Valós függvények differenciálszámítása II.

A gyakorlat célja

Ennek a gyakorlatnak a célja egyrészt az összetett függvény differenciálási szabályának a gyakorlása, másfelől a L'Hospital-szabály különböző változatainak megismerése és az alkalmazási lehetőségek begyakorlása.

Felhasznált elméleti anyag

A feladatok megoldásához szükséges elméleti állítások

(a) Az összetett függvény differenciálhatóságáról szóló tétel (lásd a Kalkulus előadásjegyzet 8.2.2. Tételét)

(b) A L'Hospital-szabály különböző változatai (lásd a Kalkulus előadásjegyzet 8.6 fejezetét)

További tudnivalók

Az alábbiakban a legfontosabb feladatok részletes megoldása található. A meg nem oldott feladatok házi feladatnak tekintendőek. Ez alól kivétel a 9. és a 10. Feladat, mely a L'Hospital-szabállyal kapcsolatban tartalmaz néhány nehezebb példát. Ezek megoldása nem elvárt. Több esetben fordul elő, hogy a végeredményként adódó függvényen az összes lehetséges egyszerűsítét elvégeztem, ez a számonkérés során tőletek nem elvárás. Kérlek benneteket, hogy figyelmesen olvassátok el az egyes feladatok megoldása előtt található útmutatókat is, melyek hasznos információkat, módszereket tartalmaznak.

1. Feladat. *Az összetett függvény differenciálási szabályát alkalmazva, határozzuk meg a következő függvények differenciálhányados függvényeit.*

(a)

$$\left(6x^2 - \frac{x^5}{5}\right)^4$$

Megoldás. *Legyen*

$$f(x) = x^4 \qquad \text{és} \qquad g(x) = 6\,x^2 - \frac{x^5}{5}$$

Ekkor

$$f(g(x)) = \left(6\,x^2 - \frac{x^5}{5}\right)^4$$

és

$$f'(x) = 4\,x^3 \qquad \text{és} \qquad g'(x) = 12\,x - x^4$$

Ezért

$$(f \circ g)'(x) = 4\left(6\,x^2 - \frac{x^5}{5}\right)^3 \cdot \left(12\,x - x^4\right)$$

□

(b)

$$\sqrt[3]{(3x - 2x^2)^2}$$

Megoldás. *Legyen*

$$f(x) = x^{\frac{2}{3}} \qquad \textit{és} \qquad g(x) = 3\,x - 2\,x^2$$

Ekkor

$$f(g(x)) = \sqrt[3]{(3x - 2x^2)^2}$$

és

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} \qquad \textit{és} \qquad g'(x) = 3 - 4\,x$$

Ezért

$$(f \circ g)'\,(x) = \frac{2}{3}\left(3\,x - 2\,x^2\right)^{-\frac{1}{3}} \cdot (3 - 4\,x)$$

□

(c)

$$\sqrt[4]{(2x^2 - x^3)^3}$$

Megoldás. *Legyen*

$$f(x) = x^{\frac{3}{4}} \qquad \textit{és} \qquad g(x) = 2\,x^2 - x^3$$

Ekkor

$$f(g(x)) = \sqrt[4]{(2x^2 - x^3)^3}$$

és

$$f'(x) = \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}} \qquad \textit{és} \qquad g'(x) = 4\,x - 3\,x^2$$

Ezért

$$(f \circ g)'\,(x) = \frac{3}{4}\left(2\,x^2 - x^3\right)^{-\frac{1}{4}} \cdot \left(4\,x - 3\,x^2\right)$$

□

(d)

$$\frac{3x(4 - 3x)}{4\sqrt[4]{2x^3 - x^2}}$$

Megoldás. *Legyen*

$$f(x) = \sqrt[4]{x} \qquad \textit{és} \qquad g(x) = 2x^3 - x^2$$

Ekkor

$$f(g(x)) = \left(2\,x^3 - x^2\right)^{\frac{1}{4}}$$

és

$$f'(x) = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} \qquad \textit{és} \qquad g'(x) = 6\,x^2 - 2\,x$$

Ezért

$$(f \circ g)'\,(x) = \frac{1}{4}\left(2\,x^3 - x^2\right)^{-\frac{3}{4}} \cdot \left(6\,x^2 - 2\,x\right)$$

Mindezekből azt kapjuk, hogy

$$\left[\frac{3x(4 - 3x)}{4\sqrt[4]{2x^3 - x^2}}\right]' = -\frac{9\,x\left(2\,x^3 - x^2\right)^{\frac{1}{4}}}{4} + \frac{3\,(4 - 3\,x)\left(2\,x^3 - x^2\right)^{\frac{1}{4}}}{4} + \frac{3\,(4 - 3\,x)\;x\left(6\,x^2 - 2\,x\right)}{16\,(2\,x^3 - x^2)^{\frac{3}{4}}}$$

□

(e)

$$\sqrt[3]{4 + 2\sqrt{3x} + 3x^2}$$

Megoldás. *Legyen*

$$f(x) = x^{\frac{1}{3}} \qquad \textit{és} \qquad g(x) = 3\,x^2 + 2\,\sqrt{3}\,\sqrt{x} + 4$$

Ekkor

$$f(g(x)) = \sqrt[3]{4 + 2\sqrt{3x} + 3x^2}$$

és

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \qquad \textit{és} \qquad g'(x) = 6\,x + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{x}}$$

Ezért

$$(f \circ g)'(x) = \frac{1}{3}\left(3\,x^2 + 2\,\sqrt{3}\,\sqrt{x} + 4\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \left(6\,x + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{x}}\right)$$

□

(f)

$$\sqrt[4]{(3 + 4\sqrt[3]{2x})^3}$$

Megoldás. *Legyen*

$$f(x) = x^{\frac{3}{4}} \qquad \textit{és} \qquad g(x) = 2^{\frac{7}{3}}\,x^{\frac{1}{3}} + 3$$

Ekkor

$$f(g(x)) = \sqrt[4]{(3 + 4\sqrt[3]{2x})^3}$$

és

$$f'(x) = \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}} \qquad \textit{és} \qquad g'(x) = \frac{2^{\frac{7}{3}}}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

Ezért

$$(f \circ g)'(x) = \frac{3}{4}\left(2^{\frac{7}{3}}\,x^{\frac{1}{3}} + 3\right)^{-\frac{1}{4}} \cdot \frac{2^{\frac{7}{3}}}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

□

(g)

$$\sqrt[4]{\left(2\,\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} + \sqrt[3]{x}\right)^3}$$

Megoldás. *Legyen*

$$f(x) = \sqrt[4]{x^3} \qquad \textit{és} \qquad g(x) = 2\,\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} + \sqrt[3]{x}$$

Ekkor

$$f(g(x)) = \sqrt[4]{\left(2\,\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} + \sqrt[3]{x}\right)^3}$$

és

$$f'(x) = \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}} \qquad \textit{és} \qquad g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{3\,x^{\frac{2}{3}}} + \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$$

Ezért

$$(f \circ g)'(x) = \frac{3}{4}\left(2\,\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} + \sqrt[3]{x}\right)^{-\frac{1}{4}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{3\,x^{\frac{2}{3}}} + \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right)$$

□

(h)

$$\sqrt[5]{(a + x^2)^4} \cdot \sqrt[3]{(a + x^2)^2}$$

Megoldás. *Legyen*

$$f(x) = x^{\frac{4}{5}} \qquad \text{és} \qquad g(x) = a + x^2$$

Ekkor

$$f(g(x)) = \sqrt[5]{(a + x^2)^4}$$

és

$$f'(x) = \frac{4}{5}x^{-\frac{1}{5}} \qquad \text{és} \qquad g'(x) = 2x$$

Ezért

$$(f \circ g)'(x) = \frac{4}{5}(a + x^2)^{-\frac{1}{5}} \cdot 2x$$

Legyen

$$f(x) = x^{\frac{2}{3}} \qquad \text{és} \qquad g(x) = a + x^2$$

Ekkor

$$f(g(x)) = \sqrt[3]{(a + x^2)^2}$$

és

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} \qquad \text{és} \qquad g'(x) =$$

Ezért

$$(f \circ g)'(x) = \frac{2}{3}(a + x^2)^{-\frac{1}{3}} \cdot 2x.$$

Így

$$\left[\sqrt[5]{(a + x^2)^4} \cdot \sqrt[3]{(a + x^2)^2}\right]' = \left(\frac{4}{5}(a + x^2)^{-\frac{1}{5}} \cdot 2x\right) \cdot \sqrt[3]{(a + x^2)^2} + \sqrt[5]{(a + x^2)^4} \cdot \left(\frac{2}{3}(a + x^2)^{-\frac{1}{3}} \cdot 2x\right).$$

□

(i)

$$\sqrt{(a^2 + ax + x^2)(a - x)}$$

Megoldás. *Legyen*

$$f(x) = \sqrt{x} \qquad \text{és} \qquad g(x) = (a^2 + ax + x^2)(a - x)$$

Ekkor

$$f(g(x)) = \sqrt{(a^2 + ax + x^2)(a - x)}$$

és

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \qquad \text{és} \qquad g'(x) = -x^2 + (a - x)\,(2\,x + a) - a\,x - a^2$$

Ezért

$$(f \circ g)'(x) = \frac{-x^2 + (a - x)\,(2\,x + a) - a\,x - a^2}{2\,\sqrt{(a - x)\,(x^2 + a\,x + a^2)}}$$

□

(j)

$$(5 + 3x)\sqrt{6x - 5}$$

Megoldás. *Legyen*

$$f(x) = \sqrt{x} \qquad \text{és} \qquad g(x) = 6x - 5$$

Ekkor

$$f(g(x)) = \sqrt{6x - 5}$$

és

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \qquad \textit{és} \qquad g'(x) = 6$$

Ezért

$$(f \circ g)'(x) = \frac{3}{\sqrt{6\,x-5}},$$

amiből az adódik, hogy

$$\left[(5+3x)\sqrt{6x-5}\right]' = \frac{3}{\sqrt{6\,x-5}} - \frac{3\,(3\,x+5)}{(6\,x-5)^{\frac{3}{2}}}$$

□

(k)

$$(3x^2+5ax-2a^3)\sqrt{a^2+3x^2}$$

Megoldás. *Legyen*

$$f(x) = a^2+3x^2 \qquad \textit{és} \qquad g(x) = \sqrt{x}$$

Ekkor

$$f(g(x)) = \sqrt{a^2+3x^2}$$

és

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \qquad \textit{és} \qquad g'(x) = 6x$$

Ezért

$$(f \circ g)'(x) = \frac{3\,x}{\sqrt{3\,x^2+a^2}},$$

amiből az adódik, hogy

$$\left[(3x^2+5ax-2a^3)\sqrt{a^2+3x^2}\right]' = (6\,x+5\,a)\ \sqrt{3\,x^2+a^2} + \frac{3\,x\left(3\,x^2+5\,a\,x-2\,a^3\right)}{\sqrt{3\,x^2+a^2}}.$$

□

(l)

$$\frac{27x}{\sqrt{6x-5}}$$

Megoldás. *A (j) rész felhasználásával, az adódik, hogy*

$$\left[\sqrt{6x-5}\right]' = \frac{3}{\sqrt{6\,x-5}},$$

ezért

$$\frac{27}{\sqrt{6\,x-5}} - \frac{81\,x}{(6\,x-5)^{\frac{3}{2}}}$$

□

(m)

$$x(a^2+x^2)\sqrt{a^2-x^2}$$

Megoldás. *Legyen*

$$f(x) = \sqrt{x} \qquad \textit{és} \qquad g(x) = a^2 - x^2$$

Ekkor

$$f(g(x)) = \sqrt{a^2 - x^2}$$

és

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \qquad \textit{és} \qquad g'(x) = -2x$$

Ezért

$$(f \circ g)'(x) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2 - x^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x),$$

amiből az adódik, hogy

$$\left[x(a^2 + x^2)\sqrt{a^2 - x^2}\right]' = 2\,x^2\,\sqrt{a^2 - x^2} + \sqrt{a^2 - x^2}\left(x^2 + a^2\right) - \frac{x^2\left(x^2 + a^2\right)}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

□

(n)

$$\frac{a^4 + a^2x^2 - 4a^4}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

Megoldás. *Az (n) rész felhasználásával adódik, hogy*

$$\left[\sqrt{a^2 - x^2}\right]' = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2 - x^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x),$$

ezért

$$\left[\frac{a^4 + a^2x^2 - 4a^4}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right]' = \frac{2\,a^2\,x}{\sqrt{a^2 - x^2}} + \frac{x\left(a^2\,x^2 - 3\,a^4\right)}{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

□

(o)

$$\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)\sqrt{1 + x^2}$$

(p)

$$\left(\frac{3}{x^7} + \frac{2}{x^5}\right)\sqrt{(3 - 5x^2)^5}$$

(q)

$$\frac{1}{x}\sqrt{a^2 - x^2}$$

(r)

$$\frac{1}{2x^2\sqrt{3x + x^2}}$$

(s)

$$\frac{81x^2}{2\sqrt{5 + 3x}}$$

(t)

$$7x^2\sqrt{5 + 2x}$$

(u)

$$\left(7 - \frac{6}{x^2}\right)\sqrt[7]{\left(3 + \frac{6}{x^2}\right)^6}$$

(v)

$$\left(\frac{2}{3x^3}+\frac{28}{27}x\right)\sqrt{7x^2-9}$$

(w)

$$\frac{18}{x^4\sqrt{7x^2-9}}$$

2. Feladat. *Az összetett függvény differenciálási szabályát alkalmazva, határozzuk meg a következő függvények differenciálhányados függvényeit.*

(a)

$$\frac{6(5-x^2)}{(5-3x+x^2)^2}$$

(b)

$$\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}$$

Megoldás. *Legyen*

$$f(x)=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}} \qquad \text{és} \qquad g(x)=a^2-x^2$$

Ekkor

$$f(g(x))=\sqrt{a^2-x^2}$$

és

$$f'(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \qquad \text{és} \qquad g'(x)=-2x$$

Ezért

$$(f\circ g)'(x)=\frac{1}{2}(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2x),$$

amiből az adódik, hogy

$$\left[\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right]'=-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}-\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

□

(c)

$$\frac{x}{x+\sqrt{1+x^2}}$$

Megoldás. *Legyen*

$$f(x)=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}} \qquad \text{és} \qquad g(x)=1+x^2$$

Ekkor

$$f(g(x))=\sqrt{1+x^2}$$

és

$$f'(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \qquad \text{és} \qquad g'(x)=2x$$

Ezért

$$(f\circ g)'(x)=\frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x,$$

amiből az adódik, hogy

$$\left[\frac{x}{x+\sqrt{1+x^2}}\right]'=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}-\frac{x\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+1\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)^2}$$

□

(d)

$$\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}-x}$$

Megoldás. *A (c) rész felhasználásával*

$$\left[\sqrt{1+x^2}\right]' = \frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x,$$

ezért

$$\left[\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}-x}\right]' = \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+1}{\sqrt{x^2+1}-x} - \frac{\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-1\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)^2}.$$

□

(e)

$$\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$$

Megoldás. *Legyen*

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \qquad \textit{és} \qquad g_1(x) = 1+x \qquad \textit{és} \qquad g_2(x) = 1-x$$

Ekkor

$$f(g_1(x)) = \sqrt{1+x} \qquad \textit{és} \qquad f(g_2)(x) = \sqrt{1-x}$$

és

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \qquad \textit{és} \qquad g_1'(x) = 1 \qquad \textit{és} \qquad g_2'(x) = -1$$

Ezért

$$(f\circ g_1)'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}\cdot 1 \qquad \textit{és} \qquad (f\circ g_2)'(x) = \frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-1),$$

ezért

$$\left[\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}\right]' = \frac{\left(\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}\cdot 1+\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-1)\right)\cdot\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)}{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)^2} - \frac{\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}\cdot 1-\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-1)\right)}{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)^2}$$

□

(f)

$$\frac{\sqrt{(4x^3-5)^3}}{\sqrt[3]{(5x^2+1)^2}}$$

Megoldás. *Legyen*

$$f(x) = \sqrt{x^3} = x^{\frac{3}{2}} \qquad \textit{és} \qquad g(x) = 4x^3-5$$

Ekkor

$$f(g(x)) = \sqrt{(4x^3-5)^3}$$

és

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} \qquad \textit{és} \qquad g'(x) = 12x^2$$

Ezért

$$(f \circ g)'(x) = \frac{3}{2}\left(4x^3 - 5\right)^{\frac{1}{2}} \cdot 12x^2.$$

Legyen

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}} \qquad \text{és} \qquad g(x) = 5x^2 + 1$$

Ekkor

$$f(g(x)) = \sqrt[3]{(5x^2+1)^2}$$

és

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} \qquad \text{és} \qquad g'(x) = 10x$$

Ezért

$$(f \circ g)'(x) = \frac{2}{3}(5x^2+1)^{-\frac{1}{3}} \cdot 10x.$$

Mindezekből az adódik, hogy

$$\left[\frac{\sqrt{(4x^3-5)^3}}{\sqrt[3]{(5x^2+1)^2}}\right]'$$

$$= \frac{\left(\frac{3}{2}\left(4x^3-5\right)^{\frac{1}{2}} \cdot 12x^2\right) \cdot \sqrt[3]{(5x^2+1)^2} - \sqrt{(4x^3-5)^3} \cdot \left(\frac{2}{3}(5x^2+1)^{-\frac{1}{3}} \cdot 10x\right)}{\left(\sqrt[3]{(5x^2+1)^2}\right)^2}.$$

□

(g)

$$\frac{10x}{9\sqrt[3]{\left(2-\sqrt{x}\right)^4}}$$

(h)

$$-\frac{27}{x^4\sqrt{(3x+5x^6)^5}}$$

(i)

$$\sqrt{\frac{6}{x^2} + 2x}$$

Megoldás. *Legyen*

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \qquad \text{és} \qquad g(x) = \frac{6}{x^2} + 2x$$

Ekkor

$$f(g(x)) = \sqrt{\frac{6}{x^2} + 2x}$$

és

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \qquad \text{és} \qquad g'(x) = 6 \cdot (-2)x^{-3} + 2 = -12x^{-3} + 2$$

Ezért

$$(f \circ g)'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{6}{x^2} + 2x\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(-12x^{-3} + 2\right).$$

□

(j)

$$\frac{2x}{\sqrt{6x^2 + 2x}}$$

(k)

$$\sqrt[3]{(3x^2+2x)^2}$$

(l)

$$\frac{\sqrt[3]{6x^5+4x^{-4}}}{\sqrt[5]{4x^7+3x^3}}$$

(m)

$$(1-x)(1-x^2)^2(1-x^3)^3$$

(n)

$$(5+2x)^{10}(3-4x)^{20}$$

Megoldás. *Legyen*

$$f(x)=x^{10} \qquad \textit{és} \qquad g(x)=5+2x$$

Ekkor

$$f(g(x))=(5+2x)^{10}$$

és

$$f'(x)=10x^9 \qquad \textit{és} \qquad g'(x)=2$$

Ezért

$$(f\circ g)'(x)=10(5+2x)^9\cdot 2.$$

Legyen

$$f(x)=x^{20} \qquad \textit{és} \qquad g(x)=3-4x$$

Ekkor

$$f(g(x))=(3-4x)^{20}$$

és

$$f'(x)=20x^{19} \qquad \textit{és} \qquad g'(x)=-4$$

Ezért

$$(f\circ g)'(x)=20(3-4x)^{19}\cdot(-4).$$

Mindezekből azt kapjuk, hogy

$$\left[(5+2x)^{10}(3-4x)^{20}\right]'=\left(10(5+2x)^9\cdot 2\right)\cdot(3-4x)^{20}+(5+2x)^{10}\cdot\left(20(3-4x)^{19}\cdot(-4)\right).$$

□

(o)

$$\frac{x^\alpha(1-x)^\beta}{1+x}$$

Megoldás. *Legyen*

$$f(x)=x^\beta \qquad \textit{és} \qquad g(x)=1-x$$

Ekkor

$$f(g(x))=(1-x)^\beta$$

és

$$f'(x)=\beta x^{\beta-1} \qquad \textit{és} \qquad g'(x)=-1$$

Ezért

$$(f\circ g)'(x)=\beta(1-x)^\beta\cdot(-1).$$

Ebből az adódik, hogy

$$\left[\frac{x^\alpha(1-x)^\beta}{1+x}\right]'=\frac{\left(\alpha x^{\alpha-1}\cdot(1-x)^\beta+x^\alpha\beta(1-x)^{\beta-1}\cdot(-1)\right)\cdot(1+x)-\left(x^\alpha(1-x)^\beta\right)\cdot 1}{(1+x)^2}$$

□

(p)

$$\frac{(1-x)^{\alpha}}{(1+x)^{\beta}}$$

Megoldás. *Legyen*

$$f(x) = x^{\alpha} \qquad \text{és} \qquad g(x) = 1 - x$$

Ekkor

$$f(g(x)) = (1-x)^{\alpha}$$

és

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} \qquad \text{és} \qquad g'(x) = -1$$

Ezért

$$(f \circ g)'(x) = \alpha (1-x)^{\alpha-1} \cdot (-1).$$

Legyen

$$f(x) = x^{\beta} \qquad \text{és} \qquad g(x) = 1 + x$$

Ekkor

$$f(g(x)) = (1+x)^{\beta}$$

és

$$f'(x) = \beta x^{\beta-1} \qquad \text{és} \qquad g'(x) = 1$$

Ezért

$$(f \circ g)'(x) = \beta(1+x)^{\beta-1} \cdot 1.$$

Mindezekből azonban azt kapjuk, hogy

$$\left[\frac{(1-x)^{\alpha}}{(1+x)^{\beta}}\right]' = \frac{\left(\alpha (1-x)^{\alpha-1} \cdot (-1)\right) \cdot (1+x)^{\beta} - (1-x)^{\alpha} \cdot \left(\beta(1+x)^{\beta-1} \cdot 1\right)}{\left((1+x)^{\beta}\right)^2}.$$

□

(q)

$$\sqrt[\alpha+\beta]{(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}}.$$

Megoldás. *A feladatban szereplő függvény differenciálhányados-függvényének meghatározásához először használjuk a hatványozás azonosságait.*

$$\sqrt[\alpha+\beta]{(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}} = \sqrt[\alpha+\beta]{(1-x)^{\alpha}}\ \sqrt[\alpha+\beta]{(1+x)^{\beta}} = (1-x)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \cdot (1+x)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}.$$

Legyen

$$f(x) = x^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \qquad \text{és} \qquad g(x) = 1 - x$$

Ekkor

$$f(g(x)) = (1-x)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}$$

és

$$f'(x) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} x^{-\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \qquad \text{és} \qquad g'(x) = -1$$

Ezért

$$(f \circ g)'(x) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}(1-x)^{-\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \cdot (-1).$$

Legyen

$$f(x) = x^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \qquad \text{és} \qquad g(x) = (1 + x)$$

Ekkor

$$f(g(x)) = (1+x)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}$$

és

$$f'(x) = \frac{\beta}{\alpha+\beta} x^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \qquad \text{és} \qquad g'(x) = 1$$

Ezért

$$(f \circ g)'(x) = \frac{\beta}{\alpha+\beta}(1+x)^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \cdot 1.$$

Mindezekből azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\left[\sqrt[\alpha+\beta]{(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}}\right]' &= \left[(1-x)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \cdot (1+x)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}\right]' \\ &= \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}(1-x)^{-\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \cdot (-1)\right) \cdot (1+x)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} + (1-x)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \cdot \left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}(1+x)^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \cdot 1\right).\end{aligned}$$

□

3. Feladat. *Az összetett függvény differenciálási szabályát alkalmazva, határozzuk meg a következő függvények differenciálhányados függvényeit.*

Útmutatás. *A 3. Feladat példáiban érdemes használni a differenciálhányados-függvények meghatározása előtt a logaritmus függvény addíciós tételeit. Azt fogjuk felhasználni, hogy tetszőleges $x, y \in]0, +\infty[$ és $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén érvényesek az alábbi összefüggések*

$$\begin{aligned}\ln(x \cdot y) &= \ln(x) + \ln(y) \\ \ln\left(\frac{x}{y}\right) &= \ln(x) - \ln(y) \\ \ln(x^{\alpha}) &= \alpha \ln(x).\end{aligned}$$

*Másfelől ezekben az esetekben hasznos, ha az összetett függvény differenciálási szabályát az alábbi speciális esetre alkalmazzuk (ehhez az említett tételben a külső f függvényt az $\ln$ függvénynek kell választani). Legyen $D \subset \mathbb{R}$ egy nemüres, nyílt halmaz és $g \colon D \to \mathbb{R}$ egy olyan **pozitív** függvény, mely differenciálható az $x_0 \in D$ pontban. Ekkor az $\ln \circ g$ függvény is differenciálható az x_0 pontban és*

$$(\ln \circ g)'(x_0) = \frac{g'(x_0)}{g(x_0)}.$$

Ennek az állításnak a szerepe most még nem olyan jelentős, de az integrálszámítás témakörében majd gyakran fogjuk használni a „megfordítását”. □

(a)

$$\ln\left(\frac{x}{1-x^2}\right)$$

Megoldás. *Először használjuk a fent említett addíciós tételeket.*

$$\ln\left(\frac{x}{1-x^2}\right) = \ln(x) - \ln(1-x^2).$$

Ezek után a fenti összeg második tagjára alkalmazzuk a fenti állítást a

$$g(x) = 1 - x^2$$

választással. Ekkor

$$g'(x) = -2x,$$

amiből az adódik, hogy

$$\left[\ln(1-x^2)\right]' = \frac{-2x}{1-x^2}.$$

Ezért

$$\left[\ln\left(\frac{x}{1-x^2}\right)\right]' = \left[\ln(x) - \ln(1-x^2)\right]' = \frac{1}{x} - \frac{-2x}{1-x^2}.$$

□

(b)

$$\ln\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

Először használjuk a fent említett addíciós tételeket.

$$\ln\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \ln(x) - \ln\left(\sqrt{1+x^2}\right) = \ln(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2).$$

Ezek után a fenti összeg második tagjára alkalmazzuk a fenti állítást a

$$g(x) = 1 + x^2$$

választással. Ekkor

$$g'(x) = 2x,$$

amiből az adódik, hogy

$$\left[\ln(1+x^2)\right]' = \frac{2x}{1+x^2}.$$

Ezért

$$\left[\ln\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\right]' = \left[\ln(x) - \ln\left(\sqrt{1+x^2}\right)\right]' = \left[\ln(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]' = \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{1+x^2}.$$

(c)

$$\ln\left(\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1+x}}\right)$$

Megoldás. *Figyeljük meg, hogy a* ln *függvény argumentumában éppen a 2. Feladat (e) részében található függvény szerepel. Így, ha az Útmutatásban szereplő állítást használjuk a*

$$g(x) = \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1+x}}$$

választással, akkor

$$g'(x) = \frac{\left(\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}\cdot 1 + \frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-1)\right)\cdot\left(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}\right)}{\left(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}\right)^2}$$
$$- \frac{\left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}\cdot 1 - \frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-1)\right)}{\left(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}\right)^2}.$$

A feladatban szereplő függvény differenciálhányadosfüggvénye így a $\dfrac{g'(x)}{g(x)}$ *függvény.* □

(d)

$$\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$$

(e)

$$\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$$

Megoldás. *Legyen*

$$g(x) = x + \sqrt{1+x^2},$$

ekkor

$$g'(x) = 1 + \frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x,$$

így

$$\left[\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\right]' = [\ln(g(x))]' = \frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{1 + \frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x}{x + \sqrt{1+x^2}}.$$

□

(f)

$$\ln\left(\frac{x^2-2}{\sqrt{(6-2x^3)^2}}\right)$$

(g)

$$\frac{x^2(x^3-4)}{\sqrt[3]{(\ln(x)^2)}}$$

4. Feladat. *Az összetett függvény differenciálási szabályát alkalmazva, határozzuk meg a következő függvények differenciálhányados függvényeit.*

(a)

$$\operatorname{tg}(x)-\frac{\operatorname{tg}(x^3)}{3}$$

Megoldás. *Legyen*

$$f(x)=\frac{\operatorname{tg}(x)}{3} \qquad \textit{és} \qquad g(x)=x^3$$

Ekkor

$$f(g(x))=\frac{\operatorname{tg}(x^3)}{3}$$

és

$$f'(x)=\frac{1}{3\cos^2(x)} \qquad \textit{és} \qquad g'(x)=3x^2$$

Ezért

$$(f\circ g)'(x)=\frac{1}{3\cos^2(x^3)}\cdot 3x^2,$$

amiből azt kapjuk, hogy

$$\left[\operatorname{tg}(x)-\frac{\operatorname{tg}(x^3)}{3}\right]'=\frac{1}{\cos^2(x)}-\frac{1}{3\cos^2(x^3)}\cdot 3x^2.$$

□

(b)

$$\left(\cos(x^3)+\frac{2}{3}\right)\sin\left(x^3\right)$$

(c)

$$\frac{\operatorname{tg}^4(x)}{4}-\frac{\operatorname{tg}^2(x)}{2}-\ln\left(\cos(x)\right)$$

Megoldás. *Legyen*

$$f(x)=\frac{x^4}{4} \qquad \textit{és} \qquad g(x)=\operatorname{tg}(x)$$

Ekkor

$$f(g(x))=\frac{\operatorname{tg}^4(x)}{4}$$

és

$$f'(x)=x^3 \qquad \textit{és} \qquad g'(x)=\frac{1}{\cos^2}(x)$$

Ezért

$$(f\circ g)'(x)=(\operatorname{tg}(x))^3\cdot\frac{1}{\cos^2(x)}.$$

Legyen

$$f(x)=\frac{x^2}{2} \qquad \textit{és} \qquad g(x)=\operatorname{tg}(x)$$

Ekkor

$$f(g(x)) = \frac{\mathrm{tg}^2(x)}{2}$$

és

$$f'(x) = x \qquad \text{\textit{és}} \qquad g'(x) = \frac{1}{\cos^2}(x)$$

Ezért

$$(f \circ g)'(x) = \mathrm{tg}(x) \cdot \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

A fenti összeg harmadik tagjának differenciálhányados-függvényéhez használjuk a 2. Feladat Útmutatásában található állítást a

$$g(x) = \cos(x)$$

választással. Ekkor

$$g'(x) = -\sin(x)$$

és

$$[\ln(\cos(x))]' = [\ln(g(x))]' = \frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)}.$$

Mindent egybevetve,

$$\left[\frac{\mathrm{tg}^4(x)}{4} - \frac{\mathrm{tg}^2(x)}{2} - \ln(\cos(x))\right]' = (\mathrm{tg}(x))^3 \cdot \frac{1}{\cos^2(x)} - 2\mathrm{tg}(x) \cdot \frac{1}{\cos^2(x)} - \frac{-\sin(x)}{\cos(x)}.$$

□

(d)

$$\frac{1}{\sin^2(x)\cos^6(x)}$$

(e)

$$\frac{(3\cos(4x) - 7)\,\mathrm{ctg}(x)}{\sin^3(2x)}$$

(f)

$$\frac{\sin^2(x)}{a + b\cos^2(x)}$$

Megoldás. *Legyen*

$$f(x) = x^2 \qquad \text{\textit{és}} \qquad g(x) = \sin(x)$$

Ekkor

$$f(g(x)) = \sin^2(x)$$

és

$$f'(x) = 2x \qquad \text{\textit{és}} \qquad g'(x) = \cos(x)$$

Ezért

$$(f \circ g)'(x) = 2\sin(x) \cdot \cos(x).$$

Legyen

$$f(x) = x^2 \qquad \text{\textit{és}} \qquad g(x) = \cos(x)$$

Ekkor

$$f(g(x)) = \cos^2(x)$$

és

$$f'(x) = 2x \qquad \text{\textit{és}} \qquad g'(x) = -\sin(x)$$

Ezért

$$(f \circ g)'(x) = 2\cos(x) \cdot (-\sin(x)).$$

Mindent egybevetve,

$$\left[\frac{\sin^2(x)}{a + b\cos^2(x)}\right]' = \frac{2\sin(x)\cos(x) \cdot \left(a + b\cos^2(x)\right) - \sin^2(x) \cdot (b \cdot 2\cos(x) \cdot (-\sin(x)))}{\left(a + b\cos^2(x)\right)^2}.$$

$\square$

5. Feladat. *Határozzuk meg az alábbi függvények differenciálhányados-függvénye.*

(a)

$$\sin(\sqrt{5x})$$

Megoldás. *Legyen*

$$f(x) = \sin(x) \qquad \text{és} \qquad g(x) = \sqrt{5x} = \sqrt{5} \cdot \sqrt{x}$$

Ekkor

$$f(g(x)) = \sin\left(\sqrt{5x}\right)$$

és

$$f'(x) = \cos(x) \qquad \text{és} \qquad g'(x) = \sqrt{5}\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

Ezért

$$(f \circ g)'(x) = \cos(\sqrt{5x}) \cdot \sqrt{5}\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$\square$

(b)

$$\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

Megoldás. *Legyen*

$$f(x) = \cos(x) \qquad \text{és} \qquad g(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$$

Ekkor

$$f(g(x)) = \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

és

$$f'(x) = -\sin(x) \qquad \text{és} \qquad g'(x) = (-2)x^{-3}$$

Ezért

$$(f \circ g)'(x) = -\sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \cdot (-2)x^{-3}$$

$\square$

(c)

$$\mathrm{tg}\,(\sin(5x))$$

(d)

$$\sin\left(6x^2 - 3x + 2\right)$$

Megoldás. *Legyen*

$$f(x) = \sin(x) \qquad \text{és} \qquad g(x) = 6x^2 - 3x + 2$$

Ekkor

$$f(g(x)) = \sin\left(6x^2 - 3x + 2\right)$$

és

$$f'(x) = \cos(x) \qquad \text{és} \qquad g'(x) = 12x - 3$$

Ezért

$$(f \circ g)'(x) = \cos(6x^2 - 3x + 2) \cdot (12x - 3)$$

□

(e)

$$\cos\left(\sqrt[4]{2x}\right)$$

(f)

$$\sinh(5x)$$

(g)

$$4\sinh(3x) + 5\cosh(x^2)$$

Megoldás. *Legyen*

$$f(x) = 4\sinh(x) \qquad \text{és} \qquad g(x) = 3x$$

Ekkor

$$f(g(x)) = 4\sinh(3x)$$

és

$$f'(x) = 4\cosh(x) \qquad \text{és} \qquad g'(x) = 3$$

Ezért

$$(f \circ g)'(x) = 4\cosh(3x) \cdot 3.$$

Legyen

$$f(x) = 5\cosh(x) \qquad \text{és} \qquad g(x) = x^2$$

Ekkor

$$f(g(x)) = 5\cosh(x^2)$$

és

$$f'(x) = 5\sinh(x) \qquad \text{és} \qquad g'(x) = 2x$$

Ezért

$$(f \circ g)'(x) = 5\sinh(x^2) \cdot 2x.$$

Mindent egybevetve

$$\left[4\sinh(3x) + 5\cosh(x^2)\right]' = 4\cosh(3x) \cdot 3 + 5\sinh(x^2) \cdot 2x.$$

□

(h)

$$\cosh^2(6x)$$

(i)

$$\tanh^2(5x^2)$$

Útmutatás. *Abban az esetben, amikor a szóban forgó függvény nem kettő, hanem több függvény kompozíciója, akkor alapvetően kétféle módon határozhatjuk meg a szóban forgó függvény deriváltját. Csinálhatjuk azt, hogy minden egyes lépésben csak két függvény kompozíciójára koncentráljuk és egymás után többször használjuk az összetett függvény differenciálási szabályát, vagy megnézzük általánosan, hogy hogyan kell több függvény kompozíciójaként előálló függvényeket differenciálni. Ha például három függvényről van szó, akkor*

$$(f \circ g \circ h)'(x_0) = f'(g(h(x_0))) \cdot g'(h(x_0)) \cdot h'(x_0).$$

□

Megoldás. **(1. megoldási lehetőség)** *Legyen*

$$f(x) = \tanh(x) \qquad \text{és} \qquad g(x) = 5x^2$$

Ekkor

$$f(g(x)) = \tanh(5x^2)$$

és

$$f'(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)} \qquad \text{és} \qquad g'(x) = 10x$$

Ezért

$$(f \circ g)'(x) = \frac{1}{\cosh^2(5x^2)} \cdot 10x.$$

Végül legyen

$$f(x) = x^2 \qquad \text{és} \qquad g(x) = \tanh(5x^2)$$

Ekkor a fenti számolások felhasználásával

$$f(g(x)) = \tanh^2(5x^2)$$

és

$$f'(x) = 2x \qquad \text{és} \qquad g'(x) = \frac{1}{\cosh^2(5x^2)} \cdot 10x$$

Ezért

$$(f \circ g)'(x) = 2 \cdot \left(\tanh^2(5x^2)\right) \cdot \left(\frac{1}{\cosh^2(5x^2)} \cdot 10x\right).$$

□

Megoldás. **(2. megoldási lehetőség)** *Ha a fenti Útmutatást használjuk az*

$$f(x) = x^2 \qquad g(x) = \tanh(x) \qquad \text{és} \qquad h(x) = 5x^2$$

választással, akkor

$$f'(x) = 2x \qquad g(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)} \qquad \text{és} \qquad h(x) = 10x,$$

így

$$\left[\tanh^2(5x^2)\right]' = 2\tanh(5x^2) \cdot \frac{1}{\cosh^2(5x^2)} \cdot 10x.$$

□

(j)

$$\sinh(2x^3 - 3x - 4)$$

Megoldás. *Legyen*

$$f(x) = \sinh(x) \qquad \textit{és} \qquad g(x) = 2x^3 - 3x - 4$$

Ekkor

$$f(g(x)) = \sinh(2x^3 - 3x - 4)$$

és

$$f'(x) = \cosh(x) \qquad \textit{és} \qquad g'(x) = 6x^2 - 3$$

Ezért

$$(f \circ g)'(x) = \cosh(2x^3 - 3x - 4) \cdot (6x^2 - 3)$$

□

(k)

$$\sinh(\cos(x))$$

(l)

$$\sin^n(x)\cos(nx)$$

Megoldás. *Legyen*

$$f(x) = x^n \qquad \textit{és} \qquad g(x) = \sin(x)$$

Ekkor

$$f(g(x)) = \sin^n(x)$$

és

$$f'(x) = nx^{n-1} \qquad \textit{és} \qquad g'(x) = \cos(x)$$

Ezért

$$(f \circ g)'(x) = n\sin^{n-1}(x) \cdot \cos(x)$$

Legyen

$$f(x) = \cos(x) \qquad \textit{és} \qquad g(x) = nx$$

Ekkor

$$f(g(x)) = \cos(nx)$$

és

$$f'(x) = -\sin(x) \qquad \textit{és} \qquad g'(x) = n$$

Ezért

$$(f \circ g)'(x) = -\sin(nx) \cdot n$$

Mindent egybevetve,

$$[\sin^n(x)\cos(nx)]' = \left(n\sin^{n-1}(x) \cdot \cos(x)\right) \cdot \cos(nx) + \sin^n(x) \cdot (-\sin(nx) \cdot n)\,.$$

□

(m)

$$\sin(\sin(\sin(x)))$$

(n)

$$\frac{\sin^2(x)}{\sin(x^2)}$$

(o)

$$\frac{\cos(x)}{2\sin^2(x)}$$

(p)

$$\frac{1}{\cos^n(x)}$$

(q)

$$\frac{\sin(x) - x\cos(x)}{\cos(x) + x\sin(x)}$$

(r)

$$\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right) - \mathrm{ctg}\left(\frac{x}{2}\right).$$

6. Feladat. *Számítsuk ki a következő függvények differenciálhányados-függvényeit.*

Útmutatás. *Hasonlóan, mint a 3. Feladat után található Útmutatás esetében, abban az esetben, amikor a külső függvény az exponenciális függvény érdemes használni az összetett függvény differenciálási szabályát az* $f = \exp$ *választással. Ugyanúgy, mint ahogy korábban volt róla szó, ennek nem most, hanem majd az integrálszámítás során fogjuk hasznát venni. Az állítás pedig, amit alkalmazni fogunk, a következő. Legyen* $D \subset \mathbb{R}$ *egy nemüres, nyílt halmaz,* $x_0 \in D$ *és* $g\colon D \to \mathbb{R}$ *egy olyan függvény, amely differenciálható az* x_0 *pontban. Ekkor az* $\exp \circ g$ *függvény is differenciálható az* x_0 *pontban és*

$$(\exp \circ g)'(x_0) = \exp(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

□

(a)

$$5e^x - 3e^{2x}$$

Megoldás. *Használjuk a fenti Útmutatásban lévő állítást, ekkor*

$$\left[5e^x - 3e^{2x}\right]' = 5e^x - 3e^{2x} \cdot 2.$$

□

(b)

$$5e^{-x} + 3e^{5x} + 2e^{x^2}$$

Megoldás.

$$\left[5e^{-x} + 3e^{5x} + 2e^{x^2}\right]' = 5e^{-x} \cdot (-1) + 3e^{5x} \cdot (5) + 2e^{x^2} \cdot (2x)$$

□

(c)

$$e^{x^2} + e^{\cos(x)} - e^{2x+3}$$

Megoldás.

$$\left[e^{x^2} + e^{\cos(x)} - e^{2x+3}\right]' = e^{x^2} \cdot 2x + e^{\cos(x)} \cdot (-\sin(x)) - e^{2x+3} \cdot 2.$$

□

(d)

$$a^x + \frac{1}{2}a^{-x} + a^{2x}$$

(e)

$$e^{e^x}$$

(f)

$$\frac{e^{2x}+e^{-3x}}{e^{5x}-e^{7x}}.$$

$$\left[\frac{e^{2x}+e^{-3x}}{e^{5x}-e^{7x}}\right]' = \frac{\left(e^{2x}\cdot 2+e^{-3x}\cdot(-3)\right)\cdot\left(e^{5x}-e^{7x}\right)-\left(e^{2x}+e^{-3x}\right)\cdot\left(e^{5x}\cdot 5-e^{7x}\cdot 7\right)}{(e^{5x}-e^{7x})^2}.$$

(g)

$$5\ln(x)+3\ln(2x)$$

(h)

$$\ln(3x+4)$$

Megoldás.

$$[\ln(3x+4)]' = \frac{3}{3x+4}.$$

□

(i)

$$\ln(3x^2+2x-6)$$

Megoldás.

$$\left[\ln(3x^2+2x-6)\right]' = \frac{6x+2}{3x^2+2x-6}.$$

□

(j)

$$\ln(\sin^2(x))$$

Megoldás. *Először alkalmazzuk a logaritmus függvény addíciós tételét.*

$$\left[\ln(\sin^2(x))\right]' = [2\ln(\sin(x))]' = 2\frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

□

(k)

$$\ln\left(\frac{5x}{4x-3}\right)$$

Megoldás. *Először alkalmazzuk a logaritmus függvény addíciós tételét.*

$$\left[\ln\left(\frac{5x}{4x-3}\right)\right]' = [\ln(5x)-\ln(4x-3)]' = \frac{5}{5x}-\frac{4}{4x-3}.$$

□

(l)

$$\ln\left(\frac{\sqrt{2x+1}}{\sin(x)}\right)$$

Megoldás. *Először alkalmazzuk a logaritmus függvény addíciós tételét.*

$$\left[\ln\left(\frac{\sqrt{2x+1}}{\sin(x)}\right)\right]' = \left[\frac{1}{2}\ln(2x+1)-\ln(\sin(x))\right]' = \frac{1}{2}\frac{2}{2x+1}-\frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

□

(m)
$$\ln\Big(\cos(x)\sin^2(2x)\Big)$$

(n)
$$e^{2x}\ln(2x).$$

(o)
$$e^{\alpha x}\frac{\alpha\sin(\beta x)-\beta\cos(\beta x)}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$$

(p)
$$e^x+e^{e^x}+e^{e^{e^x}}$$

(q)
$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^x\left(\frac{\beta}{x}\right)^\alpha\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta$$

(r)
$$\ln\left(\ln(\ln(x))\right)$$

(s)
$$\ln\Big(\ln^2\Big(\ln^3(x)\Big)\Big).$$

7. Feladat. *Alkalmazzuk a L'Hospital-szabályt a következő függvényhatárértékek kiszámítására.*

Útmutatás. *Az ebben a feladatban található függvényhatárértékek mindannyian* patologikusak *abban az értelemben, hogy ha tagonként szeretnénk kiszámítani a számláló és a nevező határértékét, akkor azt kapnánk minden esetben, hogy ez a határérték vagy nulla vagy* $\pm\infty$*. Abban az esetben, amikor egy* ***hányados****nak szeretnénk kiszámítani a határértékét és tagonként számolva a számláló és a nevező határértékét, azt látjuk, hogy a hányados határértéke* $\frac{0}{0}$*, vagy* $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ *típusú, a* ***L'Hostipal-szabály*** *egy nagyon effektíven alkalmazható állítás. Az alábbiakban ezt fogjuk használni. Fontos tudni, hogy a L'Hostipal-szabály azon esetek mindegyikében is alkalmazható, amelyeket a Valós függvények határértéke című témakörben tanultunk (csak akkor még nem tudunk differenciálni, így nem tudtuk használni a L'Hospital-szabályt sem, de mostantól kezdve nyugodtan lehet).* □

(a) $\lim_{x\to 2}\dfrac{\ln\left(\frac{x}{2}\right)}{x-2}$

Megoldás. *Ha külön számoljuk a számláló és a nevező határértékét, akkor azt kapjuk, hogy*

$$\lim_{x\to 2}\ln\left(\frac{x}{2}\right)=\ln\left(\frac{2}{2}\right)=\ln(1)=0 \qquad \textit{és} \qquad \lim_{x\to 2}(x-2)=2-2=0,$$

így nem tudunk dönteni. Próbáljuk meg használni a L'Hospital-szabályt. Ekkor

$$\lim_{x\to 2}\frac{\left[\ln\left(\frac{x}{2}\right)\right]'}{[x-2]'}=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\frac{1}{2}.$$

Mivel a $\lim_{x\to 2}\dfrac{\left[\ln\left(\frac{x}{2}\right)\right]'}{[x-2]'}$ *határérték létezik és véges, azért a feladatban szereplő* $\lim_{x\to 2}\dfrac{\ln\left(\frac{x}{2}\right)}{x-2}$ *határérték is létezik és véges és a két határérték megegyezik, amiből azt kapjuk, hogy*

$$\lim_{x\to 2}\frac{\ln\left(\frac{x}{2}\right)}{x-2}=\frac{1}{2}.$$

□

(b) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\ln(x^2)}{x-1}$

Megoldás. *Ha külön számoljuk a számláló és a nevező határértékét, akkor azt kapjuk, hogy*

$$\lim_{x\to 1} \ln\left(x^2\right) = \ln\left(1^2\right) = \ln(1) = 0 \qquad \textit{és} \qquad \lim_{x\to 1}(x-1) = 1-1 = 0,$$

így nem tudunk dönteni. Próbáljuk meg használni a L'Hospital-szabályt. Ekkor

$$\lim_{x\to 1} \frac{\left[\ln\left(x^2\right)\right]'}{[x-1]'} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{2}{x}}{1} = \frac{2}{1} = 2.$$

Mivel a $\lim_{x\to 1} \dfrac{\left[\ln\left(x^2\right)\right]'}{[x-1]'}$ *határérték létezik és véges, azért a feladatban szereplő* $\lim_{x\to 1} \dfrac{\ln(x^2)}{x-1}$ *határérték is létezik és véges és a két határérték megegyezik, amiből azt kapjuk, hogy*

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x^2)}{x-1} = 2.$$

□

(c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x}$

Megoldás. *Ha külön számoljuk a számláló és a nevező határértékét, akkor azt kapjuk, hogy*

$$\lim_{x\to 0} \sin(x) = \sin(0) = 0 \qquad \textit{és} \qquad \lim_{x\to 0} x = 0,$$

így nem tudunk dönteni. Próbáljuk meg használni a L'Hospital-szabályt. Ekkor

$$\lim_{x\to 0} \frac{[\sin(x)]'}{[x]'} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = \frac{\cos(0)}{1} = 1.$$

Mivel a $\lim_{x\to 0} \dfrac{[\sin(x)]'}{[x]'}$ *határérték létezik és véges, azért a feladatban szereplő* $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x}$ *határérték is létezik és véges és a két határérték megegyezik, amiből azt kapjuk, hogy*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

□

(d) $\lim_{x\to 0} \dfrac{2x - \sin(x)}{x^2}$

(e) $\lim_{x\to 0} \dfrac{5^x - 7^x}{x}$

Megoldás. *Ha külön számoljuk a számláló és a nevező határértékét, akkor azt kapjuk, hogy*

$$\lim_{x\to 0}(5^x - 7^x) = 5^0 - 7^0 = 1 - 1 = 0 \qquad \textit{és} \qquad \lim_{x\to 0} x = 0,$$

így nem tudunk dönteni. Próbáljuk meg használni a L'Hospital-szabályt. Ekkor

$$\lim_{x\to 0} \frac{[5^x - 7^x]'}{[x]'} = \lim_{x\to 0} \frac{5^x \ln(5) - 7^x \ln(7)}{1} = \frac{\ln(5) - \ln(7)}{1} = \ln(5) - \ln(7) = \ln\left(\frac{5}{7}\right).$$

Mivel a $\lim_{x\to 0} \dfrac{[5^x - 7^x]'}{[x]'}$ *határérték létezik és véges, azért a feladatban szereplő* $\lim_{x\to 0} \dfrac{5^x - 7^x}{x}$ *határérték is létezik és véges és a két határérték megegyezik, amiből azt kapjuk, hogy*

$$\lim_{x\to 0} \frac{5^x - 7^x}{x} = \ln\left(\frac{5}{7}\right).$$

□

(f) $\lim_{x\to 0} \dfrac{2^{3x} - 3^{4x}}{x^2}$

(g) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{tg}(7x)}{x}$

(h) $\lim_{x\to \pi} \dfrac{\sin(4x)}{\mathrm{tg}(5x)}$

(i) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{x^2}{2^x}$

Útmutatás. *A L'Hospital-szabályt egymás után többször is lehet alkalmazni.* □

Megoldás. *Ha külön számoljuk a számláló és a nevező határértékét, akkor azt kapjuk, hogy*

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \qquad \textit{és} \qquad \lim_{x\to+\infty} 2^x = +\infty,$$

így nem tudunk dönteni. Próbáljuk meg használni a L'Hospital-szabályt. Ekkor

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{[x^2]'}{[2^x]'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{2^x \ln(2)}.$$

Ha külön számoljuk a számláló és a nevező határértékét, akkor azt kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to+\infty} 2x = +\infty \qquad \textit{és} \qquad \lim_{x\to+\infty} 2^x \ln(2) = -\infty,$$

így nem tudunk dönteni. Próbáljuk meg még egyszer alkalmazni a L'Hospital-szabályt. Ebben az esetben

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{[2x]'}{[2^x \ln(2)]'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{2^x \ln(2) \ln(2)} = 0.$$

Mindez azt jelenti, hogy mivel létezik és véges a $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{[2x]'}{[2^x \ln(2)]'}$ *határérték, ezért létezik és véges a* $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{2^x \ln(2)}$ *határérték is. Ennek a határértéknek a létezéséből és végességéből következik a* $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{2^x}$ *határérték létezése és végessége. Mindent egybevetve mindhárom határérték létezik és mind-egyik nullával egyenlő.*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{2^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{2^x \ln(2)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{2^x \ln(2) \ln(2)} = 0.$$

□

(j) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{5x}{\ln(4x)}$

(k) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{2x^3 - 4x + 5}{7x^3 + 5x - 3}$

Megoldás. *Ha külön számoljuk a számláló és a nevező határértékét, akkor azt kapjuk, hogy*

$$\lim_{x\to+\infty} (2x^3 - 4x + 5) = +\infty \qquad \textit{és} \qquad \lim_{x\to+\infty} (7x^3 + 5x - 3) = +\infty,$$

így nem tudunk dönteni. Próbáljuk meg használni a L'Hospital-szabályt. Ekkor

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{[2x^3 - 4x + 5]'}{[7x^3 + 5x - 3]'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{6x^2 - 4}{21x^2 + 5}.$$

Ez a határérték még mindig $\frac{+\infty}{+\infty}$ *típusú, ezért alkalmazzuk még egyszer a L'Hospital-szabályt, ekkor*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left[6x^2-4\right]'}{[21x^2+5]'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{12x}{42x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{12}{42},$$

ami létezik és véges, így hasonló érveléssel, mint az (i) részben, azt kapjuk, hogy minden szereplő határérték létezik és véges és

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3-4x+5}{7x^3+5x-3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{6x^2-4}{21x^2+5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{12}{42} = \frac{2}{7}.$$

□

Útmutatás. *Ahogyan már korábban volt róla szó, a L'Hospital-szabály minden korábban tanult határérték-típus esetében használható. Fontos azonban, hogy* ***a tétel alkalmazása előtt mérlegeljünk****. Ha a szóban forgó határérték* $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$ *típusú, akkor (általánosságban véve) a L'Hospital-szabályt* $\min\{\deg(P), \deg(Q$ *szor kell egymás után alkalmazni, ami természetesen sok „munka", ha a P és Q polinomok magas fokúak. Ha azt a módszert alkalmazzuk, amit a Valós függvények határértéke című témakörnél tanultunk, akkor pedig ki kell emelni a nevezőben található Q polinom legnagyobb fokú tagjával. Ez utóbbi lényegesen kevesebb számolást igényel (szerintem), mint a L'Hospital-szabály többszöri alkalmazása.* □

8. Feladat. *Számítsuk ki az alábbi határértékeket.*

(a)

$$\lim_{x\to a} \frac{x^m-a^m}{x^n-a^n}$$

Megoldás. *Ha külön számoljuk a számláló és a nevező határértékét, akkor azt kapjuk, hogy*

$$\lim_{x\to a}(x^m-a^m) = a^m-a^m = 0 \qquad \textit{és} \qquad \lim_{x\to a}(x^n-a^n) = a^n-a^n = 0,$$

így nem tudunk dönteni. Próbáljuk meg használni a L'Hospital-szabályt. Ekkor

$$\lim_{x\to a} \frac{[x^m-a^m]'}{[x^n-a^n]'} = \lim_{x\to a} \frac{mx^{m-1}}{nx^{n-1}} = \frac{m\cdot a^{m-1}}{n\cdot a^{n-1}} = \frac{m}{n}a^{m-n}.$$

Mivel a $\lim_{x\to a} \frac{[x^m-a^m]'}{[x^n-a^n]'}$ *határérték létezik és véges, azért a feladatban szereplő* $\lim_{x\to a} \frac{x^m-a^m}{x^n-a^n}$ *határérték is létezik és véges és a két határérték megegyezik, amiből azt kapjuk, hogy*

$$\lim_{x\to a} \frac{x^m-a^m}{x^n-a^n} = \frac{m}{n}a^{m-n}.$$

□

(b)

$$\lim_{x\to 1} \frac{mx^{m+1}-(m+1)x^m+1}{x^2-2x+1}$$

Megoldás. *Ha külön számoljuk a számláló és a nevező határértékét, akkor azt kapjuk, hogy*

$$\lim_{x\to 1} mx^{m+1}-(m+1)x^m+1 = 0 \qquad \textit{és} \qquad \lim_{x\to 1} x^2-2x+1 = 0,$$

így nem tudunk dönteni. Próbáljuk meg használni a L'Hospital-szabályt. Ekkor

$$\lim_{x\to} \frac{\left[mx^{m+1}-(m+1)x^m+1\right]'}{[x^2-2x+1]'} = \lim_{x\to 1} \frac{m(m+1)x^m-(m+1)mx^{m-1}}{2x-2}$$

Ha külön számoljuk a számláló és a nevező határértékét, akkor azt kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to 1} m(m+1)x^m - (m+1)mx^{m-1} = 0 \qquad \textit{és} \qquad \lim_{x\to 1} 2x - 2 = 0,$$

így nem tudunk dönteni. Próbáljuk meg még egyszer alkalmazni a L'Hospital-szabályt. Ebben az esetben

$$\lim_{x\to} \frac{\left[m(m+1)x^m - (m+1)mx^{m-1}\right]'}{[2x-2]'} = \lim_{x\to 1} \frac{m(m+1)mx^{m-1} - (m+1)m(m-1)x^{m-2}}{2} = \frac{m(m+1)}{2}$$

Mindez azt jelenti, hogy mivel létezik és véges a $\lim_{x\to} \frac{\left[m(m+1)x^m - (m+1)mx^{m-1}\right]'}{[2x-2]'}$ *határérték, ezért létezik és véges a* $\lim_{x\to} \frac{\left[mx^{m+1} - (m+1)x^m + 1\right]'}{[x^2-2x+1]'}$ *határérték is. Ennek a határértéknek a létezéséből és végességéből következik a* $\lim_{x\to 1} \frac{mx^{m+1} - (m+1)x^m + 1}{x^2-2x+1}$ *határérték létezése és végessége. Mindent egybevetve mindhárom határérték létezik és mindegyik* $\frac{m(m+1)}{2}$*-vel egyenlő.*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} \frac{mx^{m+1} - (m+1)x^m + 1}{x^2-2x+1} &= \frac{m(m+1)x^m - (m+1)mx^{m-1}}{2x-2} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{m(m+1)mx^{m-1} - (m+1)m(m-1)x^{m-2}}{2} = \frac{m(m+1)}{2}\end{aligned}$$

□

(c)

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^3-2x^2+2x-1}$$

(d)

$$\lim_{x\to 5} \frac{x^3-8x^2+17x-10}{x^4-5x^3-2x^2+11x-5}$$

(e)

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^3-5x^2+2x+8}{x^4-2x^3-16x^2+2x+15}$$

(f)

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^4-5x^2+4}{x^4-3x^3-4}$$

(g)

$$\lim_{x\to -3} \frac{x^4+3x^3-7x^2-27x-18}{x^4-3x^3-7x^2+27x-18}$$

(h)

$$\lim_{x\to c} \frac{ax^2-2acx+ac^2}{bx^2-2bcx+bc^2}$$

(i)

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-x^2-8x+12}{x^3-4x^2+x+6}$$

Megoldás. (1. megoldási lehetőség) *Ha külön számoljuk a számláló és a nevező határértékét, akkor azt kapjuk, hogy*

$$\lim_{x\to 2} x^3-x^2-8x+12 = 0 \qquad \textit{és} \qquad \lim_{x\to 2} x^3-4x^2+x+6 = 0,$$

így nem tudunk dönteni. Próbáljuk meg használni a L'Hospital-szabályt. Ekkor

$$\lim_{x\to 2} \frac{\left[x^3 - x^2 - 8x + 12\right]'}{[x^3 - x^2 - 8x + 12]'} = \lim_{x\to 2} \frac{3\,x^2 - 2\,x - 8}{3\,x^2 - 8\,x + 1} = 0,$$

mivel

$$\lim_{x\to 2} 3\,x^2 - 2\,x - 8 = 0 \qquad \textit{és} \qquad \lim_{x\to 2} 3\,x^2 - 8\,x + 1 = -3.$$

□

Megoldás. (2. megoldási lehetőség) *Ha külön számoljuk a számláló és a nevező határértékét, akkor azt kapjuk, hogy*

$$\lim_{x\to 2} x^3 - x^2 - 8x + 12 = 0 \qquad \textit{és} \qquad \lim_{x\to 2} x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0,$$

így nem tudunk dönteni. Az, hogy ez a két határérték nulla, csak úgy fordulhat elő (lásd a határérték és folytonosság kapcsolatáról szóló állítást az előadásanyagban), hogy az $x_0 = 2$ *gyöke a számlálóban és a nevezőben lévő polinomnak. Próbáljuk meg ezeket a polinomokat gyöktényezős alakra hozni. Ebben az esetben*

$$x^3 - x^2 - 8x + 12 = (x-2)^2\ (x+3) \qquad \textit{és} \qquad x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x-3)\ (x-2)\ (x+1)\,,$$

amiből azt kapjuk, hogy

$$\frac{x^3 - x^2 - 8x + 12}{x^3 - 4x^2 + x + 6} = \frac{(x-2)^2\ (x+3)}{(x-3)\ (x-2)\ (x+1)} = \frac{(x-2)\ (x+3)}{(x-3)\ (x+1)} \xrightarrow{x\to 2} \frac{0}{-3} = 0.$$

□

(j)

$$\lim_{x\to a} \frac{\sqrt{a+x} - \sqrt{2a}}{\sqrt{x+2a} - \sqrt{3a}}$$

Megoldás. *Ha külön számoljuk a számláló és a nevező határértékét, akkor azt kapjuk, hogy*

$$\lim_{x\to a}(\sqrt{a+x} - \sqrt{2a}) = \sqrt{a+a} - \sqrt{2a} = 0 \qquad \textit{és} \qquad \lim_{x\to a} \sqrt{x+2a} - \sqrt{3a} = \sqrt{a+2a} - \sqrt{3a} = 0,$$

így nem tudunk dönteni. Próbáljuk meg használni a L'Hospital-szabályt. Ekkor

$$\lim_{x\to a} \frac{\left[\sqrt{a+x} - \sqrt{2a}\right]'}{\left[\sqrt{x+2a} - \sqrt{3a}\right]'} = \lim_{x\to a} \frac{\frac{1}{2}(a+x)^{-\frac{1}{1}}}{\frac{1}{2}(x+2a)^{-\frac{1}{2}}} = \frac{(2a)^{-\frac{1}{2}}}{(3a)^{-\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

Mivel a $\lim_{x\to a} \dfrac{\left[\sqrt{a+x} - \sqrt{2a}\right]'}{\left[\sqrt{x+2a} - \sqrt{3a}\right]'}$ *határérték létezik és véges, azért a feladatban szereplő*

$$\lim_{x\to a} \frac{\sqrt{a+x} - \sqrt{2a}}{\sqrt{x+2a} - \sqrt{3a}}$$

határérték is létezik és véges és a két határérték megegyezik, amiből azt kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to a} \frac{\sqrt{a+x} - \sqrt{2a}}{\sqrt{x+2a} - \sqrt{3a}} = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

□

(k)

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x^3-a^3}}{\sqrt{x-a}}$$

Megoldás. *Ha külön számoljuk a számláló és a nevező határértékét, akkor azt kapjuk, hogy*

$$\lim_{x\to a}\sqrt{x^3-a^3}=0 \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to a}\sqrt{x-a}=0,$$

így nem tudunk dönteni. Próbáljuk meg használni a L'Hospital-szabályt. Ekkor

$$\lim_{x\to a}\frac{\left[\sqrt{x^3-a^3}\right]'}{\left[\sqrt{x-a}\right]'}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{2}(x^3-a^3)^{-\frac{1}{2}}\cdot 3x^2}{\frac{1}{2}(x-a)^{-\frac{1}{2}}}=\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^3-a^3}}\cdot 3x^2.$$

Figyeljük meg, hogy a fenti szorzat utolsó tagja éppen a feladatban szereplő függvény reciproka. Ha annak nem tudjuk kiszámítani a határértékét, akkor nyilván a reciprokának sem. □

Útmutatás. *Próbáljuk meg a szóban forgó hányadoson algebrai átalakítást végezni. Figyeljük meg, hogy*

$$x^3-a^3=(x-a)\cdot\left(x^2+a\,x+a^2\right),$$

ezért

$$\frac{\sqrt{x^3-a^3}}{\sqrt{x-a}}=\sqrt{\frac{x^3-a^3}{x-a}}=\sqrt{\frac{(x-a)\cdot(x^2+a\,x+a^2)}{x-a}}=\sqrt{x^2+a\,x+a^2}\xrightarrow{x\to a}\sqrt{3a^2}=\sqrt{3}a.$$

□

(l)

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}-\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

(m)

$$\lim_{x\to a}\frac{a^x-b^x}{\ln(1-x)}$$

9. Feladat. *Számítsuk ki az alábbi határértékeket.*

(a)

$$\lim_{x\to a}\frac{a^n-x^n}{\ln(a^n)-\ln(x^n)}$$

(b)

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x+\ln(x)}{1-\sqrt{2x-x^2}}$$

(c)

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-(n+1)x^{n+1}+nx^{n+2}}{(1-x^2)}$$

(d)

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^x-x}{1-x+\ln(x)}$$

(e)

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x\ln(1-x)}$$

(f)

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin(x)}{x^3}$$

(g)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-x\cos(x)}{\sin^3(x)}$$

(h)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-\cos(x)+1}{\sin(x)+\cos(x)-1}$$

Útmutatás. A 9. Feladatban a L'Hospital-szabály alkalmazásán túl minden esetben egy-egy külön ötlet szükséges. Ezek a feladatok (kifejezetten) nehezek, a számonkérések során csak a típusfeladatokat fogom kérdezni. Ezek a feladatok szorgalmi feladatoknak tekinthetőek. □

10. Feladat. *Számítsuk ki az alábbi határértékeket.*

(a)
$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{\cos(x)\sin^2(x)}$$

(b)
$$\lim_{x\to 0} \frac{(e^x-e^{-x})^2}{x^2\cos(x)}$$

(c)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg}(a+x)-\mathrm{tg}(a-x)}{\mathrm{arctg}(a+x)-\mathrm{arctg}(a-x)}$$

(d)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\mathrm{tg}(x))}{\ln(\mathrm{tg}(2x))}$$

(e)
$$\lim_{x\to 1} \frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}$$

(f)
$$\lim_{x\to 1} \frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln(x)}$$

(g)
$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sin^2(x)}-\frac{1}{x^2}$$

(h)
$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{2x^2}-\frac{1}{x\mathrm{tg}(x)}$$

(i)
$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\ln(x+1)}-\frac{1}{x}$$

Útmutatás. A 10. Feladatban a L'Hospital-szabály alkalmazásán túl minden esetben egy-egy külön ötlet szükséges. Ezek a feladatok (kifejezetten) nehezek, a számonkérések során csak a típusfeladatokat fogom kérdezni. Ezek a feladatok szorgalmi feladatoknak tekinthetőek. □