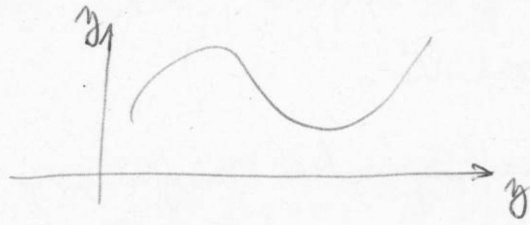
2. Ea. 09. 18.

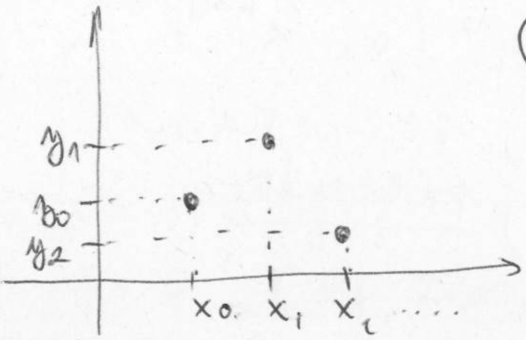
Függvények

$y=f(x)$



Kérdés:
Milyen függvények milyen grafikont adnak?

Végtelen sok x értéket lehetne választani, ezért a gyakorlatban kiválasztunk véges sok x értéket és csak ott számolunk függvény-értéket.



Így a kapott $(x_i, f(x_i))$ pontpárokat meghatározzuk és a szomszédos pontokat összekötjük szakasszal

Azaz a számítógéppel rajzolt grafikon mindig „csak közelítése" az elméleti grafikonnak.
Ha több pontot határozunk meg, akkor a görbe simább/sima lesz. (kevésbé töredezett)
Ha az ablak/kijelző 1000×1000-es felbontású, akkor 1000-nél több pont kiszámolása felesleges.

$\boxed{??}$ Hány pontot kellene meghatározni, hogy sima görbét kapjunk?

100 pont is elég lehet, mert már görbének látjuk.

Az később még jól jöhet, hogy egyenes szakaszokból áll, például, ha egyenessel akarjuk majd metszeni.

Olyan függvényeket fogunk megnézni, melyeket a komputergrafikában tudunk használni. Ez nem matematikai szempontból fontos, hanem a megjelenítés szempontjából.

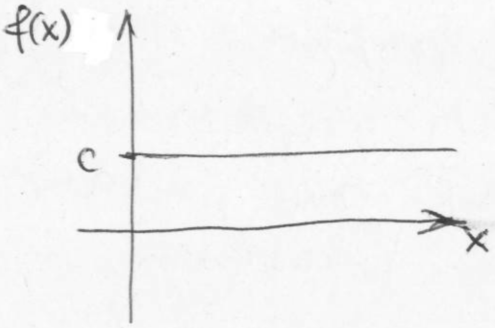
1) Polinomiális függvények

polinomok: $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0$

$a_i \in \mathbb{R}$, valós számok, együtthatók

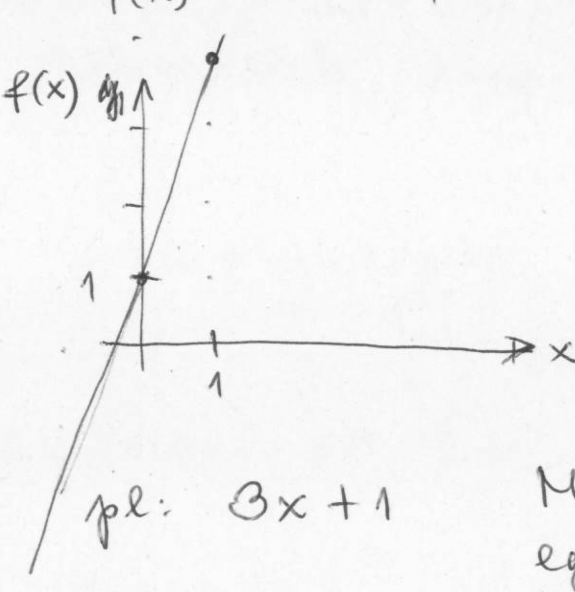
$x_i \in \mathbb{R}$, változók

- $f(x) = c$ (konstans fv.) 0-ad fokú polinom



itt titokban van még valami: $\dots + a_1 \cdot x^1 + a_0 \cdot x^0$

- $f(x) = ax + b$, első fokú polinom



A grafikon egyenes lesz, jobbra, balra dőlve.

$ax + b$

meredekség

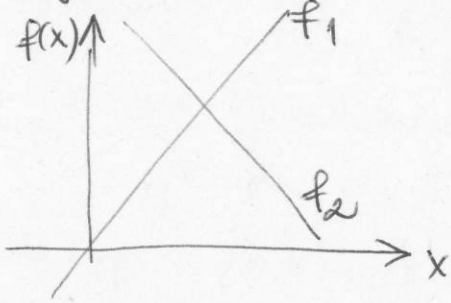
hol metszi az y tengelyt

pl: $3x + 1$

Mivel tudjuk, hogy egyenes, elég két pontot megkeresni!

(Pl.)

1) Tudom, hogy szeretnék egy nagy X-t rajzolni a képernyőre. (Pl: ez egy logó.)

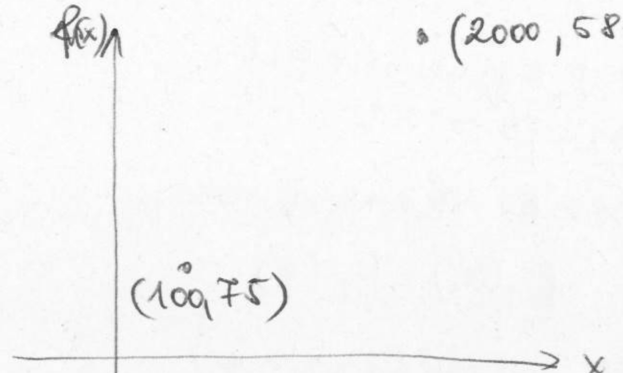


$f_1(x) = 2x$ (origón haladjon át)

$f_2(x) = -2x + 5$ (el kell tolni az origóból, ezért van a +5)

A grafikát ez a fordított gondolkodás jellemzi, azaz előre tudom, hogy mit akarok rajzolni, és ahhoz keresem a függvényt!

2)



két pontra illeszkedő egyenes megadása.

$f(x) = ax + b$

Ebben az esetben a, b ismeretlenek.

Az ismert pontok koordinátái kielégítik az $f(x) = ax + b$ egyenletet.

$$\left.\begin{aligned} 75 &= a \cdot 100 + b \\ 580 &= a \cdot 2000 + b \end{aligned}\right\}$$ ez egy egyenletrendszer, melyet meg kell oldani

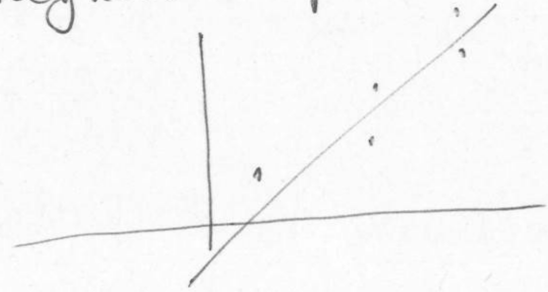
$\Downarrow$

megvan az egyenes egyenlete.

Ha csak egy pontot adtam volna meg, akkor a feladat aluldeterminált, ∞ sok megoldás egyenes van.

Ha 2-nél több pontot adok meg, akkor ha valóban egy egyenes pontjai, akkor bármely kettőből számolható a függvény egyenlete.

Ha a több pont nem esik egy egyenesre, akkor valószínűleg megelégszünk azzal, hogy az egyenes „elég jól közelíti" a megadott pontokat.



Ilyenkor az is lehet, hogy a „megoldás-egyenes" egyik ponton sem megy át.
(Approximációs feladat)

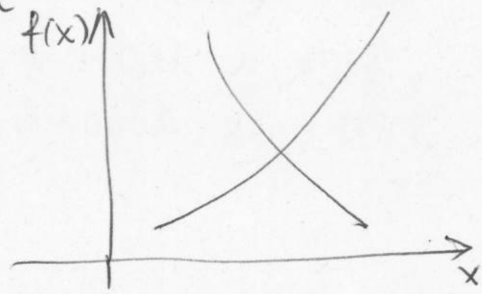
Megoldásra váró feladat egyenesekkel:

<u>Két egyenes metszéspontja</u>

$$\left.\begin{aligned} f_1(x) &= a_1 x + b_1 \\ f_2(x) &= a_2 x + b_1 \end{aligned}\right\}$$ Olyan x-t keresünk, melyre $f_1(x) = f_2(x)$

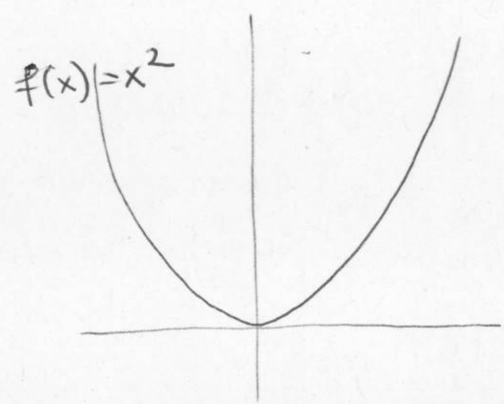
(egyenletrendszert kell megoldanunk)

Ha a X logót ívesebbre szeretnénk rajzolni, akkor már nem elsőfokú polinomot használunk.



– Másodfokú polinom:

$$f(x) = a x^2 + bx + c$$



ismert
↓ parabola : x^2

ha az a, b, c értékeket változtatjuk, akkor a parabola elmozdul, megnyúlik, lefelé fordul ... stb.

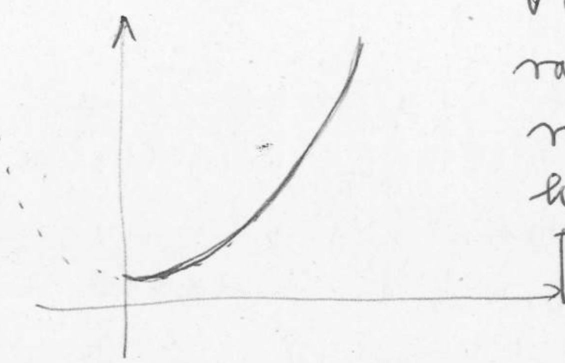
parabola esetén a transzformálás jól kitalálható, ha teljes négyzetté alakítjuk.

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$
$$f(x) = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$$
$$f(x) = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \underbrace{\left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right)}$$

Ez általános leírás, talán jobb, ha egy konkrét példát számolunk!

ezek adják meg, hogy milyen eltolást kell használnunk!

Probléma:



Valami ilyesmi görbét akarok rajzolni, ami hasonlít a parabolára. Ezért parabolakínt keresem.

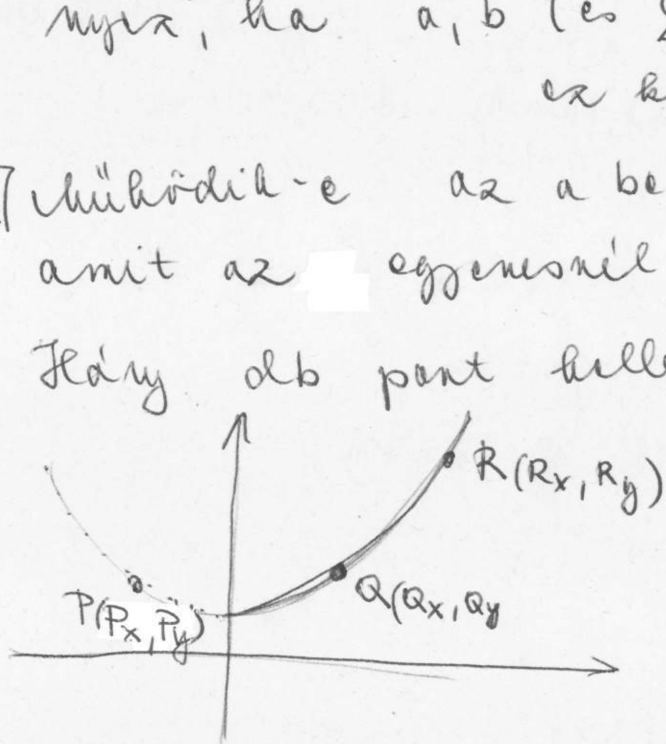
$\boxed{?,?}$ Milyen a, b, c-t kellene választani?

Próbálják ki, hogy milyen változtatást eredményez, ha a, b (és c) értékét változtatom!!

ez könnyebben tippelhető!

$\boxed{??}$ Működik-e az a behelyettesítős módszer, amit az egyenesnél használtunk?

Hány db pont kellene? → 3-ra, mert 3 ismeretlen van.



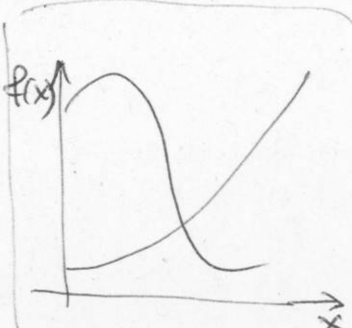
$$f(x) = ax^2 + by + c$$

$$\begin{cases} P_y = a \cdot P_x^2 + bP_x + c \\ Q_y = a\,Q_x^2 + bQ_x + c \\ R_y = a\,R_x^2 + b \cdot R_x + c \end{cases}$$

Az egyenletrendszer megoldható,
helyettesítéses stb módszerrel ⇒ a, b, c értékeket
megkapjuk.

A grafika <u>nem az egyenletekkel fog kísérletezni</u>,
hogy egyenként változtassuk a paramétereket,
hanem a lekért pontokat helyezi át.
(A háttérben mindig a fentihez hasonló
számolások zajlanak!)

A logó legyen még ívesebb:
„olyan kanyargósabb"



Lehetne a kanyargósabb pl a
cos x. De ennek a kiértékelése (gépi kiértékelése)
macerásabb, mint egy polinomé.
A polinom esetén néhány szorzás és összeadás.
$(f(x) = 3x^2 + 5x - 7)$ $x = 4$ helyen.

A cos x esetén az $x=4$ helyen akkor
hasonlóan működik, mint amikor a függvénytáblázatban
kikerestük. (Gyakran futhatunk kerekítési
problémába.)
Szóval a lényeg, hogy a „hullámos" görbét
polinommal próbáljuk megadni.
Nem jó az első, másodfokú polinom.

⇒

- Harmadfokú polinom

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

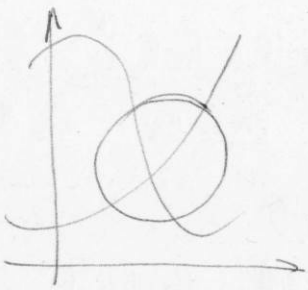
A síkon 4 pontot kellene leszúrnom akkor, hogy megkapjam a várt harmadfokú görbét.

- Magasabb fokszámú polinomok:

Minél magasabb a fokszám, annál jobban hullámozhat a görbe.

Újabb probléma:

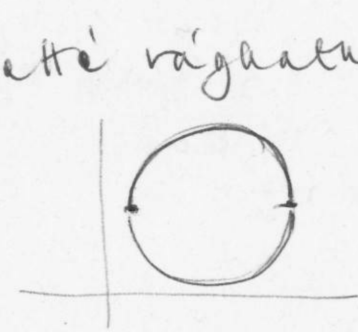
A logóra:



Olyan függvény nincs, ami azt a kört a odarajzolná.

(Tudjuk, hogy a függvény egyértelmű hozzárendelés!)

Kettévághatnánk a kört, és akkor az alsó és a felső ívet egy-egy függvénnyel leírhatnánk.



De ennél jobb megoldást is tud a matematika.

Implicit függvények

EDDIG: $\left.\begin{array}{l} x \longmapsto f(x) \\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} f(x)=3x^2+5x+1 \\ y = 3x^2+5x+1 \end{array}$

MOST: egy x és y-hoz egyszerre számolunk értéket.

$\left.\begin{array}{l} x,y \to F(x,y) \\ \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R} \end{array}\right\}$ $F(x,y)=0$ alak az implicit alak.

Vegyük észre, hogy az eddigi függvényeink mind átalakítható ilyen implicit alakká!!

$$y = 3x^2 + 5x + 1$$
$$\Downarrow$$
$$0 = \underbrace{3x^2 + 5x + 1 - y}_{F(x,y)}$$

Általában:

$$y = f(x)$$
$$0 = \underbrace{f(x) - y}_{F(x,y)}$$

De az implicit függvény ennél többet is tudhat:

- lehet y is bonyolultabb kifejezésben
- x, y együtt is lehet egy tagban.

Pl:

$$3x^2 + 5y^2 - 6xy^2 - 7y^4 + 5 = 0.$$

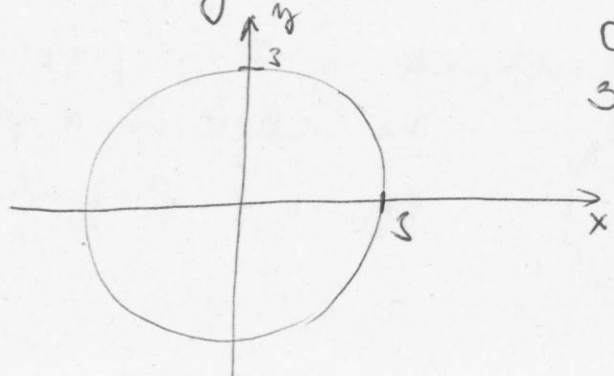
visszaalakítás $y = \dots$ alakká sok esetben <u>nem</u> lehetséges

Miért jó az implicit forma?

Mert itt egy x több y-nak lehet párban

Pl: $x^2 + y^2 = 9$

$$\Downarrow$$
$$\underbrace{x^2 + y^2 - 9}_{F(x,y)} = 0$$



Origó kpú, 3 egység sugarú kör

$\Rightarrow$ Implicit alakkal olyan görbék is rajzolhatók, melyek „maguk" alá görbülnek hajlanak!