Definíció

Legyen A egy $n \times n$-es mátrix. Egy nemnulla x vektor az A sajátvektora, ha létezik olyan λ skalár, hogy

$$Ax = \lambda x.$$

Ekkor λ az A mátrix x sajátvektorához tartozó sajátértéke.

$$Ax = \lambda x \iff (A - \lambda E)x = 0,$$

azaz adott λ sajátérték esetén egy homogén lineáris egyenletrendszer nemtriviális megoldásai adják a sajátvektorokat. Pontosan akkor létezik nemtriviális megoldása, ha

$$\det(A - \lambda E) = 0.$$

Karakterisztikus egyenlet

Az $n \times n$-es A mátrix karakterisztikus polinomja az n-edfokú $\det(A - \lambda E_n)$ polinom. A karakterisztikus polinom gyökei éppen az A sajátértékei.

Megjegyzés

- Egy $n \times n$-es mátrix sajátértékeinek meghatározásához egy n-edfokú polinom gyökeit kell megkeresnünk.
- Egy $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix karakterisztikus polinomja egy valós együtthatós n-edfokú polinom $\implies$ egy $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixnak a komplex számok körében multiplicitással számolva n darab sajátértéke van.
- Ha egy komplex szám sajátértéke az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixnak, akkor a konjugáltja is sajátérték lesz.
- Ha x az A mátrix λ sajátértékéhez tartozó sajátvektora, akkor $c \cdot x$ (ahol $c \neq 0$) is a λ sajátértékhez tartozó sajátvektor.
- Diagonális mátrix sajátértékei a főátlóban álló számok.
- Háromszögmátrix sajátértékei a főátlóban álló számok.
- Egy mátrix pontosan akkor invertálható, ha a 0 nem szerepel a sajátértékei között.
- Ha $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ egy szimmetrikus mátrix, akkor minden sajátértéke valós.

Példa

Határozzuk meg az alábbi mátrix sajátértékeit, sajátvektorait.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 \\ 2 & -5-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-5-\lambda) + 8 = \lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2} \begin{array}{l} \nearrow -1 \\ \searrow -3 \end{array}$$

$\boxed{\text{Ha } \lambda = -1}$

$$(A - (-1)E) \cdot x = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$2x_1 - 4x_2 = 0$$
$$x_1 = 2x_2$$
$$x_2 = t \in \mathbb{R}$$
$$x_1 = 2t$$

A sajátvektorok:

$$x = t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{\text{Ha } \lambda = -3}$$

$$(A - (-3)\cdot E)\cdot x = 0$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$4x_1 - 4x_2 = 0$$
$$x_1 = x_2$$

$$x = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R}$$

Példa

Határozzuk meg az alábbi mátrixok sajátértékeit, sajátvektorait.

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

A B mátrix esetén:

$$\det(B - \lambda E) = 0$$

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(-2-\lambda)\cdot(-1-\lambda)^2 = 0$$

$$\lambda_1 = -2 \qquad \lambda_{2,3} = -1$$

A $\lambda = -2$ -höz tartozó sajátvektorok:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} x_1 &= t \in \mathbb{R} \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$x = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad t \in \mathbb{R}$$

A $\lambda = -1$ -hez tartozó sajátvektor:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= t \in \mathbb{R} \\ x_3 &= s \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Az A mátrix esetén:

$$\begin{pmatrix} -4 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} -4-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & -6 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(-4-\lambda)(2-\lambda)(-1-\lambda) = 0$$

$$\lambda_1 = -4, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = -1$$

$\boxed{\text{Ha } \lambda = -4}$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} x_1 &= t \in \mathbb{R} \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$x = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Példa

Igazoljuk, hogy $\lambda = -1$ sajátértéke az alábbi mátrixnak.

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 6 \\ 4 & 7 & -6 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Találjuk meg azt a λ-hoz tartozó x sajátvektort, melyre $\boxed{x_2 = 1}$ teljesül.

Igazolni kell, hogy $\det(A - (-1)E) = 0$

$$\begin{vmatrix} -3 & -6 & 6 \\ 4 & 8 & -6 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \stackrel{?}{=} 0$$

lin. függőek $\Rightarrow$ $\det = 0$

A sajátvektor:

$$\begin{pmatrix} -3 & -6 & 6 \\ 4 & 8 & -6 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ha $x_2 = 1$, akkor a 3. sorból: $x_1 = -2$

$(x_1 + 2x_2 = 0)$

Az 1. sorból:

$$\underbrace{-3x_1}_{6} \underbrace{- 6x_2}_{-6} + 6x_3 = 0$$

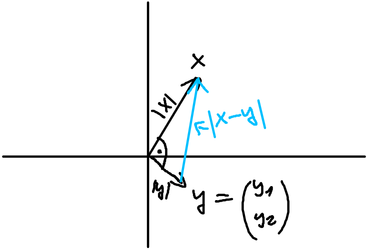
$$x_3 = 0$$

Középiskolából:

$x \in \mathbb{R}^2 \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$

$|y| = \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$



$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$x - y = \begin{pmatrix} x_1 - y_1 \\ x_2 - y_2 \end{pmatrix}$

$|x-y| = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}$

$x \perp y$ ha $|x|^2 + |y|^2 = |x-y|^2$

$x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 = (x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2$

$= x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 - 2x_1y_1 - 2x_2y_2$

$|x| = \sqrt{x^T x}$

$x_1 y_1 + x_2 y_2 = 0$

$x^T y = 0$

Belső szorzat, norma $\mathbb{R}^n$-en

Az $x, y \in \mathbb{R}^n$ vektorok belső szorzata, vagy skaláris szorzata:

$x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$

$$\langle x, y\rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x^T y$$

$$\underset{1\times n}{(x_1 \dots x_n)} \underset{n\times 1}{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}$$

A valós belső szorzat tulajdonságai:

1. szimmetrikus: $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$
2. mindkét változóban additív: $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ esetén
$$\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle \quad \text{és} \quad \langle x, y + z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$$
3. mindkét változóban homogén: $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$ esetén
$$\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle \quad \text{és} \quad \langle x, \lambda y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$$
4. pozitív definit: $\langle x, x\rangle \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ és $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$$\langle x, y\rangle = x^T y \qquad \langle y, x\rangle = y^T x$$

$$(x_1 \; \cdots \; x_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \qquad (y_1 \; \cdots \; y_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{(x+y)^T z}_{\langle x+y, z\rangle} = (x^T + y^T) z = \underset{\langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle}{x^T z + y^T z}$$

$$\langle x, x\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq 0$$ és csak akkor lehet 0, ha $x = 0$

Az $x \in \mathbb{R}^n$ vektor (2-, vagy euklideszi) normája:

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \qquad \left(= \sqrt{x^T x} \right)$$

A norma tulajdonságai:

1. nemnegatív: $\|x\| \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, továbbá $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
2. abszolút homogén: $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$, $\forall x \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$
3. háromszög-egyenlőtlenség: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$

Példa. Határozzuk meg az x és y vektorok belső szorzatát és a vektorok normáját!

$$x = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = -3 + 0 + 2 = -1$$

$$\|x\| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-2)^2} = 3$$

$$\|y\| = \sqrt{3^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$$

Euklideszi tér

$\mathbb{R}^n$-et ellátva az előző belső szorzattal valós *euklideszi tér*nek nevezzük.

Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz egyenlőtlenség

A valós euklideszi tér bármely x, y vektorára

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

Két valós vektor által bezárt szög

Ha $x, y \in \mathbb{R}^n$ és $x, y \neq 0$, akkor

$$-1 \leq \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\| \cdot \|y\|} \leq 1.$$

Az $x, y \neq 0$ valós vektorok szöge az az $\alpha \in [0, \pi]$ szög, melyre

$$\cos\alpha = \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}$$

(Ha vmelyik vektor 0, akkor a szög $\frac{\pi}{2}$)

Megjegyzés

Az $x, y \neq 0$ valós vektorok szöge pontosan akkor lesz $\frac{\pi}{2}$ (pontosan akkor lesznek merőlegesek), ha $\langle x, y\rangle = 0$.

Példa. Határozzuk meg az alábbi vektorok szögét!

(a) $\cos\alpha = \dfrac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\cdot\|y\|} = 0$

$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad x \perp y$

(b)

$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

(c)

$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$

(d) $\langle x, y\rangle = 0 \quad x \perp y$

$x = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

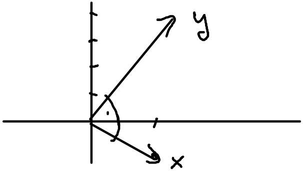
(e)

$x = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ y = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\langle x, y\rangle = 0 \qquad x \perp y$

(b) $x = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $y = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\langle x, y \rangle = 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 4$

$$\cos\alpha = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|} = 0 \qquad \alpha = \frac{\pi}{2} \qquad (x \perp y)$$

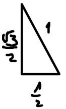


(c)

$x = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ $y = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ $\langle x, y \rangle = 3\sqrt{3}$

$\|x\| = 3 \quad \|y\| = 2$

$$\cos\alpha = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|} = \frac{3\sqrt{3}}{3 \cdot 2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \alpha = \frac{\pi}{6}$$



Azt mondjuk, hogy $x \in \mathbb{R}^n$ egységvektor, ha $\|x\| = 1$.
Tetszőleges nemnulla x vektor esetén $\frac{x}{\|x\|}$ egységvektor.

Definíció

Az $x, y \in \mathbb{R}^n$ vektorokat merőlegesnek, más néven ortogonálisnak nevezzük, ha $\langle x, y \rangle = 0$.
A $v_1, \ldots, v_m$ vektorrendszert ortogonálisnak nevezzük, ha tagjai páronként ortogonálisak. A vektorrendszer ortonormált, ha ortogonális, és minden vektor normája 1, azaz $\|v_i\| = 1$, $i = 1, \ldots, m$.

Tétel

Ha egy vektorrendszer ortogonális, akkor lineárisan független.

Normalizáld az $x = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ vektort!

$$\|x\| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

$$y := \frac{x}{\|x\|} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \Longrightarrow \|y\| = 1$$

Példa

Adjunk meg $\mathbb{R}^3$-ban olyan vektorokat, melyek ortogonálisak az

$$x = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

vektorra.

Végtelen sok ilyen vektor lesz

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$\langle x, y \rangle = 0$, azaz

$$-2y_1 + 3y_2 + 4y_3 = 0$$

$y_2 = s \in \mathbb{R}$ $\quad y_3 = t \in \mathbb{R}$

$$y_1 = \frac{3}{2}s + 2t$$

$$y = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}s + 2t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$s, t \in \mathbb{R}$

Példa

Adjunk meg $\mathbb{R}^3$-ban olyan vektorokat, melyek ortogonálisak az

$$x = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad y = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

vektorokra is.

(Megj: $\langle x, y \rangle = -4 + 0 + 4 = 0$)

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

$$-2z_1 + 3z_2 + 4z_3 = 0 \qquad (x \perp z)$$

$$2z_1 + z_3 = 0 \qquad (y \perp z)$$

$$z_3 = t \in \mathbb{R}$$

$$z_1 = -\tfrac{1}{2}t$$

$$3z_2 = 2z_1 - 4z_3 = -5t \qquad z_2 = -\tfrac{5}{3}t$$

$$z = t \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{5}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad y = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ha $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ akkor mi lesz

az Ax vektor? $(x \in \mathbb{R}^2)$

90°-kal forgatási mátrix

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} =: y$$

$$\langle x, y \rangle = -x_1 x_2 + x_2 \cdot x_1 = 0$$

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 3 & -4 & 4\\ 1 & 0 & 4\\ -5 & 7 & -6\\ 4 & -1 & 14\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & -1 & -2\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 4\\ 0 & 3 & 6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & -1 & -2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$\operatorname{rang}(A)=2$

$$Ax=b$$

létezik olyan b, hogy a rendszer ellent-mondásos

olyan b nem létezik, hogy a megoldás egyértelmű

létezik olyan b, hogy végtelen sok mo van