Az informatika logikai alapjai
7. előadás

Vaszil György

vaszil.gyorgy@inf.unideb.hu

I. emelet 110-es szoba

(Aszalós László diasora alapján)

Tartalom

- **Klasszikus elsőrendű nyelv**
- **Szintaxis, kis szemantikai kitérővel**
- Szabad és kötött változók

Klasszikus elsőrendű nyelv - definíció

Klasszikus elsőrendű nyelven az $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ rendezett ötöst értjük, ahol

- $LC = \{\neg, \supset, \wedge, \vee, \equiv, =, \forall, \exists, (,)\}$ (a nyelv logikai konstansainak halmaza).
- $Var = \{x_n | n = 0, 1, 2, ...\}$ a nyelv változóinak megszámlálhatóan végtelen halmaza.
- $Con = \bigcup_{n=0}^{\infty} (\mathcal{F}(n) \cup \mathcal{P}(n))$ a nyelv nemlogikai konstansainak legfeljebb megszámlálhatóan végtelen halmaza.
  - $\mathcal{F}(0)$ a névparaméterek (névkonstansok),
  - $\mathcal{F}(n)$ az n argumentumú ($n = 1, 2, \ldots$) függvényjelek (műveleti jelek),
  - $\mathcal{P}(0)$ az állításparaméterek (állításkonstansok),
  - $\mathcal{P}(n)$ az n argumentumú ($n = 1, 2, \ldots$) predikátumparaméterek (predikátumkonstansok) halmaza.

Klasszikus elsőrendű nyelv - definíció

Klasszikus elsőrendű nyelven az $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ rendezett ötöst értjük, ahol

- $LC = \{\neg, \supset, \wedge, \vee, \equiv, =, \forall, \exists, (,)\}$ (a nyelv logikai konstansainak halmaza).
- $Var = \{x_n | n = 0, 1, 2, ...\}$ a nyelv változóinak megszámlálhatóan végtelen halmaza.
- $Con = \bigcup_{n=0}^{\infty} (\mathcal{F}(n) \cup \mathcal{P}(n))$ a nyelv nemlogikai konstansainak legfeljebb megszámlálhatóan végtelen halmaza.
    - $\mathcal{F}(0)$ a névparaméterek (névkonstansok),
    - $\mathcal{F}(n)$ az n argumentumú ($n = 1, 2, \ldots$) függvényjelek (műveleti jelek),
    - $\mathcal{P}(0)$ az állításparaméterek (állításkonstansok),
    - $\mathcal{P}(n)$ az n argumentumú ($n = 1, 2, \ldots$) predikátumparaméterek (predikátumkonstansok) halmaza.

Elsőrendű nyelv, V.M. 2.10.2/e

$\mathcal{F}(0) = \{$ Péter, én $\}$

$\mathcal{F}(1) = \{$ édesanyja (–) $\}$

$\mathcal{P}(0) = \{$ havazik $\}$

$\mathcal{P}(1) = \{$ piros (–) $\}$

$\mathcal{P}(2) = \{$ munkatársak (–, –) $\}$

$\underbrace{\text{Péter édesanyja}}_{\text{édesanyja(Péter)}}$ $\underbrace{\text{édesanyám}}_{\text{édesanyja(én)}}$ munkatársa.

munkatársak(édesanyja(Péter), édesanyja(én))

Megjegyzés – Con

A névparaméterek, függvényjelek, állításparaméterek, predikátumparaméterek csak elnevezések. Azt, hogy pontosan mely konkrét konstanst, függvényt, állítást és tulajdonságot/relációt jelölik, majd csak az interpretáció megadásakor derül ki.

Klasszikus elsőrendű nyelv - definíció folytatása

- Az LC, Var, $\mathcal{F}(n)$, $\mathcal{P}(n)$ halmazok ($n = 0, 1, 2, \ldots$) páronként diszjunktak.
- A nyelv terminusainak a halmazát, azaz a Term halmazt az alábbi induktív definíció adja meg:
  - $Var \cup \mathcal{F}(0) \subseteq Term$
  - Ha $f \in \mathcal{F}(n)$, ($n=1, 2, \ldots$), és $t_1, t_2, \ldots, t_n \in Term$, akkor $f(t_1,t_2, \ldots, t_n) \in Term$.
- A nyelv formuláinak a halmazát, azaz a Form halmazt az alábbi induktív definíció adja meg:
  - $\mathcal{P}(0) \subseteq Form$
  - Ha $t_1, t_2 \in Term$, akkor $(t_1=t_2) \in Form$
  - Ha $P \in \mathcal{P}(n)$, ($n=1, 2, \ldots$), és $t_1, t_2, \ldots, t_n \in Term$, akkor $P(t_1,t_2, \ldots, t_n) \in Form$.
  - Ha $A \in Form$, akkor $\neg A \in Form$.
  - Ha $A, B \in Form$, akkor $(A \supset B), (A \wedge B), (A \vee B), (A \equiv B) \in Form$.
  - Ha $x \in Var$, $A \in Form$, akkor $\forall x A, \exists x A \in Form$.

Elsőrendű nyelv, V.M. 2.D.2/e

$\mathcal{F}(0) = \{$ Péter, én $\}$

$\mathcal{F}(1) = \{$ édesanyja (–) $\}$

$\mathcal{P}(0) = \{$ havazik $\}$

$\mathcal{P}(1) = \{$ piros (–) $\}$

$\mathcal{P}(2) = \{$ munkatársak (–, –) $\}$

Péter édesanyja édesanyám munkatársa.

édesanyja(Péter) édesanyja(én)

munkatársak(édesanyja(Péter), édesanyja(én))

Terminusok: ≈ „nevek"

– névkonstansok

– névből nevet képző függvények

Klasszikus elsőrendű nyelv - definíció folytatása

- Az LC, Var, $\mathcal{F}(n)$, $\mathcal{P}(n)$ halmazok (n = 0, 1, 2, . . .) páronként diszjunktak.
- A nyelv **terminusainak** a halmazát, azaz a Term halmazt az alábbi induktív definíció adja meg:
  - $Var \cup \mathcal{F}(0) \subseteq Term$
  - Ha $f \in \mathcal{F}(n)$, (n=1, 2, ...), és $t_1, t_2, ..., t_n \in Term$, akkor $f(t_1, t_2, ..., t_n) \in Term$.
- A nyelv **formuláinak** a halmazát, azaz a Form halmazt az alábbi induktív definíció adja meg:
  - $\mathcal{P}(0) \subseteq Form$
  - Ha $t_1, t_2 \in Term$, akkor $(t_1 = t_2) \in Form$
  - Ha $P \in \mathcal{P}(n)$, (n=1, 2, . . .), és $t_1, t_2, ..., t_n \in Term$, akkor $P(t_1, t_2, ..., t_n) \in Form$.
  - Ha $A \in Form$, akkor $\neg A \in Form$.
  - Ha $A, B \in Form$, akkor $(A \supset B)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \equiv B) \in Form$.
  - Ha $x \in Var$, $A \in Form$, akkor $\forall x A$, $\exists x A \in Form$.

Elsőrendű nyelv, V.M. 2.0.2/e

$\mathcal{F}(0) = \{\boxed{\text{Péter, én}}\}$

$\mathcal{F}(1) = \{\text{édesanyja}(-)\}$

$\mathcal{P}(0) = \{\text{havazik}\}$

$\mathcal{P}(1) = \{\text{piros}(-)\}$

$\mathcal{P}(2) = \{\text{munkatársak}(-,-)\}$

$\boxed{\underbrace{\text{Péter édesanyja}}_{\text{édesanyja(Péter)}}}$ $\boxed{\underbrace{\text{édesanyám}}_{\text{édesanyja(én)}}}$ munkatársa.

munkatársak(édesanyja(Péter), édesanyja(én))

Terminusok : ≈ „nevek"

– névkonstansok

– nevekből nevet képző függvények

Klasszikus elsőrendű nyelv - definíció folytatása

- Az LC, Var, $\mathcal{F}(n)$, $\mathcal{P}(n)$ halmazok (n = 0, 1, 2, . . .) páronként diszjunktak.
- A nyelv **terminusainak** a halmazát, azaz a Term halmazt az alábbi induktív definíció adja meg:
  - $Var \cup \mathcal{F}(0) \subseteq Term$
  - Ha $f \in \mathcal{F}(n)$, (n=1, 2, ...), és $t_1, t_2, ..., t_n \in Term$, akkor $f(t_1, t_2, ..., t_n) \in Term$
- A nyelv **formuláinak** a halmazát, azaz a Form halmazt az alábbi induktív definíció adja meg:
  - $\mathcal{P}(0) \subseteq Form$
  - Ha $t_1, t_2 \in Term$, akkor $(t_1 = t_2) \in Form$
  - Ha $P \in \mathcal{P}(n)$, (n=1, 2, . . .), és $t_1, t_2, ..., t_n \in Term$, akkor $P(t_1, t_2, ..., t_n) \in Form$.
  - Ha $A \in Form$, akkor $\neg A \in Form$.
  - Ha $A, B \in Form$, akkor $(A \supset B)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \equiv B) \in Form$.
  - Ha $x \in Var$, $A \in Form$, akkor $\forall x A$, $\exists x A \in Form$.

Elsőrendű nyelv, V.M. 2.0.2/e

$\mathcal{F}(0) = \{$ Péter, én $\}$

$\mathcal{F}(1) = \{$ édesanyja $(-)$ $\}$

$\mathcal{P}(0) = \{$ $\boxed{\text{havazik}}$ $\}$

$\mathcal{P}(1) = \{$ piros $(-)$ $\}$

$\mathcal{P}(2) = \{$ munkatársak $(-,-)$ $\}$

Péter édesanyja édesanyám munkatársa.

édesanyja(Péter) édesanyja(én)

$\boxed{\text{munkatársak(édesanyja(Péter), édesanyja(én))}}$

Klasszikus elsőrendű nyelv - definíció folytatása

- Az LC, Var, $\mathcal{F}(n)$, $\mathcal{P}(n)$ halmazok ($n = 0, 1, 2, \ldots$) páronként diszjunktak.
- A nyelv **terminusainak** a halmazát, azaz a Term halmazt az alábbi induktív definíció adja meg:
  - $Var \cup \mathcal{F}(0) \subseteq Term$
  - Ha $f \in \mathcal{F}(n)$, $(n=1, 2, \ldots)$, és $t_1, t_2, \ldots, t_n \in Term$, akkor $f(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in Term$.
- A nyelv **formuláinak** a halmazát, azaz a Form halmazt az alábbi induktív definíció adja meg:
  - $\boxed{\mathcal{P}(0) \subseteq Form}$
  - Ha $t_1, t_2 \in Term$, akkor $(t_1 = t_2) \in Form$
  - $\boxed{\text{Ha } P \in \mathcal{P}(n),\ (n=1, 2, \ldots), \text{ és } t_1, t_2, \ldots, t_n \in Term, \text{ akkor } P(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in Form.}$
  - Ha $A \in Form$, akkor $\neg A \in Form$.
  - Ha $A, B \in Form$, akkor $(A \supset B)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \equiv B) \in Form$.
  - Ha $x \in Var$, $A \in Form$, akkor $\forall x A$, $\exists x A \in Form$.

Formulák ← „állítások”

- állításkonstansok
- akárhány argumentumú predikátumjelek, melyekbe terminusokat helyettesítünk

- az egyenlőség, mint speciális predikátum
- az eddigieket logikai összekötő jelekkel kombinálhatjuk, és
- az eddigieket kvantálhatjuk:
  - Ha x változó ($x \in Var$) és A formula, akkor
    - $\forall x\ A$
    - $\exists x\ A$

    is formula

Megjegyzés

A terminusok/termek elneveznek egy objektumot, így például számok esetén term lesz a 0, x, x+2, vagy a sin(x).

A formulák pedig állítanak valamit ezekről a termekről: P(x), f(x,g(x))=0 vagy x+2≥y.

Természetesen, az hogy melyek ezek a megnevezett objektumok, illetve hogy igazak az előbbi állítások, csak az interpretáció ismeretében eldönthető. Amíg nem tudjuk, hogy mit jelöl a P (páros, vagy esetleg prím), és nem tudjuk, hogy mennyi az x, nem lehet megmondani, hogy érvényes erre a x-re a P tulajdonság, vagy sem.

Szemantikai kitérő - Előzetes, részletesen később

Az elsőrendű logika szemantikája az alábbi komponensekből épül fel:

Interpretáció | Értékelés | Elsőrendű szemantikai szabályok | Alaptételek

Definíció

Az $\langle U, \varrho \rangle$ párt az $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ **elsőrendű nyelv** egy interpretációjának nevezzük, ha

1. $U \neq \emptyset$, azaz U nemüres halmaz;
2. $Dom(\varrho) = Con$, azaz a ϱ a Con halmazon értelmezett függvény, amelyre teljesülnek a következők:
   a. Ha $a \in \mathcal{F}(0)$, akkor $\varrho(a) \in U$;
   b. Ha $f \in \mathcal{F}(n)$ $(n \neq 0)$, akkor $\varrho(f)$ az $U^{(n)}$ halmazon értelmezett az U halmazba képező függvény $(\varrho(f): U^{(n)} \to U)$;
   c. Ha $p \in \mathcal{P}(0)$, akkor $\varrho(p) \in \{0, 1\}$;
   d. Ha $P \in \mathcal{P}(n)$ $(n \neq 0)$, akkor $\varrho(P) \subseteq U^{(n)}$. -- az univerzum objektum n-esei, melyekre P teljesül

$|P(a_1, a_2, \ldots a_n)|_\varrho = 1$, ha $(a_1, a_2, \ldots a_n) \in \varrho(P)$

Szemantikai kitérő - Előzetes, részletesen később

$|\forall x\, P(x)|_\varrho = 1$, ha ϱ szerint P az univerzum összes elemére teljesül („minden")

$|\exists x\, P(x)|_\varrho = 1$, ha ϱ szerint P az univerzum legalább egyik elemére teljesül („létezik")

Az elsőrendű logika szemantikája az alábbi komponen

Interpretáció | Értékelés | Elsőrendű szemantikai sza

Definíció

Az $\langle U, \varrho \rangle$ párt az $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ **elsőrendű nyelv** egy interpretációjának nevezzük, ha

1. $U \neq \emptyset$, azaz U nemüres halmaz;
2. $Dom(\varrho) = Con$, azaz a ϱ a Con halmazon értelmezett függvény, amelyre teljesülnek a következők:
   a. Ha $a \in \mathcal{F}(0)$, akkor $\varrho(a) \in U$;
   b. Ha $f \in \mathcal{F}(n)$ $(n \neq 0)$, akkor $\varrho(f)$ az $U^{(n)}$ halmazon értelmezett az U halmazba képező függvény $(\varrho(f) : U^{(n)} \to U)$;
   c. Ha $p \in \mathcal{P}(0)$, akkor $\varrho(p) \in \{0, 1\}$;
   d. Ha $P \in \mathcal{P}(n)$ $(n \neq 0)$, akkor $\varrho(P) \subseteq U^{(n)}$. -- az univerzum objektum n-esei, melyekre P teljesül

$|P(a_1, a_2, \ldots a_n)|_\varrho = 1$, ha $(a_1, a_2, \ldots a_n) \in \varrho(P)$

Definíció

Az $\langle U, \varrho \rangle$ párt az $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ **elsőrendű nyelv** egy interpretációjának nevezzük, ha

1. $U \neq \emptyset$, azaz U nemüres halmaz;
2. $Dom(\varrho) = Con$, azaz a ϱ a Con halmazon értelmezett függvény, amelyre teljesülnek a következők:
   a. Ha $a \in \mathcal{F}(0)$, akkor $\varrho(a) \in U$;
   b. Ha $f \in \mathcal{F}(n)$ $(n \neq 0)$, akkor $\varrho(f)$ az $U^{(n)}$ halmazon értelmezett az U halmazba képező függvény $\left(\varrho(f): U^{(n)} \to U\right)$;
   c. Ha $p \in \mathcal{P}(0)$, akkor $\varrho(p) \in \{0, 1\}$;
   d. Ha $P \in \mathcal{P}(n)$ $(n \neq 0)$, akkor $\varrho(P) \subseteq U^{(n)}$ -- az univerzum objektum n-esei, melyekre P teljesül

-legyen 0 argumentumú predika

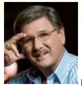
$U =$ a város lakói

$\mathcal{F}(0) = \{$péter, én, juli-néni, Mari-néni$\}$

$\mathcal{F}(1) = \{$édesanyja(-)$\}$

$\mathcal{P}(1) = \{$tanul(-), dolgozik(-)$\}$

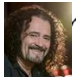
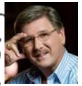
$\mathcal{P}(2) = \{$munkatársak(-,-)$\}$

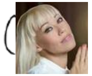
ϱ(Péter) =  ϱ(én) =  ϱ(Juli-néni) = 

ϱ(Mari-néni) = 

ϱ(édesanyja) = f, ahol f() = 

f() = 

ϱ(tanul) = {  ,  } ϱ(dolgozik) = {  ,  ,  }

ϱ(munkatársak) = { ( , ) }

Definíció

Az $\langle U, \varrho \rangle$ párt az $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ **elsőrendű nyelv** egy interpretációjának nevezzük, ha

1. $U \neq \emptyset$, azaz U nemüres halmaz;
2. $Dom(\varrho) = Con$, azaz a ϱ a Con halmazon értelmezett függvény, amelyre teljesülnek a következők:
   a. Ha $a \in \mathcal{F}(0)$, akkor $\varrho(a) \in U$;
   b. Ha $f \in \mathcal{F}(n)$ $(n \neq 0)$, akkor $\varrho(f)$ az $U^{(n)}$ halmazon értelmezett az U halmazba képező függvény ($\varrho(f) : U^{(n)} \to U$);
   c. Ha $p \in \mathcal{P}(0)$, akkor $\varrho(p) \in \{0, 1\}$;
   d. Ha $P \in \mathcal{P}(n)$ $(n \neq 0)$, akkor $\varrho(P) \subseteq U^{(n)}$ -- az univerzum objektum n-esei, melyekre P teljesül

$U =$ a város lakói

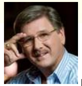
$\mathcal{F}(0) = \{$ Péter, én, Juli-néni, Mari-néni $\}$

$\mathcal{F}(1) = \{$ édesanyja(-) $\}$

$\mathcal{P}(1) = \{$ tanul(-), dolgozik(-) $\}$

$\mathcal{P}(2) = \{$ munkatársak(-,-) $\}$

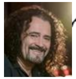
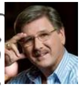
$$\boxed{\begin{array}{l} |\forall x \text{ tanul}(x)|_\varrho = 0 \\ |\exists x \text{ tanul}(x)|_\varrho = 1 \end{array}}$$

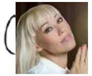
ϱ(Péter) =  ϱ(én) =  ϱ(Juli-néni) = 

ϱ(Mari-néni) = 

ϱ(édesanyja) = f, ahol f() = 

f() = 

ϱ(tanul) = { ,  } ϱ(dolgozik) = { , ,  }

ϱ(munkatársak) = { (, ) }

Definíció

Az $\langle U, \varrho \rangle$ párt az $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ **elsőrendű nyelv** egy interpretációjának nevezzük, ha

1. $U \neq \emptyset$, azaz U nemüres halmaz;
2. $Dom(\varrho) = Con$, azaz a ϱ a Con halmazon értelmezett függvény, amelyre teljesülnek a következők:
   a. Ha $a \in \mathcal{F}(0)$, akkor $\varrho(a) \in U$;
   b. Ha $f \in \mathcal{F}(n)$ $(n \neq 0)$, akkor $\varrho(f)$ az $U^{(n)}$ halmazon értelmezett az U halmazba képező függvény $\left(\varrho(f): U^{(n)} \to U\right)$;
   c. Ha $p \in \mathcal{P}(0)$, akkor $\varrho(p) \in \{0, 1\}$;
   d. Ha $P \in \mathcal{P}(n)$ $(n \neq 0)$, akkor $\varrho(P) \subseteq U^{(n)}$ -- az univerzum objektum n-esei, melyekre P teljesül

$U =$ a város lakói

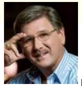
$\mathcal{F}(0) = \{$Péter, én, Juli-néni, Mari-néni$\}$

$\mathcal{F}(1) = \{$édesanyja(-)$\}$

$\mathcal{P}(1) = \{$tanul(-), dolgozik(-)$\}$

$\mathcal{P}(2) = \{$munkatársak(-,-)$\}$

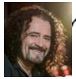
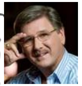
$\boxed{\exists x(\text{tanul}(x) \wedge \text{dolgozik}(x)) \quad \neg\text{munkatársak}(\text{Péter}, \text{én})}$

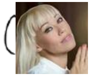
ϱ(Péter) =  ϱ(én) =  ϱ(Juli-néni) = 

ϱ(Mari-néni) = 

ϱ(édesanyja) = f, ahol f() = 

f() = 

ϱ(tanul) = { ,  } ϱ(dolgozik) = { , ,  }

ϱ(munkatársak) = { (, ) }

Tartalom

- Klasszikus elsőrendű nyelv
- **Szintaxis**, kis szemantikai kitérővel, folytatás
- Szabad és kötött változók

Elsőrendű atomi formula

Definíció. Ha $L^{(1)}$ egy elsőrendű nyelv (azaz $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$), akkor az elsőrendű atomi formulák halmazát (jelölés: AtForm) az alábbi induktív definíció adja meg:

- $\mathcal{P}(0) \subseteq AtForm$
- Ha t_1, $t_2 \in Term$, akkor $(t_1 = t_2) \in AtForm$
- Ha $P \in \mathcal{P}(n)$, $(n = 1, 2, \ldots)$, és $t_1, t_2, \ldots, t_n \in Term$, akkor $P(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in AtForm$.

Megjegyzés. Az elsőrendű jelzőt, ha félreértést nem okoz, akkor gyakran elhagyjuk, s csak atomi formulákról vagy prímformulákról beszélünk.

AtForm halmaz elemeit elsőrendű atomi formuláknak vagy elsőrendű prímformuláknak nevezzük.

Példa V.M. 2.P.4 alapján

$U = \mathbb{N}$ (a természetes számok)

$\mathcal{F}(0) = \{ \mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}, \mathrm{IV}, \mathrm{V} \}$

$\mathcal{F}(1) = \{ \mathrm{ktsz}(-) \}$

$\mathcal{P}(1) = \{ ps(-), ej(-) \}$

$\mathcal{P}(2) = \{ >(-,-) \}$

Példák:
- $\exists x \; ps(x)$
- $\forall x \; ej(x)$
- $\neg(\exists x > (x, \mathrm{V}))$

Elsőrendű atomi formula

Definíció. Ha $L^{(1)}$ egy elsőrendű nyelv (azaz $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$), akkor az **elsőrendű atomi formulák halmazát** (jelölés: AtForm) az alábbi induktív definíció adja meg:

- $\mathcal{P}(0) \subseteq AtForm$
- Ha $t_1, t_2 \in Term$, akkor $(t_1 = t_2) \in AtForm$
- Ha $P \in \mathcal{P}(n)$, ($n = 1, 2, \ldots$), és $t_1, t_2, \ldots, t_n \in Term$, akkor $P(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in AtForm$.

Megjegyzés. Az elsőrendű jelzőt, ha félreértést nem okoz, akkor gyakran elhagyjuk, s csak atomi formulákról vagy prímformulákról beszélünk.

AtForm halmaz elemeit elsőrendű atomi formuláknak vagy **elsőrendű prímformuláknak** nevezzük.

mutassunk atomi formulákat

Elsőrendű nyelv, V.M. 2.0.2/e

$\mathcal{F}(0) = \{$ Péter, én $\}$

$\mathcal{F}(1) = \{$ édesanyja $(-)$ $\}$

$\mathcal{P}(0) = \{$ havazik $\}$

$\mathcal{P}(1) = \{$ piros $(-)$ $\}$

$\mathcal{P}(2) = \{$ munkatársak $(-,-)$ $\}$

Péter édesanyja édesa ám munkatársa.

édesanyja(Péter) édesanyja(én)

munkatársak(édesanyja(Péter), édesanyja(én))

Elsőrendű atomi formula

Definíció. Ha $L^{(1)}$ egy elsőrendű nyelv (azaz $L^{(1)} = \langle$ LC, Var, Con, Term, Form $\rangle$), akkor az **elsőrendű atomi formulák halmazát** (jelölés: AtForm) az alábbi induktív definíció adja meg:

- $\mathcal{P}(0) \subseteq$ AtForm
- Ha t_1, $t_2 \in$ Term, akkor $(t_1 = t_2) \in$ AtForm
- Ha $P \in \mathcal{P}(n)$, $(n = 1, 2, \ldots)$, és $t_1, t_2, \ldots, t_n \in$ Term, akkor $P(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in$ AtForm.

Megjegyzés. Az elsőrendű jelzőt, ha félreértést nem okoz, akkor gyakran elhagyjuk, s csak atomi formulákról vagy prímformulákról beszélünk.

AtForm halmaz elemeit elsőrendű atomi formuláknak vagy **elsőrendű prímformuláknak** nevezzük.

mutassunk atomi formulákat

Közvetlen részformula definíciója elsőrendű nyelvben

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy tetszőleges elsőrendű nyelv.

- Ha A elsőrendű atomi formula, akkor nincs közvetlen részformulája;
- $\neg A$ egyetlen közvetlen részfomulája A;
- Az $(A \supset B)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \equiv B)$ formulák közvetlen részformulái az A és a B formulák.
- $\forall x A$ egyetlen közvetlen részformulája A;
- $\exists x A$ egyetlen közvetlen részformulája A.

Részformula, közvetlen részformula

V.M. 1.P.7 a, b, c, d

a) $(P(x) \wedge P(y))$

b) $Q(f(x), g(y, x), y)$

c) $\forall x \exists y \exists z\, Q(x, y, z)$

d) $(\exists x\, Q(x, y, x) \supset \neg(P(g(x, y)) \wedge \forall z\, P(z)))$

Közvetlen részformula definíciója elsőrendű nyelvben

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy tetszőleges elsőrendű nyelv.

- Ha A elsőrendű atomi formula, akkor nincs közvetlen részformulája;
- ¬A egyetlen közvetlen részfomulája A;
- Az (A⊃B), (A∧B), (A∨B), (A≡B) formulák közvetlen részformulái az A és a B formulák.
- ∀xA egyetlen közvetlen részformulája A;
- ∃xA egyetlen közvetlen részformulája A.

Mi lehet az elsőrendű nyelv, ahol ezek formulák?

Részformula definíciója – közvetlen részformula segítségével

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy tetszőleges elsőrendű nyelv, $A \in Form$ pedig a nyelv tetszőleges formulája. Egy A formula részformuláinak halmaza az a legszűkebb halmaz [jelölés: RF(A)], amelyre teljesül, hogy

- $A \in RF(A)$, (azaz az A formula részformulája önmagának);
- ha $B \in RF(A)$ és C közvetlen részformulája B-nek, akkor $C \in RF(A)$ (azaz, ha egy B formula részformulája A-nak, akkor B összes közvetlen részformulája is részformulája A-nak).

Részformula definíciója – közvetlen részformula nélkül

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy tetszőleges elsőrendű nyelv, $A \in Form$ pedig a nyelv tetszőleges formulája. Az A formula részformuláinak halmaza az a legszűkebb halmaz [jelölés: RF(A)], amelyre teljesül, hogy

- $A \in RF(A)$, azaz az A formula részformulája önmagának;
- ha $\neg B \in RF(A)$, akkor $B \in RF(A)$;
- ha $(B \supset C) \in RF(A)$, akkor $B, C \in RF(A)$;
- ha $(B \wedge C) \in RF(A)$, akkor $B, C \in RF(A)$;
- ha $(B \vee C) \in RF(A)$, akkor $B, C \in RF(A)$;
- ha $(B \equiv C) \in RF(A)$, akkor $B, C \in RF(A)$;
- ha $\forall x B \in RF(A)$, akkor $B \in RF(A)$;
- ha $\exists x B \in RF(A)$, akkor $B \in RF(A)$.

Részformula, közvetlen részformula

V.M. 1.P.7 a, b, c, d

a) $(P(x) \wedge P(y))$

b) $Q(f(x), g(y,x), y)$

c) $\forall x \exists y \exists z\, Q(x,y,z)$

d) $(\exists x\, Q(x,y,x) \supset \neg(P(g(x,y)) \wedge \forall z\, P(z)))$

Részformula definíciója – elsőrendű nyelvben

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy tetszőleges elsőrendű nyelv, $A \in Form$ pedig a nyelv tetszőleges formulája. Az A formula **részformuláinak** halmaza az a legszűkebb halmaz [jelölés: RF(A)], amelyre teljesül, hogy

- $A \in RF(A)$, azaz az A formula részformulája önmagának;
- ha $\neg B \in RF(A)$, akkor $B \in RF(A)$;
- ha $(B \supset C) \in RF(A)$, akkor $B, C \in RF(A)$;
- ha $(B \wedge C) \in RF(A)$, akkor $B, C \in RF(A)$;
- ha $(B \vee C) \in RF(A)$, akkor $B, C \in RF(A)$;
- ha $(B \equiv C) \in RF(A)$, akkor $B, C \in RF(A)$;
- ha $\forall x B \in RF(A)$, akkor $B \in RF(A)$;
- ha $\exists x B \in RF(A)$, akkor $B \in RF(A)$.

Zárójel-elhagyási konvenciók

Az elsőrendű logikában alkalmazott zárójel-elhagyási konvenciók a nulladrendű logikában alkalmazott zárójel-elhagyási konvenciók kibővítése a következő szabályokkal:

- a kvantorok erősebbkek bármely állításlogikai műveletnél,
- az univerzális és az egzisztenciális kvantor egyenrangú (azaz erősségben egyik sem előzi meg a másikat).

Szerkezeti fa (egyszerűbben szoktuk rajzolni)

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy tetszőleges elsőrendű nyelv, $A \in Form$ pedig a nyelv tetszőleges formulája. Az A formula szerkezeti fáján egy olyan véges rendezett fát értünk,

- amelynek csúcsai formulák,
- gyökere az A formula,
- $\neg B$ alakú csúcsának egyetlen gyermeke a B formula,
- $(B \supset C)$, $(B \wedge C)$, $(B \vee C)$, $(B \equiv C)$ alakú csúcsainak két gyermekét a B, illetve a C formulák alkotják,
- $\forall xB$ alakú csúcsának egyetlen gyermeke a B formula,
- $\exists xB$ alakú csúcsának egyetlen gyermeke a B formula,
- levelei prímformulák (atomi formulák).

$$\forall x(\neg\exists x P(f(x)) \vee Q(x,y))$$

$$(\neg\exists x P(f(x)) \vee Q(x,y))$$

$$\neg\exists x P(f(x)) \qquad Q(x,y)$$

$$\exists x P(f(x))$$

$$P(f(x))$$

$$\forall x$$

$$\vee$$

$$\neg \qquad Q(x,y)$$

$$\exists x$$

rajzoljuk le ezt rendesen

Tartalom

- Klasszikus elsőrendű nyelv
- Szintaxis, kis szemantikai kitérővel
- **Szabad és kötött változók**

Szabad változók halmaza

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy elsőrendű nyelv, és $A \in Form$ egy formula. Az A formula szabad változóinak FreeVar(A)-val jelölt halmazát az alábbi induktív definíció adja meg:

- Ha A atomi formula (azaz $A \in AtForm$), akkor a FreeVar(A) halmaz elemei az A formulában előforduló változók.
- Ha az A formula $\neg B$ alakú, akkor $FreeVar(A)=FreeVar(B)$.
- Ha az A formula $(B \supset C)$, $(B \wedge C)$, $(B \vee C)$ vagy $(B \equiv C)$ alakú, akkor $FreeVar(A)=FreeVar(B) \cup FreeVar(C)$.
- Ha az A formula $\forall xB$ vagy $\exists xB$ alakú, akkor $FreeVar(A)=FreeVar(B) \setminus \{x\}$.

Részformula, közvetlen részformula

V.M. 1.P.7 a, b, c, d

a) $(P(x) \wedge P(y))$

b) $Q(f(x), g(y,x), y)$

c) $\forall x \exists y \exists z\, Q(x,y,z)$

d) $(\exists x\, Q(x,y,x) \supset \neg(P(g(x,y)) \wedge \forall z\, P(z)))$

Szabad változók

! A kvantor „prioritása"? (ható köre)

dia helyett a fenti példákkal ?

Szabad változók halmaza

Legyen $L^{(1)}= \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy elsőrendű nyelv, és $A \in Form$ egy formula. Az A formula szabad változóinak FreeVar(A)-val jelölt halmazát az alábbi induktív definíció adja meg:

- Ha A atomi formula (azaz $A \in AtForm$), akkor a FreeVar(A) halmaz elemei az A formulában előforduló változók.
- Ha az A formula $\neg B$ alakú, akkor FreeVar(A)=FreeVar(B).
- Ha az A formula $(B \supset C)$, $(B \wedge C)$, $(B \vee C)$ vagy $(B \equiv C)$ alakú, akkor $FreeVar(A)=FreeVar(B) \cup FreeVar(C)$.
- Ha az A formula $\forall xB$ vagy $\exists xB$ alakú, akkor $FreeVar(A)=FreeVar(B)\setminus\{x\}$.

Kötött változók halmaza

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy elsőrendű nyelv, és $A \in Form$ egy formula. Az A formula kötött változóinak BoundVar(A)-val jelölt halmazát az alábbi induktív definíció adja meg:

- Ha A atomi formula (azaz $A \in AtForm$), akkor a $BoundVar(A) = \emptyset$.
- Ha az A formula $\neg B$ alakú, akkor $BoundVar(A) = BoundVar(B)$.
- Ha az A formula $(B \supset C)$, $(B \wedge C)$, $(B \vee C)$ vagy $(B \equiv C)$ alakú, akkor $BoundVar(A) = BoundVar(B) \cup BoundVar(C)$.
- Ha az A formula $\forall xB$ vagy $\exists xB$ S alakú, akkor $BoundVar(A) = BoundVar(B) \cup \{x\}$.

Részformula, közvetlen részformula

V.M. 1.P.7 a, b, c, d

a) $(P(x) \wedge P(y))$

b) $Q(f(x), g(y, x), y)$

c) $\forall x \exists y \exists z\, Q(x, y, z)$

d) $(\exists x\, Q(x, y, x) \supset \neg(P(g(x, y)) \wedge \forall z\, P(z)))$

Szabad változók

! A kvantor „priorítása"? (ható köre)

dia helyett a fenti példákkal?

Kötött változók

! Ugyanaz a változó lehet szabad és kötött is. pl.

$P(x) \wedge \exists x\, R(x)$

Kötött változók halmaza

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy elsőrendű nyelv, és $A \in Form$ egy formula. Az **A formula kötött változóinak** BoundVar(A)-val jelölt halmazát az alábbi induktív definíció adja meg:

- Ha A atomi formula (azaz $A \in AtForm$), akkor a $BoundVar(A) = \emptyset$.
- Ha az A formula $\neg B$ alakú, akkor $BoundVar(A) = BoundVar(B)$.
- Ha az A formula $(B \supset C)$, $(B \wedge C)$, $(B \vee C)$ vagy $(B \equiv C)$ alakú, akkor $BoundVar(A) = BoundVar(B) \cup BoundVar(C)$.
- Ha az A formula $\forall xB$ vagy $\exists xB$ S alakú, akkor $BoundVar(A) = BoundVar(B) \cup \{x\}$.

Változó előfordulások

Definíció. Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy elsőrendű nyelv, $A \in Form$ egy formula és $x \in Var$ egy változó.

Az x változó valamely A-beli előfordulását szabadnak nevezzük, ha a tekintett előfordulás nem esik az A formula valamely $\forall xB$ vagy $\exists xB$ alakú részformulájába.

Az x változó valamely A-beli előfordulását kötöttnek nevezzük, ha a tekintett előfordulás nem szabad előfordulás.

Nem az felbont az érdekes, hogy egy változó szabad vagy kötött, hanem a

szabad előfordulás vagy kötött előfordulás

· Nézzük meg az 1.8.7/d-t az előző lapon

Részformula, közvetlen részformula

V.M. 1.8.7 a, b, c, d

a) $(P(x) \wedge P(y))$

b) $Q(f(x), g(y, x), y)$

c) $\forall x \exists y \exists z\, Q(x, y, z)$

d) $(\exists x\, Q(x, y, x) \supset \neg(P(g(x, y)) \wedge \forall z\, P(z)))$

Változó előfordulások

Definíció. Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy elsőrendű nyelv, $A \in Form$ egy formula és $x \in Var$ egy változó.

Az **x változó** valamely A-beli **előfordulását szabadnak** nevezzük, ha a tekintett előfordulás nem esik az A formula valamely $\forall xB$ vagy $\exists xB$ alakú részformulájába.

Az **x változó** valamely A-beli **előfordulását kötöttnek** nevezzük, ha a tekintett előfordulás nem szabad előfordulás.

Nyílt és zárt formula

Definíció. Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy elsőrendű nyelv, és $A \in Form$ egy formula. Ha $FreeVar(A) \neq \emptyset$, akkor az A formulát **nyílt formulának** nevezzük. Ha az A formula nem nyílt, akkor **zárt formulának** nevezzük.

Megjegyzés.

- A nyílt formulákat nyitott formuláknak is szokták nevezni.
- Ha A nyílt formula, akkor legalább egy változó legalább egy helyen szabadon fordul elő benne.
- Ha A zárt formula, akkor $FreeVar(A) = \emptyset$.
- Ha A zárt formula, akkor egyetlen változó sem fordul elő benne szabadon, minden változó minden előfordulása kötött.

Nem a feladat az eldöntés, hogy egy változó szabad vagy kötött, hanem a

szabad előfordulás vagy kötött előfordulás

• Nézzük meg az 1.8.7/d-t az előző lapon

Nyílt/zárt formula

• Az előző példák közül melyik milyen?

Részformula, közvetlen részformula

V.M. 1.8.7 a, b, c, d

a) $(P(x) \wedge P(y))$

b) $Q(f(x), g(y,x), y)$

c) $\forall x \exists y \exists z\, Q(x,y,z)$

d) $(\exists x\, Q(x,y,x) \supset \neg(P(g(x,y)) \wedge \forall z\, P(z)))$

Nyílt és zárt formula

Definíció. Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy elsőrendű nyelv, és $A \in Form$ egy formula. Ha $FreeVar(A) \neq \emptyset$, akkor az A formulát **nyílt formulának** nevezzük. Ha az A formula nem nyílt, akkor **zárt formulának** nevezzük.

Megjegyzés.

- A nyílt formulákat nyitott formuláknak is szokták nevezni.
- Ha A nyílt formula, akkor legalább egy változó legalább egy helyen szabadon fordul elő benne.
- Ha A zárt formula, akkor $FreeVar(A) = \emptyset$.
- Ha A zárt formula, akkor egyetlen változó sem fordul elő benne szabadon, minden változó minden előfordulása kötött.

3.P.2. Szabály. Egy változó-előfordulás kötöttségének meghatározása:

- Egy atomi formulában minden változó-előfordulás szabad.
- Az $A \triangle B$ formulában egy változó-előfordulás kötött, ha ez az előfordulás vagy A-ban van és már A-ban kötött, vagy B-ben van és már B-ben kötött.
- A $\neg A$ formulában egy változó-előfordulás kötött, ha ez az előfordulás már A-ban kötött.
- A QxA formulában x minden előfordulása kötött. Ha x egy előfordulása A-ban még szabad volt, akkor ezt az előfordulást a QxA formulában a Q kvantor köti. Egy az x-től különböző változó valamely előfordulása QxA-ban kötött, ha már A-ban is kötött volt.

3.P.3. Megjegyzés. Egy változót a formula *paraméterének* nevezünk, ha van a formulában szabad előfordulása. Egy A formula paramétereinek a halmazára $\mathrm{Par}(A)$-val hivatkozunk.

Tartalom

- Klasszikus elsőrendű nyelv
- Szintaxis, kis szemantikai kitérővel
- Szabad és kötött változók

Xxxx Ide kéne beírni a xénás példát a félév elejéről