Valós függvények differenciálszámítása II.

Házi feladatok

1. Feladat. *Az összetett függvény differenciálási szabályát alkalmazva, határozzuk meg a következő függvények differenciálhányados függvényeit.*

(a) $$(x+12)^{12}$$

(b) $$(x^2+1)^5$$

(c) $$2(x^2+5)^8$$

(d) $$(x^9-3)^6$$

(e) $$10(x^3-5x)^3$$

(f) $$(x+1)^3$$

(g) $$2(x^2-1)^8$$

(h) $$(x^4+2)^6$$

(i) $$\sqrt{x^2+1}$$

(j) $$(3x^3+7)^7$$

(k) $$\sqrt[3]{x^3+3}$$

(l) $$\sqrt{e^x-4}$$

(m) $$e^{-2x}$$

(n) $$e^2-e^{-x}$$

(o) $$e^{\sqrt{x}+1}$$

(p) $$e^{4\ln(x)}$$

(q) $$e^{ax}$$

(r) $$(e^x-e^{-x})^2$$

(s) $$x^{x^3+1000}$$

(t) $$\sqrt[3]{e^{2x}}$$

(u) $$\ln(x^3+x)$$

(v) $$\ln(4)$$

(w) $$\ln(4x+1)$$

(x) $$\ln(x^3-2)$$

(y) $$\ln(x^6+3x^4+1)$$

(z) $$(\ln(x))^2$$

2. Feladat. *Az összetett függvény differenciálási szabályát alkalmazva, határozzuk meg a következő függvények differenciálhányados függvényeit.*

(a) $$\ln(5x-7)$$

(b) $$\ln(x^2e^x)$$

(c) $$\ln(3+x)-\ln(3-x)$$

(d) $$\sin\left(3x^2+20x-19\right)$$

(e) $$\cosh(\sqrt{x}+x^2+200)$$

(f) $$\mathrm{tg}\left(\frac{x+1}{x^2+x+1}\right)$$

(g) $$\mathrm{tg}\left(\sin(5x)\right)$$

(h) $$\sin\left(6x^2-3x+2\right)$$

(i) $$\cos\left(\sqrt[4]{2x}+1\right)$$

(j) $$\sinh(5x)$$

(k) $$4\sinh\left(3x+e^x\right)+5\cosh\left(x^2-2^x\right)$$

(l) $$\cosh^2\left(6x+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)$$

(m) $$\tanh^2(5x^2)$$

(n) $$\sinh(2x^3-3x-4)$$

(o)
$$\sinh\left(\cos(x)\right)$$

(p)
$$\sin(x)\sinh(x)+\coth(x)\mathrm{tg}(x)$$

(q)
$$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$$

(r)
$$\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$$

(s)
$$\sin^n(x)\cdot\cos(nx)$$

(t)
$$\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)-\mathrm{ctg}\left(\frac{x}{2}\right)$$

(u)
$$\sqrt[3]{\left(\frac{1-x^3}{1+x^3}\right)}$$

(v)
$$\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2$$

3. Feladat. *Határozzuk meg az alábbi függvények differenciahányados függvényeit.*

(a)
$$\sin^5(5x)\cos^2\left(\frac{x}{3}\right)$$

(b)
$$-\frac{11}{2(x-2)^2}-\frac{4}{x-2}$$

(c)
$$-\frac{15}{4(x-3)^4}-\frac{10}{3(x-3)^3}-\frac{1}{2(x-3)^2}$$

(d)
$$\frac{x^8}{8(1-x^2)^4}$$

(e)
$$\frac{\sqrt{2x^2-2x+1}}{x}$$

(f)
$$\frac{x}{\alpha^2\sqrt{x^2+\alpha^2}}$$

(g)
$$\frac{x^3}{3\sqrt{(1+x^2)^3}}$$

(h)
$$\frac{1}{8}\sqrt[3]{(1+x^2)^4}-\frac{1}{5}\sqrt[3]{(1+x^3)^5}$$

(i)
$$\frac{4}{3}\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}}$$

(j)
$$x^4(\alpha-2x^3)^2$$

(k)
$$\left(\frac{\alpha+\beta x^n}{\alpha-\beta x^n}\right)^m$$

(l)
$$\sqrt[3]{x+\sqrt{x}}$$

(m)
$$(2x+1)(3x+2)\sqrt[3]{3x+2}$$

(n)
$$\frac{1}{\sqrt{2\alpha x-x^2}}$$

(o)
$$\ln\left(\sqrt{1+e^x}-1\right)-\ln\left(\sqrt{1+e^x}+1\right)$$

(p)
$$\frac{1}{15}\cos^3(x)\left(3\cos^2(x)-5\right)$$

(q)
$$\frac{\left(\mathrm{tg}^2(x)-x\right)\left(\mathrm{tg}^4(x)+10\mathrm{tg}^2(x)+1\right)}{3\mathrm{tg}^3(x)}$$

(r)
$$\sin^2(x^3)$$

(s)
$$\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

(t)
$$\frac{\arccos(x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

(u)
$$\sqrt{\alpha^2-x^2}+\alpha\arcsin\left(\frac{x}{\alpha}\right)$$

4. Feladat. *Határozzuk meg az alábbi függvények tizedik deriváltját.*

(a) $$\frac{1}{\sqrt{x}}$$

(b) $$\sqrt[3]{x}$$

(c) $$\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

(d) $$\sqrt[3]{x^2}$$

(e) $$(a+bx)^{10}$$

(f) $$\frac{x}{a \pm bx}$$

(g) $$x\sqrt{a+bx}$$

(h) $$\frac{1}{a^2-b^2x^2}$$

(i) $$\frac{x}{a^2-b^2x^2}$$

(j) $$\left(a+\sqrt{bx}\right)^{10}$$

(k) $$e^{a+bx}$$

(l) $$e^{a^2+b^2x^2}$$

(m) $$a^x$$

(n) $$e^x x^{10}$$

(o) $$\ln(a+bx)$$

(p) $$\ln(a^2+b^2x^2)$$

(q) $$\sin(ax)$$

(r) $$\cos^{10}(x)$$

5. Feladat. *A következőekben jelöljön f egy differenciálható valós függvényt. Határozzuk meg a φ függvény differenciahányados függvényét, ha*

(a) $$\varphi(x) = f(x^2) \quad (x \in \mathbb{R})$$

(b) $$\varphi(x) = f(\sin^2(x)) + f(\cos^2(x)) \quad (x \in \mathbb{R})$$

(c) $$\varphi(x) = f(e^x) + e^{f(x)} \quad (x \in \mathbb{R})$$

(d) $$\varphi(x) = f(f(x)) \quad (x \in \mathbb{R})$$

(e) $$\varphi(x) = x^2 f(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

(f) $$\varphi(x) = \frac{x^2}{f(x)} \quad (x \in \mathbb{R})$$

(g) $$\varphi(x) = \frac{1+xf(x)}{\sqrt{x}} \quad (x \in \mathbb{R})$$

6. Feladat. *Határozzuk meg az $\frac{f'}{f}$ függvényt, ha*

(a) $$f(x) = x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

(b) $$f(x) = \left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^n$$

(c) $$f(x) = (x-x_1)^{\alpha_1} \cdot (x-x_2)^{\alpha_2} \cdots (x-x_n)^{\alpha_n}$$

7. Feladat. *Határozzuk meg az alábbi függvények differenciahányados függvényeit.*

(a) $$(x+1)(2x+1)(3x+1)$$

(b) $$\frac{(x+2)^2}{(x+1)^3(x+3)^4}$$

(c) $$\sqrt{\frac{x(x-1)}{x-2}}$$

(d) $$x\sqrt[3]{\frac{x^2}{x^2+1}}$$

(e)
$$\frac{(x-2)^9}{\sqrt{(x-1)^5(x-3)^{11}}}$$

(f)
$$\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{(x+2)^2}\sqrt{(x+3)^3}}$$

(g)
$$x^x$$

(h)
$$x^{x^3}$$

(i)
$$\sqrt[x]{x}$$

(j)
$$x^{\sqrt{x}}$$

(k)
$$x^{\sin(x)}$$

(l)
$$\sin(x)^x$$

(m)
$$\cos(x)^{\sin(x)}$$

(n)
$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

8. Feladat. *Igazoljuk, hogy az*
$$f(x) = xe^{-x} \qquad (x \in \mathbb{R})$$
módon megadott $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *függvény kielégíti az alábbi egyenletet*
$$xf'(x) = (1-x)f(x) \qquad (x \in \mathbb{R})\,.$$

9. Feladat. *Igazoljuk, hogy az*
$$f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}} \qquad (x \in \mathbb{R})$$
módon megadott $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *függvény kielégíti az alábbi egyenletet*
$$xf'(x) = (1-x^2)f(x) \qquad (x \in \mathbb{R})\,.$$

10. Feladat. *Igazoljuk, hogy az*
$$f(x) = \frac{1}{1+x+\ln(x)} \qquad (x \in [1,+\infty[)$$
módon megadott $f\colon [1,+\infty[\to \mathbb{R}$ *függvény kielégíti az alábbi egyenletet*
$$xf'(x) = f(x)\left(f(x)\ln(x)-1\right) \qquad (x \in [1,+\infty[)\,.$$

11. Feladat. *Legyenek* $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *olyan differenciálható függvények, melyre* $f(2) = -3, g(2) = 4, f'(2) = -2$ *és* $g'(2) = 7$. *Határozzuk meg* $h'(2)$*-t, ha*

(a)
$$h(x) = 5f(x) - 4g(x)$$

(b)
$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

(c)
$$h(x) = f(x)g(x)$$

(d)
$$h(x) = \frac{f(x)}{1+g(x)}$$

12. Feladat. *Legyenek* $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *differenciálható függvények és* $h = f \circ g$, *valamint* $j = g \circ f$. *Töltsük ki az alábbi táblázat hiányzó mezőit.*

x	$f(x)$	$f'(x)$	$g(x)$	$g'(x)$	$h(x)$	$h'(x)$	$j(x)$	$j'(x)$
0		-3			1		1	$-\frac{3}{2}$
1	0			$\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$		

13. Feladat. *Egy rugóra erősített tömegpont vízszintesen mozog. A pont mozgását az*

$$x(t) = 8\sin(t) \qquad (t \geqslant 0)$$

módon megadott $x\colon [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ *függvény írja le.*

(a) Határozzuk meg a pont t időpillanatbeli sebességét és gyorsulását.

(b) Határozzuk meg a pont $t = \dfrac{\pi}{3}$ *időpontbeli sebességét és gyorsulását. Melyik irányba mozog ebben a pillanatban a pont?*

14. Feladat. *Egy kampóra (függőlegesen) egy rugalmas szalagot akasztunk, ennek végére pedig egy tömegpontot helyezünk el. A tömegpont mozgását az*

$$x(t) = 2\cos(t) + 3\sin(t) \qquad (t \geqslant 0)$$

módon megadott $x\colon [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ *függvény írja le.*

(a) Határozzuk meg a sebességet és a gyorsulást a t időpillanatban.

(b) Ábrázoljuk a sebesség- és gyorsulásfüggvényeket.

(c) Mely időpillanatban megy át a tömegpont először az egyensúlyi helyzeten?

(d) Milyen messze van a tömegpont az egyensúlyi helyzetétől a t időpillanatban?

(e) Mely időpillanatokban a legnagyobb a pont sebessége?

15. Feladat. *Egy* 6 m *hosszú létra támaszkodik egy függőleges falhoz. A létra teteje és a fal által bezárt szög legyen* θ*, a létra és a fal távolságát pedig jelölje* x*. A létra elkezd csúszni. Határozzuk meg ennek a sebességét. Mikor lesz a csúszás sebessége a legnagyobb?*

16. Feladat. *Egy* m *tömegű testet egy kötél segítségével vízszintes talajon húzunk. A talaj és a kötél szöge legyen* θ*. Ekkor a testre ható erő*

$$F(\theta) = \frac{\mu m g}{\mu \sin(\theta) + \cos(\theta)} \qquad (\theta \in [0, \pi/2[)$$

ahol μ *jelöli a súrlódási együtthatót,* g *pedig a (földi) nehézségi gyorsulás.*

(a) Határozzuk meg az F függvény differenciahányados függvényét.

(b) Határozzuk meg azokat a θ *szögeket, melyre* $F'(\theta) = 0$ *teljesül.*

(c) Legyen $m = 20\,\mathrm{kg}$ *és* $\mu = 0,6$*. Ábrázoljuk ezekkel az értékekkel az F függvényt, határozzuk meg azokat a* θ *szögeket, ahol* $F'(\theta) = 0$ *és vessük egybe a kapottakat azzal, amit az előző részben kaptunk.*

17. Feladat. *Egy anyagi pont t időpillanatbeli helyét a számegyenesen az*

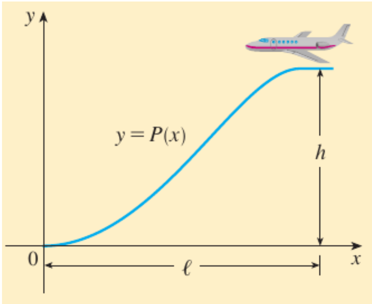
$$s(t) = t^3 - 3t \qquad (t \geqslant 0)$$

függvény írja le.

(a) Határozzuk meg az anyagi pont t időpillanatbeli sebességét, illetve gyorsulását.

(b) Mennyi lesz az anyagi pont gyorsulása a $t = 2$ *időpillanatban?*

(c) Határozzuk meg azt a t időpillanatot, amikor a pont sebessége 0.



1. ábra. A landolás pályája

18. Feladat. *A Boyle–Mariotte-törvény szerint egy adott mennyiségű ideális gáz térfogatának és nyomásának szorzata egy adott hőmérsékleten állandó, azaz,*

$$pV = k,$$

ahol p a nyomást, V a térfogatot, míg k ezt a törvény szerinti állandót jelöli.

(a) Tegyük fel, hogy a szóban forgó gáz térfogata $0,106\,\mathrm{m}^3$, *melynek nyomása* 25 *°C-on* $50\,\mathrm{kPA}$. *Írjuk fel V-t p függvényeként.*

(b) Határozzuk meg az előző részben szereplő V függvény differenciálhányados függvényét. Határozzuk meg a derivált értékét, ha $p = 50\,\mathrm{kPA}$*? Mi a derivált fizikai jelentése ebben az esetben és mi lesz a mértékegysége?*

19. Feladat. *Egy utasszállító leszállás közben az alábbi ábrán látható pályán mozog. Jelölje h az aktuális utazómagasságot, l pedig a leszállópálya végétől mért távolságot. A leszállás során a pilótának állandó v vízszintes sebességet kell tartania. A függőleges gyorsulás abszolút értéke nem haladhat meg egy rögzített k állandót (amely lényegesen kisebb, mint a neghézségi gyorsulás).*

(a) A

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

alakú függvények között keressünk olyanokat, amelyek kielégítik ezeket a feltételeket.

(b) Mutassuk meg, hogy

$$\frac{6hv^2}{l^2} \leqslant k.$$

(c) Tegyük fel, hogy $k = 1385\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}^2}$, *az aktuális utazómagasság* $11000\,\mathrm{m}$ *és a repülőgép sebessége* $480\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. *A repülőtértől milyen messze kell, hogy elkezdje a pilóta a landolást, hogy az még biztonságos legyen?*