Polinomok

Definíció

Legyen x egy ún. határozatlan (egy szimbólum). A

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

alakú véges összeget, ahol $a_i \in \mathbb{R}$, polinomnak nevezzük.

- A valós együtthatós polinomok halmazát $\mathbb{R}[x]$-szel jelöljük.
- Ha $a_n \neq 0$, akkor n a polinom fokszáma. Jele: $\deg(p) = n$.
- Egy n-edfokú polinom esetén a_n-et $p(x)$ főegyütthatójának, az a_i-ket együtthatóknak hívjuk.
- Ha $p(x) = a_0$, akkor nulladfokú polinomról, vagy konstansról beszélünk.

Példák:

$$p_1(x) = 3 + 2x + x^4 + 3x^5 \;\rightarrow\; \text{ötödfokú polinom}$$
$$p_2(x) = 2 + x^3 + 3x^4 + 0 \cdot x^5 \;\rightarrow\; \text{negyedfokú polinom}$$

Műveletek polinomokkal

Definíció

Legyenek

$$p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \quad \text{és} \quad q(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m.$$

- A két polinom egyenlő, ha $n = m$ és $a_i = b_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$.
- A két polinom összege, ha például $n > m$:

$$\begin{aligned}(p+q)(x) :=& p(x) + q(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \cdots + \\ & + (a_m + b_m)x^m + a_{m+1}x^{m+1} + \cdots + a_nx^n.\end{aligned}$$

- A két polinom szorzata:

$$\begin{aligned}(p \cdot q)(x) :=& p(x) \cdot q(x) = (a_0 \cdot b_0) + (a_0b_1 + a_1b_0)x + \\ & + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \cdots + a_nb_mx^{m+n}.\end{aligned}$$

Tehát:

$$\deg(p+q) \leq \max\{\deg(p), \deg(q)\}$$

$$\deg(p \cdot q) = \deg(p) + \deg(q)$$

$p(x) = 3x^3 + x^2 - 4x + 1$ ← hanuned fazní

$q(x) = -x^4 - 2x^3 + x^2$ ← neszed fazní

$p(x) + q(x) = -x^4 + x^3 + 2x^2 - 4x + 1$

$p(x) \cdot q(x) = (3x^3 + x^2 - 4x + 1)(-x^4 - 2x^3 + x^2) = \ldots$

Maradékos osztás a polinomok körében

Tétel – polinomok maradékos osztása

Ha

$$p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0,$$
$$s(x) = b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0,$$

ahol $a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$ és $m < n$, akkor egyértelműen léteznek olyan $q(x)$ és $r(x)$ polinomok, hogy

hányadospolinom

maradék

$$p(x) = s(x) \cdot q(x) + r(x), \quad \deg(q) = n - m, \quad \deg(r) < m = \deg(s).$$

a) Példa: $p(x) = x^4 + 3x^2 - 4$, $s(x) = x^2 + 2x$

Definíció

Ha az előző tételben $p(x) = s(x) \cdot q(x)$, azaz $r(x) = 0$, akkor az $s(x)$ polinom osztója $p(x)$-nek, amit $s(x)|p(x)$-szel jelölünk.

b) Példa: $p(x) = x^5 - 3x^4 + 4x + 1$, $s(x) = x^2 + x + 1$

a) $$(x^4 + 3x^2 - 4) : (x^2 + 2x) = \underbrace{x^2 - 2x + 7}_{q(x)}$$

$$x^4 + 2x^3$$

$$-2x^3 + 3x^2 - 4$$

$$-2x^3 - 4x^2$$

$$7x^2 - 4$$

$$7x^2 + 14x$$

$$-14x - 4 \leftarrow r(x)$$

$$s(x) \cdot q(x) + r(x) = p(x)$$

$$(x^2+2x)(x^2-2x+7) - 14x - 4 = x^4 - 2x^3 + 7x^2 + 2x^3 - 4x^2$$

$$+ 14x - 14x - 4 = x^4 + 3x^2 - 4 = p(x)$$

b

$$(x^5-3x^4+4x+1):(x^2+x+1) = \underbrace{x^3-4x^2+3x+1}_{q(x)}$$

$$\begin{array}{l}
x^5+x^4+x^3 \\
\hline
-4x^4-x^3+4x+1 \\
-4x^4-4x^3-4x^2 \\
\hline
3x^3+4x^2+4x+1 \\
3x^3+3x^2+3x \\
\hline
x^2+x+1 \\
x^2+x+1 \\
\hline
0 \longleftarrow r(x)
\end{array}$$

$$x^5-3x^4+4x+1 = (x^2+x+1)(x^3-4x^2+3x+1)$$

Polinomok gyökei

Definíció

Legyen $p(x)$ egy valós (vagy komplex) együtthatós polinom, azaz $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ (vagy $p(x) \in \mathbb{C}[x]$). A $b \in \mathbb{C}$ szám $p(x)$ **gyöke** vagy **zérushelye**, ha $p(b) = 0$.

Megjegyzés: Ha b a $p(x)$ gyöke, akkor $(x - b) | p(x)$.

Példák:

- Másodfokú polinomok gyöktényezős alakja:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

- $p(x) = x^3 + x^2 - 2x - 8$, mivel $p(2) = 0$ ezért $x_0 = 2$ egy gyök

Definíció

A b komplex szám a $p(x)$ polinom **k-szoros gyöke**, ha $(x - b)^k | p(x)$, de $(x - b)^{k+1} \nmid p(x)$. Ekkor azt is mondjuk, hogy a b gyök **multiplicitása** k.

Pl.: $x_0 = 1$ az alábbi polinom háromszoros gyöke: $p(1) = 0$ (azaz gyök)

$$p(x) = 2x^5 - 4x^4 + 6x^3 - 14x^2 + 16x - 6 = (x - 1)^3(2x^2 + 4x + 10)$$

Az algebra alaptétele és következményei

Tétel – az algebra alaptétele

Legyen $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ egy legalább elsőfokú (azaz nem konstans) polinom. Ekkor $\exists x_0 \in \mathbb{C} : p(x_0) = 0$, azaz $p(x)$-nek van komplex gyöke.

Megj.: Legyen $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ n-edfokú polinom ($n \geq 1$) és $x_0 \in \mathbb{C}$ egy gyöke ennek. Ekkor $(x - x_0)|p(x)$, és így:

$$p(x) = (x - x_0) \cdot q(x), \quad \text{ahol } \deg(q) = n - 1.$$

Viszont $q(x)$-re szintén igaz az algebra alaptétele, ezért létezik $x_1 \in \mathbb{C}$ gyöke, tehát $q(x) = (x - x_1) \cdot q_1(x)$, így

$$p(x) = (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot q_1(x); \qquad \ldots$$

Következmények

- Egy n-edfokú komplex együtthatós polinomnak pontosan n db komplex gyöke van (multiplicitással számolva).
- Egy n-edfokú valós együtthatós polinomnak pontosan n db komplex, valamint legfeljebb n db valós gyöke van.

A gyöktényezős alak általában ($\mathbb{R}$ felett)

$$p(x) = a_n(x - x_1)^{\alpha_1} \dots (x - x_k)^{\alpha_k} \cdot (x^2 + b_1 x + c_1)^{\beta_1} \dots (x^2 + b_l x + c_l)^{\beta_l}$$

itt $(x - x_i)^{\alpha_i}$: elsőfokú tényezők
és $(x^2 + b_j x + c_j)^{\beta_j}$: másodfokú tényezők,
nem bomlanak szorzattá $\mathbb{R}$ felett
itt vannak a komplex (nem valós) gyökök,
amik páronként konjugáltak

$$n = \deg(p) = \alpha_1 + \dots + \alpha_k + 2\beta_1 + \dots + 2\beta_l$$

Ha n páratlan, akkor $\exists \alpha_i \neq 0$, ekkor $x_i \in \mathbb{R}$ gyök.

Még egy következménye az algebra alaptételének

- Ha $p(x)$ valós együtthatós, páratlan fokszámú polinom, akkor van valós gyöke.

A komplex esetben (a gyöktényezős alak $\mathbb{C}$ felett):

$$p(x) = a_n(x - x_1)^{\alpha_1} \dots (x - x_j)^{\alpha_j}, \quad \text{és itt } n = \alpha_1 + \dots + \alpha_j.$$

Horner-algoritmus (vagy Horner-elrendezés)

$a_n \neq 0$

- Egy polinom helyettesítési értékeinek kiszámolására.
- Legyen $p(x) = \underline{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x} + a_0$.
- Vegyük észre, hogy ekkor

$$p(x) = (\dots(\underbrace{(\overbrace{\underset{\uparrow\, b_n}{a_n} x + a_{n-1}}^{b_{n-1}}) \cdot x + a_{n-2}}_{b_{n-2}}) \cdot x + \dots + a_1) \cdot x + a_0.$$

Az algoritmus:

$p(x^*) = ?$

$$\begin{aligned}
b_n &= a_n \\
b_{n-1} &= b_n x^\star + a_{n-1} \\
b_{n-2} &= b_{n-1} x^\star + a_{n-2} \\
&\vdots \\
b_0 &= b_1 x^\star + a_0 = p(x^\star)
\end{aligned}$$

```
b = a_n
for (i=1; i<=n; i++)
   b = b*x + a_{n-i}
```

- Műveletigény Horner-elrendezés nélkül: $n-1+n = 2n-1$ db szorzás és n db összeadás
- Műveletigény Horner-elrendezéssel: n db szorzás, n db összeadás

Táblázatban:

	a_n	a_{n-1}	$\cdots$	a_2	a_1	a_0
$x^\star$	b_n	b_{n-1}	$\cdots$	b_2	b_1	b_0

$p(x^\star) = b_0$

Példa

$+0 \cdot x^3$

$$p(x) = 2x^5 + 3x^4 - 3x^2 + 5x - 1, \qquad p(-2) = ?$$

	2	3	0	-3	5	-1
-2	2	-1	2	-7	19	-39

$\leftarrow p(-2)$

$p(-2) = -39$

$p(2) = ?$

	2	3	0	-3	5	-1
2	2	7	14	25	55	109

$\leftarrow p(2)$

Tétel

Egy egész együtthatós polinom $\mathbb{Z}$-beli gyökei a konstans tag osztói.

A bizonyítás kulcsa: a gyöktényezős alakból következik.

Tétel

Egy egész együtthatós polinom $\frac{p}{q}$ (ahol $(p, q) = 1$) alakú gyökeire teljesül, hogy p osztja a polinom konstanstagját, q pedig a főegyütthatót.

A

$$p(x) = \overset{a_3}{30}x^3 - 53x^2 + 31x - \overset{a_0}{6}$$

polinom gyökei:

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{3}{5}$$

a_0 osztói:
$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

a_3 osztói:
$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 5,$
$\pm 6, \pm 10, \pm 15, \pm 30$

Példák

a

$$\begin{array}{c|cccccc} & -1 & -3 & 2 & 0 & -5 & 2 \\ \hline 2 & -1 & -5 & -8 & -16 & -37 & -72 \end{array}$$

$\leftarrow p(2)$

- a) $p(x) = -x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 5x + 2$, $p(2) = ?$
- b) Határozzuk meg a hányadospolinomot és a maradékot, ha a

$$p(x) = 2x^6 - 3x^4 - 5x^3 + x^2 - 4x - 4$$

polinomot osztjuk $(x + 1)$-gyel. $x - x_0$ $x_0 = -1$

- c) Hányszoros gyöke lesz az $x_0 = 1$ a

$$p(x) = 2x^5 - 4x^4 + 6x^3 - 14x^2 + 16x - 6$$

polinomnak?

---

b

$$\begin{array}{c|ccccccc} & 2 & 0 & -3 & -5 & 1 & -4 & -4 \\ \hline -1 & 2 & -2 & -1 & -4 & 5 & -9 & 5 \end{array}$$

$\leftarrow p(-1)$

$q(x) = 2x^5 - 2x^4 - x^3 - 4x^2 + 5x - 9$ $r(x) = 5$

(a) Ha $p(2) = -72$, allor

$$p(x) = (x-2)\cdot \boxed{q(x)} - 72$$

$$(x-2)(-x^4-5x^3-8x^2-16x-37) - 72 = p(x)$$

$$-x^5-5x^4-8x^3-16x^2-37x+2x^4+10x^3+16x^2+32x$$

$$+74-72 = -x^5-3x^4+2x^3-5x+2 = p(x)$$

(c) $p(x) = 2x^5 - 4x^4 + 6x^3 - 14x^2 + 16x - 6$

$x_0 = 1$

	2	-4	6	-14	16	-6	
1	2	-2	4	-10	6	0	$\leftarrow p(1)$
1	2	0	4	-6	0		
1	2	2	6	0			
1	2	4	10				

10 ↖ már nem gyök

$$p(x) = (x-1)(2x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 10x + 6)$$

$$= (x-1)^2(2x^3 + 4x - 6) = (x-1)^3(2x^2 + 2x + 6)$$

Rekurziók

Definíció

Az

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$$

formulát az $\{a_n\}$ sorozatra vonatkozó k-adrendű, homogén, állandó együtthatós, lineáris rekurziónak nevezzük. ($k \in \mathbb{N}$, $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$ rögzítettek, $c_k \neq 0$.)

Megj.: A fenti rekurzió akkor definiálja az a_n sorozatot, ha megadjuk a sorozat k szomszédos tagjának az értékét.

Másodrendű, homogén, állandó együtthatós lineáris rekurzió:

$$\begin{aligned} a_1 &= \alpha_1, \\ a_2 &= \alpha_2, \\ a_n &= c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}, \quad n \geq 3, \end{aligned}$$

ahol $\alpha_1, \alpha_2, c_1, c_2$ adottak.

Példák

- Fibonacci-sorozat:

$a_2 = 1$

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \text{ ha } n \geq 2$$

A sorozat első néhány tagja:

$$0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34, \ldots$$

-

$$a_1 = \underline{1}, \quad a_2 = \underline{3}, \quad a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}, \text{ ha } n \geq 3$$

A sorozat első néhány tagja:

$$1,\ 3,\ 5,\ 11,\ 21,\ 43, \ldots$$

Definíció

Az $x^2 - c_1 x - c_2 = 0$ egyenletet az $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ rekurzió karakterisztikus egyenletének nevezzük.

Ha az $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$, $n \geq 3$ rekurzió karakterisztikus egyenletének gyökei x_1 és x_2, akkor a_n a következőképpen írható fel zárt alakban:

- ha $x_1 \neq x_2$, akkor
  $$\boxed{a_n = \lambda_1 x_1^{n-1} + \lambda_2 x_2^{n-1},}$$
- ha $x_1 = x_2$, akkor

$$a_n = \lambda_1 x_1^{n-1} + \lambda_2 (n-1) x_1^{n-1},$$

ahol a λ_1, λ_2 értékeket az $a_1 = \alpha_1, a_2 = \alpha_2$ kezdeti feltételekből határozzuk meg.

Példa

(Oldjuk meg az alábbi rekurziót)

Írjuk fel az

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 3, \quad a_n = 1a_{n-1} + 2a_{n-2}, \text{ ha } n \geq 3$$

rekurzió általános tagját zárt alakban!

$x^2 - 1x - 2 = 0$

Az $x^2 - x - 2 = 0$ karakterisztikus egyenlet gyökei: $x_1 = -1$, $x_2 = 2$.

$$a_n = \lambda_1(-1)^{n-1} + \lambda_2 2^{n-1}$$

A kezdeti feltételekből:

$n = 1$ $$a_1 = \lambda_1(-1)^0 + \lambda_2 2^0 = \lambda_1 + \lambda_2 = 1$$

$n = 2$ $$a_2 = \lambda_1(-1)^1 + \lambda_2 2^1 = -\lambda_1 + 2\lambda_2 = 3$$

$3\lambda_2 = 4$

$\lambda_2 = \frac{4}{3}$

Innen: $\lambda_1 = -\frac{1}{3}$, $\lambda_2 = \frac{4}{3}$, azaz

$$a_n = -\frac{1}{3}(-1)^{n-1} + \frac{4}{3}2^{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

pl. $a_5 = -\frac{1}{3}(-1)^4 + \frac{4}{3}\cdot 2^4 = -\frac{1}{3} + \frac{64}{3} = 21$

$$a_6 = -\frac{1}{3}(-1)^5 + \frac{4}{3}2^5 = \frac{1}{3} + \frac{128}{3} = 43$$

Példa

Írjuk fel az

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 5, \quad a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}, \text{ ha } n \geq 3$$

rekurzió általános tagját zárt alakban! $x^2 - 4x - 4 = 0$

Az $x^2 - 4x + 4 = 0$ karakterisztikus egyenlet gyökei: $x_1 = x_2 = 2$.

$$\boxed{a_n = \lambda_1 2^{n-1} + \lambda_2 (n-1) 2^{n-1}}$$

A kezdeti feltételekből:

$n = 1$ $\quad a_1 = \lambda_1 = 1$

$n = 2$ $\quad a_2 = 2\lambda_1 + 2\lambda_2 = 5$

Innen: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \frac{3}{2}$, azaz

$$a_n = 2^{n-1} + \frac{3}{2}(n-1)2^{n-1} = 2^{n-2}(3n-1), \quad n = 1, 2, \ldots$$

Példa

A Fibonacci-sorozat általános tagja zárt alakban:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right), \quad n = 0, 1, 2\dots$$

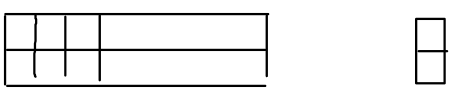
1
Példa

Hányféleképpen fedhetünk le egy $2 \times n$-es táblát 1×2-es lapokkal?

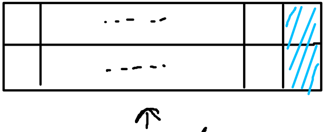
2
Példa

Hány olyan részhalmaza van az $\{1, 2, \dots, n\}$ halmaznak, mely nem tartalmaz szomszédos számokat?

1

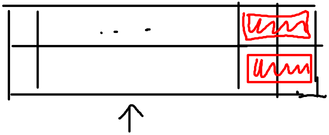


Jelölje a_n azt, hogy egy $2 \times n$-es tábla hányféleképpen fedhető le.



n oszlop

ilyenből a_{n-1} van



n oszlop

ilyenből a_{n-2} van

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

$$a_1 = 1$$
$$a_2 = 2$$

(2) $\{1, \dots, n\}$

ha egy adott részhz-ban nincs benne az n, akkor $\{1, 2, \dots, n-1\}$ „jó" részhzait kell összeszámolni

ha benne van az n, akkor $n-1$ nem lehet benne $\Rightarrow$ $\{1, \dots, n-2\}$ „jó" részhalmazait kell összeszámolni

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

$a_1 = 2$ $(\{1\}, \emptyset)$

$a_2 = 3$ $(\{1\}, \{2\}, \emptyset)$

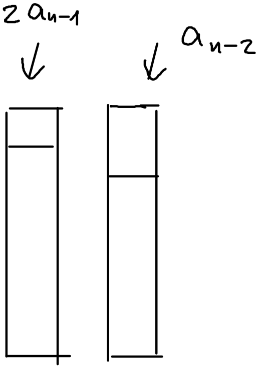
③ 

Hányféleképpen lehet n magasságú tornyot építeni?

$a_1 = 2$

$a_2 = 5$

n magas torony



$$a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$$