1. Ábécék, nyelvek, műveletek (jegyzet, 9-10. oldal)

2.7. példa - Nyelvműveletek - Gyakorló feladat

Legyen $V = \{ a, b, c\}$, $L_1 = \{ a, c, bb, aba\}$, $L_2 = \{ a, abba, baba, caba, abbaba, babaabba\}$. Adjuk meg az $L_1 \cup L_2$, $L_1 \cap L_2$, $L_1\, L_2$, $L_1\, L_1$ halmazokat. ★

Megoldás:

$L_1 \cup L_2 = \{a, c, bb, aba, abba, baba, caba,$
$abbaba, babaabba\}$

$L_1 \cap L_2 = \{a\}$

$L_1 \cdot L_2 = \{aa, aabba, ababa, acaba, aabbaba,$
$ababaabba,$
$ca, cabba, cbaba, ccaba, cabbaba,$
$cbabaabba,$
$bba, bbabba, bbbaba, bbaba, bbabbaba,$
$bbbabaabba,$
$abaa, abaabba, abababa, abacaba,$
$abaabbaba, abababaabba\}$

$L_1 \cdot L_1 = \{aa, ac, abb, aaba,$
$ca, cc, cbb, caba,$
$bba, bbc, bbbb, bbaba,$
$abaa, abac, abaabb, abaaba\}$

2.8. példa - Nyelvek konkatenációja

Adjunk példát olyan L_1 és L_2 V ábécé feletti nyelvekre, amelyekre $L_1 L_2 = L_2 L_1$. Keressünk nem triviális megoldást is.

Triviális megoldások:

- $L_1 = \emptyset$, $L_1 = \{ \lambda \}$ vagy a szimmetria miatt L_2-re teljesül az előző esetek egyike.
- $L_1 = L_2$.
- V ábécé egyelemű.
- Az egyik nyelvben benne szerepel λ, a másik nyelv pedig a V^* (univerzális nyelv).

Egy nem triviális megoldás:

legyen $V = \{ a, b\}$, $L_1 = \{ \lambda, a\}$, L_2 pedig legyen azon V feletti szavak halmaza, amelyekben pontosan egy b szerepel. Ekkor $L_1 L_2 = L_2 L_1 = L_2$. ★

2.9. példa - Nyelvek számossága - Gyakorló feladat

Adottak L_1 és L_2 véges nyelvek V ábécé felett, hogy $|L_1| = n$, $|L_2| = m$. Mennyi lehet a számossága az $L_1 \cup L_2$, $L_1 \cap L_2$, $L_1 L_2$ nyelvműveletekkel előálló nyelveknek? Adjunk meg alsó felső korlátot, és példákat. ★

Megoldás:

- $\max(m,n) \le |L_1 \cup L_2| \le m+n$

  pl.: $|\{a,b,c\} \cup \{a,b\}| = 3$

  $|\{a,b,c\} \cup \{d,e\}| = 5$

- $0 \le |L_1 \cap L_2| \le \min(m,n)$

  pl.: $|\{a,b,c\} \cap \{d\}| = 0$

  $|\{a,b,c\} \cap \{a,b\}| = 2$

- $\max(m,n) \le |L_1 \cdot L_2| \le m \cdot n$

pl.: $|\{\lambda\} \cdot \{a,b,c\}| = 3$

$|\{a,b,c\} \cdot \{d,e\}| = 6$

De pl.:

$|\{\lambda, a\} \cdot \{a, aa, aaa\}| =$

$= |\{a, aa, aaa, aaaa\}| = 4 = \max(m,n)+1$

2.10. példa - Formális nyelvek, nyelvműveletek 1.feladat

Igazoljuk vagy cáfoljuk, hogy $(L_1 \cup L_2)^* = L_1^* \cup L_2^*$!

Megoldás: Az állítás hamis. Vegyük a következő ellenpéldát: Legyen $L_1 = \{ a\}$ és $L_2 = \{ b\}$, ekkor $(L_1 \cup L_2)^*$ az akárhány a-t és b-t tartalmazó szavak halmaza, még $L_1^* \cup L_2^*$ a csupa a-t és csupa b-t tartalmazó szavak nyelve lesz. ★

2.11. példa - Formális nyelvek, nyelvműveletek 2.feladat

Mivel egyenlő L^2, ha

$L = \{ a^n b^n | n > 0 \}$?

Megoldás: $L^2 = \{ a^n b^n a^m b^m \mid n, m > 0\}$. ★

2. Nyelvek→ reguláris kifejezések (jegyzet, 80. oldal)

5.2. példa - Nyelv megadása reguláris kifejezéssel 1. feladat

Adjuk meg reguláris kifejezéssel azt a nyelvet a {0,1} ábécé felett, amely azon szavakból áll, amelyek tartalmazzák részszóként a 010 szót!

Megoldás: $L=(0+1)^*010(0+1)^*$ ★

5.3. példa - Nyelv megadása reguláris kifejezéssel 2. feladat

Adjuk meg reguláris kifejezéssel azt a nyelvet a {0,1} ábécé felett, amely azon szavakból áll, amelyek tartalmazzák részszóként a 000 vagy az 111 szót!

Megoldás: $L=(0+1)^*(000+111)(0+1)^*$ ★

5.4. példa - Nyelv megadása reguláris kifejezéssel 3. feladat

Adjuk meg reguláris kifejezéssel azt a nyelvet a {0,1} ábécé felett, amely azon 1-esre végződő szavakból áll, amelyek nem tartalmazzák részszóként a 00 szót!

Megoldás: $L=(1+01)^*$ ★

5.5. példa - Nyelv megadása reguláris kifejezéssel 4. feladat

Adjuk meg reguláris kifejezéssel azt a nyelvet a {0,1} ábécé felett, amely azon szavakból áll, melynek 3. betűje 0!

Megoldás: $L=(00+01+10+11)0(0+1)^*$ ★

5.6. példa - Nyelv megadása reguláris kifejezéssel 5. feladat

Adjuk meg reguláris kifejezéssel azt a nyelvet a {0,1} ábécé felett, amely azon szavakból áll, melyek tartalmaznak legalább három 1-est!

Megoldás: $L=(0+1)^*1(0+1)^*1(0+1)^*1(0+1)^*$ ★

5.7. példa - Nyelv megadása reguláris kifejezéssel 6. feladat

Adjuk meg reguláris kifejezéssel azt a nyelvet a {0,1} ábécé felett, amely azon szavakból áll, melyek 5-tel osztható 1-est tartalmaznak!

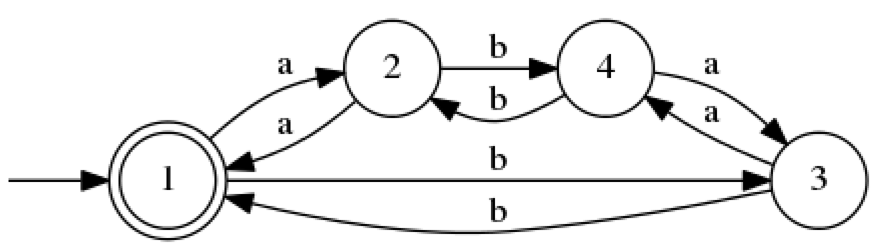
Megoldás: $L=(0^*10^*10^*10^*10^*10^*)^*$ ★

3. Nyelvek → véges automaták

Adjunk olyan determinisztikus véges automatát, ami az alábbi nyelvet fogadja el.

a) Az összes olyan { a, b } feletti szót, melyben az "a" betűk száma és a "b" betűk száma is páros.

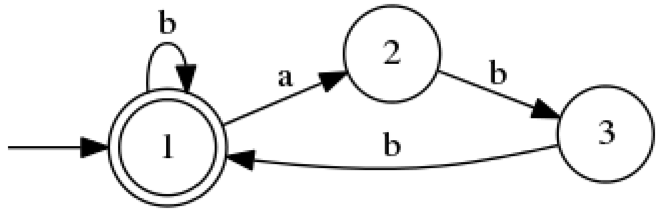
Megoldás:



- Állapot 1: "a" betűk száma páros, "b" betűk száma páros.
- Állapot 2: "a" betűk száma páratlan, "b" betűk száma páros.
- Állapot 3: "a" betűk száma páros, "b" betűk száma páratlan.
- Állapot 4: "a" betűk száma páratlan, "b" betűk száma páratlan.

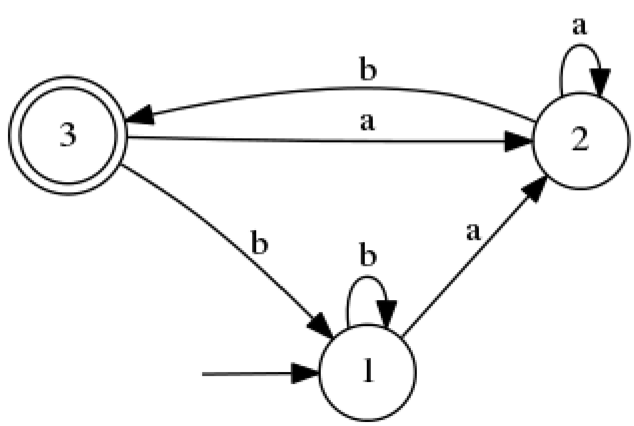
b) Az összes olyan { a, b } feletti szót, melyben minden “a” betűt (ha van) “bb” követ.

Megoldás:



b) Az összes olyan { a, b } feletti szót mely “ab”-re végződik.

Megoldás:



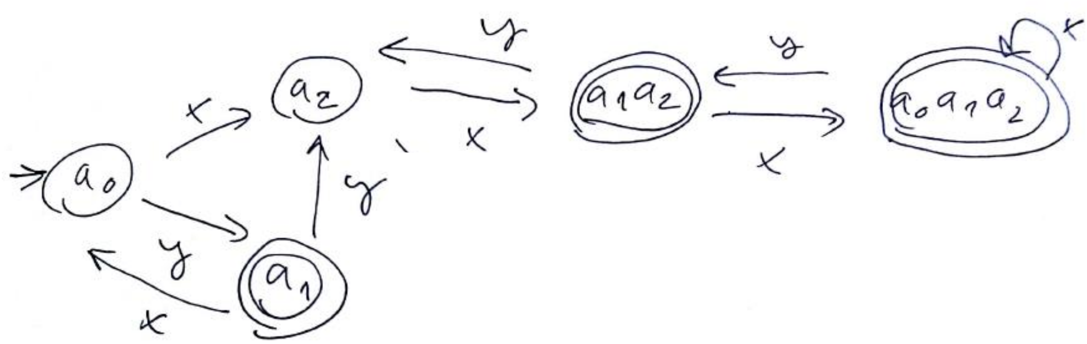
4. Véges automata determinizálása (jegyzet 88. oldal)

5.19. példa - Automata determinizálása 1. feladat

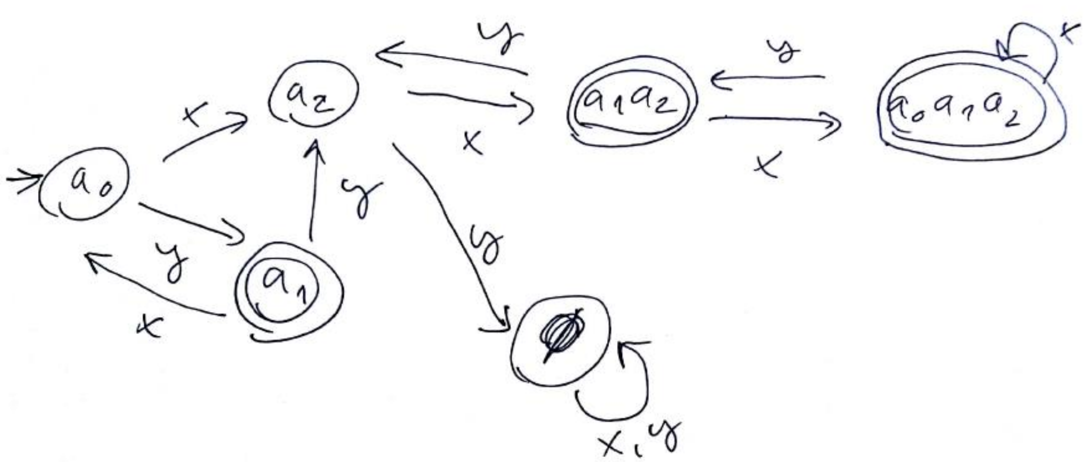
Adjunk meg az A=({ a_0, a_1, a_2 }, { x, y }, a_0, δ, { a_1 }) nemdeterminisztikus, parciálisan definiált, véges automatával ekvivalens A_d determinisztikus, teljesen definiált automatát!

δ	a_0	a_1	a_2
x	{ a_2 }	{ a_0 }	{ a_1, a_2 }
y	{ a_1 }	{ a_2 }	-

Megoldás



Illetve ha teljesen specifikált automatát akarunk, akkor:



Ha az állapotokat az alábbiak szerint átnevezzük:

$b_0=\{ a_0 \}$, $b_1=\{ a_2\}$, $b_2=\{ a_1 \}$.

$b_3=\{ a_1, a_2 \}$, $b_4 = \emptyset$.

$b_5=\{ a_0, a_1, a_2 \}$.

akkor az állapot-átmenet reláció táblázatban:

δ'	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
x	b_1	b_3	b_0	b_5	b_4	b_5
y	b_2	b_4	b_1	b_1	b_4	b_3

A véges automata tehát:

- Az A_d automata bemenő jeleinek halmaza megegyezik az A automata bemenő jeleinek a halmazával.
- Az A_d automata kezdőállapota az A automata kezdőállapotához rendelt b_i lesz.
- Az A_d automata végállapotainak a halmaza pedig tartalmazni fog minden olyan b_j állapotot, melynek mint halmaznak eleme az A automata bármely végállapota.

Jelen esetben:
$A_d=(\{ b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 \}, \{ x, y \}, b_0, \delta', \{ \quad b_2, b_3, b_5 \})$.

5.20. példa - Automata determinizálása 2. feladat

Adjunk meg az A=({ a_0, a_1 }, { x, y }, a_0, δ, { a_1 })
nemdeterminisztikus, parciálisan definiált,
véges automatával ekvivalens A_d determinisztikus, teljesen definiált automatát!

$\boldsymbol{\delta}$	$\boldsymbol{a_0}$	$\boldsymbol{a_1}$
x	{ a_1 }	{ a_0, a_1 }
y	{ a_0 }	-

Megoldás:

I. b_0={ a_0 }, b_1={ a_1 }, b_2={ a_0, a_1 }, $b_3 = \emptyset$.

II.

$\boldsymbol{\delta'}$	$\boldsymbol{b_0}$	$\boldsymbol{b_1}$	$\boldsymbol{b_2}$	$\boldsymbol{b_3}$
x	b_1	b_2	b_2	b_3
y	b_0	b_3	b_0	b_3

III. A_d=({ b_0, b_1, b_2, b_3 }, { x, y }, b_0, δ', { b_1, b_2 }).

★

5.21. példa - Automata determinizálása 3. feladat

Adjunk meg az A=({ a_0, a_1 }, { x, y, z }, a_0, δ, { a_0 })
nemdeterminisztikus, parciálisan definiált,
véges automatával ekvivalens A_d determinisztikus, teljesen definiált automatát!

$\boldsymbol{\delta}$	$\boldsymbol{a_0}$	$\boldsymbol{a_1}$
x	{ a_1 }	-
y	-	{ a_0, a_1 }
z	{ a_0, a_1 }	{ a_0 }

Megoldás:

I. b_0={ a_0}, b_1={ a_1 }, $b_2 = \emptyset$, b_3={ a_0, a_1 }.

II.

$\boldsymbol{\delta'}$	$\boldsymbol{b_0}$	$\boldsymbol{b_1}$	$\boldsymbol{b_2}$	$\boldsymbol{b_3}$
x	b_1	b_2	b_2	b_1
y	b_2	b_3	b_2	
z	b_3	b_0	b_2	

III. A_d=({ b_0, b_1, b_2, b_3 }, { x, y, z }, b_0, δ', { b_0, b_3 }).

5.22. példa - Automata determinizálása 4. feladat

Adjunk meg az A=({ a_0, a_1 }, { x, y }, a_0, δ, { a_1 })
nemdeterminisztikus, parciálisan definiált, kimenő jel nélküli, iniciális, végállapotokkal bővített véges automatával ekvivalens A_d determinisztikus, teljesen definiált automatát!

δ	$\boldsymbol{a_0}$	$\boldsymbol{a_1}$
x	{ a_0, a_1 }	{ a_0, a_1 }
y	{ a_0, a_1 }	-

Megoldás:

I. b_0={ a_0 }, b_1={ a_0, a_1 }.

II.

δ'	$\boldsymbol{b_0}$	$\boldsymbol{b_1}$
x	b_0	b_1
y	b_1	b_1

III.A_d=({ b_0, b_1 }, { x, y }, b_0, δ', { b_1 }).

★

5.23. példa - Automata determinizálása 5. feladat

Adjunk meg az A=({ a_0, a_1, a_2 }, { x, y }, a_0, δ, { a_0, a_1 })
nemdeterminisztikus, parciálisan definiált,
véges automatával ekvivalens A_d determinisztikus, teljesen definiált automatát!

δ	$\boldsymbol{a_0}$	$\boldsymbol{a_1}$	$\boldsymbol{a_2}$
x	{ a_2 }	{ a_1 }	{ a_1, a_2 }
y	{ a_0 }	{ a_2 }	{ a_0 }

Megoldás:

I. b_0={ a_0 }, b_1={ a_2 }, b_2={ a_1, a_2 }, b_3={ a_0, a_2 }.

II.

δ'	$\boldsymbol{b_0}$	$\boldsymbol{b_1}$	$\boldsymbol{b_2}$	$\boldsymbol{b_3}$
x	b_1	b_2	b_2	b_2
y	b_0	b_0	b_3	b_0

III.A_d=({ b_0, b_1, b_2, b_3 }, { x, y }, b_0, δ', { b_0, b_2, b_3 }).

5.24. példa - Automata determinizálása 6. feladat

Adjunk meg az A=({ a_0, a_1, a_2 }, { x, y }, a_0, δ, { a_1 })
nemdeterminisztikus, parciálisan definiált,
véges automatával ekvivalens A_d determinisztikus, teljesen definiált automatát!

δ	$\boldsymbol{a_0}$	$\boldsymbol{a_1}$	$\boldsymbol{a_2}$
x	{ a_1 }	{ a_1, a_2 }	{ a_2 }
y	-	-	{a_1}

Megoldás:

I. b_0={ a_0 }, b_1={ a_1 }, $b_2 = \emptyset$, b_3={ a_1, a_2 }.

II.

δ'	$\boldsymbol{b_0}$	$\boldsymbol{b_1}$	$\boldsymbol{b_2}$	$\boldsymbol{b_3}$
x	b_1	b_3	b_2	b_3
y	b_2	b_2	b_2	b_1

III.A_d=({ b_0, b_1, b_2, b_3 },{ x, y }, b_0, δ', { b_1, b_3 }).

★

5.25. példa - Automata determinizálása 7. feladat

Adjunk meg az A=({ a_0, a_1, a_2 }, { x, y, z }, a_0, δ, { a_1, a_2 })
nemdeterminisztikus, parciálisan definiált,
véges automatával ekvivalens A_d determinisztikus, teljesen definiált automatát!

δ	$\boldsymbol{a_0}$	$\boldsymbol{a_1}$	$\boldsymbol{a_2}$
x	{ a_0 }	-	{ a_0, a_2 }
y	{ a_1, a_2 }	{ a_0 }	-
z	-	{ a_0, a_1 }	-

Megoldás:

I. b_0={ a_0 }, b_1={ a_1, a_2 }, $b_2 = \emptyset$, b_3={ a_0, a_2 }, b_4={ a_0, a_1 }, b_5={ a_0, a_1, a_2 }.

II.

δ'	$\boldsymbol{b_0}$	$\boldsymbol{b_1}$	$\boldsymbol{b_2}$	$\boldsymbol{b_3}$	$\boldsymbol{b_4}$	$\boldsymbol{b_5}$
x	b_0	b_3	b_2	b_3	b_0	b_3
y	b_1	b_0	b_2	b_1	b_5	b_5
z	b_2	b_4	b_2	b_2	b_4	b_4

III.A_d=({ b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 },{ x, y ,z }, b_0, δ', { b_1, b_3, b_4, b_5 }).

5.26. példa - Automata determinizálása 8. feladat

Adjunk meg az $A=(\{a_0, a_1, a_2, a_3\}, \{x, y, z\}, a_0, \delta, \{a_1, a_3\})$ nemdeterminisztikus, parciálisan definiált, kimenő jel nélküli, iniciális, végállapotokkal bővített véges automatával ekvivalens A_d determinisztikus, teljesen definiált automatát!

δ	a_0	a_1	a_2	a_3
x	$\{a_0\}$	-	$\{a_2, a_3\}$	$\{a_1, a_2\}$
y	$\{a_1, a_2, a_3\}$	$\{a_0\}$	-	$\{a_0\}$
z	-	$\{a_1, a_2\}$	$\{a_1, a_3\}$	$\{a_1\}$

Megoldás:

I. $b_0=\{a_0\}$, $b_1=\{a_1, a_2, a_3\}$, $b_2=\emptyset$.

II.

δ'	b_0	b_1	b_2
x	b_0	b_1	b_2
y	b_1	b_0	b_2
z	b_2	b_1	b_2

III. $A_d=(\{b_0, b_1, b_2\}, \{x, y, z\}, b_0, \delta', \{b_1\})$.

5.Determinisztikus véges automata minimalizálása

(jegyzet 92. oldal)

5.27. példa - Véges elfogadó automata minimalizálása 1. feladat

Készítsük el az Aufenkamp-Hohn-féle minimalizációs algoritmus segítségével az
$A=(\{a_0,a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6\},\{x,y\},a_0, \delta,\{a_2,a_4,a_5,a_6\})$

véges automatával ekvivalens A_0 minimális állapotszámú automatát!

δ	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
x	a_2	a_5	a_1	a_1	a_2	a_1	a_0
y	a_1	a_0	a_3	a_4	a_5	a_3	a_2

Megoldás:

(O.) Mielőtt az érdemi munkához hozzáfognánk, meg kell vizsgálni, hogy mely állapotok érhetőek el az A automata kezdőállapotából.
Azokat az állapotokat, melyek nem érhetőek el, egyszerűen töröljük, mivel nem fognak előfordulni semelyik számítás során sem.

Jelen esetben az a_0 állapotból elérhető állapotok:
$\{a_0,a_2,a_1,a_3,a_5,a_4\}$.
Látható, hogy semmilyen input szó esetén sem kerülhet az A automata a_6 állapotba, ezért ezt az állapotot töröljük. Az így kapott A' automatát kell a továbbiakban minimalizálnunk az Aufenkamp-Hohn-féle minimalizációs algoritmus segítségével:
$A'=(\{a_0,a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\},\{x,y\},a_0,\delta',\{a_2,a_4,a_5\})$.

δ'	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
x	a_2	a_5	a_1	a_1	a_2	a_1
y	a_1	a_0	a_3	a_4	a_5	a_3

(I.) A feladat megoldásának első lépéseként különböző osztályokba fogjuk sorolni az A' automata belső állapotait. A kezdeti osztályozáskor mindig két osztályba kerülnek az állapotok, attól függően, hogy végállapotok, vagy pedig nem végállapotok.

Jelen esetben:
$C_1=\{a_0,a_1,a_3\},\{a_2,a_4,a_5\}$.
Ezek után a C_{i+1}-edik osztályozás esetén két állapot akkor esik egy osztályba, ha egyrészt a C_i-edik osztályozás esetén is azonos osztályba tartoztak, másrészt pedig minden bemenő jel hatására azonos C_i-beli osztályban található állapotokba mennek át. Az osztályozás véget ér, amennyiben $C_i=C_{i+1}$ valamely $i \geq 1$ esetén.

Jelen esetben:
$C_2=\{a_0,a_1\},\{a_3\},\{a_2,a_5\},\{a_4\}$.
$C_3=\{a_0,a_1\},\{a_3\},\{a_2,a_5\},\{a_4\}$.
Mivel $C_2=C_3$, ezért az osztályozás véget ért. A C_2 osztályait jelöljük valamely új betűvel, például b-vel:
$b_0=\{a_0,a_1\},b_1=\{a_3\},b_2=\{a_2,a_5\},b_3=\{a_4\}$.
(II.) Készítsük el az A' automatával ekvivalens, minimális állapotszámú A_0 automatát, mely állapothalmazát az osztályozás és az új jelölés bevezetése után kapott b_i betűk alkotják, a bemenő jeleinek halmaza megegyezik

az A automata bemenő jeleinek halmazával, az átmenetfüggvényét megkapjuk úgy, hogy megnézzük, hogy az adott b_i osztálybeli állapotok az adott bemenő jel hatására mely b_j osztálybeli állapotokba mentek át az A' automata esetén, az új kezdőállapot az a b_i lesz, melynek eleme a_0, és végül az A_0 automata végállapotait azon $b_{k_1},\ldots,b_{k_m}$ osztályok alkotják, mely osztályok elemei az A' automata végállapotaiból állnak.

Jelen esetben:
$A_0=(\{b_0,b_1,b_2,b_3\},\{x,y\},b_0, \delta_0,\{b_2,b_3\})$.

δ_0	b_0	b_1	b_2	b_3
x	b_2	b_0	b_0	b_2
y	b_0	b_3	b_1	b_2

★

5.28. példa - Véges elfogadó automata minimalizálása 2. feladat

Készítsük el az Aufenkamp-Hohn-féle minimalizációs algoritmus segítségével az
$A=(\{a_0,a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6\},\{x,y\},a_0, \delta,\{a_0,a_1,a_2,a_3\})$

véges automatával ekvivalens A_0 minimális állapotszámú automatát!

δ	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
x	a_6	a_6	a_6	a_6	a_5	a_0	a_2
y	a_6	a_3	a_0	a_3	a_1	a_4	a_1

Megoldás:

(O.) Az a_0 kezdőállapotból elérhető belső állapotok:
$\{a_0,a_6,a_2,a_1,a_3\}$.

$A'=(\{a_0,a_1,a_2,a_3,a_6\},\{x,y\},a_0, \delta',\{a_0,a_1,a_2,a_3\})$.

δ'	a_0	a_1	a_2	a_3	a_6
x	a_6	a_6	a_6	a_6	a_2
y	a_6	a_3	a_0	a_3	a_1

(I.)
$C_1=\{a_0,a_1,a_2,a_3\},\{a_6\}$.
$C_2=\{a_0\},\{a_1,a_2,a_3\},\{a_6\}$.
$C_3=\{a_0\},\{a_1,a_3\},\{a_2\},\{a_6\}$.
$C_4=\{a_0\},\{a_1,a_3\},\{a_2\},\{a_6\}$.
$b_0=\{a_0\},b_1=\{a_1,a_3\},b_2=\{a_2\},b_3=\{a_6\}$.

(II.)
$A_0=(\{b_0,b_1,b_2,b_3\},\{x,y\},b_0, \delta_0,\{b_0,b_1,b_2\})$.

δ_0	b_0	b_1	b_2	b_3
x	b_3	b_3	b_3	b_2

δ_0	b_0	b_1	b_2	b_3
y	b_3	b_1	b_0	b_1

★

5.29. példa - Véges elfogadó automata minimalizálása 3. feladat

Készítsük el az Aufenkamp-Hohn-féle minimalizációs algoritmus segítségével az
$A=(\{a_0,a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8\},\{x,y\},a_0, \delta,\{a_2,a_7\})$

véges automatával ekvivalens A_0 minimális állapotszámú automatát!

δ	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
x	a_3	a_5	a_7	a_0	a_2	a_0	a_4	a_2	a_5
y	a_8	a_1	a_3	a_2	a_6	a_7	a_3	a_5	a_2

Megoldás:

(O.) Az a_0 kezdőállapotból elérhető belső állapotok:
$\{a_0,a_3,a_8,a_2,a_5,a_7\}$.

$A'=(\{a_0,a_2,a_3,a_5,a_7,a_8\},\{x,y\},a_0, \delta',\{a_2,a_7,a_8\})$.

δ'	a_0	a_2	a_3	a_5	a_7	a_8
x	a_3	a_7	a_0	a_0	a_2	a_5
y	a_8	a_3	a_2	a_7	a_5	a_2

(I.)
$C_1=\{a_0,a_3,a_5,a_8\},\{a_2,a_7\}$.
$C_2=\{a_0\},\{a_3,a_5,a_8\},\{a_2,a_7\}$.
$C_3=\{a_0\},\{a_3,a_5\},\{a_8\},\{a_2,a_7\}$.
$C_4=\{a_0\},\{a_3,a_5\},\{a_8\},\{a_2,a_7\}$.
$b_0=\{a_0\},b_1=\{a_3,a_5\},b_2=\{a_8\},b_3=\{a_2,a_7\}$.
(II.)
$A_0=(\{b_0,b_1,b_2,b_3\},\{x,y\},b_0,\ \delta_0,\{b_3\})$.

$\boldsymbol{\delta_0}$	$\boldsymbol{b_0}$	$\boldsymbol{b_1}$	$\boldsymbol{b_2}$	$\boldsymbol{b_3}$
x	b_1	b_0	b_1	b_3
y	b_2	b_3	b_3	b_1

5.30. példa - Véges elfogadó automata minimalizálása 4. feladat

Készítsük el az Aufenkamp-Hohn-féle minimalizációs algoritmus segítségével az
$A=(\{a_0,a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7\},\{x,y,z\},a_0,\ \delta,\{a_2,a_4,a_5,a_7\})$
kimenő jel nélküli, iniciális, végállapotokkal bővített
véges automatával ekvivalens A_0 minimális állapotszámú automatát!

$\boldsymbol{\delta}$	$\boldsymbol{a_0}$	$\boldsymbol{a_1}$	$\boldsymbol{a_2}$	$\boldsymbol{a_3}$	$\boldsymbol{a_4}$	$\boldsymbol{a_5}$	$\boldsymbol{a_6}$	$\boldsymbol{a_7}$
x	a_6	a_3	a_1	a_7	a_1	a_0	a_4	a_1
y	a_4	a_7	a_0	a_2	a_3	a_1	a_5	a_6
z	a_5	a_2	a_6	a_1	a_3	a_6	a_0	a_6

Megoldás:

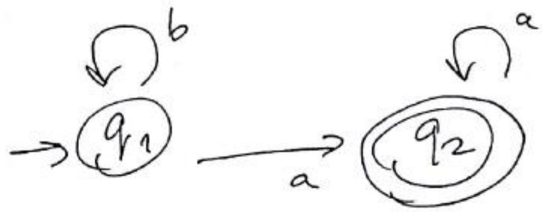
(O.) Az a_0 kezdőállapotból elérhető belső állapotok:
$\{a_0,a_6,a_4,a_5,a_1,a_3,a_7,a_2\}$.
Mivel a kezdőállapotból minden állapot elérhető, ezért nem törlünk
egyetlen állapotot sem, tehát $A'=A$.
(I.)
$C_1=\{a_0,a_1,a_3,a_6\},\{a_2,a_4,a_5,a_7\}$.
$C_2=\{a_0,a_1\},\{a_3,a_6\},\{a_2,a_4,a_5,a_7\}$.
$C_3=\{a_0,a_1\},\{a_3,a_6\},\{a_2,a_5\},\{a_4,a_7\}$.
$C_4=\{a_0,a_1\},\{a_3,a_6\},\{a_2,a_5\},\{a_4,a_7\}$.
$b_0=\{a_0,a_1\},b_1=\{a_3,a_6\},b_2=\{a_2,a_5\},b_3=\{a_4,a_7\}$.
(II.)
$A_0=(\{b_0,b_1,b_2,b_3\},\{x,y,z\},b_0,\ \delta_0,\{b_2,b_3\})$.

$\boldsymbol{\delta_0}$	$\boldsymbol{b_0}$	$\boldsymbol{b_1}$	$\boldsymbol{b_2}$	$\boldsymbol{b_3}$
x	b_1	b_3	b_0	b_0
y	b_3	b_2	b_0	b_1
z	b_2	b_0	b_1	b_1

<u>6. Véges automata → reguláris kifejezés</u>

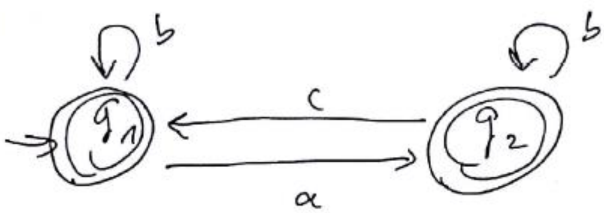
Konstruáljunk reguláris kifejezést az alábbi automaták által elfogadott nyelvekhez.

a)



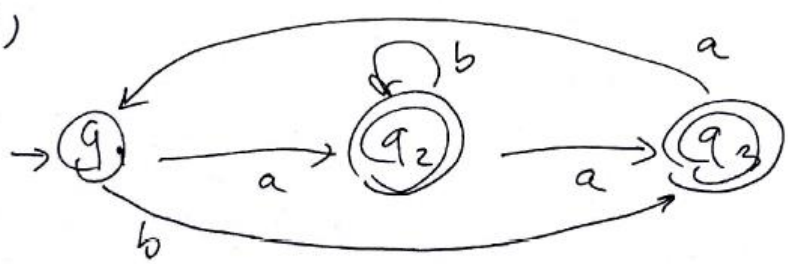
<u>Reg. kif.</u>: b^*aa^*

b)



<u>Reg. kif.</u>: $b^*a(cb^*a + b)^*(cb^* + \lambda) + b^*$

c)



<u>Reg. kif.</u>: $ab^* + (b + ab^*a)(aab^*a + ab)^*(\lambda + aab^*)$

6. a)

Az automata két állapottal rendelkezik (q_1, q_2), ezért két egyenletünk lesz. Az automata ált
elfogadott nyelvet leíró reguláris kifejezést Q_1-re megoldva fogjuk kapni.

Írjuk fel tehát először Q_1-et:

$$Q_1 = bQ_1 + aQ_2.$$

A jobboldalon egy kéttagú unió szerepel: b-vel maradhatunk q_1-ben, ezért jelenik meg bQ_1,
míg a-vel átléphetünk q_2-be, ezért lesz aQ_2.

Folytassuk Q_2-vel:

$$Q_2 = aQ_2 + \lambda.$$

Itt csak egyetlen állapotátmenetet kellett figyelembe vennünk: a-val q_2-ben maradunk. Eze
felül megjelenik egy λ tag is, hiszen q_2 elfogadó állapot.

Az egyenleteket felírva, kezdjük el a megoldást! Dolgozzunk először a második egyenletünkkel:

$$Q_2 = aQ_2 + \lambda.$$

Erre alkalmazhatjuk az Arden lemmát, hiszen (a nyelveket reguláris kifejezésekkel leírva):

- $L = Q_2$,
- $U = a$,
- $V = \lambda$.

Azaz

$$Q_2 = a^*\lambda = a^*.$$

Az első egyenletünkben Q_2 helyére beírhatjuk az előző egyenlet jobb oldalát:

$$Q_1 = bQ_1 + a(a^*) = bQ_1 + aa^*.$$

Végül újra alkalmazhatjuk az Arden lemmát:

$$Q_1 = b^*aa^*.$$

Mivel q_1 az automata kezdőállapota, ezért készen vagyunk, az automata által elfogadott nyelvet leírhatjuk a

$$b^*aa^*$$

reguláris kifejezéssel.

6. b)

Írjuk fel az egyenletrendszert:

$$Q_1 = bQ_1 + aQ_2 + \lambda$$

$$Q_2 = bQ_2 + cQ_1 + \lambda$$

Kezdjük a megoldást a második egyenlettel:

$$\begin{aligned}
Q_2 &= bQ_2 + cQ_1 + \lambda \\
Q_2 &= b^*(cQ_1 + \lambda) && \text{(Arden lemma)} \\
Q_2 &= b^*cQ_1 + b^* && \text{(konkatenáció)}
\end{aligned}$$

Folytassuk Q_1-gyel:

$$\begin{aligned}
Q_1 &= bQ_1 + aQ_2 + \lambda \\
Q_1 &= bQ_1 + a(b^*cQ_1 + b^*) + \lambda && \text{(beírunk } Q_2 \text{ helyére)} \\
Q_1 &= bQ_1 + ab^*cQ_1 + ab^* + \lambda && \text{(konkatenáció)} \\
Q_1 &= (b + ab^*c)Q_1 + ab^* + \lambda && \text{(kiemelünk } Q_1 \text{ elé)} \\
Q_1 &= (b + ab^*c)^*(ab^* + \lambda) && \text{(Arden lemma)}
\end{aligned}$$

Készen vagyunk, a megoldás a következő:

$$(b + ab^*c)^*(ab^* + \lambda).$$

6. c)

Írjuk fel az egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} Q_1 &= aQ_2 + bQ_3 \\ Q_2 &= bQ_2 + aQ_3 + \lambda \\ Q_3 &= aQ_1 + \lambda \end{aligned}$$

Kezdjük a megoldást a második egyenlettel:

$$\begin{aligned} Q_2 &= bQ_2 + aQ_3 + \lambda && \\ Q_2 &= b^*(aQ_3 + \lambda) && \text{(Arden lemma)} \\ Q_2 &= b^*aQ_3 + b^* && \text{(konkatenáció)} \\ Q_2 &= b^*a(aQ_1 + \lambda) + b^* && \text{(beírunk } Q_3 \text{ helyére)} \\ Q_2 &= b^*aaQ_1 + b^*a + b^* && \text{(konkatenáció)} \end{aligned}$$

Folytassuk az első egyenlettel:

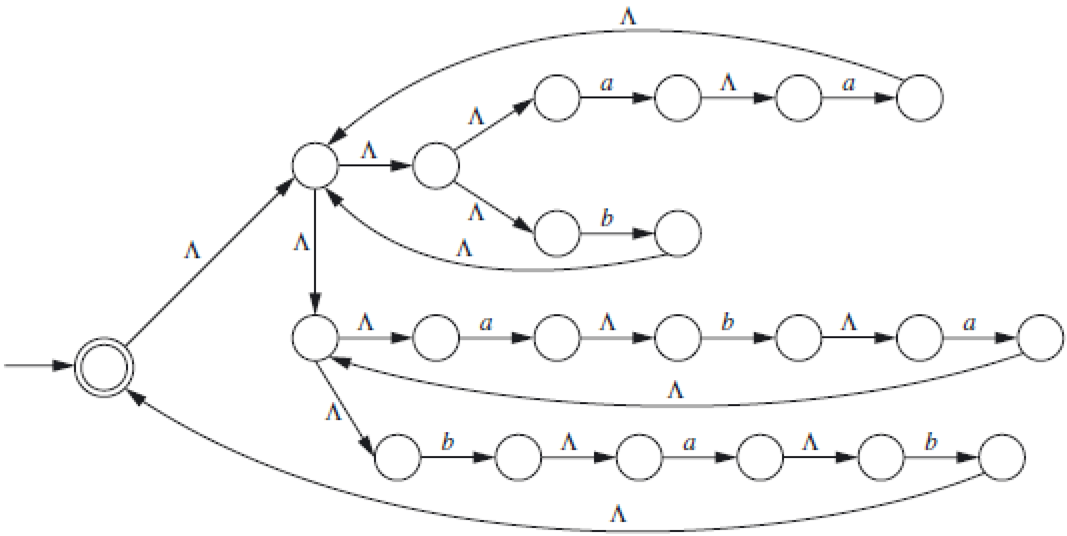
$$\begin{aligned} Q_1 &= aQ_2 + bQ_3 && \\ Q_1 &= aQ_2 + b(aQ_1 + \lambda) && \text{(beírunk } Q_3 \text{ helyére)} \\ Q_1 &= aQ_2 + baQ_1 + b && \text{(konkatenáció)} \\ Q_1 &= a(b^*aaQ_1 + b^*a + b^*) + baQ_1 + b && \text{(beírunk } Q_2 \text{ helyére)} \\ Q_1 &= ab^*aaQ_1 + ab^*a + ab^* + baQ_1 + b && \text{(konkatenáció)} \\ Q_1 &= (ab^*aa + ba)Q_1 + ab^*a + ab^* + b && \text{(kiemelünk } Q_1 \text{ elé)} \\ Q_1 &= (ab^*aa + ba)^*(ab^*a + ab^* + b) && \text{(Arden lemma)} \end{aligned}$$

Készen vagyunk, a megoldás a következő:

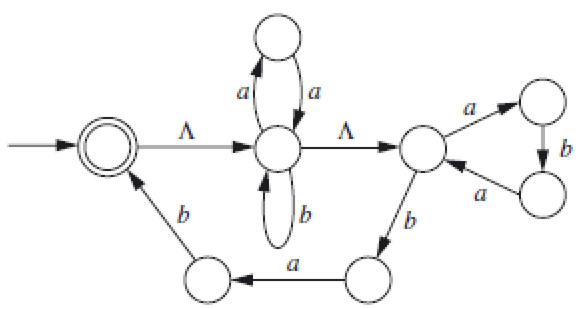
$$(ab^*aa + ba)^*(ab^*a + ab^* + b).$$

7. reguláris kifejezés → véges automata
(J. Martin 113. oldal, M. Sipser 69. oldal)

Konstruáljunk véges automatát ami az $((aa+b)^*(aba)^*bab)^*$ reguláris kifejezés által leírt nyelvet fogadja el.



(a)



(b)

EXAMPLE 1.58

In Figure 1.59, we convert the regular expression $(\mathtt{a} \cup \mathtt{b})^*\mathtt{aba}$ to an NFA. A few of the minor steps are not shown.

a

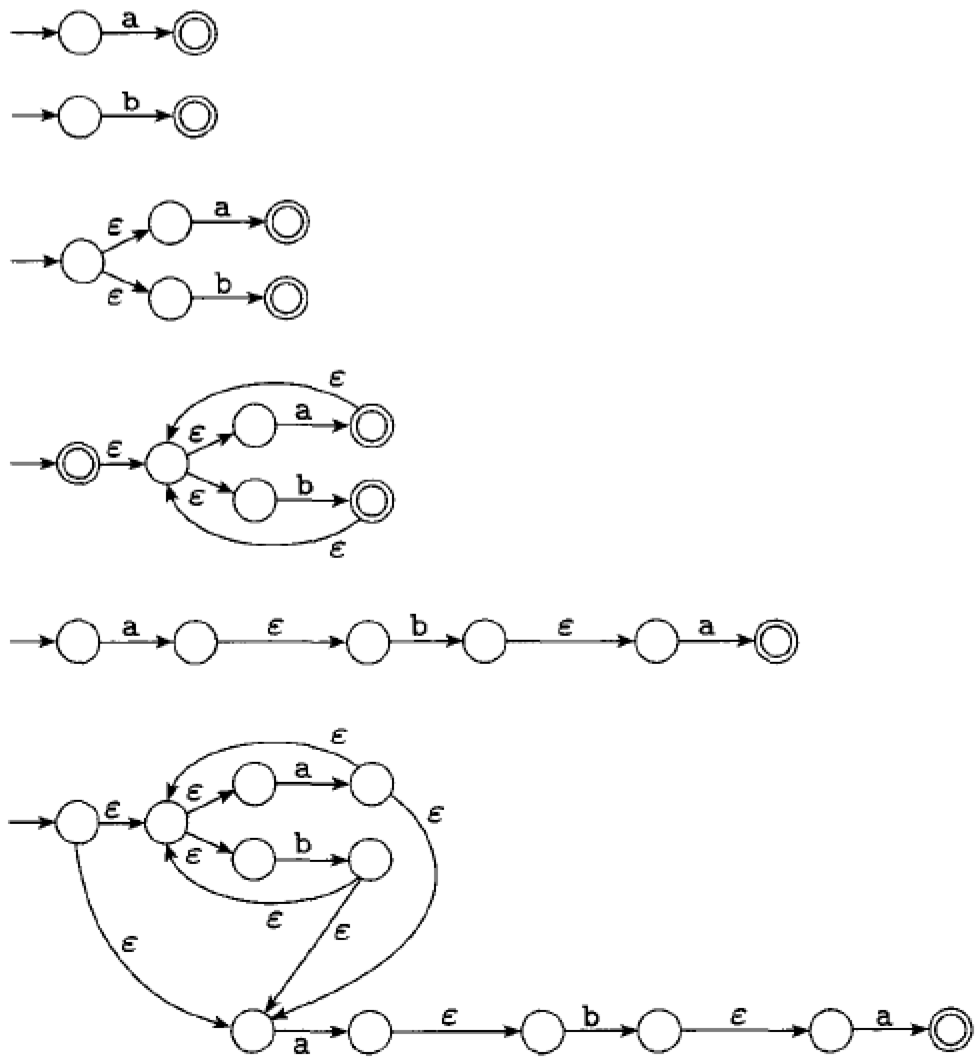
b

a∪b

(a∪b)*

aba

(a∪b)*aba



<u>8. Pumpálási lemma reguláris nyelvekre</u> (M. Sipser 81. oldal)

EXAMPLE 1.75

Let $F = \{ww \mid w \in \{0,1\}^*\}$. We show that F is nonregular, using the pumping lemma.

Assume to the contrary that F is regular. Let p be the pumping length given by the pumping lemma. Let s be the string 0^p10^p1. Because s is a member of F and s has length more than p, the pumping lemma guarantees that s can be split into three pieces, $s = xyz$, satisfying the three conditions of the lemma. We show that this outcome is impossible.

Condition 3 is once again crucial, because without it we could pump s if we let x and z be the empty string. With condition 3 the proof follows because y must consist only of 0s, so $xyyz \notin F$.

Observe that we chose $s = 0^p10^p1$ to be a string that exhibits the "essence" of the nonregularity of F, as opposed to, say, the string 0^p0^p. Even though 0^p0^p is a member of F, it fails to demonstrate a contradiction because it can be pumped.

Magyarázatképpen:

A fenti könyv a következő módon mondja ki a pumpálási lemmát:

Pumping lemma If A is a regular language, then there is a number p (the pumping length) where, if s is any string in A of length at least p, then s may be divided into three pieces, $s = xyz$, satisfying the following conditions:

1. for each $i \geq 0$, $xy^iz \in A$,
2. $|y| > 0$, and
3. $|xy| \leq p$.

azaz a „p pumping length" jelenti azt a számot, aminél hosszabb egy „elég hosszú" szó. A „condition 3" pedig a 3. feltétel, vagyis az, hogy az xyz felosztás xy részének hossza kisebb mint p.

A „p pumping length" és a „condition 3" a következő magyarázatokban is a fentiekre vonatkozik, „condition 2" pedig azt mondja ki, hogy az xyz felosztás y része nem üres.

EXAMPLE 1.77

Sometimes "pumping down" is useful when we apply the pumping lemma. We use the pumping lemma to show that $E = \{0^i 1^j \mid i > j\}$ is not regular. The proof is by contradiction.

Assume that E is regular. Let p be the pumping length for E given by the pumping lemma. Let $s = 0^{p+1}1^p$. Then s can be split into xyz, satisfying the conditions of the pumping lemma. By condition 3, y consists only of 0s. Let's examine the string $xyyz$ to see whether it can be in E. Adding an extra copy of y increases the number of 0s. But, E contains all strings in 0^*1^* that have more 0s than 1s, so increasing the number of 0s will still give a string in E. No contradiction occurs. We need to try something else.

The pumping lemma states that $xy^iz \in E$ even when $i = 0$, so let's consider the string $xy^0z = xz$. Removing string y decreases the number of 0s in s. Recall that s has just one more 0 than 1. Therefore xz cannot have more 0s than 1s, so it cannot be a member of E. Thus we obtain a contradiction.

EXAMPLE 1.76

Here we demonstrate a nonregular unary language. Let $D = \{1^{n^2} \mid n \geq 0\}$. In other words, D contains all strings of 1s whose length is a perfect square. We use the pumping lemma to prove that D is not regular. The proof is by contradiction.

Assume to the contrary that D is regular. Let p be the pumping length given by the pumping lemma. Let s be the string 1^{p^2}. Because s is a member of D and s has length at least p, the pumping lemma guarantees that s can be split into three pieces, $s = xyz$, where for any $i \geq 0$ the string xy^iz is in D. As in the preceding examples, we show that this outcome is impossible. Doing so in this case requires a little thought about the sequence of perfect squares:

$$0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, \ldots$$

Note the growing gap between successive members of this sequence. Large members of this sequence cannot be near each other.

Now consider the two strings xyz and xy^2z. These strings differ from each other by a single repetition of y, and consequently their lengths differ by the length of y. By condition 3 of the pumping lemma, $|xy| \leq p$ and thus $|y| \leq p$. We have $|xyz| = p^2$ and so $|xy^2z| \leq p^2 + p$. But $p^2 + p < p^2 + 2p + 1 = (p+1)^2$. Moreover, condition 2 implies that y is not the empty string and so $|xy^2z| > p^2$. Therefore the length of xy^2z lies strictly between the consecutive perfect squares p^2 and $(p+1)^2$. Hence this length cannot be a perfect square itself. So we arrive at the contradiction $xy^2z \notin D$ and conclude that D is not regular.

5.48. példa - Iterációs lemma alkalmazása

Legyen $L=\{a^m b^m | m>0\}$. Felhasználva a reguláris pumpáló lemmát, kimutatjuk, hogy ez a nyelv nem reguláris. Tegyük fel hogy az, s jelöljön n egy konstanst, mely mellett L kielégíti a reguláris pumpáló lemma tulajdonságait. Ilyen n- t viszont nem fogunk találni, hiszen az $a^n b^n$ szó minden olyan uvw felbontására, melyre $|uv| \leq n$ és $|v|>0$, azt kapjuk, hogy $uw=a^{n-|v|}b^n$, azaz $uw \notin L$. (Hasonlóan, minden $i>1$- re $uv^i w=a^{n+(i-1)|v|}b^n \notin L$.) Ezt az ellentmondást csak az indirekt feltevésünk hamissága okozhatja, tehát L nem reguláris. ★

The Language $\{x \in \{a, b\}^* \mid n_a(x) > n_b(x)\}$

Let L be the language

$$L = \{x \in \{a, b\}^* \mid n_a(x) > n_b(x)\}$$

The first sentence of a proof using the pumping lemma is always the same: Suppose for the sake of contradiction that there is an FA M that accepts L and has n states. There are more possibilities for x than in the previous example; we will suggest several choices, all of which satisfy $|x| \geq n$ but some of which work better than others in the proof.

First we try $x = b^n a^{2n}$. Then certainly $x \in L$ and $|x| \geq n$. By the pumping lemma, $x = uvw$ for some strings u, v, and w satisfying conditions 1–3. Just as in Example 2.30, it follows from conditions 1 and 2 that $v = b^k$ for some $k > 0$. We can get a contradiction from condition 3 by considering $uv^i w$, where i is large enough that $n_b(uv^i w) \geq n_a(uv^i w)$. Since $|v| \geq 1$, $i = n + 1$ is guaranteed to be large enough. The string $uv^{n+1}w$ has at least n more b's than x does, and therefore at least $2n$ b's, but it still has exactly $2n$ a's.

Suppose that instead of $b^n a^{2n}$ we choose $x = a^{2n} b^n$. This time $x = uvw$, where v is a string of one or more a's and $uv^i w \in L$ for every $i \geq 0$. The way to get a contradiction now is to consider $uv^0 w$, which has fewer a's than x does. Unfortunately, this produces a contradiction only if $|v| = n$. Since we don't know what $|v|$ is, the proof will not work for this choice of x.

The problem is not that x contains a's before b's; rather, it is that the original numbers of a's and b's are too far apart to guarantee a contradiction. Getting a contradiction in this just barely satisfied, then ideally any change in the right direction will cause it to fail. A better choice, for example, is $x = a^{n+1} b^n$. (If we had used $x = b^n a^{n+1}$ instead of $b^n a^{2n}$ for our first choice, we could have used $i = 2$ instead of $i = n$ to get a contradiction.)

Letting $x = (ab)^n a$ is also a bad choice, but for a different reason. We know that $x = uvw$ for some strings u, v, and w satisfying conditions 1–3, but now we don't have enough information about the string v. It might be $(ab)^k a$ for some k, so that $uv^0 w$ produces a contradiction; it might be $(ba)^k b$, so that $uv^2 w$ produces a contradiction; or it might be either $(ab)^k$ or $(ba)^k$, so that changing the number of copies of v doesn't change the relationship between n_a and n_b and doesn't give us a contradiction.

The Language $L = \{a^{i^2} \mid i \geq 0\}$

Whether a string of a's is an element of L depends only on its length; in this sense, our proof will be more about numbers than about strings.

Suppose L can be accepted by an FA M with n states. Let us choose x to be the string a^{n^2}. Then according to the pumping lemma, $x = uvw$ for some strings u, v, and w satisfying conditions 1–3. Conditions 1 and 2 tell us that $0 < |v| \leq n$. Therefore,

$$n^2 = |uvw| < |uv^2w| = n^2 + |v| \leq n^2 + n < n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

This is a contradiction, because condition 3 says that $|uv^2w|$ must be i^2 for some integer i, but there is no integer i whose square is strictly between n^2 and $(n+1)^2$.