Az informatika logikai alapjai
4. előadás

Vaszil György

vaszil.gyorgy@inf.unideb.hu

I. emelet 110-es szoba

Állításlogika (más néven kijelentéslogika vagy nulladrendű logika)

A múlt órán:

- Kielégíthető és kielégíthetetlen formulahalmazok tulajdonságai
- Logikai (szemantikai) következmény reláció
  - logikai ekvivalencia
- A logikai következményreláció tulajdonságai
  - Érvényesség még egyszer
- Nyelvi „szintek”
  - **A logikai következményreláció és az implikáció**
  - **A logikai ekvivalencia és az ekvivalencia operátor**
  - Formulahalmazok és az „és” művelet

Kielégíthető és kielégíthetetlen formulahalmazokról

Tétel

Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ egy **nulladrendű nyelv**, $\Gamma \subseteq Form$ egy formulahalmaz.

Ha Γ **kielégíthető formulahalmaz** és $\Delta \subseteq \Gamma$, akkor Δ **kielégíthető formulahalmaz**.

Tétel

Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ egy **nulladrendű nyelv**, és $\Gamma, \Delta \subseteq Form$ két formulahalmaz.

Ha Γ **kielégíthetetlen formulahalmaz**, és $\Gamma \subseteq \Delta$, akkor Δ **kielégíthetetelen formulahalmaz**.

Forrás: Mihálydeák Tamás, https://arato.inf.unideb.hu/mihalydeak.tamas/Logika_my_twt-treeview.html

A múlt órán:

- Kielégíthető és kielégíthetetlen formulahalmazok tulajdonságai
- Logikai (szemantikai) következmény reláció
  - logikai ekvivalencia
- A logikai következményreláció tulajdonságai
  - Érvényesség még egyszer
- Nyelvi „szintek”
  - **A logikai következményreláció és az implikáció**
  - **A logikai ekvivalencia és az ekvivalencia operátor**
  - Formulahalmazok és az „és” művelet

Logikai következmény – szemantikai következmény – reláció

(Adott: $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$, $A \in Form$, $B \in Form$, $\Gamma \subseteq Form$)

- $A \in Form$ formulának következménye a B formula, $A \vDash B$, ha A minden modellje B-nek is

- $\Gamma \subseteq Form$ formulahalmaznak következménye $B \in Form$ $\Gamma \vDash B$, ha Γ minden modellje B-nek is.

$\Gamma = \{p, \neg q\} \qquad A = (p \vee r) \wedge (\neg q \vee \neg r)$

$\Gamma = \{p, \neg q\}$ igaz, ha: minden eleme

ezekre:

g:	p	q	r
①	1	0	0
②	1	0	1

	p	$\vee$	r	$\wedge$	$\neg$	q	$\vee$	$\neg$	r
①	1	1	0	1	1	0	1	1	0
②	1	1	1	1	1	0	1	0	1

Azaz: $\Gamma = \{p, \neg q\} \models A = (p \vee r) \wedge (\neg q \vee \neg r)$

A múlt órán:

- Kielégíthető és kielégíthetetlen formulahalmazok tulajdonságai
- Logikai (szemantikai) következmény reláció
  - logikai ekvivalencia
- A logikai következményreláció tulajdonságai
  - Érvényesség még egyszer
- Nyelvi „szintek”
  - **A logikai következményreláció és az implikáció**
  - **A logikai ekvivalencia és az ekvivalencia operátor**
  - Formulahalmazok és az „és” művelet

Logikai ekvivalencia –
– szemantikai ekvivalencia

(Adott: $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$, $A, B \in Form$)

Két formula, A és B logikailag ekvivalens ha

első megfogalmazás

• minden interpretációban ugyanaz a logikai értékük:

$|A|_g = |B|_g$ minden $g : Con \to \{0,1\}$ esetén

második megfogalmazás

• $A \vDash B$ és $B \vDash A$

Jelölés: $A \Leftrightarrow B$

A múlt órán:

- Kielégíthető és kielégíthetetlen formulahalmazok tulajdonságai
- Logikai (szemantikai) következmény reláció
  - logikai ekvivalencia
- A logikai következményreláció tulajdonságai
  - Érvényesség még egyszer
- Nyelvi „szintek”
  - **A logikai következményreláció és az implikáció**
  - **A logikai ekvivalencia és az ekvivalencia operátor**
  - Formulahalmazok és az „és” művelet

A következményreláció tulajdonságai - 1

Adott $L^{(0)} = \langle LC, \langle Con, Form \rangle \rangle$, $\Gamma \subseteq FORM$, $A \in Form$.

Tétel:

$\boxed{\Gamma \models A}$ akkor és csak akkor, ha $\boxed{\Gamma \cup \{\neg A\} \text{ kielégíthetetlen}}$.

Érvényesség

(Adott $L^{(0)}_F(LC, Con, Form)$, $A \in Form$)

Egy A formula érvényes, ha

1. megfogalmazás
- minden interpretációban igaz, azaz $|A|_g = 1$ minden $g : Con \to \{0,1\}$-re
- $\emptyset \models A$ (Az üreshalmaz következménye.)

2. megfogalmazás

A következményreláció tulajdonságai - 2

Tétel

Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ \ egy **nulladrendű nyelv**, $A \in Form$.
Ha A **érvényes formula** $(\vDash A)$, akkor minden $\Gamma \subseteq Form$ formulahalmaz esetén $\Gamma \vDash A$.

Megjegyzés

A tétel szemléletesen úgy is megfogalmazható, hogy egy érvényes formula minden formulahalmaznak következménye.

A következményreláció tulajdonságai - 3

Tétel

Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ \ egy **nulladrendű nyelv** és $\Gamma \subseteq Form$ egy formulahalmaz..

Ha a Γ formulahalmaz kielégíthetetlen, akkor minden A formula esetén $\Gamma \vDash A$.

Megjegyzés

A tétel szemléletesen úgy is megfogalmazható, hogy egy kielégíthetetlen formulahalmaznak minden formula következménye.

A múlt órán:

- Kielégíthető és kielégíthetetlen formulahalmazok tulajdonságai
- Logikai (szemantikai) következmény reláció
  - logikai ekvivalencia
- A logikai következményreláció tulajdonságai
  - Érvényesség még egyszer
- Nyelvi „szintek”
  - **A logikai következményreláció és az implikáció**
  - **A logikai ekvivalencia és az ekvivalencia operátor**
  - Formulahalmazok és az „és” művelet

Az implikáció és a következményreláció kapcsolata

- **Különböző nyelvi „*szintek*”**:
  - Az **implikáció** logikai operátor, logikai formulákban jelenik meg, a **logikai formulák nyelvének** része
  - A **következményreláció** logikai formulák (formulahalmazok) közötti viszonyt ír le, nem a logikai formulák nyelvének, ha nem a **logikai formulákról beszélő „metanyelvnek”** a része

Az implikáció és a következményreláció kapcsolata

Tétel (Dedukció tétel)

Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ egy **nulladrendű nyelv**, $\Gamma \subseteq Form$ egy formulahalmaz és $A, B \in Form$ két formula.

Ha $\Gamma \cup \{A\} \vDash B$, akkor $\Gamma \vDash (A \supset B)$.

Speciális eset: Ha $A \vDash B$, akkor $\vDash (A \supset B)$.

Tétel (Dedukció tétel megfordítása)

Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ egy **nulladrendű nyelv**, $\Gamma \subseteq Form$ egy formulahalmaz és $A, B \in Form$ két formula.

Ha $\Gamma \vDash (A \supset B)$, akkor $\Gamma \cup \{A\} \vDash B$.

Speciális eset: Ha $\vDash (A \supset B)$, akkor $A \vDash B$.

Mi az, amikor a következmény jel egyedül van?

Az implikáció és a következményreláció kapcsolata

A dedukciótétel és megfordításának következménye:

Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ egy **nulladrendű nyelv**, és $A, B \in Form$ két formula.

$A \vDash B$ akkor és csak akkor, ha $\vDash (A \supset B)$

Az (materiális) ekvivalencia és a logikai ekvivalencia kapcsolata

A dedukciótétel és megfordításának következménye:

Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ egy **nulladrendű nyelv** és $A, B \in Form$ két formula.

$A \Leftrightarrow B$ akkor és csak akkor, ha $\vDash (A \equiv B)$

A múlt/mai órán

- Kielégíthető és kielégíthetetlen formulahalmazok tulajdonságai
- Logikai (szemantikai) következmény reláció
  - logikai ekvivalencia
- A logikai következményreláció tulajdonságai
  - Érvényesség még egyszer
- Nyelvi „szintek”
  - A logikai következményreláció és az implikáció
  - A logikai ekvivalencia és az ekvivalencia operátor
  - Formulahalmazok és az „és” művelet

Formulahalmazok és az „és” művelet

Kielégíthetőség, kielégíthetetlenség

Legyen $A_1, A_2, ..., A_n \in$ Form!

- Az $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ formulahalmaz akkor és csak akkor kielégíthető, ha az $A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_n$ formula kielégíthető.
- Az $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ formulahalmaz akkor és csak akkor kielégíthetetlen, ha az $A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_n$ formula kielégíthetetlen.
- Az $\{A_1, A_2, ..., A_n\} \vDash A$ akkor és csak akkor, ha $A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_n \vDash A$.
- Az $\{A_1,A_2, ..., A_n\} \vDash A$ akkor és csak akkor, ha az $(A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_n) \wedge \neg A$ formula kielégíthetetlen.
- Az $\{A_1, A_2, ..., A_n\} \vDash A$ akkor és csak akkor, ha az $(A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_n) \supset A$ formula érvényes.

A mai órán

- Az logikai műveletek tulajdonságai
  - nevezetes logikailag ekvivalens formulák
  - logikai műveletek kifejezhetősége egymással
  - nevezetes logikai következmények
  - nevezetes logikai törvények (érvényes formulák)
- Logikai műveletek egymással való kifejezhetősége
- Formulák kielégíthetőségének vizsgálata: A szemantikus táblák módszere
  - A módszer helyessége, teljessége

Logikailag ekvivalens formulák

- Kettős tagadás törvénye: $\neg\neg A \Leftrightarrow A$
- Kommutativitás: $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$, $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$ és $A \equiv B \Leftrightarrow B \equiv A$
  - Asszociatívitás: $A \wedge (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$, $A \vee (B \vee C) \Leftrightarrow (A \vee B) \vee C$ és $A \equiv (B \equiv C) \Leftrightarrow (A \equiv B) \equiv C$
- Idempotencia: $A \wedge A \Leftrightarrow A$ és $A \vee A \Leftrightarrow A$
- Disztibutivitás:
  - $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
  - $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
- Elnyelés: $A \wedge (B \vee A) \Leftrightarrow A$ és $A \vee (B \wedge A) \Leftrightarrow A$
- De Morgan: $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$ és $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

(Aszalós László fóliái, kiemelések tőlem)

Mit is jelent az odavissza-nyíl? (Szintek.) Hogyan lehet ilyen állításokat igazolni?

Logikailag ekvivalens formulák

- Áthelyezési törvény: $(A \wedge B) \supset C \Leftrightarrow A \supset (B \supset C)$
- Kontrapozíció: $A \supset B \Leftrightarrow \neg B \supset \neg A$
- Öndisztributivitás: $A \supset (B \supset C) \Leftrightarrow (A \supset B) \supset (A \supset C)$
- Esetszétválasztás: $(A \vee B) \supset C \Leftrightarrow (A \supset C) \wedge (B \supset C)$

Ellenőrizzük igazságtáblával (esetleg a rossz tippet is – „vagy” a jobb oldalon –)

Logikai műveletek egymással való kifejezhetősége

- $A \supset B \Leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$
- $A \supset B \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$
- $A \wedge B \Leftrightarrow \neg(A \supset \neg B)$
- $A \vee B \Leftrightarrow (\neg A \supset B)$
- $A \vee B \Leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$
- $A \wedge B \Leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)$
- $A \equiv B \Leftrightarrow (A \supset B) \wedge (B \supset A)$

Logikai következmények

- $A \supset \neg A \models \neg A$
- $\neg A \supset A \models A$
- $A \wedge B \models A$ és $A \wedge B \models B$
- $A \models A \vee B$
- $\{A \vee B, \neg A\} \models B$
- $\{A \supset B, A\} \models B$ modus ponens: leválasztási szabály
- $\{A \supset B, \neg B\} \models \neg A$ modus tollens: indirekt cáfolás sémája
- $\{A \supset B, B \supset C\} \models A \supset C$ láncszabály
- $\{A \supset B, A \supset \neg B\} \models \neg A$ redukcio ad abszurdum
- $\neg A \models A \supset B$
- $B \models A \supset B$

Gondoljuk ide a kontrapozíciót is. Miért nincs eleve itt?

Logikai következmények

- $A \supset \neg A \models \neg A$
- $\neg A \supset A \models A$
- $A \wedge B \models A$ és $A \wedge B \models B$
- $A \models A \vee B$
- $\{A \vee B, \neg A\} \models B$
- $\{A \supset B, A\} \models B$ modus ponens: leválasztási szabály
- $\{A \supset B, \neg B\} \models \neg A$ modus tollens: indirekt cáfolás sémája
- $\{A \supset B, B \supset C\} \models A \supset C$ láncszabály
- $\{A \supset B, A \supset \neg B\} \models \neg A$ redukcio ad abszurdum
- $\neg A \models A \supset B$
- $B \models A \supset B$

Kontrapozíció: $A \supset B \Leftrightarrow \neg B \supset \neg A$

Gondoljuk ide a kontrapozíciót is. Miért nincs eleve itt?

Érvényes formulák

- $\models \neg(A \wedge \neg A)$ — az ellentmondás törvénye
- $\models A \vee \neg A$ — a kizárt harmadik törvénye
- $\models A \supset A$
- $\models A \supset (\neg A \supset B)$
- $\models A \equiv A$
- $\models \neg(A \equiv \neg A)$

A mai órán

- Az igazságfunktorok (logikai műveletek) tulajdonságai
  - nevezetes logikailag ekvivalens formulák
  - logikai műveletek kifejezhetősége egymással
  - nevezetes logikai következmények
  - nevezetes logikai törvények (érvényes formulák)
- Logikai műveletek egymással való kifejezhetősége
- Formulák kielégíthetőségének vizsgálata: A szemantikus táblák módszere
  - A módszer helyessége, teljessége

Kérdés

Logikai műveletek egymással való kifejezhetősége

- $A \supset B \Leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$
- $A \supset B \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$
- $A \wedge B \Leftrightarrow \neg(A \supset \neg B)$
- $A \vee B \Leftrightarrow (\neg A \supset B)$
- $A \vee B \Leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$
- $A \wedge B \Leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)$
- $A \equiv B \Leftrightarrow (A \supset B) \wedge (B \supset A)$

Mit tudunk az egymással kifejezhetőség témájában még elmondani?

Például: A jelek közül $\supset$ és $\vee$ kifejezhető $\neg$-mal és $\wedge$-val.

Milyen logikai műveletek vannak

(egy argumentum?)

x	$\circ_1$	$\circ_2$	$\circ_3$	$\circ_4$
T	T	T	F	F
F	T	F	T	F

Mi micsoda ezek közül?

Milyen logikai műveletek vannak

(két argumentummal?)

x_1	x_2	$\circ_1$	$\circ_2$	$\circ_3$	$\circ_4$	$\circ_5$	$\circ_6$	$\circ_7$	$\circ_8$
T	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*
T	*F*	*T*	*T*	*T*	*T*	*F*	*F*	*F*	*F*
F	*T*	*T*	*T*	*F*	*F*	*T*	*T*	*F*	*F*
F	*F*	*T*	*F*	*T*	*F*	*T*	*F*	*T*	*F*

x_1	x_2	$\circ_9$	$\circ_{10}$	$\circ_{11}$	$\circ_{12}$	$\circ_{13}$	$\circ_{14}$	$\circ_{15}$	$\circ_{16}$
T	*T*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*
T	*F*	*T*	*T*	*T*	*T*	*F*	*F*	*F*	*F*
F	*T*	*T*	*T*	*F*	*F*	*T*	*T*	*F*	*F*
F	*F*	*T*	*F*	*T*	*F*	*T*	*F*	*T*	*F*

(papír 59: 2, 5, 7, 8, 10)

Milyen logikai műveletek vannak (két argumentummal?)

x_1	x_2	$\circ_1$	$\circ_2$	$\circ_3$	$\circ_4$	$\circ_5$	$\circ_6$	$\circ_7$	$\circ_8$
T	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*
T	*F*	*T*	*T*	*T*	*T*	*F*	*F*	*F*	*F*
F	*T*	*T*	*T*	*F*	*F*	*T*	*T*	*F*	*F*
F	*F*	*T*	*F*	*T*	*F*	*T*	*F*	*T*	*F*

x_1	x_2	$\circ_9$	$\circ_{10}$	$\circ_{11}$	$\circ_{12}$	$\circ_{13}$	$\circ_{14}$	$\circ_{15}$	$\circ_{16}$
T	*T*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*
T	*F*	*T*	*T*	*T*	*T*	*F*	*F*	*F*	*F*
F	*T*	*T*	*T*	*F*	*F*	*T*	*T*	*F*	*F*
F	*F*	*T*	*F*	*T*	*F*	*T*	*F*	*T*	*F*

$\circ_2$: diszjunkció ($\vee$)

$\circ_5$: implikáció ($\supset$)

$\circ_7$: ekvivalencia ($\equiv$)

$\circ_8$: konjunkció ($\wedge$)

$\circ_{10}$: kizáró vagy

(papír 59: 2, 5, 7, 8, 10)

Két érdekes művelet

x_1	x_2	$\circ_1$	$\circ_2$	$\circ_3$	$\circ_4$	$\circ_5$	$\circ_6$	$\circ_7$	$\circ_8$
T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	F	T	T	T	T	F	F	F	F
F	T	T	T	F	F	T	T	F	F
F	F	T	F	T	F	T	F	T	F

x_1	x_2	$\circ_9$	$\circ_{10}$	$\circ_{11}$	$\circ_{12}$	$\circ_{13}$	$\circ_{14}$	$\circ_{15}$	$\circ_{16}$
T	T	F	F	F	F	F	F	F	F
T	F	T	T	T	T	F	F	F	F
F	T	T	T	F	F	T	T	F	F
F	F	T	F	T	F	T	F	T	F

$\circ_9$: "nand"
(a konjunkció tagadása)

$\circ_{15}$: "nor"
(a diszjunkció tagadása)

- $A \supset B \Leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$
- $A \supset B \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$
- $A \wedge B \Leftrightarrow \neg(A \supset \neg B)$
- $A \vee B \Leftrightarrow (\neg A \supset B)$
- $A \vee B \Leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$
- $A \wedge B \Leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)$
- $A \equiv B \Leftrightarrow (A \supset B) \wedge (B \supset A)$

Kifejezhetőség

Tétel

$\vee, \wedge, \supset, \equiv$ bármelyike kifejezhető ezek közül bármely kettővel:

- $\neg, \vee$
- $\neg, \wedge$
- $\neg, \supset$

Bizonyítás

- $\neg, \vee$: $\wedge$ kifejezhető, $\supset$ kifejezhető, $\equiv$ kifejezhető $\supset, \wedge$-sel
- $\neg, \wedge$: $\vee$ kifejezhető, $\supset$ kifejezhető, $\equiv$ kifejezhető $\supset, \wedge$-sel
- $\neg, \supset$: $\wedge$ kifejezhető, $\vee$ kifejezhető, $\equiv$ kifejezhető $\supset, \wedge$-sel

A többi lehetséges művelet is kifejezhető mindegyik párossal.

Ki lehet fejezni az összeset egyetlen művelettel?

Igen: A nand vagy nor önmagában is elegendő.

Például:

Fejezzük ki $\wedge$-t nand segítségével:

- $\boxed{A \wedge B} \Leftrightarrow \neg\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg(A \text{ nand } B)$

$\Leftrightarrow \neg((A \text{ nand } B) \wedge (A \text{ nand } B)) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \boxed{(A \text{ nand } B) \text{ nand } (A \text{ nand } B)}$

- $\boxed{\neg A} \Leftrightarrow \neg(A \wedge A) \Leftrightarrow \boxed{A \text{ nand } A}$

Melyik lépés miért jogos?

$\neg\neg A \Leftrightarrow A$

$A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$, $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$ és $A \equiv B \Leftrightarrow B \equiv A$

$A \wedge (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$, $A \vee (B \vee C) \Leftrightarrow (A \vee B) \vee C$ és $A \equiv (B \equiv C) \Leftrightarrow (A \equiv B) \equiv C$

$A \wedge A \Leftrightarrow A$ és $A \vee A \Leftrightarrow A$

$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

$A \wedge (B \vee A) \Leftrightarrow A$ és $A \vee (B \wedge A) \Leftrightarrow A$

$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$ és $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

A mai órán

- Az igazságfunktorok (logikai műveletek) tulajdonságai
  - nevezetes logikailag ekvivalens formulák
  - logikai műveletek kifejezhetősége egymással
  - nevezetes logikai következmények
  - nevezetes logikai törvények (érvényes formulák)
- Logikai műveletek egymással való kifejezhetősége
- Formulák kielégíthetőségének vizsgálata: A szemantikus táblák módszere
  - A módszer helyessége, teljessége

Formulák felbontása literálokra

$L^{(0)} = (LC, Con, Form)$

nemlogikai konstansok vagy atomi formulák

pozitív literál

- **Literál**: atomi formula
  atomi formula negáltja

negatív literál

- **Komplemens literálpár**: $p, \neg p$, ahol $p \in Con$

Formulák felbontása literálokra

$L^{(0)} = (LC, Con, Form)$

nemlogikai konstansok vagy atomi formulák

- **Literál**: atomi formula ← pozitív literál
  atomi formula negáltja ← negatív literál

- **Komplemens literálpár**: $p, \neg p$, ahol $p \in Con$

Például: $\{\neg p, q, r, \neg r\}$

pozitív literál

negatív literál

komplemens literálpár

Állítás: Literálok halmaza akkor és csak akkor kielégíthető, ha nem tartalmaz komplemens párt.

Bizonyítás: Legyen L literálok valamilyen halmaza.

1. Világos: ha L kielégíthető, nem tartalmaz komplemens párt.
2. Ha L nem tartalmaz komplemens párt, akkor kielégithető, hiszen $\mathcal{I}$ interpretáció megfelelő:

$$\mathcal{I}(p) = 1 \text{ ha } p \in L$$
$$\mathcal{I}(p) = 0 \text{ ha } \neg p \in L$$

Miért elég ez az egész ?

(Formulák felbontása literálokra)

Kielégíthető-e:

$p \wedge (\neg q \vee \neg p)$

$$p \wedge (\neg q \vee \neg p)$$

$$\downarrow$$

$$p, \neg q \vee \neg p$$

$$\swarrow \qquad \searrow$$

$$p, \neg q \qquad\qquad p, \neg p$$

nyitott   zárt

Kielégíthető, ha $\{p, \neg q\}$ vagy $\{p, \neg p\}$ kielégíthető.

Másik példa

Kielégíthető?

$$(p \vee q) \wedge (\neg p \wedge \neg q)$$

$$\begin{array}{ccc}
 & (p \vee q) \wedge (\neg p \wedge \neg q) & \\
 & \downarrow & \\
 & p \vee q, \neg p \wedge \neg q & \\
 & \downarrow & \\
 & p \vee q, \neg p, \neg q & \\
 \swarrow & & \searrow \\
p, \neg p, \neg q & & q, \neg p, \neg q \\
\text{zárt} & & \text{zárt}
\end{array}$$

Kielégíthető, ha $\{p, \neg p, \neg q\}$ vagy $\{q, \neg p, \neg q\}$ kielégíthető.

Szemantikus táblázatok

Az előző példákban szemantikus táblázatokat készítettünk.
Nem feltétlen egyértelmű, hogy egy formulához milyen táblázat tartozik.

Például:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& (p \vee q) \wedge (\neg p \wedge \neg q) \arrow[d] & \\
& p \vee q, \neg p \wedge \neg q \arrow[d] & \\
& p \vee q, \neg p, \neg q \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
p, \neg p, \neg q & & q, \neg p, \neg q \\
\text{zárt} & & \text{zárt}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& (p \vee q) \wedge (\neg p \wedge \neg q) \arrow[d] & \\
& p \vee q, \neg p \wedge \neg q \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
p, \neg p \wedge \neg q \arrow[d] & & q, \neg p \wedge \neg q \arrow[d] \\
p, \neg p, \neg q & & q, \neg p, \neg q \\
\text{zárt} & & \text{zárt}
\end{tikzcd}$$

Milyen szabályok szerint konstruáltuk a táblázat ?

α	α_1	α_2	β	β_1	β_2
$\neg\neg A_1$	A_1				
$A_1 \wedge A_2$	A_1	A_2	$\neg(B_1 \wedge B_2)$	$\neg B_1$	$\neg B_2$
$\neg(A_1 \vee A_2)$	$\neg A_1$	$\neg A_2$	$B_1 \vee B_2$	B_1	B_2
$\neg(A_1 \supset A_2)$	A_1	$\neg A_2$	$B_1 \supset B_2$	$\neg B_1$	B_2

- $\boxed{\alpha}$ típusú formulák esetén bővítettük a formulahalmazt
- $\boxed{\beta}$ típusú formulák esetén elágaztunk, és alternatívákkal bővítettük a formulahalmazt
- A leveleket megjelöltük ~~[illegible]~~ (nyitott / zárt)

A tábla konstrukciója precízebben

(algoritmus)

Bemenet: Φ formula, **Kimenet**: T szemantikus tábla (minden levele ~~megjelölve~~ megjelölve)

- Kezdetben T-nek egy gyökér csúcsa van, címkéje $\{\Phi\}$
- Válasszunk egy l még nem jelölt levelet (Hogyan?)
  $U(l)$ a címke formulahalmaz
  - Ha $U(l)$ literálokból áll csak, jelöljük meg.
  - Ha $A \in U(l)$ nem literál:
    - Ha A α típusú formula, α_1, α_2 részekkel: $\longrightarrow$

      l, $U(l)$
      |
      l', $U(l)-\{A\} \cup \{\alpha_1,\alpha_2\}$

    - Ha A β típusú formula, β_1, β_2 részekkel: $\longrightarrow$

      l, $U(l)$
      / \
      $U(l)-\{B\} \cup \{\beta_1\}$ $U(l)-\{B\} \cup \{\beta_2\}$

Vegyük észre ...

(1) • A formula kielégíthetetlen, ha a tábla minden levele zárt (⇔ A „tábla zárt")

(2) • A tábla konstrukciója véges sok számú lépés után véget ér. Miért?

(3) • Egy formula alapján több különböző tábla is konstruálható. Általában kisebb táblát kapunk, ha először a α típusú formulákat bontjuk fel.

A mai órán

- Az igazságfunktorok (logikai műveletek) tulajdonságai
  - nevezetes logikailag ekvivalens formulák
  - logikai műveletek kifejezhetősége egymással
  - nevezetes logikai következmények
  - nevezetes logikai törvények (érvényes formulák)
- Logikai műveletek egymással való kifejezhetősége
- Formulák kielégíthetőségének vizsgálata: A szemantikus táblák módszere
  - A módszer helyessége, teljessége

Vizsgáljuk meg részletesebben az (1) észrevételt:

$\boxed{\text{Helyesség és teljesség}}$

A szemantikus tábla konstrukciója egy módszer a formulák kielégíthetetlenségének eldöntésére.

- A módszer $\boxed{\text{helyes}}$: Ha a tábla alapján a formula kielégíthetetlen (minden levél zárt) akkor a formula kielégíthetetlen.
- A módszer $\boxed{\text{teljes}}$: Ha egy formula kielégíthetetlen, akkor a tábla is ezt az eredményt adja, azaz minden levele zárt.

(c

Vizsgáljuk meg részletesebben az (1) összevetést:

(1) • A formula kielégíthetetlen ~~, ha~~ a tábla minden levele zárt (⟺ A „tábla zárt")

Helyesség és teljesség

A szemantikus tábla konstrukciója egy módszer a formulák kielégíthetetlenségének eldöntésére.

• A módszer helyes:

Ha a módszerrel kapott eredmény szerint a formula kielégíthetetlen, akkor a formula valóban kielégíthetetlen.

• A módszer teljes:

Bármilyen kielégíthetetlen formulára alkalmazom is a módszert, a módszerrel kapott eredmény az, hogy a formula kielégíthetetlen.

Vizsgáljuk meg részletesebben az (1) összefüggést:

(1) • A formula kielégíthetetlen akkor és csak akkor, ha a tábla minden levele zárt (↔ A „tábla zárt")

$\boxed{\text{Helyesség és teljesség}}$

A szemantikus tábla konstrukciója egy módszer a formulák kielégíthetetlenségének eldöntésére.

• A módszer $\boxed{\text{helyes}}$:

Ha a módszerrel kapott eredmény szerint a formula kielégíthetetlen, akkor a formula valóban kielégíthetetlen.

• A módszer $\boxed{\text{teljes}}$:

Bármilyen kielégíthetetlen formulára alkalmazom is a módszert, a módszerrel kapott eredmény az, hogy a formula kielégíthetetlen.

Vizsgáljuk meg részletesebben az (1) észrevételt:

(1) • A formula kielégíthetetlen akkor és csak akkor, ha a tábla minden levele zárt (⇔ A „tábla zárt")

Helyesség és teljesség

A szemantikus tábla konstrukciója egy módszer a formulák kielégíthetetlenségének eldöntésére.

• A módszer helyes:

Ha a kapott tábla zárt,
akkor a formula valóban kielégíthetetlen.

• A módszer teljes:

Bármilyen kielégíthetetlen formulára alkalmazom is a módszert,
minden kapott tábla zárt.

A szemantikus táblázás módszere a formulák kielégíthetetlenségének eldöntésére helyes és teljes, azaz:

<u>Tétel</u>: Legyen $A \in Form$ és $\mathcal{T}$ az hozzá tartozó tábla. Ekkor:
A akkor és csak akkor kielégíthetetlen, ha $\mathcal{T}$ zárt. <u>Azaz</u>:

① <u>Ha</u> $\boxed{A \in Form \text{ kielégíthetetlen}}$ <u>akkor</u> $\boxed{\mathcal{T} \text{ zárt}}$

② <u>Ha</u> $\boxed{\mathcal{T} \text{ zárt}}$ <u>akkor</u> $\boxed{A \in Form \text{ kielégíthetetlen}}$

(Melyik fejezi ki a helyességet, teljességet?)

A szemantikus táblák módszere a formulák kielégíthetetlenségének eldöntésére helyes és teljes, azaz:

<u>Tétel</u>: Legyen $A \in Form$ és $\mathcal{T}$ az hozzá tartozó tábla. Ekkor:
A akkor és csak akkor kielégíthetetlen, ha $\mathcal{T}$ zárt. <u>Azaz</u>:

1. <u>Ha</u> $\boxed{A \in Form \text{ kielégíthetetlen}}$ <u>akkor</u> $\boxed{\mathcal{T} \text{ zárt}}$ ← teljesség
2. <u>Ha</u> $\boxed{\mathcal{T} \text{ zárt}}$ <u>akkor</u> $\boxed{A \in Form \text{ kielégíthetetlen}}$ ← helyesség

(Melyik fejezi ki a helyességet, teljességet?) 11

Következmények

- $A \in Form$ akkor és csak akkor kielégíthető, ha $\mathcal{T}$ nyitott (nem zárt).

- $A \in Form$ érvényes (logikai törvény) akkor és csak akkor, ha a $\mathcal{T}_{\neg A}$-hoz tartozó tábla zárt.

- A szemantikus tábla konstrukciójának segítségével eldönthető, hogy egy formula érvényes-e.

„eldöntési eljárás" ⟶

Helyesség és teljesség együtt érdekes, a helyesség önmagában kevés

Bizarr példa

Eljárás, annak eldöntésére, hogy egy formula logikai törvény-e:

- Bemenet: tetszőleges F formula
- Kimenet/válasz: F nem logikai törvény

Ez az eljárás **helyes** (de nem teljes):

- Ha az eljárás válasza az, hogy F logikai törvény, akkor F valóban logikai törvény

A szemantikus táblázat módszerének helyességét és teljességét kimondó tétel ismét:

Egy formula akkor és csak akkor kielégíthetetlen, ha a hozzá tartozó szemantikus táblázat mindegyike zárt.

A bizonyítás alapgondolata

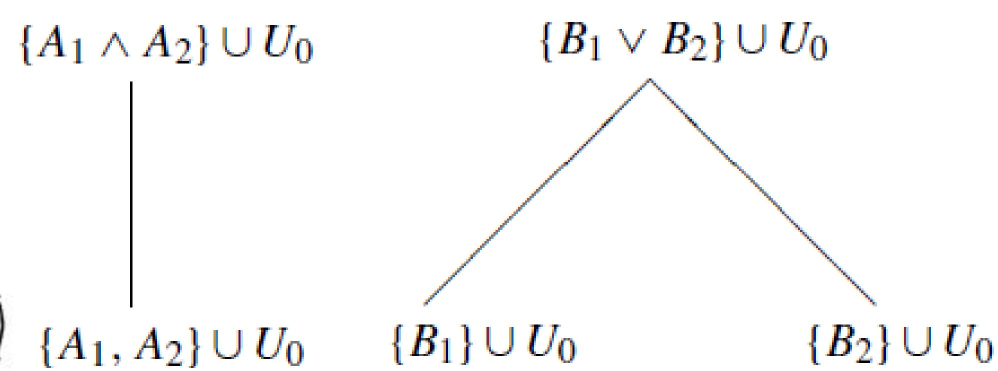
1. Helyesség: Ha a tábla zárt, akkor a formula kielégíthetetlen.

- Adott egy zárt tábla, meg kell mutatni, hogy a gyökerénél lévő formula kielégíthetetlen.

- Induljunk el a levelektől a gyökér felé. A leveleken lévő formula halmazok (literál halmazok) kielégíthetetlenek (ezért zárt a tábla).

→ A levelek szülőinél lévő formula halmazai kielégíthetetlenek.

- És így tovább a gyökérig



A bizonyítás alapgondolata

2. Teljesség: Ha a formula kielégíthetetlen, akkor minden hozzá tartozó tábla zárt.

„Minden" tábláról beszélni nehéz, ezért vizsgáljuk a kontrapozitív formát:

- Ha nem igaz, hogy minden hozzá tartozó tábla zárt, akkor a formula nem kielégíthetetlen.

A bizonyítás alapgondolata

2. Teljesség: Ha a formula kielégíthetetlen, akkor minden hozzá tartozó tábla zárt.

„Minden" tábláról nehéz lenne beszélni, ezért vegyük a kontrapozitív formát:

- Ha nem igaz, hogy minden hozzá tartozó tábla zárt, akkor a formula nem kielégíthetetlen.

kielégíthető

van a formulához tartozó táblák között nyitott.

Példák nyitott táblákra

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
& p \wedge (\neg q \vee \neg p) \arrow[d] & \\
& p, \neg q \vee \neg p \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
p, \neg q & & p, \neg p \\
\odot & & \times \\
\text{nyitott} & & \text{zárt}
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
& p \vee (q \wedge \neg q) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
p & & q \wedge \neg q \arrow[d] \\
\odot & & q, \neg q \\
\text{nyitott} & & \times \\
& & \text{zárt}
\end{tikzcd}
$$

Mi köze a nyitott levélnek a kielégítő interpretációhoz?

A tétel még egyszer

Tétel: Legyen $A \in Form$ és $\mathcal{T}$ egy hozzá tartozó tábla. Akkor:

A akkor és csak akkor kielégíthetetlen, ha $\mathcal{T}$ zárt. Azaz:

① Ha $\boxed{A \in Form \text{ kielégíthetetlen}}$ akkor $\boxed{\mathcal{T} \text{ zárt}}$

② Ha $\boxed{\mathcal{T} \text{ zárt}}$ akkor $\boxed{A \in Form \text{ kielégíthetetlen}}$

(Melyik fejezi ki a helyességet, teljességet?)

A tétel még egyszer

<u>Tétel</u>: Legyen $A \in$ Form és T egy hozzá tartozó tábla. Akkor:

A akkor és csak akkor kielégíthetetlen, ha T zárt. <u>Azaz</u>:

① <u>Ha</u> a tábla nyílt (nem zárt) <u>akkor</u> a formula kielégíthető (nem kielégíthetetlen)

② <u>Ha</u> T zárt <u>akkor</u> $A \in$ Form kielégíthetetlen

(Melyik fejezi ki a helyességet, teljességet?) ??

A mai órán

- Az igazságfunktorok (logikai műveletek) tulajdonságai
  - nevezetes logikailag ekvivalens formulák
  - logikai műveletek kifejezhetősége egymással
  - nevezetes logikai következmények
  - nevezetes logikai törvények (érvényes formulák)
- Logikai műveletek egymással való kifejezhetősége
- Formulák kielégíthetőségének vizsgálata: A szemantikus táblák módszere
  - A módszer helyessége, teljessége