# Az informatika logikai alapjai
# 6. feladatsor

# Miért diszjunktív és miért normálforma?

- literál: atomi formula vagy atomi formula negáltja
- elemi diszjunkció / elemi konjunkció: literálok diszjunkciója / konjunkciója
- diszjunktív ($(A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee \neg B)$ rmula: elemi konjunkciók diszjunkciója

  konjunktív normálformájú formula: elemi diszjunkciók konjunkciója

- **Normál**forma: minden formula átalakítható ilyen alakba

$$(a \wedge b \wedge \neg c) \vee (\neg a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge \neg b \wedge \neg c)$$

$$(A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee \neg B)$$

# Például

## diszjunktív normálforma

$A$

$A \vee B$

$A \vee \neg B$

$A \wedge \neg B$

$(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$

| Nem diszjunktív normálforma | De: |
|---|---|
| $\neg(A \wedge B) \vee C,$ | $\neg A \vee \neg B \vee C$ |
| $(A \vee B) \wedge C,$ | $(A \wedge C) \vee (B \wedge C)$ |
| $(A \vee B) \to C,$ | $(\neg A \wedge \neg B) \vee (C)$ |

# Konjunktív normálforma

**konjunktív normálformák**

$A \vee B$

$A \vee \neg B$

$A \wedge \neg B$

$(A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee \neg B)$

**nem konjunktív normálformák:**

$\neg(A \vee B) \wedge C$,

$(A \wedge B) \vee C$,

$(A \vee B) \to C$

**de:**

$\neg A \wedge \neg B \wedge C$

$(A \vee C) \wedge (B \vee C)$

$(\neg A \vee C) \wedge (\neg B \vee C)$

Az elemi diszjunkciókat klózoknak is nevezik.

# Hogyan alakítható át egy formula diszjunktív normálalakra?

Kiindulás: $(\neg a \to b) \wedge (b \wedge c)$

| $\beta(a)$ | $\beta(b)$ | $\beta(c)$ | $\hat{\beta}((\neg a \to b) \wedge (b \wedge c))$ | Monom |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | – |
| 0 | 0 | 1 | 0 | – |
| 0 | 1 | 0 | 0 | – |
| 0 | 1 | 1 | 1 | $\neg a \wedge b \wedge c$ |
| 1 | 0 | 0 | 0 | – |
| 1 | 0 | 1 | 0 | – |
| 1 | 1 | 0 | 0 | – |
| 1 | 1 | 1 | 1 | $a \wedge b \wedge c$ |

Eredmény: $(\neg a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge c)$

(miért „normál"?)

# Konjunktív normálforma az előzőek alapján

$$\varphi : \neg(a \wedge \neg c) \vee \neg((\neg c \supset b) \vee a)$$

$$\neg\varphi : (a \wedge \neg c) \wedge ((\neg c \supset b) \vee a)$$

| $\beta(a)$ | $\beta(b)$ | $\beta(c)$ | $\hat{\beta}(\neg\varphi)$ | Monom |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | – |
| 0 | 0 | 1 | 0 | – |
| 0 | 1 | 0 | 0 | – |
| 0 | 1 | 1 | 0 | – |
| 1 | 0 | 0 | 1 | $(a \wedge \neg b \wedge \neg c)$ |
| 1 | 0 | 1 | 0 | – |
| 1 | 1 | 0 | 1 | $(a \wedge b \wedge \neg c)$ |
| 1 | 1 | 1 | 0 | – |

$$\neg\varphi \equiv (a \wedge \neg b \wedge \neg c) \vee (a \wedge b \wedge \neg c)$$

$$\neg\neg\varphi$$

$$\neg((a \wedge \neg b \wedge \neg c) \vee (a \wedge b \wedge \neg c))$$

$$\neg(a \wedge \neg b \wedge \neg c) \wedge \neg(a \wedge b \wedge \neg c)$$

$$\boxed{(\neg a \vee \neg\neg b \vee \neg\neg c) \wedge (\neg a \vee \neg b \vee \neg\neg c)}$$

Második módszer konjunktív / diszjunktív normálformára alakításra:

1. Az implikációs részformulák helyére a logikai jelek közötti összefüggések alapján diszjunkciós formulákat írunk.

2. De Morgan törvényei és a kétszeres tagadás törvénye segítségével elérjük, hogy negáció csak atomokra vonatkozzon.

3. Végül a disztributivitás törvényei segítségével addig alakítjuk a formulát, hogy a konjunkciók és diszjunkciók megfelelő sorrendben kövessék egymást.

## Harmadik módszer, példa:

¬(A∧B)⇔¬A∨¬B és ¬(A∨B)⇔¬A∧¬B

A∨(B∧C)⇔(A∨B)∧(A∨C)
A∧(B∨C)⇔(A∧B)∨(A∧C)

(A ∧ B) ∨ C ⟷ (A ∨ C) ∧ (B ∨ C)

Beispiel: Die Formel
$\varphi = (a \land \neg c) \lor \neg(\neg c \rightarrow b)$.

Beispiel: Die Schritte

1. Zunächst werden wir den Implaktions-Junktor los

$$(a \land \neg c) \lor \neg(\neg c \rightarrow b) \Rightarrow (a \land \neg c) \lor \neg(\neg\neg c \lor b)$$

2. Jetzt treiben wir die Negationen zu den Variablen:

$$(a \land \neg c) \lor \neg(\neg\neg c \lor b) \Rightarrow (a \land \neg c) \lor (\neg\neg\neg c \land \neg b)$$

3. Jetzt entfernen wir die doppelten Negationen:

$$(a \land \neg c) \lor (\neg\neg\neg c \land \neg b) \Rightarrow (a \land \neg c) \lor (\neg c \land \neg b)$$

4. Jetzt treiben wir die Und-Junktoren nach außen.

$$(\overset{A}{a} \land \overset{B}{\neg c}) \lor \overset{C}{(\neg c \land \neg b)}$$
$$\Rightarrow (\overset{A}{a} \lor \overset{C}{(\neg c \land \neg b)}) \land (\overset{B}{\neg c} \lor \overset{C}{(\neg c \land \neg b)})$$
$$\Rightarrow ((a \lor \neg c) \land (a \lor \neg b)) \land ((\neg c \lor \neg c) \land (\neg c \lor \neg b))$$
$$\Rightarrow (a \lor \neg c) \land (a \lor \neg b) \land (\neg c \lor \neg c) \land (\neg c \lor \neg b)$$

**8.I.9.** Melyik formulának konjunktív normálformája az $X \wedge Y$ formula?

(a) $X \wedge Y \wedge \neg Z$ (b) $\neg(\neg X \vee \neg Y)$

(c) $X \supset (Y \vee \neg X)$ (d) $(X \supset Y) \supset (\neg Y \supset \neg X)$

**8.I.11.** Hozzuk konjunktív és diszjunktív normálformára a következő formulákat!

(a) $\neg(X \wedge Y \supset \neg X) \wedge \neg(X \wedge Y \supset \neg Y)$

(b) $\neg(X \wedge (Y \vee Z)) \supset (X \wedge Y) \vee Z$

$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$ és $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

$(A \wedge B) \vee C \leftrightarrow (A \vee C) \wedge (B \vee C)$

# Formulák mint klózhalmazok

- <u>klóz</u>: literálok halmaza (implicit diszjunkció)
- <u>üres klóz</u>: literálok üres halmaza
  jele: $\square$
- <u>formula</u>: klózok halmaza (implicit konjunkció)
- <u>üres klózhalmaz</u>: $\emptyset$

$$(p \vee r) \wedge (\neg q \vee \neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg p \vee q \vee p \vee \neg p) \wedge (r \vee p)$$

$$\{\{p, r\}, \{\neg q, \neg p, q\}, \{p, \neg p, q\}\}.$$

(jelölés: $p, \neg p, \bar{p}$ )

# Például:

• Ha $$C_1 = ab\bar{c} \text{ and } C_2 = bc\bar{e}$$

komplemens literálpár

klózhalmazok komplemens literálpárt tartalmaznak, akkor ~~az~~ rezolválhatók.

• Az „eredmény" a rezolvens klóz:

$$C = (ab\bar{c} - \{\bar{c}\}) \cup (bc\bar{e} - \{c\}) = ab \cup b\bar{e} = ab\bar{e}.$$

# A rezolúciós eljárás

Egy klózhalmazról (formuláról) eldönti, hogy kielégíthető-e. Legyen a halmaz S.

- Veszünk S-ből két rezolválható klózt.
- Képezzük el a rezolvenst.
- Ha a rezolvens az üres klóz (□)

  → a formula kielégíthetetlen

  különben

  → adjuk hozzá ~~[illegible]~~ a rezolvenst a klózhalmazhoz
- Álljunk meg, ha nincs több rezolválható klóz.



Mit jelent, hogy „nincs több rezolválható klóz”?

# Példaként:

$S_1.$ $\{p, \bar p q, \bar r, \bar p \bar q r\}$

$S_2.$ $\{p, \bar p q, \bar r, \bar p \bar q \bar r, \bar p \bar q\}$

$S_3.$ $\{p, \bar p q, \bar r, \bar p \bar q \bar r, \bar p \bar q, \bar p\}$

$S_4.$ $\{p, \bar p q, \bar r, \bar p \bar q \bar r, \bar p \bar q, \bar p, \square\}$

az üres klóz

Mivel $\square$ nem kielégíthető, $S_4$ sem kielégíthető. A rezolúció szabályát használtuk, tehát $S_1$ sem kielégíthető.

(Nézzük meg az elején, hogy 1. kielégíthetetlen!)

**12.I.1.** Rezolválhatók-e az alábbi klózpárok? Ha igen, határozzuk meg a rezolvensüket!

(a) $X \vee Y \vee \neg Z$ és $\neg Y \vee W$

(b) $X \vee Y \vee \neg Z$ és $Y \vee \neg W$

(c) $X \vee Y \vee \neg Z$ és $\neg Y \vee Z$

(d) $X \vee Y \vee \neg Z$ és $Z$

(e) $\neg Z$ és $Z$

**12.I.8.** Igazoljuk rezolúcióval, hogy

(a) $X,\ Y,\ Z \supset U,\ Z \ \vDash\ X \wedge Y \wedge U$

(b) $X \vee Y,\ X \supset Z \vee U,\ Z \supset V \wedge W,\ W \wedge \neg S \supset \neg V \ \vDash\ \neg U \supset Y$

(c) $X,\ Y,\ X \wedge Y \supset Z,\ X \supset W \ \vDash\ Z \wedge W$