Az informatikai biztonság alapjai

Pintér-Huszti Andrea

2023. október 1.

Tartalom

- RSA titkosítási séma
 - Matematikai alapok
 - RSA titkosítási séma
 - Biztonsági elemzés

RSA titkosítási séma

RSA







- 1977-ben jelent meg
- Tervezői: Ron Rivest, Adi Shamir, és Leonard Adleman
- Legtöbb Nyilvános Kulcs Infrastruktúra (PKI) termékben megtalálható, SSL/TLS tanúsítványok
- Biztonságos e-mail: PGP, Outlook



Matematikai alapok

Kongruenciák

Definíció

Legyenek a és b egész számok és m pozitív egész. Azt mondjuk, hogy a **kongruens** b-vel modulo m, ha m|a-b.

 $\underline{\mathsf{Jel\"{o}l\acute{e}s}} : \ a \equiv b \pmod{m}$

- Az m számot modulusnak nevezzük.
- Két szám pontosan akkor kongruens modulo m, ha m-mel osztva ugyanazt a maradékot adják
- Amennyiben a és b nem kongruensek modulo m, akkor a és b inkongruensek modulo m, jelölése: $a \not\equiv b \pmod{m}$

<u>Példák</u>: $13 \equiv 8 \pmod{5}$, $25 \equiv -10 \pmod{7}$, $25 \not\equiv 10 \pmod{7}$



Euler-féle φ függvény

Definíció

Az $a_1, a_2,..., a_n$ számok relatív prímek, ha nincs egységtől különböző közös osztójuk, azaz $(a_1, a_2,..., a_n) = 1$.

<u>Példa</u>: 5, -3, 15, -56 számok relatív prímek.

Definíció

(Euler-féle φ függvény)

Tetszőleges n pozitív egész esetén $\varphi(n)$ jelöli az $1,2,\ldots,n$ számok közül az n-hez relatív prímek számát.

Példák:
$$\varphi(10) = 4$$
, $\varphi(7) = 6$



Euler-féle φ függvény

Tétel

$$\varphi(n) = n \prod_{p|n} \frac{p-1}{p}$$
, ahol p prím.

Példa: $\varphi(100) = 100 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = 40$

Vegyük észre:

$$\varphi(p)=p-1,$$

ahol p prím, és

$$\varphi(p \cdot q) = (p-1)(q-1),$$

ahol p, q prímek



Euler-Fermat tétel

Tétel

(Euler-Fermat tétel, kétféle megfogalmazás) Ha (a, m) = 1, akkor $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$.

Tétel

(kis Fermat tétel)

- **1** Ha p prímszám, $a \in \mathbb{Z}$ és $p \nmid a$, akkor $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.
- **2** Ha p prímszám és $a \in \mathbb{Z}$, akkor $a^p \equiv a \pmod{p}$.

Lineáris kongruenciák

Definíció

Ha $a, b \in \mathbb{Z}$ és m pozitív egész, akkor az $ax \equiv b \pmod{m}$ kongruenciát **lineáris kongruenciának** nevezzük.

A kongruencia megoldásai olyan egész számok, melyeket x helyébe írva a kongruencia teljesül. Megoldások számán a különböző maradékosztályok számát értjük, melyekből vett egészek a kongruenciát kielégítik.

Tétel

Ha $a, b \in \mathbb{Z}$ és m pozitív egész, az $ax \equiv b \pmod{m}$ lineáris kongruencia akkor és csak akkor oldható meg, ha $(a, m) \mid b$.

Ha az $ax \equiv b \pmod{m}$ lineáris kongruencia megoldható, akkor a megoldások száma (a, m).

Tétel

Ha (a, m) = 1, akkor az ax $\equiv b \pmod{m}$ lineáris kongruencia egyetlen megoldása $x \equiv a^{\varphi(m)-1} \cdot b \pmod{m}$.

Bizonyítás

Ha $x \equiv a^{\varphi(m)-1} \cdot b \pmod{m}$, akkor x valóban megoldás, hiszen az Euler-Fermat tétel szerint $aa^{\varphi(m)-1} \cdot b \equiv b \pmod{m}$. \square

Szimultán kongruenciarendszer

Definíció

Ha ugyanazon ismeretlenre több különböző modulusú kongruenciafeltételt adunk, akkor **szimultán kongruenciarendszer**t kapunk.

Tétel

Αz

$$x \equiv y_1 \pmod{m}$$
$$x \equiv y_2 \pmod{n}$$

szimultán kongruenciarendszer megoldhatóságának szükséges és elégséges feltétele, hogy $(m,n) \mid y_1 - y_2$. Az összes megoldás egy maradékosztályt alkot modulo [m,n].

Az [m, n] az m és n modulusok legkisebb közös többszörösét jelöli.



Kínai maradéktétel

Tétel

Legyenek m_1, m_2, \ldots, m_k páronként relatív prímek. Ekkor

$$x \equiv y_1 \pmod{m_1}$$
 $x \equiv y_2 \pmod{m_2}$
 \vdots
 $x \equiv y_k \pmod{m_k}$

szimultán kongruenciarendszer bármilyen y_1, y_2, \dots, y_k egészek esetén megoldható, és a megoldások egyetlen maradékosztályt alkotnak modulo $m_1 m_2 \cdot \dots \cdot m_k$.

Kínai maradéktétel

Bizonyítás Legyen $M=m_1m_2\cdots m_k$ és $M_i=\frac{M}{m_i}$, ahol $i=1,2,\ldots,k$. Mivel az m_1,\ldots,m_k modulusok páronként relatív prímek, ezért $(M_i,m_i)=1,\ i=1,2,\ldots,k$. Tekintsük az $M_i\cdot x\equiv 1\pmod{m_i}$, ahol $i=1,2,\ldots,k$ kongruenciákat. Bármely i esetén a kongruencia megoldható, hiszen $(M_i,m_i)=1$, legyen $x\equiv c_i\pmod{m_i}$ a megoldás. Ekkor $M_i\cdot c_i\equiv 1\pmod{m_i}$ és $M_i\cdot c_i\equiv 0\pmod{m_i}$, ahol $i\neq j$. Legyen

$$x_0 \equiv \sum_{i=1}^k M_i c_i y_i \pmod{M}.$$

Az előbbiek alapján $x_0 \equiv y_i \pmod{m_i}$, $i=1,\ldots,k$, tehát x_0 megoldása a szimultán kongruenciarendszernek. Ezzel egy konstruktív bizonyítást adtunk a megoldás létezésére.

Most lássuk be, hogy csak egy megoldása van. Tegyük fel, hogy x_0' szintén megoldása a szimultán kongruenciarendszernek. Így $x_0' \equiv y_i$ (mod m_i), $i=1,2,\ldots,k$, azaz $m_i \mid x_0'-y_i$, bármely i-re. Ugyanakkor x_0 szintén megoldás, tehát $m_i \mid x_0-y_i$, ahonnan $m_i \mid x_0'-x_0$ bármely i-re. Ha az előbbi oszthatóság tetszőleges $i \in \{1,2,\ldots,k\}$ -re teljesül, akkor $m_1m_2 \cdot \cdots \cdot m_k \mid x_0'-x_0$ is áll, azaz $M \mid x_0'-x_0$, így $x_0' \equiv x_0 \pmod{M}$. Tehát x_0' és x_0 megoldások egy maradékosztályba esnek modulo M. \square

RSA titkosítási séma

RSA titkosítási séma

Aszimmetrikus titkosítási séma: AE = (Key, Enc, Dec)

- Key:
 - Véletlenül választunk két nagy prímet: p, q.
 - ② Kiszámítjuk az RSA modulust: $n = p \cdot q$.
 - **3** Kiszámítjuk az Euler-féle ϕ függvényt: $\phi(n) = (p-1)(q-1)$.
 - Választunk egy *véletlen e* egészt: $1 < e < \phi(n)$ és $(e, \phi(n)) = 1$. (e titkosító kitevő)
 - **5** Kiszámítjuk d-t: $1 < d < \phi(n)$ és $ed \equiv 1 \pmod{\phi(n)}$. (d visszafejtő kitevő)

$$PK = (n, e)$$
, $SK = d$ and $\phi(n)$, p, q titkos paraméterek $\mathcal{P} = \mathcal{C} = \mathbb{Z}_n$

- $Enc_{PK}(m) = m^e \pmod{n} \ \forall m \in \mathcal{P} \ \text{\'es} \ PK = (n,e) \ \text{mellett.}$
- $Dec_{SK}(c) = c^d \pmod{n} \ \forall c \in C \text{ \'es } SK = d \text{ mellett.}$



Aszimmetrikus titkosítási séma: AE = (Key, Enc, Dec)

- Key:
 - Véletlenül választunk két nagy prímet: p = 5, q = 11.
 - ② Kiszámítjuk az RSA modulust: $n = p \cdot q = 55$.
 - **3** Kiszámítjuk az Euler-féle ϕ függvényt: $\phi(n) = (p-1)(q-1) = 40$.
 - Választunk egy *véletlen e* egészt: $1 < e < \phi(n)$ és $(e, \phi(n)) = 1$, e = 3.
 - **5** Kiszámítjuk d: $1 < d < \phi(n)$ és $ed \equiv 1 \pmod{\phi(n)}$, d = 27.

$$PK = (n = 55, e = 3)$$
, $SK = d = 27$ és $\phi(n) = 40$, $p = 5$, $q = 11$ titkos paraméterek $\mathcal{P} = \mathcal{C} = \mathbb{Z}_{55}$

- m = 8 és PK = (55,3): $Enc_{PK}(m) = 8^3 \pmod{55}$ $8^3 \equiv 17 \pmod{55}$
- c = 17 és SK = 27: $Dec_{SK}(c) = 17^{27} \pmod{55}$ $17^{27} \equiv 8 \pmod{55}$

Kapcsolódó algoritmusok

- Key:
 - Véletlenül választunk két nagy prímet: p, q. -> Prímtesztek (pl. Miller-Rabin prímteszt)
 - ② Választunk egy véletlen e egészt: $1 < e < \phi(n)$ és $(e, \phi(n)) = 1$. -> Euklideszi algoritmus
- $Enc_{PK}(m) = m^e \pmod{n} \ \forall m \in \mathcal{P} \text{ és } PK = (n, e) \text{ mellett. } ->$ Gyors hatványozás
- $Dec_{SK}(c) = c^d \pmod{n} \ \forall c \in C \text{ \'es } SK = d \text{ mellett. -> K\'inai}$ Maradéktétel alkalmazása



Biztonsági elemzés

SK kiszámítása PK ismeretében nehéz ——> prímfaktorizáció

A támadó célja a titkos kulcs megszerzése:

Tétel: A d exponens kiszámítása az (n,e) paraméterek ismeretében **ugyanolyan nehéz**, mint az n modulus p és q prímfaktorainak meghatározása, ahol |p|=|q|.

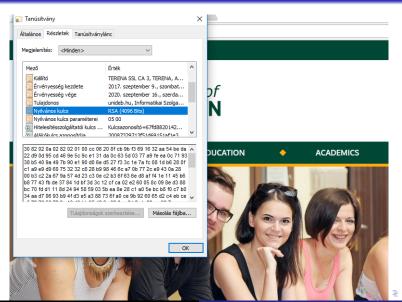
Megjegyzés:

- Ha meg tudjuk határozni n faktorait, akkor d kiszámítható a $ed \equiv 1 \pmod{\phi(n)}$ kongruenciából. $\phi(n)$ kiszámításához p és q ismerete szükséges.
- Ha van egy hatékony algoritmus d kiszámítására (n, e)
 ismeretében, akkor ez az algoritmus alkalmas n faktorizálására.

Prímfaktorizáció

- Ha az n modulus p és q faktorai elég nagyok, akkor nem ismerünk hatékony (polinomiális idejű) algoritmust n faktorizálására.
- Paraméterek méretei: |n|=768, ahol |p|=|q|=384 modulust faktorizálták 2009-ben Számtest Szita algoritmussal. |n|=1024, ahol |p|=|q|=512 biztonságos. https://unideb.hu —-> |n|=4096 (hosszú távra archiválás)

RSA modulus mérete (2018)



A nyílt üzenet m kiszámítása a c ismeretében nehéz——> RSA probléma

A támadó célja a nyílt üzenet meghatározása:

- Az RSA Probléma: Adott (n, e) RSA nyilvános kulcs és $c \equiv m^e \pmod{n}$ titkosított üzenet mellett m nyílt üzenet kiszámítása.
- A támadó nem feltétlenül ismeri a titkos kulcsot. Feladat: $c^{\frac{1}{e}}$ (mod *n*) kiszámítása.
- Az RSA Probléma nehéz, ha az n modulus elég nagy és a prímek véletlenül generáltak, valamint az m nyílt üzenet (emiatt a c titkosított üzenet is) egy a 0 és n-1 közé eső véletlen egész.
- Az m nyílt üzenet véletlensége a [0, n-1] intervallum felett fontos feltétel. Ha m egy kis halmazból vett, akkor a támadó könnyen meghatározhatja m-et úgy, hogy egyenként próbálgatja az összes lehetséges *m*-et (brute force).

Prímfaktorizáció vs. RSA probléma

- Prímfaktorizáció -> RSA probléma
 Az RSA Probléma nem nehezebb, mint a prímfaktorizáció,
 hiszen ha a támadó képes az n modulus faktorizálására, akkor
 ki tudja számolni a d titkos kulcsot az (n, e) nyilvános
 kulcsból.
- RSA probléma -> Prímfaktorizáció
 Nem tudjuk, hogy ha az RSA probléma megoldható, akkor tudunk -e hatékony algoritmust adni a prímfaktorizációra.

- Speciális a nyílt üzenetek halmaza Támadás: Csak a titkosított üzenet ismert (COA) Input: c, (n, e) Output: m, ahol $m^e \equiv c \pmod{n}$ Algoritmus: Minden lehetséges nyílt üzenetet kipróbálunk. (Brute Force)
- Titkosított üzenetek közötti kapcsolat Támadás: Választott üzenet alapú támadás (CCA) Input: c, (n, e) és m' egy választott c'-re Output: m Algoritmus:
 - **1** Választunk egy véletlen $r \in \mathcal{P}$
 - ② Kiszámítjuk $r' \equiv r^e \pmod{n}$, és kérjük $c' \equiv r' \cdot c \pmod{n}$ visszafejtését
 - **3** Megkapjuk m'-t, ahol $m' \equiv (c')^d \equiv (r' \cdot c)^d \equiv r \cdot m \pmod{n}$
 - r ismeretében m kiszámítható m'-ből



- A tankönyvi RSA egy nem biztonságos titkosítási séma.
- Gyakorlatban: RSA-OAEP (Optimal Asymmetric Encryption Padding):

Adott:
$$G: \{0,1\}^k \to \{0,1\}^l$$
, $H: \{0,1\}^l \to \{0,1\}^k$, $\mathcal{P} = \{0,1\}^l$
Titkosítás:

- Input: $m \in \{0,1\}^l$ és $r \in \{0,1\}^k$
- Output: $c = ((m \oplus G(r)) || (r \oplus H(m \oplus G(r))))^e \pmod{n}$

Visszafeités:

- Input: $c \in \{0,1\}^{l+k}$
- Kiszámítjuk:
 - $c^d = ((m \oplus G(r))||(r \oplus H(m \oplus G(r)))) \pmod{n}$
 - Meghatározzuk $r: r = (r \oplus H(m \oplus G(r))) \oplus H(m \oplus G(r))$
 - $m = (m \oplus G(r)) \oplus G(r)$
- Output: m



Egyirányú függvény

- Egyirányú függvény:
 - Kiszámítani könnyű: Adott x, és könnyű kiszámítáni f(x)-et.
 - Nehéz invertálni: Adott f(x), nehéz kiszámítani x-et.
- Nem tudjuk, hogy létezik -e egyirányú függvény.
- ullet Egyirányúnak $\emph{bizonyul:}\ p,q$ prímek szorzata, ahol |p|=|q|
 - Könnyű kiszámítani: Adott p, q, könnyű $f(p, q) = p \cdot q$ kiszámítása.
 - Nehéz invertálni: Adott $f(p,q) = p \cdot q$, nehéz kiszámítani p vagy/és q-t. (prímfaktorizáció)

Egyirányú csapóajtó függvény

- Egyirányú csapóajtó függvény:
 - Egyirányú függvény
 - Kiszámítani könnyű: Adott x, és könnyű kiszámítáni f(x)-et.
 - Nehéz invertálni: Adott f(x), nehéz kiszámítani x-et.
 - Csapóajtó információ: Bizonyos plusz információval viszont könnyű invertálni: x kiszámítása f(x)-ből.
- Nem tudjuk, hogy létezik -e egyirányú csapóajtó függvény.
- Egyirányú csapóajtó függvénynek bizonyul: moduláris hatványozás RSA modulussal
 - Egyirányú függvény:
 - Kiszámítani könnyű: Adott m, könnyű kiszámítani $f(m) = m^e \pmod{n}$ (gyors hatványozás).
 - Nehéz invertálni: Adott $f(m) = m^e \pmod{n}$ és (n, e), nehéz kiszámítani m-et. (RSA probléma)
 - Csapóajtó információ: $d, p, q, \phi(n)$.

