

Valós számsorok

Elméleti áttekintés

1. Definíció. Legyen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ egy valós számsorozat, és képezzük az alábbi sorozatot

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= x_1 \\ \sigma_n &= x_1 + \cdots + x_n, \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 2).\end{aligned}$$

Ekkor a $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozatot az $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozatból képzett **sornak** nevezzük, és a továbbiakban $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ -nel jelöljük. Ha

létezik a $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n$ határérték, akkor azt mondjuk, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ sor **konvergens**. A $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ sort **abszolút konvergensnek**

nevezzük, ha a $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ sor konvergens. Ha a $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ sor konvergens, de nem abszolút konvergens, akkor **feltételesen konvergensnek** nevezzük.

1. Tétel (Abszolút konvergencia \Rightarrow konvergencia). Ha egy valós sor abszolút konvergens, akkor konvergens is.

2. Tétel. Ha a $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ sor konvergens, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

3. Tétel (Összehasonlító kritérium). Legyenek $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ és $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ olyan nemnegatív tagú sorok, hogy $x_n \leq y_n$ teljesül minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. Ekkor,

(i) ha $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ konvergens, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ is konvergens; (ii) ha $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ divergens, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ is divergens.

4. Tétel (Összehasonlító kritérium II.). Legyenek $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ és $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ olyan pozitív tagú sorok, melyekre létezik és pozitív a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n}$ határérték. Ekkor a $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ és a $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ sorok egyszerre konvergensnek, illetve egyszerre divergensnek.

5. Tétel (Cauchy-féle gyökkritérium). Legyen $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ egy valós sor.

(i) Ha $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x_n|} < 1$, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ sor abszolút konvergens. (ii) Ha $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x_n|} > 1$, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ sor divergens.

6. Tétel (D'Alembert-féle hányadoskritérium). Legyen $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ egy olyan valós sor, melynek minden tagja nullától különböző.

(i) Ha $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} < 1$, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ sor abszolút konvergens. (ii) Ha $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} > 1$, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ sor divergens.

7. Tétel (Leibniz-féle kritérium alternáló sorokra). Legyen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ egy monoton nullsorozat, ekkor a $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x_n$ sor konvergens.

8. Tétel (Cauchy-féle ritkítási kritérium). Legyen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ egy nemnegatív tagú, monoton csökkenő valós számsorozat. Ekkor a $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ valós sor pontosan akkor konvergens, ha a $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x_{2^n}$ sor konvergens.

9. Tétel (A geometriai sor). Legyen $q \in \mathbb{R}$ olyan, hogy $|q| < 1$, ekkor a $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ sor konvergens, és

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1-q}.$$

10. Tétel (A harmonikus sor). Legyen $\alpha > 0$ adott, ekkor a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ sor abszolút konvergens, ha $\alpha > 1$ és divergens, ha $\alpha \leq 1$.

Feladatok

1. Feladat. A definíció felhasználásával mutassuk meg, hogy az alábbi sorok mindegyike konvergens és határozzuk meg a szóban forgó sorok összegét is.

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} 100 \cdot (0,9)^n$$

$$(e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$$

$$(d) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3^n}$$

$$(f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9n^2 - 3n - 2}$$

2. Feladat. Igazoljuk, hogy a következő sorok divergensek.

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n},$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n},$$

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{0,2}.$$

3. Feladat. Határozzuk meg, hogy az alábbi sorok közül melyek konvergens, abszolút konvergens és melyek divergensek.

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}},$$

$$(d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-1}$$

$$(g) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^2}$$

$$(j) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^3 + 3}$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}},$$

$$(e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}}$$

$$(h) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n}\sqrt{n}}$$

$$(k) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10n+3},$$

$$(f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n}{(6n+1)^3}$$

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n}$$

$$(l) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n-2}}{n^\alpha}$$

4. Feladat. Döntsük el, hogy az alábbi sorok közül melyek konvergens.

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^n},$$

$$(e) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt[n]{3}},$$

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3^n}$$

$$(m) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{3^n + 2^n}$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n},$$

$$(f) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n}{n^2}$$

$$(j) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^n}{n^3}$$

$$(n) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}}$$

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{100^n}{n!},$$

$$(g) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$$

$$(k) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1000n}{(1,1)^n}$$

$$(o) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + (-1)^n}{2^n}$$

$$(d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n},$$

$$(h) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{1+\frac{1}{n}}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

$$(l) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[10]{n}}$$

$$(p) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha \cos^2\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{2^n}$$

5. Feladat. Mely $x \in \mathbb{R}$ számok esetén lesznek a következő sorok (abszolút) konvergens?

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n}$$

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} 4^n x^n$$

$$(e) \sum_{n=1}^{\infty} x^n n$$

$$(g) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{2^n}$$

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-nx}$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} (x-4)^n$$

$$(d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{2^{n+1}}$$

$$(f) \sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx)$$

$$(h) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(x^n)}{n^2}$$

$$(j) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+x)^\alpha}$$

6. Feladat. Igazold, hogy ha a $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ pozitív tagú sor konvergens, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$ sor is konvergens. Igaz-e a megfordítás?

7. Feladat. Bizonyítsd be, hogy ha a $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$ és $\sum_{n=1}^{\infty} y_n^2$ sorok konvergens, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n|$ és a $\sum_{n=1}^{\infty} (x_n + y_n)^2$ sor is konvergens.