséval.

2. Megoldás.

$$\mathbb{E}\xi^2 = \sum_k \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} \cdot [k(k-1)+k] =$$

$$= \frac{M(M-1)n(n-1)}{N(N-1)} \sum_k \frac{\binom{M-2}{k-2}\binom{N-2-(M-2)}{n-2-(k-2)}}{\binom{N-2}{n-2}} + \frac{Mn}{N} =$$

$$= \frac{M(M-1)n(n-1)}{N(N-1)} + \frac{Mn}{N}.$$

3. Megoldás.

$$\mathbb{E}\xi_1^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} \cdot p \cdot k^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} \cdot pk(k-1) + \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} \cdot p \cdot k.$$

A

$$\frac{2}{(1-x)^3} = \left(\frac{x}{1-x}\right)'' = \left(\sum_{k=1}^{\infty} x^k\right)'' = \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)x^{k-2}, \quad 0 < x < 1$$

összefüggést használva $x = 1-p$ választással

$$\mathbb{E}\xi_1^2 = p(1-p)\frac{2}{p^3} + \frac{1}{p} = \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{1}{p},$$

$$\mathbb{D}^2\xi_1 = \mathbb{E}\xi_1^2 - (\mathbb{E}\xi_1)^2 = \frac{1-p}{p^2}.$$

4. Megoldás. $\mathbb{E}\xi = 1/2, \mathbb{D}^2\xi = 5/12$.

6. Megoldás. $\mathbb{E}\xi = 3/11, \mathbb{D}^2\xi = 2/121$.

2.4. szakasz

1. Megoldás.

$$P(\xi = 1, \eta = 1) = \frac{1}{36},\ P(\xi = 1, \eta = k) = \frac{1}{36}\ (2 \le k \le 6)$$

$$P(\xi = 2, \eta = 2) = \frac{2}{36},\ P(\xi = 2, \eta = k) = \frac{1}{36}\ (3 \le k \le 6)$$

$$\vdots$$

$$P(\xi = 6, \eta = 6) = \frac{6}{36}.$$

$$P(\eta = 1) = \frac{1}{36},\ P(\eta = 2) = \frac{3}{36},\ \ldots,\ P(\eta = 6) = \frac{11}{36}.$$

$$\mathbb{E}\eta = 1 \cdot \frac{1}{36} + 2 \cdot \frac{3}{36} + \cdots + 6 \cdot \frac{11}{36} = \frac{161}{36}.$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\xi \cdot \eta) = &\left(1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{36} + 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{36} + \cdots + 1 \cdot 6 \cdot \frac{1}{36}\right) + \\ &+ \left(2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{36} + 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{36} + \cdots + 2 \cdot 6 \cdot \frac{1}{36}\right) + \\ &\cdots + 6 \cdot 6 \cdot \frac{6}{36} = \frac{1}{36}(21 + 44 + 72 + 108 + 155 + 216) = \frac{616}{36}.\end{aligned}$$

5. Útmutatás. Legyen

$$\xi' = |\xi|/\sqrt{\mathbb{E}\xi^2},$$

illetve

$$\eta' = |\eta|/\sqrt{\mathbb{E}\eta^2}.$$

Fejtsük ki a $0 \le \mathbb{E}(\xi' \pm \eta')^2$ jobb oldalát!

6. Útmutatás. Lásd a 2.4.8 példát.

2.5. szakasz

Szakasz-végi feladatok

1. Útmutatás. Számítsuk ki a $\prod_{i=1}^{r}(1+x)^{Ni} = (1+x)^N$ azonosság mindkét oldalán x^n együtthatóját!

2. Megoldás. $P_k = (M/(N-k)) \prod_{j=0}^{k-1}((N-M-j)/(N-j))$, $k = 0, 1, \ldots, N-M$.

3. Útmutatás. $P(\xi = k)/P(\xi = k-1) = \frac{(n-k+1)p}{k(1-p)} \gtreqless 1$ vizsgálatával éppen az eloszlás növekvő, ill. csökkenő szakasza különíthető el.

4. Megoldás. $p_{n,N} = \binom{M}{n}\binom{N-M}{M-n}/\binom{N}{M}$; $N_{(n)} = [M^2/n]$.

6. Megoldás. 1/27.

13. Útmutatás. Feltételezhetjük, hogy a hibák száma egy x cm-es darabban Poisson-eloszlású. A paraméter $\lambda = x/200$. Annak valószínűsége, hogy egy x cm-es

szálban nincs hiba: $\lambda^0 e^{-\lambda}/0! = p_0$. Viszont n darab x cm-es szálban átlagosan np_0 hibátlan van (a binomiális eloszlás várható értéke).

3. fejezet

3.1. szakasz

Szövegközi feladat

3.1.18. b) Útmutatás. Legyen $F(x) = 1/2$ egy szakaszon.

c) Útmutatás. Legyen $F(x)$ olyan, hogy $F(x_0) < 1/2$ és $F(x_0 + 0) > 1/2$ valamely x_0-ra.

Szakasz-végi feladatok

1. Útmutatás. Ellenőrizzük, hogy teljesülnek-e az eloszlásfüggvények jellemző tulajdonságai.

3. Megoldás. Legyen $\xi(\omega) = 0$, ha $\omega \in [0, 1/2)$, és $\xi(\omega) = 1$, ha $\omega \in [1/2, 1]$; másrészt legyen $\eta(\omega) = 0$, ha $\omega \in [1/2, 1]$, és $\eta(\omega) = 1$, ha $\omega \in [0, 1/2)$. Ekkor ξ és η eloszlása megegyezik.

4. Útmutatás. Nyilván $0 < \eta < 1$. Továbbá, $0 < x < 1$-re

$$F_\eta(x) = P(\eta < x) = P(e^{-\xi} < x) = P(-\xi < \ln x) =$$

$$= P(\xi > -\ln x) = 1 - F_\xi(-\ln x) = \cdots = x^\lambda.$$

7. Megoldás.

$$P(F(\xi) < x) = P(\xi < F^{-1}(x)) = F(F^{-1}(x)) = x,$$

ha $x \in (0, 1)$.

8. Megoldás. $F_\xi(x) = P(\xi < x) = P(\xi^2 < x^2) = x^2$, ha $0 < x < 1$.

10. Megoldás. $F(x) = 1 - e^{-x}, x > 0$, meredeksége az origótól távolodva csökken. Így a keresett intervallum alsó végpontja 0, a felső $\ln 2$.

3.2. szakasz

Szakasz-végi feladatok

2. Útmutatás: ellenőrizzük, hogy teljesülnek-e a sűrűségfüggvények jellemző tulajdonságai.

4. Megoldás. $f_\eta(y) = e^{-y} + y^{-2}e^{-1/y}$, ha $0 < y \leq 1$.

5. Megoldás. $f_\eta(y) = (2y)^{-1}$, ha $y \in [e^{-1}, e]$.

8. Megoldás. Maximumhely: m, inflexiós pont: $m \pm \sigma$.

9. Útmutatás. Ha $\xi \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, akkor $\eta = (\xi - m)/\sigma$ standard normális eloszlású. Így elegendő meghatározni $P(\eta \in [-k, k])$-t $(k = 1, 2, 3)$. Viszont $P(\eta \in [-k, k]) = \Phi(k) - \Phi(-k) = 2\Phi(k) - 1$ a standard normális eloszlás szimmetriája miatt, ahol Φ a standard normális eloszlásfüggvény. Φ táblázatából a keresett három valószínűség rendre 0.6826; 0.9544; 0.9972.

10. Útmutatás. A görbe „magasabb” része alatti terület nagyobb.

3.3. szakasz

Szakasz-végi feladatok

1. Megoldás. $\mathbb{E}\xi = 1/4, \mathbb{D}^2\xi = 7/144$.

2. Megoldás. $\mathbb{E}\xi = 0, \mathbb{D}^2\xi = 2$.

4. Megoldás. $\mathbb{E}\xi = \frac{\pi}{2} - 1$, $\mu(\xi) = \pi/6$.

5. Megoldás. $\mu(\xi) = 1/\sqrt[3]{2}$, $\mathbb{E}\xi = 3/4$ és $\mathbb{D}^2\xi = 3/80$.

3.4. szakasz

Szakasz-végi feladatok

1. Útmutatás. Az eloszlásfüggvény

$$F(z) = P(\xi \cdot \eta < z) = \int \int_{xy<z} f_{\xi,\eta}(x,y)\,dx\,dy = \int \int \chi_{\{xy<z,\,0<x<1,\,0<y<1\}}\,dx\,dy,$$

ahol χ az indikátor függvény, $z \in (0,1]$. Felrajzolva a fenti kettős integrál által reprezentált területet, $F(z) = z - z\ln z (0 < z \leq 1)$ adódik.

2. Megoldás.

$$f(x) = [8/(3\pi)](\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1/4 - x^2}),$$

ha $0 < x < 1/2$;

$$f(x) = [8/(3\pi)]\sqrt{1-x^2},$$

ha $1/2 < x < 1$; $f(x) = 0$, ha $x > 1$; és f szimmetrikus (azaz páros függvény).

6. Útmutatás. Induljunk ki az

$$\mathbb{E}(\xi + \eta) = \int \int (x+y) f(x,y)\,dx\,dy$$

összefüggésből, és vegyük figyelembe a marginális sűrűségfüggvény alakját!

7. Megoldás. Nem függetlenek.

3.5. szakasz

Szövegközi feladat

3.5.11. Útmutatás. Ha $\boldsymbol{\eta} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{m}, D)$ koordinátái korrelálatlanok, akkor D diagonális alakú, így D^{-1} is. Ezért a vele képzett kvadratikus forma négyzetösszeg, tehát $f_{\boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{y})$ szorzattá bomlik:

$$f_{\boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{y}) = \prod_{i=1}^{n} f_i(y_i)\,.$$

Könnyen látható, hogy ilyen esetben $f_i(y_i)$, konstans szorzótól eltekintve, nem lehet más, mint η_i sűrűségfüggvénye. Tehát η_i-k függetlenek.

Szakasz-végi feladatok

1. Útmutatás.

$$P(\rho^2 < \xi \cdot \eta) = \int \int \int\limits_{[0,1]^3 \cap \{z^2 < xy\}} 1\,dx\,dy\,dz = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \int\limits_0^{\sqrt{xy}} 1\,dz\,dx\,dy\,.$$

2. Útmutatás. $W = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}$ eloszlásfüggvénye:

$$F(w) = \int \int \int_{x^2+y^2+z^2 \leq w^2} (2\pi)^{-3/2} \exp\{-[x^2+y^2+z^2]/2\}\,dx\,dy\,dz\,.$$

Polárkoordinátákra térve:

$$F(w) = \sqrt{2/\pi} \int\limits_0^w r^2 \exp[-r^2/2]\,dr$$

előállítást kapjuk. (Másik megoldás adódik χ_3^2-ból.)

3. Útmutatás. $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$-re

$$\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{c}^\top (A\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{m}) = (\boldsymbol{c}^\top A)\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{m},$$

ahol $\boldsymbol{\xi}$ standard normális, azaz komponensei független (standard) normálisak. Innen azonnal adódik, hogy $\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{\eta}$ független normálisak összege, így maga is normális.

3.6. szakasz

Szakasz-végi feladatok

2. Megoldás: $V \geq 3/8$.

3. Megoldás: $\overline{\xi} \sim \mathcal{N}(0, 1/16)$, $p \leq 1/16$.

3.7. szakasz

Szövegközi feladat

3.7.5. Útmutatás.

$$\forall \varepsilon > 0 - \text{ra } P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\varepsilon\sqrt{n/pq}}^{\varepsilon\sqrt{n/pq}} e^{-x^2/2} dx \to 0, \quad \text{ha } n \to \infty.$$

4. fejezet

4.1. szakasz

Szakasz-végi feladatok

2. Megoldás.

$$f_2(z) = \begin{cases} z, & \text{ha} \quad 0 \leq z \leq 1\,, \\ 2 - z, & \text{ha} \quad 1 \leq z \leq 2\,, \end{cases}$$

és $[0, 2]$-n kívül $f_2(z) = 0$.

$$f_3(z) = \begin{cases} z^2/2, & \text{ha} \quad 0 \leq z \leq 1\,, \\ -z^2 + 3z - 1.5, & \text{ha} \quad 1 \leq z \leq 2\,, \\ z^2/2 - 3z + 4.5, & \text{ha} \quad 2 \leq z \leq 3\,, \end{cases}$$

és $[0, 3]$-n kívül $f_3(z) = 0$.

4.2. szakasz

Szakasz-végi feladatok

1. Útmutatás. (a) Használjuk a feltételes valószínűség definícióját!

A (b) részben a $h(t) = 1 - F_\xi(t)$ monoton csökkenő függvényre Cauchy-típusú függvényegyenletet kapunk: $h(t + s) = h(t) + h(s), t, s \geq 0$. Ennek megoldása $h(t) = e^{-\lambda t}, t \geq 0, (\lambda > 0)$ alakú.

2. Megoldás.

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{\lambda x} & x \leq 0, \\ 1 - \frac{1}{2} e^{-\lambda x}, & x > 0. \end{cases}$$

4.4. szakasz

Szakasz-végi feladatok

2. Útmutatás. Lássuk be, hogy $\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{\zeta}$ egydimenziós normális.

3. Megoldás. ξ sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x, y)\, dy =$$

$$\frac{1}{2\pi}\left(\sqrt{2}e^{-\frac{x^2}{2}} - 2e^{-x^2}\right)\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\,dy + \frac{1}{2\pi}\sqrt{2}e^{-x^2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy =$$
$$\frac{1}{2\pi}\left(\sqrt{2}e^{-\frac{x^2}{2}} - 2e^{-x^2}\right)\sqrt{\pi} + \frac{1}{2\pi}\sqrt{2}e^{-x^2}\sqrt{2\pi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\,.$$

Így ξ standard normális eloszlású. Hasonlóan η is az. Ezért mindkét várható érték 0. A kovariancia:

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta) = \mathbb{E}\xi\eta = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyh(x,y)\,dx\,dy = 0\,,$$

mert $h(x,y)$ mindkét változóban páros. Ha ξ,η együttesen normális eloszlású lenne, akkor a korrelálatlanságból következne a függetlenség. Ezért az együttes sűrűségfüggvény

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$$

lenne.

Ez egyben korrelálatlan, de nem független abszolút folytonos eloszlásokra is példa.

4.5. szakasz

Szakasz-végi feladatok

1. Útmutatás. Jelölje F_n az η_n standardizáltjának eloszlásfüggvényét, Φ pedig a standard normális eloszlásfüggvényt. A 4.5.4 Tétel azt jelenti, hogy $F_n \Longrightarrow \Phi$. Mivel Φ folytonos, így a konvergencia egyenletes: $\sup_x |F_n(x) - \Phi(x)| \to 0, (n \to \infty)$. Ebbe a relációba $x = (y-n)/\sqrt{2n}$-et helyettesítve kapjuk, hogy η_n eloszlásfüggvényének és $\mathcal{N}(n, 2n)$ eloszlásfüggvényének a különbsége 0-hoz tart.

2. Útmutatás. Ha $\xi \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, akkor

$$\mathbb{E}\xi^2 = \sigma^2 + m^2, \quad \mathbb{D}\xi^2 = 2\sigma^4 + 4\sigma^2 m^2$$

(ez utóbbit a standard normálisra visszavezetve kaphatjuk). Ezután alkalmazzuk $\chi_n^2(\lambda)$ definícióját!

5. fejezet

5.1. szakasz

Szakasz-végi feladatok

1. Megoldás.

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|F_n^*(x) - F(x)| = \max_i \max\{|F_n^*(x_i) - F(x)|,\ |F_n^*(x_i+0) - F(x_i)|\}.$$

ahol $x_1,\dots,x_n$ a minta realizáció F eloszlásfüggvényű sokaságból.

2. Megoldás.

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|F_n^*(x) - G_m^*(x)| = \max_i \max\{|F_n^*(x_i) - G_m^*(x_i)|,\ |F_n^*(x_i+0) - G_m^*(x_i+0)|\},$$

ahol $x_1,\dots,x_n$ a minta realizáció F eloszlásfüggvényű sokaságból.

4. Útmutatás. Ha X $[0,1]$-en egyenletes eloszlású, akkor $\mathbb{E}X = 1/2$ és $\mathbb{D}^2X = 1/12$, így eloszlása „közel van” $\mathcal{N}(1/2, 1/12)$-höz.

5. Útmutatás. b) Ha X_n binomiális eloszlású n és p paraméterrel, akkor $\mathbb{E}X_n = np$, $\mathbb{D}^2X_n = np(1-p)$ és a központi határeloszlás tételből $(X_n - np)/\sqrt{np(1-p)}$ eloszlása $\mathcal{N}(0,1)$-hez tart. Azaz X_n aszimptotikusan $\mathcal{N}(np, np(1-p))$ eloszlású.

5.2. szakasz

Szakasz-végi feladatok

1. Megoldás.

$$\overline{x} = 37 + \frac{1}{7}(02. - 0.2 + 0.9 - 0.9 + 0.3 + 0.1 - 0.3) = 36.93$$

6. fejezet

6.1. szakasz

Szakasz-végi feladatok

2. Megoldás. A loglikelihood függvény

$$\log L(x_1, \dots x_n; a, p) = n \log p + np \log a - (p+1) \sum_{i=1}^{n} \log x_i,$$

ha $a \leq x_1^*$ és $-\infty$ egyébként. $\log L$ nem differenciálható az $a = x_1^*$ helyen, azonban látható, hogy p rögzítése után $\log L$ maximumát az x_1^* helyen veszi fel, így $\widehat{a} = X_1^*$. A

$$\log L(x_1, \dots, x_n; x_1^*, p) = n \log p + np \log x_1^* - (p+1) \sum_{i=1}^{n} \log x_i$$

függvény viszont már differenciálható, így megoldva a

$$\frac{n}{p} + n \log x_1^* - \sum_{i=1}^{n} \ln x_i = 0$$

likelihood egyenletet a $\widehat{p} = 1/(\overline{\log X} - \log X_1^*)$ becslést kapjuk.

6.2. szakasz

Szakasz-végi feladatok

1. Megoldás. Jelölje X valószínűségi változó a levágott cső hosszát. A hipotézis:

$$H_0 : \mathbb{E}X = 1200, H_1 : \mathbb{E}X \neq 1200.$$

Kétoldali u-próbát végzünk. Az adatokból $\overline{x} = 1197$ és $|u| = 4$ adódik. A 0.05 terjedelmű kritikus tartomány a következő:

$$C_1 = \{(x_1, \dots, x_n) : |u| \geq 1.96\}.$$

A nullhipotézist tehát 95%-os szinten el kell vetnünk.

2. Megoldás.

$$H_0 : \mathbb{E}X = \mathbb{E}Y,$$
$$H_1 : \mathbb{E}X \neq \mathbb{E}Y;$$

$\overline{x} = 0.1672$, $\overline{y} = 0.1683$, $n_1 = 9$, $n_2 = 16$, $\sigma = 0.0012$, $\alpha = 0.08$. Kétmintás u-próbát végezhetünk. A próbastatisztika értékére $|u| = 2.2$ adódik. $\Phi(u_\alpha) = 0.96$, $u_\alpha = 1.75$. A kritikus tartomány tehát:

$$C_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1, & \dots, & x_{n_1} \\ y_1, & \dots, & y_{n_2} \end{pmatrix} : |u| \geq 1.75 \right\}.$$

A minta alapján a várható értékek egyenlőségét el kell vetni.

Táblázatok

7.0.3. ábra.

I. táblázat. A standard normális eloszlás eloszlásfüggvényének táblázata

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0.00	0.5000	0.40	0.6554	0.80	0.7881	1.20	0.8849
0.01	0.5040	0.41	0.6591	0.81	0.7910	1.21	0.8869
0.02	0.5080	0.42	0.6628	0.82	0.7939	1.22	0.8888
0.03	0.5120	0.43	0.6664	0.83	0.7967	1.23	0.8907
0.04	0.5160	0.44	0.6700	0.84	0.7995	1.24	0.8925
0.05	0.5199	0.45	0.6736	0.85	0.8023	1.25	0.8944
0.06	0.5239	0.46	0.6772	0.86	0.8051	1.26	0.8962
0.07	0.5279	0.47	0.6808	0.87	0.8078	1.27	0.8980
0.08	0.5319	0.48	0.6844	0.88	0.8106	1.28	0.8997
0.09	0.5359	0.49	0.6879	0.89	0.8133	1.29	0.9015
0.10	0.5398	0.50	0.6915	0.90	0.8159	1.30	0.9032
0.11	0.5438	0.51	0.6950	0.91	0.8186	1.31	0.9049
0.12	0.5478	0.52	0.6985	0.92	0.8212	1.32	0.9066
0.13	0.5517	0.53	0.7019	0.93	0.8238	1.33	0.9082
0.14	0.5557	0.54	0.7054	0.94	0.8264	1.34	0.9099
0.15	0.5596	0.55	0.7088	0.95	0.8289	1.35	0.9115
0.16	0.5636	0.56	0.7123	0.96	0.8315	1.36	0.9131
0.17	0.5675	0.57	0.7157	0.97	0.8340	1.37	0.9147
0.18	0.5714	0.58	0.7190	0.98	0.8365	1.38	0.9162
0.19	0.5753	0.59	0.7224	0.99	0.8389	1.39	0.9177
0.20	0.5793	0.60	0.7257	1.00	0.8413	1.40	0.9192
0.21	0.5832	0.61	0.7291	1.01	0.8438	1.41	0.9207
0.22	0.5871	0.62	0.7324	1.02	0.8461	1.42	0.9222
0.23	0.5910	0.63	0.7357	1.03	0.8485	1.43	0.9236
0.24	0.5948	0.64	0.7389	1.04	0.8508	1.44	0.9251
0.25	0.5987	0.65	0.7422	1.05	0.8531	1.45	0.9265
0.26	0.6026	0.66	0.7454	1.06	0.8554	1.46	0.9279
0.27	0.6064	0.67	0.7486	1.07	0.8577	1.47	0.9292
0.28	0.6103	0.68	0.7517	1.08	0.8599	1.48	0.9306
0.29	0.6141	0.69	0.7549	1.09	0.8621	1.49	0.9319
0.30	0.6179	0.70	0.7580	1.10	0.8643	1.50	0.9332
0.31	0.6217	0.71	0.7611	1.11	0.8665	1.51	0.9345
0.32	0.6255	0.72	0.7642	1.12	0.8686	1.52	0.9357
0.33	0.6293	0.73	0.7673	1.13	0.8708	1.53	0.9370
0.34	0.6331	0.74	0.7704	1.14	0.8729	1.54	0.9382
0.35	0.6368	0.75	0.7734	1.15	0.8749	1.55	0.9394
0.36	0.6406	0.76	0.7764	1.16	0.8770	1.56	0.9406
0.37	0.6443	0.77	0.7794	1.17	0.8790	1.57	0.9418
0.38	0.6480	0.78	0.7823	1.18	0.8810	1.58	0.9429
0.39	0.6517	0.79	0.7852	1.19	0.8830	1.59	0.9441

7.0.4. ábra.

I. táblázat. (A standard normális eloszlás eloszlásfüggvényének táblázata, folytatás)

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1.60	0.9452	1.85	0.9678	2.20	0.9861	2.70	0.9965
1.61	0.9463	1.86	0.9686	2.22	0.9868	2.72	0.9967
1.62	0.9474	1.87	0.9693	2.24	0.9875	2.74	0.9969
1.63	0.9484	1.88	0.9699	2.26	0.9881	2.76	0.9971
1.64	0.9495	1.89	0.9706	2.28	0.9887	2.78	0.9973
1.65	0.9505	1.90	0.9713	2.30	0.9893	2.80	0.9974
1.66	0.9515	1.91	0.9719	2.32	0.9898	2.82	0.9976
1.67	0.9525	1.92	0.9726	2.34	0.9904	2.84	0.9977
1.68	0.9535	1.93	0.9732	2.36	0.9909	2.86	0.9979
1.69	0.9545	1.94	0.9738	2.38	0.9913	2.88	0.9980
1.70	0.9554	1.95	0.9744	2.40	0.9918	2.90	0.9981
1.71	0.9564	1.96	0.9750	2.42	0.9922	2.92	0.9982
1.72	0.9573	1.97	0.9756	2.44	0.9927	2.94	0.9984
1.73	0.9582	1.98	0.9761	2.46	0.9931	2.96	0.9985
1.74	0.9591	1.99	0.9767	2.48	0.9934	2.98	0.9986
1.75	0.9599	2.00	0.9772	2.50	0.9938	3.00	0.9987
1.76	0.9608	2.02	0.9783	2.52	0.9941	3.20	0.9993
1.77	0.9616	2.04	0.9793	2.54	0.9945	3.40	0.9997
1.78	0.9625	2.06	0.9803	2.56	0.9948	3.60	0.9998
1.79	0.9633	2.08	0.9812	2.58	0.9951	3.80	0.9999
1.80	0.9641	2.10	0.9821	2.60	0.9953	4.00	1.0000
1.81	0.9649	2.12	0.9830	2.62	0.9956	4.20	1.0000
1.82	0.9656	2.14	0.9838	2.64	0.9959	4.40	1.0000
1.83	0.9664	2.16	0.9846	2.66	0.9961	4.60	1.0000
1.84	0.9671	2.18	0.9854	2.68	0.9963	4.80	1.0000

A standard normális eloszlású valószínűségi változó eloszlásfüggvénye:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \qquad (\Phi(-x) = 1 - \Phi(x))$$

7.0.5. ábra.

II. táblázat. A $\mathcal{X}^2$-próba táblázata

paraméter érték	Valószínűség százalékban $100(1-\varepsilon)$						
	90.0	95.0	97.5	99.0	99.5	99.9	99.95
1	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88	10.83	12.12
2	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60	13.82	15.20
3	6.25	7.81	9.35	11.34	12.84	16.27	17.73
4	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86	18.47	20.00
5	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75	20.52	22.11
6	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55	22.46	24.10
7	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28	24.32	26.02
8	13.36	15.51	17.53	20.09	21.95	26.12	27.87
9	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59	27.88	29.67
10	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19	29.59	31.42
11	17.28	19.68	21.92	24.72	26.76	31.26	33.14
12	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30	32.91	34.82
13	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82	34.53	36.48
14	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32	36.12	38.11
15	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80	37.70	39.72
16	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27	39.25	41.31
17	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72	40.79	42.88
18	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16	42.31	44.43
19	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58	43.82	45.97
20	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00	45.31	47.50
21	29.62	32.67	35.48	38.93	41.40	46.80	49.01
22	30.81	33.92	36.78	40.29	42.80	48.27	50.51
23	32.01	35.17	38.08	41.64	44.18	49.73	52.00
24	33.20	36.42	39.36	42.98	45.56	51.18	53.48
25	34.38	37.65	40.65	44.31	46.93	52.62	54.95
26	35.56	38.89	41.92	45.64	48.29	54.05	56.41
27	36.74	40.11	43.19	46.96	49.64	55.48	57.86
28	37.92	41.34	44.46	48.28	50.99	56.89	59.30
29	39.09	42.56	45.72	49.59	52.34	58.30	60.73
30	40.26	43.77	46.98	50.89	53.67	59.70	62.16

Példa. $\mathbb{P}(\mathcal{X}_2^2 < 4.61) = 0.90.$

7.0.6. ábra.

III. táblázat. Az F-próba kritikus értékei $\varepsilon = 0,05$-re.
f_1 a nagyobb empirikus szórásnégyzetű minta elemszámának,
f_2 pedig a másik minta elemszámának eggyel kisebbített értéke

	f_1					
f_2	1	2	3	4	5	6
1	161.45	199.50	215.71	224.58	230.16	233.99
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45
32	4.15	3.29	2.90	2.67	2.51	2.40
36	4.11	3.26	2.87	2.63	2.48	2.36
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25
100	3.94	3.09	2.70	2.46	2.31	2.19
200	3.89	3.04	2.65	2.42	2.26	2.14
1000	3.85	3.00	2.61	2.38	2.22	2.11

7.0.7. ábra.

III. táblázat. (Az F-próba kritikus értékei $\varepsilon = 0,05$-re, folytatás)

f_2	f_1					
	7	8	9	10	12	16
1	236.77	238.88	240.54	241.88	243.91	246.46
2	19.35	19.37	19.38	19.40	19.41	19.43
3	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.69
4	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.84
5	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.60
6	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.92
7	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.49
8	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.20
9	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	2.99
10	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.83
11	3.01	2.95	2.90	2.85	2.79	2.70
12	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.60
13	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.51
14	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.44
15	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.38
16	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.33
17	2.61	2.55	2.49	2.45	2.38	2.29
18	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.25
19	2.54	2.48	2.42	2.38	2.31	2.21
20	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.18
22	2.46	2.40	2.34	2.30	2.23	2.13
24	2.42	2.36	2.30	2.25	2.18	2.09
26	2.39	2.32	2.27	2.22	2.15	2.05
28	2.36	2.29	2.24	2.19	2.12	2.02
32	2.31	2.24	2.19	2.14	2.07	1.97
36	2.28	2.21	2.15	2.11	2.03	1.93
40	2.25	2.18	2.12	2.08	2.00	1.90
60	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.82
100	2.10	2.03	1.97	1.93	1.85	1.75
200	2.06	1.98	1.93	1.88	1.80	1.69
1000	2.02	1.95	1.89	1.84	1.76	1.65

7.0.8. ábra.

III. táblázat. (Az F-próba kritikus értékei $\varepsilon = 0,05$-re, folytatás)

f_2	f_1					
	20	24	30	50	100	1000
1	248.01	249.05	250.10	251.77	253.04	254.19
2	19.45	19.45	19.46	19.48	19.49	19.49
3	8.66	8.64	8.62	8.58	8.55	8.53
4	5.80	5.77	5.75	5.70	5.66	5.63
5	4.56	4.53	4.50	4.44	4.41	4.37
6	3.87	3.84	3.81	3.75	3.71	3.67
7	3.44	3.41	3.38	3.32	3.27	3.23
8	3.15	3.12	3.08	3.02	2.97	2.93
9	2.94	2.90	2.86	2.80	2.76	2.71
10	2.77	2.74	2.70	2.64	2.59	2.54
11	2.65	2.61	2.57	2.51	2.46	2.41
12	2.54	2.51	2.47	2.40	2.35	2.30
13	2.46	2.42	2.38	2.31	2.26	2.21
14	2.39	2.35	2.31	2.24	2.19	2.14
15	2.33	2.29	2.25	2.18	2.12	2.07
16	2.28	2.24	2.19	2.12	2.07	2.02
17	2.23	2.19	2.15	2.08	2.02	1.97
18	2.19	2.15	2.11	2.04	1.98	1.92
19	2.16	2.11	2.07	2.00	1.94	1.88
20	2.12	2.08	2.04	1.97	1.91	1.85
22	2.07	2.03	1.98	1.91	1.85	1.79
24	2.03	1.98	1.94	1.86	1.80	1.74
26	1.99	1.95	1.90	1.82	1.76	1.70
28	1.96	1.91	1.87	1.79	1.73	1.66
32	1.91	1.86	1.82	1.74	1.67	1.60
36	1.87	1.82	1.78	1.69	1.62	1.56
40	1.84	1.79	1.74	1.66	1.59	1.52
60	1.75	1.70	1.65	1.56	1.48	1.40
100	1.68	1.63	1.57	1.48	1.39	1.30
200	1.62	1.57	1.52	1.41	1.32	1.21
1000	1.58	1.53	1.47	1.36	1.26	1.11

7.0.9. ábra.

IV. táblázat. A t-(Student-) próba kritikus értékei 80% -os (90%-os) , 90% -os (95% -os), 95% -os (97.5% -os), 98% -os (99% -os), 99% -os (99.5% -os) , 99.9% -os (99.95% -os) kétoldali (egyoldali) szintre

szabadsági	Statisztikai biztonság					
fok, f	80%	90%	95%	98%	99%	99.9%
1	3.0777	6.3138	12.7062	31.8205	63.6567	636.6192
2	1.8856	2.9200	4.3027	6.9646	9.9248	31.5991
3	1.6377	2.3534	3.1824	4.5407	5.8409	12.9240
4	1.5332	2.1318	2.7764	3.7469	4.6041	8.6103
5	1.4759	2.0150	2.5706	3.3649	4.0321	6.8688
6	1.4398	1.9432	2.4469	3.1427	3.7074	5.9588
7	1.4149	1.8946	2.3646	2.9980	3.4995	5.4079
8	1.3968	1.8595	2.3060	2.8965	3.3554	5.0413
9	1.3830	1.8331	2.2622	2.8214	3.2498	4.7809
10	1.3722	1.8125	2.2281	2.7638	3.1693	4.5869
11	1.3634	1.7959	2.2010	2.7181	3.1058	4.4370
12	1.3562	1.7823	2.1788	2.6810	3.0545	4.3178
13	1.3502	1.7709	2.1604	2.6503	3.0123	4.2208
14	1.3450	1.7613	2.1448	2.6245	2.9768	4.1405
15	1.3406	1.7531	2.1314	2.6025	2.9467	4.0728
16	1.3368	1.7459	2.1199	2.5835	2.9208	4.0150
17	1.3334	1.7396	2.1098	2.5669	2.8982	3.9651
18	1.3304	1.7341	2.1009	2.5524	2.8784	3.9216
19	1.3277	1.7291	2.0930	2.5395	2.8609	3.8834
20	1.3253	1.7247	2.0860	2.5280	2.8453	3.8495
21	1.3232	1.7207	2.0796	2.5176	2.8314	3.8193
22	1.3212	1.7171	2.0739	2.5083	2.8188	3.7921
23	1.3195	1.7139	2.0687	2.4999	2.8073	3.7676
24	1.3178	1.7109	2.0639	2.4922	2.7969	3.7454
25	1.3163	1.7081	2.0595	2.4851	2.7874	3.7251
26	1.3150	1.7056	2.0555	2.4786	2.7787	3.7066
27	1.3137	1.7033	2.0518	2.4727	2.7707	3.6896
28	1.3125	1.7011	2.0484	2.4671	2.7633	3.6739
29	1.3114	1.6991	2.0452	2.4620	2.7564	3.6594
30	1.3104	1.6973	2.0423	2.4573	2.7500	3.6460
40	1.3031	1.6839	2.0211	2.4233	2.7045	3.5510
50	1.2987	1.6759	2.0086	2.4033	2.6778	3.4960
60	1.2958	1.6706	2.0003	2.3901	2.6603	3.4602
80	1.2922	1.6641	1.9901	2.3739	2.6387	3.4163
100	1.2901	1.6602	1.9840	2.3642	2.6259	3.3905
200	1.2858	1.6525	1.9719	2.3451	2.6006	3.3398
500	1.2832	1.6479	1.9647	2.3338	2.5857	3.3101
∞	1.2816	1.6449	1.9600	2.3263	2.5758	3.2905

7.0.10. ábra.

V. táblázat. A binomiális eloszlás táblázata

$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

		p				
n	k	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
1	0	0.9000	0.8000	0.7000	0.6000	0.5000
	1	0.1000	0.2000	0.3000	0.4000	0.5000
2	0	0.8100	0.6400	0.4900	0.3600	0.2500
	1	0.1800	0.3200	0.4200	0.4800	0.5000
	2	0.0100	0.0400	0.0900	0.1600	0.2500
3	0	0.7290	0.5120	0.3430	0.2160	0.1250
	1	0.2430	0.3840	0.4410	0.4320	0.3750
	2	0.0270	0.0960	0.1890	0.2880	0.3750
	3	0.0010	0.0080	0.0270	0.0640	0.1250
4	0	0.6561	0.4096	0.2401	0.1296	0.0625
	1	0.2916	0.4096	0.4116	0.3456	0.2500
	2	0.0486	0.1536	0.2646	0.3456	0.3750
	3	0.0036	0.0256	0.0756	0.1536	0.2500
	4	0.0001	0.0016	0.0081	0.0256	0.0625
5	0	0.5905	0.3277	0.1681	0.0778	0.0312
	1	0.3281	0.4096	0.3601	0.2592	0.1562
	2	0.0729	0.2048	0.3087	0.3456	0.3125
	3	0.0081	0.0512	0.1323	0.2304	0.3125
	4	0.0005	0.0064	0.0283	0.0768	0.1562
	5	0.0000	0.0003	0.0024	0.0102	0.0312
6	0	0.5314	0.2621	0.1176	0.0467	0.0156
	1	0.3543	0.3932	0.3025	0.1866	0.0938
	2	0.0984	0.2458	0.3241	0.3110	0.2344
	3	0.0146	0.0819	0.1852	0.2765	0.3125
	4	0.0012	0.0154	0.0595	0.1382	0.2344
	5	0.0001	0.0015	0.0102	0.0369	0.0938
	6	0.0000	0.0001	0.0007	0.0041	0.0156
7	0	0.4783	0.2097	0.0824	0.0280	0.0078
	1	0.3720	0.3670	0.2471	0.1306	0.0547
	2	0.1240	0.2753	0.3177	0.2613	0.1641
	3	0.0230	0.1147	0.2269	0.2903	0.2734
	4	0.0026	0.0287	0.0972	0.1935	0.2734
	5	0.0002	0.0043	0.0250	0.0774	0.1641

7.0.11. ábra.

V. táblázat. (A binomiális eloszlás táblázata, folytatás)

n	k	p 0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
	6	0.0000	0.0004	0.0036	0.0172	0.0547
	7	0.0000	0.0000	0.0002	0.0016	0.0078
8	0	0.4305	0.1678	0.0576	0.0168	0.0039
	1	0.3826	0.3355	0.1977	0.0896	0.0312
	2	0.1488	0.2936	0.2965	0.2090	0.1094
	3	0.0331	0.1468	0.2541	0.2787	0.2188
	4	0.0046	0.0459	0.1361	0.2322	0.2734
	5	0.0004	0.0092	0.0467	0.1239	0.2188
	6	0.0000	0.0011	0.0100	0.0413	0.1094
	7	0.0000	0.0001	0.0012	0.0079	0.0312
	8	0.0000	0.0000	0.0001	0.0007	0.0039
9	0	0.3874	0.1342	0.0404	0.0101	0.0020
	1	0.3874	0.3020	0.1556	0.0605	0.0176
	2	0.1722	0.3020	0.2668	0.1612	0.0703
	3	0.0446	0.1762	0.2668	0.2508	0.1641
	4	0.0074	0.0661	0.1715	0.2508	0.2461
	5	0.0008	0.0165	0.0735	0.1672	0.2461
	6	0.0001	0.0028	0.0210	0.0743	0.1641
	7	0.0000	0.0003	0.0039	0.0212	0.0703
	8	0.0000	0.0000	0.0004	0.0035	0.0176
	9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0020
10	0	0.3487	0.1074	0.0282	0.0060	0.0010
	1	0.3874	0.2684	0.1211	0.0403	0.0098
	2	0.1937	0.3020	0.2335	0.1209	0.0439
	3	0.0574	0.2013	0.2668	0.2150	0.1172
	4	0.0112	0.0881	0.2001	0.2508	0.2051
	5	0.0015	0.0264	0.1029	0.2007	0.2461
	6	0.0001	0.0055	0.0368	0.1115	0.2051
	7	0.0000	0.0008	0.0090	0.0425	0.1172
	8	0.0000	0.0001	0.0014	0.0106	0.0439
	9	0.0000	0.0000	0.0001	0.0016	0.0098
	10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0010

7.0.12. ábra.

V. táblázat. (A binomiális eloszlás táblázata, folytatás)

		p				
n	k	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
11	0	0.3138	0.0859	0.0198	0.0036	0.0005
	1	0.3835	0.2362	0.0932	0.0266	0.0054
	2	0.2131	0.2953	0.1998	0.0887	0.0269
	3	0.0710	0.2215	0.2568	0.1774	0.0806
	4	0.0158	0.1107	0.2201	0.2365	0.1611
	5	0.0025	0.0388	0.1321	0.2207	0.2256
	6	0.0003	0.0097	0.0566	0.1471	0.2256
	7	0.0000	0.0017	0.0173	0.0701	0.1611
	8	0.0000	0.0002	0.0037	0.0234	0.0806
	9	0.0000	0.0000	0.0005	0.0052	0.0269
	10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0007	0.0054
	11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0005
12	0	0.2824	0.0687	0.0138	0.0022	0.0002
	1	0.3766	0.2062	0.0712	0.0174	0.0029
	2	0.2301	0.2835	0.1678	0.0639	0.0161
	3	0.0852	0.2362	0.2397	0.1419	0.0537
	4	0.0213	0.1329	0.2311	0.2128	0.1208
	5	0.0038	0.0532	0.1585	0.2270	0.1934
	6	0.0005	0.0155	0.0792	0.1766	0.2256
	7	0.0000	0.0033	0.0291	0.1009	0.1934
	8	0.0000	0.0005	0.0078	0.0420	0.1208
	9	0.0000	0.0001	0.0015	0.0125	0.0537
	10	0.0000	0.0000	0.0002	0.0025	0.0161
	11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0029
	12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002
13	0	0.2542	0.0550	0.0097	0.0013	0.0001
	1	0.3672	0.1787	0.0540	0.0113	0.0016
	2	0.2448	0.2680	0.1388	0.0453	0.0095
	3	0.0997	0.2457	0.2181	0.1107	0.0349
	4	0.0277	0.1535	0.2337	0.1845	0.0873
	5	0.0055	0.0691	0.1803	0.2214	0.1571
	6	0.0008	0.0230	0.1030	0.1968	0.2095
	7	0.0001	0.0058	0.0442	0.1312	0.2095
	8	0.0000	0.0011	0.0142	0.0656	0.1571
	9	0.0000	0.0001	0.0034	0.0243	0.0873
	10	0.0000	0.0000	0.0006	0.0065	0.0349
	11	0.0000	0.0000	0.0001	0.0012	0.0095
	12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0016
	13	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001

7.0.13. ábra.

V. táblázat. (A binomiális eloszlás táblázata, folytatás)

		p				
n	k	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
14	0	0.2288	0.0440	0.0068	0.0008	0.0001
	1	0.3559	0.1539	0.0407	0.0073	0.0009
	2	0.2570	0.2501	0.1134	0.0317	0.0056
	3	0.1142	0.2501	0.1943	0.0845	0.0222
	4	0.0349	0.1720	0.2290	0.1549	0.0611
	5	0.0078	0.0860	0.1963	0.2066	0.1222
	6	0.0013	0.0322	0.1262	0.2066	0.1833
	7	0.0002	0.0092	0.0618	0.1574	0.2095
	8	0.0000	0.0020	0.0232	0.0918	0.1833
	9	0.0000	0.0003	0.0066	0.0408	0.1222
	10	0.0000	0.0000	0.0014	0.0136	0.0611
	11	0.0000	0.0000	0.0002	0.0033	0.0222
	12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0005	0.0056
	13	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0009
	14	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001

7.0.14. ábra.

VI. táblázat. A Poisson-eloszlás táblázata

$$P(X=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

k	λ				
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0	0.9048	0.8187	0.7408	0.6703	0.6065
1	0.0905	0.1637	0.2222	0.2681	0.3033
2	0.0045	0.0164	0.0333	0.0536	0.0758
3	0.0002	0.0011	0.0033	0.0072	0.0126
4	0.0000	0.0001	0.0003	0.0007	0.0016
5	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002
k	λ				
	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0	0.5488	0.4966	0.4493	0.4066	0.3679
1	0.3293	0.3476	0.3595	0.3659	0.3679
2	0.0988	0.1217	0.1438	0.1647	0.1839
3	0.0198	0.0284	0.0383	0.0494	0.0613
4	0.0030	0.0050	0.0077	0.0111	0.0153
5	0.0004	0.0007	0.0012	0.0020	0.0031
6	0.0000	0.0001	0.0002	0.0003	0.0005
k	λ				
	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
0	0.3012	0.2466	0.2019	0.1653	0.1353
1	0.3614	0.3452	0.3230	0.2975	0.2707
2	0.2169	0.2417	0.2584	0.2678	0.2707
3	0.0867	0.1128	0.1378	0.1607	0.1804
4	0.0260	0.0395	0.0551	0.0723	0.0902
5	0.0062	0.0111	0.0176	0.0260	0.0361
6	0.0012	0.0026	0.0047	0.0078	0.0120
7	0.0002	0.0005	0.0011	0.0020	0.0034
8	0.0000	0.0001	0.0002	0.0005	0.0009
k	λ				
	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0
0	0.1108	0.0907	0.0743	0.0608	0.0498
1	0.2438	0.2177	0.1931	0.1703	0.1494
2	0.2681	0.2613	0.2510	0.2384	0.2240
3	0.1966	0.2090	0.2176	0.2225	0.2240
4	0.1082	0.1254	0.1414	0.1557	0.1680
5	0.0476	0.0602	0.0735	0.0872	0.1008
6	0.0174	0.0241	0.0319	0.0407	0.0504
7	0.0055	0.0083	0.0118	0.0163	0.0216
8	0.0015	0.0025	0.0038	0.0057	0.0081
9	0.0004	0.0007	0.0011	0.0018	0.0027
10	0.0001	0.0002	0.0003	0.0005	0.0008

7.0.15. ábra.

VI. táblázat. (A Poisson-eloszlás táblázata, folytatás)

	λ				
k	4	5	6	7	8
0	0.0183	0.0067	0.0025	0.0009	0.0003
1	0.0733	0.0337	0.0149	0.0064	0.0027
2	0.1465	0.0842	0.0446	0.0223	0.0107
3	0.1954	0.1404	0.0892	0.0521	0.0286
4	0.1954	0.1755	0.1339	0.0912	0.0573
5	0.1563	0.1755	0.1606	0.1277	0.0916
6	0.1042	0.1462	0.1606	0.1490	0.1221
7	0.0595	0.1044	0.1377	0.1490	0.1396
8	0.0298	0.0653	0.1033	0.1304	0.1396
9	0.0132	0.0363	0.0688	0.1014	0.1241
10	0.0053	0.0181	0.0413	0.0710	0.0993
11	0.0019	0.0082	0.0225	0.0452	0.0722
12	0.0006	0.0034	0.0113	0.0263	0.0481
13	0.0002	0.0013	0.0052	0.0142	0.0296
14	0.0001	0.0005	0.0022	0.0071	0.0169
15	0.0000	0.0002	0.0009	0.0033	0.0090
16	0.0000	0.0000	0.0003	0.0014	0.0045
17	0.0000	0.0000	0.0001	0.0006	0.0021
	λ				
k	9	10	11	12	13
0	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.0011	0.0005	0.0002	0.0001	0.0000
2	0.0050	0.0023	0.0010	0.0004	0.0002
3	0.0150	0.0076	0.0037	0.0018	0.0008
4	0.0337	0.0189	0.0102	0.0053	0.0027
5	0.0607	0.0378	0.0224	0.0127	0.0070
6	0.0911	0.0631	0.0411	0.0255	0.0152
7	0.1171	0.0901	0.0646	0.0437	0.0281
8	0.1318	0.1126	0.0888	0.0655	0.0457
9	0.1318	0.1251	0.1085	0.0874	0.0661
10	0.1186	0.1251	0.1194	0.1048	0.0859
11	0.0970	0.1137	0.1194	0.1144	0.1015
12	0.0728	0.0948	0.1094	0.1144	0.1099
13	0.0504	0.0729	0.0926	0.1056	0.1099
14	0.0324	0.0521	0.0728	0.0905	0.1021
15	0.0194	0.0347	0.0534	0.0724	0.0885
16	0.0109	0.0217	0.0367	0.0543	0.0719
17	0.0058	0.0128	0.0237	0.0383	0.0550
18	0.0029	0.0071	0.0145	0.0255	0.0397
19	0.0014	0.0037	0.0084	0.0161	0.0272
20	0.0006	0.0019	0.0046	0.0097	0.0177

7.0.16. ábra.

VI. táblázat. (A Poisson-eloszlás táblázata, folytatás)

k	λ				
	14	15	16	17	18
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	0.0004	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000
4	0.0013	0.0006	0.0003	0.0001	0.0001
5	0.0037	0.0019	0.0010	0.0005	0.0002
6	0.0087	0.0048	0.0026	0.0014	0.0007
7	0.0174	0.0104	0.0060	0.0034	0.0019
8	0.0304	0.0194	0.0120	0.0072	0.0042
9	0.0473	0.0324	0.0213	0.0135	0.0083
10	0.0663	0.0486	0.0341	0.0230	0.0150
11	0.0844	0.0663	0.0496	0.0355	0.0245
12	0.0984	0.0829	0.0661	0.0504	0.0368
13	0.1060	0.0956	0.0814	0.0658	0.0509
14	0.1060	0.1024	0.0930	0.0800	0.0655
15	0.0989	0.1024	0.0992	0.0906	0.0786
16	0.0866	0.0960	0.0992	0.0963	0.0884
17	0.0713	0.0847	0.0934	0.0963	0.0936
18	0.0554	0.0706	0.0830	0.0909	0.0936
19	0.0409	0.0557	0.0699	0.0814	0.0887
20	0.0286	0.0418	0.0559	0.0692	0.0798
21	0.0191	0.0299	0.0426	0.0560	0.0684
22	0.0121	0.0204	0.0310	0.0433	0.0560
23	0.0074	0.0133	0.0216	0.0320	0.0438
24	0.0043	0.0083	0.0144	0.0226	0.0328
25	0.0024	0.0050	0.0092	0.0154	0.0237
26	0.0013	0.0029	0.0057	0.0101	0.0164
27	0.0007	0.0016	0.0034	0.0063	0.0109
28	0.0003	0.0009	0.0019	0.0038	0.0070
29	0.0002	0.0004	0.0011	0.0023	0.0044
30	0.0001	0.0002	0.0006	0.0013	0.0026
31	0.0000	0.0001	0.0003	0.0007	0.0015
32	0.0000	0.0001	0.0001	0.0004	0.0009
33	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0005
34	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002
35	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001

7.0.17. ábra.

VI. táblázat. (A Poisson-eloszlás táblázata, folytatás)

k	λ				
	19	20	21	22	23
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
4	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
5	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
6	0.0004	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000
7	0.0010	0.0005	0.0003	0.0001	0.0001
8	0.0024	0.0013	0.0007	0.0004	0.0002
9	0.0050	0.0029	0.0017	0.0009	0.0005
10	0.0095	0.0058	0.0035	0.0020	0.0012
11	0.0164	0.0106	0.0067	0.0041	0.0024
12	0.0259	0.0176	0.0116	0.0075	0.0047
13	0.0378	0.0271	0.0188	0.0127	0.0083
14	0.0514	0.0387	0.0282	0.0199	0.0136
15	0.0650	0.0516	0.0395	0.0292	0.0209
16	0.0772	0.0646	0.0518	0.0401	0.0301
17	0.0863	0.0760	0.0640	0.0520	0.0407
18	0.0911	0.0844	0.0747	0.0635	0.0520
19	0.0911	0.0888	0.0826	0.0735	0.0629
20	0.0866	0.0888	0.0867	0.0809	0.0724
21	0.0783	0.0846	0.0867	0.0847	0.0793
22	0.0676	0.0769	0.0828	0.0847	0.0829
23	0.0559	0.0669	0.0756	0.0810	0.0829
24	0.0442	0.0557	0.0661	0.0743	0.0794
25	0.0336	0.0446	0.0555	0.0654	0.0731
26	0.0246	0.0343	0.0449	0.0553	0.0646
27	0.0173	0.0254	0.0349	0.0451	0.0551
28	0.0117	0.0181	0.0262	0.0354	0.0452
29	0.0077	0.0125	0.0190	0.0269	0.0359
30	0.0049	0.0083	0.0133	0.0197	0.0275
31	0.0030	0.0054	0.0090	0.0140	0.0204
32	0.0018	0.0034	0.0059	0.0096	0.0147
33	0.0010	0.0020	0.0038	0.0064	0.0102
34	0.0006	0.0012	0.0023	0.0041	0.0069
35	0.0003	0.0007	0.0014	0.0026	0.0045
36	0.0002	0.0004	0.0008	0.0016	0.0029
37	0.0001	0.0002	0.0005	0.0009	0.0018
38	0.0000	0.0001	0.0003	0.0005	0.0011
39	0.0000	0.0001	0.0001	0.0003	0.0006

Irodalomjegyzék

Ash, R. B. (1970), Basic Probability Theory. John Wiley & Sons, New York-London-Sydney-Toronto.

Ash, R. B. (1972), Real Analysis and Probability. Academic Press, New York-London.

Bauer, H. (1996), Probability Theory. Walter de Gruyter, Berlin-New York.

Bognár Jánosné, Mogyoródi József, Prékopa András, Rényi Alfréd, Szász Domokos (1971), Valószínűségszámítás (feladatgyűjtemény). Tankönyvkiadó, Budapest.

Borovkov A. A. (1999), Matematikai statisztika. Typotex, Budapest.

Fazekas István (2009), Valószínűségszámítás. Egyetemi jegyzet. DE, Debrecen.

Fazekas István (szerkesztő) (2009), Bevezetés a matematikai statisztikába. Egyetemi jegyzet. DE, Debrecen.

Feller, W. (1978), Bevezetés a valószínűségszámításba és alkalmazásaiba. Műszaki Könyvkiadó, Budapest.

Gihman, I. I., Szkorohod, A. V. (1975), Bevezetés a sztochasztikus folyamatok elméletébe. Műszaki Könyvkiadó, Budapest.

Giri, N. C. (1993), Introduction to probability and statistics. Marcel Dekker, Inc., New York.

Halmos, P. R. (1984), Mértékelmélet. Gondolat, Budapest.

Járai Antal (1990), Mérték és integrálelmélet. Egyetemi jegyzet, KLTE, Debrecen.

Johnson, N. L., Kotz, S. (1969), Distributions in Statistics. Discrete Distributions. Houghton Miffin, Boston.

Johnson, N. L., Kotz, S. (1970), Distributions in Statistics. Continuous Univariate Distributions. Houghton Miffin, Boston.

Kolmogorov, A. N. (1982), A valószínűségszámítás alapfogalmai. Gondolat, Budapest.

Lukács Ottó (2006), Matematikai statisztika. Műszaki Könyvkiadó, Budapest.

Móri F. Tamás, Székely J. Gábor (1986), Többváltozós statisztikai analízis. Műszaki Könyvkiadó, Budapest.

Obádovics J. Gyula (2009), Valószínűségszámítás és matematikai statisztika. Scolar Kiadó, Budapest.

Prékopa András (1972), Valószínűségelmélet műszaki alkalmazásokkal. Műszaki Könyvkiadó, Budapest.

Reimann József, Tóth Julianna (2008), Valószínűségszámítás és matematikai statisztika. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest.

Rényi Alfréd (1954,1981), Valószínűségszámítás. Tankönyvkiadó, Budapest.

Shiryaev, A. N. (1996), Probability. Springer-Verlag, New York.

Williams, D. W. (2001), Weighing the odds. A course in probability and statistics. Cambridge University Press, Cambridge.