Kalkulus

Minimumkérdések és válaszok

Figyelem!

Az írásbeli vizsga során az előadáson elhangzott anyagot fogom számonkérni. Az Önöknek leadott elméleti anyag megtalálható az egyes előadásjegyzetekben. Ezek a https://elearning.unideb.hu/ oldalról tölthetőek le. Ennek a dokumentumnak a célja csupán annyi, hogy egy egyfajta **minimkövetelmény**t határoljon körül. Ez azt jelenti, hogy addig nem érdemes írásbeli vizsgára jelentkezniük, ameddig az itt található elméleti kérdésekre nem tudnak **pontosan** válaszolni.

Valós számsorozatok

1. Legyen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy valós számsorozat. Mit értünk azon, hogy az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens?
Válasz. Azt mondjuk, hogy az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valós számsorozat konvergens, ha létezik olyan $x \in \mathbb{R}$, hogy minden $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $N > 0$ szám, hogy ha $n \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $n > N$, akkor $|x_n - x| < \varepsilon$ teljesül.

2. Legyen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy valós számsorozat. Mit értünk azon, hogy az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat Cauchy-sorozat?
Válasz. Az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot Cauchy-sorozatnak hívjuk, ha bármely $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $N > 0$ szám, hogy ha $n, m \in \mathbb{N}$ olyanok, hogy $n, m > N$, akkor $|x_n - x_m| < \varepsilon$ teljesül.

3. Ismertesse a valós számsorozatokra vonatkozó Cauchy-féle konvergenciakritériumot.
Válasz. Bármely valós számsorozat akkor és csak akkor konvergens, ha Cauchy-sorozat.

4. Ismertesse a Bolzano–Weierstrass-féle kiválasztási tételt.
Válasz. Bármely korlátos valós számsorozatnak létezik konvergens részsorozata.

5. Fogalmazza meg a Rendőr-elvet.
Válasz. Legyenek $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan valós számsorozatok, hogy
$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n$$
és legfeljebb véges sok $n \in \mathbb{N}$ kivételével
$$x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$$
teljesül. Ekkor az $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat is konvergens és
$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} z_n.$$

6. Legyen $r \in \mathbb{Q}, r > 0$ és
$$x_n = \frac{1}{n^r} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$
Konvergens-e az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat, és ha igen, akkor mi a határértéke?
Válasz. A fent megadott $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens és
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^r} = 0.$$

7. Legyen $r \in \mathbb{Q}, r > 0$ és
$$x_n = n^r \quad (n \in \mathbb{N}).$$
Konvergens-e az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat, és ha igen, akkor mi a határértéke?
Válasz. A fent megadott $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat divergens és
$$\lim_{n\to\infty} n^r = +\infty.$$

8. Legyen $k \in \mathbb{N}$ és $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1} \in \mathbb{R}$ és $a_k \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Tekintsük az
$$x_n = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \ldots + a_1 n + a_0 \qquad (n \in \mathbb{N})$$
sorozatot. Konvergens-e az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat, és ha igen, akkor mi a határértéke?
Válasz. A fent megadott $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat divergens és
$$\lim_{n\to\infty} x_n = \begin{cases} +\infty, & \text{ha} \quad a_k > 0 \\ -\infty, & \text{ha} \quad a_k < 0. \end{cases}$$

9. Tekintsük az
$$x_n = \sqrt[n]{n} \qquad (n \in \mathbb{N})$$
sorozatot. Konvergens-e az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat, és ha igen, akkor mi a határértéke?
Válasz. A fent megadott $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens és
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

10. Tekintsük az
$$x_n = \sqrt[n]{n!} \qquad (n \in \mathbb{N})$$
sorozatot. Konvergens-e az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat, és ha igen, akkor mi a határértéke?
Válasz. A fent megadott $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat divergens és
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty.$$

11. Legyen $a \in \mathbb{R}$ és tekintsük az
$$x_n = \frac{a^n}{n!} \qquad (n \in \mathbb{N})$$
sorozatot. Konvergens-e az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat, és ha igen, akkor mi a határértéke?
A fent megadott $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat minden $a \in \mathbb{R}$ esetén konvergens és
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

12. Tekintsük az
$$x_n = \frac{n!}{n^n} \qquad (n \in \mathbb{N})$$
sorozatot. Konvergens-e az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat, és ha igen, akkor mi a határértéke?
Válasz. A fent megadott $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens és
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

13. Legyen $k \in \mathbb{N}$ és tekintsük az
$$x_n = \frac{n^k}{n!} \qquad (n \in \mathbb{N})$$
Konvergens-e az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat, és ha igen, akkor mi a határértéke?
Válasz. A fent megadott $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat minden $k \in \mathbb{N}$ esetén konvergens és
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{n!} = 0.$$

14. Tekintsük az
$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \qquad (n \in \mathbb{N})$$
sorozatot. Konvergens-e az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat, és ha igen, akkor mi a határértéke?
Válasz. A fent megadott $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens és
$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

15. Legyen $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy olyan sorozat, mely vagy $+\infty$–hez, vagy $-\infty$–hez divergál, és tekintsük az
$$x_n = \left(1 + \frac{1}{p_n}\right)^{p_n} \qquad (n \in \mathbb{N})$$
Konvergens-e az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat, és ha igen, akkor mi a határértéke?
Válasz. A fent megadott $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens és
$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{p_n}\right)^{p_n} = e.$$

16. Tekintsük az $x_n = q^n, n \in \mathbb{N}$ úgynevezett geometriai sorozatot. Konvergens-e az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat, és ha igen, akkor mi a határértéke?
Válasz.

ha $|q| < 1$, akkor az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens és $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$;

ha $q = 1$, akkor az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens és határértéke 1;

ha $q > 1$, akkor az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat $+\infty$–hez divergál;

ha $q = -1$, akkor az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat korlátos és divergens;

ha $q < -1$, akkor az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat nem korlátos és divergens.

Valós sorok és elemi függvények

17. Ismertesse az Összehasonlító kritérium I. változatát.
Válasz. Legyenek $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ és $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ olyan nemnegatív tagú sorok, hogy $x_n \leqslant y_n$ teljesül minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. Ekkor,

   (i) ha $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ konvergens, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ is konvergens;
   (ii) ha $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ divergens, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ is divergens.

18. Fogalmazza meg a Cauchy-féle gyökkritériumot.
Válasz. Legyen $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ egy valós sor.

(i) Ha $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|} < 1$, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ sor abszolút konvergens.
(ii) Ha $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|} > 1$, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ sor divergens.

19. Ismertesse a D'Alembert-féle hányadoskritériumot.
Válasz. Legyen $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ egy olyan valós sor, melynek minden tagja nullától különböző.

(i) Ha $\lim_{n\to\infty} \dfrac{|x_{n+1}|}{|x_n|} < 1$, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ sor abszolút konvergens.
(ii) Ha $\lim_{n\to\infty} \dfrac{|x_{n+1}|}{|x_n|} > 1$, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ sor divergens.

20. Definiálja az exponenciális függvényt.
Válasz. Az
$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad (x \in \mathbb{R})$$
módon megadott $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt exponenciális függvénynek nevezzük.

21. Definiálja a sinus hiperbolicus függvényt.
Válasz. A
$$\sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad (x \in \mathbb{R})$$
módon megadott $\sinh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt sinus hiperbolicus függvénynek nevezzük.

22. Definiálja a cosinus hiperbolicus függvényt.
Válasz. A
$$\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad (x \in \mathbb{R})$$
módon megadott $\cosh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt cosinus hiperbolicus függvénynek nevezzük.

23. Definiálja a sinus függvényt.
Válasz. A
$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad (x \in \mathbb{R})$$
módon megadott $\sin\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt sinus függvénynek nevezzük.

24. Definiálja a cosinus függvényt.
Válasz. A
$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad (x \in \mathbb{R})$$
módon megadott $\cos\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt cosinus függvénynek nevezzük.

Valós függvények folytonossága

25. Legyen $D \subset \mathbb{R}$ nemüres halmaz, $x_0 \in D$ és $f\colon D \to \mathbb{R}$ függvény. Mit értünk azon, hogy az f függvény folytonos az x_0 pontban?
Válasz. Legyen $D \subset \mathbb{R}$ nemüres halmaz, $x_0 \in D$, azt mondjuk, hogy az $f\colon D \to \mathbb{R}$ függvény folytonos az $x_0 \in D$ pontban, ha bármely $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $\delta > 0$, hogy ha $x \in D$ olyan, hogy $|x - x_0| < \delta$, akkor $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ teljesül.

26. Ismertesse a folytonosságra vonatkozó Átviteli elvet.
Válasz. Legyen $D \subset \mathbb{R}$ nemüres halmaz és $x_0 \in D$. Az $f : D \to \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor folytonos az $x_0 \in D$ pontban, ha minden $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ D halmazbeli, x_0-hoz konvergáló sorozat esetén az $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat $f(x_0)$-hoz konvergál.

Valós függvények határértéke

27. Legyen $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D'$ és $\alpha \in \mathbb{R}$. Mikor mondjuk azt, hogy az f függvénynek **az x_0 pontban a határértéke** α?
Válasz. Legyen $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D'$ és $\alpha \in \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek **az x_0 pontban a határértéke** α, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha $x \in D$ és $|x - x_0| < \delta$, akkor $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$. Erre a $\lim_{x\to x_0} f(x) = \alpha$ jelölést alkalmazzuk.

28. Legyen $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D'$. Mit jelent az, hogy az f függvénynek **az x_0 pontban a határértéke** $+\infty$?
Válasz. Legyen $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D'$. az f függvénynek **az x_0 pontban a határértéke** $+\infty$, ha tetszőleges $K \in \mathbb{R}$ esetén létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha $x \in D$ és $|x - x_0| < \delta$, akkor $f(x) > K$. Erre a $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ jelölést alkalmazzuk.

29. Legyen $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D'$. Mikor mondjuk azt, hogy az f függvénynek **az x_0 pontban a határértéke** $-\infty$?
Válasz. Legyen $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D'$. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek **az x_0 pontban a határértéke** $-\infty$, ha tetszőleges $k \in \mathbb{R}$ esetén létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha $x \in D$ és $|x - x_0| < \delta$, akkor $f(x) < k$. Erre a $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ jelölést alkalmazzuk.

30. Legyen $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$ egy olyan halmaz, mely felülről nem korlátos, $f : D \to \mathbb{R}$. Mikor mondjuk azt, hogy az f függvénynek **a $+\infty$–ben a határértéke** α?
Válasz. Legyen $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$ egy olyan halmaz, mely felülről nem korlátos, $f : D \to \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek **a $+\infty$–ben a határértéke** α, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $K \in \mathbb{R}$, hogy ha $x \in D$ és $x \geqslant K$, akkor $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$. Erre a $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \alpha$ jelölést alkalmazzuk.

31. Legyen $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$ egy olyan halmaz, mely alulról nem korlátos, $f : D \to \mathbb{R}$. Mikor mondjuk azt, hogy az f függvénynek **a $-\infty$–ben a határértéke** α?
Válasz. Legyen $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$ egy olyan halmaz, mely alulról nem korlátos, $f : D \to \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek **a $-\infty$–ben a határértéke** α, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $k \in \mathbb{R}$, hogy ha $x \in D$ és $x \leqslant k$, akkor $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$. Erre a $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \alpha$ jelölést alkalmazzuk.

32. Legyen $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$ egy olyan halmaz, mely felülről nem korlátos, $f : D \to \mathbb{R}$. Mikor mondjuk azt, hogy az f függvénynek **a $+\infty$–ben a határértéke** $+\infty$?
Válasz. Legyen $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$ egy olyan halmaz, mely felülről nem korlátos, $f : D \to \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek **a $+\infty$–ben a határértéke** $+\infty$, ha tetszőleges $K \in \mathbb{R}$ esetén létezik olyan $K^* \in \mathbb{R}$, hogy ha $x \in D$ és $x \geqslant K^*$, akkor $f(x) \geqslant K$. Erre a $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ jelölést alkalmazzuk.

33. Legyen $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$ egy olyan halmaz, mely felülről nem korlátos, $f : D \to \mathbb{R}$. Mikor mondjuk azt, hogy az f függvénynek **a $+\infty$–ben a határértéke** $-\infty$? **Válasz.** Legyen $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$ egy olyan halmaz, mely felülről nem korlátos, $f : D \to \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek **a $+\infty$–ben a határértéke** $-\infty$, ha tetszőleges $k \in \mathbb{R}$ esetén létezik olyan $K^* \in \mathbb{R}$, hogy ha $x \in D$ és $x \geqslant K^*$, akkor $f(x) \leqslant k$. Erre a $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ jelölést alkalmazzuk.

34. Legyen $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$ egy olyan halmaz, mely alulról nem korlátos, $f : D \to \mathbb{R}$. Mikor mondjuk azt, hogy az f függvénynek **a $-\infty$–ben a határértéke** $+\infty$?
Válasz. Legyen $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$ egy olyan halmaz, mely alulról nem korlátos, $f : D \to \mathbb{R}$. Azt mondjuk,

hogy az f függvénynek **a** $-\infty$**–ben a határértéke** $+\infty$, ha tetszőleges $K \in \mathbb{R}$ esetén létezik olyan $k^* \in \mathbb{R}$, hogy ha $x \in D$ és $x \leqslant k^*$, akkor $f(x) \geqslant K$. Erre a $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ jelölést alkalmazzuk.

35. Legyen $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$ egy olyan halmaz, mely alulról nem korlátos, $f : D \to \mathbb{R}$. Mikor mondjuk azt, hogy az f függvénynek **a** $-\infty$**–ben a határértéke** $-\infty$?
Válasz. Legyen $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$ egy olyan halmaz, mely alulról nem korlátos, $f : D \to \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek **a** $-\infty$**–ben a határértéke** $-\infty$, ha tetszőleges $k \in \mathbb{R}$ esetén létezik olyan $k^* \in \mathbb{R}$, hogy ha $x \in D$ és $x \leqslant k^*$, akkor $f(x) \leqslant k$. Erre a $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ jelölést alkalmazzuk.

Valós függvények differenciálszámítása

36. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nemüres, nyílt intervallum, $x_0 \in I$ és $f\colon I \to \mathbb{R}$ függvény. Mit értünk azon, hogy az f függvény differenciálható az x_0 pontban?
Válasz. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nemüres, nyílt halmaz és $x_0 \in I$. Azt mondjuk, hogy az $f\colon I \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható az $x_0 \in I$ pontban, ha létezik és véges a
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$
határérték.

37. Ismertesse az összeg differenciálási szabályát.
Válasz. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nemüres, nyílt intervallum, $x_0 \in I$ és $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ olyan függvények, melyek differenciálhatóak az x_0 pontban. Ekkor az $f + g$ függvény is differenciálható az x_0 pontban és
$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

38. Ismertesse a szorzat differenciálási szabályát.
Válasz. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nemüres, nyílt intervallum, $x_0 \in I$ és $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ olyan függvények, melyek differenciálhatóak az x_0 pontban. Ekkor az $f \cdot g$ függvény is differenciálható az x_0 pontban és
$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0).$$

39. Ismertesse a hányados differenciálási szabályát.
Válasz. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nemüres, nyílt intervallum, $x_0 \in I$ és $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ olyan függvények, melyek differenciálhatóak az x_0 pontban és tegyük fel, hogy $g(x) \neq 0$ teljesül az x_0 pont valamely környezetében. Ekkor az $\dfrac{f}{g}$ függvény is differenciálható az x_0 pontban és
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

40. Ismertesse az összetett függvény differenciálási szabályát.
Válasz. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nemüres, nyílt intervallum, $x_0 \in D$ és $g\colon I \to \mathbb{R}$ és $f\colon g(D) \to \mathbb{R}$ olyan függvények, hogy g differenciálható az x_0 pontban, f pedig differenciálható a $g(x_0)$ pontban. Ekkor az $f \circ g$ függvény differenciálható az x_0 pontban, továbbá
$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

41. Fogalmazza meg a Rolle-féle középértéktételt.
Válasz. Legyenek $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ olyan függvény, mely folytonos az $[a, b]$ intervallumon és differenciálható az $]a, b[$ intervallumon. Tegyük fel továbbá, hogy $f(a) = f(b)$ teljesül. Ekkor van olyan $\xi \in]a, b[$, hogy $f'(\xi) = 0$.

42. Ismertesse a lokális szélsőérték szükségességére vonatkozó tételt.
Válasz. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nemüres, nyílt intervallum, $f: D \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Ha az f függvénynek az $x_0 \in D$ pontban lokális szélsőértékhelye van, akkor $f'(x_0) = 0$.

43. Ismertesse a lokális szélsőérték szükségességére és elégségességére vonatkozó tételt.
Legyen $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $r > 0$ és $f:]x_0 - r, x_0 + r[\to \mathbb{R}$ olyan k-szor differenciálható függvény, hogy

$$f'(x_0) = \ldots = f^{(k-1)}(x_0) = 0$$

és $f^{(k)}(x_0) \neq 0$. Ekkor, ha

(i) ha k páratlan, akkor az x_0 pont nem szélsőértékhelye az f függvénynek;

(ii) ha k páros, és

— $f^{(k)}(x_0) > 0$, akkor az x_0 pont szigorú lokális minimumhelye az f függvénynek;

— $f^{(k)}(x_0) < 0$, akkor az x_0 pont szigorú lokális maximumhelye az f függvénynek.

Határozatlan integrál és Riemann-integrál

44. Legyen $]a, b[\subset \mathbb{R}$ nemüres, nyílt intervallum, $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ függvény. Hogyan van értelmezve az f függvény primitív függvénye?
Válasz. Legyen $]a, b[\subset \mathbb{R}$ nemüres, nyílt intervallum, $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ függvény. Az $F :]a, b[\to \mathbb{R}$ függvényt az f függvény **primitív függvény**ének vagy **határozatlan integrál**jának nevezzük, ha az F függvény differenciálható az $]a, b[$ intervallumon és

$$F'(x) = f(x)$$

teljesül minden $x \in]a, b[$ esetén. Az F függvényre az $\int f$ vagy az $\int f(x)dx$ jelölést használjuk.

45. Ismertesse a határozatlan integrál linearitására vonatkozó állítást.
Válasz. Legyenek $f, g :]a, b[\to \mathbb{R}$ olyan függvények, melyekre létezik $\int f$ és $\int g$, legyenek továbbá $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstansok. Ekkor létezik $\int \alpha \cdot f + \beta \cdot g$ is, és létezik olyan $C \in \mathbb{R}$, hogy

$$\int \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx + C.$$

46. Ismertesse a parciális integrálás tételét határozatlan integrálra.
Válasz. Ha az $f, g :]a, b[\to \mathbb{R}$ függvények differenciálhatóak $]a, b[$-n, és létezik $\int f' \cdot g$, akkor létezik $\int f \cdot g'$ is, és létezik olyan $C \in \mathbb{R}$ konstans, hogy

$$\int f(x) \cdot g'(x)dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)dx + C. \quad (x \in]a, b[)$$

47. Ismertesse a helyettesítéses integrálás tételét határozatlan integrálra.
Válasz. Ha $f :]a, b[\to \mathbb{R}$, $g :]c, d[\to]a, b[$ olyan függvények, melyek esetén létezik $g' :]c, d[\to \mathbb{R}$ és létezik $\int f$ is, akkor létezik $\int (f \circ g) \cdot g'$ is, és van olyan $C \in \mathbb{R}$, hogy

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)dx = \left(\left(\int f\right) \circ g\right)(x) + C = \int f(t)dt\bigg|_{t=g(x)} + C. \quad (x \in]c, d[)$$

48. Legyen $\alpha \in \mathbb{R}$. Mennyivel egyenlő

$$\int x^\alpha dx?$$

Válasz.

$$\int x^\alpha \, dx = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C & \text{ha } \alpha \neq -1, \\ \ln|x| + C & \text{ha } \alpha = -1\,, \end{cases}$$

49. Mennyivel egyenlő

$$\int e^x dx?$$

Válasz.

$$\int e^x \, dx = e^x + C$$

$$\int e^x \, dx = e^x$$

50. Mennyivel egyenlő

$$\int \cos(x) dx?$$

Válasz.

$$\int \cos(x) \, dx = \sin(x) + C$$

51. Mennyivel egyenlő

$$\int \sin(x) dx?$$

Válasz.

$$\int \sin(x) \, dx = -\cos(x) + C$$

52. Mennyivel egyenlő

$$\int \cosh(x) dx?$$

Válasz.

$$\int \cosh(x) \, dx = \sinh(x) + C$$

53. Mennyivel egyenlő

$$\int \sinh(x) dx?$$

Válasz.

$$\int \sinh(x) \, dx = \cosh(x) + C$$

54. Ismertesse a Riemann-integrál linearitására vonatkozó tételt.
Válasz. Legyenek $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható függvények, $\lambda \in \mathbb{R}$. Ekkor

(i) az $f + g$ függvény is Riemann-integrálható és

$$\int_a^b (f+g)(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx;$$

(ii) a $\lambda \cdot f$ függvény is Riemann-integrálható és

$$\int_a^b (\lambda \cdot f)(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx;$$

55. Ismertesse a Riemann-integrál monotonitására vonatkozó tételt.
Válasz. Legyenek $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható függvények. Ha minden $x \in [a,b]$ esetén $f(x) \leqslant g(x)$ teljesül, akkor

$$\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx.$$

56. Ismertesse a Riemann-integrál intervallum additivitásáról szóló tételt.
Válasz. Legyen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható függvény. Ha $c \in]a,b[$, akkor az f függvény Riemann-integrálható az $[a,c]$ és $[c,b]$ intervallumok mindegyikén és

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

57. Fogalmazza meg a Riemann-integrálra vonatkozó középértéktételt.
Válasz. Legyenek $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható függvények. Tegyük fel továbbá, hogy az f függvény folytonos, a g függvény pedig nemnegatív. Ekkor van olyan $\xi \in]a,b[$, melyre

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$$

teljesül.

58. Legyen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ egy Riemann-integrálható függvény. Hogyan van értelmezve az f függvény felső-határfüggvénye (integrálfüggvénye)?
Válasz. Legyen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ egy Riemann-integrálható függvény. Ekkor az

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \qquad (x \in [a,b])$$

módon megadott $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ függvényt az f függvény **felsőhatárfüggvény**ének vagy **integrálfügg-vény**ének hívjuk.

59. Ismertesse a Newton–Leibniz-formulát.
Válasz. Legyen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ egy folytonos függvény és jelölje $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ az f függvény egy primitív függvényét. Ekkor

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

60. Ismertesse a Riemann-integrálra vonatkozó parciális integrálás tételét.
Válasz. Legyenek $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ olyan differenciálható függvények, melyek deriváltjai Riemann-integrálhatóak. Ekkor

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$