Alkalmazott matematika

Baran Ágnes

Optimalizáció

Egyváltozós függvények minimalizálása

Az `fminbnd` függvény:

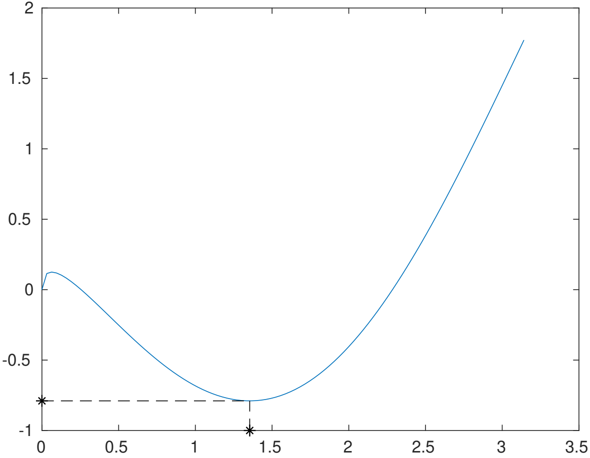
```
[xopt,fopt]=fminbnd(f,a,b)
```

Az f függvény $[a,b]$ intervallumbeli egyik lokális minimumhelyének és minimumának közelítését adja.
`xopt`: a lokális minimumhely közelítése
`fopt`: a lokális minimum közelítése

Példa

Keressük meg az $f(x) = \sqrt{x} - 2\sin(x)$ függvény $[0, \pi]$-beli minimumhelyét.

```
f=@(x) sqrt(x)-2*sin(x);
[xopt,fopt]=fminbnd(f,0,pi)
    xopt =  1.3543
    fopt = -0.78957
```


2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5

Az fminsearch és fminunc függvények:

- [xopt,fopt]=fminsearch(f,x0)
- [xopt,fopt]=fminunc(f,x0)

Az f függvény lokális minimumhelyének közelítését (xopt) és minimumának közelítését (fopt) adja, az x0 kezdőpontból indítva a keresést.

Mindkettő alkalmas többváltozós függvények minimalizálására is.

```
f=@(x) sqrt(x)-2*sin(x);
[xopt,fopt]=fminsearch(f,0.5)
   xopt =  1.3542
   fopt = -0.78957
xopt,fopt]=fminunc(f,0.5)
   xopt =  1.3543
   fopt = -0.78957
```

Az f függvény maximumát megkereshetjük úgy, hogy a $-f$ függvény minimumát keressük.

Kezdeti közelítésre pl. a függvény ábrázolásával tehetünk szert.

1. feladat

(a) Határozza meg az $f(x) = x^2 \cos(3x)$ függvény összes $[0, 6]$ intervallumbeli lokális minimumhelyét.

(b) Határozza meg az $f(x) = x^2 \cos(3x)$ függvény összes $[0, 6]$ intervallumbeli lokális maximumhelyét.

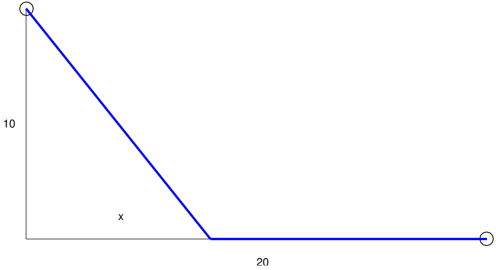
2. feladat

(a) Határozza meg az $f(x) = \sin(2x)\sin(3x)$ függvény összes $[0, 5]$ intervallumbeli lokális minimumhelyét.

(b) Határozza meg az $f(x) = \sin(2x)\sin(3x)$ függvény összes $[0, 5]$ intervallumbeli lokális maximumhelyét.

3. feladat

A parttól 10 km-re fekvő sziget áramellátását szeretnénk biztosítani egy olyan áramellátó központból, amely közvetlenül a parton helyezkedik el, 20 km-re a partnak a szigethez legközelebbi pontjától. Ha 250 ezer Ft-ba kerül 1 km víz alatti vezeték elhelyezése, és 100 ezerbe 1 km vezeték telepítése a szárazföldön, akkor határozzuk meg a minimális költségű útvonalat.



4. feladat (szorgalmi)

Egy 1 l űrtartalmú, henger alakú konzervdobozt szeretnénk készíteni. Határozza meg a doboz méreteit úgy, hogy adott vastagságú lemezből készítve a lehető legkevesebb anyagra legyen szükség az elkészítéséhez.

5. feladat (szorgalmi)

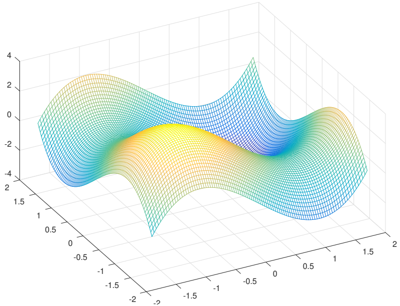
Egy 30 cm széles lemezből szeretnénk csatornát hajtogatni úgy, hogy a lemez két szélén 10-10 cm-t valamilyen szögben felhajtunk. Határozza meg a szöget úgy, hogy a csatornába a lehető legtöbb víz férjen.

Többváltozós függvények minimalizálása

Példa

Rajzoltassuk ki az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1 - 3x_2$ felületet a $[-2, 2] \times [-2, 2]$ tartomány felett.

```
xx=linspace(-2,2);
yy=xx;
[X,Y]=meshgrid(xx,yy);
Z=X.^3+Y.^3-3*X-3*Y;
figure; mesh(X,Y,Z)
```

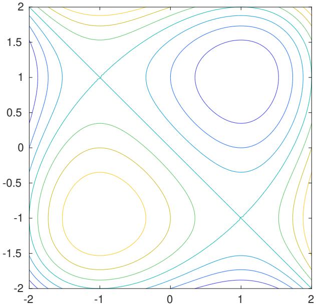


Megjegyzés: a `mesh` helyett használhattuk volna az `fmesh` függvényt is (akkor az ábrázolandó függvényt másképp kell definiálni).

Példa

Rajzoltassuk ki az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1 - 3x_2$ felület szintvonalait a $[-2, 2] \times [-2, 2]$ tartomány felett.

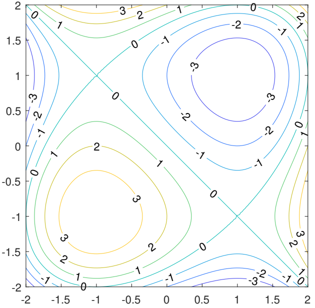
```
xx=linspace(-2,2);
yy=xx;
[X,Y]=meshgrid(xx,yy);
Z=X.^3+Y.^3-3*X-3*Y;
figure; contour(X,Y,Z)
axis equal
```



Megjegyzés: a `contour` helyett használhattuk volna az `fcontour` függvényt is (akkor az ábrázolandó függvényt másképp kell definiálni).

A szintvonalakra ráírathatjuk a „magassági számokat” is:

```
xx=linspace(-2,2);
yy=xx;
[X,Y]=meshgrid(xx,yy);
Z=X.^3+Y.^3-3*X-3*Y;
figure; contour(X,Y,Z,'ShowText','on')
axis equal
```



Többváltozós függvények minimalizálása

Példa

Határozzuk meg az $f(x) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1 - 3x_2$ függvény gradiensét és a stacionárius pontjait.

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_1^2 - 3 \\ 3x_2^2 - 3 \end{bmatrix}$$

Stacionárius pont: ahol $\nabla f(x) = 0$.

A függvénynek 4 stacionárius pontja van:

$$(-1,-1), \quad (-1,1), \quad (1,-1), \quad (1,1)$$

Példa

Rajzoltassuk ki az $f(x) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1 - 3x_2$ függvény szintvonalait és a gradiens mezőt a $[-2, 2] \times [-2, 2]$ tartomány felett.

A gradiens mező rajzolásához nagyobb beosztású rácsot használjunk, pl. itt 11-11 pontot veszünk fel mindkét tengelyen:

```
xx=linspace(-2,2,11); yy=xx;
[X,Y]=meshgrid(xx,yy);
```

Ezekben a pontokban meg kell adnunk a gradiensvektor koordinátáit:

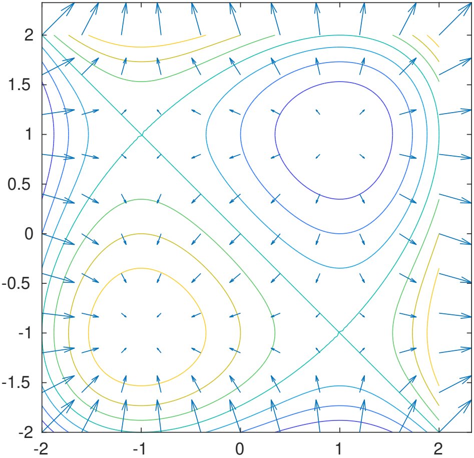
```
dX=3*X.^2-3;
dY=3*Y.^2-3;
```

A nyilak kirajzolásához a `quiver` függvényt használjuk. (Első két input érték a nyilak talppontjának x- és y-koordinátái, második két input érték a nyilak hegyének x- és y-koordinátái.

```
quiver(X,Y,dX,dY)
```

A szintvonalak és a gradiensmező egyben:

```
%a szintvonalak
xx=linspace(-2,2); yy=xx;
[X,Y]=meshgrid(xx,yy);
Z=X.^3+Y.^3-3*X-3*Y;
figure; contour(X,Y,Z)
axis equal
%a gradiensmezo
xx=linspace(-2,2,11); yy=xx;
[X,Y]=meshgrid(xx,yy);
dX=3*X.^2-3;
dY=3*Y.^2-3;
hold on; quiver(X,Y,dX,dY)
```

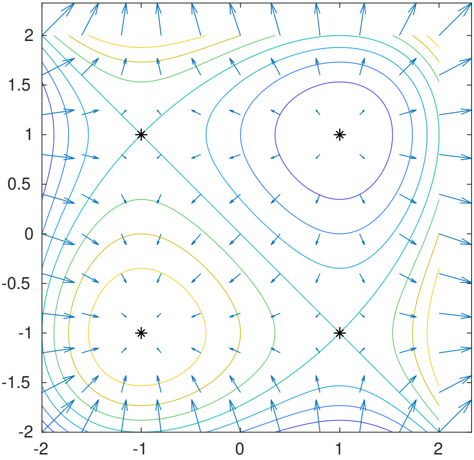


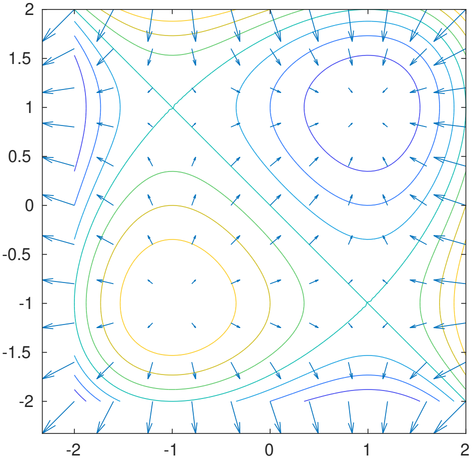
Az $f(x) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1 - 3x_2$ függvény szintvonalai és a gradiensmező.

A gradiensmező kirajzolásához használhatjuk a beépített gradient függvényt is. (Ekkor nem kell kiszámolnunk a gradienst, a Matlab numerikusan közelíti azt)

```
%a szintvonalak
xx=linspace(-2,2); yy=xx;
[X,Y]=meshgrid(xx,yy);
Z=X.^3+Y.^3-3*X-3*Y;
figure; contour(X,Y,Z)
axis equal

%a gradiensmezo
xx=linspace(-2,2,11); yy=xx;
[X,Y]=meshgrid(xx,yy);
Z=X.^3+Y.^3-3*X-3*Y;
[dX,dY]=gradient(Z);
hold on; quiver(X,Y,dX,dY)
```

Tegyük rá az ábrára a stacionárius pontokat is!





Az $f(x) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1 - 3x_2$ függvény szintvonalai és a negatív gradiensmező.

Többváltozós függvények minimalizálása Matlab-bal

Az `fminsearch` vagy az `fminunc` függvényeket használhatjuk.

Példa: Keressük meg az előző függvény egy lokális minimumhelyét.

Mindkét Matlab-függvény hívásához meg kell adnunk a minimumhely egy kezdeti közelítését. A kezdővektor megválasztása erősen befolyásolhatja az algoritmus sikeres lefutását.

```
>> f=@(x) x(1)^3+x(2)^3-3*x(1)-3*x(2);
>> [xopt,fopt]=fminsearch(f,[0.5,0.5])

xopt =
    1.0000    1.0000


fopt =
   -4.0000
```

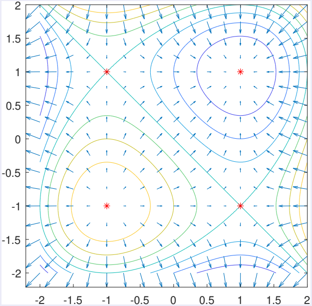
Az fminunc függvénnyel:

```
>> f=@(x) x(1)^3+x(2)^3-3*x(1)-3*x(2);
>> [xopt,fopt]=fminunc(f,[0.5,0.5])

Local minimum found.

Optimization completed because the size of the gradient is
less than the default value of the optimality tolerance.

<stopping criteria details>

xopt =
     1     1

fopt =
    -4
```

A kezdővektor megválasztása erősen befolyásolhatja az algoritmus sikeres lefutását.

6. feladat

Vizsgáljuk meg milyen eredményt kapunk a fenti függvényeket az $f(x) = x_1^3 - 3x_1 + x_2^3 - 3x_2$ függvénnyel és az alábbi kezdővektorokkal meghívva:



$$x_0 = [-0.5, -0.5],$$

$$x_0 = [-0.5, 0],$$

$$x_0 = [-1, -0.5],$$

$$x_0 = [-1.5, -1.5]$$

7. feladat

Rajzoltassa ki a megadott tartomány felett az alábbi kétváltozós függvényeket, a szintvonalaikat, a negatív gradiensmezőt és közelítse az adott tartományon belül a minimumhelyüket.

- $f(x_1, x_2) = \frac{1}{6}x_1^3 - x_1 + \frac{1}{4}x_1 x_2^2$, ha $x \in [-2.5, 2.5]^2$
- $f(x_1, x_2) = \sin(x_1)\cos(x_2)$, ha $x \in [0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$
- $f(x_1, x_2) = x_2(1 - x_1^2 - x_2^2)$, ha $x \in [-1.5, 1.5]^2$

8. feladat, 1-kör probléma (szorgalmi)

Egy téli üdülőövezetben a mentőhelikopter bázisállomását úgy szeretnénk elhelyezni, hogy az n adott síközponttól mért legnagyobb távolsága minimális legyen. Írjon egy Matlab-függvényt, melynek input paramétere az az $A \in \mathbb{R}^{n \times 2}$ mátrix, melynek soraiban a síközpontok koordinátái találhatóak, output paramétere pedig a mentőhelikopter bázisállomásának koordinátáit tartalmazó kételemű vektor.
Oldja meg a feladatot „térben” is, azaz adott $\mathbb{R}^3$-beli pontok esetén határozza meg a pontokat lefedő minimális sugarú gömböt.