1. feladat

Határozza meg az alábbi mátrixok determinánsát.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{matrix}$$

$$\det(A) = (-1)\cdot 1 - (-1)\cdot 3 = 2$$

$$\det(B) = 1\cdot 2\cdot 1 + (-1)\cdot 1\cdot 2 + \overset{-6}{2\cdot(-1)\cdot 3} - \overset{-8}{2\cdot 2\cdot 2} - \underset{-3}{3\cdot 1\cdot 1} - \underset{-1}{1\cdot(-1)\cdot(-1)} = -18$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -18 \end{pmatrix}$$

2. feladat

Döntse el, hogy az alábbi vektorok lineárisan függetlenek-e.

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

v_1, v_2, v_3 lin. független, ha abból, hogy

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0 \quad \leftarrow$$

következik, hogy $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$

(A nullvektor csak triviális lineáris kombinációként állítható elő)

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\text{rang}(\{v_1, v_2, v_3\}) = 3$

lineárisan függetlenek

3. feladat

Oldja meg az $Ax = b$ lineáris egyenletrendszert, ha

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & 5 & -2 \\ 1 & 4 & -7 & 7 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 10 \end{pmatrix}$$

3 egyenlet, 4 ismeretlen

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 5 & -2 & -4 \\ 1 & 4 & -7 & 7 & 10 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & 2 & -4 & 8 & 10 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

$\mathrm{rang}(A) = 3$

$\mathrm{rang}(A|b) = 3$

$\Rightarrow$ a rendszer megoldható

Mivel $\mathrm{rang}(A) < 4$ (az oszlopok v. ismeretlenek száma) ezért végtelen sok megoldás van.

$$x_4 = 1$$

$$-x_2 + 2x_3 - 3x_4 = -4$$

$$-x_2 + 2x_3 = -1 \qquad x_3 = t \in \mathbb{R}$$

$$x_2 = 2t+1$$

$$-x_1 - 2\overset{(2t+1)}{x_2} + 3\overset{t}{x_3} + \overset{1}{x_4} = 0$$

$$x_1 = -4t - 2 + 3t + 1 = -t - 1$$

$$X = \begin{pmatrix} -t-1 \\ 2t+1 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} = \underset{x_0}{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} + t \cdot \underset{y}{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \qquad t \in \mathbb{R}$$

$$Ax_0 = b$$

$$Ay = 0$$

y a homogén rendszer megoldása

$$A = \begin{pmatrix} \times & \times \\ \times & \times \\ \times & \times \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} \times \\ \times \\ \times \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

4. feladat

Adja meg az α paraméter értékét, ha tudjuk, hogy az $Ax = b$ egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -3 & -8 & -8 \\ 6 & 17 & 14 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -5 \\ -3 & -8 & -8 & 5 \\ 6 & 17 & 14 & \alpha \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & -10 \\ 0 & -1 & 2 & \alpha+30 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha+20 \end{array}\right)$$

rang$(A) = 2$

ha $\alpha = -20$

akkor rang$(A|b) = 2$

5. feladat

Határozza meg az A mátrix sajátértékeit, sajátvektorait.

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

A sajátértékek a karakterisztikus egyenlet megoldásai: $\det(A - \lambda E) = 0$

$$\begin{vmatrix} 8-\lambda & 3 \\ 2 & 7-\lambda \end{vmatrix} = (8-\lambda)(7-\lambda) - 6 = \lambda^2 - 15\lambda + 50 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{15 \pm \sqrt{225-200}}{2} \begin{matrix} \nearrow 10 \\ \searrow 5 \end{matrix}$$

A sajátértékek: 10 és 5

A $\lambda = 10$ -hez tartozó sajátvektorok:

$$(A - 10 \cdot E) \cdot x = 0$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-2x_1 + 3x_2 = 0$$

$x_2 = t \in \mathbb{R}$

$x_1 = \frac{3}{2} t$

$$x = t \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

A $\lambda = 5$ -höz tartozó sajátvektor:

$$(A - 5 \cdot E) x = 0$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$3x_1 + 3x_2 = 0$$

$$x_1 + x_2 = 0$$

$$x_2 = t \in \mathbb{R}$$

$$x_1 = -t$$

$$x = t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R}$$

6. feladat

Határozza meg az A mátrix sajátértékeit, sajátvektorait.

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

A karakterisztikus egyenlet: $\det(A - \lambda E) = 0$

$$\begin{vmatrix} -\frac{3}{2}-\lambda & 5 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \left(-\frac{3}{2}-\lambda\right)(3-\lambda) + 5 =$$

$$\lambda^2 - \frac{3}{2}\lambda + \frac{1}{2} = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2}}{2} = \frac{\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}}{2} \begin{matrix} \nearrow 1 \\ \searrow \frac{1}{2} \end{matrix}$$

Ha $\lambda = 1$

$$(A - E)x = 0$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-x_1 + 2x_2 = 0$$

$x_2 = t \quad t \in \mathbb{R}$

$x_1 = 2t$

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot t$$

Ha $\lambda = \frac{1}{2}$

$$\left(A - \frac{1}{2}E\right)x = 0$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -1 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-x_1 + \frac{5}{2}x_2 = 0 \qquad x_2 = t \in \mathbb{R}$$

$$x_1 = \frac{5}{2}t$$

$$x = t \cdot \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

7. feladat

Ha az A mátrix sajátértékei $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, akkor mik lesznek az A^2 mátrix sajátértékei? És az A^{10} sajátértékei?

$$A^2 = \underset{n\times n}{A} \cdot \underset{n\times n}{A}$$

Legyen λ az A sajátértéke. Ekkor

$$A \cdot / \quad Ax = \lambda x \qquad \text{valamely } (x \neq 0)$$

$$A^2 x = A(\lambda x) = \lambda \cdot \underbrace{(Ax)}_{\lambda x} = \lambda^2 x$$

$$A^2 x = \lambda^2 x$$

λ^2 sajátértéke A-nak. A sajátvektor ugyanaz

A^3 sajátértékei ??

$$A \cdot / \quad A^2 x = \lambda^2 x$$

$$A^3 x = \lambda^2 \underbrace{Ax}_{\lambda x} = \lambda^3 x$$

A^{10} sajátértékei : λ^{10}

Ha A invertálható (azaz reguláris) akkor

A^{-1} sajátértékei ?

$$A^{-1} \cdot / \quad Ax = \lambda x$$

$$x = \lambda A^{-1} x \quad / : \lambda$$

$$A^{-1} x = \frac{1}{\lambda} x$$

osztható λ-val ??

Igen, mert egy mátrix pontosan akkor invertálható, ha a 0 nem sajátértéke.

Ha λ sajátértéke A-nak $\Rightarrow$ $\frac{1}{\lambda}$ sajátértéke A^{-1}-nek. A sajátvektorok nem változnak.

8. feladat

Legyen A a 6. feladatban adott mátrix és $x = (9,4)^T$. Becsülje meg $A^{100}x$ értékét.

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad A^{100}x = ?$$

Az előbb kiszámoltuk, hogy A saját-értékei az 1 és az $\frac{1}{2}$, a megfelelő sajátvektorok:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Mivel v_1 és v_2 lin. független ezért x

előállítható a lin. kombinációja szerint:

$$x = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix} = 2v_1 + 2v_2$$

$$Ax = 2\underbrace{Av_1}_{\lambda_1 v_1} + 2\underbrace{Av_2}_{\lambda_2 v_2} = 2\lambda_1 \cdot v_1 + 2 \cdot \lambda_2 v_2$$

$$A^{100}x = 2\underbrace{A^{100}v_1}_{\lambda_1^{100} v_1} + 2\underbrace{A^{100}v_2}_{\lambda_2^{100} v_2} = 2 \cdot \underbrace{\lambda_1^{100}}_{1} v_1 + 2 \cdot \underbrace{\lambda_2^{100}}_{\left(\frac{1}{2}\right)^{100}} v_2$$

$$= 2v_1 + \underbrace{\frac{1}{2^{99}} \cdot v_2}_{\approx 0} \approx 2v_1$$

9. feladat

Határozza meg az A mátrix sajátértékeit, sajátvektorait.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0$$

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1$$

Ha $\lambda = 1$, akkor a sajátvektorok:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad x = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$t \in \mathbb{R}$

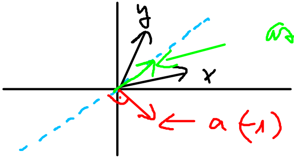
Ha $\lambda = -1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad x = t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$t \in \mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$y = Ax = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$



az 1-hez tartozó sajátvektor

a (-1)-hez tartozó sajátvektor

10. feladat

Határozza meg az A mátrix sajátértékeit.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0$$

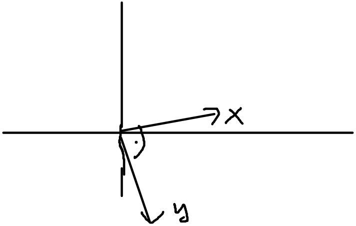
a sajátértékek: $\pm i$

$\Rightarrow$ nincs valós sajátvektor

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$y = Ax = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}$$

forgatási mátrix



nincs olyan valós vektor melyik vál megmarad.

Definíció

Egy négyzetes A mátrix nyoma a főátlóbeli elemeinek összege:

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn},$$

ha A egy $n \times n$-es mátrix.

Állítás

A mátrix nyoma megegyezik a sajátértékeinek az összegével.

Állítás

Egy mátrix determinánsa megegyezik a sajátértékeinek szorzatával.

11. feladat

Határozza meg az α, β és γ paraméterek értékét, ha x, y és z ortogonális.

$$x = \begin{pmatrix} -3 \\ -18 \\ -9 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 0 \\ 18 \\ \alpha \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \\ 27 \end{pmatrix}$$

-36 $\quad$ 54

x, y, z ortogonális vektorrendszer, ha bármelyik kettő ortogonális (azaz merőleges)

Két vektor merőleges, ha a belső szorzatuk 0.

$$\langle x, y \rangle = x^T y = (-3) \cdot 0 - 18 \cdot 18 - 9\alpha = 0$$

$$\alpha = -\frac{18 \cdot 18}{9} = -36$$

$$\langle y, z\rangle = y^T z = 0\cdot\beta + 18\cdot\gamma + (-36)\cdot 27 = 0$$

$$18\cdot\gamma = 36\cdot 27$$

$$\gamma = 54$$

$$\langle x, z\rangle = x^T z = -3\cdot\beta - 18\cdot 54 - 9\cdot 27 = 0$$

$$3\beta = -45\cdot 27$$

$$\beta = -15\cdot 27$$

12. feladat

Legyen Q egy $n \times n$-es ortogonális mátrix (a Q oszlopvektorai ortonormált vektorrendszert alkotnak). Határozza meg a Q^{-1} mátrixot.

$$Q = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & \cdots & q_n \end{pmatrix}$$

$q_1, \dots, q_n$ ortogonális és $\|q_i\| = 1 \quad i = 1, \dots, n$

$$\underbrace{Q^T}_{Q^{-1}} Q = \begin{pmatrix} q_1^T \\ q_2^T \\ \vdots \\ q_n^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & \\ 0 & & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$q_1^T \cdot q_1 = \|q_1\|^2 = 1 \qquad q_1^T q_2 = \langle q_1, q_2 \rangle = 0$$