

Alkalmazott matematika

Baran Ágnes

Gyengén meghatározott rendszerek

Gyengén meghatározott lineáris egyenletrendszerek

1. feladat

Oldja meg Matlab-bal az $Ax = b$ lineáris egyenletrendszert, ha

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0.99 \\ 0.99 & 0.98 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1.99 \\ 1.97 \end{bmatrix} \text{ ill. } b = \begin{bmatrix} 1.98 \\ 1.98 \end{bmatrix}.$$

Hasonlítsa össze a relatív eltérést a jobboldali vektorok között, illetve a megoldásvektorok között. Számítsa ki a mátrix kondíciós számát! (Használja a `cond` függvényt.)

2. feladat

Tegyük fel, hogy az $Ax = b$ egyenletrendszert akarjuk megoldani, ahol a b vektor esetlegesen hibával terhelt. Legfeljebb mekkora lehet a megoldás relatív hibája (∞ -normában), ha tudjuk, hogy a b vektor relatív hibája legfeljebb 0.01 (∞ -normában)?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 3 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

Gyengén meghatározott lineáris egyenletrendszerek

3. feladat

Matlab-bal oldjuk meg a következő 100×100 -as lineáris egyenletrendszert:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{99} \\ x_{100} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -98 \\ -97 \\ -96 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A mátrix előállításához használhatjuk a **ones**, **triu** és **eye** függvényeket. Ezután perturbáljuk egy kicsit a jobb oldalt: legyen $b(100)=1.00001$. Oldjuk meg újra a rendszert! Számítsuk ki a mátrix kondíciós számát!

4. feladat

Írjon 1-1 Octave/Matlab függvényt az 1 -, 2 -, ∞ -vektornormák, illetve az 1 - és ∞ -mátrixnormák számítására.

5. feladat

Számítsa ki a 3. feladatban adott b és x vektorok ∞ -normáját az eredeti és a perturbált rendszer esetén is.

6. feladat

Olvassa el a `norm` és a `normest` függvény help-jét.

Példa (Hilbert-mátrix)

$$H_n = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & \cdots & 1/n \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & \cdots & 1/(n+1) \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & \cdots & 1/(n+2) \\ \vdots & & & & \\ 1/n & 1/(n+1) & 1/(n+2) & \cdots & 1/(2n-1) \end{pmatrix}$$

6. feladat

Számítsa ki a 6×6 -os Hilbert-mátrix kondíciós számát! (Használja a `cond` és `hilb` beépített függvényeket!) Legyen B egy 6×6 -os véletlen mátrix (használja a `rand` függvényt), számítsa ki B kondíciós számát is (végezzen több kísérletet)!

Megjegyzés

Nagy mátrixok esetén a `cond` függvény helyett használjuk a `condest` függvényt, amely az 1-normában vett kondíciós szám becslését adja (anélkül, hogy kiszámítaná A^{-1} -et.)