Valós függvények differenciálszámítása

Előadásjegyzet

Alapfogalmak és kapcsolatuk

1. Definíció. *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nemüres, nyílt intervallum, $f\colon I \to \mathbb{R}$ függvény. Ekkor a*

$$\varphi(x, x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad (x, x_0 \in I,\ x \neq x_0)$$

*mennyiséget az f függvény x és x_0 pontokhoz tartozó **differenciahányados függvény**ének nevezzük.*

2. Definíció. *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nemüres, nyílt intervallum és $x_0 \in I$. Azt mondjuk, hogy az $f\colon I \to \mathbb{R}$ függvény **differenciálható az $x_0 \in I$ pontban**, ha létezik és véges a*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

*határérték. Erre a továbbiakban az $f'(x_0)$ jelölést használjuk és az f függvény x_0 **pontbeli differenciálhányadosá**nak nevezzük.*

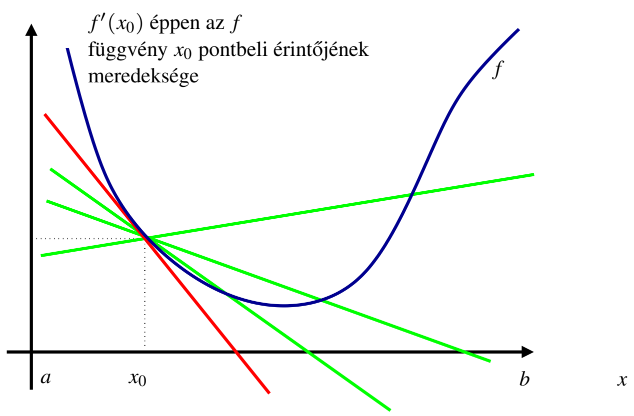
3. Definíció. *Az előző definíció jelölései mellett azt mondjuk, hogy az $f\colon I \to \mathbb{R}$ függvény **balról differenciálható az $x_0 \in I$ pontban**, ha létezik és véges a*

$$\lim_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

*határérték. Azt mondjuk továbbá, hogy az $f\colon I \to \mathbb{R}$ függvény **jobbról differenciálható az $x_0 \in I$ pontban**, ha létezik és véges a*

$$\lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

határérték.



1. Példa. *Legyen $c \in \mathbb{R}$, ekkor az*

$$f(x) = c \qquad (x \in \mathbb{R})$$

módon megadott $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény minden $x_0 \in \mathbb{R}$ pontban differenciálható.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{c - c}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} 0 = 0,$$

azaz, tetszőleges $x_0 \in \mathbb{R}$ esetén

$$f'(x_0) = 0.$$

2. Példa. *Tekintsük az*

$$f(x) = x^2 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

módon megadott $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt. Ekkor

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} (x + x_0) = 2x_0,$$

azaz, a fenti f függvény minden pontban differenciálható és

$$f'(x_0) = 2x_0 \qquad (x_0 \in \mathbb{R})\,.$$

1. Tétel (Differenciálhatóság $\Rightarrow$ folytonosság). *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nemüres, nyílt intervallum, $f\colon I \to \mathbb{R}$ és $x_0 \in I$. Ha az f függvény differenciálható az x_0 pontban, akkor az f ebben a pontban folytonos is.*

1. Megjegyzés. *Az előző tétel* ***megfordítása nem igaz****, ugyanis az*

$$f(x) = |x| \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény minden pontban folytonos, azonban az $x_0 = 0$ pontban nem differenciálható.

Differenciálhatóság és műveletek

2. Tétel. *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nemüres, nyílt intervallum, $x_0 \in I$ és $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ olyan függvények, melyek differenciálhatóak az x_0 pontban. Ekkor*

(i) az $f + g$ függvény is differenciálható az x_0 pontban és

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

(ii) tetszőleges $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén a $\lambda \cdot f$ függvény is differenciálható az x_0 pontban és

$$(\lambda \cdot f)'(x_0) = \lambda \cdot f'(x_0).$$

(iii) az $f \cdot g$ függvény is differenciálható az x_0 pontban és

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0).$$

(iv) az $\frac{f}{g}$ függvény is differenciálható az x_0 pontban és

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)},$$

feltéve, hogy az x_0 pontnak van olyan környezete, melyben $g(x) \neq 0$.

3. Tétel (Az összetett függvény differenciálási szabálya). *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nemüres, nyílt intervallum, $x_0 \in I$ és $g\colon I \to \mathbb{R}$ és $f\colon g(I) \to \mathbb{R}$ olyan függvények, hogy g differenciálható az x_0 pontban, f pedig differenciálható a $g(x_0)$ pontban. Ekkor az $f \circ g$ függvény differenciálható az x_0 pontban, továbbá*

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)\,.$$

4. Tétel (Az inverz függvény differenciálási szabálya). *Legyen $]a, b[\subset \mathbb{R}$ nemüres, nyílt intervallum, $f\colon]a, b[\to \mathbb{R}$ folytonos, szigorúan monoton függvény. Ha az f függvény differenciálható az $x_0 \in]a, b[$ pontban és $f'(x_0) \neq 0$, akkor az f^{-1} függvény differenciálható az $f(x_0) \in f(]a, b[)$ pontban és*

$$\left(f^{-1}\right)'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Néhány elemi függvény differenciálhányados függvénye

- ha $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ és $f(x) = x^n$, akkor $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$;
- ha $f(x) = \exp(x)$, akkor $f'(x) = \exp(x)$;
- ha $f(x) = a^x$, akkor $f'(x) = a^x \cdot \ln(a)$;
- ha $f(x) = \ln(x)$, akkor $f'(x) = \frac{1}{x}$;
- ha $f(x) = \cos(x)$, akkor $f'(x) = -\sin(x)$;
- ha $f(x) = \sin(x)$, akkor $f'(x) = \cos(x)$;
- ha $f(x) = \mathrm{tg}(x)$, akkor $f'(x) = \frac{1}{\cos^2}(x)$;
- ha $f(x) = \mathrm{ctg}(x)$, akkor $f'(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)}$;
- ha $f(x) = \cosh(x)$, akkor $f'(x) = \sinh(x)$;
- ha $f(x) = \sinh(x)$, akkor $f'(x) = \cosh(x)$;
- ha $f(x) = \tanh(x)$, akkor $f'(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}$;
- ha $f(x) = \coth(x)$, akkor $f'(x) = -\frac{1}{\sinh^2(x)}$.

Középértéktételek

4. Definíció. *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nemüres halmaz, $f\colon D \to \mathbb{R}$ függvény. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek az $x_0 \in I$* ***pontban lokális minimuma*** *van, ha van egy olyan, az az x_0 pontot tartalmazó $J \subset I$ nyílt intervallum, hogy*

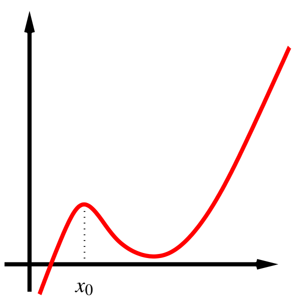
$$f(x_0) \leqslant f(x)$$

teljesül minden $x \in J$ esetén.

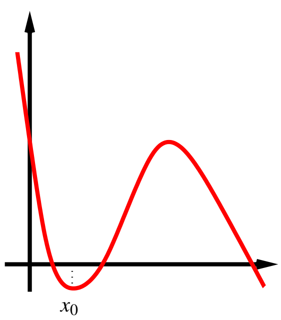
5. Definíció. *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nemüres halmaz, $f\colon I \to \mathbb{R}$ függvény. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek az $x_0 \in I$* ***pontban lokális maximuma*** *van, ha van egy olyan, az az x_0 pontot tartalmazó $J \subset I$ nyílt intervallum, hogy*

$$f(x_0) \geqslant f(x)$$

teljesül minden $x \in J$ esetén.



lokális maximumhely



lokális minimumhely

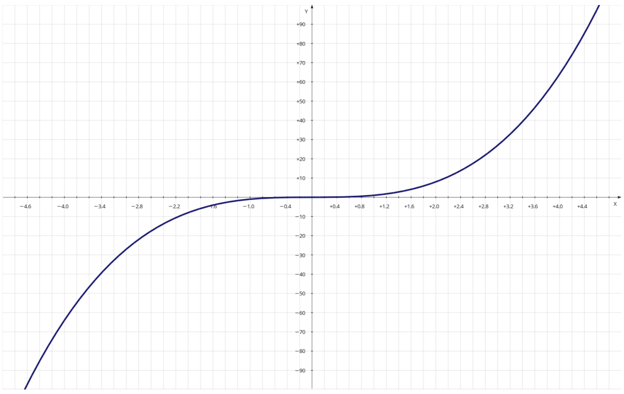
5. Tétel (Fermat-elv). *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nemüres, nyílt intervallum, $f\colon I \to \mathbb{R}$ függvény. Ha az f függvénynek az $x_0 \in I$ pontban lokális szélsőértéke van és az f függvény differenciálható ebben a pontban, akkor*

$$f'(x_0) = 0.$$

2. Megjegyzés. *Az előző tétel **megfordítása nem igaz**, legyen ugyanis*

$$f(x) = x^3 \qquad (x \in \mathbb{R})\,.$$

*Ekkor az f függvény differenciálható az $x_0 = 0$ pontban és $f'(0) = 0$, azonban az f függvénynek az $x_0 = 0$ pont **nem lokális szélsőértékhelye**.*



6. Tétel (Darboux). *Legyen $f\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ differenciálható függvény és legyenek $c, d \in]a,b[$, $c < d$. Ekkor az f függvény differenciálhányados függvénye minden $f'(c)$ és $f'(d)$ közé eső értéket felvesz a $]c,d[$ intervallumban.*

7. Tétel (Cauchy). *Legyenek $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ olyan folytonos függvények melyek differenciálhatóak az $]a,b[$ intervallumon. Ekkor van olyan $\xi \in]a,b[$ pont, hogy*

$$(f(b) - f(a))\, g'(\xi) = (g(b) - g(a))\, f'(\xi)$$

teljesül.

8. Tétel (Lagrange). *Legyen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ olyan folytonos függvény, mely differenciálható a $]a,b[$ intervallumon. Ekkor van olyan $\xi \in]a,b[$, melyre*

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(\xi)$$

teljesül.

9. Tétel (Rolle). *Legyen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ olyan folytonos függvény, mely differenciálható az $]a,b[$ intervallumon és tegyük fel, hogy $f(a) = f(b)$. Ekkor van olyan $\xi \in]a,b[$, melyre*

$$f'(\xi) = 0$$

teljesül.

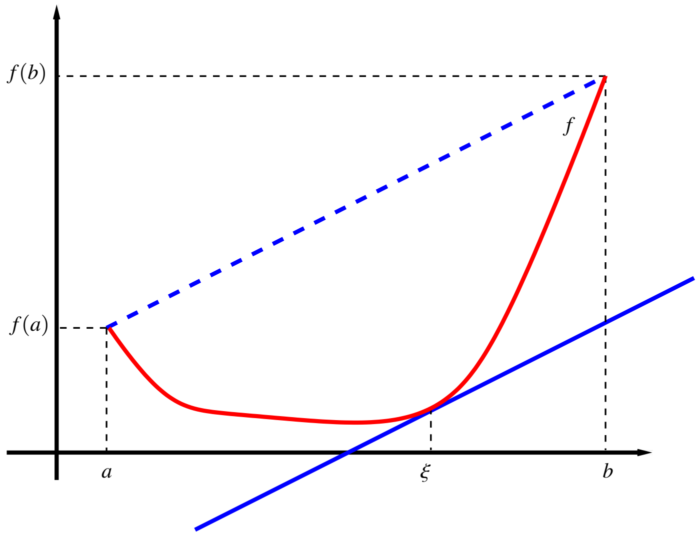
10. Tétel (Az integrálszámítás alaptétele). *Legyen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ olyan folytonos függvény, mely differenciálható az $]a,b[$ intervallumon. Ha*

$$f'(x) = 0 \qquad (x \in]a,b[)\,,$$

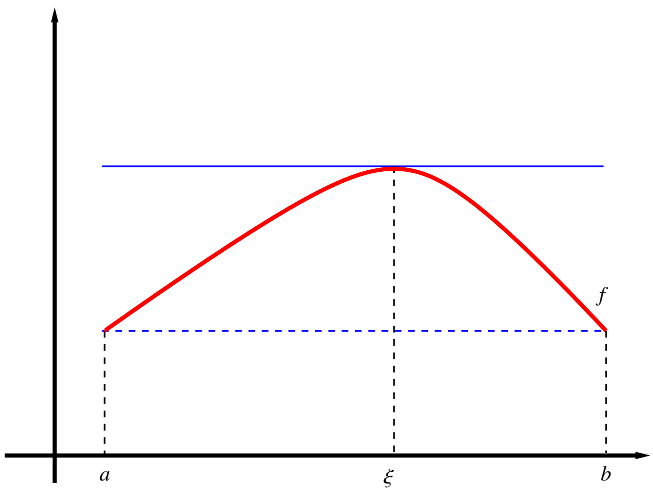
akkor van olyan $c \in \mathbb{R}$, hogy

$$f(x) = c$$

teljesül minden $x \in [a,b]$ esetén.



1. ábra. A Lagrange-féle középértéktétel geometriai jelentése



2. ábra. A Rolle-féle középértéktétel geometriai jelentése

Magasabb rendű deriváltak

6. Definíció. *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nemüres, nyílt intervallum, $f: I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$. Ha az f függvény differenciálható az x_0 pont egy környezetében, és az f függvény deriváltja differenciálható az x_0 pontban, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény az $x_0 \in I$ pontban **kétszer differenciálható**, és $(f')'(x_0)$-t az f függvény x_0 pontbeli **második differenciálhányados**ának nevezzük és $f''(x_0)$-lal jelöljük.*

Ha az f függvény a I intervallum minden pontjában kétszer differenciálható, akkor az

$$x \longmapsto f''(x) \qquad (x \in I)$$

*függvényt az f függvény **második derivált**jának hívjuk.*

7. Definíció. *Legyen $n \in \mathbb{N}$, $I \subset \mathbb{R}$ nemüres, nyílt intervallum, $f: D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$. Ha az f függvény n-szer differenciálható az x_0 pont egy környezetében, és az f függvény n-edik deriváltja differenciálható az x_0 pontban, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény az $x_0 \in I$ pontban $(n+1)$**-szer differenciálható**, és $(f^{(n)})'(x_0)$-t az f függvény x_0 pontbeli $(n+1)$**-edik differenciálhányados**ának nevezzük és $f^{(n+1)}(x_0)$-lal jelöljük.*

Ha az f függvény a I intervallum minden pontjában $(n+1)$-szer differenciálható, akkor az

$$x \longmapsto f^{(n+1)}(x) \qquad (x \in I)$$

*függvényt az f függvény $(n+1)$**-edik derivált**jának hívjuk.*

8. Definíció. *Ha az $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ függvény az $]a,b[$ intervallum valamely x_0 pontjában minden $n \in \mathbb{N}$ esetén n-szer differenciálható, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény **akárhányszor differenciálható az x_0 pontban**.*

9. Definíció. *Ha az $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ függvény differenciálható az $]a,b[$ intervallumon és az*

$$x \longmapsto f'(x) \qquad (x \in]a,b[)$$

*függvény folytonos, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény **folytonosan differenciálható az $]a,b[$ intervallumon**.*

A Taylor-tétel

11. Tétel (Taylor). *Legyen $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ és $x_0 \in]a,b[$. Ha az f függvény $(n+1)$-szer differenciálható, akkor minden $x \in]a,b[$, $x \neq x_0$ esetén van olyan ξ pont x és x_0 között, hogy*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

teljesül.

10. Definíció. *Az előző tételben szereplő*

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

*polinomot az f függvény x_0 ponthoz tartozó **n-edik Taylor-polinom**jának nevezzük.*

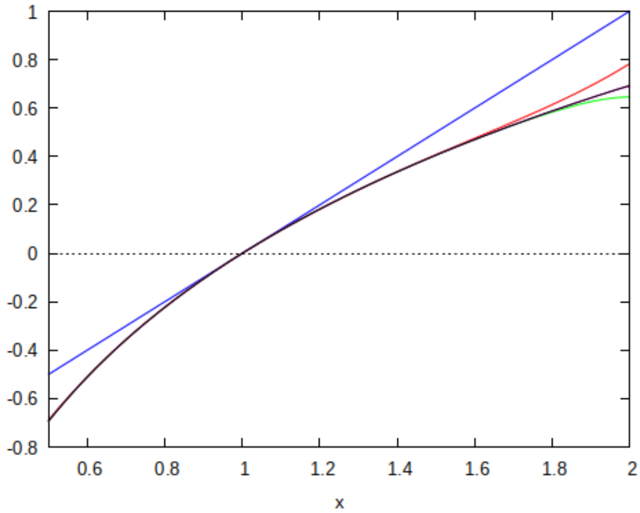
Az előző tétel alapján felírható

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

*formulát pedig **Taylor-formulá**nak mondjuk, míg az*

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

*tagot a Taylor-formula **maradéktagjá**nak hívjuk.*



3. ábra. Az ln függvény és annak $x_0 = 1$ körüli P_1, P_5, P_{10} és P_{100} Taylor-polinomjai

3. Példa. *Az* $\ln\colon]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ *függvény akárhányszor differenciálható a* $]0, +\infty[$ *intervallumon és tetszőleges* $n \in \mathbb{N}$ *esetén ennek a függvénynek az n-edrendű Taylor-polinomja*

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n+1} \frac{(x-1)^k}{k} \qquad (x \in]0, +\infty[)\,.$$

4. Példa. *Az*

$$f(x) = x^6 - 5x^5 + 2x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 6$$

függvény akárhányszor differenciálható $\mathbb{R}$*-en. tetszőleges* $n \in \mathbb{N}$ *esetén ennek a függvénynek az n-edrendű Taylor-polinomja. Ennek a függvénynek az* $x_0 = 2$ *pont körüli hatodrendű Taylor-polinomja*

$$P_6(x) = -74 - 172\,(x-2) - 128\,(x-2)^2 - 27\,(x-2)^3 + 12\,(x-2)^4 + 7\,(x-2)^5 + (x-2)^6\,.$$

A l'Hospital-szabály

12. Tétel. *Legyenek* $f, g\colon]a, b] \to \mathbb{R}$ *olyan folytonos függvények, melyek differenciálhatóak az* $]a, b[$ *intervallumon és tegyük fel, hogy*

$$\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a+} g(x) = 0.$$

Ha $g'(x) \neq 0$ *minden* $x \in]a, b[$ *esetén és létezik a*

$$\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(véges vagy végtelen) határérték, akkor $g(x) \neq 0$ *minden* $x \in]a, b[$ *esetén és létezik a*

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)}$$

határérték is és

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

13. Tétel. *Legyenek $f, g\colon [a, b[\to \mathbb{R}$ olyan folytonos függvények, melyek differenciálhatóak az $]a, b[$ intervallumon és tegyük fel, hogy*

$$\lim_{x\to b-} f(x) = \lim_{x\to b-} g(x) = 0.$$

Ha $g'(x) \neq 0$ minden $x \in]a, b[$ esetén és létezik a

$$\lim_{x\to b-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(véges vagy végtelen) határérték, akkor $g(x) \neq 0$ minden $x \in]a, b[$ esetén és létezik a

$$\lim_{x\to b-} \frac{f(x)}{g(x)}$$

határérték is és

$$\lim_{x\to b-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to b-} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

14. Tétel. *Legyenek $f, g\colon [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ olyan folytonos függvények, melyek differenciálhatóak az $]a, +\infty[$ intervallumon és tegyük fel, hogy*

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} g(x) = 0.$$

Ha $g'(x) \neq 0$ minden $x \in]a, +\infty[$ esetén és létezik a

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(véges vagy végtelen) határérték, akkor $g(x) \neq 0$ minden $x \in]a, +\infty[$ esetén és létezik a

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

határérték is és

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

15. Tétel. *Legyenek $f, g\colon]-\infty, b] \to \mathbb{R}$ olyan folytonos függvények, melyek differenciálhatóak a $]-\infty, b[$ intervallumon és tegyük fel, hogy*

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} g(x) = 0.$$

Ha $g'(x) \neq 0$ minden $x \in]-\infty, b[$ esetén és létezik a

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(véges vagy végtelen) határérték, akkor $g(x) \neq 0$ minden $x \in]-\infty, b[$ esetén és létezik a

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

határérték is és

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to -\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

16. Tétel. *Legyenek $f, g\colon\,]a,b] \to \mathbb{R}$ olyan folytonos függvények, melyek differenciálhatóak az $]a,b[$ intervallumon és tegyük fel, hogy*

$$\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a+} g(x) = +\infty.$$

Ha $g'(x) \neq 0$ minden $x \in]a,b[$ esetén és létezik a

$$\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(véges vagy végtelen) határérték, akkor $g(x) \neq 0$ minden $x \in]a,b[$ esetén és létezik a

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)}$$

határérték is és

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

3. Megjegyzés. *Hasonlóan fogalmazhatóak meg a további*

- $$\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a+} g(x) = -\infty.$$
- $a = -\infty$
- $b = +\infty$

esetek is.

5. Példa.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Ugyanis a l'Hospital-szabályt alkalmazva,

$$\lim_{x\to 0} \frac{[\sin(x)]'}{[x]'} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = \cos(0) = 1.$$

6. Példa.

$$\lim_{x\to 0+} x\ln(x) = 0.$$

Ugyanis a l'Hospital-szabályt alkalmazva,

$$\lim_{x\to 0+} x\ln(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0+} \frac{[\ln(x)]'}{\left[\frac{1}{x}\right]'} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+} -x = 0$$

7. Példa.

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0.$$

Alkalmazzuk a l'Hospital-szabályt,

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{[x^2]'}{[e^x]'} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2x}{e^x}$$

Alkalmazzuk még egyszer a l'Hospital-szabályt,

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{[2x]'}{[e^x]'} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2}{e^x} = 0.$$

8. Példa.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = 1$$

Alkalmazzuk a l'Hospital-szabályt,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left[\sqrt{1+x^2}\right]'}{[x]'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

*A l'Hospital-szabály **nem vezet eredményre** ebben az esetben. Azonban*

$$\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \sqrt{\frac{1}{x^2}+1} \xrightarrow{x\to+\infty} 1.$$

Függvényvizsgálat

Monotonitás

11. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az $f\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ függvény az $]a,b[$ intervallumon **monoton növekedő**, ha minden $x,y \in]a,b[$, $x \leqslant y$ esetén*

$$f(x) \leqslant f(y)$$

teljesül.

12. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az $f\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ függvény az $]a,b[$ intervallumon **monoton csökkenő**, ha minden $x,y \in]a,b[$, $x \leqslant y$ esetén*

$$f(x) \geqslant f(y)$$

teljesül.

13. Definíció. *Ha a fenti egyenlőtlenségek minden $x \neq y$ esetén szigorúak, akkor azt mondjuk, hogy a szóban fogó függvény **szigorúan monoton növekedő**, illetve **szigorúan monoton csökkenő**.*

17. Tétel. *Legyen $f\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ egy olyan függvény, amely differenciálható az $]a,b[$ intervallumon. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.*

- *az f függvény monoton növekedő az $]a,b[$ intervallumon;*
- *tetszőleges $x \in]a,b[$ esetén $f'(x) \geqslant 0$.*

18. Tétel. *Legyen $f\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ egy olyan függvény, amely differenciálható az $]a,b[$ intervallumon. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.*

- *az f függvény monoton csökkenő az $]a,b[$ intervallumon;*
- *tetszőleges $x \in]a,b[$ esetén $f'(x) \leqslant 0$.*

19. Tétel. *Legyen $f\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ egy olyan függvény, amely differenciálható az $]a,b[$ intervallumon. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.*

- *az f függvény szigorúan monoton növekedő (szigorúan monoton csökkenő) az $]a,b[$ intervallumon;*
- *tetszőleges $x \in]a,b[$ esetén $f'(x) \geqslant 0$ ($f'(x) \leqslant 0$), és az $]a,b[$ intervallumnak nem létezik olyan $]c,d[$ részintervalluma, hogy $f'(x) = 0$ teljesül, ha $x \in]c,d[$.*

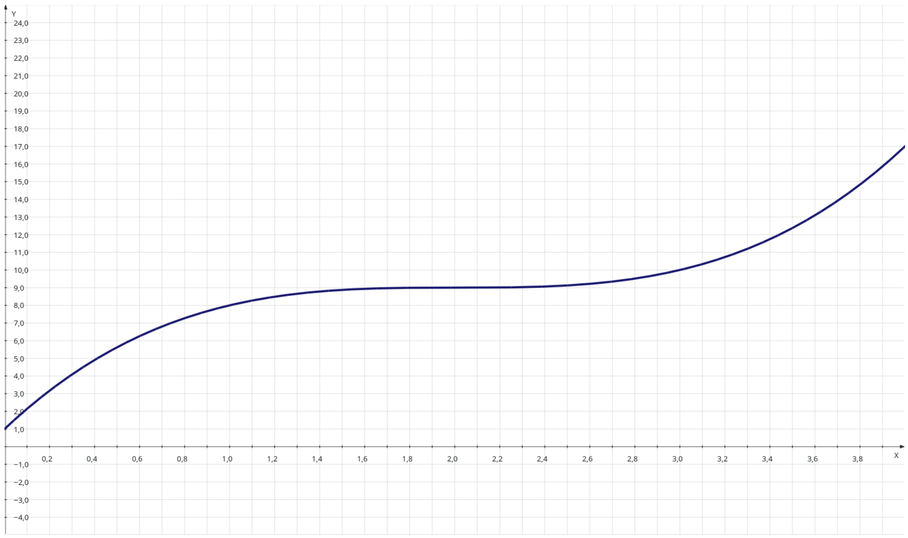
9. Példa. *Tekintsük az*

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x + 1 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

módon megadott $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *függvényt. Ekkor* f *differenciálható* $\mathbb{R}$*-en és*

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 12 = 3(x-2)^2 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

Mivel tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ *esetén* $f'(x) \geqslant 0$*, ezért az* f *függvény szigorúan monoton növekedő* $\mathbb{R}$*-en.*



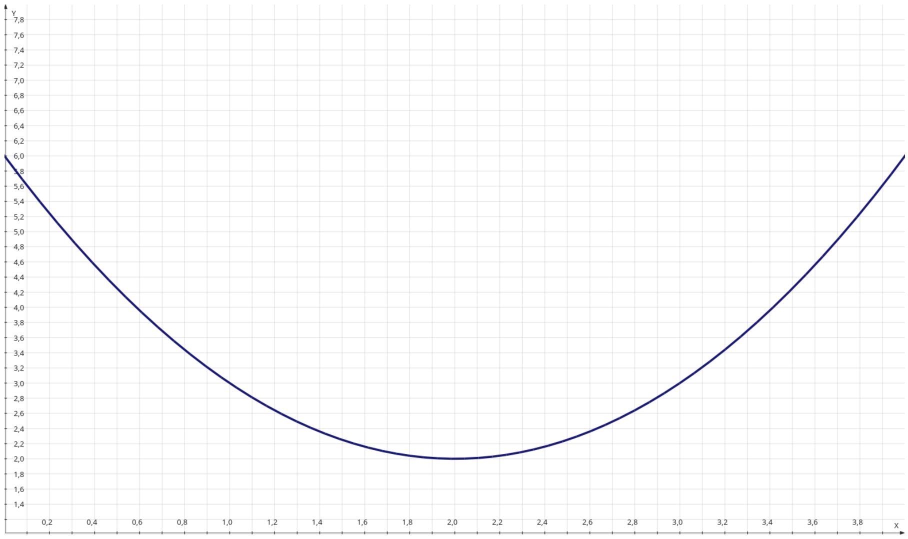
10. Példa. *Legyen*

$$f(x) = x^2 - 4x + 6 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Ekkor f *differenciálható* $\mathbb{R}$*-en és*

$$f'(x) = 2x - 4 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Ha $x \in [2, +\infty[$*, akkor* $f'(x) \geqslant 0$*, ha pedig* $x \in]-\infty, 2]$*, akkor* $f'(x) \leqslant 0$*. Így, az* f *függvény a* $[2, +\infty[$ *intervallumon monoton növekedő, a* $]-\infty, 2]$ *intervallumon pedig monoton csökkenő.*



Szélsőérték

20. Tétel (Szélsőértékre vonatkozó szükséges feltétel). *Legyen* $I \subset \mathbb{R}$ *nemüres, nyílt intervallum,* $f\colon D \to \mathbb{R}$ *függvény. Ha az* f *függvénynek az* $x_0 \in I$ *pontban szélsőértéke van és az* f *függvény differenciálható ebben a pontban, akkor* $f'(x_0) = 0$*.*

21. Tétel (Szélsőértékre vonatkozó elégséges feltétel). *Legyen* $f\colon\,]a,b[\to\mathbb{R}$ *differenciálható függvény,* $x_0\in\,]a,b[$*. Ha van olyan* $\varepsilon>0$*, hogy* $]x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon[\subset]a,b[$*, és*

- *ha* $x\in]x_0-\varepsilon,x_0[$ *esetén* $f'(x)\geqslant 0$*, ha pedig* $x\in]x_0,x_0+\varepsilon[$*, akkor* $f'(x)\leqslant 0$ *teljesül, akkor az* x_0 *pont az* f *függvénynek lokális maximumhelye;*

- *ha* $x\in]x_0-\varepsilon,x_0[$ *esetén* $f'(x)\leqslant 0$*, ha pedig* $x\in]x_0,x_0+\varepsilon[$*, akkor* $f'(x)\geqslant 0$ *teljesül, akkor az* x_0 *pont az* f *függvénynek lokális minimumhelye.*

22. Tétel (Szélsőértékre vonatkozó elégséges feltétel). *Legyen* $n\in\mathbb{N}$*,* $n\geqslant 2$*,* $f\colon\,]a,b[\to\mathbb{R}$ *egy olyan függvény, mely az* $x_0\in]a,b[$ *pontban* n*-szer differenciálható. Tegyük fel, hogy*

$$f'(x_0)=f''(x_0)=\ldots=f^{(n-1)}(x_0)=0,\quad \text{és}\quad f^{(n)}(x_0)\neq 0.$$

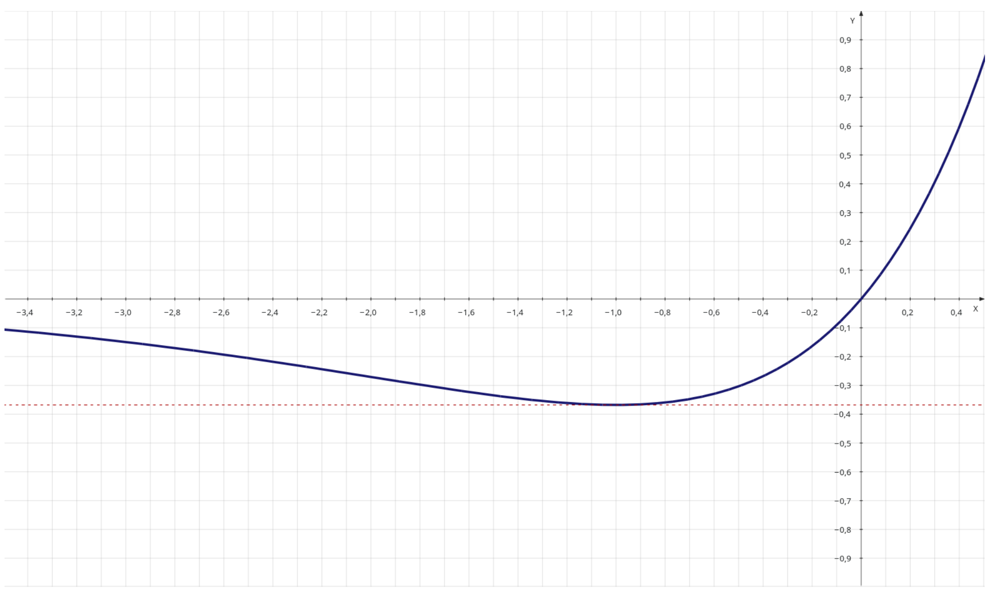
Ekkor, ha

- n *páratlan, akkor az* x_0 *pont nem lokális szélsőértékhelye az* f *függvénynek*

- n *páros és*
  - $f^{(n)}(x_0)>0$*, akkor az* x_0 *pont az* f *függvénynek lokális minimumhelye;*
  - $f^{(n)}(x_0)<0$*, akkor az* x_0 *pont az* f *függvénynek lokális maximumhelye.*

11. Példa. *Legyen*

$$f(x)=xe^x\qquad(x\in\mathbb{R})\,.$$



Ekkor

$$f'(x)=(x+1)e^x\qquad(x\in\mathbb{R})\,.$$

Mivel $f'(x)=0$ *pontosan akkor teljesül, ha* $x=-1$*, ezért ha az* f *függvénynek van szélsőértékhelye, akkor az csak az* $x=-1$ *pont lehet. Mivel*

$$f''(x)=(x+2)e^x\qquad(x\in\mathbb{R})\,,$$

így $f''(-1)=\dfrac{1}{e}>0$*, vagyis az* $x=-1$ *pont az* f *függvénynek lokális minimumhelye.*

12. Példa. *Tekintsük az*

$$f(x) = e^x \sin(x) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

módon megadott $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt. Ekkor

$$f'(x) = e^x(\sin(x) + \cos(x)).$$

Így $f'(x) = 0$ pontosan akkor teljesül, ha

$$e^x(\sin(x) + \cos(x)) = 0,$$

azaz, ha

$$\sin(x) + \cos(x) = 0.$$

Ez azt jelenti, hogy

$$x_n = -\frac{\pi}{4} + k\pi \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

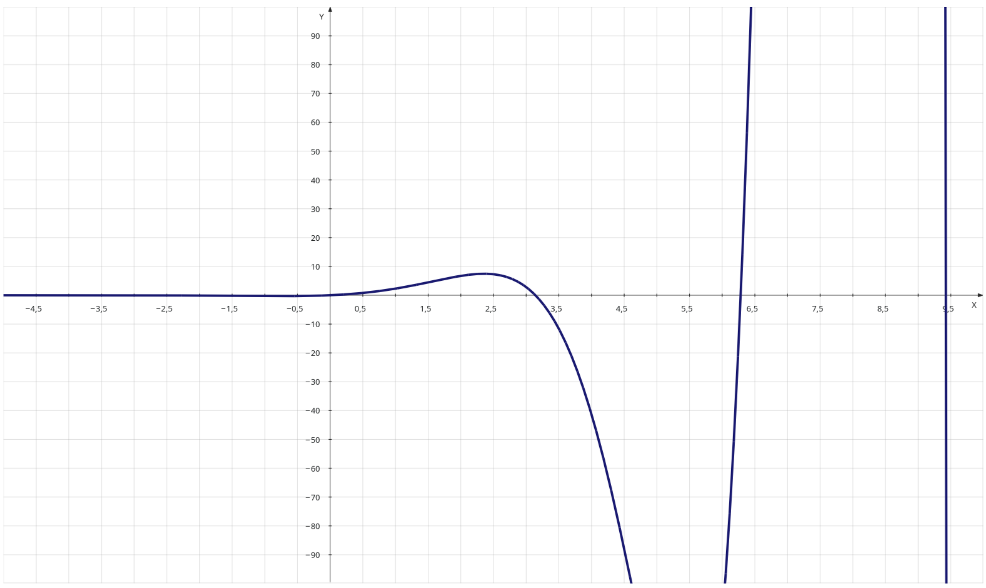
Ezért, ha az f függvénynek van szélsőértékhelye, akkor az csak $-\frac{\pi}{4} + k\pi$ alakú pontokban lehetséges. Mivel

$$f''(x) = 2e^x \cos(x),$$

így

$$f''\left(-\frac{\pi}{4} + k\pi\right) = \begin{cases} e^{x_n}\frac{\sqrt{2}}{2}, & \text{ha } k \text{ páros} \\ -e^{x_n}\frac{\sqrt{2}}{2}, & \text{ha } k \text{ páratlan,} \end{cases}$$

ezért az $-\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ alakú pontok f-nek lokális minimumhelyei, míg a $-\frac{\pi}{4} + (2k+1)\pi$ alakú pontok f-nek lokális maximumhelyei.



Konvexitás

14. Definíció. *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nemüres intervallum. Azt mondjuk, hogy az $f\colon I \to \mathbb{R}$ függvény* ***konvex****, ha minden $x, y \in I$ és minden $\lambda \in [0,1]$ esetén*

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

teljesül.

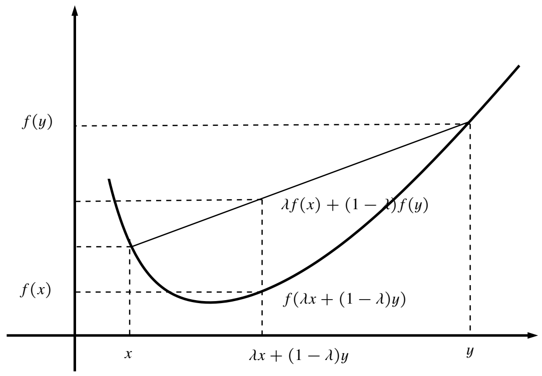
15. Definíció. *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nemüres intervallum. Azt mondjuk, hogy az $f\colon I \to \mathbb{R}$ függvény* ***konkáv****, ha minden $x, y \in I$ és minden $\lambda \in [0, 1]$ esetén*

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

teljesül.

1. Állítás. *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nemüres intervallum, $f\colon I \to \mathbb{R}$ függvény. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.*

- *az f függvény konvex;*
- *a $-f$ függvény konkáv.*



23. Tétel. *Legyen $]a, b[\to \mathbb{R}$ konvex függvény. Ekkor*

- *f folytonos az $]a, b[$ intervallumon;*
- *az f függvénynek minden pontban létezik a bal- és a jobboldali deriváltja.*

24. Tétel. *Legyen $f\colon\ ]a, b[\to \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Ekkor*

- *f pontosan akkor konvex, ha f' monoton növekedő az $]a, b[$ intervallumon;*
- *f pontosan akkor konkáv, ha f' monoton csökkenő az $]a, b[$ intervallumon.*

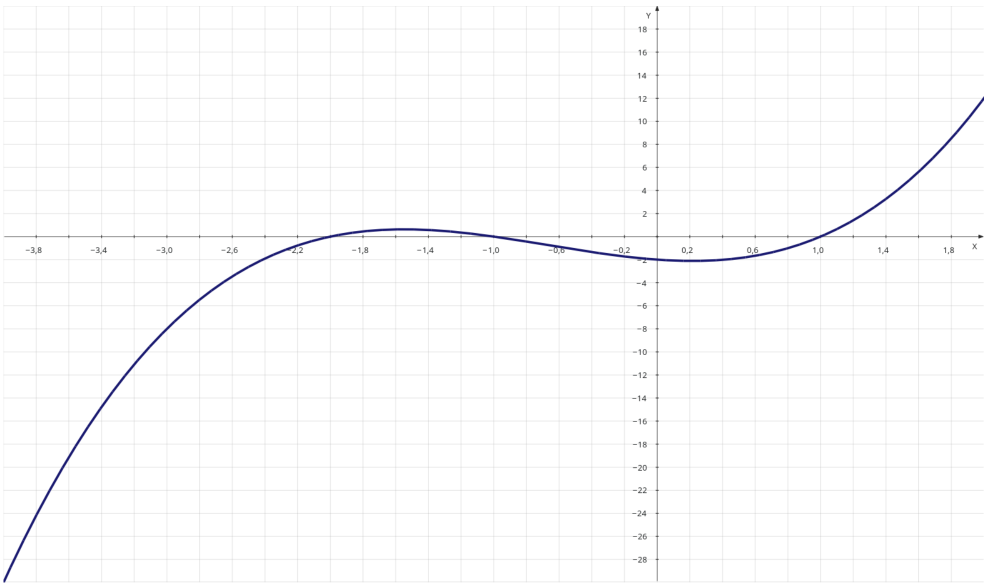
25. Tétel. *Legyen $f\colon\ ]a, b[\to \mathbb{R}$ egy kétszer differenciálható függvény. Ekkor*

- *f pontosan akkor konvex, ha $f''(x) \geqslant 0$ teljesül minden $x \in]a, b[$ esetén;*
- *f pontosan akkor konkáv, ha $f''(x) \leqslant 0$ teljesül minden $x \in]a, b[$ esetén.*

Inflexió

16. Definíció. *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nemüres, nyílt intervallum, $x_0 \in I$, $f\colon D \to \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy az x_0 pont az f függvénynek* ***inflexiós pont****ja, ha van olyan $\varepsilon > 0$, hogy az f függvény az $]x_0 - \varepsilon, x_0[$ intervallumon konvex, az $]x_0, x_0 + \varepsilon[$ intervallumon konkáv, vagy megfordítva.*

26. Tétel (Inflexiós helyre vonatkozó szükséges feltétel). *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nemüres, nyílt intervallum, $x_0 \in I$, $f\colon D \to \mathbb{R}$ olyan függvény, mely differenciálható az x_0 pontban. Ha az x_0 pont inflexiós pontja az f függvénynek, akkor az x_0 pont lokális szélsőértékhelye az f' függvénynek.*



27. Tétel (Inflexiós helyre vonatkozó elégséges feltétel). *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nemüres, nyílt intervallum, $x_0 \in I$, $f \colon D \to \mathbb{R}$ háromszor differenciálható függvény. Ha*

$$f''(x_0) = 0$$

és

$$f'''(x_0) \neq 0,$$

továbbá, f''' folytonos az x_0 pontban, akkor x_0 inflexiós pontja az f függvénynek.

13. Példa. *Tekintsük az*

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

módon megadott $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt.

Ekkor

$$f'(x) = 3x^2 + 4x - 1 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

és

$$f''(x) = 6x + 4 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Ezért

$$f''(x) \geqslant 0 \iff x \in [-2/3\,, +\infty[\quad \text{és} \quad f''(x) \leqslant 0 \iff x \in]-\infty, -2/3]$$

Így, f konvex a $[-2/3, +\infty[$ intervallumon és konkáv a $]-\infty, -2/3]$ intervallumon.

Továbbá,

$$f''\left(-\frac{2}{3}\right) = 6\left(-\frac{2}{3}\right) + 4 = 0$$

és

$$f'''(x) = 6 \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ezért

$$f'''\left(-\frac{2}{3}\right) = 6 \neq 0,$$

vagyis az $x_0 = -\dfrac{2}{3}$ pont az f függvénynek inflexiós pontja.

14. Példa. *Legyen*

$$f(x) = \ln(1+x^2) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Ekkor

$$f''(x) = -\frac{2x^2-2}{(x^2+1)^2} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Ebben az esetben $f''(x) \geqslant 0$ *pontosan akkor teljesül, ha*

$$-\frac{2x^2-2}{(x^2+1)^2} \geqslant 0,$$

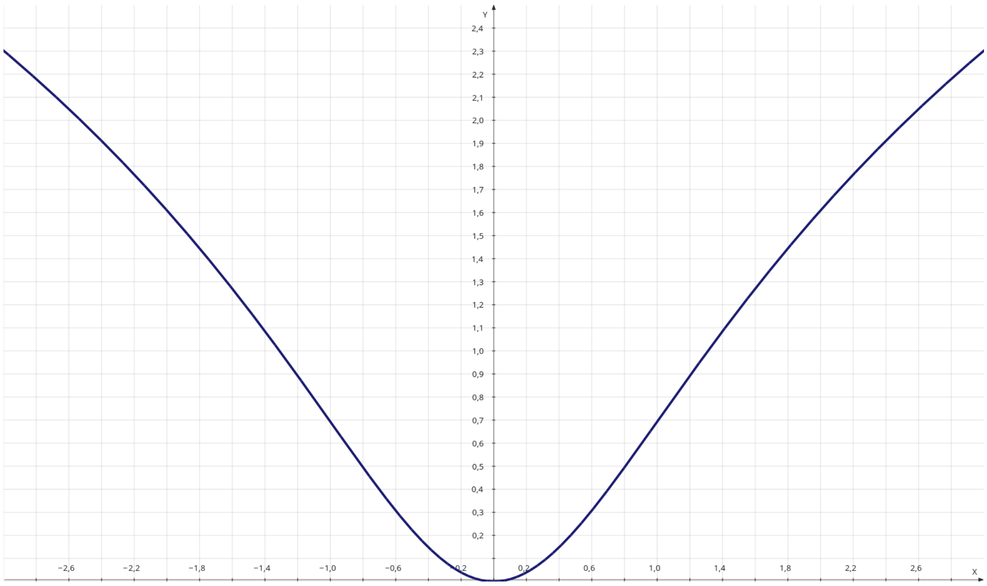
azaz, ha

$$-2x^2+2 \geqslant 0,$$

ami pontosan akkor áll fenn, ha $|x| \leqslant 1$. *Továbbá,*

$$f''(\pm 1) = 0 \quad \text{és} \quad f'''(1) = -1 \neq 0 \quad f'''(-1) = -\frac{8}{125} \neq 0,$$

ezért az $x = -1$ *és* $x = 1$ *pontok az* f *függvénynek inflexiós pontjai, valamint az* f *függvény konkáv a* $]-\infty, -1]$ *intervallumon, a* $]-1, 1[$ *intervallumon konvex, az* $[1, +\infty[$ *intervallumon pedig konkáv.*



Egy f függvény **teljes függvényvizsgálat**ánál az alábbiakat határozzuk meg

- f értelmezési tartományát ($\mathscr{D}_f$);
- f értékkészletét ($\mathscr{R}_f$);
- f páros, páratlan, periodikus függvény-e;
- f zérushelyeit;
- $\mathscr{D}_f$ azon részhalmazait, ahol f előjele állandó;
- f határértékeit $\mathscr{D}_f$ határpontjaiban;
- $\mathscr{D}_f$ azon részhalmazait, ahol f monoton növekedő/csökkenő;
- f szakadási helyeit;

- f differenciálhányados függvényeit;
- f szélsőértékhelyeit és szélsőértékeit;
- $\mathscr{D}_f$ azon részhalmazait, ahol f konvex/konkáv;
- f aszimptotáit.

15. Példa. *Tekintsük az*

$$f(x) = x + \frac{1}{x}$$

*függvényt. Ekkor f **értelmezési tartománya**: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.*

*A **zérushelyek** meghatározásához meg kell oldani az $f(x) = 0$ egyenletet.*

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 0.$$

Mivel az $f(x) = 0$ egyenletnek $\mathscr{D}_f$-en nincsen gyöke, így az f függvénynek nincsen zérushelye.

*Az f függvény **differenciálhányados függvényei***

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \frac{1}{x^2} \\ f''(x) &= \frac{2}{x^3} \\ f^{(n)}(x) &= (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}} \qquad (n \in \mathbb{N}, n \geqslant 3)\,. \end{aligned}$$

*Az f függvénynek csak olyan pontokban lehet **szélsőérték**e, ahol a deriváltja eltűnik. Azonban,*

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Így, ha az f függvénynek van szélsőértékhelye, akkor az csak a ± 1 pontok valamelyikében lehet. Mivel

$$f''(1) = 2 \quad \textit{és} \quad f''(-1) = -2,$$

ezért az $x = -1$ pont az f függvénynek lokális maximumhelye, míg az $x = 1$ pont az f függvénynek lokális minimumhelye. A megfelelő szélsőértékek pedig

$$f(1) = 2 \quad \textit{és} \quad f(-1) = -2.$$

*A **monotonitás**hoz az $f'(x) \geqslant 0$ egyenlőtlenséget kell megoldanunk.*

$$f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x^2} \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[,$$

ezért az f függvény monoton növekedő a $]-\infty, -1[$ és az $]1, +\infty[$ intervallumokon, míg a $[-1, 0[$ és a $]0, 1]$ intervallumokon monoton csökkenő.

Tetszőleges $x \in \mathscr{D}_f$ esetén

$$f(x) = x + \frac{1}{x} = -\left(-x + \frac{1}{-x}\right) = -f(-x)$$

*teljesül, ami azt mutatja, hogy az f függvény **páratlan**. Továbbá, az f függvény **nem páros** és nem is **periodikus**.*

*A **konvexitás** vizsgálatához meg kell oldanunk az $f''(x) \geqslant 0$ egyenlőtlenségek.*

$$f''(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{2}{x^3} \geqslant 0 \Leftrightarrow x > 0.$$

Ezért az f függvény a $]-\infty,0[$ intervallumon konkáv, míg a $]0,+\infty[$ intervallumon konvex.

Az f függvénynek az értelmezési tartománya határpontjaiban vett határértékei pedig

$$\lim_{x\to 0+} x+\frac{1}{x} = +\infty \quad \text{és} \quad \lim_{x\to 0-} x+\frac{1}{x} = -\infty,$$

illetve,

$$\lim_{x\to +\infty} x+\frac{1}{x} = +\infty \quad \text{és} \quad \lim_{x\to -\infty} x+\frac{1}{x} = -\infty.$$

Ezeket a határértéktulajdonságokat a szélsőértéknél kapottakkal egybevetve, a Bolzano-féle középértéktétel miatt az f függvény minden -2-nél kisebb vagy egyenlő és minden 2-nél nagyobb vagy egyenlő valós számot felvesz értékül, azaz,

$$\mathscr{R}_f = \mathbb{R}\setminus]-2,2[.$$