Valós számsorozatok I.

A gyakorlat célja

Ebben a gyakorlatban a valós analízis egyik legfontosabb fogalmával, a valós számsorozatok konvergenciájával fogunk megismerkedni és megvizsgáljuk azt is, hogy ennek a fogalomnak mi a kapcsolata a korábban már tanult fogalmakkal, úgy mint, a korlátosság vagy a monotonitás.

Néhány alapvető valós számsorozat határértékének a megállapítása és az úgynevezett kalkulus szabályok megismerése után azt fogjuk megnézni, hogy ezeknek a felhasználásával miként tudjuk majd bonyolultabb sorozatoknak is kiszámítani a határértékét.

Ez a témakör önmagában is fontos, szép és jelentős része a valós analízisnek, azonban ennek a résznek a jelentősége a félév többi részében is szignifikánsan meg fog majd mutatkozni, például a függvényhatárérték, a folytonosság vagy a differenciálhatóság kapcsán.

Felhasznált elméleti anyag

A feladatok megoldásához szükséges fogalmak és elméleti állítások:

(a) valós számsorozat fogalma

(b) (alulról/felülről) korlátos sorozat fogalma

(c) (szigorúan) monoton növekedő/csökkenő sorozat fogalma

(d) konvergens/divergens sorozat fogalma

(e) $\pm\infty$-hez divergáló sorozat fogalma

(f) konvergencia és a műveletek kapcsolatáról szóló tételek

Szükséges előismeretek

A feladatok megoldásához szükséges (középiskolában már tanult) ismeretek az alábbiak:

(a) A hatvány definíciója, azonosságai (link)

(b) Polinomok, műveletek polinomokkal (link)

(c) Nevezetes szorzatok (link)

(d) Polinomok szorzattá alakítása kiemeléssel (link)

(e) Az abszolút érték fogalma és tulajdonságai (link)

Gondolkozzunk!

Minden tanult fogalomra adjunk példát és „rossz” példát. Ez utóbbi alatt azt értve, hogy pl. ne csak alulról korlátos sorozatra próbáljuk meg példát adni, hanem olyanra is, amelyik alulról nem korlátos.

Próbáljuk meg végigvenni, hogy a mai alkalommal tanult fogalmak között van-e bármiféle kapcsolat. A sejtéseinket próbáljuk meg igazolni, keressünk minél több példát, illetve ellenpéldát (az adott állítás igazságtartalmától függően). Pl. van-e bármiféle kapcsolat a korlátosság és a monotonitás között?

Próbáljuk meg megfogalmazni az ismertetett fogalmak, állítások tagadásait. Pl. mit jelent az, hogy egy sorozat felülről *nem* korlátos?

1. Feladat. *Írjuk fel az alább $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valós számsorozatok első öt elemét.*

(a) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Megoldás.

$$x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{1}{2}, \quad x_3 = \frac{1}{3}, \quad x_4 = \frac{1}{4}, \quad x_5 = \frac{1}{5}.$$

□

(b) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{n-1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Megoldás.

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{1}{2}, \quad x_3 = \frac{2}{3}, \quad x_4 = \frac{3}{4}, \quad x_5 = \frac{4}{5}.$$

□

(c) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$

Megoldás.

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = -1, \quad x_4 = 1, \quad x_5 = -1.$$

□

(d) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(n^2 - 1\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Megoldás.

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 2^2 - 1 = 4 - 1 = 3, \quad x_3 = 3^2 - 1 = 9 - 1 = 8,$$

$$x_4 = 4^2 - 1 = 16 - 1 = 15, \quad x_5 = 5^2 - 1 = 25 - 1 = 24.$$

□

(e) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left((-1)^n n^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Megoldás.

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 4, \quad x_3 = -9, \quad x_4 = 16, \quad x_5 = -25.$$

□

(f) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1+(-1)^n}{2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Megoldás.

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 1, \quad x_5 = 0.$$

□

(g) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sqrt[n]{2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Megoldás.

$$x_1 = 2, \quad x_2 = \sqrt{2}, \quad x_3 = \sqrt[3]{2}, \quad x_4 = \sqrt[4]{2}, \quad x_5 = \sqrt[5]{2}.$$

□

(h) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Megoldás.

$$x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{1}{4}, \quad x_3 = \frac{1}{8}, \quad x_4 = \frac{1}{16}, \quad x_5 = \frac{1}{32}.$$

□

(i) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(n^{(-1)^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Megoldás.

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = \frac{1}{3}, \quad x_4 = 4, \quad x_5 = \frac{1}{5}.$$

□

2. Feladat. *Vizsgáljuk meg korlátosság, monotonitás és konvergencia szempontjából az alábbi sorozatokat.*

(a) $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Megoldás. *Tekintsük az*

$$x_n = \frac{1}{n} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

módon megadott $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot. Mivel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$n < n + 1$$

teljesül, ezért

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1},$$

azaz,

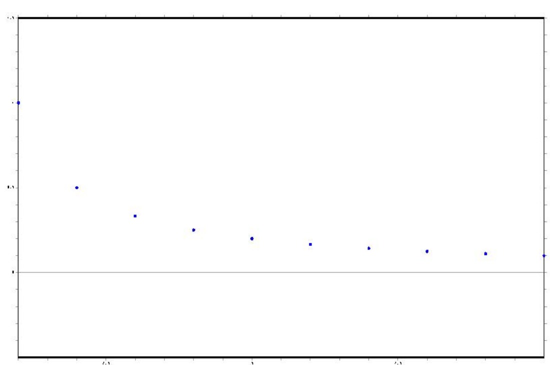
$$x_n > x_{n+1},$$

*ami mutatja, hogy a feladatban szereplő $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat **szigorúan monoton csökkenő**.*

*Mivel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $n > 0$, azért $\frac{1}{n} > 0$ is teljesül, vagyis minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $x_n > 0$, ami azt jelenti, hogy $k = 0$ alsó korlátja az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatnak. Másfelől minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $n \geq 1$ is teljesül, amiből az adódik, hogy $\frac{1}{n} \leq 1$, vagyis minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $x_n \leq 1$, ezért $K = 1$ felső korlátja az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatnak. Mivel az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat alulról és felülről is korlátos, ezért **korlátos**.*

Végül azt fogjuk megmutatni (a definíció felhasználásával), hogy a feladatban szereplő $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens és a határértéke nulla. Ehhez legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges és válasszuk meg N-et $\frac{1}{\varepsilon}$-nak. Legyen most $n \in \mathbb{N}$ olyan, melyre $n > N$, ekkor

$$\begin{aligned} n &> \tfrac{1}{\varepsilon} \\ \tfrac{1}{n} &< \varepsilon \\ \left|\tfrac{1}{n}\right| &< \varepsilon \\ \left|\tfrac{1}{n} - 0\right| &< \varepsilon \\ |x_n - 0| &< \varepsilon. \end{aligned}$$



□

(b) $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$

Megoldás. *Tekintsük a feladatban megadott $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot és figyeljük meg, hogy ha minden $n \in \mathbb{N}$*

$$x_n = \begin{cases} 1, & \text{ha } n \text{ páros} \\ -1, & \text{ha } n \text{ páratlan,} \end{cases}$$

ezért

$$\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\} = \{-1, 1\},$$

mely egy korlátos halmaz (ugyanis a $k = -1$ alsó, míg a $K = 1$ felső korlátja a halmaznak). Ez azt mutatja, hogy a feladatban szereplő $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat ***korlátos****.*

Azt fogjuk megmutatni, hogy az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat se nem monoton növekedő, se nem monoton csökkenő.

Egy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat pontosan akkor ***nem monoton növekedő****, ha van legalább egy olyan $n \in \mathbb{N}$, melyre*

$$x_n > x_{n+1}$$

teljesül. Figyeljük meg, hogy a feladatban szereplő $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat esetében, ha az $n = 2$ választással élünk, akkor

$$1 = x_2 > x_3 = -1,$$

ami mutatja, hogy az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat ***nem monoton növekedő****.*

Hasonlóan, egy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat pontosan akkor ***nem monoton csökkenő****, ha van legalább egy olyan $n \in \mathbb{N}$, melyre*

$$x_n < x_{n+1}$$

teljesül. Figyeljük meg, hogy a feladatban szereplő $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat esetében, ha az $n = 1$ választással élünk, akkor

$$-1 = x_1 < x_2 = 1,$$

ami mutatja, hogy az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat ***nem monoton csökkenő****.*

Végül megmutatjuk azt is, hogy az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat ***nem konvergens****.*

Egy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valós számsorozat ***pontosan akkor nem konvergens****, ha tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén van olyan $\varepsilon > 0$ úgy, hogy minden $N > 0$ esetén van legalább egy olyan $n \in \mathbb{N}$, melyre $n > N$ és*

$$|x_n - x| > \varepsilon$$

teljesül.

Legyen először $x = 1$ és $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Figyeljük meg, hogy ekkor minden olyan $n \in \mathbb{N}$ esetén, mely $n = 2k + 1$ alakú (azaz, páratlan n-ekre), azt teljesül, hogy

$$|x_n - x| > \varepsilon,$$

ami mutatja, hogy $x = 1$ ***nem*** *lehet a fenti sorozat határértéke.*

Hasonlóan kezelhető az $x = -1$ és az $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ eset is.

□

(c) $(n)_{n\in\mathbb{N}}$

Útmutatás. *A korlátossághoz használjuk azt, hogy*

$$\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\} = \{n \,|\, n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N},$$

aminek a segítségével azonnal látszik, hogy a feladatban szereplő sorozat alulról korlátos, felülről viszont nem.

Az, hogy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat szigorúan monoton növekedő azonnal adódik abból az egyenlőtlenségből, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$n < n+1$$

teljesül. □

(d) $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Megoldás. *Először azt fogjuk megmutatni, hogy a feladatban szereplő $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat szigorúan monoton növekedő. Ehhez legyen $n \in \mathbb{N}$ tetszőleges, ekkor*

$$\begin{aligned}
n &< n+1 && \text{(Adjunk mindkét oldalhoz 1-et.)}\\
n+1 &< n+2 && \text{(Vegyük mindkét oldal reciprokát.)}\\
\frac{1}{n+1} &> \frac{1}{n+2} && \text{(Szorozzuk meg mindkét oldalt (-1)-gyel.)}\\
-\frac{1}{n+1} &< -\frac{1}{n+2} && \text{(Adjunk mindkét oldalhoz 1-et)}\\
1-\frac{1}{n+1} &< 1-\frac{1}{n+2} && \text{(Hozzunk közös nevezőre.)}\\
\frac{n}{n+1} &< \frac{n+1}{n+1}\\
x_n &< x_{n+1},
\end{aligned}$$

ami mutatja, hogy a feladatban szereplő sorozat valóban szigorúan monoton növekedő.

Ebből azonnal adódik, hogy az első sorozatelem, azaz, $x_1 = \frac{1}{2}$ alsó korlátja a sorozatnak. A felülről való korlátossághoz figyeljük meg, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$n < n+1,$$

amiből

$$x_n = \frac{n}{n+1} < 1$$

adódik, vagyis $K = 1$ felső korlátja az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatnak.

A konvergencia igazolásához használjuk az előadáson tanult állításokat, vagy közvetlenül a definíciót. □

(e) $\left(\dfrac{(-1)^{n+1}}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Útmutatás. *Mutassuk meg, hogy a feladatban szereplő $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat*

- *nem monoton növekedő*
- *nem monoton csökkenő*
- *alulról korlátos*

- *felülről korlátos*
- *konvergens.*

□

(f) $((-1)^n n)_{n\in\mathbb{N}}$

Útmutatás. *Mutassuk meg, hogy a feladatban szereplő* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat*

- *nem monoton növekedő*
- *nem monoton csökkenő*
- *nem alulról korlátos*
- *nem felülről korlátos*
- *nem konvergens.*

□

(g) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Útmutatás. *Mutassuk meg, hogy a feladatban szereplő* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat*

- *nem monoton növekedő*
- *szigorúan monoton csökkenő*
- *alulról korlátos*
- *felülről korlátos*
- *konvergens.*

□

3. Feladat. *Mutassuk meg, hogy ha* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *és* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *(szigorúan) monoton növekedő/csökkenő sorozatok, akkor az* $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat is (szigorúan) monoton növekedő/csökkenő.*

Megoldás. Legyenek $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton növekedő sorozatok. Mivel az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat monoton növekedő, ezért minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$x_n \leq x_{n+1}$$

teljesül. Továbbá, mivel az $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat monoton növekedő, ezért minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$y_n \leq y_{n+1}$$

teljesül.

Legyen most $n \in \mathbb{N}$ tetszőleges, ekkor az

$$x_n \leq x_{n+1} \quad \text{és} \quad y_n \leq y_{n+1}$$

együttes fennállása maga után vonja, hogy

$$x_n + y_n \leq x_{n+1} + y_{n+1},$$

ami éppen azt jelenti, hogy az $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat monoton növekedő.

Legyenek $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton csökkenő sorozatok. Mivel az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat monoton csökkenő, ezért minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$x_n \geq x_{n+1}$$

teljesül. Továbbá, mivel az $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat monoton csökkenő, ezért minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$y_n \geq y_{n+1}$$

teljesül.

Legyen most $n \in \mathbb{N}$ tetszőleges, ekkor az

$$x_n \geq x_{n+1} \quad \text{és} \quad y_n \geq y_{n+1}$$

együttes fennállása maga után vonja, hogy

$$x_n + y_n \geq x_{n+1} + y_{n+1},$$

ami éppen azt jelenti, hogy az $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat monoton csökkenő.

Az az eset, amikor az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatok *szigorúan* monoton növekedőek, illetve csökkenőek, hasonló a fentiekhez. □

4. Feladat. *Mutassuk meg, hogy ha* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *(szigorúan) monoton növekedő/csökkenő sorozat, akkor* $(-x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *(szigorúan) monoton csökkenő/növekedő.*

Megoldás. Legyen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy monoton növekedő sorozat. Ekkor tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$x_n \leq x_{n+1}$$

teljesül, amiből az adódik, hogy

$$-x_n \geq -x_{n+1},$$

vagyis a $(-x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat monoton csökkenő.

Legyen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy monoton csökkenő sorozat. Ekkor tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$x_n \geq x_{n+1}$$

teljesül, amiből az adódik, hogy

$$-x_n \leq -x_{n+1},$$

vagyis a $(-x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat monoton növekedő.

Az az eset, amikor az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatok *szigorúan* monoton növekedőek, illetve csökkenőek, hasonló a fentiekhez. □

5. Feladat. *Ha* $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$*, akkor igazoljuk, hogy az* $(|x_n|)$ *sorozat* $|x_0|$*-hoz konvergál.*

Megoldás. Legyen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy olyan valós számsorozat, mely az x_0 valós számhoz konvergál. Ekkor bármely $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $N > 0$ úgy, hogy ha $n \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $n > N$, akkor fennáll az

$$|x_n - x_0| < \varepsilon$$

egyenlőtlenség.

Másfelől, idézzük fel a középiskolában már tanult ún. háromszögegyenlőtlenséget, mely szerint minden $u, v \in \mathbb{N}$ esetén

$$|u + v| \leq |u| + |v|$$

teljesül. Ha ebben az egyenlőtlenségben először az $u = x_0$, $v = x_n - x_0$ helyettesítéssel élünk, akkor azt kapjuk, hogy

$$|x_n| \leq |x_n - x_0| + |x_0|,$$

azaz,

$$|x_n| - |x_0| \leq |x_n - x_0|.$$

Továbbá, ha az $u = x_n$ és $v = x_n - x_0$ helyettesítést alkalmazzuk, akkor pedig azt kapjuk, hogy

$$|x_0| \leq |x_n| + |x_n - x_0|,$$

másszóval,

$$-|x_n - x_0| \leq |x_n| - |x_0|$$

teljesül. Ebből a két egyenlőtlenségből azonban az adódik, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén fennáll az

$$\big|\,|x_n| - |x_0|\,\big| \leq |x_n - x_0|,$$

ezért, ha $n \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $n > N$, akkor

$$\big|\,|x_n| - |x_0|\,\big| \leq |x_n - x_0| < \varepsilon,$$

ami éppen az jelenti, hogy az $(|x_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens és a határértéke $|x_0|$. □

6. Feladat. *Adjunk meg olyan korlátos valós sorozatot, mely divergens.*

Megoldás. Tekintsük az

$$x_n = (-1)^n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

módon megadott $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot, mely a 2. Feladat (b) része szerint korlátos és divergens. □

7. Feladat. *Adjunk meg olyan $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valós divergens sorozatot, melyre az $(|x_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens.*

Megoldás. Tekintsük az

$$x_n = (-1)^n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

módon megadott $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot, mely a 2. Feladat (b) része szerint divergens. Figyeljük meg, hogy ebben az esetben

$$|x_n| = |(-1)^n| = 1 \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

mely sorozat azonban konvergens. □

8. Feladat. *Legyenek $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergens sorozatok.*

(a) Igaz-e, hogy az $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat is divergens?

Megoldás. *Nem igaz. Ehhez tekintsük az*

$$x_n = (-1)^n \quad \text{és} \quad y_n = (-1)^{n+1} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

módon megadott $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergens sorozatokat és figyeljük meg, hogy

$$x_n + y_n = (-1)^n + (-1)^{n+1} = (-1)^n + (-1) \cdot (-1)^n = 0 \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

ami egy konvergens sorozat. □

(b) Igaz-e, hogy az $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens?

Megoldás. *Nem igaz. Ehhez tekintsük az*

$$x_n = (-1)^n \quad \text{és} \quad y_n = (-1)^n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

módon megadott $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergens sorozatokat és figyeljük meg, hogy

$$x_n + y_n = (-1)^n + (-1)^n = 2 \cdot (-1)^n \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

ami egy divergens sorozat. Ha ugyanis a $(2 \cdot (-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens volna, akkor (mivel konvergens sorozat tetszőleges konstansszorosa is konvergens) az ennek a sorozatnak az $\frac{1}{2}$-szerese is konvergens lenne, de az pedig éppen a $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergens sorozat. □

(c) *Igaz-e, hogy az* $(x_n \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat divergens? Nem igaz. Ehhez tekintsük az*

$$x_n = (-1)^n \quad \textit{és} \quad y_n = (-1)^n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

módon megadott $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *és* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *divergens sorozatokat és figyeljük meg, hogy*

$$x_n \cdot y_n = (-1)^n \cdot (-1)^n = (-1)^{2n} = 1^n = 1 \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

ami egy konvergens sorozat.

(d) *Igaz-e, hogy az* $(x_n \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat konvergens? Nem igaz. Ehhez tekintsük az*

$$x_n = n \quad \textit{és} \quad y_n = n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

módon megadott $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *és* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *divergens sorozatokat és figyeljük meg, hogy*

$$x_n \cdot y_n = n \cdot n = n^2 \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

ami egy divergens sorozat.

9. Feladat. *Adjunk példát olyan* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *és* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozatokra, melyekre*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \quad \textit{és} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = -\infty$$

úgy, hogy

(a) $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = +\infty$*;*

Megoldás. *Legyenek*

$$x_n = 2n \quad \textit{és} \quad y_n = -n \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

ekkor

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \quad \textit{és} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = -\infty$$

és

$$x_n + y_n = (2n) + (-n) = 2n - n = 2 \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$$

teljesül. □

(b) $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = -\infty$*;*

Megoldás. *Legyenek*

$$x_n = n \quad \textit{és} \quad y_n = -2n \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

ekkor

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \quad \textit{és} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = -\infty$$

és

$$x_n + y_n = n + (-2n) = n - 2n = -n \xrightarrow{n\to\infty} -\infty$$

teljesül. □

(c) $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = c$*, ahol c egy előre rögzített valós szám.*

Megoldás. *Legyen* $c \in \mathbb{R}$ *tetszőleges és*

$$x_n = n + c \quad \textit{és} \quad y_n = -n \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

ekkor

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \quad \textit{és} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = -\infty$$

és

$$x_n + y_n = (n + c) - n = n + c - n = c \xrightarrow{n\to\infty} c$$

teljesül. □

(d) az előző esetek egyike sem teljesül.

Megoldás. *Legyenek*

$$x_n = n + (-1)^n \quad \text{és} \quad y_n = -n \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

ekkor

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \quad \text{és} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = -\infty$$

és

$$x_n + y_n = (n + (-1)^n) + (-n) = n + (-1)^n - n = (-1)^n,$$

mely sorozatra a fenti állítások egyikre sem teljesül. □

⚠ Figyeljük! ((±∞) + (∓∞) alakú sorozatok)

Az előző feladatnak az egyik legfontosabb üzenete éppen az, hogy egy +∞-hez és egy −∞-hez divergáló sorozatnak az összegének a határértékéről általában **semmit nem tudunk mondani**. Ez egy olyan patologikus eset, amikor valamilyen ötletre, módszerre van ahhoz szükség, hogy ilyen típusú sorozatoknak meg tudjuk állípítani a határértékét.

10. Feladat. *Adjunk példát olyan $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatokra, melyekre*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \quad \text{és} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = -\infty$$

úgy, hogy

(a) $\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = c$*, ahol c egy előre rögzített valós szám;*

Megoldás. *Legyen $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges és*

$$x_n = -c \cdot \frac{1}{n} \quad \text{és} \quad y_n = -n \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

ekkor

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \quad \text{és} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = -\infty$$

és

$$x_n \cdot y_n = \left(-c \cdot \frac{1}{n}\right) \cdot (-n) = c \xrightarrow{n\to\infty} c$$

teljesül. □

(b) $\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = +\infty$*;*

Megoldás. *Legyen*

$$x_n = - \cdot \frac{1}{n} \quad \text{és} \quad y_n = -n^2 \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

ekkor

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \quad \text{és} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = -\infty$$

és

$$x_n \cdot y_n = \left(-\frac{1}{n}\right) \cdot (-n^2) = n \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$$

teljesül. □

(c) $\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = -\infty$*;*

Megoldás. *Legyen*

$$x_n = \frac{1}{n} \quad \textit{és} \quad y_n = -n^2 \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

ekkor

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \quad \textit{és} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = -\infty$$

és

$$x_n \cdot y_n = \frac{1}{n} \cdot (-n^2) = -n \xrightarrow{n\to\infty} -\infty$$

teljesül. □

(d) az $(x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat korlátos és divergens;

Megoldás. *Legyen*

$$x_n = (-1)^n \frac{1}{n} \quad \textit{és} \quad y_n = -n \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

ekkor

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \quad \textit{és} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = -\infty$$

és

$$x_n \cdot y_n = \left((-1)^n \frac{1}{n}\right) \cdot (-n) = (-1)^{n+1},$$

ami egy korlátos és divergens sorozat. □

(e) az $(x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat nem korlátos és divergens.

Megoldás. *Legyen*

$$x_n = (-1)^n \frac{1}{n} \quad \textit{és} \quad y_n = -n^2 \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

ekkor

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \quad \textit{és} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = -\infty$$

és

$$x_n \cdot y_n = \left((-1)^n \cdot \frac{1}{n}\right) \cdot (-n^2) = (-1)^{n+1} n,$$

ami egy olyan sorozat, mely nem korlátos és divergens. □

⚠ **Figyeljük!** $(0 \cdot (\pm\infty)$ **alakú sorozatok)**

Az előző feladatnak az egyik legfontosabb üzenete éppen az, hogy egy nullsorozat és egy $\pm\infty$-hez divergáló sorozat szorzatának a határértékéről általában **semmit nem tudunk mondani**. Ez egy olyan patologikus eset, amikor valamilyen ötletre, módszerre van ahhoz szükség, hogy ilyen típusú sorozatoknak meg tudjuk állípítani a határértékét.

11. Feladat. *Adjunk példát olyan $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatokra, melyekre*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \quad \textit{és} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = 0$$

úgy, hogy

(a) $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right) = +\infty$*;*

Megoldás. *Legyen*

$$x_n = \frac{1}{n} \quad \textit{és} \quad y_n = \frac{1}{n^2} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

ekkor

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \quad \textit{és} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = 0$$

és

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{n}\cdot n^2 = n \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$$

teljesül. □

(b) $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right) = -\infty$*;*

Megoldás. *Legyen*

$$x_n = -\frac{1}{n} \quad \textit{és} \quad y_n = \frac{1}{n^2} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

ekkor

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \quad \textit{és} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = 0$$

és

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{-\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = -\frac{1}{n}\cdot n^2 = -n \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$$

teljesül. □

(c) $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right) = c$*, ahol c egy előre rögzített valós szám;*

Megoldás. *Legyen $c \in \mathbb{N}$ és*

$$x_n = \frac{c}{n} \quad \textit{és} \quad y_n = \frac{1}{n} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

ekkor

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \quad \textit{és} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = 0$$

és

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{\frac{c}{n}}{\frac{1}{n}} = \frac{c}{n}\cdot n = c \xrightarrow{n\to\infty} c$$

teljesül. □

(d) a fentiek egyike sem teljesül.

Megoldás. *Legyen*

$$x_n = (-1)^n \frac{1}{n} \quad \textit{és} \quad y_n = \frac{1}{n} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

ekkor

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \quad \textit{és} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = 0$$

és

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{(-1)^n \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = (-1)^n,$$

ami egy divergens sorozat. □

⚠ Figyeljük! ($\frac{0}{0}$ alakú sorozatok)

Az előző feladatnak az egyik legfontosabb üzenete éppen az, hogy két nullsorozat hányadosának a határértékéről általában **semmit nem tudunk mondani**. Ez egy olyan patologikus eset, amikor valamilyen ötletre, módszerre van ahhoz szükség, hogy ilyen típusú sorozatoknak meg tudjuk állíptani a határértékét.

$\frac{P(n)}{Q(n)}$ alakú sorozatok

Az alábbi feladatban példáiban található sorozatok mindegyike ún. „polinom-per-polinom” típusú. Más szavakkal ezt azt jelenti, hogy az alábbi példákban

$$x_n = \frac{P(n)}{Q(n)} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

alakú sorozatoknak szeretnék meghatározni a határértékét. Mivel $\lim_{n\to\infty} P(n) = \pm\infty$ és $\lim_{n\to\infty} Q(n) = \pm\infty$ teljesül, ezért ezen sorozatok hányadosának határértékéről általában semmit nem tuduk mondani. Annak érdekében, hogy az előadáson tanult ún. kalkulus-szabályok (lásd. a konvergencia és a műveletek kapscolatáról szóló tételeket) alkalmazhatóak legyenek, a szóban forgó $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozaton egy *algebrai átalakítást* fogunk végrehajtani, mely után a határérték már könnyedén megállapítható lesz. Ez az algebrai átalakítás pedig az, hogy **ki kell emelni a *nevező*ben szereplő polinom legmagasabb fokú tagjával, a számlálóból és a nevezőből is**.

12. Feladat. *Határozzuk meg az alábbi sorozatok határértékét.*

(a)

$$\left(\frac{n-2}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

Megoldás.

$$\frac{n-2}{n} = \frac{n-2}{\color{red}{n}} = \frac{n}{n} \cdot \frac{1 - 2\frac{1}{n}}{1} = \frac{1 - 2\frac{1}{n}}{1} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{1} = 1.$$

□

(b)

$$\left(\frac{n+1999}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

Megoldás.

$$\frac{n+1999}{n^2} = \frac{n+1999}{\color{red}{n^2}} = \frac{n^2}{n^2} \cdot \frac{\frac{1}{n} + 1999\frac{1}{n^2}}{1} = \frac{\frac{1}{n} + 1999\frac{1}{n^2}}{1} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{0}{1} = 0.$$

□

(c)

$$\left(\frac{n}{3n+2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

Megoldás.

$$\frac{n}{3n+2} = \frac{n}{3n+2} = \frac{n}{n}\cdot\frac{1}{3+2\frac{1}{n}} = \frac{1}{3+2\frac{1}{n}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{3}.$$

$\square$

(d)

$$\left(\frac{\pi n^2+1}{2n-5}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

Megoldás.

$$\frac{\pi n^2+1}{2n-5} = \frac{\pi n^2+1}{2n-5} = \frac{n}{n}\cdot\frac{\pi n+\frac{1}{n}}{2-5\frac{1}{n}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{+\infty}{2} = +\infty.$$

$\square$

(e)

$$\left(\frac{3n^2-2n+5}{2n^2+8}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

Megoldás.

$$\frac{3n^2-2n+5}{2n^2+8} = \frac{3n^2-2n+5}{2n^2+8} = \frac{n^2}{n^2}\cdot\frac{3-2\frac{1}{n}+5\frac{1}{n^2}}{2+8\frac{1}{n^2}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{3}{2}.$$

$\square$

(f)

$$\left(\frac{2n^2+12}{3-n-3n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

Megoldás.

$$\frac{2n^2+12}{3-n-3n^2} = \frac{2n^2+12}{3-n-3n^2} = \frac{n^2}{n^2}\cdot\frac{2+12\frac{1}{n^2}}{3\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n}-3} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3}.$$

$\square$

(g)

$$\left(\frac{1-3n^2}{n-2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

Megoldás.

$$\frac{1-3n^2}{n-2} = \frac{1-3n^2}{n-2} = \frac{n}{n}\cdot\frac{\frac{1}{n}-3n}{1-2\frac{1}{n}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{+\infty}{1} = +\infty.$$

$\square$

(h)

$$\left(\frac{-2n^2-5n+12}{2-8n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

Megoldás.

$$\frac{-2n^2-5n+12}{2-8n} = \frac{-2n^2-5n+12}{2-8n} = \frac{n}{n}\cdot\frac{-2n-5+12\frac{1}{n}}{2\frac{1}{n}-8} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{-\infty}{-8} = +\infty.$$

$\square$

(i)

$$\left(\frac{n^3-n+3}{n^2-1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

Megoldás.

$$\frac{n^3-n+3}{n^2-1}=\frac{n^3-n+3}{n^2-1}=\frac{n^2}{n^2}\cdot\frac{n-\frac{1}{n}+3\frac{1}{n^2}}{1-\frac{1}{n^2}}\xrightarrow{n\to\infty}\frac{+\infty}{1}=+\infty.$$

□

(j)

$$\left(\frac{n^5-25n^3}{7n^9-2n^7}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

Megoldás.

$$\frac{n^5-25n^3}{7n^9-2n^7}=\frac{n^5-25n^3}{7n^9-2n^7}=\frac{n^9}{n^9}\cdot\frac{\frac{1}{n^4}-25\frac{1}{n^6}}{7-2\frac{1}{n^2}}\xrightarrow{n\to\infty}\frac{0}{7}=0.$$

□

(k)

$$\left(\frac{(n+4)^3-n(n+6)^2}{n^3}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

Megoldás.

$$\frac{(n+4)^3-n(n+6)^2}{n^3}=\frac{(n^3+12\,n^2+48\,n+64)-(n^3+12\,n^2+36\,n)}{n^3}=\frac{12n+64}{n^3}=\frac{12}{n^2}+\frac{64}{n^3}\xrightarrow{n\to\infty}0.$$

□

(l)

$$\left(\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

Megoldás.

$$\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)=\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)=\left(\frac{n}{n}\cdot\frac{1+\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n}}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n}}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\xrightarrow{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}.$$

□

Gondolkozzunk!

Próbáljunk meg rájönni, hogy a „polinom-per-polinom” típusú sorozatok esetében miért válnak be azok az algebrai átalakítások, amelyeket fent hajtottunk végre (ti. hogy kiemeltünk a nevező legnagyobb fokú tagjával a számlálóból és a nevezőből is).

Ahogyan a fenti feladatban szereplő példák is mutatják, egy polinom-per-polinom típusú sorozatnak lehet véges valós határértéke, illetve a határérték lehet $+\infty$ vagy $-\infty$ is. A fenti megoldásokat újra átnézve, próbáljunk meg rájönni, hogy min múlik az, hogy egy ilyen típusú sorozatnak mi lesz a határértéke.

„Majdnem” $\frac{P(n)}{Q(n)}$ típusú sorozatok

Az alábbi példában szereplő sorozatok sajnos nem polinom-per-polinom típusúak, hanem csak „majdnem”. Annyiban viszont hasonlít ez a típus az előzőre, hogy ebben is egy hányadosnak szerenénk kiszámítani a határértékét, a számláló és a nevező azonban nem feltétlenül polinom, hanem polinomok gyöke, illetve gyökös kifejezések polinomja. Ebben az esetben természetesen nincs értelme a nevező legnagyobb fokú tagjáról beszélni, hiszen a nevező általában nem egy polinom. A nevező „legdominánsabb” tagjáról már viszont igen: ebben az esetben a célravezető algebrai átalakítás az, hogy a nevező „legdominánsabb” tagjával ki kell emelni a számlálóból és a nevezőből is.

13. Feladat. *Számítsuk ki a következő sorozatok határértékét.*

(a)

$$\left(\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

Megoldás.

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{n}{n}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+0}} = 1.$$

□

(b)

$$\left(\frac{\sqrt{1+2n}}{1+\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

Megoldás.

$$\frac{\sqrt{1+2n}}{1+\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{1+2n}}{1+\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}}\cdot\frac{\sqrt{\frac{1}{n}+2}}{\frac{1}{\sqrt{n}}+1} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}.$$

□

(c)

$$\left(\frac{5n-2\sqrt{n}+8}{\sqrt{n^2+10n+2}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

Megoldás.

$$\frac{5n-2\sqrt{n}+8}{\sqrt{n^2+10n+2}} = \frac{n}{n}\cdot\frac{5-2\frac{1}{\sqrt{n}}+8\frac{1}{n}}{\sqrt{1+10\frac{1}{n}+2\frac{1}{n^2}}} \xrightarrow{n\to\infty}= \frac{5}{\sqrt{1}} = 5.$$

□

(d)

$$\left(\frac{\sqrt[3]{n^2+n+10}}{n+11}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

Megoldás.

$$\frac{\sqrt[3]{n^2+n+10}}{n+11} = \frac{\sqrt[3]{n^2+n+10}}{n+11} = \frac{n}{n}\cdot\frac{\sqrt[3]{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+10\frac{1}{n^3}}}{1+11\frac{1}{n}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{0}{1} = 0.$$

□

(e)

$$\left(\frac{\sqrt[4]{n^3+n^2-n}}{\sqrt[3]{n+9}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

Megoldás.

$$\frac{\sqrt[4]{n^3+n^2-n}}{\sqrt[3]{n+9}} = \frac{\sqrt[4]{n^3+n^2-n}}{\sqrt[3]{n+9}} = \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n}} \cdot \frac{\sqrt[4]{n^{\frac{5}{2}}+n^{\frac{2}{3}}-n^{-\frac{1}{3}}}}{\sqrt[3]{1+9\frac{1}{n^3}}} \xrightarrow{n\to\infty} +\infty.$$

□

$\sqrt{P(n)} - \sqrt{Q(n)}$ alakú sorozatok

Az alábbi feladatban szereplő sorozatok mindegyike ún. „gyökök különbsége" típusú. Pontosabban,

$$x_n = \sqrt{P(n)} - \sqrt{Q(n)} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

alakú valamilyen P és Q valós polinomokkal. Ha tagonként próbálnánk meg kiszámítani ilyen típusú sorozatoknak a határértékét, akkor nem jutnánk eredményre, hiszen

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{P(n)} = +\infty \qquad \text{és} \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt{Q(n)} = +\infty$$

és ahogyan azt az egyik fenti példában is láttuk, kettő, $+\infty$-hez divergáló sorozat különbségének határértékéről általában nem állíthatunk semmit.

Így, hasonlóan a fenti típusokhoz, a kiindulási sorozaton algebrai átalakításokat fogunk végrehajtani, melyek ebben az esetben az alábbiak:

1. A $\sqrt{P(n)} - \sqrt{Q(n)}$ kifejezést szorozzuk meg az alábbi kifejezéssel
$$\frac{\sqrt{P(n)} + \sqrt{Q(n)}}{\sqrt{P(n)} + \sqrt{Q(n)}}.$$
2. A szorzás után végezzük el az adódó egyszerűsítéseket.
3. A kapott hányados esetében (ami „majdnem" polinom-per-polinom alakú lesz) emeljünk ki a nevező „legdominánsabb" tagjával a számlálóból és a nevezőből is.

14. Feladat. *Határozzuk meg az alábbi sorozatok határértékét.*

(a)

$$\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

Megoldás.

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \cdot \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

□

(b)

$$\left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

Megoldás.

$$\sqrt{n+2}-\sqrt{n}=\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)\cdot\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}=\frac{(n+2)-n}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}=\frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}\xrightarrow{n\to\infty}0.$$

□

(c)

$$\left(\sqrt{n+\pi}-\sqrt{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

Megoldás.

$$\sqrt{n+\pi}-\sqrt{n}=\left(\sqrt{n+\pi}-\sqrt{n}\right)\cdot\frac{\sqrt{n+\pi}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+\pi}+\sqrt{n}}=\frac{(n+\pi)-n}{\sqrt{n+\pi}+\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n+\pi}+\sqrt{n}}\xrightarrow{n\to\infty}0.$$

□

(d)

$$\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

Megoldás.

$$\begin{aligned}\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}&=\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right)\cdot\frac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}}\\&=\frac{(n^2+1)-(n^2-1)}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}}=\frac{2}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}}\xrightarrow{n\to\infty}0.\end{aligned}$$

□

(e)

$$\left(\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

Megoldás.

$$\begin{aligned}\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)&=\left(\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\right)\cdot\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\\&=\sqrt{n}\cdot\frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\sqrt{n}\cdot\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\\&=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}\xrightarrow{n\to\infty}\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

□

(f)

$$\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

Megoldás.

$$\begin{aligned}\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}&=\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}\right)\cdot\frac{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n}}=\frac{(n+\sqrt{n})-n}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n}}\\&\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}+1}\xrightarrow{n\to\infty}\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

□

(g)

$$\left(\sqrt{n+\sqrt[3]{n^2}}-\sqrt{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

Megoldás.

$$\begin{aligned}\sqrt{n+\sqrt[3]{n^2}}-\sqrt{n} &= \left(\sqrt{n+\sqrt[3]{n^2}}-\sqrt{n}\right)\cdot\frac{\sqrt{n+\sqrt[3]{n^2}}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt[3]{n^2}}+\sqrt{n}} = \frac{(n+\sqrt[3]{n^2})-n}{\sqrt{n+\sqrt[3]{n^2}}+\sqrt{n}}\\ &= \frac{\sqrt[3]{n^2}}{\sqrt{n+\sqrt[3]{n^2}}+\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}}\cdot\frac{\sqrt[6]{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}+1} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{+\infty}{1+1} = +\infty.\end{aligned}$$

□

(h)

$$\left(\sqrt{2n^2+3n}-\sqrt{2n^2-2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

Megoldás.

$$\begin{aligned}\sqrt{2n^2+3n}-\sqrt{2n^2-2} &= \left(\sqrt{2n^2+3n}-\sqrt{2n^2-2}\right)\cdot\frac{\sqrt{2n^2+3n}+\sqrt{2n^2-2}}{\sqrt{2n^2+3n}+\sqrt{2n^2-2}}\\ &= \frac{(2n^2+3n)-(2n^2-2)}{\sqrt{2n^2+3n}+\sqrt{2n^2-2}} = \frac{3n+2}{\sqrt{2n^2+3n}+\sqrt{2n^2-2}}\\ &= \frac{n}{n}\cdot\frac{3+2\frac{1}{n}}{\sqrt{2+3\frac{1}{n}}+\sqrt{2-2\frac{1}{n^2}}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{3}{\sqrt{2}+\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

□

(i)

$$\left(n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\sqrt{1-\frac{2}{n}}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

Megoldás.

$$\begin{aligned}n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\sqrt{1-\frac{2}{n}}\right) &= n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\sqrt{1-\frac{2}{n}}\right)\cdot\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{2}{n}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{2}{n}}}\\ &= n\cdot\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)-\left(1-\frac{2}{n}\right)}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{2}{n}}} = n\cdot\frac{\frac{3}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{2}{n}}} = \frac{3}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{2}{n}}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{3}{1+1} = \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

□

(j)

$$\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

Megoldás.

$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}\cdot\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$$
$$=\frac{\sqrt{n}\cdot\left(\sqrt{n}+\sqrt{n-1}\right)}{n-(n-1)}=\sqrt{n}\cdot\left(\sqrt{n}+\sqrt{n-1}\right)\xrightarrow{n\to\infty}(+\infty)\cdot(+\infty)=+\infty.$$

□

(k)

$$\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

Megoldás.

$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}\cdot\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$$
$$=\frac{\sqrt{n}\cdot\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)}{n-(n+1)}=-\sqrt{n}\cdot\left(\sqrt{n}+\sqrt{n-1}\right)\xrightarrow{n\to\infty}(-\infty)\cdot(+\infty)=-\infty.$$

□

(l)

$$\left(\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

Megoldás.

$$\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}\cdot\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}=\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\cdot\left(\sqrt{n}+\sqrt{n-1}\right)}{n-(n-1)}$$
$$=\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\cdot\left(\sqrt{n}+\sqrt{n-1}\right)=\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\cdot\left(\sqrt{n}+\sqrt{n-1}\right)\cdot\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$
$$=\frac{\left(\sqrt{n}+\sqrt{n-1}\right)\cdot((n+1)-n)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{\left(\sqrt{n}+\sqrt{n-1}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}\xrightarrow{n\to\infty}\frac{1+1}{1+1}=1.$$

□

(m)

$$\left(\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

Megoldás.

$$\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}\cdot\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{(n+1)-n}{\left(\sqrt{n}+\sqrt{n-1}\right)\cdot\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}$$
$$=\frac{1}{\left(\sqrt{n}+\sqrt{n-1}\right)\cdot\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}\xrightarrow{n\to\infty}0.$$

□

Gondolkozzunk!

A fenti feladatmegoldások tükrében próbáljuk meg megérteni, hogy a „gyökök különbsége” típus esetében hogyan és miért működik a fent ismertetett algoritmus.