

4. Komplex számok

4.1. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a komplex számok halmazán! Ábrázoljuk a megoldásokat a komplex számsíkon!

(a) $x^2 + 4 = 0$,

(c) $x^2 - x + 1 = 0$,

(b) $x^2 + 2x + 2 = 0$,

(d) $x^3 - 6x^2 + 13x = 0$.

4.2. Írjuk fel az alábbi komplex számok algebrai alakját!

(a) $(3 + i)(2 + 3i)$, $(-2 + 3i)(5 - 2i)$, $i(1 + 2i)$, $(-1 + i)(1 - 2i)(1 + 2i)$,

(b) $\overline{5 - 2i}$, $\overline{(3 + 4i)(2 + i)}$,

(c) $(2 - i)^3$, $i^6 + 3i^5 - 2i^3 + i^2 - 1$, i^{2017} , i^{100} ,

(d) $\frac{5 + 3i}{i}$, $\frac{1 - i}{2 + i}$, $\frac{1 - 2i}{1 - 3i}$, $\frac{2 - i}{(3 - 2i)(2 + 5i)}$.

4.3. Mely z komplex számokra igazak a következő feltételek?

(a) $\bar{z} = z$

(b) $\bar{z} = iz$

(c) $\bar{z} = \frac{1}{z}$

4.4. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a komplex számok halmazán!

(a) $\bar{z} + 2z = 9 + 2i$,

(d) $z^2 + |z|^2 = 2 - 6i$,

(b) $\bar{z} + |z|^2 = 31 - i$,

(e) $\bar{z} \cdot z^2 = 8i$,

(c) $i^3 \cdot \bar{z} = -3 - 2i$,

(f) $z^2 = i$.

4.5. Ábrázoljuk a komplex számsíkon az alábbi halmazokat!

(a) $A = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) = 0\}$,

(d) $D = \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) \geq 2\}$,

(b) $B = \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) = 0\}$,

(e) $E = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$,

(c) $C = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) \leq 0\}$,

(f) $F = \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) = \text{Im}(z)\}$.

4.6. Adjuk meg az alábbi komplex számok trigonometrikus alakját!

(a) 2,

(c) $-i$,

(e) $1 + i$,

(g) $-3 - 3\sqrt{3}i$,

(b) i ,

(d) $1 - i$,

(f) $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$,

(h) $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$.

4.7. Legyen $x = 3\left(\cos \frac{\pi}{9} + i \sin \frac{\pi}{9}\right)$ és $y = 2\left(\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5}\right)$. Határozzuk meg az alábbi kifejezések értékét!

(a) $x \cdot y$,

(b) $\frac{x}{y}$,

(c) x^3 ,

(d) y^5 ,

(e) $\frac{1}{x}$,

(f) $x^2 y$.

4.8. A trigonometrikus alak segítségével határozzuk meg az alábbi kifejezések értékét!

(a) \sqrt{i} ,

(c) $(1+i)^{2008}$,

(b) $\sqrt[3]{i}$,

(d) $(1+\sqrt{3}i)^{301}$.

4.9. Számítsuk ki a $z = 81 \left(\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5} \right)$ komplex szám második, harmadik, negyedik gyökeit! Ábrázoljuk a gyököket a komplex számsíkon!

4.10. Írjuk fel és ábrázoljuk a komplex számsíkon a harmadik, negyedik, ötödik és hatodik egységgyököket!

4.11. Az alábbi komplex számok közül melyek egységgyökök?

$$1+i, \quad \frac{1}{4} + \frac{3}{4}i, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i, \quad 2 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right), \quad \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2},$$

$$\cos \frac{5\pi}{8} + i \sin \frac{5\pi}{8}, \quad \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad -1, \quad i.$$

4.12. Legyen $\varepsilon = \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}$. Mutassuk meg, hogy $k = 1, \dots, 8$ esetén ε^k előállítja az összes nyolcadik egységgyököt!

4.13. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a komplex számok halmazán!

(a) $z^2 - 3iz + 4 = 0$,

(d) $z^2 + (2+4i)z - 3 + 3i = 0$,

(b) $z^3 + z^2 + z = 0$,

(e) $2iz^2 + (4+5i)z + 5 = 0$,

(c) $z^5 - z = 0$,

(f) $iz^2 + 2iz + 1 = 0$.