Valós számsorok
Előadásjegyzet

Alapfogalmak és kapcsolatuk

1. Definíció. *Legyen* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *egy valós számsorozat, és*

$$\sigma_1 = x_1, \qquad \sigma_n = x_1 + \cdots + x_n \quad (n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2)\,.$$

A $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozatot a* $\sum x_n$ ***sor részletösszeg-sorozatá****nak hívjuk. Ha a* $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozatnak létezik a határértéke, akkor a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \sigma_n$$

értéket a ***sor összegé****nek nevezzük, és ebben az esetben azt mondjuk, hogy a* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *sor* ***konvergens****.*

2. Definíció. *Legyen* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *egy valós sor. Ha a* $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ *sor konvergens, akkor azt mondjuk, hogy a* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ ***sor abszolút konvergens****. Ha a* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *sor konvergens, de nem abszolút konvergens, akkor a szóban forgó sort* ***feltételesen konvergens****nak hívjuk.*

1. Példa. *A*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

valós sor konvergens és a sor összege 1*. Ugyanis az* $x_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ $(n \in \mathbb{N})$ *jelöléssel* $x_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$ *és*

$$\sigma_n = x_1 + \cdots + x_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 1,$$

így a fenti sor $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *részletösszeg-sorozat konvergens és a határértéke egy, ezért a fenti sor konvergens és*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

2. Példa. *A*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n$$

valós sor divergens. Ugyanis az $x_n = n$ $(n \in \mathbb{N})$ *jelöléssel*

$$\sigma_n = x_1 + \cdots x_n = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \xrightarrow{n\to\infty} +\infty,$$

így a fenti sor $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *részletösszeg-sorozat divergens ezért*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n = +\infty.$$

1. Tétel (Cauchy-féle konvergenciakritérium sorokra). *A* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *valós sor akkor és csakis akkor konvergens, ha bármely* $\varepsilon > 0$ *esetén van olyan* $N(\varepsilon) > 0$ *szám, hogy*

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} x_k\right| < \varepsilon$$

teljesül, amennyiben $n, m > N(\varepsilon)$*.*

2. Tétel (Abszolút konvergencia $\Longrightarrow$ konvergencia). *Ha egy valós számsor abszolút konvergens, akkor konvergens is.*

1. Következmény. *Ha a* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *sor konvergens, akkor* $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$*.*

Műveletek sorokkal

3. Tétel. *Legyenek* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *és* $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ *konvergens sorok és* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Ekkor a* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n + y_n$ *és* $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda x_n$ *sorok is konvergensek és*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(x_n + y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + \sum_{n=1}^{\infty} y_n,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda x_n = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} x_n,$$

valamint

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|.$$

Konvergenciakritériumok

4. Tétel (Összehasonlító kritérium I.). *Legyenek* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *és* $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ *olyan nemnegatív tagú sorok, hogy* $x_n \leqslant y_n$ *teljesül minden* $n \in \mathbb{N}$ *esetén. Ekkor,*

- *ha* $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ *konvergens, akkor* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *is konvergens;*
- *ha* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *divergens, akkor* $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ *is divergens.*

5. Tétel (Cauchy-féle gyökkritérium). *Legyen* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *egy valós sor.*

- *Ha* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|} < 1$, *akkor a* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *sor abszolút konvergens.*
- *Ha* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|} > 1$, *akkor a* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *sor divergens.*

3. Példa. *A*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3^n}$$

sor abszolút konvergens, hiszen, ha $x_n = \dfrac{2n}{3^n}$ $(n \in \mathbb{N})$, *akkor*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{2n}{3^n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{2} \cdot \sqrt[n]{n}}{3} = \frac{1}{3} < 1,$$

így a Cauchy-féle gyökkritérium miatt a fenti valós számsor valóban abszolút konvergens.

6. Tétel (D'Alembert-féle hányadoskritérium). *Legyen* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *egy olyan valós sor, melynek minden tagja nullától különböző.*

- *Ha* $\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} < 1$, *akkor a* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *sor abszolút konvergens.*
- *Ha* $\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} > 1$, *akkor a* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *sor divergens.*

4. Példa. *A*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^n}$$

valós számsor divergens, hiszen, ha $x_n = \dfrac{n!}{5^n}$ $(n \in \mathbb{N})$, *akkor*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{5^{n+1}}}{\frac{n!}{5^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{5} = +\infty > 1,$$

így a D'Alembert-féle hányadoskritérium miatt a fenti sor valóban divergens.

7. Tétel (Cauchy-féle ritkítási kritérium). *Legyen* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *egy nemnegatív tagú, monoton csökkenő valós számsorozat. Ekkor a* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *valós sor pontosan akkor konvergens, ha a* $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x_{2^n}$ *sor konvergens.*

5. Példa. *A*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)}$$

valós számsor divergens, hiszen, ha $x_n = \dfrac{1}{\ln(n)}$ $(n \in \mathbb{N})$, *akkor*

$$2^n x_{2^n} = \frac{2^n}{n\ln(2)} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Azonban a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n\ln(2)}$ *sor divergens (ez például a Cauchy-féle gyökkritérium segítségével látható be), ezért a Cauchy-féle ritkítási kritérium felhasználásával adódik, hogy a fenti sor valóban divergens.*

8. Tétel (Leibniz-kritérium alternáló sorokra). *Legyen* (x_n) *egy monoton nullsorozat, ekkor a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x_n$$

sor konvergens.

6. Példa. *A*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{3^n}$$

sor konvergens, hiszen az

$$x_n = \frac{2}{3^n} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

valós számsorozat egy monoton nullsorozat. Így az alternáló sorokra vonatkozó Leibniz kritérium miatt a fenti sor konvergens. Könnyű igazolni, hogy ez a sor nemcsak konvergens, hanem abszolút konvergens is.

Ezzel szemben a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ *sor egy olyan valós számsorozat, ami konvergens, de nem abszolút konvergens, egyszóval feltételesen konvergens. Ennek igazolásához szintén az alternáló sorokra vonatkozó Leibniz kritérium használható, az pedig, hogy ez a sor nem abszolút konvergens, a harmonikus sorok konvergenciájára vonatkozó állítás azonnal következménye.*

9. Tétel (Összehasonlító kritérium II.). *Legyenek* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *és* $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ *olyan pozitív tagú sorok, melyekre létezik és pozitív a*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}$$

határérték. Ekkor a $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *és a* $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ *sorok egyszerre konvergensek, illetve egyszerre divergensek.*

7. Példa. *A*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 - n^2 + 1}$$

valós sor konvergens, hiszen, ha

$$x_n = \frac{1}{n^3 - n^2 + 1} \quad \text{és} \quad y_n = \frac{1}{n^3} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{\frac{1}{n^3 - n^2 + 1}}{\frac{1}{n^3}} = \frac{n^3}{n^3 - n^2 + 1} \xrightarrow{n\to\infty} 1 > 0$$

Mivel létezik és pozitív a $\lim_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n}$ *határérték és a* $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^3}$ *sor konvergens, ezért a* $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^3 - n^2 + 1}$ *sor is az.*

10. Tétel (A harmonikus sor). *Legyen* $\alpha > 0$*, ekkor a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

sor

- *abszolút konvergens, ha* $\alpha > 1$
- *divergens, ha* $\alpha \leqslant 1$.

11. Tétel (A geometriai sor). *Legyen* $q \in \mathbb{R}$ *olyan, hogy* $|q| < 1$*, ekkor a* $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ *sor konvergens, és*

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1-q}.$$

Elemi függvények

Az exponenciális függvény

3. Definíció. *Az*

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

módon megadott $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *függvényt* ***exponenciális függvény****nek hívjuk.*

12. Tétel. *Az exponenciális függvény rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal*

(i)

$$\exp(0) = 1;$$

(ii)

$$\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y) \qquad (x, y \in \mathbb{R});$$

(iii)

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

13. Tétel. *Az exponenciális függvény*

(i) *szigorúan monoton növekedő;*

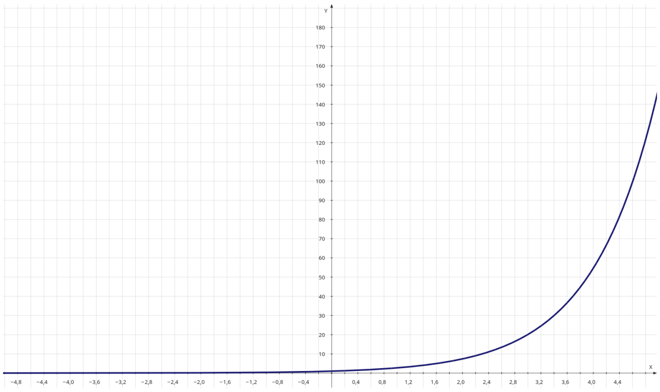
(ii) *értékkészlete a pozitív valós számok halmaza;*

(iii)

$$\lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty \quad \textit{és} \quad \lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$$

14. Tétel.

$$\exp(1) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$



A logaritmus függvény

4. Definíció. *Az exponenciális függvény szigorúan monoton növekedő, így invertálható. Az inverzét* ***logaritmus függvény****nek nevezzük, és rá az* ln *jelölést használjuk.*

Tehát a logaritmus függvény az az $\ln\colon\,]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ függvény, melyre

$$\exp\left(\ln(x)\right) = x \qquad (x \in]0, +\infty[)\,.$$

15. Tétel. *Az* $\ln\colon\,]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ *függvény rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal*

(i)

$$\ln(1) = 0;$$

(ii)

$$\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y) \qquad (x, y \in]0, +\infty[)\,;$$

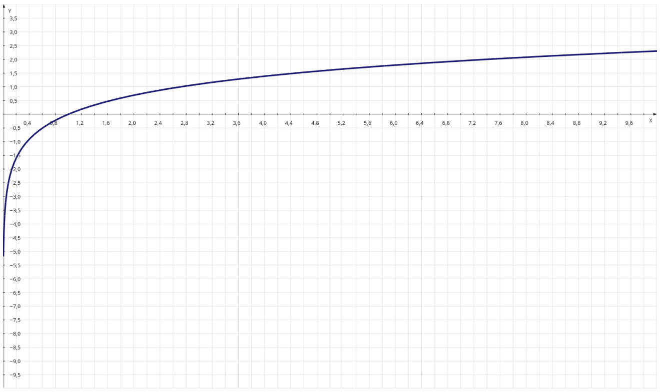
(iii)

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x) \qquad (x \in]0, +\infty[)\,;$$

(iv) *szigorúan monoton növekedő;*

(v)

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty \quad \textit{és} \quad \lim_{x\to 0+} \ln(x) = -\infty.$$



A hiperbolikus függvények

5. Definíció. *A*

$$\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

illetve a

$$\sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

módon megadott függvényeket rendre ***cosinus hiperbolicus****, illetve* ***sinus hiperbolicus*** *függvényeknek nevezzük.*

16. Tétel. *Tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén*

$$\cosh(x) = \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2} \qquad \sinh(x) = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2}.$$

17. Tétel. *A cosinus hiperbolicus, illetve a sinus hiperbolicus függvények rendelkeznek az alábbi tulajdonságokkal*

(i)

$$\cosh(0) = 1 \quad \text{és} \quad \sinh(0) = 0$$

(ii)

$$\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y) \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

(iii)

$$\sinh(x+y) = \sinh(x)\cosh(y) + \sinh(y)\cosh(x) \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

(iv)

$$\cosh(-x) = \cosh(x) \quad \text{és} \quad \sinh(-x) = -\sinh(x) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

(v)

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

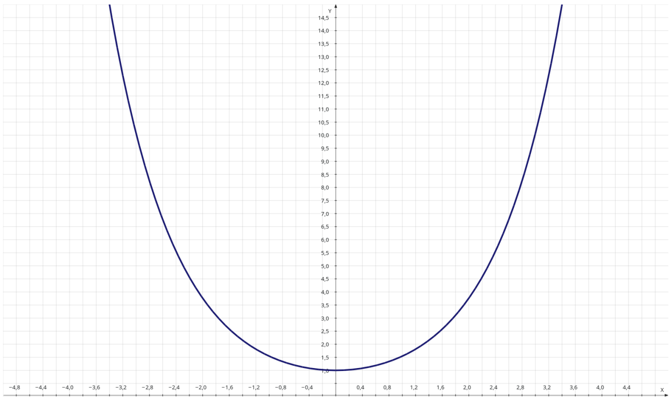
6. Definíció. *A*

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cos(x)} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

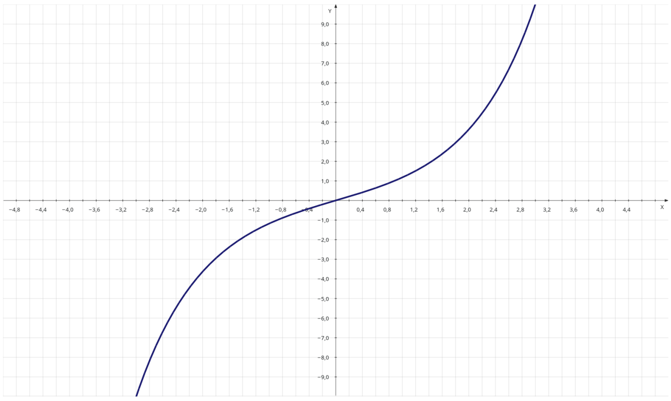
illetve a

$$\coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

módon megadott függvényeket ***tangens hiperbolicus****, illetve* ***cotangens hiperbolicus*** *függvényeknek hívjuk.*



1. ábra. A cosinus hiperbolicus függvény



2. ábra. A sinus hiperbolicus függvény

A trigonometrikus függvények

7. Definíció. *A*

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

illetve a

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

*módon értelmezett függvényeket rendre **cosinus**, illetve **sinus** függvényeknek nevezzük.*

18. Tétel. *(i)*

$$\cos(0) = 1 \quad \textit{és} \quad \sin(0) = 0;$$

(ii)

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

(iii)

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x) \qquad (x, y \in \mathbb{R});$$

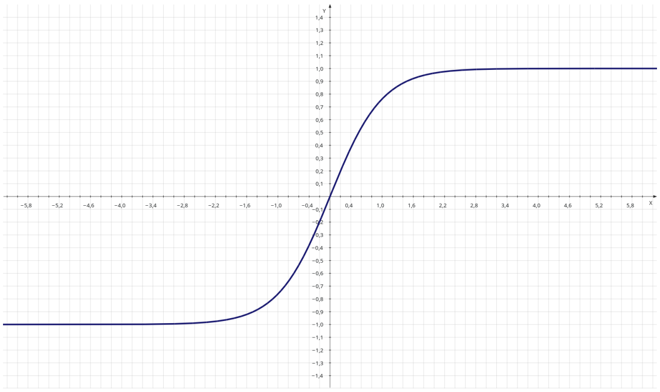
(iv)

$$\cos(-x) = \cos(x) \quad \textit{és} \quad \sin(-x) = -\sin(x) \qquad (x \in \mathbb{R});$$

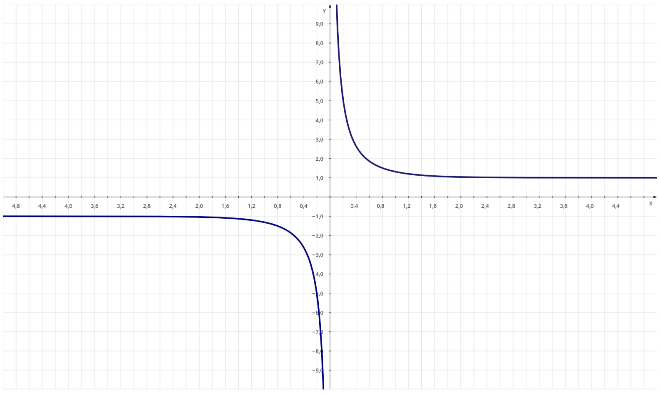
(v)

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

1. Állítás. *Létezik olyan α valós szám, melyre $0 < \alpha < 2$ és $\cos(\alpha) = 0$.*



3. ábra. A tangens hiperbolicus függvény



4. ábra. A cotangens hiperbolicus függvény

2. Állítás. *A cosinus függvény pozitív zérushelyei között van legkisebb.*

8. Definíció. *A cosinus függvény legkisebb pozitív zérushelyének kétszeresét π-vel jelöljük.*

19. Tétel. *(i) a cosinus és a sinus függvény értékkészlete $[-1, 1]$;*

(ii)

$$\sin(0) = \sin(\pi) = 0$$

(iii)

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$$

9. Definíció. *Legyen $D \subset \mathbb{R}$ nemüres halmaz, $p \in \mathbb{R}$ olyan, hogy $x \in D$ esetén $x + p \in D$ is teljesül. Azt mondjuk, hogy az $f : D \to \mathbb{R}$ függvény p* ***szerint periodikus****, ha minden $x \in D$ esetén*

$$f(x + p) = f(x)$$

teljesül.

20. Tétel. *A cosinus és a sinus függvények 2π szerint periodikusak.*

21. Tétel. *A cosinus függvény zérushelyei a $\dfrac{\pi}{2}$ páratlan egész számú többszörösei. A sinus függvény zérushelyei a π egész számú többszörösei.*

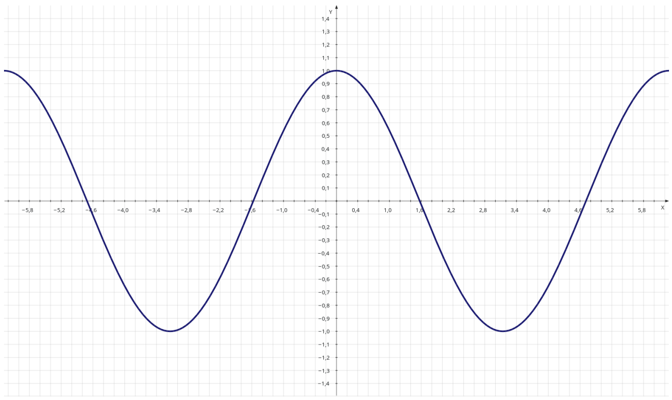
10. Definíció. *A*

$$\operatorname{tg}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \qquad \left(x \in \mathbb{R}, x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}\right),$$

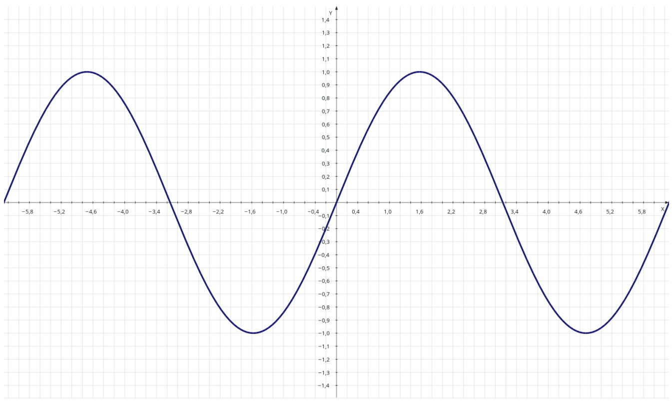
illetve a

$$\operatorname{ctg}(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \qquad (x \in \mathbb{R}, x \neq k\pi)$$

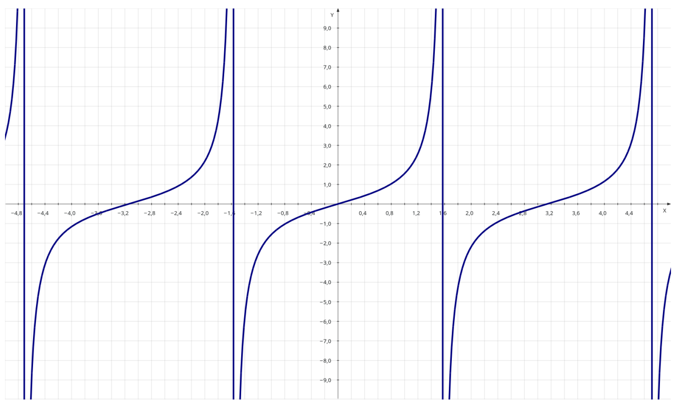
módon megadott függvényeket rendre ***tangens****, illetve* ***cotangens*** *függvényeknek hívjuk.*



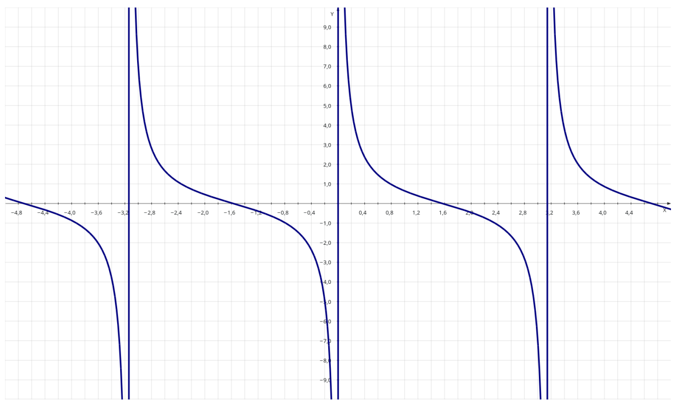
5. ábra. A cosinus függvény



6. ábra. A sinus függvény



7. ábra. A tangens függvény



8. ábra. A cotangens függvény