Diszkrét matematika előadás

2021 ősz

Témakörök

Bevezetés: halmazok

- Halmaz, halmaz eleme (jele: $\in$, tagadása: $\notin$): alapfogalmak.
- Halmaz megadása: felsorolással, pl. $\{1, 2, 3\}$,
  vagy egy ismert H halmaz elemeire vonatkozó, a halmaz elemeit definiáló T tulajdonság segítségével: $\{x \in H \mid T(x)\}$, pl.

$$\{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 5\}.$$

- Üres halmaz: az a halmaz, amelynek nincs eleme. Jele: $\emptyset$.
- Részhalmaz jelölése: $\subset$. $A \subset B$ ha $x \in A \Rightarrow x \in B$
- Két halmaz egyenlő, ha elemeik megegyeznek. $\forall x \in A \Rightarrow x \in B$
  Ezzel ekvivalens módon, ha egymás részhalmazai:

$$A = B \iff A \subset B \text{ és } B \subset A.$$

$\emptyset \subset A \quad \forall A \qquad A \subset A$

$\forall$ minden
$\exists$ létezik

Halmazok számossága és hatványhalmaza

Definíció

Egy halmaz hatványhalmaza a halmaz összes lehetséges részhalmazainak a halmaza. Jele az adott A halmaz esetén: $\mathcal{P}(A)$ vagy 2^A.

Pl.: $A = \{0, 1, 2, 3\}$ esetén:

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{0,3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{0,1,2\}, \{0,1,3\}, \{0,2,3\}, \{1,2,3\}, A\}$$

Definíció

Ha egy halmaznak véges sok eleme van, akkor elemeinek számát a halmaz számosságának nevezzük. Jele adott A halmaz esetén: $\#A$.

Tétel

Ha A egy n elemű halmaz, akkor A hatványhalmaza 2^n elemű, azaz

$$\#(\mathcal{P}(A)) = 2^{\#A}.$$

$$A = \{0, 1, 2, 3\}$$

$$\begin{array}{cccccc}
+ & - & - & + & \Longrightarrow & \{0, 3\} \\
- & - & - & - & \Longrightarrow & \emptyset \\
+ & + & + & + & \Longrightarrow & A \\
- & + & - & - & \Longrightarrow & \{1\}
\end{array}$$

Halmazműveletek

X alaphalmaz

Egyváltozós művelet:

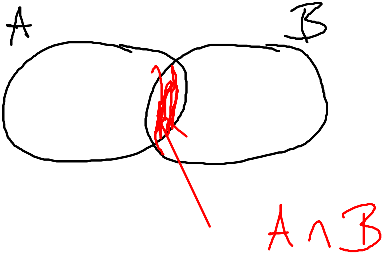
- Komplementerképzés: $\overline{A}$

Többváltozós műveletek:

- Halmazok egyesítése: $\cup$ (unió)
  $A \cup B$: azon elemek halmaza, melyek az A és B halmaz közül **legalább az egyiknek** elemei.
- Halmazok metszete: $\cap$,
  $A \cap B$: azon elemek halmaza, melyek az A és B halmaz közül **mindkettőnek** elemei.
- Halmazok különbsége: $\setminus$.
  $A \setminus B$: azon elemek halmaza, melyek az A-nak elemei, de a B-nek nem.

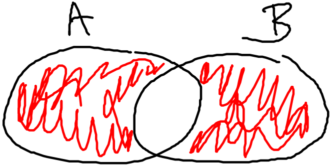
$x \in A \cup B$, ha $x \in A$ <u>vagy</u> $x \in B$

$x \in A \cap B$, ha $x \in A$ <u>és</u> $x \in B$



$x \in A \setminus B$, ha $x \in A$ és $x \notin B$

$x \in A \,\Delta\, B$, ha $(x \in A$ és $x \notin B)$ vagy $(x \notin A$ és $x \in B)$



$$A \,\Delta\, B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$
$$= (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Halmazműveletek

Többváltozós műveletek:

- Szimmetrikus differencia, jele: $\triangle$.
  $A \triangle B$: azon elemek halmaza, melyek az A és B halmazok közül **pontosan az egyiknek** elemei.
  $$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$
  pl.: $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ esetén $A \triangle B = ?$

$A \triangle B = \{0, 1, 3, 6, 8, 10\}$

- Descartes-szorzat, jele: $\times$.
  $$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$
  pl.: $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{1, 2\}$ esetén $A \times B = ?$

$\#(A \times B) = \#A \cdot \#B$

$A \times B = \{(0,1), (0,2), (1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$

Tétel – de Morgan-azonosságok

Legyenek A és B tetszőleges halmazok. Ekkor

$$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B} \quad \text{és} \quad \overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Sőt, az azonosságok tetszőlegesen sok halmazra is érvényesek.

Jelölések

Számhalmazok:

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$: természetes számok halmaza (definíció később)
- $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$: egész számok halmaza
- $\mathbb{Q}$: racionális számok halmaza
- $\mathbb{R}$: valós számok halmaza
- $\mathbb{C}$: komplex számok halmaza (definíció később)

Kvantorok:

- $\exists$: létezik, van olyan (egzisztenciális kvantor)
- $\forall$: minden, bármely (univerzális kvantor)

Pl.: $\exists n \in \mathbb{N} : 2n = 6$, de $\nexists n \in \mathbb{N} : 2n = 7$

$\forall m \in \mathbb{N} : m \in \mathbb{Z}$, de $\not\forall m \in \mathbb{Z} : m \in \mathbb{N}$

Sita-formula

Pl.

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$$

$$\#(A \cup B \cup C) = \#A + \#B + \#C - \#(A \cap B) - \#(A \cap C) - \#(B \cap C) + \#(A \cap B \cap C)$$

Bevezetés: függvények

Függvény: egyértelmű hozzárendelés $x \mapsto f(x)$

Ha az f függvény a D halmazból (értelmezési tartomány) az R halmazba (képtér) képez, akkor a függvény felfogható $(x, f(x))$ rendezett párokként, ahol $x \in D$ és $f(x) \in R$.

$$f : D \to R, \ x \mapsto f(x)$$

Azaz a függvény a $D \times R$ Descartes-szorzat egy részhalmazaként is interpretálható, ahol ha

$$f : x \mapsto y_1 \quad \text{és} \quad f : x \mapsto y_2,$$

akkor szükségképpen $y_1 = y_2$ az egyértelmű hozzárendelés miatt.

Példák függvényekre

- $x \in \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) := x^2$
- $x \in \mathbb{R}^+$, $x \mapsto f(x) := \{$egy olyan szám, aminek a négyzete $x\}$

  Nem függvény!
- $n \in \mathbb{N}$, $n \mapsto f(n) := \{$egy olyan páratlan szám, ami osztója n-nek$\}$

  Nem függvény!
- $n \in \mathbb{N}$, $n \mapsto f(n) := \{n$ legnagyobb pozitív osztója$\}$

  Függvény!

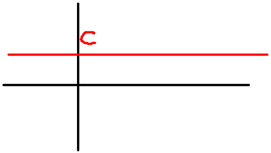
Jelölés

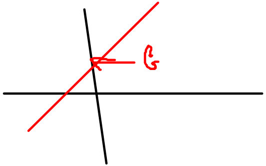
$:=$ jelentése: értékadás, "legyen egyenlő"

Jelölés

Nyilak jelentése: $\rightarrow$, $\mapsto$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$

Elemi függvények

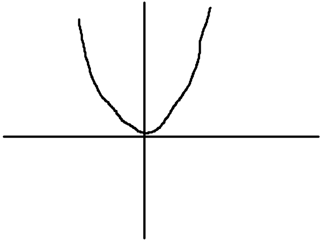




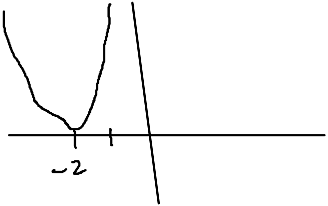
- konstans: $f(x) = c$
- elsőfokú: $f(x) = mx + b,\ m \neq 0$
- másodfokú: $f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$

  gyöktényezős alak: $f(x) = a \cdot \left(x - \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) \cdot \left(x - \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$
- polinomfüggvény $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 \qquad a_n \neq 0$
- exponenciális függvény: $f(x) = a^x \quad (a > 0,\ a \neq 1)$
- logaritmus fv.: $f(x) = \log_a x \quad (a > 0,\ a \neq 1)$
- trigonometrikus függvények
- abszolútérték-függvény
- előjelfüggvény

$f(x) = x^2$



$f(x) = (x+2)^2$

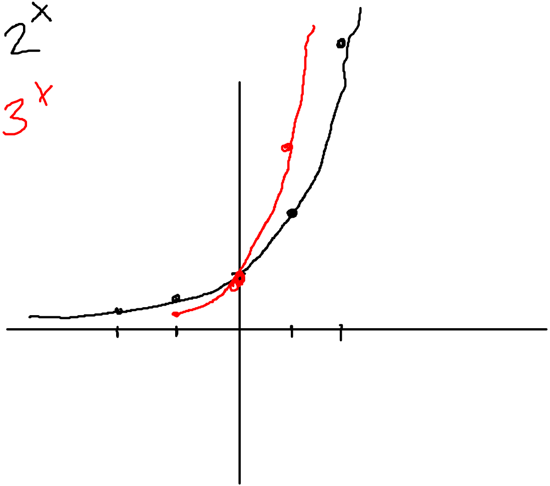


$f(x) = 3(x+2)^2$

$f(x) = 3(x+2)^2 - 1$

$f(x) = 2^x$

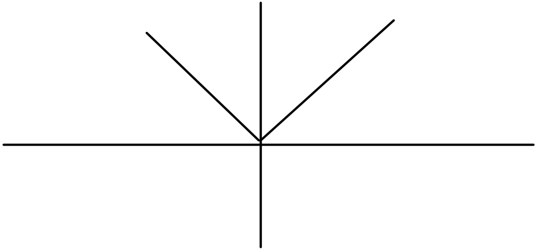
$g(x) = 3^x$



Abszolútérték fv.

$f(x) = |x|$

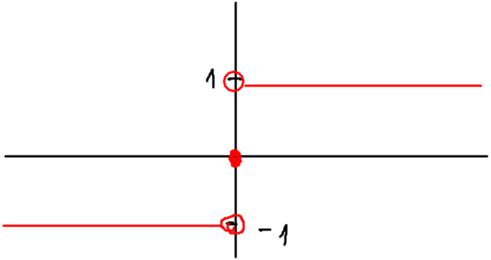
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{ha } x \geq 0 \\ -x & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$



Előjel fv.

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x)$$

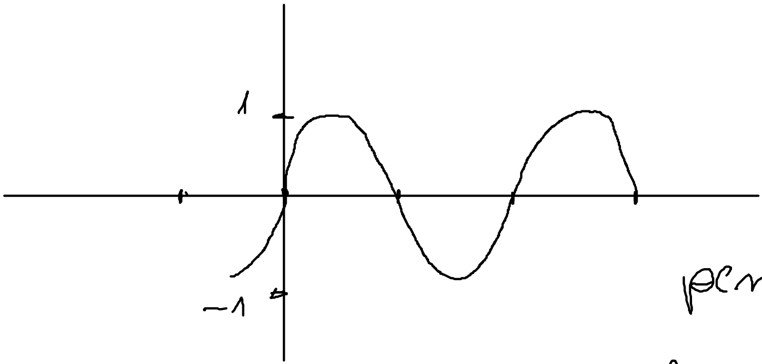
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x > 0 \\ 0 & \text{ha } x = 0 \\ -1 & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$



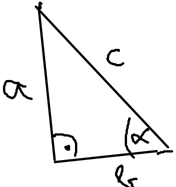
$f(x) = \sin x$ $\qquad$ $f: \mathbb{R} \to [-1, 1]$

(korlátos)

$\sin\alpha = \frac{a}{c}$



periodikus



páratlan fv. : $f(-x) = -f(x)$

$f(x) = \cos x$

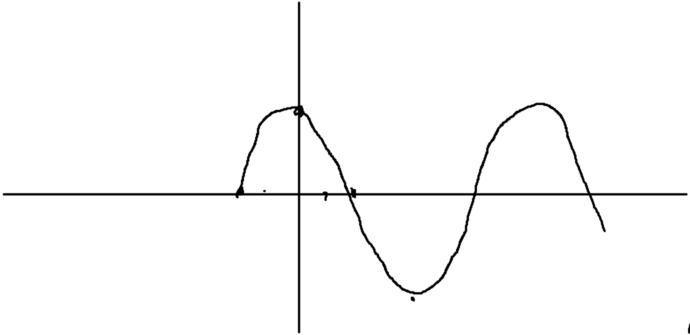
$f: \mathbb{R} \to [-1, 1]$

korlátos

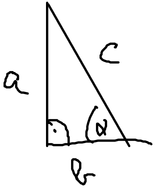
periodikus

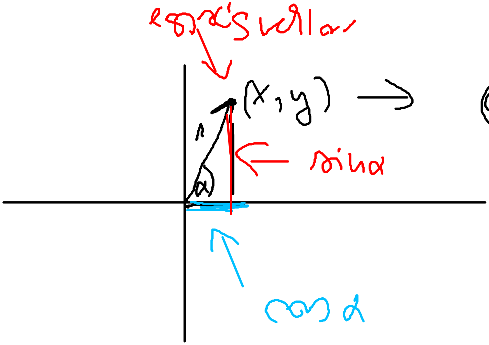
páros

$f(-x) = f(x)$

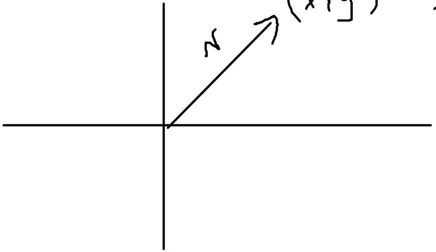


$\cos\alpha = \frac{b}{c}$





$(x, y) \longrightarrow (\cos\alpha, \sin\alpha)$



$(x, y) \longrightarrow (r \cdot \cos\alpha, \; r \cdot \sin\alpha)$

Függvények tulajdonságai

Legyen adott egy

$$f : D \to R,\ x \mapsto f(x)$$

függvény.

Definíció

Az f függvény injektív, ha $f(a) = f(b)$ azt vonja maga után, hogy $a = b$.

Azaz ebben az esetben f az értelmezési tartomány minden eleméhez *különböző* értéket rendel hozzá.

Definíció

Az f függvény szürjektív, ha az R halmaz bármely y eleméhez létezik olyan $x \in D$ elem, hogy $f(x) = y$.

Azaz f akkor szürjektív, ha az R képtér minden eleme képpé válik.

Definíció

Az f függvény bijektív, ha injektív és szürjektív is.

A teljes indukciós bizonyítás

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$: a természetes számok halmaza
A halmaz struktúrája olyan, hogy ha egy tételt (pl. egy képletet) a természetes számokra szeretnénk igazolni, akkor alkalmazhatjuk a teljes indukciós bizonyítási elvet:

(1) **Igazoljuk** az állítást $n = 1$-re.
(2a) **Feltesszük**, hogy az állítás igaz egy tetszőleges k természetes számra,
(2b) majd **bebizonyítjuk** az állítást $k + 1$-re.

(2a): indukciós feltevés $n = k$-ra

Példák a teljes indukciós bizonyításra:

1. Az első n természetes szám összege $\frac{n(n+1)}{2}$. Erre alkalmazható. ✓
2. $x + \frac{1}{x} \geq 2$, $\forall x > 0$. Erre nem alkalmazható!
   $x \in \mathbb{R}$

Példák a teljes indukciós bizonyításra – folytatás

3. Igazoljuk, hogy
$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2, \quad \underline{\forall n \in \mathbb{N}}.$$
4. Bizonyítsuk be, hogy
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \qquad =$$

Jelölések

$$\sum_{i=1}^{n} \text{ szumma – összegzés,} \qquad \prod_{i=1}^{n} \text{ produktum – szorzás}$$

Példa

Igazoljuk, hogy

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(1) **Belátjuk** az állítást $n = 1$-re:
baloldal: 1 jobboldal: $1^2 = 1$.
$\Longrightarrow$ az állítás igaz $n = 1$-re

(2a) **Feltesszük** hogy az állítás igaz egy tetszőleges k természetes számra:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k-1) = k^2$$

(2b) ezután **belátjuk**, hogy igaz $(k+1)$-re:
Amit be akarunk látni:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k-1) + (2k+1) = (k+1)^2 \qquad ???$$

A bizonyítás (felhasználva az indukciós feltevést):

$$\boxed{\underbrace{1 + 3 + 5 + \cdots + (2k-1)}_{k^2}} + (2k+1) = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2 \qquad \checkmark$$

Biz. be, hogy

$$1^2+2^2+\dots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \forall n\in\mathbb{N}$$

① Belátjuk $n=1$-re

a baloldal: $1^2=1$ ✓

a jobboldal: $\frac{1\cdot 2\cdot 3}{6} = 1$ ✓

②a Indukciós feltevés

Feltesszem $n=k$-ra

$$1^2+2^2+\dots+k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

2b Beláttam, hogy ha 2a igaz, akkor $n = k+1$ -re is igaz

Azaz be akarom látni, hogy

$$1^2 + 2^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

2a -ból:

$$\underbrace{1^2 + 2^2 + \dots + k^2}_{\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}} + (k+1)^2 = \frac{(k+1)\left[k(2k+1) + 6(k+1)\right]}{6} =$$

$$\frac{(k+1)\left[2k^2+k+6k+6\right]}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$ ✓

Biz. Be, hogy $4 \mid (7^n + 10n - 5) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

① Bel. lépés $n=1$-re

$7^1 + 10 \cdot 1 - 5 = 12$ és $4 \mid 12$ ✓

2a Feltevés $n=k$-ra

$$4 \mid 7^k+10k-5$$

2b Bizonyítás $n=k+1$-re

$$7^{k+1}+10(k+1)-5 = 7\cdot 7^k+10k+10-5$$

$$= \underbrace{7(7^k+10k-5)}_{2a \Rightarrow 4|} - \underbrace{60k}_{4|60k} + \underbrace{40}_{4|40} \Rightarrow 4|$$

A természetes számok halmaza

Axiomatikus bevezetése a Peano-axiómákkal történik.

Definíció – Peano-axiómák

- (P1) Az 1 természetes szám. (Ez egy kitüntetett elem.)
- (P2) Bármely n természetes számhoz egyértelműen megadható egy „1-gyel nagyobb" természetes szám, amit az n rákövetkezőjének nevezünk.
- (P3) Az 1 egyetlen természetes számnak sem a rákövetkezője.
- (P4) Ha két természetes szám rákövetkezője megegyezik, akkor ez a két szám is megegyezik.
- (P5) A teljes indukció elve: ha A egy olyan halmaz, amely
  - tartalmazza az 1 kitüntetett elemet és
  - minden elemével együtt annak a rákövetkezőjét is tartalmazza,

  akkor A az összes természetes számot tartalmazza.

A (P1)–(P5) feltételek egyértelműen meghatároznak egy halmazt, amit a természetes számok halmazának nevezünk. Jele: $\mathbb{N}$.

Megjegyzések a Peano-axiómákhoz

(P2) Bármely n természetes számhoz egyértelműen megadható egy „1-gyel nagyobb” természetes szám, amit az n rákövetkezőjének nevezünk.
$\rightsquigarrow$ $n+1$, $S(n)$ (S: rákövetkező függvény, successor function)

(P4) Ha két természetes szám rákövetkezője megegyezik, akkor ez a két szám is megegyezik.
Másképpen: a rákövetkező függvény injektív.

(P5) A teljes indukció elve: ha A egy olyan halmaz, amely

- tartalmazza az 1 kitüntetett elemet és
- minden elemével együtt annak a rákövetkezőjét is tartalmazza,

akkor A az összes természetes számot tartalmazza.
Másképpen: A induktív halmaz. $\Rightarrow$ $\mathbb{N}$ a legszűkebb induktív halmaz.
Egyéb példa induktív halmazra: pozitív számok halmaza ($\mathbb{R}^+$).

A Peano-axiómák matematikai formalizmussal

Definíció – Peano-axiómák

Legyen $\mathbb{N}$ egy halmaz, amely eleget tesz az alábbi feltételeknek:

- P1 $1 \in \mathbb{N}$
- P2 $\forall n \in \mathbb{N} : \exists S(n) \in \mathbb{N},\ S(n) =: n + 1$
  vagy: $\exists S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ún. rákövetkező függvény
- P3 $\nexists n \in \mathbb{N} : S(n) = 1$
- P4 $n, m \in \mathbb{N} : S(n) = S(m) \Rightarrow n = m$
- P5
$$\left.\begin{array}{l} 1 \in A \\ n \in A \Rightarrow S(n) \in A \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathbb{N} \subset A$$

Ekkor $\mathbb{N}$ egyértelműen meghatározott, és ezt a halmazt a természetes számok halmazának nevezzük.

Teljes indukciós bizonyítás

A definíció alapján $\mathbb{N}$ elemei:

$$1,\ S(1),\ S(S(1)),\ S(S(S(1))),\ldots,S(S(\ldots(S(1))\ldots)),\ldots$$
$$S(1) = 1 + 1 =: 2$$
$$S(S(1)) = S(1) + 1 =: 3$$

A teljes indukció elve azt fejezi ki, hogy az összes természetes szám felírható az 1 kitüntetett elem és az S rákövetkező függvény segítségével. Így ha egy tételt (pl. egy képletet) a természetes számokra szeretnénk igazolni, akkor alkalmazhatjuk a teljes indukciós bizonyítási elvet:

(1) Igazoljuk az állítást $n = 1$-re.

(2a) Feltesszük, hogy az állítás igaz egy tetszőleges k természetes számra,

(2b) majd bebizonyítjuk az állítást $k + 1$-re.

(2a): indukciós feltevés $n = k$-ra