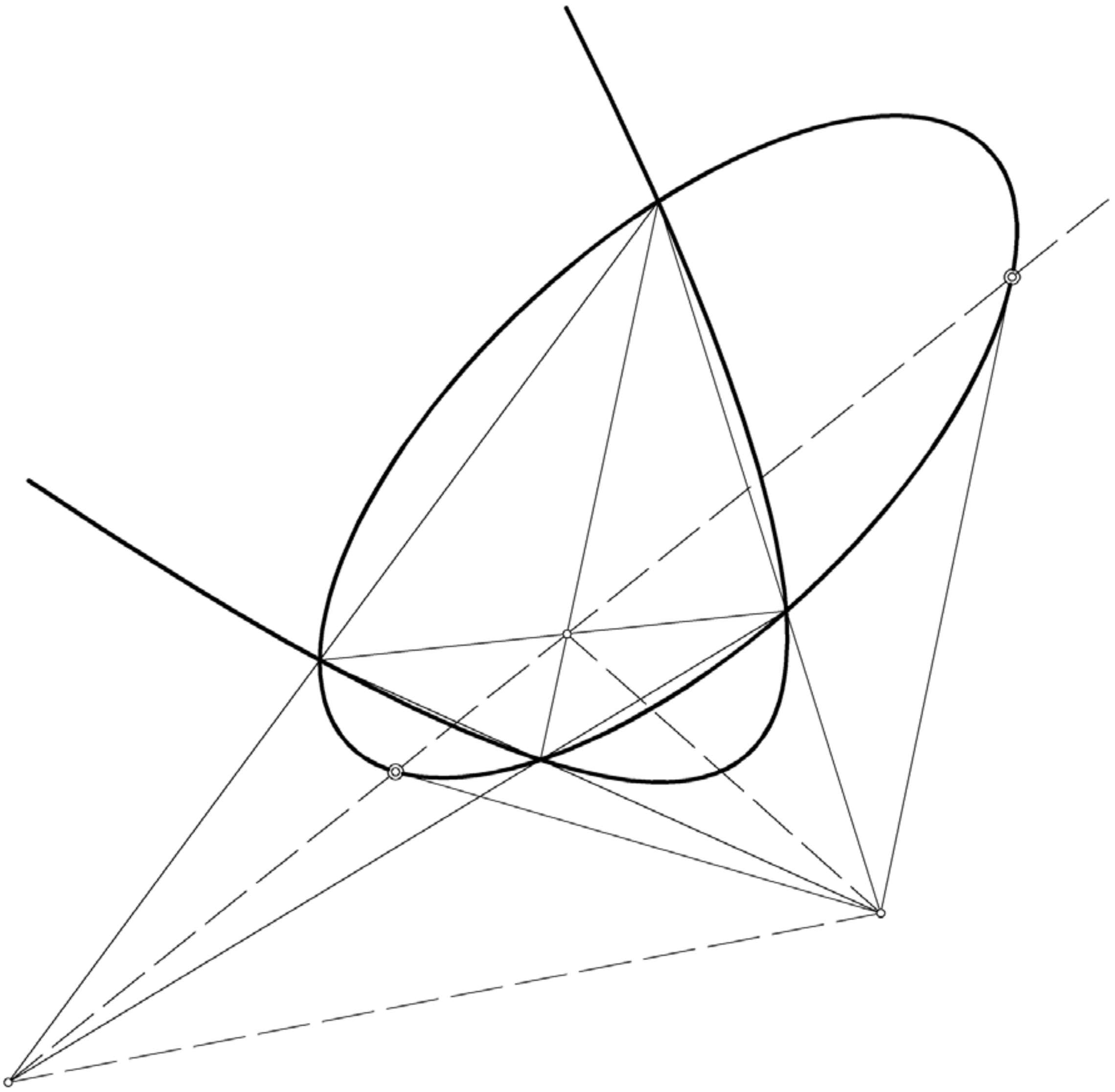
Bácsó Sándor - Papp Ildikó -
Szabó József

PROJEKTÍV GEOMETRIA

mobiDIÁK könyvtár

Bácsó Sándor - Papp Ildikó - Szabó József

PROJEKTÍV GEOMETRIA



mobiDIÁK könyvtár

SOROZATSZERKESZTŐ

Fazekas István

Bácsó Sándor - Papp Ildikó -
Szabó József

PROJEKTÍV GEOMETRIA

Jegyzet

Első kiadás

mobiDIÁK könyvtár
Debreceni Egyetem

Lektor

mobiDIÁK könyvtár
Debreceni Egyetem
Informatikai Intézet
4010 Debrecen, Pf. 12.
Hungary
http://mobidiak.inf.unideb.hu/

A mű „A mobiDIÁK önszervező mobil portál” (IKTA, OMFB-00373/2003) és a
„GNU Iterátor, a legújabb generációs portál szoftver” (ITEM, 50/2003) projektek keretében
készült.

Tartalomjegyzék

Analitikus rész

Az affin sík analitikus modellje

Az euklideszi síkon adott egy derékszögű koordinátarendszer, melyben minden ponthoz egy valós számpárt rendelünk hozzá. Ez a hozzárendelés a valós számpárok és a sík pontjai között kölcsönösen egyértelmű. Nemcsak a pontokat, hanem az egyeneseket is tudjuk jellemezni ebben a koordinátarendszerben. Minden egyenest olyan valós számhármas jellemez, amelyben az első két valós szám egyszerre nem lehet nulla, ezenkívül, ha egy számhármas jellemzi a kiválasztott egyenesünket, akkor annak a számhármasnak tetszőleges, nem nulla skalárszorosa is hozzárendelhető. (Ezt a tulajdonságot homogenitásnak nevezzük.) A sík egyenesei és a valós számhármasok között már nem kölcsönösen egyértelmű a kapcsolat.

Megállapodunk a következőkben:

1. Minden ponthoz egyértelműen hozzárendelünk egy (x, y) rendezett számpárt, ahol x és y minden valós értéket felvehet, és ezeket a pont koordinátáinak nevezzük. Két pont, a P(x, y) és Q(x', y') akkor és csak akkor egyenlő, ha x=x' és y=y'.

2. Minden egyeneshez hozzárendelünk egy rendezett (u_1, u_2, u_3) számhármast, melyre $(u_1)^2+(u_2)^2>0$. Az u_1, u_2, u_3 minden valós értéket felvehet, amely teljesíti az előbbi feltételt és minden ilyen tulajdonságú számhármashoz tartozik egy egyenes. Két (u_1, u_2, u_3) és (v_1, v_2, v_3) egyenes akkor és csak akkor egyezik meg, ha $\mathrm{Rang}\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}=1$, azaz a két számhármas arányos. Ebből következik, hogy az egyenesek és számhármasok közötti hozzárendelés nem kölcsönösen egyértelmű. Minden számhármashoz pontosan egy egyenes tartozik, míg egy egyeneshez zérustól különböző konstans szorzó erejéig tudunk számhármasokat rendelni.

3. Egy P (x,y) pont akkor és csak akkor illeszkedik egy (u_1, u_2, u_3) egyenesre, ha koordinátáikra teljesül $u_1\cdot x+u_2\cdot y+u_3=0$.

Tétel

A P(x_1, y_1) és Q(x_2, y_2) egymástól különböző pontokra egy és csak egy egyenes illeszkedik.
Ennek megadása az

$$u_1\cdot x_1+u_2\cdot y_1+u_3=0$$
$$u_1\cdot x_2+u_2\cdot y_2+u_3=0$$

egyenletrendszer megoldásával történik.

Tétel

Az R(x, y) pont illeszkedik a P(x_1, y_1) és Q(x_2, y_2) által meghatározott egyenesre, ha

$$x=x_1+t\cdot(x_2-x_1)$$
$$y=y_1+t\cdot(y_2-y_1)$$

valamely t valós értékre.

Tétel

Két különböző (u_1, u_2, u_3) és (v_1, v_2, v_3) egyenes (azaz ha $\mathrm{Rang}\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = 2$) akkor és csak akkor párhuzamos, ha $\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} = 0$.

(Ez azt jelenti, hogy a két egyenes (u_1, u_2) és (v_1, v_2) normálvektorai egymással párhuzamosak.)

*Koordináta-transzformáció*nak nevezzük azt az eljárást, amely során az 1. és 2. megállapodások figyelembevételével a pontokhoz és egyenesekhez új, de az eddigiektől nem feltétlenül különböző koordinátákat rendelünk hozzá. Fontos, hogy a transzformáció előtt teljesülő illeszkedés, illetve nem illeszkedés a transzformáció után is fennálljon.

Újabb megállapodás:

4. Megköveteljük, hogy az 1., 2. és 3. megállapodások a koordináta-transzformáció után is érvényben maradjon.

Minden ponthoz a régi és új koordinátákban is csak egyetlen (x, y) és $(\overline{x}, \overline{y})$ számpár tartozik, ezért a számpárok kölcsönös és egyértelmű kapcsolatban állnak: $\overline{x}$ és $\overline{y}$ az x és y függvényeként adható meg:

$$\overline{x} = f_1(x, y)$$
$$\overline{y} = f_2(x, y).$$

A kölcsönös és egyértelmű vonatkozás miatt mindez fordítva is igaz, x és y az $\overline{x}$ és $\overline{y}$ függvényeként adható meg:

$$x = \varphi_1(\overline{x}, \overline{y})$$
$$y = \varphi_2(\overline{x}, \overline{y}).$$

Az 1.-4. megállapodások által megadott affin geometriának nincs külön pont- és egyenestranszformációja, azaz a pontkoordináták transzformációja maga után vonja az egyeneskoordináták transzformációját. Adott egyenesre illeszkedő pontok koordinátái kielégítik az

$$u_1 \cdot x + u_2 \cdot y + u_3 = 0$$

egyenletet. A pontkoordináta-transzformáció után $u_1 \cdot \varphi_1(\overline{x}, \overline{y}) + u_2 \cdot \varphi_2(\overline{x}, \overline{y}) + u_3 = 0$,melyet átalakítva az

$$\overline{u}_1 \cdot \overline{x} + \overline{u}_2 \cdot \overline{y} + \overline{u}_3 = 0$$

alakot kapjuk.

Homogén tulajdonságú pontkoordináták keresése

A pontok eddigi jellemzésében az volt a jó tulajdonság, hogy egy koordinátapár egyértelműen jellemezte a pontot. De most az egyenesekhez hasonlóan szeretnénk jellemezni a pontokat, vagyis homogén tulajdonságú számhármasokkal. Ezért állítsuk elő a P pont x és y koordinátáit a következőképpen: $x = \frac{x_1}{x_3}$ és $y = \frac{x_2}{x_3}$, ahol $x_3 \neq 0$. Az így meghatározható (x_1, x_2, x_3) számhármasokat rendeljük a ponthoz. Ezek rendelkeznek a kívánt homogén tulajdonsággal, azaz zérustól különböző konstansszorzó erejéig jellemzik a pontot. Itt az affin síkon minden számhármas olyan, hogy $x_3 \neq 0$.

Felmerülhet a kérdés:

Milyen pontok jellemezhetők olyan számhármasokkal, amelyekben $x_3=0$?

Az euklideszi síkon nem találunk ilyen pontokat, de már tudjuk azt, hogy az euklideszi síkot ki lehet bővíteni projektív síkká. Ez gyakorlatilag azt jelenti, hogy az eddigi pontokon kívül megjelennek a végtelen távoli pontok, melyek egy ún. végtelen távoli egyenesre illeszkednek. A párhuzamos egyeneseknek eddig nem volt közös pontjuk, de most az egymással párhuzamos egyenesek egy közös végtelen távoli pontban metszik egymást. Az $x_3=0$ megengedésével éppen a sík végtelen távoli pontjainak a jellemzése válik lehetővé, ugyanis ezeknek a pontoknak nem lehet affin (nem homogén) koordinátájuk.

Tekintsünk egy konkrét példát:

Az euklideszi síkon az

$$5x+4y+2=0$$
$$5x+4y+1=0$$

két különböző, és egymással párhuzamos egyenes. Az euklideszi síkon ennek a két egyenesnek nincs közös pontja, azaz nem létezik olyan (x,y) valós számpár, amely mindkét egyenletet kielégítené. Végezzük el a következő helyettesítéseket: $x = \frac{x_1}{x_3}$ és $y = \frac{x_2}{x_3}$ (ahol $x_3 \neq 0$). Az x_3-mal való szorzás után a két egyenlet a következő alakú:

$$5x_1+4x_2+2x_3=0$$
$$5x_1+4x_2+1x_3=0.$$

Ebben az alakban már megengedhető, hogy az $x_3=0$ legyen. Ekkor (x_1, x_2, x_3) valós számhármasok között találunk olyat, amely mindkét utóbbi egyenletet kielégíti. Ilyen számhármas a (-4, 5, 0). De nem csak ez az egy számhármas elégíti ki ezt az egyenletet, hanem minden olyan is, amely ebből egy zérustól különböző konstanssal való szorzással nyerhető. Ezek a megoldásként kapott számhármasok nem jellemezhetnek az euklideszi síkon lévő pontot, mert azt már korábban valós számpár jellemezte volna. Miután az euklideszi síkot kibővítettük a végtelen távoli elemekkel, a (-4, 5, 0) számhármas (és a skalárszorosai) egy végtelen távoli pontot jellemeznek. Ez a pont a két egyenes közös végtelen távoli pontja.

A projektív sík analitikus modellje

Az előbbi meggondolások alapján a projektív síkon (amely az euklideszi sík kibővítésével keletkezett), nem teszünk különbséget a végesben fekvő és a végtelen távoli pontok között. Ez jelenik meg az analitikus jellemzésben is.

Az analitikus modell kiépítéséhez szükséges megállapodások:

1. Minden ponthoz zérustól különböző konstansszorzó erejéig rendelünk hozzá rendezett valós számhármast: $P \leftrightarrow (x_1,x_2,x_3)$, amelynek a rangja 1, azaz $(x_1)^2+(x_2)^2+(x_3)^2>0$ és minden ilyen tulajdonságú számhármashoz tartozzon egy pont. A számhármast a pont koordinátáinak nevezzük. Két pont, P és $Q(y_1,y_2,y_3)$, akkor és csak akkor egyenlő, ha $\mathrm{Rang}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} = 1$.

Következmény

Minden, nem csupa zérusból álló számhármashoz pontosan egy pont tartozik, de minden ponthoz végtelen sok számhármas rendelhető, melyek egymástól csak egy zérustól különböző konstans szorzóban térnek el.

2. Minden egyeneshez hozzárendelünk egy rendezett valós (u_1,u_2,u_3) számhármast, melynek a rangja 1 és minden ilyen számhármashoz tartozzon egyetlen egyenes. Két (u_1,u_2,u_3) és (v_1,v_2,v_3) egyenes akkor és csak akkor egyezik meg, ha $\mathrm{Rang}\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = 1$, azaz a két számhármas arányos.

Következmény

Az egyenesek és számhármasok közötti hozzárendelés nem kölcsönösen egyértelmű. Minden számhármashoz pontosan egy egyenes tartozik, míg egy egyeneshez zérustól különböző konstans szorzó erejéig tudunk számhármasokat rendelni.

3. Egy $P(x_1,x_2,x_3)$ pont akkor és csak akkor illeszkedik egy (u_1,u_2,u_3) egyenesre, ha $u_1 \cdot x_1+u_2 \cdot x_2+u_3 \cdot x_3=0$.

Dualitás elve:

Az előbbi megállapodásokat tekintve látszik, hogy ezek a pontra és az egyenesre nézve teljesen szimmetrikusak. Ezért minden olyan tételből, melyben a fenti szimmetria fennáll, egy újabbat nyerhetünk a pont és egyenes felcserélésével az illeszkedés követelményét továbbra is fenntartva.

*Koordináta-transzformáció*nak nevezzük azt az eljárást, amely során az 1. és 2. megállapodások figyelembevételével a pontokhoz és egyenesekhez új, de az eddigiektől nem feltétlenül különböző koordinátákat rendelünk hozzá. Fontos, hogy a transzformáció előtt teljesülő illeszkedés, illetve nem illeszkedés a transzformáció után is fennálljon. Erre vonatkozik a következő megállapodás:

4. Megköveteljük, hogy a 3. megállapodás a koordináta-transzformáció után is érvényben maradjon.

A P pont eddigi (x_1,x_2,x_3) koordinátái helyett az (x_1',x_2',x_3'), és az e egyenes (u_1,u_2,u_3) koordinátái helyett az (u_1',u_2',u_3') koordinátákat vezetjük be. Ha eddig teljesült, hogy $u_1 \cdot x_1+u_2 \cdot x_2+u_3 \cdot x_3=0$ (a P pont illeszkedett az e egyenesre), akkor $u_1' \cdot x_1'+u_2' \cdot x_2'+u_3' \cdot x_3'=0$ is teljesül.

Végtelen távoli elemek

Az affin síkon két egyenes

$$u_1 \cdot x+u_2 \cdot y+u_3=0 \text{ és}$$
$$v_1 \cdot x+v_2 \cdot y+v_3=0,$$

különböző, ha $\mathrm{Rang}\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}=2$. Legyenek ezek az egyenesek egymással párhuzamosak, azaz $\mathrm{Rang}\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix}=1$. Most a síkot kibővítjük projektív síkká. Ez az analitikus jellemzésben azt jelenti, hogy az eddigi affin koordináták helyett homogén koordinátákat vezetünk be. Mindkét egyenes egyenletébe az $x=\frac{x_1}{x_3}$ és $y=\frac{x_2}{x_3}$ (ahol $x_3 \neq 0$) helyettesítéseket elvégezzük, majd az egyenleteket x_3-mal végigszorozzuk. Ennek eredménye:

$$u_1 \cdot x_1+u_2 \cdot x_2+u_3 \cdot x_3=0 \text{ és}$$
$$v_1 \cdot x_1+v_2 \cdot x_2+v_3 \cdot x_3=0.$$

Ebben az alakban már $x_3=0$ is megengedhető, vagyis mostantól kezdve a végtelen távoli pont is hozzátartozik az egyeneshez. Megmutatható, hogy a projektív síkon a fenti tulajdonságú egyenespár metsző, vagyis van közös pontjuk.

Mivel $\mathrm{Rang}\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix}=1$, ezért $\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}=0$. Ezenkívül feltehető, hogy $\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \neq 0$. Ekkor az egyenesek egyenletét át lehet rendezni

$$u_1 \cdot x_1+ u_3 \cdot x_3=- u_2 \cdot x_2$$
$$v_1 \cdot x_1+ v_3 \cdot x_3=- v_2 \cdot x_2$$

és egy lineáris egyenletrendszerként kezelve x_3-ra megoldani.

$$x_3=\frac{\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}}=0.$$

Az affin síkon egymással párhuzamos egyeneseknek a projektív síkon van metszéspontjuk, méghozzá az $x_3=0$-val jellemzett végtelen távoli pontjuk. Egészen pontosan az $u_1 \cdot x_1+u_2 \cdot x_2+u_3 \cdot x_3=0$ egyenes végtelen távoli pontjának homogén koordinátái: $(u_2, -u_1, 0)$ illetve ennek a számhármasnak bármely nem nulla skalárszorosa. Ezek alapján kimondható a következő

Tétel

Az affin síkban párhuzamos egyenesek a kibővített síkon ugyanabban a végtelen távoli pontban metszik egymást. Az egy végtelen távoli pontra illeszkedő egyenesek az affin síkrészen párhuzamosak egymással.

Tétel

Minden egyenesre egy és csak egy végtelen távoli pont illeszkedik. Az $u_1 \cdot x_1 + u_2 \cdot x_2 + u_3 \cdot x_3 = 0$ egyenes végtelen távoli pontja az $(u_2, -u_1, 0)$ homogén koordinátákkal jellemzett pont.

Tétel

A projektív síkon a végtelen távoli pontok egy egyenesre illeszkednek, melyet *végtelen távoli egyenes*nek nevezünk.

Bizonyítás

A végtelen távoli pontokat $(x_1, x_2, 0)$ számhármasok jellemzik, ahol az x_1, x_2 valamelyike nem zérus. Az egyenesük egyenlete

$$u_1 \cdot x_1 + u_2 \cdot x_2 + u_3 \cdot 0 = 0,$$

melynek minden x_1, x_2 esetén teljesülnie kell, azaz $u_1 = u_2 = 0$, $u_3 = 1$.

Tétel

A (0, 0, 1) számhármas által jellemzett egyenes minden pontja végtelen távoli pont.

Bizonyítás

Az egyenes egyenlete $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 = 0$, vagyis $x_3 = 0$. Az egyenesre illeszkedő pontok koordinátáinak ezt ki kell egyenlítenie, ez pedig csak akkor teljesül, ha a pontok harmadik koordinátája 0. Ha ez nem teljesül, vagyis $x_3 \neq 0$, akkor a pont semmiképpen sem illeszkedik az egyenesre.

Következmény

A projektív síknak egyetlen végtelen távoli egyenese van.

Példák

1. Határozzuk meg az $x^2 = -4x$ parabola végtelen távoli pontját!

   Végezzük el az $x = \frac{x_1}{x_3}$ és $y = \frac{x_2}{x_3}$ (ahol $x_3 \neq 0$) helyettesítéseket, az egyenlet mindkét oldalát szorozzuk x_3-mal. Átrendezve az $x_1^2 + 4x_2x_3 = 0$ egyenletet kapjuk, melyet a parabola homogén koordinátákkal felírt egyenletének nevezünk. Ekkor már megengedhető, hogy $x_3 = 0$ is teljesüljön. Ha $x_3 = 0$, akkor $x_1^2 = 0$, melyből az $x_1 = 0$ következik. De ekkor az x_2 már csak 0-tól különböző értéket vehet fel, pl. legyen 1. Ekkor a parabola végtelen távoli pontja: $V_\infty(0, 1, 0)$. A megadott parabola egy origó csúcspontú olyan parabola, amelynek a tengelye az y tengely, azaz az x=0 egyenes. Ez alapján a parabola végtelen távoli pontja éppen a tengelyének a végtelen távoli pontja. Fontos, hogy a síkon bármilyen állású parabola végtelen távoli pontja ismeretében a tengelyének az állása ismert

2. Határozzuk meg az $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ hiperbola végtelen távoli pontjait!

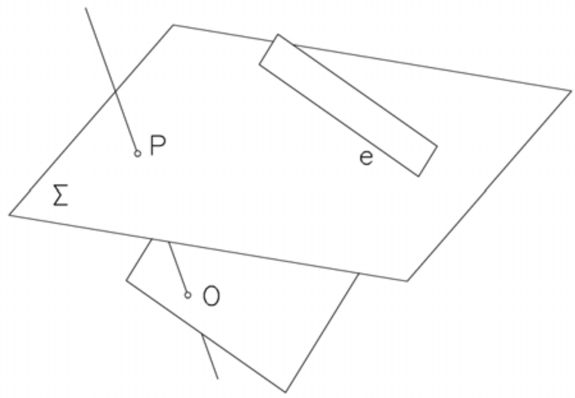
A hiperbola homogén koordinátákkal megadott egyenlete: $16x_1^2 - 9x_2^2 - 144x_3^2 = 0$. Mivel végtelen távoli pontot keresünk, az x_3=0-t megengedjük. Az x_1, x_2 párra a következő összefüggést kapjuk: $16x_1^2 - 9x_2^2 = 0$, melyet szorzattá lehet alakítani: $(4x_1+3x_2)(4x_1-3x_2)=0$.

– Ha $4x_1+3x_2=0$, akkor pl. a 3,-4 pár egy lehetséges megoldás.
– Ha $4x_1-3x_2=0$, akkor pl. a 3,4 egy lehetséges megoldás.

Ez alapján a hiperbola két végtelen távoli pontja: $V_{1\infty}(3, -4, 0)$ és $V_{2\infty}(3, 4, 0)$.
A megadott hiperbola egy origó középpontú olyan hiperbola, amelynek a valós tengelye 4, a képzetes tengelye 3 egység hosszúságú. Ez alapján az aszimptotái a 4x+3y=0 és 4x-3y=0 egyenesek. A számolás során az aszimptoták végtelen távoli pontjait határoztuk meg. Fontos, hogy a síkon bármilyen állású hiperbola végtelen távoli pontjai ismeretében az aszimptotáinak az állása ismert.

A projektív sík térbeli szintetikus modellje

Adott a projektív térben egy Σ projektív sík, melyet egy euklideszi sík kibővítéseként nyertünk. Ezen kívül adott még egy $O \notin \Sigma$ vonatkoztatási centrum. A Σ sík elemeihez a következő hozzárendeléseket végezzük el:



– A Σ sík egy P közönséges (véges helyzetű) pontjához rendeljük hozzá az OP egyenest.
– A Σ sík egy Q_∞ végtelen távoli pontjához rendeljük hozzá azt a g egyenest, amely illeszkedik az O pontra és párhuzamos azzal az f egyenessel, amely a Q_∞ pontot kijelöli. Ezt úgy is mondhatnánk, hogy az O pontot összekötöttük a Q_∞ ponttal.
– Legyen e a Σ sík egy közönséges egyenese. Az e egyeneshez hozzárendeljük az O pontra és az e egyenesre illeszkedő síkot.
– A Σ sík q_∞ végtelen távoli egyeneséhez rendeljük hozzá azt a síkot, amely illeszkedik az O pontra és párhuzamos a Σ síkkal.

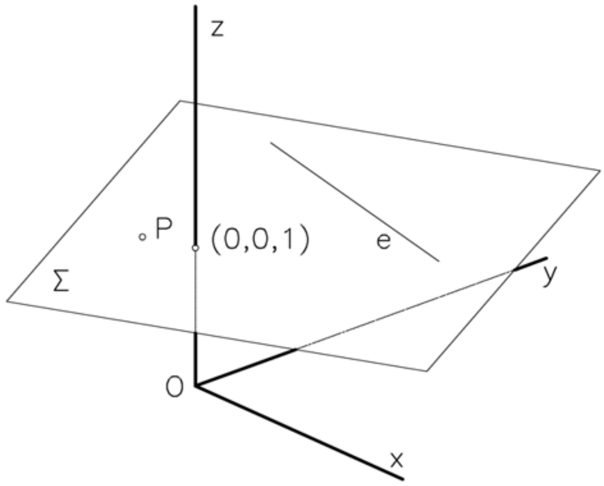
A Σ sík pontjaihoz az O pontra illeszkedő sugarakat, az egyeneseihez az O pontra illeszkedő síkokat rendeltük. Miután ezek kölcsönösen egyértelmű hozzárendelések voltak, a Σ síkon egy pont és egy egyenes illeszkedésére kellene feltételt mondani.

– A Σ sík valamely P pontja pontosan akkor illeszkedik a sík egy e egyenesére, ha a P ponthoz rendelt sugár illeszkedik az e egyeneshez rendelt síkra.

Tétel

A tér egy pontjára illeszkedő egyesített sugár- és síknyaláb a projektív sík egy térbeli modelljét adja.

A projektív sík térbeli analitikus modellje



Adott a projektív térben a ∑ projektív sík, melyhez az előbbi térbeli szintetikus modellt rendeltük. Ezt a modellt helyezzük úgy egy koordinátarendszerbe, hogy az O pont legyen az origó és a ∑ sík az xy koordinátasíkkal párhuzamos sík, amely a z tengely egységpontján halad át.

- A ∑ sík minden P pontjához hozzárendeltünk az OP egyenest. Az egyenes tetszőleges pontjába mutató helyvektor $\underline{r}=t\cdot\underline{v}$ alakban írható fel, ahol $\underline{v}\neq\underline{0}$ az egyenes egy irányvektora. Ehhez az egyeneshez a $\underline{v}$ által generált 1-dimenziós vektorteret rendeltük.

  A ∑ sík minden Q pontjához hozzárendeltünk az OQ egyenest. Az egyenes tetszőleges pontjába mutató helyvektor $\underline{r}=\tau\cdot\underline{u}$ alakban írható fel, ahol $\underline{u}\neq\underline{0}$ az egyenes egy irányvektora. Ehhez az egyeneshez a $\underline{u}$ által generált 1-dimenziós vektorteret rendeltük.

  A P és Q pontok akkor esnek egybe a ∑ síkon, ha a $\underline{v}$ és $\underline{u}$ által generált alterek megegyeznek, vagyis a két egyenes irányvektora csak egy konstansszorzóban tér el egymástól.

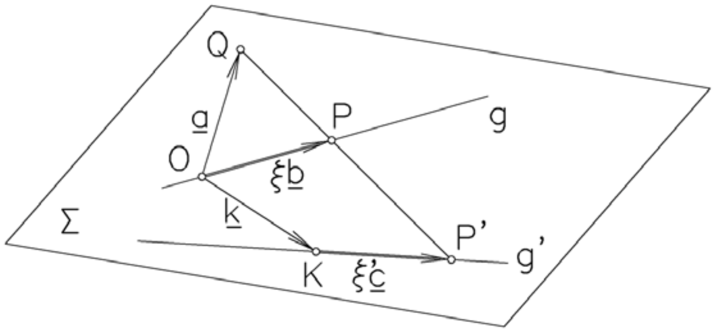
  Az OP egyenest a $\{t\cdot\underline{v}\}$ altér jellemzi; ha a $\underline{v}$ koordinátái (v_1, v_2, v_3), akkor az OP egyeneshez a $(t\cdot v_1, t\cdot v_2, t\cdot v_3)$ (ahol $t\neq0$) alakú számhármasokat rendeltük.
- A ∑ sík valamely e egyeneséhez hozzárendeltünk az Oe síkot. Ennek a síknak a vektorparaméteres előállítása: $\underline{r}=t_1\cdot\underline{u}+t_2\cdot\underline{v}$, ahol az $\underline{u}$ és $\underline{v}$ lineárisan független vektorok, t_1 és t_2 egyszerre nem lehet nulla. Az Oe síkot egy kétdimenziós altérrel lehet jellemezni. Hasonló meggondolásokkal a _∑ sík egy másik, f egyeneséhez hozzárendeltünk az Of síkot, amely egy másik kétdimenziós altérrel jellemezhető. Az e és f egyenesek akkor egyeznek meg, ha a kétdimenziós alterek megegyeznek. Egy kétdimenziós altérhez a felfeszítő vektorok nem egyértelműen rendelhetők, de a normálvektor által generált egydimenziós altér már igen. Vagyis a ∑ sík egy e egyeneséhez hozzárendeltünk az Oe sík valamely normálvektora által generált $\{t\cdot\underline{n}\}$ alteret; ha a $\underline{n}$ koordinátái (n_1, n_2, n_3), akkor az Oe síkhoz a $(t\cdot n_1, t\cdot n_2, t\cdot n_3)$ (ahol $t\neq0$) alakú számhármasokat rendeltük.
- Ha arra szeretnénk feltételt találni, hogy mikor fog illeszkedni a ∑ sík egy P pontja az e egyenesre. A feltétel a következő: Az OP egyenes illeszkedjen az Oe síkra. Vektorokkal megfogalmazva:

  A P ponthoz rendelt $\{t\cdot\underline{v}\}$ altér $\underline{v}$ vektora (amely az OP egyenes irányvektora) és az e egyeneshez rendelt $\{t\cdot\underline{n}\}$ altér $\underline{n}$ vektora (amely az Oe sík normálvektora) legyen merőleges egymásra. Lineáris algebrából ismert, hogy két vektor akkor merőleges egymásra, ha belső szorzatuk nulla, vagyis $\underline{n}\cdot\underline{v}=0$. Koordinátákkal kifejezve: $n_1\cdot v_1+n_2\cdot v_2+n_3\cdot v_3=0$.

Ezek a hozzárendelések és az illeszkedésre mondott feltétel a projektív sík analitikus modelljének első három megállapodásának felel meg.

A projektív egyenesek közötti transzformációk

Adott egy projektív sík, melyen két egyenes közötti projektív leképezést szeretnénk analitikusan leírni. Ehhez már tudjuk azt, hogy minden, egyenesek közötti projektív transzformáció véges sok centrális vetítés egymás utáni alkalmazásával áll elő. Ezért érdemes először a centrális vetítés analitikus megadásával foglalkozni.



Adott a $\sum$ projektív síkon a g és g' egyenes és a Q pont, amely illeszkedik a $\sum$-ra, de nem illeszkedik a g és g' egyenesekre. Ebből a Q pontból egymásra vetítjük az egyeneseket. Legyen P egy tetszőlegesen választott pont a g egyenesen és P' a P Q-ból való vetítéssel előálló képe a g'-n.

Olyan koordinátarendszerben fogunk dolgozni, melynek az O origója illeszkedik a g egyenesre.

- Az O-ból Q-ba mutató vektort jelölje $\underline{a}(a_1, a_2)$.
- Az O-ból P-be mutató vektort jelölje $\xi\underline{b}(\xi b_1, \xi b_2)$, ahol a $\underline{b}(b_1, b_2)$ a g egyenes egy irányvektora.
- Az O-ból K-ba mutató vektort jelölje $\underline{k}(k_1, k_2)$, ahol K a g' egyenes pontja.
- Az K-ból P'-be mutató vektort jelölje $\xi'\underline{c}(\xi' c_1, \xi' c_2)$, ahol a $\underline{c}(c_1, c_2)$ a g' egyenes egy irányvektora.

Az O-ból P'-be két féleképpen jutatunk el; az egyik út a Q ponton, a másik a K ponton vezet keresztül. Mindez vektorokkal kifejezve: $\underline{a}+\rho(\xi\underline{b}-\underline{a})=\underline{k}+\xi'\underline{c}$, ahol $\rho\neq 0$.

Ebben az alakban csak a ρ és ξ' ismeretlenek és P' helyzetétől függenek.

Átrendezve a vektoregyenletet kapjuk: $\xi'\underline{c}-\rho(\xi\underline{b}-\underline{a})=\underline{a}-\underline{k}$. Ezt koordinátákra bontva egy lineáris egyenletrendszerhez jutunk, melyből az első két egyenletet figyeljük, mivel csak két ismeretlen van:

$$\xi' c_1-\rho(\xi b_1-a_1)=a_1-k_1$$
$$\xi' c_2-\rho(\xi b_2-a_2)=a_2-k_2$$

Ez az egyenletrendszer akkor oldható meg ρ-ra és ξ'-re, ha az alapmátrix determinánsa nem egyenlő nullával.

$$\begin{pmatrix} c_1 & \xi b_1 - a_1 \\ c_2 & \xi b_2 - a_2 \end{pmatrix}$$

Ebben a mátrixban a vektorok nem lehetnek lineárisan függők, ezért a mátrix determinánsa nullától különböző. Ekkor az egyenletrendszerünk megoldható és a Cramer-szabályt használva:

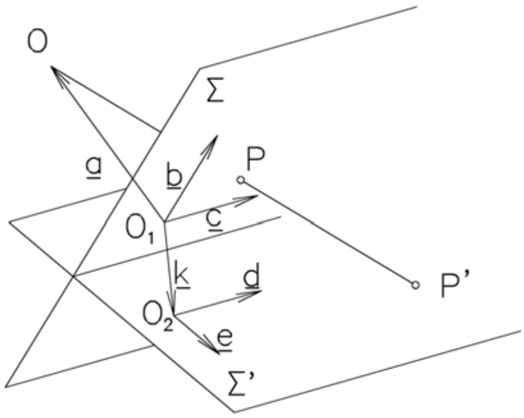
$$\xi' = \frac{\begin{vmatrix} a_1 - k_1 & \xi b_1 - a_1 \\ a_2 - k_2 & \xi b_2 - a_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_1 & \xi b_1 - a_1 \\ c_2 & \xi b_2 - a_2 \end{vmatrix}}.$$

Egyszerűbb alakra hozva: $\xi' = \dfrac{r\xi + s}{t\xi + u}$, ahol r, s, t, u-ból képzett mátrix determinánsa nem nulla.

Ezzel beláttuk, hogy centrális vetítéskor, ha mind a vetített pontok, mind azok vetületei is végesben vannak, akkor a koordinátáik közötti kapcsolatot tört-lineáris kifejezés határozza meg. Ennek kettébontásával születik meg a pontsorok között a lineáris transzformáció, amely már a végtelen távoli pontokat is kezelni tudja.

A projektív transzformáció analitikus modellje

Két sík közötti legegyszerűbb projektív transzformáció egy centrális vetítéssel előállítható, azaz a síkbeli alakzatok perspektív vonatkozásban vannak egymással. Ha a vetítés után a síkok valamelyikét elmozgatjuk az eredeti helyzetéből, akkor a két sík közötti kapcsolat csak több, de mindenképpen véges sok centrális vetítés egymás utáni alkalmazásával áll elő. Először a perspektivitás analitikus leírását fogjuk megadni.



Tekintsük a Σ és Σ' síkokat és az O vetítési centrumot. A Σ-ban az $\{O_1,\underline{b},\underline{c}\}$ és a Σ'-ben az $\{O_2,\underline{d},\underline{e}\}$ alkot koordinátarendszert. Az adott $P\in\Sigma$ pont koordinátái (ξ,η), az ismeretlen $P'\in\Sigma'$ ponté pedig (ξ',η') a megfelelő koordinátarendszerben. A (ξ,η) és (ξ',η') közötti kapcsolatot kell megadnunk. Az ábrának megfelelően legyen $\mathbf{E}^3$-ban $\underline{a}(a_1,a_2,a_3)$, $\underline{b}(b_1,b_2,b_3)$, $\underline{c}(c_1,c_2,c_3)$, $\underline{d}(d_1,d_2,d_3)$, $\underline{e}(e_1,e_2,e_3)$, $\underline{k}(k_1,k_2,k_3)$. Az $\overrightarrow{O_1P'}$ vektort kétféle képpen is elő lehet állítani, ebből adódik a következő egyenlőség:

$$\underline{a} + \overrightarrow{OP'} = \underline{k} + \overrightarrow{O_2P'}.$$

Felhasználva, hogy $\overrightarrow{OP'} = \rho\overrightarrow{OP}$ és $\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{O_1P'} - \underline{a}$, az előbbi egyenlőség részletesen

$$\underline{a}+\rho(\xi\underline{b}+\eta\underline{c}-\underline{a})=\underline{k}+(\xi'\underline{d}+\eta'\underline{e}).$$

Mivel P-t ismerjük, a ξ és η ismert, míg ρ, ξ' és η' ismeretlen. Ez utóbbiakat egy oldalra rendezve

$$\xi'\underline{d}+\eta'\underline{e}+\rho(\underline{a}-\xi\underline{b}-\eta\underline{c})=\underline{a}-\underline{k},$$

komponensekben

$$\begin{aligned}\xi'd_1+\eta'e_1+\rho(a_1-\xi b_1-\eta c_1)&=a_1-k_1\\ \xi'd_2+\eta'e_2+\rho(a_2-\xi b_2-\eta c_2)&=a_2-k_2\\ \xi'd_3+\eta'e_3+\rho(a_3-\xi b_3-\eta c_3)&=a_3-k_3\end{aligned}$$

amely egy lineáris egyenletrendszer a ρ, ξ' és η' ismeretlenekre és a Cramer-szabály értelmében megoldható. Mivel az alapmátrix determinánsa

$$D=\begin{vmatrix} d_1 & e_1 & a_1-\xi b_1-\eta c_1\\ d_2 & e_2 & a_2-\xi b_2-\eta c_2\\ d_3 & e_3 & a_3-\xi b_3-\eta c_3\end{vmatrix}\neq 0.$$

Ha $D\equiv 0$ bármely ξ, η-ra, akkor a (0,0) esetében $\underline{d}$, $\underline{e}$, $\underline{a}$, (0,1) esetében $\underline{d}$, $\underline{e}$, $\underline{a}$-$\underline{c}$, (1,0) esetében $\underline{d}$, $\underline{e}$, $\underline{a}$-$\underline{b}$ lineárisan függő vektorhármasokat alkotnának, azaz $\underline{a}$, $\underline{a}$-$\underline{b}$, $\underline{a}$-$\underline{c}$ és ezzel együtt O a Σ-ban vannak. Ekkor nem tudunk vetíteni.

Ha $D=0$ valamely ξ,η-ra, akkor $\underline{d}$, $\underline{e}$, $\underline{a}-\xi\underline{b}-\eta\underline{c}$ lineárisan függőek, azaz a vetítősugár párhuzamos a Σ'-vel.

Visszatérve az egyenletrendszer megoldására

$$\xi' = \frac{\begin{vmatrix} a_1 - k_1 & e_1 & a_1 - \xi b_1 - \eta c_1 \\ a_2 - k_2 & e_2 & a_2 - \xi b_2 - \eta c_2 \\ a_3 - k_3 & e_3 & a_3 - \xi b_3 - \eta c_3 \end{vmatrix}}{D} \qquad \eta' = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & a_1 - k_1 & a_1 - \xi b_1 - \eta c_1 \\ d_2 & a_2 - k_2 & a_2 - \xi b_2 - \eta c_2 \\ d_3 & a_3 - k_3 & a_3 - \xi b_3 - \eta c_3 \end{vmatrix}}{D}.$$

A determinánsokat kifejtve ξ,η-ban lineáris kifejezéseket kapunk, így

$$\xi' = \frac{a_{11}\xi + a_{12}\eta + a_{13}}{a_{31}\xi + a_{32}\eta + a_{33}} \qquad \eta' = \frac{a_{21}\xi + a_{22}\eta + a_{23}}{a_{31}\xi + a_{32}\eta + a_{33}}.$$

A Σ és Σ' euklideszi síkok közötti centrális vetítés tört-lineáris kifejezéssel adható meg. Most mindkét síkon vezessük be a homogén koordinátákat:

$$\xi = \frac{x_1}{x_3},\quad \eta = \frac{x_2}{x_3},\quad \xi' = \frac{x'_1}{x'_3},\quad \eta' = \frac{x'_2}{x'_3},$$

ezzel a tört-lineáris kifejezéseink a következő alakot öltik:

$$\frac{x'_1}{x'_3} = \frac{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3}{a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3} \qquad \frac{x'_2}{x'_3} = \frac{a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3}{a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3}.$$

A Σ és Σ' síkokat projektív síkká téve a centrális vetítést a következő egyenletek írják le:

$$\begin{aligned} x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \,, \\ x'_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{aligned}$$

ahol az a_{ik} konstansok egy olyan mátrixot alkotnak, melynek a determinánsa zérustól különböző: $x'_i = a_{ik}x_k$, $|a_{ik}| \neq 0$. Nemcsak a perspektivitás, hanem az általános projektivitás is ezzel az egyenletrendszerrel írható le, mivel véges sok ilyen típusú transzformáció egymás utáni alkalmazásakor kapott kifejezés mindig hasonló alakra hozható.

Tekintsük az $\overline{x}_i = a_{ik}x_k$, $|a_{ik}| \neq 0$ (i,k=1,2,3) transzformációkat, melyek inverze az $x_i = b_{ik}\overline{x}_k$. Rendeljük hozzá minden $P(x_i)$ ponthoz az $(\overline{x}_i)$ számhármast a fenti módon. Ez egy pontkoordináta-transzformációt eredményez, amely maga után vonja egyeneskoordináták transzformációját. Az $x_iu_i=0$ egyenesen hajtsuk végre a transzformációt, ekkor az $u_i b_{ik}\overline{x}_k = 0$ összefüggésből az új egyeneskoordináták $\overline{u}_k = u_i b_{ik}$, melyek u_i-ben szintén lineárisan homogének.

A projektív síkgeometria alaptétele

Láttuk, hogy síknak síkra való vetítésekor a pontok koordinátáiból a képpontok koordinátáit tört-lineáris transzformációként lehet megkapni, amely a homogén koordinátákra áttérve homogén lineáris transzformációként írható át, és egyenletrendszere $x'_i = a_{ik} x_k$ alakú.
Emlékeztetünk arra, hogy a síkok közötti projektivitást (véges sok perspektivitás egymásutánja) 4 pontpárból származtathatjuk, azaz a síkok közötti projektivitást 4 pontpár határozza meg.
A projektív sík analitikus modelljében a koordináta transzformációt, úgy kell tekinteni, hogy van egy alakzatunk valamilyen egyenlettel, és ahhoz más egyenletet szeretnénk.

Pl. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ ellipszis az egyenlőszárú derékszögű koordinátarendszerben. Ha azonban bevezetjük az $x = \frac{1}{3}x'$ és $y = \frac{1}{2}y'$ egyenletekkel megadott koordináta-transzformációt, akkor egy $\frac{(\frac{1}{3}x')^2}{4} + \frac{(\frac{1}{2}y')^2}{9} = 1$ egyenletet kapunk. Egyszerűsítve az $x^2 + y^2 = 36$ köregyenletet kapjuk.

Tétel

A síkbeli projektív koordináta transzformációt 4 általános helyzetű (bármely 3 nincs egy egyenesen) pont régi és új koordinátái meghatározzák.

(Ezzel számítás szempontjából teljesen azonos, hogy a transzformációt 4 általános helyzetű pontpár határozza meg, azaz 4 pont és képe egy koordinátarendszerben meghatározza a transzformációt.)

Bizonyítás

Legyen a projektivitást meghatározó 4 pontpár:

$$P_1(\underset{(1)}{x}{}_i) \to P'_1(\underset{(1)}{x'}{}_i)$$
$$P_2(\underset{(2)}{x}{}_i) \to P'_2(\underset{(2)}{x'}{}_i)$$
$$P_3(\underset{(3)}{x}{}_i) \to P'_3(\underset{(3)}{x'}{}_i)$$
$$P_4(\underset{(4)}{x}{}_i) \to P'_4(\underset{(4)}{x'}{}_i)$$

A P_1, P_2, P_3, P_4 pontok közül bármely három nem illeszkedik egy egyenesre, ha az

$$(\underset{(1)}{x}{}_i \quad \underset{(2)}{x}{}_i \quad \underset{(3)}{x}{}_i \quad \underset{(4)}{x}{}_i)$$

mátrixból bármely harmadrendű determináns nem zérus.
A P'_1, P'_2, P'_3, P'_4 pontok szintén általános helyzetű pontok, akkor ezek koordinátái hasonló feltételt elégítenek ki, azaz az

$$(\underset{(1)}{x'}{}_i \quad \underset{(2)}{x'}{}_i \quad \underset{(3)}{x'}{}_i \quad \underset{(4)}{x'}{}_i)$$

mátrixból bármely harmadrendű determináns nem zérus.
Figyelembe kell vennünk, hogy a pontokhoz a homogén koordináták arányosság erejéig tartoznak. Ezért az $(\underset{(1)}{x}{}_i)$ és a $(\rho \cdot \underset{(1)}{x}{}_i)$ a P_1 pontot határozzák meg, és ehhez

hasonlóan a többi pont esetén is figyelembe kell vennünk zérustól különböző konstansokat.
Tegyük fel, hogy a transzformációt leíró 3×3-as (a_{ik}) mátrixra $|a_{ik}| \neq 0$. Vegyük az első három pontot és alkalmazzuk rájuk a transzformációt:

$$\rho'_1 \cdot \underset{(1)}{x'}_i = a_{ik} \rho_1 \cdot \underset{(1)}{x}_k$$

$$\rho'_2 \cdot \underset{(2)}{x'}_i = a_{ik} \rho_2 \cdot \underset{(2)}{x}_k$$

$$\rho'_3 \cdot \underset{(3)}{x'}_i = a_{ik} \rho_3 \cdot \underset{(3)}{x}_k$$

A ρ_i-k nem nullák, ezért

$$\frac{\rho'_S}{\rho_S} \cdot \underset{(S)}{x'}_i = a_{ik} \cdot \underset{(S)}{x}_k , \qquad (s=1,2,3).$$

Rögzített i-k mellett ez az egyenletrendszer megoldható az a_{ik}-ra (pl. a Gauss-féle módszerrel), mert az alapmátrix determinánsa nem zérus. (Ugyanis az első három pont koordinátáiból képzett mátrix az alapmátrix.) Az alapmátrix inverzének elemeit jelölje ξ_{Sr}, azaz $\underset{(S)}{x}_k \xi_{Sr} = \delta_{kr}$. Ekkor az előbbi egyenleteket ξ_{Sr} -rel jobbról végigszorozva

$$\frac{\rho'_S}{\rho_S} \cdot \underset{(S)}{x'}_i \cdot \xi_{Sr} = a_{ik} \cdot \underset{(S)}{x}_k \cdot \xi_{Sr} = a_{ik} \cdot \delta_{kr} = a_{ir} .$$

A $\frac{\rho'_S}{\rho_S}$ határozatlan konstansok erejéig határozhatók meg az a_{ir} elemek. A $\frac{\rho'_S}{\rho_S}$ meghatározásához a negyedik pontra is felírjuk a ponttranszformációt

$$\frac{\rho'_4}{\rho_4} \cdot \underset{(4)}{x'}_i = a_{ik} \cdot \underset{(4)}{x}_k = \frac{\rho'_S}{\rho_S} \cdot \underset{(S)}{x'}_i \cdot \xi_{Sk} \cdot \underset{(4)}{x}_k ,$$

melyben a $\frac{\rho'_S}{\rho_S}$ mennyiségeket a $\frac{\rho'_4}{\rho_4}$ függvényeként kapjuk, mely a pontkoordináták homogenitása miatt nem okoz problémát.

Tétel

A projektív pontkoordináta-transzformációk összessége a transzformációk egymás utáni elvégzésére, mint műveletre nézve, csoportot alkot, melyet *projektív transzformációs csoport*nak nevezünk.

Bizonyítás

Az $x'_i = a_{ik} x_k$, $|a_{ik}| \neq 0$ transzformációt most mátrix alakban adjuk meg.

$$X = (x_1 \quad x_2 \quad x_3), \qquad X' = (x'_1 \quad x'_2 \quad x'_3), \quad A = (a_{ik})$$

Ekkor az egyenletrendszer $(X')^T = A \cdot X^T$.

Két projektív transzformációt egymás után végrehajtva:

$$(x_i) \to (x'_i) \to (x''_i), \qquad x'_i = a_{ik} x_k , \ |a_{ik}| \neq 0 \quad \text{és} \qquad x''_i = b_{ik} x'_k , \ |b_{ik}| \neq 0$$

$$(X')^T = A \cdot X^T$$

$$(X'')^T = B \cdot (X')^T$$

Az $(X'')^T = B \cdot A \cdot X^T$ és a B·A mátrix szintén reguláris, amely a determinánsok szorzástételéből adódik.

A projektív transzformációk egymás utáni végrehajtása rendelkezik az asszociativitás tulajdonságával a reguláris mátrixok hasonló tulajdonsága miatt.

Létezik egység-transzformáció, melyet az egységmátrixszal adhatunk meg és hatása az identitás.

Minden transzformációnak létezik inverze, és ha az eredeti transzformációt az A mátrixszal írtuk le, akkor ezt az A^{-1} inverz mátrix adja meg, ennek a létezését az A regularitása biztosítja.

Megjegyzés

A projektív geometria a projektív transzformációs csoport invariáns elmélete.

A projektív transzformáció csoportnak vannak nevezetes részcsoportjai, ezek közül mutatunk be néhányat.

Affin transzformáció csoport

Azon transzformációk tartoznak ide, melyeknél a sík végtelen távoli egyenese önmagának/egymásnak felel meg. $x_3=0 \rightarrow x'_3=0$

Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy a végtelen távoli egyenesek egymásnak feleljenek meg az, hogy a transzformáció mátrixában $a_{31}=a_{32}=0$ és $a_{33}\neq 0$ legyen.

Ha $a_{31}=a_{32}=0$ és $a_{33}\neq 0$, akkor $x'_3=0\cdot x_1+0\cdot x_2+a_{33}\cdot x_3$

és ha $x_3=0$, akkor $x'_3=0$.

Ha $x_3=0 \rightarrow x'_3=0$, akkor $x'_3=a_{31}\cdot x_1+a_{32}\cdot x_2+a_{33}\cdot x_3$-ból

$0=a_{31}\cdot x_1+a_{32}\cdot x_2$-nek minden x_1, x_2-re fenn kell állnia, ezért

$a_{31}=a_{32}=0$ és $a_{33}\neq 0$.

Az affin transzformáció alakja

$$x'_1=a_{11}\cdot x_1+a_{12}\cdot x_2+a_{13}\cdot x_3$$
$$x'_2=a_{21}\cdot x_1+a_{22}\cdot x_2+a_{23}\cdot x_3$$
$$x'_3= a_{33}\cdot x_3$$

Térjünk vissza az euklideszi síkra.

$$x'=a_1\cdot x+b_1\cdot y+c_1 \qquad y'=a_2\cdot x+b_2\cdot y+c_2 \qquad \text{ahol} \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Hasonlósági transzformációk (Klein-csoport)

Tekintsük a valós és képzetes nem-elfajuló másodrendű görbéket, melyek egyenlete homogén koordinátákban

$$x_1^2 + x_2^2 \mp x_3^2 = 0.$$

Ezeknek a görbéknek vannak metszéspontjai az $x_3=0$ végtelen távoli egyenessel, melyeket *abszolút képzetes körpontok*nak nevezünk és koordinátáik:

$I_1(1,i\ 0)$, $\qquad I_2(1,-i,0)$.

(Ha az előbbi másodrendű görbéket a végtelen távoli egyenessel metszeni akarjuk, akkor a következő egyenletrendszert kell megoldanunk:

$$x_1^2 + x_2^2 \mp x_3^2 = 0$$
$$x_3=0.$$

Ezt felhasználva, görbe végtelen távoli pontjának koordinátái kielégítik az $x_1^2 + x_2^2 = 0$ egyenletet. Ennek az egyenletnek a triviálistól különböző megoldásai adják az abszolút képzetes körpontok koordinátáit.)
Tekintsük azokat az affin transzformációkat, melyek az abszolút képzetes körpontokat invariánsan hagyják. Két eset lehetséges, vagy mind a két pontot önmagába viszik a transzformációk vagy pedig felcserélik.
Az affin transzformációt leíró

$$\begin{aligned}\tilde{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3\\ \tilde{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3\\ \tilde{x}_3 &= a_{33}x_3\end{aligned}$$

egyenletrendszert szeretnénk pontosabban meghatározni.
1) Az I_1, I_2 pontokat önmagukra leképező transzformációk :

$$I_1 = \tilde{I}_1 \text{, azaz } \begin{matrix} x_1 = 1, & x_2 = i, & x_3 = 0 \\ \tilde{x}_1 = 1, & \tilde{x}_2 = i, & \tilde{x}_3 = 0 \end{matrix} \text{ és}$$

$$I_2 = \tilde{I}_2 \text{, azaz. } \begin{matrix} x_1 = 1, & x_2 = -i, & x_3 = 0 \\ \tilde{x}_1 = 1, & \tilde{x}_2 = -i, & \tilde{x}_3 = 0 \end{matrix}$$ egyenlőségeknek kell teljesülniük. Ebből

$$\begin{matrix} 1 = a_{11} + i \cdot a_{12} \\ i = a_{21} + i \cdot a_{22} \end{matrix} \quad \text{valamint} \quad \begin{matrix} 1 = a_{11} - i \cdot a_{12} \\ -i = a_{21} - i \cdot a_{22} \end{matrix}$$

következik. Az a_{ij} mátrix elemeire $a_{11}=a_{22}$ és $a_{12}=-a_{21}$ feltételek adódnak.
2) Az I_1, I_2 pontokat felcserélő transzformációk :

$$I_1 = \tilde{I}_2 \text{, azaz } \begin{matrix} x_1 = 1, & x_2 = i, & x_3 = 0 \\ \tilde{x}_1 = 1, & \tilde{x}_2 = -i, & \tilde{x}_3 = 0 \end{matrix} \text{ és}$$

$$I_2 = \tilde{I}_1 \text{,azaz. } \begin{matrix} x_1 = 1, & x_2 = -i, & x_3 = 0 \\ \tilde{x}_1 = 1, & \tilde{x}_2 = i, & \tilde{x}_3 = 0 \end{matrix}$$ egyenlőségeknek kell teljesülniük. Ebből

$$\begin{matrix} 1 = a_{11} + i \cdot a_{12} \\ -i = a_{21} + i \cdot a_{22} \end{matrix} \quad \text{valamint} \quad \begin{matrix} 1 = a_{11} - i \cdot a_{12} \\ i = a_{21} - i \cdot a_{22} \end{matrix}$$

következik. Az a_{ij} mátrix elemeire $a_{11}=-a_{22}$ és $a_{12}=a_{21}$ feltételek adódnak.

Ekkor az egyenletrendszerünk a következő alakot ölti:

$$\begin{aligned}\tilde{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3\\ \tilde{x}_2 &= \mp a_{21}x_1 \pm a_{22}x_2 + a_{23}x_3\\ \tilde{x}_3 &= a_{33}x_3\end{aligned}$$

Visszatérünk az euklideszi síkra

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= a_1x + a_2y + a_3\\ \tilde{y} &= \mp a_2x \pm a_1y + a_4\end{aligned}$$

Az $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ \mp a_2 & \pm a_1 \end{pmatrix}$ mátrix sorait önmagukkal komponálva megegyező értékeket kapunk, míg a különböző sorokat összeszorozva zérust kapunk. Ez a tulajdonság az ortogonális mátrixokéhoz hasonló, de itt egy konstans szorzóban van eltérés

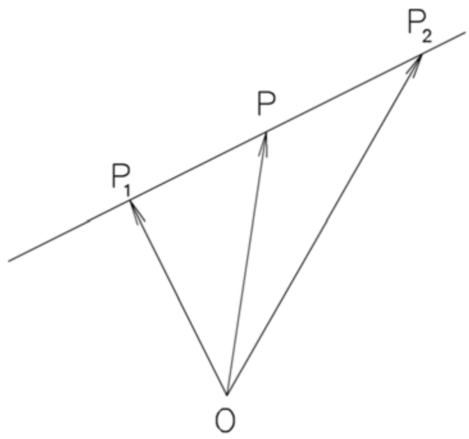
$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ \mp a_2 & \pm a_1 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \mp\sin\alpha & \pm\cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Így

$$\tilde{x} = r(x \cdot \cos\alpha + y \cdot \sin\alpha) + a_3$$
$$\tilde{y} = r(\mp x \cdot \sin\alpha \pm y \cdot \cos\alpha) + a_4$$

Az r-rel való szorzás egy nyújtást, a zárójeles transzformáció egy forgatást, az a_3, a_4 konstansok hozzáadása egy eltolást eredményez.
Az r a hasonlóság aránya, abban az esetben, ha r=1, akkor az euklideszi transzformációkat kapjuk.

Koordinátarendszer projektív egyenesen



Megadunk a projektív síkban két különböző pontot homogén koordinátákkal: $P_1(\underset{1}{x_i})$ és $P_2(\underset{2}{x_i})$. A P_1 és P_2 pontok egyenesére illeszkedő bármely $P(x_i)$ pont koordinátáira

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \underset{1}{x_1} & \underset{1}{x_2} & \underset{1}{x_3} \\ \underset{2}{x_1} & \underset{2}{x_2} & \underset{2}{x_3} \end{pmatrix} < 3$$ vagy ami ezzel egyenértékű,

a mátrix determinánsa zérus.

Ez azt fogja jelenteni, hogy bármely, az egyenesre illeszkedő pont homogén koordinátája a két adott pont koordinátáiból lineáris kombinációval nyerhető.

$$x_i = \lambda_1 \cdot \underset{1}{x_i} + \lambda_2 \cdot \underset{2}{x_i}$$

A λ_1 és λ_2 egymástól függetlenül befutják a valós számokat, így az egyenes minden pontjának a koordinátáit meghatározzák. Azt tudjuk, hogy minden pontot több homogén koordinátahármas is jellemezhet. Ha most a P_1 vagy a P_2 eddigi koordinátája helyett egy másik koordinátahármast választunk, akkor egy tetszőlegesen választott P ponthoz más λ_1 és λ_2 értékek számolhatók ki, ráadásul még a különböző λ_1, λ_2 értékek aránya sem állandó. Szeretnénk azt elérni, hogy bármely P ponthoz arányosság erejéig tudjuk rendelni a λ_1, λ_2 értékeket.

Ehhez a P_1 és P_2 pontok koordinátáit rögzíteni fogjuk, ami azt jelenti, hogy amíg az általuk meghatározott egyenes pontjait jellemezni akarjuk, addig csak ezeket a koordinátákat használhatjuk fel a λ_1, λ_2 kiszámolásához. Az egyenesen ki fogunk jelölni egy ún. egységpontot, amely olyan tulajdonsággal rendelkezik, hogy a koordinátái $e_i = \underset{1}{x_i} + \underset{2}{x_i}$. (Az egységpont esetén $\lambda_1=\lambda_2=1$.) Az egységpont kiválasztása rögzíti a P_1 és P_2 koordinátáit és ezzel minden λ_1, λ_2 számpár az egyenes egy pontját határozza meg, de minden ponthoz konstansszorzó (zérustól különböző) erejéig rendelhetünk számpárokat.

Ezzel egy projektív koordináta-alapalakzatot definiáltunk az egyenesen.

A kezdőpont P_2, melynek az egyenesre vonatkozó koordinátái: (0,1).
A végtelen távoli pont P_1, melynek az egyenesre vonatkozó koordinátái: (1,0).
Az egységpont E, melynek az egyenesre vonatkozó koordinátái: (1,1).

Egy projektív egyenesen fekvő pontnak a projektív egyenesre vonatkozó koordinátáit úgy határozhatjuk meg, hogy ha az egyenesen három egymástól különböző P_1, P_2, E pontot választunk, melyekre teljesül, hogy a P_1, P_2 pontokkal való paraméteres előállításban az E ponthoz tartozó (λ_1, λ_2) számpárra $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = 1$, akkor bármely ($\lambda_1$, λ_2) számpárhoz az egyenesnek pontosan egy pontja tartozik. Minden egyenesen lévő ponthoz végtelen sok valós számpár tartozik, de bármely két ilyen számpár egy konstansszorzóban tér el egymástól. Ezen kívül a (0,0) számpárt ki kell zárnunk a lehetséges koordináták közül. Az egyenes pontjaihoz rendelt (λ_1,

λ_2) számpárokat a pont egyenesen lévő alapalakzatra vonatkozó projektív koordinátáinak nevezzük.

Minden ponthoz hozzá lehet rendelni a $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ értéket is. Ez már nem rendelkezik a homogenitás tulajdonságával. A $\lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ értéket a pont *inhomogén koordinátá*jának nevezzük. A P_1 pont esetén ez így nem tehető meg, ezért a ∞ szimbólumot rendeljük hozzá.

(Az inhomogén koordináták hozzárendelés ahhoz hasonló, mintha egy „skálázást" végeztünk volna az egyenesen. A vonalzón általában egység szerinti beosztás van. Ha a projektív egyenesen is meghatároznánk a 0 és 1 pontokon kívül a többi egész értékhez, mint inhomogén koordinátához, tartozó pontokat, akkor egy „projektív vonalzót kapnánk.")

Példa

Az euklideszi síkon az A(-2, 1) és B(2, 3) pontok egyenese az x-2y+4=0. Legyen B a kezdőpont és A a végtelen távoli pont. A pontok (-2, 1, 1) és (2, 3, 1) homogén koordinátáit felhasználva az egyenes pontjainak homogén koordinátái: $(-2\lambda_1+2\lambda_2, \lambda_1+3\lambda_2, \lambda_1+\lambda_2)$. A C(8,6) pont illeszkedik erre az egyenesre. A (8, 6, 1) homogén koordinátákat felhasználva a (λ_1, λ_2) megoldása a

$$8=-2\lambda_1+2\lambda_2$$
$$6=\lambda_1+3\lambda_2$$
$$1=\lambda_1+\lambda_2$$

egyenletrendszernek. $\lambda_1 = -\frac{3}{2}$, $\lambda_2 = \frac{5}{2}$ és az inhomogén koordináta: $-\frac{3}{5}$. Ha a C pont egy másik homogén koordinátahármasát használjuk fel, akkor az inhomogén koordináta változatlan marad. A (16, 12, 2) homogén koordinátákat felhasználva a (λ_1, λ_2) megoldása a

$$16=-2\lambda_1+2\lambda_2$$
$$12=\lambda_1+3\lambda_2$$
$$2=\lambda_1+\lambda_2$$

egyenletrendszernek. $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 5$ és az inhomogén koordináta: $-\frac{3}{5}$.

Most válasszunk az A pont (-6, 3, 3) és a B pont (8, 12, 4) homogén koordinátáit. A C pont (8, 6, 1) homogén koordinátáit felhasználva a $(\underline{\lambda}_1, \underline{\lambda}_2)$ megoldása a

$$8=-2\underline{\lambda}_1+2\underline{\lambda}_2$$
$$6=\underline{\lambda}_1+3\underline{\lambda}_2$$
$$1=\underline{\lambda}_1+\underline{\lambda}_2$$

egyenletrendszernek. $\underline{\lambda}_1 = \frac{1}{2}$, $\underline{\lambda}_2 = \frac{5}{8}$ és az inhomogén koordináta: $\frac{4}{5}$.

Ez utóbbi esetet szeretnénk kizárni. Ennek érdekében az A(-2, 1, 1) és B(2, 3, 1) homogén koordinátákból egységpontot határozunk meg. Az E pont egyenes-koordinátája $\lambda_1=\lambda_2=1$, azaz az egységpont (0, 4, 2) homogén koordinátákkal megadva, az euklideszi síkon ez a (0, 2) pont.

Összefoglalva:

	Descartes-k.	Homogén k.	Egyenes k.	Inhomogén k.	
A	(-2, 1)	(-2, 1, 1)	(1, 0)	∞	Végtelen távoli pont
B	(2, 3)	(2, 3, 1)	(0, 1)	0	Kezdőpont
C	(8, 6)	(8, 6, 1)	(-3, 5)	$-\frac{3}{5}$	Általános pont
E	(0, 2)	(0, 4, 2)	(1, 1)	1	Egységpont

Számítsuk ki a következő kettősviszonyt!

(CEBA)=(általános pont, egységpont, kezdőpont, végtelen távoli pont)=$\dfrac{(CEB)}{(CEA)}=\dfrac{-3}{5}$, azaz ha a pontokat ebben a sorrendben vesszük, akkor a kettősviszony értéke az általános pont inhomogén koordinátáját adja az A, B, E koordináta-alapalakzatra nézve.

Koordináta-transzformáció

A g egyenesen a $P_1(\underset{1}{x}_i)$, P_2 $(\underset{2}{x}_i)$ és $E(e_i)$ pontok alkossanak koordinátaalakzatot. Ebben $e_i=\underset{1}{x}_i+\underset{2}{x}_i$ és tetszőleges $P(x_i)$ pont $x_i=\lambda_1\cdot\underset{1}{x}_i+\lambda_2\cdot\underset{2}{x}_i$ alakban állítható elő. Válasszunk a g egyenesen egy másik koordinátaalakzatot a $P'_1(\underset{1}{x}'_i)$, $P'_2(\underset{2}{x}'_i)$ és $E'(e'_i)$ pontokkal, ahol $e'_i=\underset{1}{x}'_i+\underset{2}{x}'_i$ és egy tetszőleges pontra $x'_i=\lambda'_1\cdot\underset{1}{x}'_i+\lambda'_2\cdot\underset{2}{x}'_i$.

A P'_1 , P'_2 és E' pontok a régi alakzatban a következő alakban állíthatók elő:

$$\underset{\alpha}{x}'_i=c_{\alpha\beta}\cdot\underset{\beta}{x}_i \quad (\alpha,\beta=1,2) \qquad \underset{1}{x}'_i=c_{11}\cdot\underset{1}{x}_i+c_{12}\cdot\underset{2}{x}_i$$

$$\underset{2}{x}'_i=c_{21}\cdot\underset{1}{x}_i+c_{22}\cdot\underset{2}{x}_i$$

$$e'_i=\varepsilon_\alpha\cdot\underset{\alpha}{x}_i \qquad e'_i=\varepsilon_1\cdot\underset{1}{x}_i+\varepsilon_2\cdot\underset{2}{x}_i$$

A fenti összefüggésekből következik, hogy

$$e_i=\underset{1}{x}_i+\underset{2}{x}_i=c_{11}\cdot\underset{1}{x}_i+c_{12}\cdot\underset{2}{x}_i+c_{21}\cdot\underset{1}{x}_i+c_{22}\cdot\underset{2}{x}_i=(c_{11}+c_{21})\cdot\underset{1}{x}_i+(c_{12}+c_{22})\cdot\underset{2}{x}_i\,.$$

A homogenitás miatt az e'_i egyenes koordinátákra:

$$\frac{\varepsilon_1}{\kappa}=c_{11}+c_{21}$$

$$\frac{\varepsilon_2}{\kappa}=c_{12}+c_{22}$$

Megjegyzés

A P'_1ésP'_2 pontokat $(\rho c_{11},\rho c_{12})$ és $(\mu c_{21},\mu c_{22})$ koordinátákkal is megadhatjuk, ekkor a fenti összefüggés a következő alakú lesz:

$$\frac{\varepsilon_1}{\kappa}=\rho c_{11}+\mu c_{21}$$

$$\frac{\varepsilon_2}{\kappa}=\rho c_{12}+\mu c_{22}$$

Ezen egyenletekből a ρ és μ tényezők meghatározhatóak, ha $|c_{\alpha\beta}|\neq 0$.

Mivel a P'_1 és P'_2 pontok különbözőek, a koordinátáikból képzett mátrixra teljesül, hogy

$$\mathrm{rang}\begin{pmatrix} \underset{1}{x'}_i \\ \underset{2}{x'}_i \end{pmatrix} = 2 .$$

Ha ennek a mátrixnak bármely másodrendű determinánsát vesszük, akkor pl:

$$\begin{vmatrix} \underset{1}{x'}_1 & \underset{1}{x'}_2 \\ \underset{2}{x'}_1 & \underset{2}{x'}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{1\beta}\cdot\underset{\beta}{x}_1 & c_{1\beta}\cdot\underset{\beta}{x}_2 \\ c_{2\beta}\cdot\underset{\beta}{x}_1 & c_{2\beta}\cdot\underset{\beta}{x}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} \underset{1}{x}_1 & \underset{1}{x}_2 \\ \underset{2}{x}_1 & \underset{2}{x}_2 \end{vmatrix},$$

ahol $|\underset{\alpha}{x'}_\beta|\neq 0$ és $|\underset{\alpha}{x}_\beta|\neq 0$ és a determinánsok szorzástétele alapján $|c_{\alpha\beta}|\neq 0$.

Így a ρ és μ számok meghatározhatók és az egyszerűség kedvéért a $\rho c_{1\alpha}$ és $\mu c_{2\alpha}$ mennyiségeket továbbra is $c_{1\alpha}$-val és $c_{2\alpha}$-val fogjuk jelölni.

Egy tetszőleges pont koordinátáira:

$x'_i = \lambda'_\alpha \cdot \underset{\alpha}{x'}_i = \lambda'_\alpha \cdot c_{\alpha\beta}\cdot \underset{\beta}{x}_i = \lambda_\beta \cdot \underset{\beta}{x}_i$, ahol (λ_1,λ_2) az x'_i pontnak a régi koordinátaalakzatra vonatkozó koordinátái. Innen $\lambda_\alpha = c_{\beta\alpha}\lambda'_\beta$, ahol $|c_{\alpha\beta}|\neq 0$. A transzformáció inverzét használva: $\lambda'_\alpha = c^{-1}_{\beta\alpha}\lambda_\beta$.

Tétel

Ha valamely g egyenesen két különböző koordinátaalakzatot írunk elő, akkor az ezekre vonatkozó λ_α és λ'_α egyenes koordináták a $\lambda_\alpha = c_{\beta\alpha}\lambda'_\beta$, $|c_{\alpha\beta}|\neq 0$ alakú lineáris transzformációval függnek össze.

Kettősviszony

Definíció

Egy projektív egyenes négy egymástól különböző L_1, L_2, L_3, L_4 pontjának a kettősviszonyán a következő értéket értjük:

$$(L_1L_2L_3L_4) = \frac{\begin{vmatrix} \underset{3}{\lambda}_1 & \underset{1}{\lambda}_1 \\ \underset{3}{\lambda}_2 & \underset{1}{\lambda}_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \underset{3}{\lambda}_1 & \underset{2}{\lambda}_1 \\ \underset{3}{\lambda}_2 & \underset{2}{\lambda}_2 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} \underset{4}{\lambda}_1 & \underset{1}{\lambda}_1 \\ \underset{4}{\lambda}_2 & \underset{1}{\lambda}_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \underset{4}{\lambda}_1 & \underset{2}{\lambda}_1 \\ \underset{4}{\lambda}_2 & \underset{2}{\lambda}_2 \end{vmatrix}}$$

ahol $\underset{I}{\lambda}_\alpha$ (I=1, 2, 3, 4; α=1, 2) rendre az L_1, L_2, L_3, L_4 pontoknak az egyenes-koordinátái (valamely alapalakzatra nézve).

Tétel

A kettősviszony független a síkbeli pont-koordinátarendszertől.

Bizonyítás

Hajtsunk végre egy $(x_i)\to(x_i')$ koordináta-transzformációt, melyet az $x_i'=a_{ik}x_k$, $|a_{ik}|\neq 0$ egyenletek írnak le. Az egyenesen lévő alapalakzatban egy pont $x_i = \lambda_1 \cdot \underset{1}{x}_i + \lambda_2 \cdot \underset{2}{x}_i$ alakban állítható elő. Alkalmazzuk a transzformációt!

$$x_i' = a_{ik}x_i = a_{ik}(\lambda_1 \cdot \underset{1}{x}_i + \lambda_2 \cdot \underset{2}{x}_i) = \lambda_1 \cdot a_{ik}\underset{1}{x}_i + \lambda_2 \cdot a_{ik}\underset{2}{x}_i = x_i = \lambda_1 \cdot \underset{1}{x}'_i + \lambda_2 \cdot \underset{2}{x}'_i$$

Ez azt jelenti, hogy a pontoknak az egyenesen lévő projektív koordinátái nem változnak meg akkor, ha a kezdőpont, végtelen távoli pont és egységpont képe a transzformáció után ugyanilyen szerepet kap a koordinátarendszerben. A pontok egyenes-koordinátái nem változnak egy transzformáció során, emiatt a kettősviszony sem, ami ezekből van kifejezve.

Tétel

A kettősviszony független az egyenesen választott projektív koordinátarendszertől.

Bizonyítás

Hajtsunk végre egy $(\lambda_\alpha)\to(\lambda_\alpha')$ koordináta-transzformációt, melyet az $\lambda_\alpha'=c_{\alpha\beta}\lambda_\beta$, $|c_{\alpha\beta}|\neq 0$ egyenletek írnak le. Ekkor

$$\begin{vmatrix} \underset{3}{\lambda}'_1 & \underset{1}{\lambda}'_1 \\ \underset{3}{\lambda}'_2 & \underset{1}{\lambda}'_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{1\beta} \cdot \underset{3}{x}_\beta & c_{1\beta} \cdot \underset{1}{x}_\beta \\ c_{2\beta} \cdot \underset{3}{x}_\beta & c_{2\beta} \cdot \underset{1}{x}_\beta \end{vmatrix} = |c_{\alpha\beta}| \cdot \begin{vmatrix} \underset{3}{\lambda}_1 & \underset{1}{\lambda}_1 \\ \underset{3}{\lambda}_2 & \underset{1}{\lambda}_2 \end{vmatrix}.$$

A definícióban mindkét törtet $|c_{\alpha\beta}|$-sal lehet egyszerűsíteni, vagyis a kettősviszony értéke nem fog változni.

Meg kell mutatni, hogy ez a definíció azonos véges helyzetű pontokra a szintetikus definícióval:

$$(L_1L_2L_3L_4) = \frac{(L_1L_2L_3)}{(L_1L_2L_4)} = \frac{L_1L_3}{L_2L_3} : \frac{L_1L_4}{L_2L_4},$$

ahol L_iL_j az L_i és L_j pontok által meghatározott irányított szakasz előjeles euklideszi hosszát jelenti.

Az egyenesen bevezetünk egy koordinátarendszert, melyben a $P_1(1, 0)$ a végtelen távoli pont, $P_2(0,1)$ a kezdőpont, $E(1,1)$ az egységpont és $P(\lambda_1,\lambda_2)$ egy tetszőleges pont. (A zárójelben lévő koordináták az egyenesen lévő projektív koordináták.)

$$(P_1P_2EP) = \frac{\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix}\lambda_1 & 1\\ \lambda_2 & 0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\lambda_2 & 0\\ \lambda_1 & 1\end{vmatrix}} = \frac{-1}{1} : \frac{-\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \lambda$$

Vagyis ebben a sorrendben véve a pontokat a kettősviszony képzése során, a kettősviszony a pont inhomogén koordinátáját adja meg.

Adott négy pont: $L_1(\lambda_1, 1)$, $L_2(\lambda_2, 1)$, $L_3(\lambda_3, 1)$, $L_4(\lambda_4, 1)$ melyeknek a projektív koordinátáit úgy adtuk meg, hogy a második koordináta mindig 1, az első pedig a pont inhomogén koordinátája. (Ez a megadás mindig elérhető, mert a projektív koordináták mindig arányosság erejéig rendelődnek a pontokhoz, ez a mostani a számolást egyszerűsíti le.)

$$(L_1L_2L_3L_4) = \frac{\begin{vmatrix}\lambda_3 & \lambda_1\\ 1 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\lambda_3 & \lambda_2\\ 1 & 1\end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix}\lambda_4 & \lambda_1\\ 1 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\lambda_4 & \lambda_2\\ 1 & 1\end{vmatrix}} = \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_3 - \lambda_2} : \frac{\lambda_4 - \lambda_1}{\lambda_4 - \lambda_2}$$

Itt az előforduló különbségek a megfelelő irányított szakaszok hosszát jelentik, azaz az analitikus definíció megegyezik a szintetikussal.

Koordináta-alapalakzat sugársorban

A síkbeli dualitást felhasználva a sugársorban megfogalmazhatók a következők:
Megadunk a projektív síkban két egyenest homogén koordinátákkal: $a_1(\underset{1}{u}_i)$ és $a_2(\underset{2}{u}_i)$. Az a_1 és a_2 egyenesek által meghatározott sugársor bármely $a(u_i)$ egyenesének (melyet úgy is mondhatnánk, hogy olyan egyenes, amely illeszkedik a két egyenes metszéspontjára) koordinátáira

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ \underset{1}{u}_1 & \underset{1}{u}_2 & \underset{1}{u}_3 \\ \underset{2}{u}_1 & \underset{2}{u}_2 & \underset{2}{u}_3 \end{vmatrix} = 0 .$$

Ez azt fogja jelenteni, hogy bármely, a sugársorba tartozó egyenes koordinátája a két adott egyenes koordinátáiból lineáris kombinációval nyerhető.

$$u_i = \lambda_1 \cdot \underset{1}{u}_i + \lambda_2 \cdot \underset{2}{u}_i$$

A λ_1 és λ_2 egymástól függetlenül befutják a valós számokat, így a sugársor minden sugarának a koordinátáit meghatározzák. Azt tudjuk, hogy minden egyenest több koordinátahármas is jellemezhet. Ha most az a_1 vagy az a_2 eddigi koordinátája helyett egy másik koordinátahármast választunk, akkor egy tetszőlegesen választott a egyeneshez más λ_1 és λ_2 értékek számolhatók ki, ráadásul még a különböző λ_1, λ_2 értékek aránya sem állandó. Szeretnénk azt elérni, hogy bármely a egyeneshez arányosság erejéig tudjuk rendelni a λ_1, λ_2 értékeket.
Ehhez az a_1 és a_2 sugarak koordinátáit rögzíteni fogjuk, ami azt jelenti, hogy amíg az általuk meghatározott sugársor egyeneseit jellemezni akarjuk, addig csak ezeket a koordinátákat használhatjuk fel a λ_1, λ_2 kiszámolásához. A sugársorban ki fogunk jelölni egy ún. egységsugarat, amely olyan tulajdonsággal rendelkezik, hogy a koordinátái $e_i = \underset{1}{u}_i + \underset{2}{u}_i$. (Az egységsugár esetén $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = 1$.) Az egységsugár kiválasztása rögzíti az a_1 és a_2 koordinátáit és ezzel minden λ_1, λ_2 számpár a sugársor egy egyenesét határozza meg, de minden egyeneshez konstansszorzó (zérustól különböző) erejéig rendelhetünk számpárokat.
Ezzel egy projektív koordináta-alapalakzatot definiáltunk a sugársorban.

A kezdősugár a_2, melynek a sugársorbeli koordinátái: (0,1).
A végtelen távoli sugár a_1, melynek a sugársorbeli koordinátái: (1,0).
Az egységsugár e, melynek a sugársorbeli koordinátái: (1,1).

Egy projektív sugársorbeli egyenesnek a koordinátáit úgy határozhatjuk meg, hogy ha a sugársorban három egymástól különböző a_1, a_2, e egyenest választunk, melyekre teljesül, hogy az a_1, a_2 egyenesekkel való paraméteres előállításban az e egyeneshez tartozó (λ_1, λ_2) számpárra $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = 1$, akkor bármely (λ_1, λ_2) számpárhoz a sugársornak pontosan egy egyenese tartozik. Minden egyeneshez végtelen sok valós számpár tartozik, de bármely két ilyen számpár egy konstansszorzóban tér el egymástól. Ezen kívül a (0,0) számpárt ki kell zárnunk a lehetséges koordináták közül. Az egyenesekhez rendelt (λ_1, λ_2) számpárokat az adott egyenes sugársorban lévő alapalakzatra vonatkozó projektív koordinátáinak nevezzük.

Minden egyeneshez hozzá lehet rendelni a $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ értéket is. Ez már nem rendelkezik a homogenitás tulajdonságával. A $\lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ értéket a sugár inhomogén koordinátájának nevezzük. Az a_1 egyenes esetén ez így nem tehető meg, ezért a ∞ szimbólumot rendeljük hozzá.

Tétel

Ha valamely sugársorban két különböző koordinátaalakzatot írunk elő, akkor az ezekre vonatkozó λ_α és λ'_α egyenes koordináták a $\lambda_\alpha = c_{\beta\alpha}\lambda'_\beta$, $|c_{\alpha\beta}|\neq 0$ alakú lineáris transzformációval függnek össze.

Definíció

Egy projektív sugársor négy egymástól különböző g_1, g_2, g_3, g_4 egyenesének a *kettősviszony*án a következő értéket értjük:

$$(g_1 g_2 g_3 g_4) = \frac{\begin{vmatrix} \underset{3}{\lambda}_1 & \underset{1}{\lambda}_1 \\ \underset{3}{\lambda}_2 & \underset{1}{\lambda}_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \underset{3}{\lambda}_1 & \underset{2}{\lambda}_1 \\ \underset{3}{\lambda}_2 & \underset{2}{\lambda}_2 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} \underset{4}{\lambda}_1 & \underset{1}{\lambda}_1 \\ \underset{4}{\lambda}_2 & \underset{1}{\lambda}_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \underset{4}{\lambda}_1 & \underset{2}{\lambda}_1 \\ \underset{4}{\lambda}_2 & \underset{2}{\lambda}_2 \end{vmatrix}}$$

ahol $\underset{I}{\lambda}_\alpha$ (I=1, 2, 3, 4; α=1, 2) rendre a g_1, g_2, g_3, g_4 egyeneseknek a projektív koordinátái (valamely alapalakzatra nézve).

Tétel

Egy sugársor négy elemének kettősviszonya független a sugársorban választott projektív koordinátarendszertől.

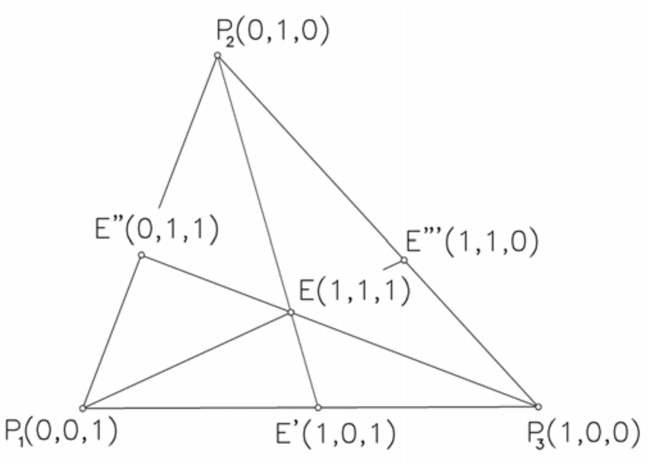
Tétel

Egy sugársor négy elemének kettősviszonya független a síkbeli koordinátarendszer megválasztásától.

Projektív koordinátarendszer a projektív síkon

Definíció

A projektív sík négy általános helyzetű pontja *koordináta-alapalakzat*ot alkot.



A négy általános helyzetű pontot az jellemzi, hogy bármely három pont nem illeszkedik egy egyenesre, vagyis a homogén koordinátáikból képzett mátrix determinánsa nem nulla. Jelölje P_1, P_2, P_3, E az általános pontnégyest. Ezen pontok koordinátái legyenek:
$P_1(0, 0, 1)$, $P_2(0, 1, 0)$,
$P_3(1, 0, 0)$, $E(1, 1, 1)$.
Mindez nem megy az általánosság rovására, mivel egy koordináta-transzformációval ez a helyzet mindig elérhető.
Ekkor a P_1P_2 egyenes az $x_1=0$,
a P_1P_3 egyenes az $x_2=0$,
a P_2P_3 egyenes az $x_3=0$.

Ezen kívül a P_2E egyenes az E' pontban metszi a P_1P_3 egyenest, a P_3E egyenes az E" pontban metszi a P_1P_3 egyenest és a P_1E egyenes az E'" pontban metszi a P_2P_3 egyenest.
A P_1, P_2, P_3, E pontok koordinátáinak ismeretében határozzuk meg az E', E" és E'" pontok koordinátáit!

A P_2E egyenes egyenlete: $x_2-x_3=0$.
A P_3E egyenes egyenlete: $x_1-x_3=0$.
A P_1E egyenes egyenlete: $x_1-x_2=0$.

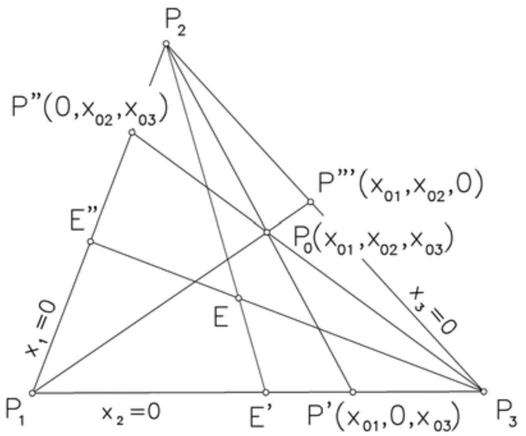
E' a P_1P_3 és P_2E egyenesek metszéspontja, azaz koordinátái: (1, 0, 1). (Ugyanis az egyenlet alapján a P_2E egyenes pontjainak első és harmadik koordinátája megegyezik és a második koordináta P_1P_3 egyenes egyenletéből következik.)
E" a P_1P_2 és P_3E egyenesek metszéspontja, azaz koordinátái: (0, 1, 1). (Ugyanis az egyenlet alapján a P_3E egyenes pontjainak második és harmadik koordinátája megegyezik és az első koordináta P_1P_2 egyenes egyenletéből következik.)
E'" a P_2P_3 és P_1E egyenesek metszéspontja, azaz koordinátái: (1, 1, 0). (Ugyanis az egyenlet alapján a P_1E egyenes pontjainak első és második koordinátája megegyezik és az harmadik koordináta P_2P_3 egyenes egyenletéből következik.)

Most tekintsünk egy $P_0(x_{01}, x_{02}, x_{03})$ pontot a síkon. Az E ponthoz hasonlóan vetítsük a P_1P_2, a P_1P_3 és a P_2P_3 egyenesekre sorrendben a P_3, P_2 és P_1 pontokból és ezzel a P', P", P'" pontokat kapjuk.

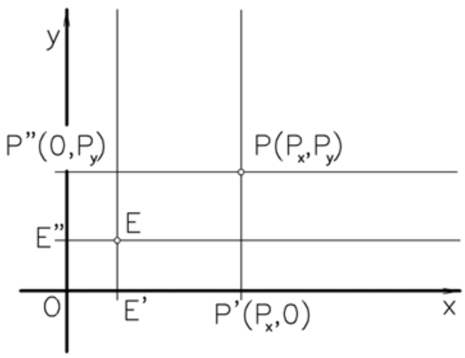
A P_3P egyenes egyenlete: $x_{01}\cdot x_3 - x_{03}\cdot x_1 = 0$.
A P_2P egyenes egyenlete: $x_{03}\cdot x_2 - x_{02}\cdot x_3 = 0$.
A P_1P egyenes egyenlete: $x_{02}\cdot x_1 - x_{01}\cdot x_2 = 0$.

A P' koordinátái a metszés után: $(x_{01}, 0, x_{03})$.
A P" koordinátái a metszés után: $(0, x_{02}, x_{03})$.
A P'" koordinátái a metszés után: $(x_{01}, x_{02}, 0)$.

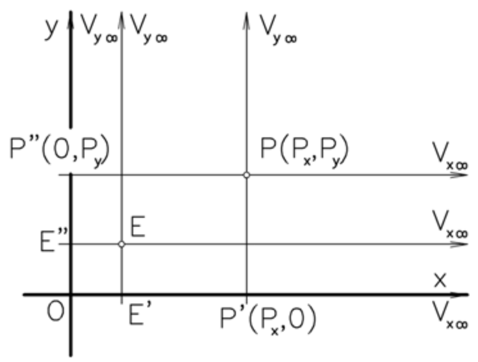
Ezek után tekintsük a P_1P_3 egyenest. Ezen a P_1 pont a kezdőpont, P_3 pont a végtelen távoli pont és E' az egységpont, vagyis egy koordinátaalakzatot alkot az előbbi három pont. Ebben a koordinátarendszerben a P' koordinátáit felhasználva a $(P'E'P_1P_3)=\frac{x_{01}}{x_{03}}$, amely a P' inhomogén koordinátája a P_1P_3E' koordinátarendszerben.
A P_1P_2 egyenesen a P_1 pont a kezdőpont, P_2 pont a végtelen távoli pont és E" az egységpont. Ebben a koordinátarendszerben a P" koordinátáit felhasználva a $(P''E''P_1P_2)=\frac{x_{02}}{x_{03}}$, amely a P" inhomogén koordinátája a P_1P_2E'' koordinátarendszerben.



Felmerül a kérdés, hogy ha egy tetszőlegesen választott pont esetén a fenti módon határozhatók meg a vetületek koordinátái, akkor a vetületek megadásából hogyan lehetne a pontot előállítani.
Adjuk meg egy olyan P^* pontot, melynek a P_1, P_2, P_3, E koordinátarendszerben a koordinátái (x_1^*, x_2^*, x_3^*). Ekkor ez a számhármas ugyanazt a pontot jellemzi, mint a $(\lambda_1, \lambda_2, 1)$, ahol a $\lambda_1 = \frac{x_1^*}{x_3^*}$ és $\lambda_2 = \frac{x_2^*}{x_3^*}$. Ekkor határozzuk meg azt a P^{*}' pontot a P_1P_3E' koordinátarendszerben, melyre $(P^{*}\text{'}E'P_1P_3)=\lambda_1$, és azt a P^{*}" pontot a P_1P_2E'' koordinátarendszerben, melyre $(P^{*}\text{"}E''P_1P_2)=\lambda_2$.
A P^{*}'P_2 egyenes egyenlete: $x_3^*\cdot x_2 - x_2^*\cdot x_3 = 0$ és a P^{*}"P_3 egyenes egyenlete: $x_1^*\cdot x_3 - x_3^*\cdot x_1 = 0$; az egyenesek metszéspontja az (x_1^*, x_2^*, x_3^*) koordinátákkal rendelkező P pont.

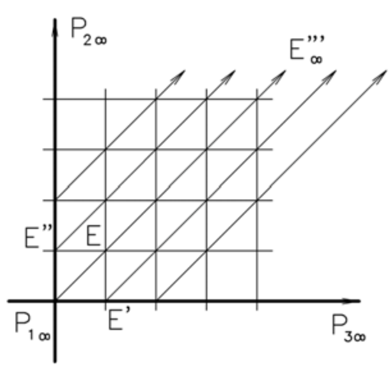


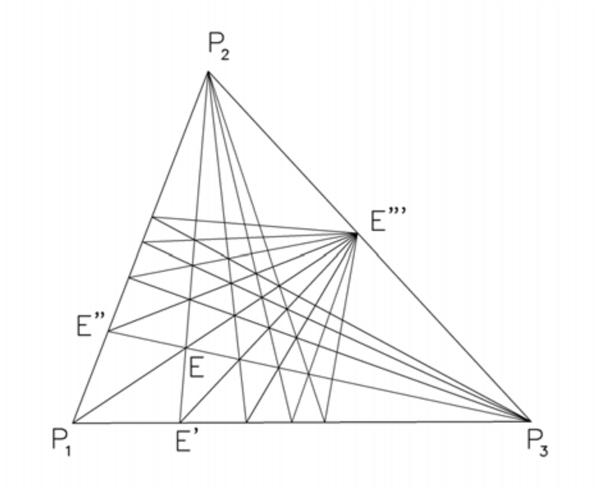
Ahogyan most ezt a projektív koordinátarendszert használtuk, az nagyon hasonlít az euklideszi koordinátarendszer használatához. Az x és y koordinátatengelyek egymásra merőlegesek és egyenlőek az egységek rajtuk. Ha az E egységpontot az y tengellyel párhuzamosan az x tengelyre vetítjük, akkor az x tengely E’ egységpontját kapjuk. Ha E-t az x tengellyel párhuzamosan vetítjük az y tengelyre, akkor az y tengely E” egységpontját kapjuk. Ha egy előre adott $P(P_x, P_y)$ koordinátájú pontot szeretnénk ábrázolni, akkor az x tengelyre felmérjük az egység P_x-szeresét, vagyis olyan P’ pontot határozunk meg, melyre az $(P’E’O)=P_x$. Ezután az y tengelyre mérjük fel az egység P_y-szorosát, azaz olyan P” pontot szerkesztünk, melyre $(P”E”O)=P_y$. Ezután a P_x ponton át az y tengellyel, a P_y ponton át az x tengellyel húzunk párhuzamost, ezek metszéspontja lesz a P pont.



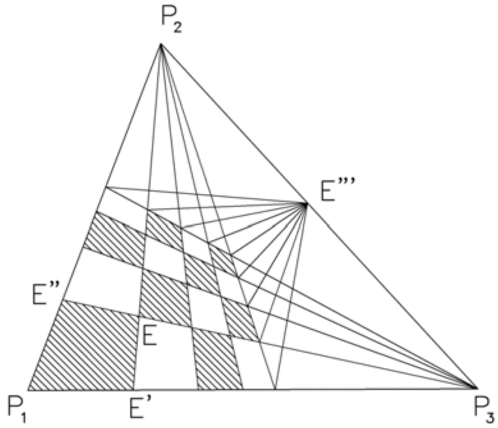
Ha az affin (euklideszi) síkot kibővítjük a végtelen távoli elemekkel, akkor az x tengellyel párhuzamos vetítés az x tengely $V_{x\infty}$ pontjából való vetítést, az y tengellyel párhuzamos vetítés az y tengely $V_{y\infty}$ pontjából való vetítést jelent. Az előbbi osztóviszonyokat felváltja a kettősviszony, vagyis a P’ és P” pontokat a $(P’E’OV_{x\infty})=P_x$ és a $(P”E”OV_{y\infty})=P_y$ alapján határozhatjuk meg. A $P’V_{y\infty}$ és $P”V_{x\infty}$ egyenesek metszéspontja a $(P_x, P_y, 1)$ homogén koordinátákkal megadott P pont.

Ha az euklideszi koordinátarendszert figyeljük, akkor tudjuk, hogy a koordinátatengelyeken az egység felhasználásával egyenletes skálázás kapunk. Ezeket a pontokat a másik tengely végtelen távoli pontjából vetítve egy szabályos négyzethálózatot kapunk. A négyzetek átlói két végtelen távoli pontba futnak. A koordinátarendszer origója legyen a P_1, $P_{2\infty}$ és $P_{3\infty}$ az y és x tengely végtelen távoli pontja. Ekkor a P_1E egyenessel „párhuzamos” átlóegyenesek az E_∞’” pontba futnak.





Mindezt a projektív síkon lévő $P_1P_2P_3E$ koordinátarendszerbe rajzolva a tengelyeken lévő projektív skála már nem egyenletes és nem kapunk szabályos hálózatot. Általános négyszögek alkotják a beosztást, de az átlóegyenesek mindig az E''' pontba fognak futni. Az így előálló hálózatot Möbius-hálózatnak nevezzük.



A projektív tér analitikus modellje

A modell kiépítéséhez szükséges megállapodások:

1. A tér minden pontjához hozzárendelünk egy valós számokból álló rendezett (x_1, x_2, x_3, x_4) számnégyest, melyre $\text{rang}(x_1, x_2, x_3, x_4)=1$. (Azaz a csupa 0-ból álló számnégyes nem jellemezhet pontot.)
   Két pont, a $P(x_1, x_2, x_3, x_4)$ és a $Q(y_1, y_2, y_3, y_4)$ akkor és csak akkor egyenlő, ha
   $$\text{rang}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{pmatrix}=1.$$
   A P pont koordinátáit rövidebben is írhatjuk (x_K) alakban, ahol $K=1,2,3,4$. A továbbiakban, ha nagybetűs indexet használunk, akkor az négy koordinátát jelöl.
2. A tér minden síkjához hozzárendelünk egy valós számokból álló rendezett (u_1, u_2, u_3, u_4) számnégyest, melyre $\text{rang}(u_1, u_2, u_3, u_4)=1$. (Azaz a csupa 0-ból álló számnégyes nem jellemezhet síkot.)
   Két sík, a $u(u_1, u_2, u_3, u_4)$ és a $v(v_1, v_2, v_3, v_4)$ akkor és csak akkor egyenlő, ha
   $$\text{rang}\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{pmatrix}=1.$$
3. A tér minden egyeneséhez hozzárendelünk egy valós számokból álló $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}$ számnyolcast, melyre a mátrix rangja 2. (Tulajdonképpen a térben egy egyenest úgy adunk meg, hogy megadunk két olyan síkot, melyek tartalmazzák azt. Most ebben az esetben az $(a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14})$ és $(a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24})$ síkok metszésvonala lesz.)
   Két egyenes, az $a(a_{\alpha K})$ és $b(b_{\alpha K})$ egyenes akkor és csak akkor egyenlő, ha
   $$\text{rang}(a_{1K}, a_{2K}, b_{1K})=2 \text{ és } \text{rang}(a_{1K}, a_{2K}, b_{2K})=2.$$
   (Ezzel ekvivalens feltétel, hogy $\text{rang}(a_{1K}, a_{2K}, b_{1K}, b_{2K})=2$.)
4. Egy $P(x_1, x_2, x_3, x_4)$ pont akkor és csak akkor illeszkedik az $u(u_1, u_2, u_3, u_4)$ síkra, ha $u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3+u_4x_4=0$, vagyis $u_Kx_K=0$.
5. Egy $P(x_1, x_2, x_3, x_4)$ pont akkor és csak akkor illeszkedik az $a(a_{\alpha K})$ egyenesre, ha
   $$a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+a_{14}x_4=0$$
   $$a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+a_{24}x_4=0$$
   vagy röviden
   $$a_{\alpha K}x_K=0.$$
6. Egy $a(a_{\alpha K})$ egyenes akkor és csak akkor illeszkedik az $u(u_K)$ síkra, ha az egyenes minden pontja illeszkedik a síkra. Ennek szükséges és elegendő feltétele, hogy a $\text{rang}(a_{1K}, a_{2K}, u_K)=2$.

Tétel

A 3. megállapodásban szereplő $\text{rang}(a_{1K}, a_{2K}, b_{1K})=2$ és $\text{rang}(a_{1K}, a_{2K}, b_{2K})=2$ feltétel ekvivalens a $\text{rang}(a_{1K}, a_{2K}, b_{1K}, b_{2K})=2$ feltétellel.

Bizonyítás

Ha teljesül $\text{rang}(a_{1K}, a_{2K}, b_{1K})=2$ és $\text{rang}(a_{1K}, a_{2K}, b_{2K})=2$, akkor a mátrixokban bármelyik sor a többi lineáris kombinációjaként írható fel. Azaz

$$b_{1K}=\lambda_1a_{1K}+\lambda_2a_{2K} \qquad \text{és} \qquad b_{2K}=\lambda_3a_{1K}+\lambda_4a_{2K}.$$

A λ_1, λ_2 és λ_3, λ_4 nem lehetnek arányosak, mert akkor a b_{1K}, b_{2K} ugyanazt a síkot adná meg és a két sík metszésvonaláról nem tudnánk beszélni. Ekkor a

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_4 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \text{vagyis a} \qquad \mathrm{rang}\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_4 \end{pmatrix} = 2.$$

Ez azt jelenti, hogy az (a_{1K}, a_{2K}, b_{1K}, b_{2K}) mátrix utolsó sora az első kettőből különböző lineáris kombinációkkal származik, így a rang(a_{1K}, a_{2K}, b_{1K}, b_{2K})=2.
Ha a másik irányban gondolkodunk és a rang(a_{1K}, a_{2K}, b_{1K}, b_{2K})=2 feltételből indulunk, akkor az a_{1K}, a_{2K}, b_{1K}, b_{2K} között két lineárisan független sor van. A többi sor azok kombinációjával adható meg, ezért ha az a_{1K}, a_{2K}-t választjuk ki, akkor a b_{1K}, b_{2K} azokkal kifejezhető és teljesül, hogy rang(a_{1K}, a_{2K}, b_{1K})=2 és rang(a_{1K}, a_{2K}, b_{2K})=2.

Tétel

A 6. megállapodásban szereplő illeszkedés szükséges és elegendő feltétele, hogy rang(a_{1K}, a_{2K}, u_K)=2.

Bizonyítás

Szükségesség

Azon pontok koordinátái, melyek illeszkednek az a egyenesre kielégítik az

$$a_{\alpha K} x_K = 0$$

egyenletet. Amelyek az u síkra illeszkednek, azok koordinátái kielégítik az

$$u_K x_K = 0$$

egyenletet.
Ezzel egy három egyenletből álló lineáris egyenletrendszert kaptunk, melynek abban az esetben, ha rang(a_{1K}, a_{2K}, u_K)=3 csak egy független megoldása lenne és ez ellentmond annak, hogy az

$$a_{1K} x_K = 0$$
$$a_{2K} x_K = 0$$

lineárisan független egyenleteknek két független megoldása van, vagyis szükséges, hogy rang(a_{1K}, a_{2K}, u_K)=2.

Elegendőség

Ha rang(a_{1K}, a_{2K}, u_K)=2, akkor a mátrix két sorának kombinációjával a harmadik előállítható (nem triviális módon), például

$$u_K = \lambda_1 a_{1K} + \lambda_2 a_{2K}$$

alakban. Ebből pedig az következik, hogy ha valamely (x_K) eleget tesz az $u_K x_K=0$ illeszkedési feltételnek, akkor az $a_{\alpha K} x_K=0$-nak is.

Az egyenesre és síkra illeszkedő pontok paraméteres előállítása

Induljunk ki a pontsor (egyenesre illeszkedő pontok) $a_{\alpha K}x_K=0$ egyenletrendszeréből. Ennek a homogén lineáris egyenletrendszernek két független megoldása $(\underset{1}{x}_K)$ és $(\underset{2}{x}_K)$ $(\operatorname{rang}(\underset{1}{x}_K \quad \underset{2}{x}_K)=2)$, és az összes többi megoldást az

$$x_K=\lambda_1 \cdot \underset{1}{x}_K+\lambda_2 \cdot \underset{2}{x}_K \qquad \lambda_1^2+\lambda_2^2>0$$

szolgáltatja.
Az $(\underset{1}{x}_K)$ és $(\underset{2}{x}_K)$megoldások nincsenek kitüntetve, mert azok bármely más két lineárisan független megoldással helyettesíthetők.

Definíció

Az $x_K=\lambda_1 \cdot \underset{1}{x}_K+\lambda_2 \cdot \underset{2}{x}_K$ $(\lambda_1^2+\lambda_2^2>0)$ kifejezés a két ponton áthaladó egyenesre illeszkedő pontsor paraméteres egyenletrendszere.

Tétel

Három pont, $P_1(\underset{1}{x}_K)$, $P_2(\underset{2}{x}_K)$ és $P_3(\underset{3}{x}_K)$ akkor illeszkedik egy egyenesre, ha

$$\operatorname{rang}(\underset{1}{x}_K \quad \underset{2}{x}_K \quad \underset{3}{x}_K)=2$$

Ellenkező esetben

$$\operatorname{rang}(\underset{1}{x}_K \quad \underset{2}{x}_K \quad \underset{3}{x}_K)=3\,.$$

Bizonyítás

$x_K=\lambda_1 \cdot \underset{1}{x}_K+\lambda_2 \cdot \underset{2}{x}_K$ összefüggés következménye.

A síkra illeszkedő ponthalmaz egyenlete $u_K x_K=0$. Ennek a homogén lineáris egyenletnek három független megoldása $(\underset{1}{x}_K)$, $(\underset{2}{x}_K)$ és $(\underset{3}{x}_K)$ $(\operatorname{rang}(\underset{1}{x}_K \quad \underset{2}{x}_K \quad \underset{3}{x}_K)=3)$, és az összes többi megoldást az

$$x_K=\lambda_1 \cdot \underset{1}{x}_K+\lambda_2 \cdot \underset{2}{x}_K+\lambda_3 \cdot \underset{3}{x}_K \qquad \lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2>0$$

szolgáltatja.
Az $(\underset{1}{x}_K)$, $(\underset{2}{x}_K)$ és $(\underset{3}{x}_K)$ megoldások nincsenek kitüntetve, mert azok bármely más három lineárisan független megoldással helyettesíthetők.

Definíció

Az $x_K=\lambda_1 \cdot \underset{1}{x}_K+\lambda_2 \cdot \underset{2}{x}_K+\lambda_3 \cdot \underset{3}{x}_K$ $(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2>0)$ kifejezés a három pontra illeszkedő pontmező (három pont által adott síkra illeszkedő pontok) paraméteres egyenletrendszere.

Tétel

Négy pont, $P_1(\underset{1}{x}_K)$, $P_2(\underset{2}{x}_K)$, $P_3(\underset{3}{x}_K)$ és $P_4(\underset{4}{x}_K)$ akkor illeszkedik egy síkra, ha

$$\operatorname{rang}(\underset{1}{x}_K \quad \underset{2}{x}_K \quad \underset{3}{x}_K \quad \underset{4}{x}_K)=3$$

Ellenkező esetben

$$\operatorname{rang}(\underset{1}{x}_K \quad \underset{2}{x}_K \quad \underset{3}{x}_K \quad \underset{4}{x}_K)=4\,.$$

Bizonyítás

$x_K = \lambda_1 \cdot \underset{1}{x}_K + \lambda_2 \cdot \underset{2}{x}_K + \lambda_3 \cdot \underset{3}{x}_K$ összefüggés következménye.

Megjegyzés

A pontsor és sík paraméteres egyenletrendszere esetén a λ_i-k csak az egységpont felvétele után határozzák meg a pontsor és a sík pontjait egyértelműen. Ez alapján az egyenesen (P_1, P_2, E), a síkon (P_1, P_2, P_3, E) egy-egy koordinátarendszert alkotnak.

Koordináta-transzformáció

Definíció

Azt az eljárást, amellyel az előző hat megállapodás figyelembevételével minden $P(x_K)$ ponthoz egy másik (x_K') számnégyest, minden $u(u_K)$ síkhoz egy másik (u_K') számnégyest, és minden $a(a_{\alpha K})$ egyeneshez egy másik $(a_{\alpha K}')$ számnyolcast rendelünk hozzá, *koordináta-transzformáció*nak nevezzük.

A projektív tér analitikus modelljének 7. megállapodása:

Megkívánjuk, hogy az illeszkedésre vonatkozó 4. 5. és 6. megállapodások a koordináta-transzformáció után is fennálljanak.

Tétel

A térben a pontkoordináták transzformációja maga után vonja a síkkoordináták transzformációját.

Bizonyítás

Az $u_K x_K=0$ adja meg a $P(x_I)$ pont és az $u(u_I)$ egyenes illeszkedését. Hajtsunk végre egy pontkoordináta-transzformációt, melyben a P pont régi és új koordinátái közötti kapcsolat: $x_I=f(x_I')$. Ekkor $u_K f(x_I')=0$, amelyet úgy rendezhetünk, hogy az (x_I') illeszkedése valamely (u_K^*) egyenesre. Ekkor az u egyeneshez ezeket az (u_K^*) új koordinátákat kell rendelni. Vagyis valóban meg kell változtatnunk az egyenesek koordinátáit is.

Ahogy azt a síkbeli esetben láttuk, a projektív transzformáció egy speciális ponttranszformáció, amely egy 4×4-es reguláris mátrixszal adható meg.

$$x_I'=a_{IK}x_K, \qquad \text{ahol } |a_{IK}|\neq 0$$

Definíció

A P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 pontötöst általános helyzetűnek nevezzük, ha bármely négy nem illeszkedik egy síkra, azaz bármely négy koordinátáiból képzett mátrix rangja 4.

Tétel

Egy térbeli projektív pontkoordináta-transzformációt egyértelműen meghatároz, ha öt általános helyzetű pontnak öt általános helyzetű pontot feleltetünk meg.

Tétel

A tér $x_I'=a_{IK}x_K$, $(|a_{IK}|\neq 0)$ egyenletekkel leírható projektív transzformációi csoportot alkotnak az egymás utáni végrehajtásra, mint műveletre nézve.

Megjegyzés

Az Erlangeni Program értelmében a projektív térgeometria az $x_I'=a_{IK}x_K$ lineáris homogén egyenletekből álló transzformációs csoport invariáns elmélete.

Térbeli koordináta-alapalakzat

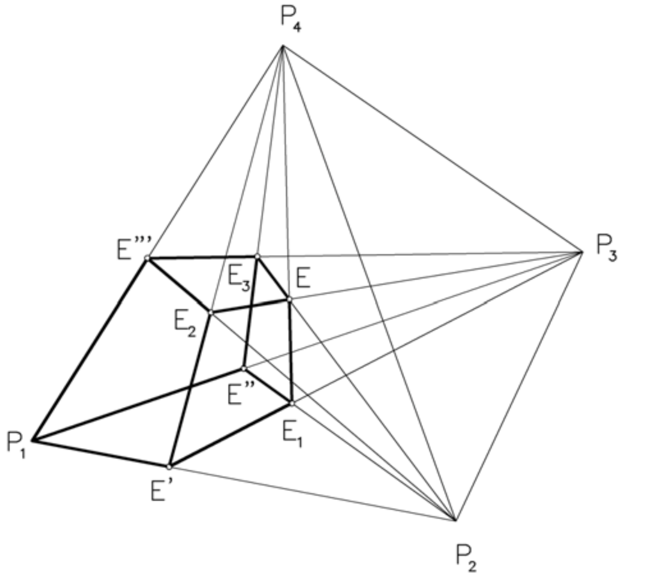
Definíció

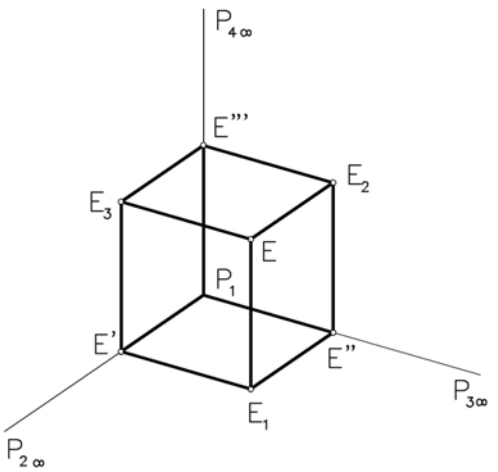
A projektív térben öt általános helyzetű pont koordináta-alapalakzatot alkot.

Legyen ennek az öt pontnak a koordinátája:

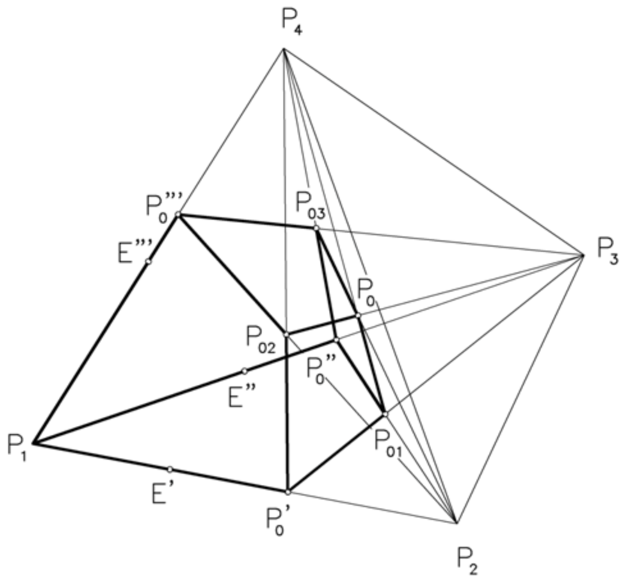
$P_1(0,0,0,1)$, $P_2(1,0,0,0)$, $P_3(0,1,0,0)$, $P_4(0,0,1,0)$, $E(1,1,1,1)$.

A P_1, P_2, P_3, P_4 pontok egy un. koordinátatetraédert határoznak meg. Vetítsük az E egységpontot a P_4 pontból a P_1, P_2, P_3 síkra. Ekkor az $E_1(1,1,0,1)$ pontot kapjuk, melyet a P_1, P_2, P_3 síkbeli koordinátaalakzat egységpontjának tekintünk. Ha most a P_3-ból az E_1 pontot a P_1P_2 egyenesre projiciáljuk, akkor a kapott pont az E' pont a P_1P_2 egyenesen lévő koordinátaalakzat egységpontja. Hasonló eljárással nyerhetők a többi koordinátasíkon és egyenesen az egységpontok az E pont vetítésével.





Ez az eljárás az euklideszi térben lévő derékszögű koordinátarendszer esetén ugyanígy működik. Ekkor az origó a P_1, az x, y, z tengelyek végtelen távoli pontjai rendre P_2, P_3, P_4. A végtelen távoli pontból való vetítés párhuzamos vetítést jelent.



Adott a $P_0(x_{01}, x_{02}, x_{03},)$ pont. Vetítsük a P_0 pontot a P_4 pontból a P_1, P_2, P_3 síkra. Ekkor az $P_{01}(x_{01}, x_{02}, 0, x_{04})$ pontot kapjuk. Ha most a P_3-ból a P_{01} pontot a P_1P_2 egyenesre projiciáljuk, akkor a kapott pont, P_0' pont, a P_1P_2 egyenesen lévő olyan pont, melyre $(P_2P_1E'P_0')=\frac{x_{01}}{x_{04}}$.

Hasonló eljárással nyerhető a P_0" pont a P_1P_3 egyenesen, melyre $(P_3P_1E''P_0'')=\frac{x_{02}}{x_{04}}$ és a P_0''' pont a P_1P_4 egyenesen, melyre $(P_4P_1E'''P_0''')=\frac{x_{03}}{x_{04}}$.

Ez alapján, ha előre adott homogén koordinátanégyesből állítunk elő pontot, akkor a P_1P_2, P_1P_3, P_1P_4 egyeneseken a projektív skála segítségével meghatározzuk rendre a $\frac{x_{01}}{x_{04}}$, $\frac{x_{02}}{x_{04}}$, $\frac{x_{03}}{x_{04}}$ kettősviszonyú pontokat az alapalakzatokban, majd a megfelelő vetítésekkel előállítjuk a $P_{01}(x_{01}, x_{02}, 0, x_{04})$ és $P_{02}(0, x_{02}, x_{03}, x_{04})$ pontokat. Végül a P pont nem más, mint a P_4P_{01} és a P_3P_{02} egyenesek metszéspontja.

Másodrendű alakzatok

Definíció

A projektív síkon azon pontok halmazát, melyek homogén koordinátái kiegyenlítik az $a_{ik}x_ix_k=0$ egyenletet (i,k=1,2,3), *másodrendű görbé*nek nevezzük. A másodrendű görbe egyenletében szereplő együtthatókból képzett (a_{ik}) mátrixot a görbe alapmátrixának nevezzük, melyről feltételezzük, hogy szimmetrikus mátrix. (Ha nem szimmetrikus, akkor azzá tehető.) A másodrendű görbe elfajuló, ha a mátrixának determinánsa nulla, azaz $|a_{ik}|=0$. A másodrendű görbe nemelfajuló, ha a mátrixának determinánsa nullától különböző, azaz $|a_{ik}|\neq 0$.

Példák

1. $x^2+y^2+2x+2y+1=0$ egyenlet homogén koordinátákban megadva: $x_1^2+x_2^2+2x_1x_3+2x_2x_3+x_3^2=0$. Mátrixa
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
(Ez a görbe az euklideszi síkon egy kör.)
2. $x^2+x+2y=0$ egyenlet homogén koordinátákban megadva: $x_1^2+x_1x_2+2x_1x_3=0$. Mátrixa
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
(Ez a görbe az euklideszi síkon egy parabola.)
3. $x^2-4=0$ egyenlet homogén koordinátákban megadva: $x_1^2-4x_3^2=0$. Mátrixa
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$
(Ez a görbe az euklideszi síkon párhuzamos egyenespár, mely az $x+2=0$ és $x-2=0$ egyenesekből áll.)
4. $x^2+y^2+4=0$ egyenlet homogén koordinátákban megadva: $x_1^2+x_2^2+4x_3^2=0$. Mátrixa
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$
(Ezt a görbét a továbbiakban képzetes körnek nevezzük)

Definíció

A projektív térben azon pontok halmazát, melyek homogén koordinátái kiegyenlítik az $a_{IK}x_Ix_K=0$ egyenletet (I,K=1,2,3,4), *másodrendű felület*nek nevezzük. A másodrendű felület egyenletében szereplő együtthatókból képzett (a_{IK}) mátrixot a felület alapmátrixának nevezzük, melyről feltételezzük, hogy szimmetrikus mátrix. (Ha nem szimmetrikus, akkor azzá tehető.) A másodrendű felület elfajuló, ha a mátrixának determinánsa nulla, azaz $|a_{IK}|=0$. A másodrendű felület nemelfajuló, ha a mátrixának determinánsa nullától különböző, azaz $|a_{IK}|\neq 0$.

Példa

$x^2+y^2-z^2-1=0$ egyenlet homogén koordinátákban megadva: $x_1^2+x_2^2-x_3^2-x_4^2=0$. Mátrixa

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(Az euklideszi térben ez a felület egy egyköpenyű hiperboloid)

Tétel

A projektív transzformáció másodrendű alakzatot másodrendű alakzatba visz át. (Ezt úgy kell érteni, hogy másodrendű görbét másodrendű görbébe, felületet felületbe.)

Bizonyítás

A bizonyítás során a görbének is, a transzformációnak is a mátrix alakját használjuk. Adott egy másodrendű görbe $a_{ik}x_ix_k=0$ egyenlettel. Ennek mátrixalakja $X^TAX=0$, ahol X^T az X mátrix transzponáltja. Az $(x_i)\rightarrow(\underline{x}_i)$ projektív transzformációt, pontosabban az inverzét a $C=(c_{ik})$ mátrix adja meg, amely egy reguláris mátrix: $X=C\underline{X}$. Alkalmazzuk a transzformációt a görbére: $X^TAX=(\underline{X}^TC^T)A(C\underline{X}) =\underline{X}^T\{C^TAC\}\underline{X}$. A zárójelben lévő C^TAC mátrix egy szintén szimmetrikus mátrix, amely pontosan akkor reguláris, amikor az A mátrix az. Vagyis a képalakzat szintén másodrendű görbe.

Ebben a bizonyításban nem volt szerepe a dimenziószámnak így teljes egészében felhasználható, ha a mátrixok másodrendű felületeket illetve a térbeli projektív transzformációt adják meg.

Másodrendű görbék osztályozása

A másodrendű görbék osztályozását projektív transzformációkkal szemben invariánsan viselkedő objektumok segítségével végezzük.

Tétel

Projektív transzformációk egymás utáni alkalmazásával mindig elérhető, hogy a másodrendű görbe mátrixának csak a főátlóban legyenek 0-tól különböző elemei és a főátló nem nulla elemei csak a +1 és –1 lehetnek. Az így kapott alakot *normálalak*nak nevezzük

Definíció

A normálalakra hozott másodrendű görbe mátrixának *rang*ja a +1 és –1 együtthatók számának összege, melyet R-rel jelölünk.

A normálalakra hozott másodrendű görbe mátrixának *szignatúrá*ja a +1 és –1 együtthatók számának abszolút értékben vett különbsége, melyet S-sel jelölünk.

Tétel

A normálalakban szereplő +1, –1 együtthatók száma nem függ a normálalakra való hozatalnál alkalmazott projektív transzformációk megválasztásától. Ezt nevezzük tehetetlenségi-, vagy inercia törvénynek. A másodrendű görbe mátrixának rangja és a szignatúrája a projektív transzformációval szemben invariáns.

Megjegyzés

Ez tulajdonképpen a háromdimenziós valós vektorterekhez tartozó lineáris, reguláris transzformációk mátrixreprezentációjához tartozó tehetetlenségi törvény következménye.

A másodrendű görbék osztályozását olyan koordinátarendszerben végezzük el, melyben a görbe normálalakban írható fel, és az osztályozás a R rang és S szignatúra alapján történik.

Nemelfajuló másodrendű görbék ($\det(a_{ik})\neq 0$), ami azt jelenti, hogy R=3.

1. S=3 (Ami azt jelenti, hogy vagy mindhárom főátlóbeli elem +1, vagy mindhárom –1.)
   Homogén koordinátákban a görbe $x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$.
   Az euklideszi síkon $x^2+y^2=-1$.
   A görbe neve: képzetes kör, de ennél jobb elnevezés: **képzetes nemelfajuló görbék osztálya**.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. S=1.
   Homogén koordinátákban a görbe $x_1^2+x_2^2-x_3^2=0$.
   Az euklideszi síkon $x^2+y^2=1$.
   A görbe neve: valós kör, de ennél jobb elnevezés: **valós nemelfajuló görbék osztálya**.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Elfajuló másodrendű görbék ($\det(a_{ik})=0$), ami azt jelenti, hogy R<3.
Legyen R=2.

1. S=2
   Homogén koordinátákban a görbe $x_1^2+x_2^2=0$.
   Az affin síkon $x^2+y^2=0$. (x=iy és x=-iy)
   A görbe neve: **képzetes metsző egyenespár.**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. S=0.
   Homogén koordinátákban a görbe $x_1^2-x_2^2=0$.
   Az affin síkon $x^2-y^2=0$. (x=y és x=-y)
   A görbe neve: **valós metsző egyenespár.**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Legyen R=1.

1. S=1
   Homogén koordinátákban a görbe $x_1^2=0$.
   Az affin síkon $x^2=0$.
   A görbe neve: **valós egybeeső egyenespár.**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Mint azt az előbbi osztályozásból kitűnik, sokkal kevesebb osztályt találunk, mint az euklideszi osztályozásnál (Lásd a Függelékben.). A hiperbola, parabola ellipszis a valós nemelfajuló görbék osztályába tartozik, és látni fogjuk, hogy a projektív síkon ugyanolyan tulajdonságokkal rendelkeznek. Nincs olyan osztály sem, amely a párhuzamos egyeneseket tartalmazná, mivel a projektív síkon bármely két egyenesnek van metszéspontja, ezért a párhuzamos egyenesek a projektív síkon a metsző egyenesek csoportjába tartoznak.

Másodrendű felületek osztályozása

A másodrendű felületek osztályozását, hasonlóan a másodrendű görbék osztályozásához, projektív transzformációkkal szemben invariánsan viselkedő objektumok segítségével végezzük.

Tétel

Projektív transzformációk egymás utáni alkalmazásával mindig elérhető, hogy a másodrendű felület mátrixának csak a főátlóban legyenek 0-tól különböző elemei és a főátló nem nulla elemei csak a +1 és–1 lehetnek. Az így kapott alakot *normálalak*nak nevezzük

Definíció

A normálalakra hozott másodrendű felület mátrixának *rang*ja a +1 és –1 együtthatók számának összege, melyet R-rel jelölünk.

A normálalakra hozott másodrendű felület mátrixának *szignatúrá*ja a +1 és –1 együtthatók számának abszolút értékben vett különbsége, melyet S-sel jelölünk.

Tétel

A normálalakban szereplő +1, –1 együtthatók száma nem függ a normálalakra való hozatalnál alkalmazott projektív transzformációk megválasztásától. Ezt nevezzük tehetetlenségi-, vagy inercia törvénynek. A másodrendű felület mátrixának rangja és a szignatúrája a projektív transzformációval szemben invariáns.

A másodrendű felületek osztályozását olyan koordinátarendszerben végezzük el, melyben a felület normálalakban írható fel, és az osztályozás a R rang és S szignatúra alapján történik.

Nemelfajuló másodrendű felületek ($\det(a_{IK})\neq 0$), ami azt jelenti, hogy R=4.

1. S=4 (Ami azt jelenti, hogy vagy mind a négy főátlóbeli elem +1, vagy mind a négy –1.)
   Homogén koordinátákban a felület $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=0$.
   Az euklideszi térben $x^2+y^2+z^2=-1$.
   A felület neve: **képzetes gömb.**

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

2. S=2.
   Homogén koordinátákban a felület $x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_4^2=0$.
   Az euklideszi térben $x^2+y^2+z^2=1$.
   A felület neve: **valós gömb.**

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$$

3. S=0.
   Homogén koordinátákban a felület $x_1^2+x_2^2-x_3^2-x_4^2=0$.
   Az euklideszi térben $x^2+y^2-z^2=1$.
   A felület neve: **egyköpenyű hiperboloid.**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Elfajuló másodrendű görbék ($\det(a_{IK})=0$), ami azt jelenti, hogy $R<4$.
Legyen R=3.

1. S=3.
   Homogén koordinátákban a felület $x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$.
   Az euklideszi térben $x^2+y^2+z^2=0$.
   A görbe neve: **képzetes kúpfelület.** (Egyetlen valós pontja van: (0, 0, 0, 1))

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. S=1.
   Homogén koordinátákban a felület $x_1^2+x_2^2-x_3^2=0$.
   Az euklideszi térben $x^2+y^2-z^2=0$.
   A görbe neve: **valós kúpfelület.**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Legyen R=2.

1. S=2.
   Homogén koordinátákban a felület $x_1^2+x_2^2=0$.
   Az euklideszi térben $x^2+y^2=0$. (x=iy és x=-iy)
   A felület neve: **képzetes metsző síkpár.**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. S=0.
   Homogén koordinátákban a felület $x_1^2-x_2^2=0$.
   Az euklideszi térben $x^2-y^2=0$. (x=y és x=-y)
   A felület neve: **valós metsző síkpár.**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Legyen R=1.

1. S=1.
   Homogén koordinátákban a felület $x_1^2=0$.
   Az euklideszi térben $x^2=0$.
   A felület neve: **valós egybeeső síkpár.**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Mint azt az előbbi osztályozásból kitűnik, sokkal kevesebb osztályt találunk, mint az euklideszi osztályozásnál (Lásd a Függelékben.). A kétköpenyű hiperboloid, az ellipszoid és az elliptikus paraboloid a valós gömb osztályába, a nyeregfelület az egyköpenyű hiperboloid osztályába, a henger a valós kúp osztályába tartozik, és látni fogjuk, hogy a projektív térben ugyanolyan tulajdonságokkal rendelkeznek. Nincs olyan osztály, amely a párhuzamos síkokat tartalmazná, mivel a projektív térben bármely két síknak van metszésvonala, ezért a párhuzamos síkok a projektív térben a metsző síkok csoportjába tartoznak.

Nemelfajuló valós másodrendű görbék

Ebben a pontban a valós körrel projektív ekvivalens görbék szerepelnek. Olyan tételeket gyűjtünk össze, amelyek egyaránt vonatkoznak az euklideszi értelemben vett körre, ellipszisre, hiperbolára, parabolára.

Tétel

Az $a_{ik}x_ix_k=0$ (i,k=1, 2, 3) másodrendű görbe és egy egyenes közös pontjainak számára vonatkozóan az alábbi esetek közül csak az egyik teljesül:

- Nincs közös pontjuk.
- 1 közös pontjuk van.
- 2 közös pontjuk van.

Bizonyítás

Az egyenes legyen két pontjával megadva: $P_1(\underset{1}{x}_i)$ és $P_2(\underset{2}{x}_i)$. A P_1 és P_2 pontokra illeszkedő bármely pont homogén koordinátája előállítható $x_i=\lambda_1\underset{1}{x}_i+\lambda_2\underset{2}{x}_i$ alakban, ezek között szerepelnek a görbe és egyenes közös pontjai is. A közös pontok koordinátái teljesítik $a_{ik}x_ix_k=a_{ik}(\lambda_1\underset{1}{x}_i+\lambda_2\underset{2}{x}_i)(\lambda_1\underset{1}{x}_k+\lambda_2\underset{2}{x}_k)=0$ egyenlőséget. Ezt átrendezve λ_1 és λ_2-re egy homogén másodfokú egyenletet kapunk.

$$c_{\alpha\beta}\lambda_\alpha\lambda_\beta=0 \; (\alpha,\ \beta=1,\ 2), \text{ ahol}$$

$$c_{11}=a_{ik}\underset{1}{x}_i\underset{1}{x}_k$$

$$c_{12}=a_{ik}\underset{1}{x}_i\underset{2}{x}_k$$

$$c_{22}=a_{ik}\underset{2}{x}_i\underset{2}{x}_k$$

A megoldásokat keresve azok számát az egyenlet diszkriminánsa fogja eldönteni. De a λ_1 és λ_2 hányadosára fogjuk kiszámolni azokat.

A $c_{\alpha\beta}\lambda_\alpha\lambda_\beta=c_{11}\lambda_1\lambda_1+2c_{12}\lambda_1\lambda_2+c_{22}\lambda_2\lambda_2=0$ egyenletet λ_2-vel beosztva (feltéve, hogy $\lambda_2\neq0$, különben λ_1-gyel osztunk) és $\lambda=\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}$ helyettesítéssel a

$$c_{11}\lambda^2+2c_{12}\lambda+c_{22}=0$$

egyenlet lehetséges megoldásait fogjuk vizsgálni.

1. Ha $c_{11}=c_{12}=c_{22}=0$, akkor a görbe elfajuló, és egyenespár.
2. Ha $D=c_{12}^2-c_{11}c_{22}>0$, akkor a λ-ra felírt másodfokú egyenletnek két megoldása van.
3. Ha $D=c_{12}^2-c_{11}c_{22}=0$, akkor a λ-ra felírt másodfokú egyenletnek egy megoldása van. (Ebből származik a másodrendű görbe érintőjének fogalma.)
4. Ha $D=c_{12}^2-c_{11}c_{22}<0$, akkor nincs közös pontja az egyenesnek a görbével.

Poláris egyenes értelmezése

Definíció

Legyen az $a_{ik}x_ix_k=0$ (i,k=1, 2, 3) nemelfajuló másodrendű görbe, azaz $\det(a_{ik})\neq 0$, és a $P_1(\underset{1}{x}_i)$ a projektív sík egy tetszőleges pontja. Az $u_k = a_{ik}\underset{1}{x}_i$ koordinátákkal definiált egyenest a P_1 pont *poláris egyenes*ének nevezzük az adott másodrendű görbére nézve. Maga a pont a meghatározott egyenes *pólus*a.

Egy pólus-poláris kapcsolatot mindig meghatároz egy nemelfajuló másodrendű görbe. Ugyanis a görbe segítségével a projektív sík bármely pontjához hozzá tudunk rendelni egy egyenest, mint polárist, és a sík bármely egyeneséhez hozzárendelhető egy pont, mint pólus. Ha az egyenes adott és ahhoz keressük a pólust, akkor ez egy lineáris egyenletrendszer megoldását jelenti.

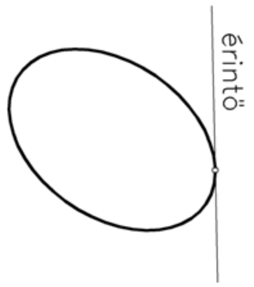
$$a_{11}x_1+ a_{21}x_2+ a_{31}x_3=u_1$$
$$a_{12}x_1+ a_{22}x_2+ a_{32}x_3=u_2$$
$$a_{13}x_1+ a_{23}x_2+ a_{33}x_3=u_3$$

Az u_i-k adottak és x_i-re keressük a megoldásokat. Az egyenletrendszernek akkor van egyértelmű egy megoldása, ha az alapmátrix reguláris mátrix, ez a feltétel teljesül, mivel nemelfajuló másodrendű görbéről van szó.

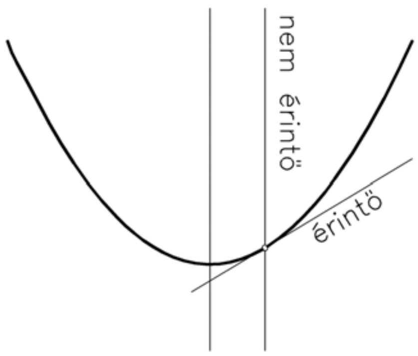
Az érintők értelmezése

Definíció

Azt az egyenest, amelynek egy nemelfajuló másodrendű görbével csak egy közös pontja van, a másodrendű görbe *érintő*jének nevezzük.

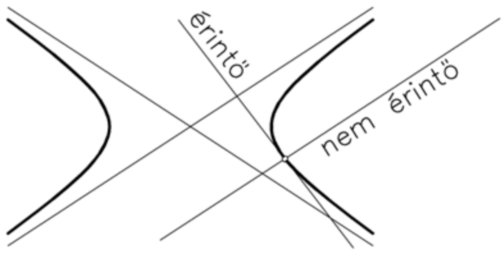


Az euklideszi síkon az érintő definíciója különbözik ettől. Azt lehetne mondani, hogy csak olyan egyenes lehet a görbe érintője, melynek egy közös pontja van a görbével, és az egyenes minden további pontja a görbére nézve külső pont.



Az euklideszi síkon egy parabolát tekintve, a parabola tengelyével párhuzamos bármely egyenesnek egy közös pontja van a görbével, de mégsem érintő, mert az egyenesen vannak olyan pontok, melyek belső pontok és vannak olyanok, melyek külső pontok. Ha a projektív síkon tekintenénk a parabolát és az előbbi egyenest, akkor az egyenesnek két közös pontja van a görbével, az egyik a végesben fekvő eddig is ismert metszéspont, míg a másik a parabola végtelen távoli pontja.

A hiperbola esetében az affin síkon valamelyik aszimptotával párhuzamos egyenes nem lehet a görbe érintője, mert a hiperbolára nézve külső és belső pontot is tartalmaz. A projektív síkon az ilyen egyenes két pontban metszi a görbét, az egyik metszéspont az eddig is ismert végesben lévő pont, a másik pedig a hiperbola egyik végtelen távoli pontja.

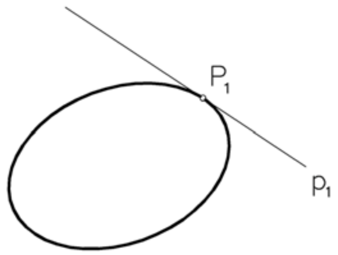


Következmény

Egy nemelfajuló másodrendű görbe nem tartalmazhat egyenest, ezért egy egyenes vagy két pontban metszi, vagy érinti, vagy nem metszi a görbét.

Tétel

Egy nemelfajuló másodrendű görbének minden pontjában csak egy érintője lehet.



Bizonyítás

Legyen az $a_{ik}x_ix_k=0$ (i,k=1, 2, 3) nemelfajuló másodrendű görbe, azaz $\det(a_{ik})\neq 0$. Az egyenes legyen két pontjával megadva: $P_1(\underset{1}{x}_i)$ és $P_2(\underset{2}{x}_i)$. A P_1 és P_2 pontokra illeszkedő bármely pont homogén koordinátája előállítható $x_i=\lambda_1\underset{1}{x}_i+\lambda_2\underset{2}{x}_i$ alakban. Az egyenes és görbe közös pontjainak λ_1, λ_2 egyenes-koordinátáira a $c_{\alpha\beta}\lambda_\alpha\lambda_\beta=0$ homogén másodfokú egyenletet kapjuk, ahol $c_{11}=a_{ik}\underset{1}{x}_i\underset{1}{x}_k$, $c_{12}=a_{ik}\underset{1}{x}_i\underset{2}{x}_k$, $c_{22}=a_{ik}\underset{2}{x}_i\underset{2}{x}_k$. Akkor van az egyenletnek egy megoldása a $\lambda=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$-re, ha a diszkrimináns nulla, vagyis $D=c_{12}^2-c_{11}c_{22}=0$. Az egyenes legyen a P_1 pontban érintője a görbének, ez azt is jelenti, hogy P_1 illeszkedik a görbére, vagyis $c_{11}=a_{ik}\underset{1}{x}_i\underset{1}{x}_k=0$. Ebből az következik, hogy a D számítása során a második tag már nem szerepel, ezért $c_{12}=a_{ik}\underset{1}{x}_i\underset{2}{x}_k=0$ is teljesül. Az $a_{ik}\underset{1}{x}_i=u_k$ értékek csak a P_1 pont és a görbe által vannak meghatározva és a P_2 pont teljesíti az $u_k\underset{2}{x}_k=0$ feltételt. Ez nem más, mint P_2 illeszkedése az (u_1, u_2, u_3) egyenesre. P_2-nek az egyenes bármely pontja válaszható lenne. Az $a_{ik}\underset{1}{x}_i=u_k$ egyenlőségekkel egyértelműen definiált egyenes a görbe P_1 pontbeli érintője.

A számítások során kedvezőbb a mátrixalakot használni az érintőegyenes meghatározására:

$$\begin{pmatrix}\underset{1}{x}_1 & \underset{1}{x}_2 & \underset{1}{x}_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_1 & u_2 & u_3\end{pmatrix}$$

Megjegyzés

Középiskolából ismert, hogy az euklideszi síkon megadott $x^2+y^2=r^2$ egyenletű kör egy (x_0, y_0) pontjában vett érintőjének egyenlete: $x\cdot x_0+y\cdot y_0=r^2$. Hogy ennek az egyenletnek a helyességét lássuk, térjünk át homogén koordinátákra. Az (x_0, y_0) koordinátájú pont esetén a legegyszerűbb homogén koordinátahármas: $(x_0, y_0, 1)$. Mátrixalakban az adott pont polárisának számítása a következő:

$$\begin{pmatrix} x_0 & y_0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 & y_0 & -r^2 \end{pmatrix}.$$

Tehát a poláris egyenest az $(x_0, y_0, -r^2)$ számhármas jellemzi, azaz éppen a fent leírt alakú Descartes-koordinátákkal felírva.

Tétel

Egy nemelfajuló másodrendű görbe különböző pontjaiban különbözőek az érintők.

Bizonyítás

Legyen az $a_{ik}x_ix_k=0$ $(i,k=1, 2, 3)$ nemelfajuló másodrendű görbe, azaz $\det(a_{ik})\neq 0$.

A $P_1(\underset{1}{x}_i)$ és $P_2(\underset{2}{x}_i)$ különböző pontokhoz tartozó a poláris egyenesek p_1 és p_2, melyek koordinátái $u_k = a_{ik}\underset{1}{x}_i$ és $v_k = a_{ik}\underset{2}{x}_i$.

A bizonyítás indirekt, vagyis feltesszük, hogy bár a P_1 és P_2 pontok különbözőek, a p_1 és p_2 polárisok megegyeznek. Ez azt jelenti, hogy az u_k és v_k egyeneskoordináták egy konstansszorzóban térnek el egymástól. $(\rho\neq 0)$

$$u_k=\rho\cdot v_k$$

Részletesebben: $a_{ik}\underset{1}{x}_i=\rho\cdot a_{ik}\underset{2}{x}_i$, melyet átrendezve: $a_{ik}(\underset{2}{x}_i-\rho\cdot\underset{1}{x}_i)=0$. Mivel az a_{ik} mátrix invertálható, ezért ez az egyenlőség csak akkor teljesül minden esetben, ha a zárójelben lévő különbség tűnik el. Ez pedig azt jelentené, hogy a P_1 és P_2 pontok homogén koordinátái egy konstansszorzóban térnek el, vagyis a két pont megegyezik. Ez ellentmondás azzal a feltétellel, hogy P_1 és P_2 különböző pontok.

Ha egy pont nem illeszkedik a nemelfajuló másodrendű görbére, akkor is meghatároznak az $a_{ik}\underset{1}{x}_i=u_k$ egyenlőségek egy egyenest.

Tétel

Ha a $P_1(\underset{1}{x}_i)$ pont nem illeszkedik az $a_{ik}x_ix_k=0$ nemelfajuló másodrendű görbére, akkor a P_1 polárisa nem érintheti a görbét.

Bizonyítás

Legyen az $a_{ik}x_ix_k=0$ $(i,k=1, 2, 3)$ nemelfajuló másodrendű görbe, azaz $\det(a_{ik})\neq 0$.

A bizonyítás indirekt, vagyis feltesszük, hogy a $P_1(\underset{1}{x}_i)$ pont p_1 polárisa egy P_1-től különböző $P_2(\underset{2}{x}_i)$ pontban érinti a görbét.

Ez azt jeleneti, hogy a p_1 poláris egyenlete: $a_{ik}\underset{1}{x}_i x_k = 0$.

A P_2 érintési pontban az érintő egyenlete: $a_{ik}\underset{2}{x}_i x_k = 0$.

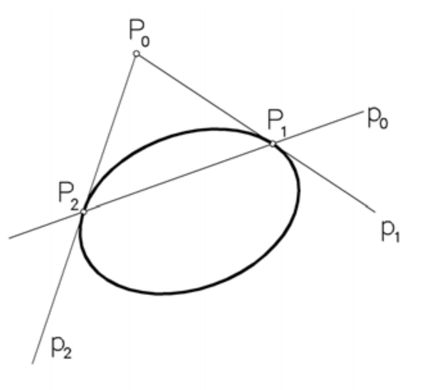
A két egyenlet ugyanazt az egyenest jellemzi, ezért a kétféleképpen kiszámolt egyeneskoordináták csak egy konstansszorzóban térhetnek el egymástól. $(\rho\neq 0)$

$$a_{ik} \underset{2}{x}_i = \rho \cdot a_{ik} \underset{1}{x}_i$$

Egy oldalra rendezve: $a_{ik}(\underset{2}{x}_i - \rho \cdot \underset{1}{x}_i) = 0$. Mivel az a_{ik} invertálható, ezért ez az egyenlőség csak akkor teljesül minden esetben, ha a zárójelben lévő különbség tűnik el. Ez pedig azt jelentené, hogy a P_1 és P_2 pontok homogén koordinátái egy konstansszorzóban térnek el, vagyis a két pont megegyezik. Ez ellentmondás azzal a feltétellel, hogy P_1 és P_2 különböző pontok.

Tétel

Ha a $P_0(\underset{0}{x}_i)$ pont nem illeszkedik az $a_{ik}x_ix_k=0$ nemelfajuló másodrendű görbére és a P_0 polárisa a $P_1(\underset{1}{x}_i)$ és $P_2(\underset{2}{x}_i)$ pontokban metszi a görbét, akkor a P_1 és P_2 pontokban vett görbeérintők a P_0 pontban metszik egymást.



(Megjegyzés:

Ez a tétel ad lehetőséget arra, hogy egy külső pontból érintőket határozhassunk meg az adott nemelfajuló másodrendű görbéhez. Az eljárás a következő: Először meghatározzuk a pont polárisát a görbére nézve, majd a polárissal elmetsszük a görbét. Ezek a metszéspontok lesznek az érintési pontok. Ha pont belső pont a görbére nézve, akkor a poláris egyenes nem metszi a görbét, így nincsenek valós érintési pontok. Emiatt csak képzetes érintőket lehet meghatározni.)

Bizonyítás

Legyen az $a_{ik}x_ix_k=0$ (i,k=1, 2, 3) nemelfajuló másodrendű görbe, azaz $\det(a_{ik})\neq 0$.

A $P_0(\underset{0}{x}_i)$ pont p_0: $a_{ik} \underset{0}{x}_i x_k = 0$ polárisa a $P_1(\underset{1}{x}_i)$ és $P_2(\underset{2}{x}_i)$ pontokban metszi a görbét. A P_1 és P_2 pontok illeszkednek a p_0 polárisra: $a_{ik} \underset{0}{x}_i \underset{1}{x}_k = 0$ és $a_{ik} \underset{0}{x}_i \underset{2}{x}_k = 0$.

A P_1 görbepontban az érintő egyenlete: $a_{ik} \underset{1}{x}_i x_k = 0$, azaz $u_kx_k=0$.

A P_2 görbepontban az érintő egyenlete: $a_{ik} \underset{2}{x}_i x_k = 0$, azaz $v_kx_k=0$.

Az $a_{ik} \underset{0}{x}_i \underset{1}{x}_k = 0$ -ból következik, hogy P_0 illeszkedik a P_1-beli érintőre: $u_i \underset{0}{x}_i = 0$.

Az $a_{ik} \underset{0}{x}_i \underset{2}{x}_k = 0$ -ból következik, hogy P_0 illeszkedik a P_2-beli érintőre: $v_i \underset{0}{x}_i = 0$.

Vagyis a P_0 pont a két érintő metszéspontja. (Az a_{ik} mátrix szimmetrikus és a szummázásnál emiatt mindegy, hogy i vagy k szerint összegzünk előbb.)

Konjugált pontok

Definíció

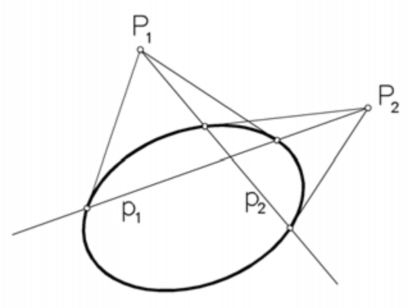
Adott az $a_{ik}x_ix_k=0$ (i,k=1, 2, 3) nemelfajuló másodrendű görbe. A $P_1(\underset{1}{x}_i)$ és $P_2(\underset{2}{x}_i)$ pontokat *konjugált*aknak nevezzük az adott másodrendű görbére nézve, ha koordinátáik kielégítik az $a_{ik}\underset{1}{x}_i\underset{2}{x}_k=0$ egyenletet.

Következmény

Egy adott nemelfajuló másodrendű görbére nézve a P ponthoz konjugált pontok a P pont polárisán vannak. Önmagukhoz pedig csak a görbe pontjai konjugáltak.

Tétel

Egy adott nemelfajuló másodrendű görbére nézve a konjugált pontok illeszkednek egymás polárisára.



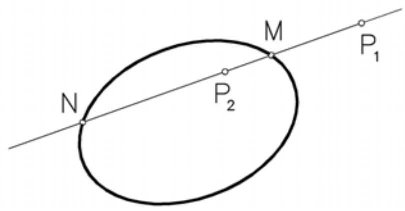
Bizonyítás

Legyen az $a_{ik}x_ix_k=0$ (i,k=1, 2, 3) nemelfajuló másodrendű görbe, azaz $\det(a_{ik})\neq 0$. $P_1(\underset{1}{x}_i)$és $P_2(\underset{2}{x}_i)$ pontok konjugáltak a görbére nézve, ezért $a_{ik}\underset{1}{x}_i\underset{2}{x}_k=0$.

A P_1 és P_2 pontokhoz tartozó a poláris egyenesek p_1 és p_2, melyek koordinátái $u_k=a_{ik}\underset{1}{x}_i$ és $v_k=a_{ik}\underset{2}{x}_i$. Ebből már látható, hogy $u_k\underset{2}{x}_k=0$ és $v_i\underset{1}{x}_i=0$, amely azt jelenti, hogy P_2 illeszkedik a p_1 polárisra és a P_1 illeszkedik a p_2 polárisra. (Itt felhasználtuk, hogy az a_{ik} mátrix szimmetrikus.)

Tétel

Adott nemelfajuló másodrendű görbére nézve vett $P_1(\underset{1}{x}_i)$ és $P_2(\underset{2}{x}_i)$ konjugált pontokat összekötő egyenes az M és N pontokban metszi a görbét. Ekkor a P_1, P_2, M, N harmonikus pontnégyest alkot, azaz $(P_1P_2MN)=-1$.



Bizonyítás

Legyen az $a_{ik}x_ix_k=0$ (i,k=1, 2, 3) nemelfajuló másodrendű görbe, azaz $\det(a_{ik})\neq 0$. $P_1(\underset{1}{x}_i)$és $P_2(\underset{2}{x}_i)$ pontok nem illeszkednek a görbére, de konjugáltak a görbére nézve, ezért $a_{ik}\underset{1}{x}_i\underset{2}{x}_k=0$. A P_1, P_2, $E(\underset{1}{x}_i+\underset{2}{x}_i)$ koordináta alapalakzatot tekintve az P_1P_2 egyenes bármely pontja előáll $x_i=\lambda_1\underset{1}{x}_i+\lambda_2\underset{2}{x}_i$ alakban, köztük a görbével alkotott közös pontok is.

A közös pontok homogén koordinátái kielégítik a

$$c_{11}\lambda_1^2+2\,c_{12}\lambda_1\lambda_2+c_{22}\lambda_2^2=0$$

egyenletet, ahol

$c_{11}=a_{ik}\underset{1}{x}_i\underset{1}{x}_k\neq 0$, mert a P_1 nem illeszkedik a görbére,

$c_{12}=a_{ik}\underset{1}{x}_i\underset{2}{x}_k=0$, mert a P_1 és P_2 konjugáltak a görbére nézve,

$c_{22}=a_{ik}\underset{2}{x}_i\underset{2}{x}_k\neq 0$, mert a P_2 nem illeszkedik a görbére.

Az így előálló $c_{11}\lambda_1^2+c_{22}\lambda_2^2=0$ egyenletet $\lambda=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$-re megoldva $\lambda=\sqrt{-\frac{c_{22}}{c_{11}}}=\pm C$.

Ekkor az egyenesen lévő koordináták: $M(C, 1)$, $N(-C, 1)$, $P_1(1, 0)$, $P_2(0, 1)$. Ebből a kettősviszony kiszámítható:

$$(M, N, P_1, P_2)=\frac{\begin{vmatrix} C & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} C & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}:\frac{\begin{vmatrix} -C & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -C & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}=-\frac{1}{C}:\frac{1}{C}=-1.$$

Tétel

Egy egyenesnek egy nemelfajuló másodrendű görbével vett metszéspontjait harmonikusan elválasztó pontok konjugáltak a görbére nézve.

Bizonyítás

Legyen az $a_{ik}x_ix_k=0$ ($i,k=1, 2, 3$) nemelfajuló másodrendű görbe, azaz $\det(a_{ik})\neq 0$. A $P_1(\underset{1}{x_i})$és $P_2(\underset{2}{x_i})$ pontok egy egyenesnek e görbével alkotott közös pontjai. A P_1, P_2, $E(\underset{1}{x_i}+\underset{2}{x_i})$ koordináta alapalakzatot tekintve az P_1P_2 egyenes bármely pontja előáll $x_i=\lambda_1\underset{1}{x_i}+\lambda_2\underset{2}{x_i}$ alakban, köztük azok a P_3 és P_4 pontok is, melyek harmonikusan választják el a P_1 és P_2 pontokat. $(P_1, P_2, P_3, P_4)=-1$-ből a P_3 egyenesre vonatkozó koordinátái: (λ_1, λ_2), a P_4 ponté $(\lambda_1, -\lambda_2)$. Ugyanis, ha a $\lambda=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ helyettesítést alkalmazzuk, akkor

$$(P_1, P_2, P_3, P_4)=\frac{\begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}:\frac{\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}=-\frac{1}{\lambda}:\frac{1}{\lambda}=-1.$$

Ha a P_3 és P_4 konjugáltak a görbére nézve, akkor homogén koordinátáik kielégítik a $a_{ik}\underset{3}{x_i}\underset{4}{x_k}=0$ feltételt.

$$a_{ik}(\lambda_1\underset{1}{x_i}+\lambda_2\underset{2}{x_i})(\lambda_1\underset{1}{x_k}-\lambda_2\underset{2}{x_k})=$$
$$=a_{ik}\lambda_1^2\underset{1}{x_i}\underset{1}{x_k}+a_{ik}\lambda_2\lambda_1\underset{2}{x_i}\underset{1}{x_k}-a_{ik}\lambda_1\lambda_2\underset{1}{x_i}\underset{2}{x_k}+a_{ik}\lambda_2^2\underset{2}{x_i}\underset{2}{x_k}=0$$

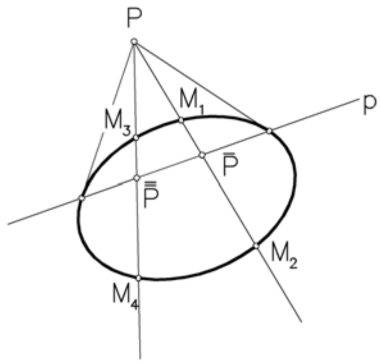
Ebben az első és negyedik tag azért lesz nulla, mert a P_1 és P_2 illeszkedik a görbére. A középső kettő pedig csak előjelben tér el egymástól. Ezért a P_3 és P_4 konjugáltak a görbére nézve.

Megjegyzés

A konjugáltság projektív invariáns. Egy nemelfajuló másodrendű görbét metsző egyenesen ez alapján végtelen sok olyan pontpár határozható meg, amely harmonikusan választja el a metszéspontokat. Így a konjugáltság, mint kapcsolat, kettősviszonnyal kifejezhető. Ha egy pontpár konjugált egy adott nemelfajuló másodrendű görbére, akkor egy projektív transzformáció után a képeik konjugáltak lesz a képgörbére nézve, amely szintén nemelfajuló másodrendű görbe.

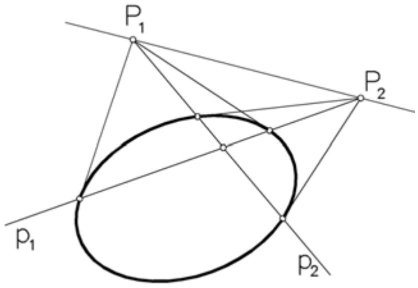
Következmény

Adott egy nemelfajuló másodrendű görbe. Egy tetszőleges pontból a görbéhez egyeneseket vezetünk és meghatározzuk ezeknek a görbével alkotott metszéspontjait. A pontnak a metszéspontokra vonatkozó harmónikus társa a pont polárisára illeszkedik.



Tétel

Adott egy nemelfajuló másodrendű görbe. Egy adott egyenes pontjainak polárisai áthaladnak az egyenes pólusán.



Bizonyítás

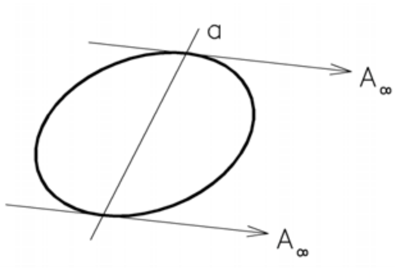
Legyen az $a_{ik}x_ix_k=0$ (i,k=1, 2, 3) nemelfajuló másodrendű görbe, azaz $\det(a_{ik})\neq 0$. A $P_1(\underset{1}{x}_i)$ pont polárisa az $a_{ik}\underset{1}{x}_i x_k = u_k x_k = 0$ egyenes, melyet p_1-gyel jelölünk. Legyen ezen az egyenesen $P_2(\underset{2}{x}_i)$ egy tetszőleges pont, ezért teljesül $a_{ik}\underset{1}{x}_i\underset{2}{x}_k = 0$. Ha csak k szerint végezzük el az összegzést, akkor $a_{ik}\underset{2}{x}_k\underset{1}{x}_i = v_i\underset{1}{x}_i = 0$ teljesül, vagyis a $P_1(\underset{1}{x}_i)$ illeszkedik a $P_2(\underset{2}{x}_i)$ polárisára, melynek az egyenes koordinátái $v_i = a_{ik}\underset{2}{x}_k$. Mivel a P_2 pontot tetszőlegesen választottuk a p_1 egyenesről, emiatt tetszőleges P_2 polárisa áthalad a P_1 ponton.

Definíció

A másodrendű görbe *középpont*ján a végtelen távoli egyenes pólusát értjük. A középponton átmenő egyeneseket *átmérők*nek nevezzük.

Az átmérők rendelkeznek a következő tulajdonsággal:

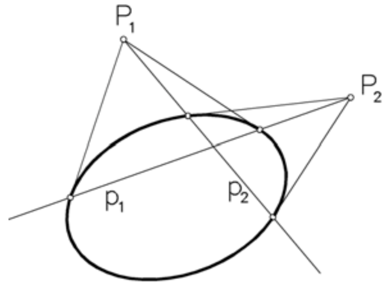
Valamely végtelen távoli pont polárisa a végtelen távoli pontból a görbéhez húzott érintők érintési pontjait köti össze. Ennek megfelelően egy átmérőegyenes és a görbe közös pontjaiban a görbe érintői az euklideszi síkrészen egymással párhuzamosak.



Konjugált egyenesek

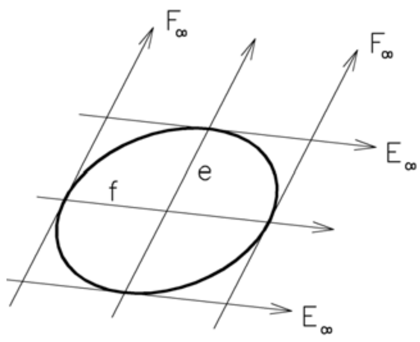
Definíció

Azokat az egyeneseket, melyek illeszkednek egymás pólusára egy adott másodrendű görbére nézve, *konjugált egyenesek*nek nevezzük.
(Ekkor az is teljesül, hogy ezek a pólusok konjugált pontok a görbére nézve.)



Megjegyzés

Az ellipszis középpontjának polárisa a végtelen távoli egyenes. Az ellipszis konjugált átmérőinek korábbi fogalma az előbbi definícióval projektív megvilágításba került. Az euklideszi síkon azt a két átmérőt neveztük konjugáltaknak, melyeknek a görbével alkotott metszéspontban a másik átmérővel párhuzamos érintői vannak. A projektív síkon ez a következőképpen mondható: az egymás végtelen távolban lévő pólusára illeszkedő átmérők lesznek konjugáltak.

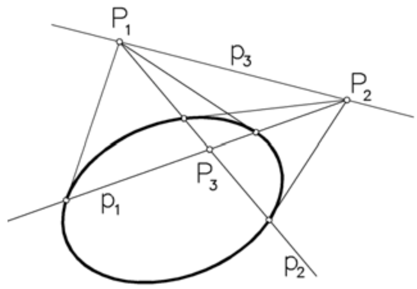


Definíció

Három olyan pont, amelyek egymáshoz páronként konjugáltak egy adott nemelfajuló másodrendű görbére nézve, egy *polárháromszög* csúcsait adják.

Tétel

Minden nemelfajuló másodrendű görbéhez végtelen sok polárháromszög tartozik, melyek mindegyike megadható egy konjugált pontpár által. Továbbá egy polárháromszögben egy csúcspont polárisa a vele szemköztes háromszög oldal.

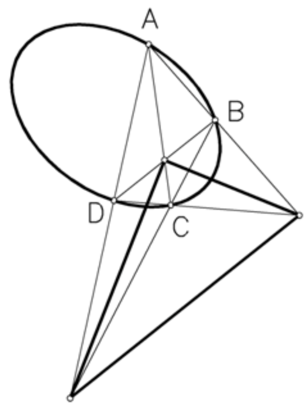


Bizonyítás

Legyen az $a_{ik}x_ix_k=0$ (i,k=1, 2, 3) nemelfajuló másodrendű görbe, azaz $\det(a_{ik})\neq 0$. A $P_1(\underset{1}{x}_i)$ és $P_2(\underset{2}{x}_i)$ konjugáltak a görbére nézve. Ekkor a P_1 illeszkedik a p_2 polárisra és a P_2 illeszkedik a p_1 polárisra. Legyen a P_3 pont a p_1 és p_2 polárosok metszéspontja. Ekkor P_3 a P_1-hez és a P_2-höz is konjugált. Ekkor a p_3 poláris a P_1P_2 egyenes. A $P_1P_2P_3$ egy polárháromszög.
(Ha a P_1 és P_2 külső pont, akkor a P_3 csak belső pont lehet.)

Tétel

Egy nemelfajuló másodrendű görbe négy pontja által alkotott teljesnégyszög átlóspontjai a görbe egy polárháromszögét határozzák meg.

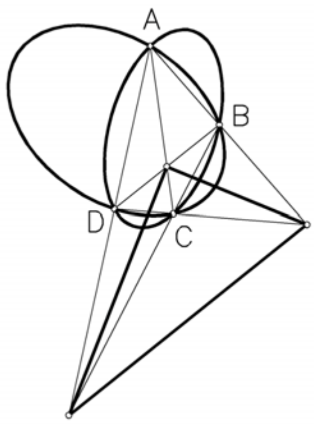


Bizonyítás

A görbe A, B, C, D pontjai egy teljes négyszöget határoznak meg. Tudjuk, hogy a teljes négyszögben egy átlón az átlós pontok harmonikus pontnégyest alkotnak a másik két oldallal alkotott metszéspontokkal. Az is igaz, hogy egy oldalegyenesen a két csúcspont és az átlókkal alkotott metszéspontok (az egyik közülük egy áltóspont) is harmonikus pontnégyest adnak. Az átlós pontok csak a görbe négy pontjától függenek, és a harmonikus négyesek miatt konjugáltak a rögzített négy ponton áthaladó görbére nézve.

Következmény

Négy rögzített ponton áthaladó minden másodrendű görbének a négy pont által megadott polárháromszög közös polárháromszöge.



Tétel

Egy nemelfajuló másodrendű görbe egy polárháromszögének csúcspontjai egy kanonikus koordinátarendszer alappontjait adják. (mindez azt jelenti, hogy ebben a koordinátarendszerben a görbe egyenlete csak négyzetes tagokat tartalmaz.)

Bizonyítás

Legyen az $a_{ik}x_ix_k=0$ (i,k=1, 2, 3) nemelfajuló másodrendű görbe, azaz $\det(a_{ik})\neq 0$. A $P_1(1,\ 0,\ 0)$, $P_2(0,\ 1,\ 0)$, $P_3(0,\ 0,\ 1)$ pontok egy polárháromszög csúcsai. Az egységpontot még ki kell jelölni, $E(1,\ 1,\ 1)$.

A P_1 polárisa a P_2P_3 egyenes, melynek az egyenlete $x_1=0$. A görbe mátrixának felhasználásával

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

ahol a baloldalon lévő (1 0 0) mátrix a P_1, míg a jobb oldalon lévő a P_2P_3 egyenes koordinátái. Az egyenleteket részletes kiírva látható, hogy mindez csak akkor teljesül, ha $a_{11}=1$, $a_{12}=0$, $a_{13}=0$. A homogenitás miatt $a_{11}=\lambda_1$ is lehetséges, ahol $\lambda_1\neq 0$.

A P_2 polárisa a P_1P_3 egyenes, melynek az egyenlete $x_2=0$. A görbe mátrixának felhasználásával

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\end{pmatrix},$$

ahol a baloldalon lévő (0 1 0) mátrix a P_2, míg a jobb oldalon lévő a P_1P_3 egyenes koordinátái. Az egyenleteket részletes kiírva látható, hogy mindez csak akkor teljesül, ha $a_{21}=0$, $a_{22}=1$, $a_{23}=0$. A homogenitás miatt $a_{22}=\lambda_2$ is lehetséges, ahol $\lambda_2\neq0$.

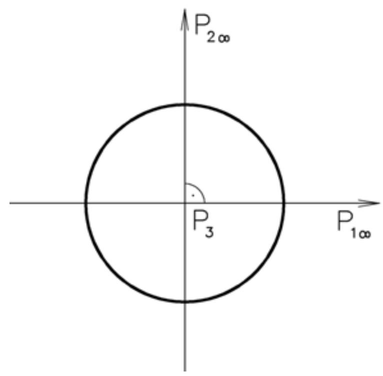
A P_3 polárisa a P_1P_2 egyenes, melynek az egyenlete $x_3=0$. A görbe mátrixának felhasználásával

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

ahol a baloldalon lévő (0 0 1) mátrix a P_3, míg a jobb oldalon lévő a P_1P_2 egyenes koordinátái. Az egyenleteket részletes kiírva látható, hogy mindez csak akkor teljesül, ha $a_{31}=0$, $a_{32}=0$, $a_{33}=1$. A homogenitás miatt $a_{33}=\lambda_3$ is lehetséges, ahol $\lambda_3\neq0$. A görbe egyenlete valóban kanonikus alakú.

Példa

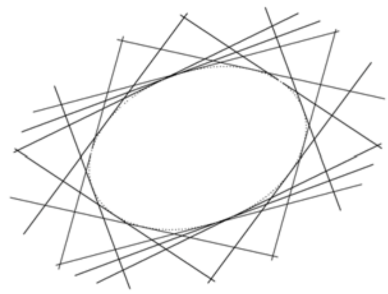
Tekintsünk egy r sugarú valós kört az euklideszi síkon, majd a síkot bővítsük ki a végtelen távoli elemekkel projektív síkká. Ekkor a kör középpontján áthaladó, egymásra merőleges egyenespár és a sík végtelen távoli egyenese egy polárháromszöget ad meg. Legyen a P_3 a kör középpontja, $P_{1\infty}$ és $P_{2\infty}$ az egymásra merőleges egyenesek végtelen távoli pontja. Ebben a koordinátarendszerben a görbe egyenlete $x_1^2+x_2^2-r^2x_3^2=0$.



Másodosztályú görbék

Definíció

A projektív síkon azon egyenesek halmazát, melyek koordinátái kiegyenlítik az $a_{ik}u_iu_k=0$ egyenletet (i,k=1,2,3), *másodosztályú görbé*nek nevezzük.



Tétel

Az $a_{ik}x_ix_k=0$ nemelfajuló másodrendű görbe érintőnek összessége kielégíti az $a_{ik}^{-1}u_iu_k=0$ egyenletet. A másodrendű görbe duálisa az érintőiből álló másodosztályú görbe.

Bizonyítás

Legyen az $a_{ik}x_ix_k=0$ (i,k=1, 2, 3) nemelfajuló másodrendű görbe, azaz $\det(a_{ik})\neq 0$. A görbe egyenlete mátrix alakban:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=0,$$

vagy egyszerűbben, az X sormátrixot, az X^T transzponált mátrixot és a görbe A mátrixát felhasználva: $X\cdot A\cdot X^T=0$.

A $P(x_i)$ pont p polárisának koordinátái $u_k=a_{ik}x_k$. Ha a P pont illeszkedik a görbére, akkor a polárisa érinti a másodrendű görbét. Mátrix alakban:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix},$$

vagy egyszerűbben az X és U sormátrixokat és a görbe A mátrixát felhasználva: $X\cdot A=U$.

Az $X\cdot A=U$ egyenletet jobbról az A mátrix A^{-1} inverzével szorozva $X\cdot A\cdot A^{-1}=U\cdot A^{-1}$, vagyis

$$X=U\cdot A^{-1}.$$

A görbe $X\cdot A\cdot X^T=0$ egyenletébe ezt helyettesítve:

$$X\cdot A\cdot X^T=(U\cdot A^{-1})\cdot A\cdot(U\cdot A^{-1})^T=U\cdot A^{-1}\cdot A\cdot(A^{-1})^T\cdot U^T=U\cdot E\cdot(A^{-1})^T\cdot U^T=U\cdot A^{-1}\cdot U^T=0.$$

Itt E a 3×3-as egységmátrix, és mivel az A mátrix szimmetrikus, az inverze is az, vagyis a transzponáltjával megegyezik.

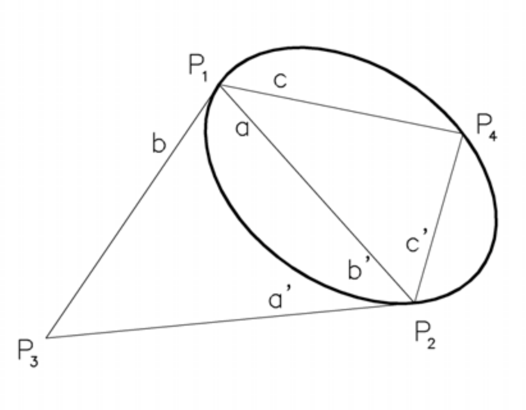
Az $U\cdot A^{-1}\cdot U^T=0$ egyenlet alapján azt lehet mondani, hogy az adott másodrendű görbe érintői az $a_{ik}^{-1}u_iu_k=0$ egyenletet elégítik ki, ahol a_{ik}^{-1} az A^{-1} mátrix elemeit jelölik.

Steiner tételek

Steiner I. tétele

Ha egy nemelfajuló másodrendű görbe pontjait két pontjából projiciáljuk (vetítjük), akkor két, egymáshoz projektív sugársort kapunk.

Bizonyítás



Az $a_{ik}x_ix_k=0$ nemelfajuló másodrendű görbe, azaz $\det(a_{ik})\neq 0$. A P_1, P_2 pontok legyenek a görbe pontjai, és ezekben a pontokban vett érintők metszéspontja P_3. A koordinátarendszer alappontjainak választjuk ezeket a pontokat.

$P_1(1,0,0)$, $P_2(0,1,0)$, $P_3(0,0,1)$

A görbe egy P_4 pontja legyen az egységpont, természetesen a négy pont általános helyzetű, vagyis bármely három nem illeszkedik egy egyenesre.

$P_4(1, 1, 1)$

Ebben a koordinátarendszerben P_1P_2 egyenlete: $x_3=0$

P_1P_3 egyenlete: $x_2=0$

P_2P_3 egyenlete: $x_1=0$

P_1P_4 egyenlete: $-x_2+x_3=0$

P_2P_4 egyenlete: $x_1-x_3=0$.

A görbe egyenletének felírásához a meglévő pólus-poláris kapcsolatokat és az illeszkedéseket fogjuk felhasználni.

A P_1 illeszkedik a görbére, azaz

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=0$$

teljesül, melyből az következik, hogy $a_{11}=0$.

A P_2 illeszkedik a görbére, azaz

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=0$$

teljesül, melyből az következik, hogy $a_{22}=0$.

A P_3 pont polárisa a P_1P_2 egyenes, azaz

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & 0 & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

teljesül, melyből az következik, hogy $a_{33}=1$, $a_{31}=0$, $a_{32}=0$.

A görbe mátrixának szimmetriájából következik, hogy ekkor $a_{13}=0$, $a_{23}=0$ is teljesül.

A P_4 illeszkedik a görbére, azaz

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & a_{12} & 0\\ a_{21} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=0$$

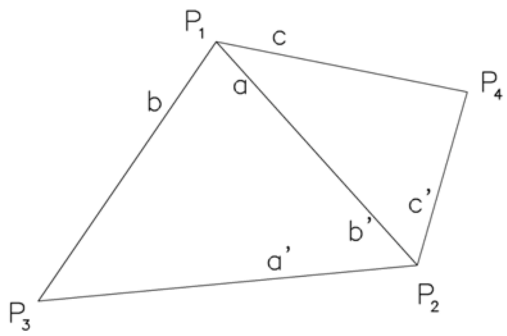
teljesül, melyből az következik, hogy $a_{12}=-\frac{1}{2}$.
Ezzel a görbe mátrixát meghatároztuk: $x_3^2-x_1x_2=0$.
Tekintsük a P_1 pontra illeszkedő sugársort. A P_1 pontra illeszkedő egyenesek egyenletei $\lambda_1x_2+\lambda_2x_3=0$ alakúak, ahol a λ_1, λ_2 nem lehet egyszerre nulla, ugyanis a P_1P_3 és P_1P_2 egyenesek a sugársorban vett koordinátaalakzat alapegyenesei, így a sugársor bármely eleme az $x_2=0$ és $x_3=0$ egyenletekből lineáris kombinációval származik.
Tekintsük a P_2 pontra illeszkedő sugársort. A P_2 pontra illeszkedő egyenesek egyenletei $\mu_1x_3+\mu_2x_1=0$ alakúak, ahol a μ_1, μ_2 nem lehet egyszerre nulla, ugyanis a P_2P_1és P_2P_3 egyenesek a sugársorban vett koordinátaalakzat alapegyenesei, így a sugársor bármely eleme az $x_3=0$ és $x_1=0$ egyenletekből lineáris kombinációval származik.
Rendeljük egymáshoz azokat a sugarakat, melyekre $\lambda_1=\mu_1$, és $\lambda_2=\mu_2$. A megfeleltetést felhasználva λ_1 és λ_2-re meg kell oldanunk a

$$\lambda_1x_2+\lambda_2x_3=0$$
$$\lambda_1x_3+\lambda_2x_1=0$$

egyenletrendszert, melynek csak akkor van triviálistól különböző megoldása, ha az egyenletrendszer mátrixának determinánsa eltűnik. A determináns: $-x_1x_2+x_3^2=0$, amely a felírt görbe egyenletének –1-szerese, vagyis éppen a görbe egyenletét kapjuk.

Steiner II. tétele

Ha tekintünk két egymáshoz projektív, de nem perspektív sugársort, akkor a sugársorokban egymásnak megfelelő elemek metszéspontjai egy nemelfajuló másodrendű görbére illeszkednek.



Bizonyítás

Tekintsünk a következő koordinátarendszert a projektív síkon:
$P_1(1, 0, 0)$, $P_2(0, 1, 0)$, $P_3(0, 0, 1)$, $P_4(1, 1, 1)$
Ebben a koordinátarendszerben $a=b'=P_1P_2$ egyenlete: $x_3=0$
$b=P_1P_3$ egyenlete: $x_2=0$
$a'=P_2P_3$ egyenlete: $x_1=0$
$c=P_1P_4$ egyenlete: $-x_2+x_3=0$
$c'=P_2P_4$ egyenlete: $x_1-x_3=0$.
Ebben a koordinátarendszerben olyan egymáshoz projektív sugársorokat veszünk, melyek sorozópontja P_1 és P_2. A sugarak megfeleltetése a következő:

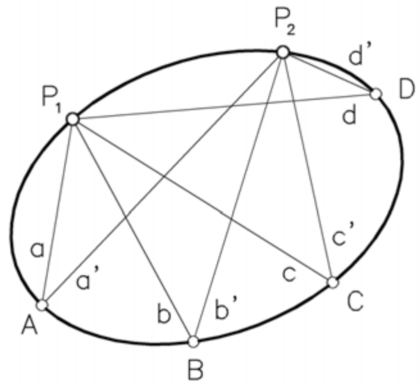
$$a=P_1P_2 \quad \leftrightarrow \quad a'=P_2P_3$$
$$b=P_1P_3 \quad \leftrightarrow \quad b'=P_2P_1$$
$$c=P_1P_4 \quad \leftrightarrow \quad c'=P_2P_4$$

Ez a megfeleltetés biztosan nem lesz perspektív, mert a P_1P_2 egyenes nem önmagának felel meg. (Ha perspektív kapcsolat lenne, akkor a megfelelő sugarak egy egyenesen metszenék egymást, de ettől most eltekinthetünk.)
A P_1-re illeszkedő sugársor egyenlete: $\lambda_1x_2+\lambda_2x_3=0$, vagyis a b és a egyenesek egyenletéből lineáris kombinációval származtatható.
A P_2-re illeszkedő sugársor egyenlete: $\mu_1x_3+\mu_2x_1=0$, vagyis a b' és a' egyenesek egyenletéből lineáris kombinációval származtatható.

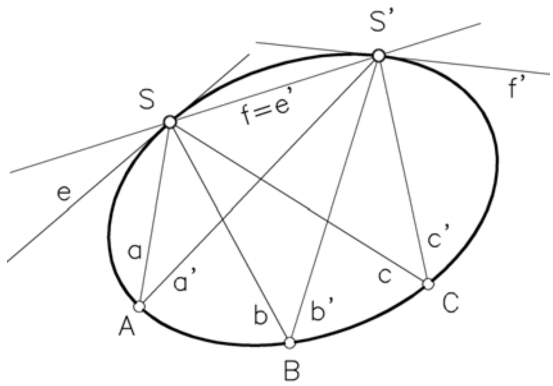
Ha $\lambda_1=1$, $\lambda_2=0$ és $\mu_1=1$, $\mu_2=0$, akkor a b és b’ egyeneseket egymással elmetszve a P_1 pontot kapjuk.
Ha $\lambda_1=0$, $\lambda_2=1$ és $\mu_1=0$, $\mu_2=1$, akkor az a és a’ egyeneseket egymással elmetszve a P_2 pontot kapjuk.
Ha $\lambda_1=1$, $\lambda_2=1$ és $\mu_1=1$, $\mu_2=1$, akkor a c és c’ egyeneseket egymással elmetszve a P_4 pontot kapjuk.
Vagyis az egymásnak megfelelő sugarakat az jellemzi, hogy a lineáris kombinációk felírásában a $\lambda_1=\mu_1$, és $\lambda_2=\mu_2$. Ezeket a helyettesítéseket alkalmazva egy megfelelő sugárpár metszéspontját a következő egyenletrendszer megoldása fogja adni:

$$\lambda_1 x_2+\lambda_2 x_3=0$$
$$\lambda_1 x_3+\lambda_2 x_1=0$$

Ennek az egyenletrendszernek akkor van nem triviális megoldása, ha az alapmátrix determinánsa nulla. A determináns: $-x_1x_2+x_3^2=0$, amely egy másodrendű görbe egyenlete. Ez a másodrendű görbe nemelfajuló, mert a mátrixának determinánsa nullától különböző.



Megfigyelhető, hogy a sugársorok sorozópontjai a görbének pontjai. Egy sugársorok közötti projektív kapcsolatot 3-3 egymásnak megfeleltetett sugár megad, de a perspektív helyzetet elkerülendő a sorozópontokat összekötő egyenes nem felelhet meg önmagának. Ez a három sugárpár újabb három pontot ad. Vagyis a nemelfajuló másodrendű görbét öt általános helyzetű ponttal lehet megadni. Újabb görbepontokat az alapján határozhatunk meg, hogy a sugársorok újabb megfelelő sugárpárját metsszük el egymással. A megfelelő sugarak szerkesztése kettősviszony segítségével történik, ugyanis, ha az öt pont megadásával előálló sugarak a, b, c és a’, b’, c’, akkor a d és d’ megfelelő sugarakra (abcd)=(a’b’c’d’). A sorozópontokat összekötő egyenes a görbe sorozópontokban vett érintőinek megfelelője, melyet a következőképpen kell értenünk:



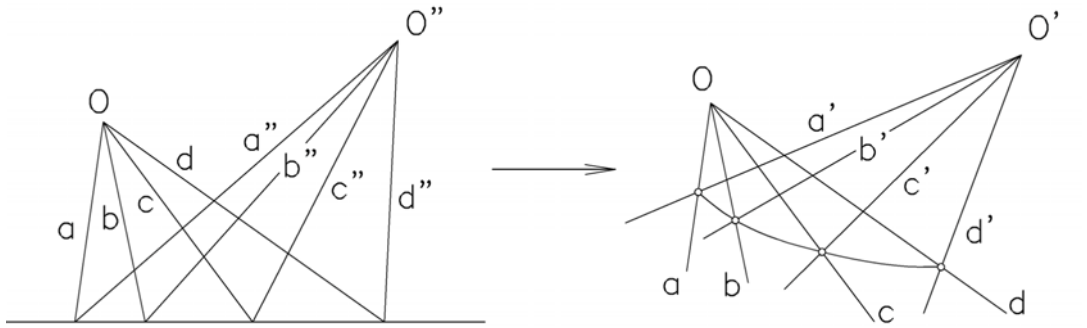
Legyen a görbe S pontbeli érintője az e egyenes. Ekkor a kettősviszony segítségével hozzá az e’=SS’ egyenes rendelhető. Most az S-re illesztett sugársorban f=SS’ egy sugár, Ennek az S’ pontban vett és f’-vel jelölt érintő felel meg.

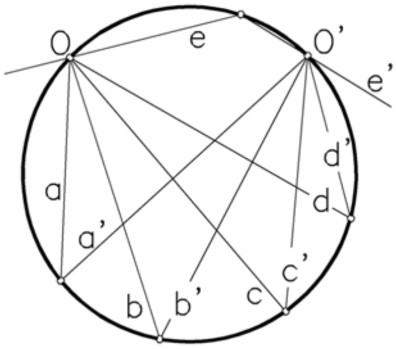
Megjegyzés

Ha a tárgyalásmódunk szintetikus lenne, akkor a másodrendű görbét elsőfajú projektív alapalakzatokkal, sugársorok metszési alakzataként definiálhatnánk.

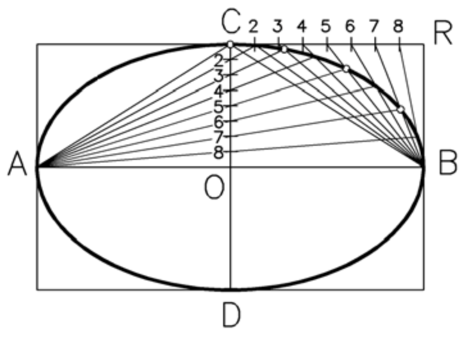
Tekintsünk néhány példát!

Először állítsunk elő projektív, de nem perspektív sugársorokat. Tekintsünk két perspektív helyzetű sugársort: az O sorozópontú *a*, *b*, *c*, *d*.. és az O" sorozópontú *a*", *b*", *c*", *d*"… sorokat. Ebből a helyzetből az O" sorozópontú sugársort mozgassuk el, a mozgás után az O' tartópontú *a*', *b*', *c*', *d*'… sugársort kapjuk. Az O és O' tartójú sugársorok egymással projektív kapcsolatban vannak.

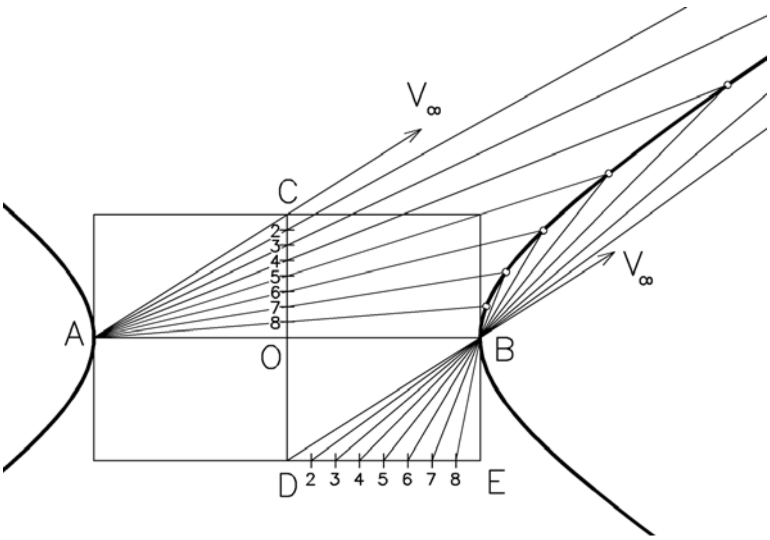




Ha a két sugársor egybevágó, akkor a kapott metszési alakzat kör lesz. Az egymásnak megfelelő szögek ugyanahhoz az ívhez tartozó kerületi szögek.

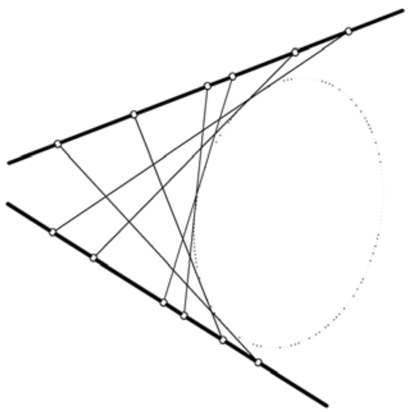


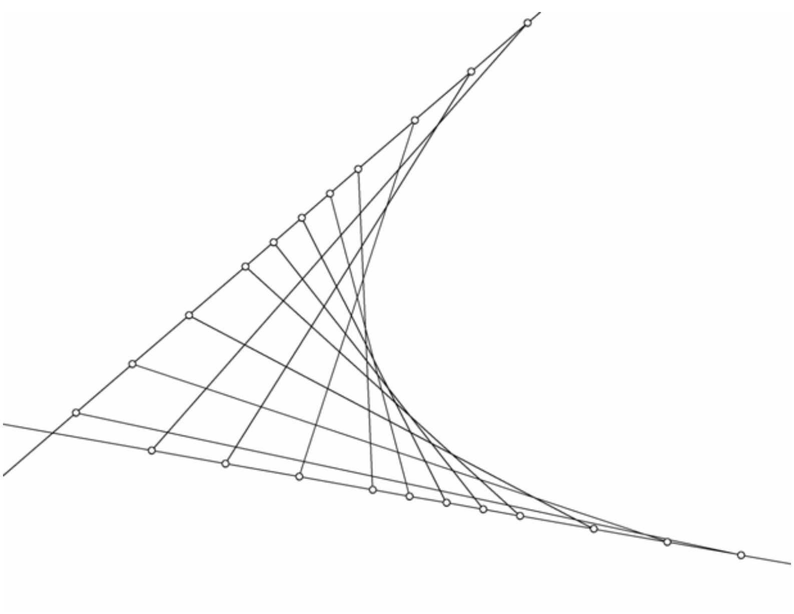
Jelölje AB és CD egy ellipszis nagy- és kistengelyét, a B- és C-beli érintők az R pontban metszik egymást. Osszuk fel az OC és RC szakaszokat *n* egyenlő részre (most *n*=8) O-ból, ill. R-ből indulva. A kapott osztáspontokat sorszámozzuk, az OC szakaszon az C és O az 1 és 9; a CR szakaszon a C és R az 1 és 9. Az OC-n lévő osztáspontokat A-ból, az RC-n lévőket B-ből vetítve két sugársort kapunk. A sugarakat úgy feleltetjük meg, hogy a megfelelő sorszámú osztásponton haladjanak át. Ekkor a sugarak az ellipszis pontjaiban metszik egymást. (Az osztásokat a szakaszok végpontjain túl is folytathatjuk, ekkor az ellipszis íve is folytatódik.)



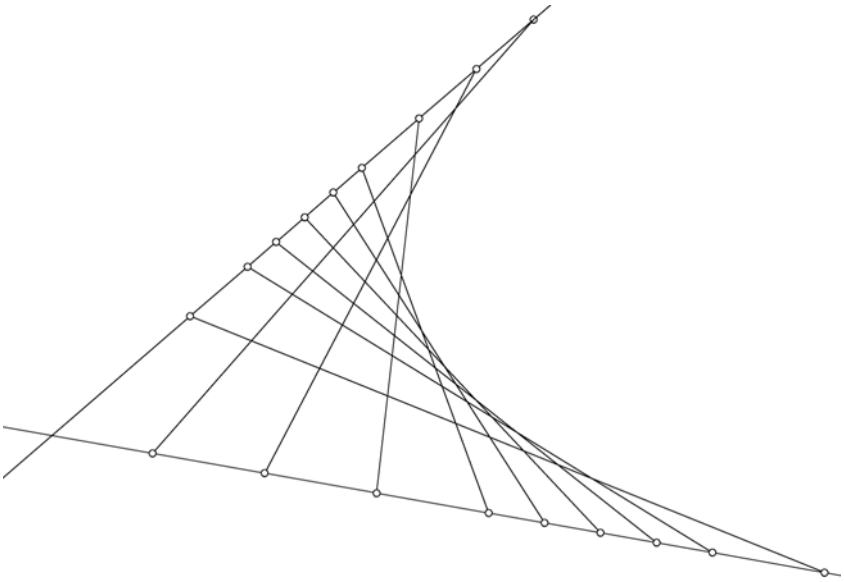
Jelölje AB és CD egy hiperbola valós- és képzetestengelyét, a B- beli érintőn a D merőleges vetülete E. Osszuk fel az OC és DE szakaszokat *n* egyenlő részre (most *n*=8) O-ból, ill. R-ből indulva. A kapott osztáspontokat sor-számozzuk, az OC szakaszon az C és O az 1 és 9; a DE szakaszon a D és E az 1 és 9. Az OC-n lévő osztáspontokat A-ból, a DE-n lévőket B-ből vetítve két sugársort kapunk. A sugarakat úgy feleltetjük meg, hogy a megfelelő sorszámú osztásponton haladjanak át. Ekkor a sugarak a hiperbola pontjaiban metszik egymást. (Az osztásokat a szakaszok végpontjain túl is folytathatjuk, ekkor a hiperbola íve is folytatódik, sőt a másik ága is kirajzolódik.)

Steiner II. tétele szerint projektív, de nem perspektív sugársorok megfelelő sugarai egy másodrendű görbe pontjaiban metszik egymást.
Ennek az állításnak a síkbeli duálisa a következő: Projektív, de nem perspektív pontsorok megfelelő pontjait összekötő egyenesek egy másodosztályú görbe egyeneseit adják. Mindez azt jelenti, hogy egy másodrendű görbe érintőit kapjuk, maga a görbe ennek az egyeneshalmaznak (egyenesseregnek) a burkolója.





Ha a két projektív pontsor olyan, hogy a végtelen távoli pontok egymásnak felelnek meg (azaz a pontsorok affin kapcsolatban vannak), akkor olyan másodrendű görbe érintőit kapjuk, melyek között a végtelen távoli egyenes (mint a megfelelő pontokat összekötő egyenes) is ott van. Ekkor a burkolt görbe parabola, a pontsorok pedig vagy egybevágóak, vagy hasonlóak egymáshoz.
Az ábrán egybevágó pontsorok által definiált parabola látható.



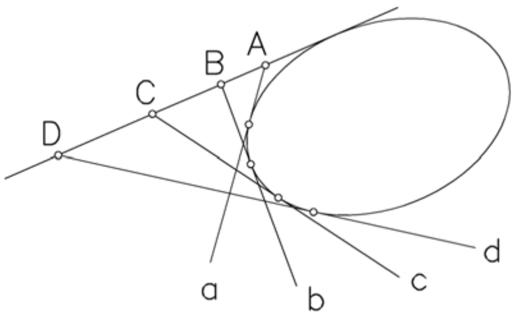
Ezen az ábrán hasonló pontsorok által definiált parabola látható.

Nem igazoljuk, csak megemlítjük a következő állításokat:

Egy másodrendű görbe két rögzített érintőjét a görbe mentén mozgó érintő két projektív pontsorban metszi.

Egy parabola két rögzített érintőjét a parabola mentén mozgó érintő két hasonló pontsorban metszi.

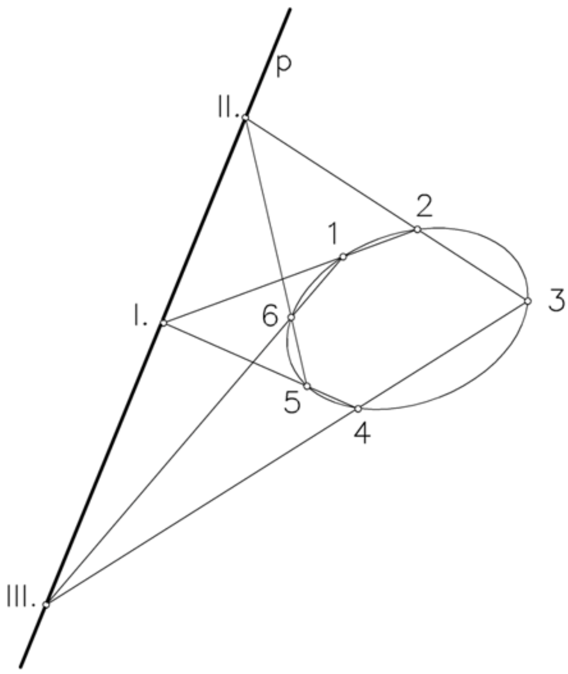
Egy másodrendű görbe bármely négy érintőjét egy ötödik görbeérintővel metszve, a kapott négy pont kettősviszonya állandó, azaz nem függ az ötödik érintő helyzetétől.



Pascal és Brianchon tételei

Pascal-tétel

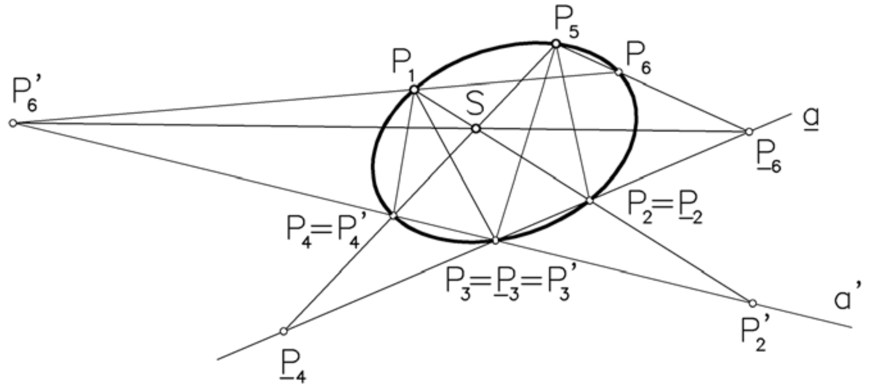
Egy nemelfajuló másodrendű görbébe írt hatszög általunk szemköztesnek nevezett oldal-párjainak metszéspontjai egy egyenesre illeszkednek. Az egyenest Pascal-egyenesnek nevezzük.



Bizonyítás

Adott a nemelfajuló másodrendű görbe a P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 általános helyzetű pontokkal. Legyenek a P_1és P_5 pontok a projektív sugársorokkal való előállításban a sorozópontok. Megfelelő sugarak a következők:

$P_1P_2 \leftrightarrow P_5P_2$
$P_1P_3 \leftrightarrow P_5P_3$
$P_1P_4 \leftrightarrow P_5P_4$



Metsszük el a P_5-re illeszkedő sugársort az $\underline{a}=P_2P_3$ egyenessel, ekkor a megfelelő sugarakon a $P_2=\underline{P}_2$, $P_3=\underline{P}_3$ és $\underline{P}_4$ pontokat kapjuk. Metsszük el a P_1-re illeszkedő sugársort az $a'=P_3P_4$ egyenessel, ekkor a megfelelő sugarakon a P_2', $P_3=P_3'$ és $P_4=P_4'$

pontokat kapjuk. Mivel a sugársorok projektív kapcsolatban vannak, ezért a belőlük egy-egy metszéssel keletkező $\underline{a}$ és a’ pontsorok is egymással projektívek. A megfeleltetés:

$$\underline{P}_2 \leftrightarrow P_2'$$
$$\underline{P}_3 \leftrightarrow P_3'$$
$$\underline{P}_4 \leftrightarrow P_4'$$

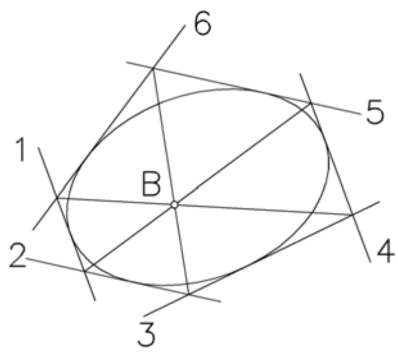
Az $\underline{a}$ és a’ pontsorok ezen kívül perspektívek is egymáshoz, mivel a két egyenes metszéspontja önmagához van rendelve: $P_3=\underline{P}_3=P_3'$ Jelölje S a perspektivitási középpontot!

Most tekintsünk a P_1 és P_5 sorozópontú sugársorokban egy újabb egymásnak megfelelő sugárpárt, $P_1P_6 \leftrightarrow P_5P_6$. A P_5P_6 sugarat az $\underline{a}$ egyenes a $\underline{P}_6$-ban, a P_1P_6 sugarat az a’ egyenes a P_6’-ban metszi. Az $\underline{a}$ és a’ pontsorok közötti perspektivitás miatt a $\underline{P}_6$, P_6’ és S pontok egy egyenesre illeszkednek.

Tekintsük a görbébe írt hatszög szemköztes oldalait, melyek: P_1P_2 és P_4P_5, P_2P_3 és P_5P_6, valamint P_3P_4 és P_6P_1. Ezen párok rendre vett metszéspontjai: S, $\underline{P}_6$ és P_6’, melyek az előbb mondottak alapján egy egyenesre illeszkednek.

Brianchon-tétel

Egy másodosztályú görbe hat egyenese által meghatározott hatszög általunk szemköztesnek nevezett csúcsait összekötő egyenesek egy ponton haladnak át. Ezt a pontot Brinchon-pontnak nevezzük.



A tétel másként is megfogalmazható:

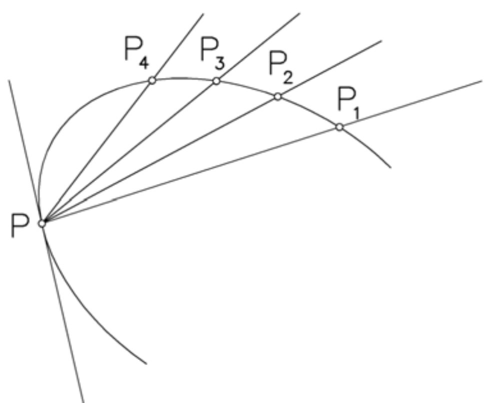
Egy nemelfajuló másodrendű görbe köré írt érintő hatszög szemköztes csúcsait összekötő egyenes egy ponton haladnak át.

A Pascal- és a Brianchon-tételek egymás síkbeli duálisai, ezért ha a Pascal-tételt már igazoltuk, akkor a Brianchon-tétel a dualitás miatt szintén igazolt.

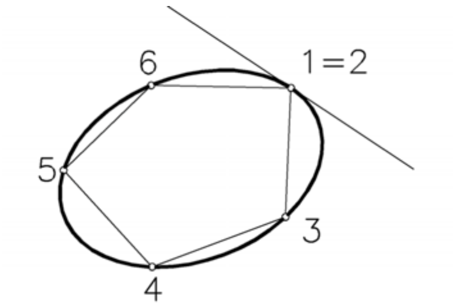
Megjegyzés

A Pascal és Brinchon tétel tisztán vonalzós szerkesztést ad, ezért velük csak olyan feladatok oldhatók meg, amelyek eredménye az alapadatokból legfeljebb elsőfokú tört kifejezéssel származtatható, amely azt jelenti, hogy a feladatnak csak egy megoldása lehet. Például: Ha egy egyenes áthalad a görbe egy ismert pontján, akkor a másik metszéspont megszerkeszthető. De ha egy adott ponton sem halad át, akkor két megoldás lenne és az már nem szerkeszthető.

Speciális esetek:

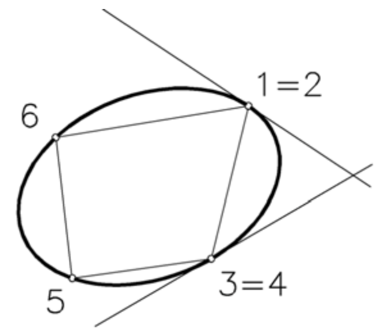


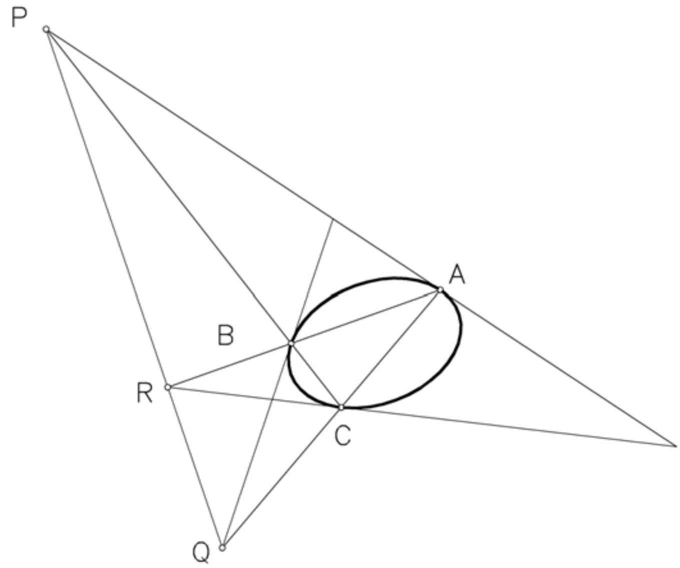
Ha két egybeeső görbepontot összekötő egyenesen az ebben a pontban vett érintőt értjük, akkor Pascal tétele abban az esetben is érvényes, ha a hat pont nem mind különböző. Ez a meggondolás a görbeelméletben használatos érintő fogalmán alapul. Ugyanis egy görbe P pontbeli érintőjén a PP_n szelőegyenesek határhelyzetét értjük, ha a P_n görbepontok minden határon túl közelítik a P pontot.



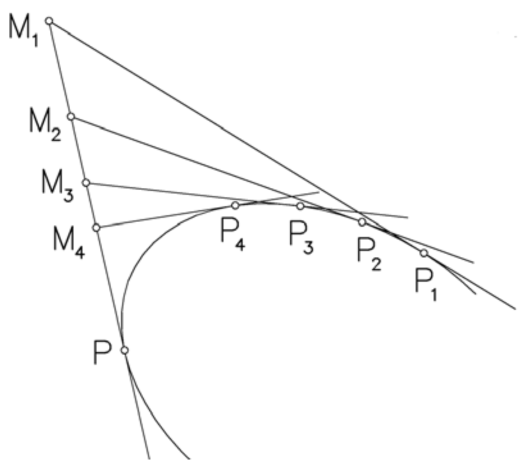
Ha a másodrendű görbébe írt 1, 2, 3, 4, 5, 6 pontokból álló hatszögnek az 1 és 2 csúcsok egybeesők, akkor a hatszög ötszöggé fajul, és a „hatszög" 12 oldala a görbe érintője az 1=2 pontban.

Ha még ezen kívül az is teljesül, hogy a 3 és 4 csúcs is egybeesik, a „hatszög" négyszöggé fajul, és a 34 oldal a görbe 3=4 pontban vett érintője.



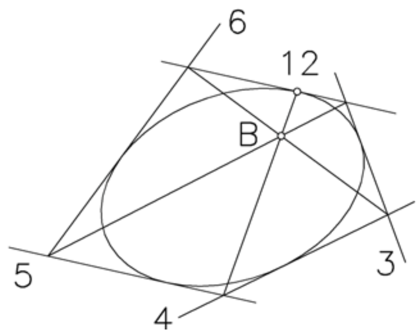


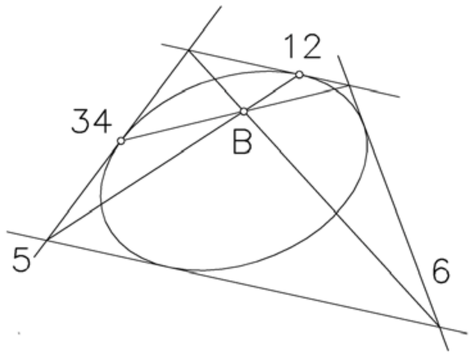
A kúpszeletbe írt háromszög oldalai és e háromszög csúcsaiban vett görbeérintők szintén a kúpszeletbe írt elfajult hatszög oldalai lesznek.
Az ábra jelöléseit figyelve a háromszög A, B, C csúcsaiban vett görbeérintők a háromszög szemköztes oldalait az P, Q, R pontokban metszik.



Megállapodhatunk abban is, hogy egy kúpszelet érintőjének önmagával való metszéspontján az érintési pontját értjük. Ekkor Brianchon tétele helyes marad akkor is, ha a hat érintő nem mind különböző. Ez a meggondolás a görbeelméletben használatos érintési pont fogalmán alapul. Ugyanis egy görbe P pontbeli érintőjének és a P_n pontbeli érintőjének a metszéspontját M_n-nel jelölve, a P érintési pont nem más, mint az M_n pontok határhelyzete, ha a P_n görbepontok minden határon túl közelítik a P pontot.

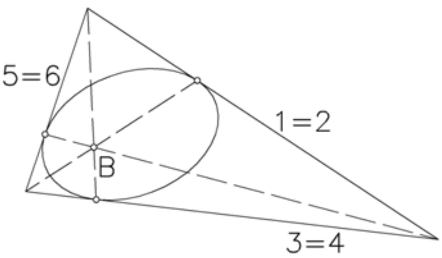
Ha a másodrendű görbe köré írt 1, 2, 3, 4, 5, 6 érintőkből képezett hatszög oldalai közül az 1 és 2 oldal egybeesik, a hatszög ötszöggé fajul, és az 1 és 2 oldalak metszéspontja 1=2 érintéspontja lesz.





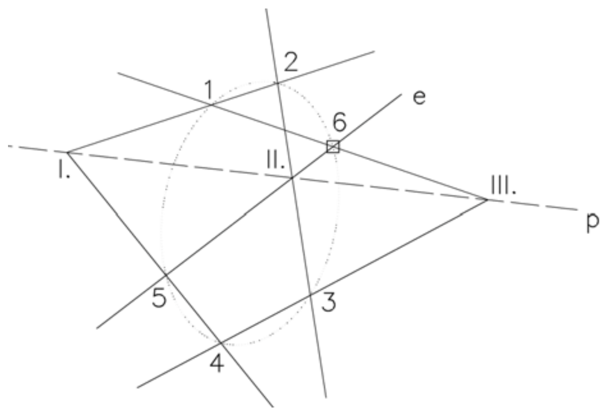
Ha még ezen kívül az is teljesül, hogy a 3 és 4 oldal is egybeesik, a hatszög négyszöggé fajul, és a 3 és 4 oldalak metszéspontja a 3=4 érintési pontja lesz.

Ha végül a hatszög oldalai közül az utolsó, az 5 és 6 oldal is egybeesik, akkor a hatszög háromszöggé fajul. Az így elfajult hatszög csúcsai az 1=2, 3=4 és 5=6 oldalak páronként vett metszéspontjai és ezen oldalak érintési pontjai. Ekkor az érintési pontok egy beírt háromszöget határoznak meg, melynek a csúcsait az érintő háromszög szemköztes csúcsaival kell összekötnünk. Ez a három egyenes megy át egy ponton. (Az előbb a Pascal-tétel miatt a beírt háromszög oldalai és a szemköztes pontban vett görbeérintők egy egyenesen metszették egymást. A két háromszög oldalaira nézve perspektív voltából a Desargues-tétel miatt a csúcsokra nézve perspektív helyzet is következik.)



Sok feladat megoldható Pascal- és Brianchon-tétel alapján. Lássunk néhány példát!

1. Adott egy kúpszelet öt pontja, 1, 2, 3, 4, 5 és az 5 ponton át egy e egyenes. Határozzuk meg az e egyenes másik metszéspontját a kúpszelelttel!



Az adott öt pontot és a keresett 6 pontot 1, 2, 3, 4, 5, 6 sorrendben egy a kúpszeletbe írt hatszög hat csúcsának tekintjük. A szemben fekvő oldalak metszéspontjai legyenek l, II, III a következő táblázat szerint:

12	23	34
45	56=e	61
I	II	III

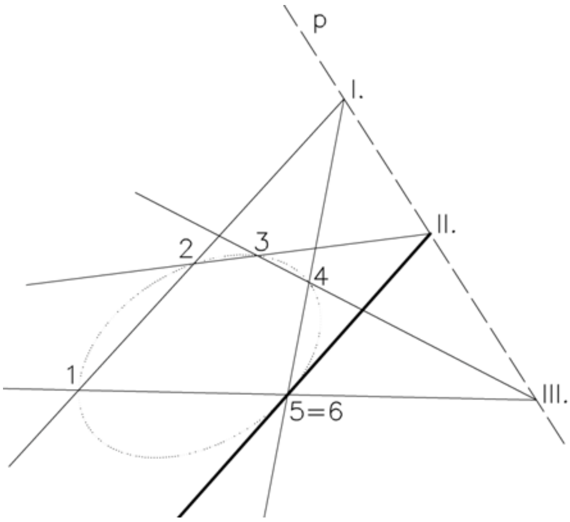
Az 12 és 45 I metszéspontja, valamint a 23 és e II metszéspontja közvetlenül szerkeszthető. A 6 ismeretlen, de I és II összekötő egyenese a Pascal-féle p egyenes. Pascal-tétele szerint 34 a p egyenest III-ban metszi. Végül 1 és III összekötő egyenese metszi ki e-ből a keresett 6 pontot.

2. Adott egy kúpszelet öt pontja. Szerkesztendő az egyik pontban az érintő.

Ekkor 5-öt kétszer számítva 5=6, egyúttal a Pascal-féle hatszög hatodik csúcsának is tekintjük.
Az 56 oldal a keresett érintő, mely a

12	23	34
45	56	61
I	II	III

táblázat alapján így szerkeszthető meg: 12 és 45 I metszéspontja, valamint 34 és 61 III metszéspontja meghatározzák a p egyenest. Ezt 23 a II pontban metszi és 5 II összekötő egyenese a keresett érintő.

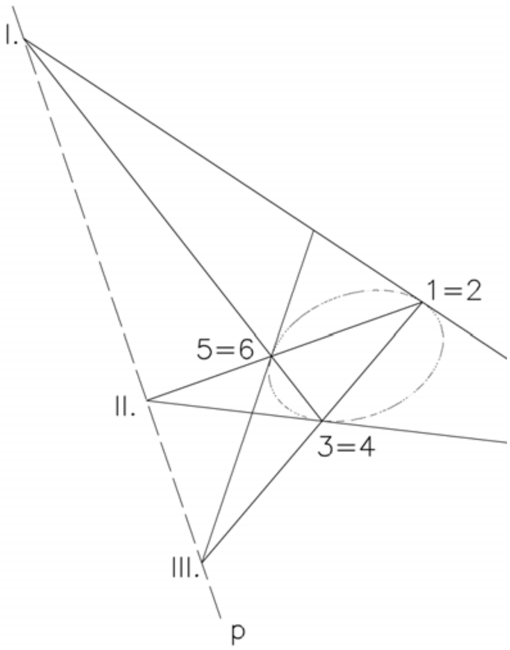


3. Adott egy kúpszelet három pontja, továbbá kettőben az érintő. Szerkesszük meg a harmadik pontban az érintőt!

Ha az adatok közt szerepel egy pont, melyben az érintő is adott, akkor Pascal-tételének alkalmazásánál e pont két adott pontnak tekintendő. Most tehát 1=2, 3=4 és 5 adott csúcsok, és az 5=6 pontban keressük az érintőt.

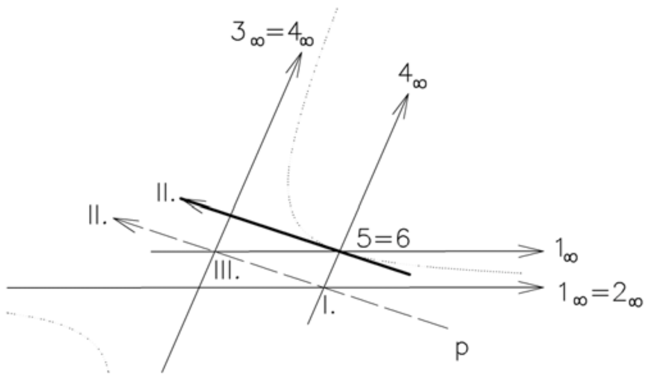
12	23	34
45	56	61
I	II	III

I és III közvetlenül megszerkeszthető, tehát a Pascal-féle egyenes is; ennek 23-mal való II metszéspontját 5-tel összekötve, nyerjük a keresett 56 érintőt.



4. Adott egy hiperbola két aszimptotája és egy pontja. Szerkesztendő ebben az érintő.

Figyelembe véve, hogy az aszimptoták irányával a hiperbola két végtelenben fekvő pontját lehet megadni, és e pontokban maguk az aszimptoták az érintők, a hiperbola két végtelenben fekvő pontját és az adott pontot „hatszög” $1_\infty=2_\infty$, $3_\infty=4_\infty$, 5=6 csúcspontjául választjuk. Most $1_\infty 2_\infty$ és $3_\infty 4_\infty$ a két adott aszimptota, 56 a keresett érintő, $2_\infty 3_\infty$ a végtelenben fekvő egyenes, $4_\infty 5$ és 61_∞ pedig a két aszimptotával 5-ön át rajzolt párhuzamos.

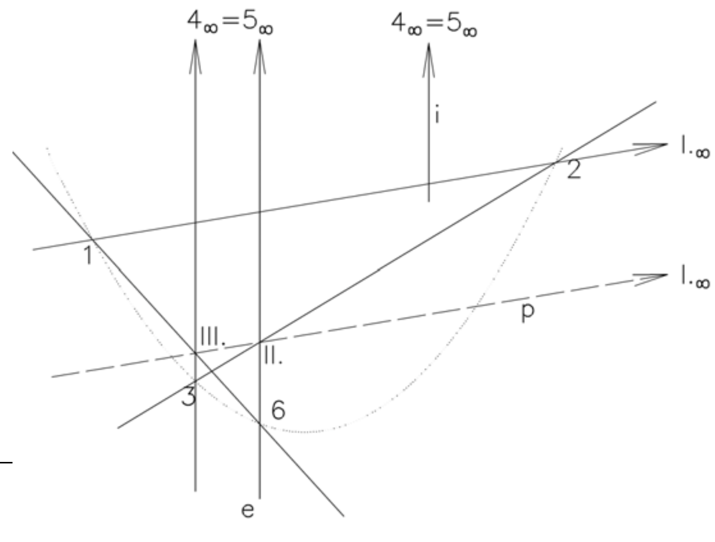


$1_\infty 2_\infty$ $4_\infty 5$	$2_\infty 3_\infty$ 56	$3_\infty 4_\infty$ 61
I	II_∞	III

Ezek megadják I-et és III-at, tehát a Pascal-féle egyenest, melynek a végtelen távoli pontja II_∞. Pascal tétele szerint tehát az 5-ön át 1 III-mal rajzolt párhuzamos a keresett érintő.

5. Adott egy parabola három pontja: 1, 2, 3 és tengelyének i iránya. Szerkesztendő a tengely irányával párhuzamos valamely e egyenes metszéspontja a parabolával.

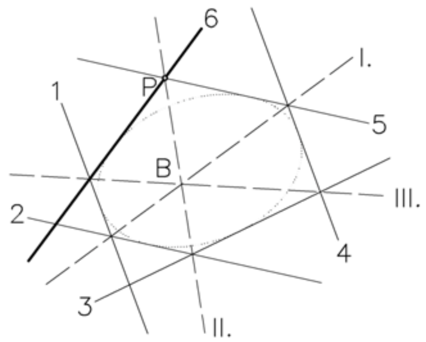
Annak kijelentése, hogy a kúpszelet parabola, egyértékű egy érintő megadásával; ugyanis a végtelenben fekvő egyenes érinti a görbét. Ha még a parabola tengelyének irányát is megadjuk, akkor a végtelenben fekvő egyenes érintési pontját is kijelöltük. Az adatok két pont megadásával egyértékűek.



12 $4_\infty 5_\infty$	23 $5_\infty 6$=e	34_∞ 61
I_∞	II	III

Ha a parabola megadott végtelen távol fekvő pontja $4_\infty=5_\infty$ és a keresett pont 6, akkor $4_\infty 5_\infty$ a végtelen távol fekvő egyenes, $5_\infty 6$ pedig az adott e egyenes; a végtelenben fekvő I_∞ és a II megadja a Pascal-féle p egyenest. Ezt 34_∞ metszi III-ban, és végül III 1 kimetszi e-n a keresett pontot.

6. Adott egy kúpszelet öt érintője, 1, 2, 3, 4, 5. Határozzuk meg az 5 érntő valamely P pontjából húzható másik érintőt!

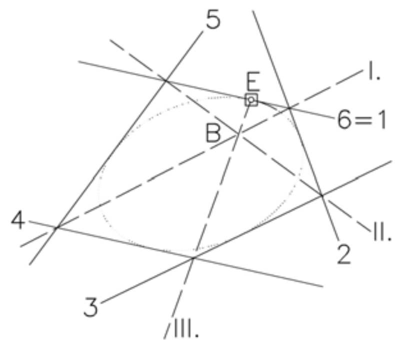


Az adott öt érintőt és a keresett 6 érintőt 1, 2, 3, 4, 5, 6 sorrendben egy a kúpszelet köré írt hatszög oldalaiul választjuk.

12	23	34
45	56	61
I	II	III

Itt az egymás mellé írt arab számok a két egyenes metszéspontját, az I, II, III a három szemben fekvő csúcspontpárt összekötő három egyenest jelenti, melyek a Brianchon-féle B pontban találkoznak. Az I és II azonnal megrajzolható (ti. 56 az adott P pont). Metszéspontjuk adja B-t, melyet 34-gyel összekötve kapjuk III-t. A III az 1-et Brianchon tétele szerint 61-ben metszi. Ezt P-vel összekötve, a keresett 6 érintőt nyerjük.

7. Adott egy kúpszelet öt érintője, 1, 2, 3, 4, 5. Szerkesztendő az 1 érintő érintési pontja.

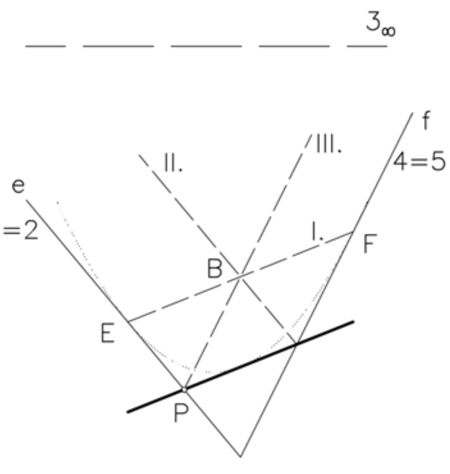


Az 1-et kétszer számítva (1=6) a Brianchon-féle hatszög hatodik oldalául választjuk. A 61 csúcspont a keresett érintési pont.

12	23	34
45	56	61
I	II	III

Az I és II közvetlenül megrajzolható, ezek metszéspontja B, ezt 34-gyel összekötve, adódik III. A III 1-en kimetszi a keresett 16 pontot.

8. Adott egy parabola két érintője és ezek érintési pontja. Szerkesztendő az egyik érintő valamely P pontján áthaladó másik érintő.



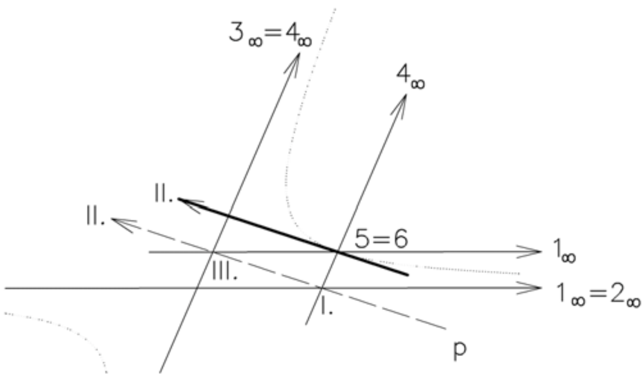
Ha egy adott érintő érintési pontja is adott, akkor ilyen szerkesztési feladatnál az érintő két adott érintőnek számít. Most tehát a két adott érintőt a Brianchon-féle hatszög 1=2 és 4=5 oldalainak, a sík végtelen távoli egyenesét és a keresett érintőt pedig a 3_∞ és 6 oldalának tekintjük.

12	23_∞	$3_\infty 4$
45	56	61=P
I	II	III

Az I és III azonnal megrajzolható. Ezek metszéspontja B, II a B-n át 1-gyel húzott párhuzamos; II-nek 5-tel való metszéspontját P-vel összekötve nyerjük a keresett 6 érintőt.

9. Adott egy hiperbola két aszimptotája és még egy érintője. Szerkesztendő ezen érintő érintési pontja.

Hiperbolánál egy aszimptota megadása két adott érintőnek számít, mert tudjuk, hogy az érintési pont az aszimptota végtelenben fekvő pontja. A hiperbola két aszimptotája és az adott érintő legyenek a Brianchon-féle hatszög 1=2, 3=4, 5=6 oldalai; 12 és 34 metszéspontjai az adott aszimptoták végtelenben fekvő pontjai, 56 a keresett érintési pont.



12	23	34
45	56	61
I	II	III

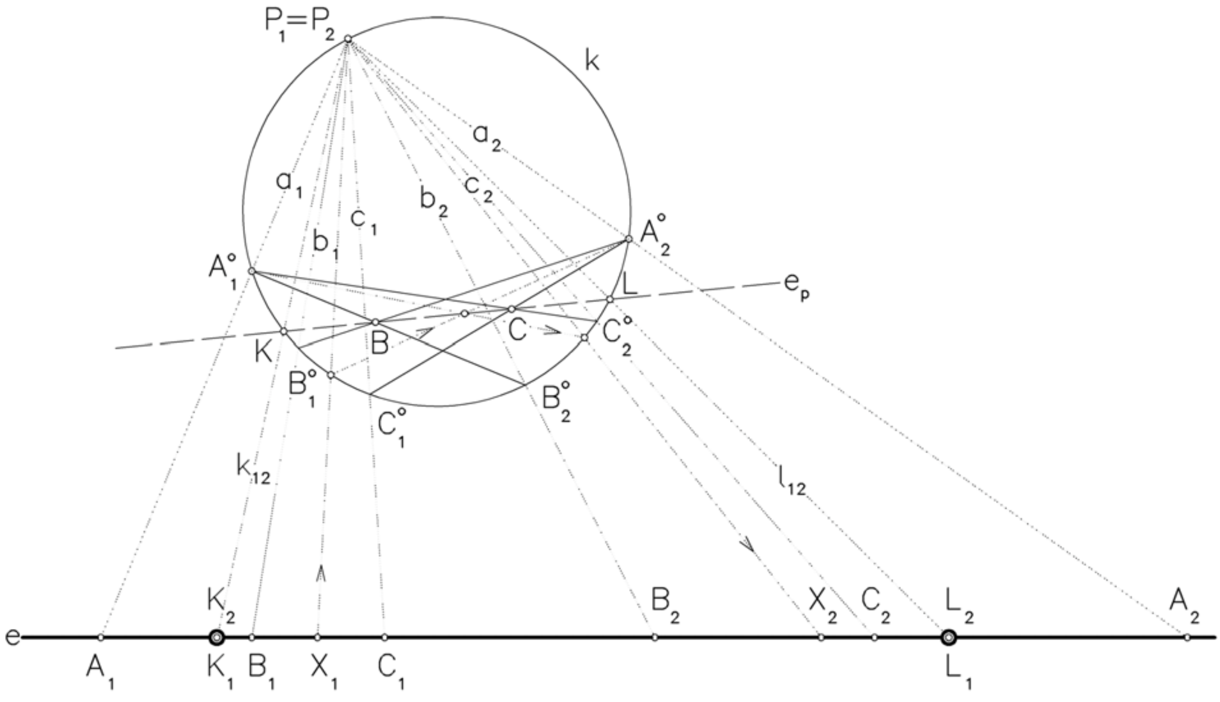
Az I a 45-ön át 1-gyel, III pedig a 61-en át 3-mal húzott párhuzamos. Ezek metszéspontja adja a Brianchon-féle B pontot. B-t 23-mal összekötve kapjuk II-t. A II 5-ön kimetszi a keresett 56 pontot.

Steiner-féle szerkesztés

A projektív sík azon modelljét használjuk, amely az euklideszi sík kibővítéseként jött létre.

> Adott két, közös tartójú projektív pontsor, három-három megfelelő pontjával. Szerkesztendők a kettőspontok, azaz azok, melyek a megfelelőjükkel egybeesnek.

Világos, hogy az ilyen tulajdonságú pontok száma legfeljebb kettő lehet. Ha ugyanis három ilyen pont volna, pl. $A_1 \equiv A_2$, $B_1 \equiv B_2$ és $C_1 \equiv C_2$, akkor a két pontsor között az identikus leképezést adtuk volna meg.
A keresett pontokat *kettős pontoknak* vagy *dupla pontoknak* fogjuk nevezni.
A kettőspontok szerkesztéséhez, melynek a következőekben leírt módja a *Steiner-szerkesztés*.



Egy tetszőleges *k* kör tetszőleges $P_1=P_2$ pontjából vetítsük az *e* egyenesen levő két projektív pontsort. Ezzel nyerjük az a_1, b_1, c_1… és a_2, b_2, c_2… sugársorokat. Jelölje e sugaraknak a körrel való metszéspontjait rendre A_1° , B_1°, C_1° és A_2°, B_2°, C_2°. Végül vetítsük az A_2° pontból a körön levő A_1°, B_1°, C_1° pontokat és az A_1° pontból az A_2°, B_2°, C_2° pontokat. Így újabb két sugársort kaptunk. Ekkor az $A_1^\circ A_2^\circ$, $A_1^\circ B_2^\circ$, $A_1^\circ C_2^\circ$… sugársor projektív az a_2, b_2, c_2… sugársorhoz, amely perspektív az A_2, B_2, C_2… pontsorhoz. Az $A_2^\circ A_1^\circ$, $A_2^\circ B_1^\circ$, $A_2^\circ C_1^\circ$… sugársor projektív az a_1, b_1, c_1… sugársorhoz, amely perspektív az A_1, B_1, C_1… pontsorhoz. Mivel a két pontsor projektív kapcsolatban van, ezért az $A_1^\circ A_2^\circ$, $A_1^\circ B_2^\circ$, $A_1^\circ C_2^\circ$… és az $A_2^\circ A_1^\circ$, $A_2^\circ B_1^\circ$, $A_2^\circ C_1^\circ$… sugársorok is projektívek. Ennél többet is tudunk erről a kapcsolatról: az $A_1^\circ A_2^\circ$ és $A_2^\circ A_1^\circ$ egyenesek (vagyis a sorozópontokat összekötő egyenes) egymás megfelelői, ezért a sugársorok perspektív helyzetűek. Az egymásnak megfeleltetett

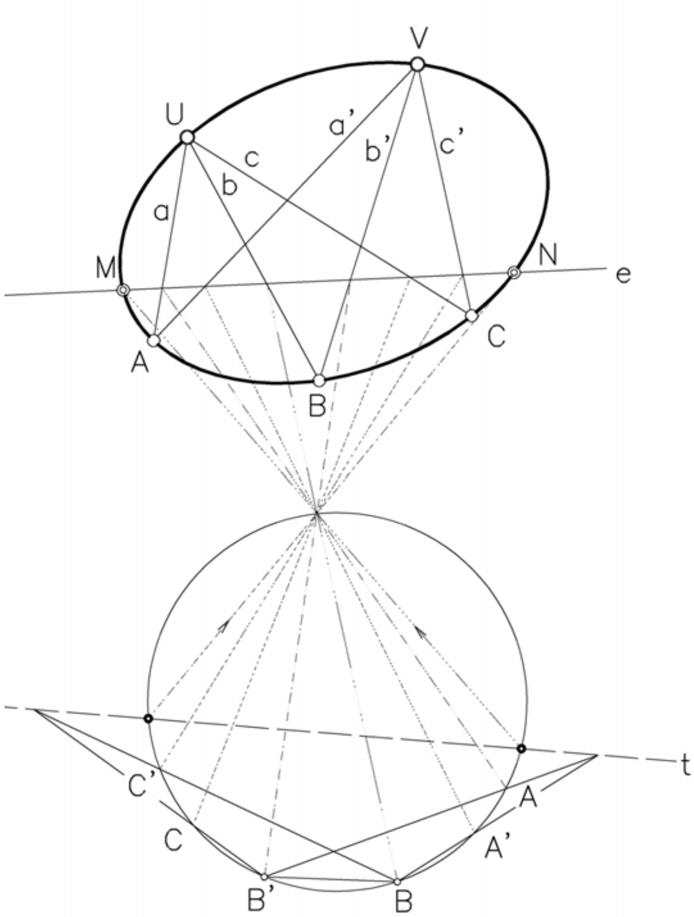
egyenesek metszéspontjait jelölje B és C, akkor ezek összekötő egyenese lesz a perspektivitás e_p tengelye.
Határozzuk meg egy X_1 pont projektív megfelelőjét!
Ekkor X_1-et a $P_1=P_2$ pontból vetítjük a körre, majd a kapott pontot A_2°-ból az e_p tengelyre, onnan az A_1°-ból vissza a körre, majd a $P_1=P_2$ pontból az e egyenesre. A kapott pont X_2 az X_1 projektív képe.
Az e_p -nek a körrel való K és L metszéspontjait $P_1=P_2$ pontból az e egyenesre vetítve olyan pontokat nyerünk, melyekre az előbbi vetítéssorozatot végrehajtva önmagukat kapjuk. Ezzel előállítottuk a kettős pontokat: $K_1=K_2$, $L_1=L_2$.
Mivel az e_p egyenes a kört nem feltétlenül metszi, ezért a közös tartójú projektív pontsoroknak nincs mindig két kettős pontjuk, hanem lehetséges, hogy csak egy kettős pont van vagy egy sincs.
E három lehetőség szerint a projektivitás lehet:

hiperbolikus	- két kettős ponttal,
parabolikus	- egyetlen kettős ponttal.
elliptikus	- kettős pontok nélkül.

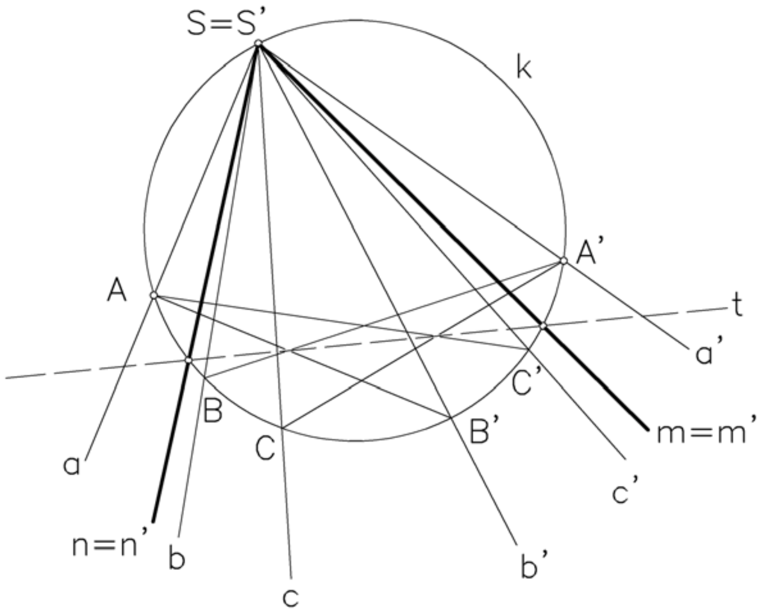
Megjegyzés

A Steiner-szerkesztés adja meg a lehetőséget másodfokú szerkesztési feladatok megoldásához. Segítségével megszerkeszthető például öt pontjával adott másodrendű görbe és tetszőleges egyenes metszéspontjai.

Adott a másodrendű görbe az A, B, C, U, V pontokkal és egy e egyenes. Válasszuk ki az U és V pontokat, melyekből az A, B, C pontokat projiciálva projektív sugársorokat kapunk. Ezeket a sugarakat az e egyenes projektív pontsorokban metszi, ennek a projektív kapcsolatnak a kettőspontjai éppen az egyenes és görbe közös pontjai lesznek.



A Steiner-szerkesztés alkalmas arra is, hogy közös tartóval bíró két projektív *a*, *b*, *c*… és *a*’, *b*’, *c*’… sugársor esetén megszerkesszük a kettős sugarakat. A Steiner-féle kört a sugársorok közös tartópontján vezetjük át. A sugarakból a kör az A, B, C és A’, B’, C’ pontokat metszi ki. Ezek a pontok két perspektív helyzetű sugársort határoznak meg, a perspektivitás tengelye metszi ki a kör azon pontjait, melyeken asz eredeti sugársorok kettőssugarai áthaladnak.



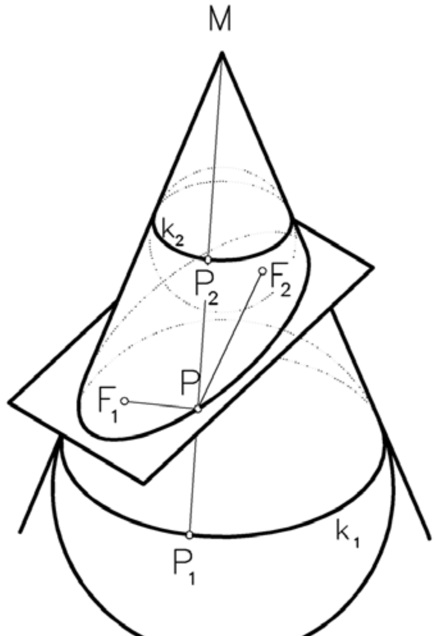
Valós, nemelfajuló másodrendű görbék projektív ekvivalenciája
(Dandelin-tétel)

Az ellipszis, hiperbola és parabola, mint kúp- és hengerfelület valós metszetei (kúpszeletek)

A kör, ellipszis, hiperbola és parabola a forgáskúpnak valamely síkkal való metszéséből származnak, azért ezeket a görbéket kúpszeletnek nevezzük.

A kúpot úgy is lehet egy síkkal metszeni, hogy a metszet két egyenes, egy egyenes, illetve egy pont (képzetes egyenespár). Ezért ezeket az alakzatokat is - tágabb értelemben - a kúpszeletek közé soroljuk.

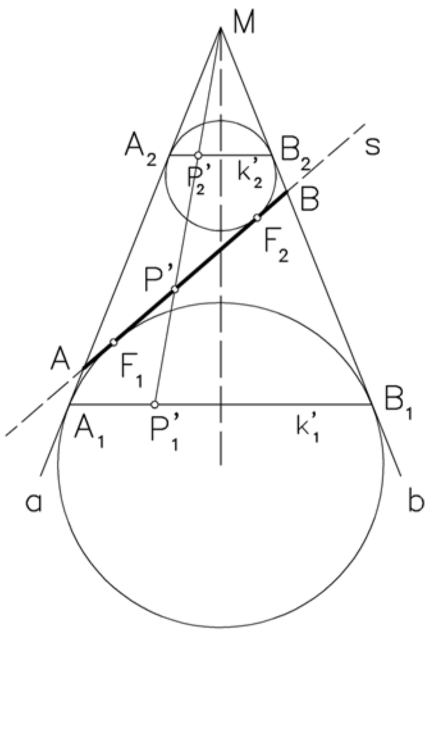
Az egyenes körkúp síkmetszete



Ha a sík a kúp csúcsán halad át, akkor, mint tudjuk, ez a sík a kúpot vagy csak egyetlen pontban, a csúcspontban metszi, vagy két alkotóban metszi, vagy egy alkotó mentén érinti. Minden más esetben a sík a kúp minden alkotóját metszi, a kúp két alkotójával párhuzamos, vagy egy alkotójával párhuzamos aszerint, hogy a kúp csúcsán át vele párhuzamosan fektetett síkon csak a kúp csúcsa, két alkotója vagy csak egy alkotója van. A kúp tengelyére merőleges sík a kúpfelületet körben metszi.

Legyen a rajz síkja a kúp tengelyén áthaladó és a metszősíkra merőleges sík, akkor a kúp M csúcsa és két alkotója, *a* és *b* a rajz síkjában fekszik. A metszősík a rajz síkját egy *s* egyenesben metszi, ez a metszősíknak a rajz síkján való merőleges vetülete.

Ha a metsző sík a kúp minden alkotóját metszi, akkor az s egyenes az *a* és *b* alkotókat ugyanazon kúppaláston fekvő A és B pontokban metszi, és a metszet vetülete az AB szakasz.



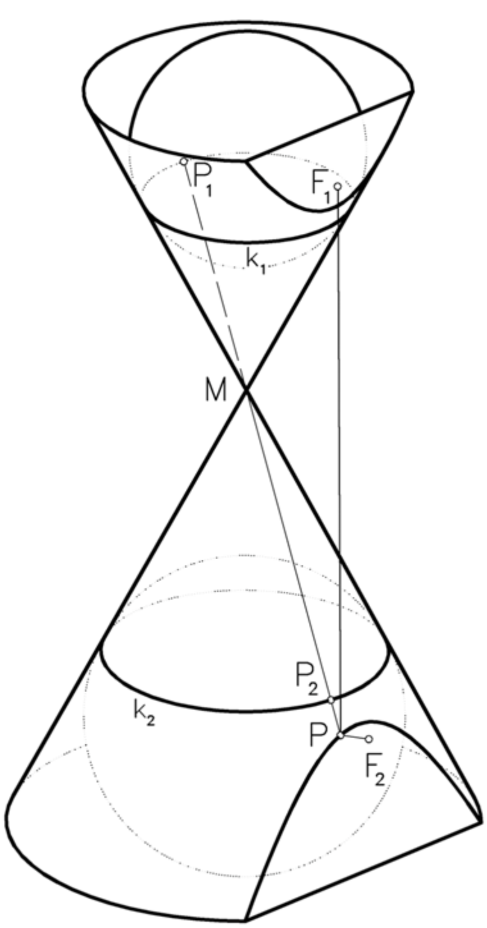
Meghatározzuk azt a két gömböt, melyek a kúpot is és a metszősíkot is érintik. A gömbök a kúpot a k_1 és k_2 körökben, a metszősíkot pedig az F_1 és F_2 pontokban érintik. Ha a síkmetszet tetszés szerinti pontján áthaladó alkotó a k_1 és k_2 köröket P_1 és P_2 pontokban metszi, akkor a P pont P_1 és P_2 között van, mert a P_1 és P_2 a metsző sík különböző oldalán van. A PM kúpalkotó a gömböket P_1 és P_2 pontokban érinti. Egy külső pontból egy gömbhöz húzott érintők egymással egyenlők, azért $PF_1=PP_1$ és $PF_2=PP_2$, melyből $PF_1+PF_2=PP_1+PP_2=P_1P_2$.

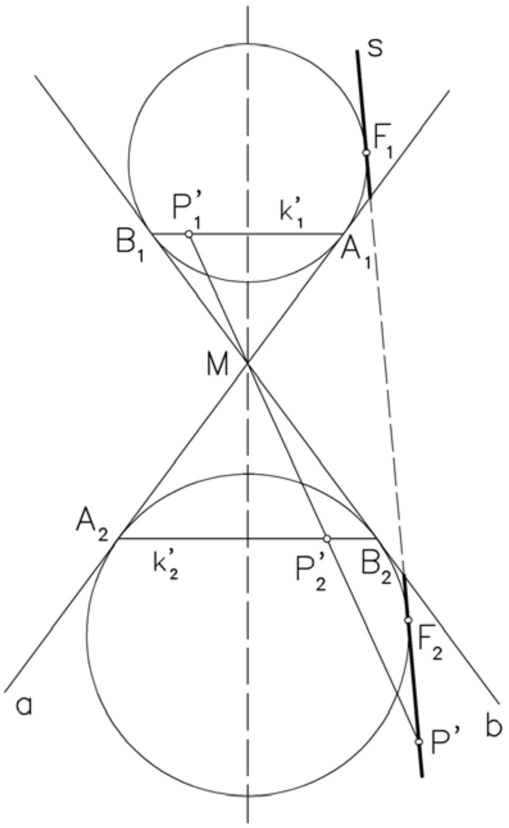
A P_1P_2 távolság nem függ a P pont megválasztásától, mert a kúp bármely két alkotójának, tengelyre merőleges két sík közé eső szakaszai egyenlő hosszúságúak.

Ezzel beláttuk, hogy a metszet minden pontja olyan ellipszisen fekszik, melynek F_1 és F_2 a fókuszai és AB nagytengelye.

Ha a metsző sík a kúp két alkotójával párhuzamos, akkor az *s* egyenes az *a* és *b* alkotókat különböző kúppaláston fekvő A és B pontokban metszi, és a metszet vetülete ezen egyenesnek az A és B kezdőpontú két félegyeneséből áll.

Írjunk mindkét kúppalástba egy-egy gömböt, melyek a kúpot a k_1 és k_2 körökben és a metszősíkot az F_1 és F_2 pontokban érintik. Ha a síkmetszet tetszés szerinti P pontján áthaladó alkotó a k_1 és k_2 köröket a P_1 és P_2 pontokban metszi, akkor a P pont a P_1P_2 szakasz meghosszabbításán van, mert a két gömb, s így ezek P_1 és P_2 pontjai is a metszősíknak ugyanazon oldalára esnek.

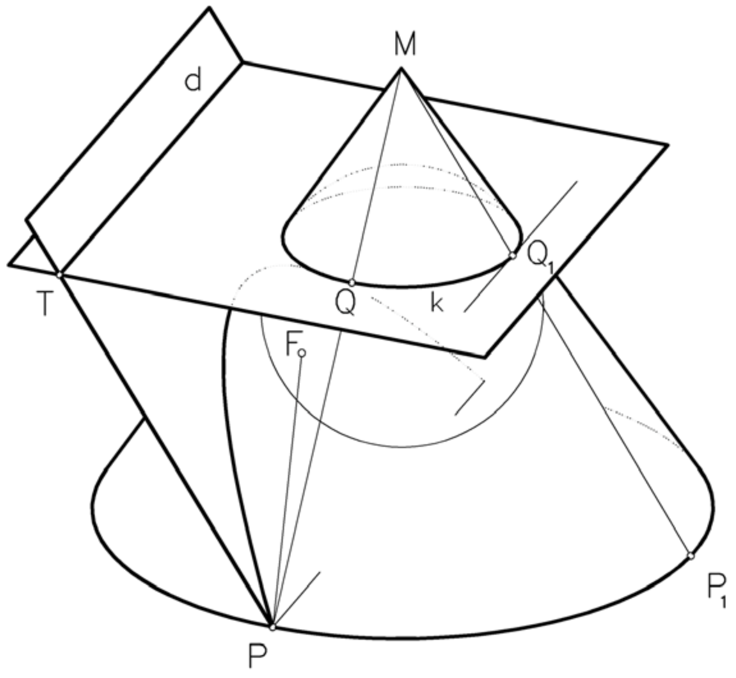




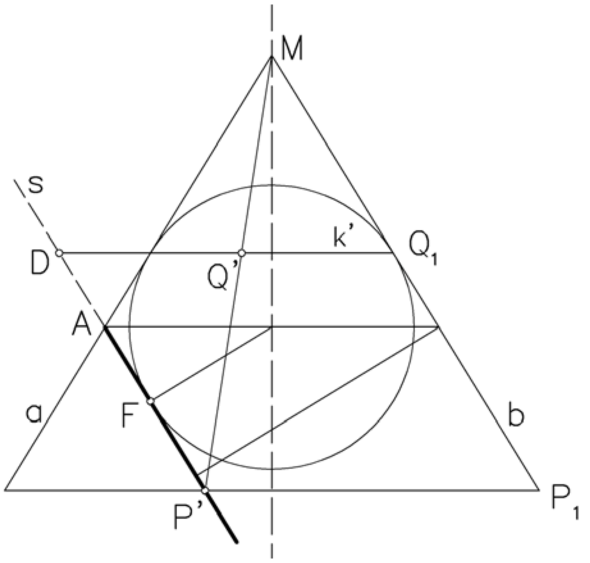
Egy külső pontból egy gömbhöz húzott érintők egymással egyenlők, azért $PF_1=PP_1$ és $PF_2=PP_2$, melyből $PF_2-PF_1=PP_2-PP_1=P_1P_2$ vagy $PF_1-PF_2=PP_1-PP_2=P_1P_2$ aszerint, hogy a P pont a P_1 vagy P_2 ponttal fekszik egy paláston. A P_1P_2 távolság nem függ a P pont megválasztásától, mert a kúp bármely két alkotójának, tengelyre merőleges két sík közé eső szakaszai egyenlő hosszúságúak.

Ezzel beláttuk, hogy a metszet minden pontja olyan hiperbolán fekszik, melynek F_1 és F_2 a fókuszai és AB a valós tengelye.

Ha a metszősík a kúp egyik érintősíkjával párhuzamos, akkor a sík a kúpnak csak egyik palástját metszi, és a metszet vetülete az *s* egyenesnek az *a* és *b* alkotók ezen palásthoz tartozó részei közé eső félegyenes, mely párhuzamos az egyik szélső alkotóval, pl. *b*-vel.



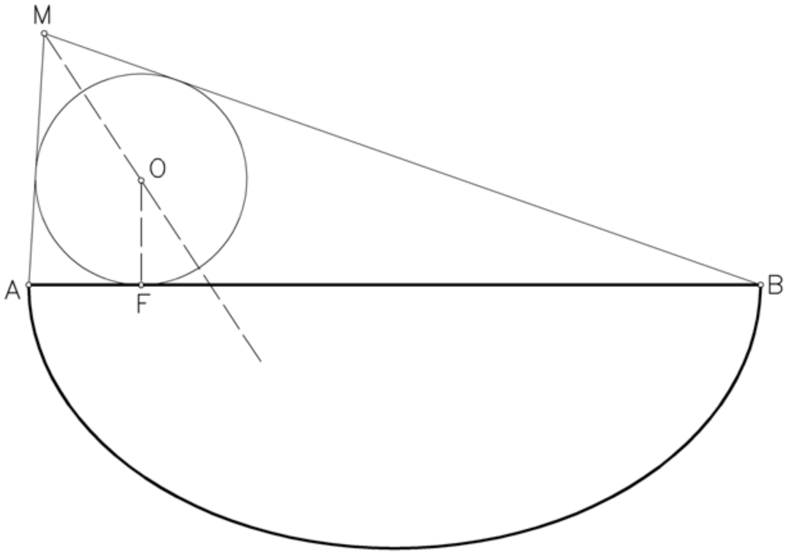
Most csak egy olyan gömb van, mely a kúpot egy k kör mentén és a metszősíkot egy F pontban érinti. Legyen a kör síkjának és a metszősíknak a metszésvonala *d*, ennek a rajz síkjával való metszéspontja D. Ha a síkmetszet tetszés szerinti P pontján áthaladó alkotó a Q pontban metszi a k kört, akkor PQ=PF. A *b* alkotó Q_1 pontban metszi a kört, és a P_1 pontban metszi a kúpnak a P pontra illeszkedő körmetszetét, ekkor P_1Q_1=PQ. Ha a P pont merőleges vetülete a rajz síkján P', akkor P'D a P pontnak a *d* egyenestől való PT távolságával egyenlő.



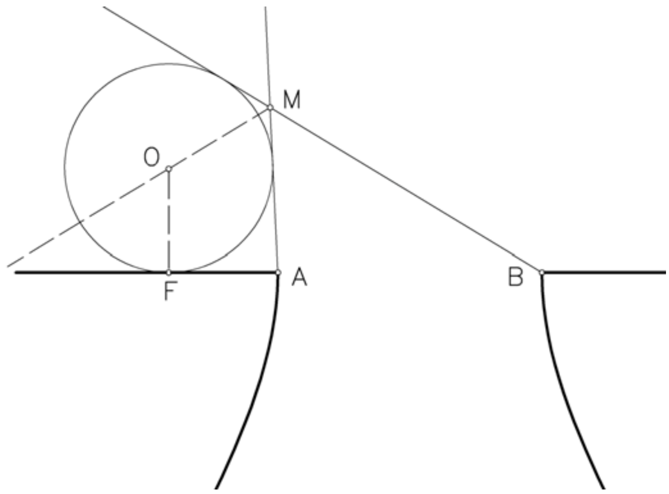
Ebből következik, hogy PF=PT, vagyis a metszet bármely P pontjának az F ponttól és a *d* egyenestől való távolságai egymással egyenlők; azaz a metszet minden pontja egy olyan parabolának pontja, melynek a fókusza F és vezéregyenese *d*.

Adott kúpszeleten áthaladó forgáskúpok

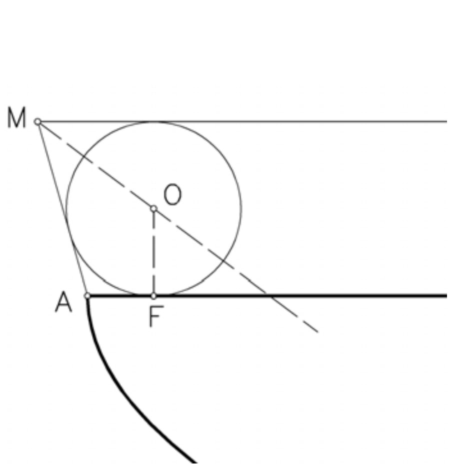
Lehet-e minden esetben egy ellipszisen, hiperbolán vagy parabolán keresztül egyenes körkúpot fektetni, és ha lehet, hol van e kúp csúcsa?



Legyen a rajz síkja az adott kúpszelet síkjára merőleges, és tegyük fel, hogy a kúpszeletnek a fókuszokra illeszkedő tengelye a rajz síkjában van. Az F fókuszban a kúpszelet síkjára merőleges tetszés szerinti O pontjából, mint középpontból az F ponton keresztül kört húzunk. Ehhez a körhöz ellipszisnél és hiperbolánál az A és B csúcsból, parabolánál pedig az A csúcsból az AF tengellyel párhuzamosan érintőket húzunk. Ezek egy M pontban metszik egymást. A kúpszelet síkja azt a kúpot, melynek az MO egyenes a tengelye és a körhöz húzott érintők a rajz síkjában fekvő alkotói,



éppen az adott kúpszeletben metszi.

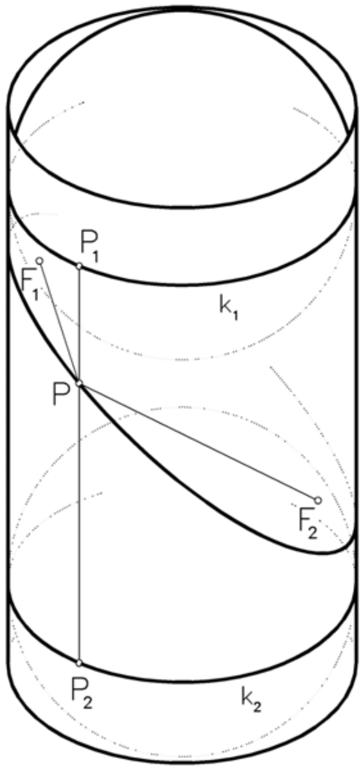


Mindezekből látni való, hogy az ellipszist, hiperbolát és parabolát jogosan nevezik kúpszeleteknek, mert azok minden körülmények között a kúpnak síkkal való metszéséből származtathatók. Igazolás nélkül:

> Adott ellipszisen, hiperbolán vagy parabolán keresztülmenő egyenes körkúp csúcsa egy olyan hiperbolán, ellipszisen, ill. parabolán fekszik, melynek síkja az adott kúpszelet síkjára merőleges, és amelynek a fókuszai az adott kúpszelet csúcspontjai, és viszont.

Egy ellipszis és egy hiperbola vagy két parabola, melyeknek síkjai egymásra merőlegesek, és amelyek közül mindegyiknek a fókuszai a másiknak csúcspontjai.

Az egyenes körhenger síkmetszete



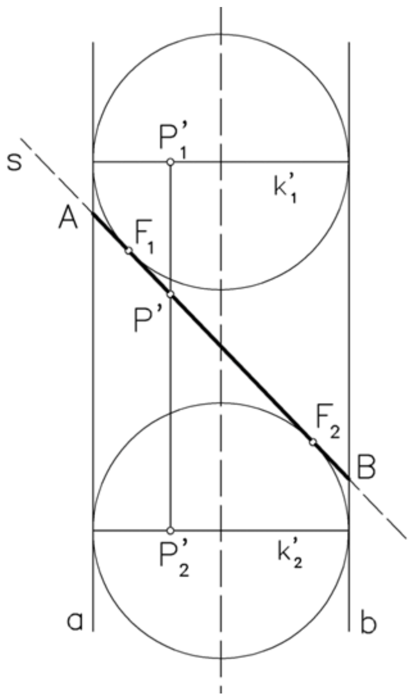
Tudjuk, hogy a tengellyel párhuzamos sík a hengerfelületet vagy nem metszi, vagy két alkotóban metszi, vagy egy alkotó mentén érinti. A tengelyre merőleges sík pedig a hengert körben metszi.

Messünk egy egyenes körhengert a tengelyére nem merőleges, és azzal nem párhuzamos síkkal. Legyen a rajz síkja a henger tengelyén áthaladó és a metszősíkra merőleges sík. Ebben a síkban a hengernek két alkotója van, *a* és *b*. A metszősík a rajz síkját egy *s* egyenesben metszi, mely a sík vetülete a rajz síkján. Az *s* egyenes az *a* és *b* alkotót az A és B pontokban metszi; az AB szakasz a metszet vetülete.

Meghatározzuk azt a két gömböt, melyek a hengert a k_1 és k_2 körökben és a síkot az F_1 és F_2 pontokban érintik. Ha a síkmetszet tetszés szerinti P pontjára illeszkedő alkotó a k_1 és k_2 kört a P_1 és P_2 pontokban metszi, akkor a P pont P_1 és P_2 között van, mert a két gömb, és így ezek P_1 és P_2 pontjai is, a metszősík különböző oldalaira esnek. Minthogy egy külső pontból egy gömbhöz húzott érintők egymással egyenlők, azért $PF_1=PP_1$ és $PF_2=PP_2$ tehát

$$PF_1+PF_2=PP_1+PP_2=P_1P_2.$$

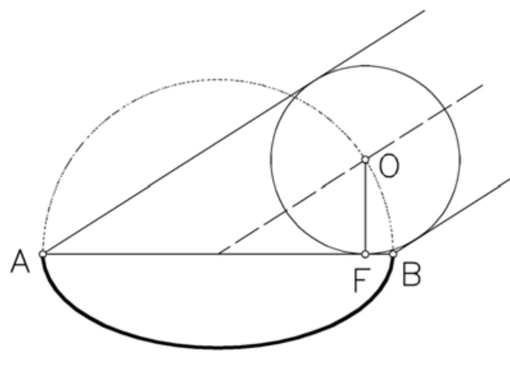
A P_1P_2 távolság nem függ a P pont választásától, mert a henger bármely két alkotójának a tengelyre merőleges két sík közé eső darabjai egymással egyenlők. Tehát a metszet minden pontja olyan ellipszisen fekszik, melynek F_1 és F_2 a fókuszai és AB nagytengelye.



A rajz síkjára merőleges síkban fekvő valamely ellipszis AB nagytengelye a rajz síkjában van. Az ellipszis F fókuszában az AB-re emelt merőleges egyenes az AB átmérő fölé rajzolt kört az O pontban metszi. Az O középpontú, az F ponton keresztül húzott körhöz A-ból és B-ből vont érintők párhuzamosak;

Tekintsük azt az egyenes körhengert, melynek tengelye az O pontot AB felezőpontjával összekötő egyenes, és az A, B pontokból vont érintők alkotói. Az ellipszis síkja ezt a hengert az adott ellipszisben metszi.

Ebből látható, hogy minden ellipszis előállítható, mint egyenes körhenger síkmetszete.



Másodrendű felületek

Tétel

Az $a_{IK}x_Ix_K = 0$ (I, K=1, 2, 3, 4) másodrendű felület és egy egyenes közös pontjainak számára vonatkozóan az alábbi esetek közül csak az egyik teljesül:

- Nincs közös pontjuk.
- 1 közös pontjuk van.
- 2 közös pontjuk van.
- Minden pontjuk közös. (Ekkor az egyenest a felület alkotójának nevezzük.)

(Az utolsó eset csak elfajuló másodrendű görbék esetén valósulhat meg.)

Bizonyítás

Ugyanúgy végezhető el, mint ahogy azt a másodrendű görbékre vonatkozó hasonló tétel esetén tettük.

Következmény

Egy olyan nemelfajuló másodrendű felület, melynek a szignatúrája nem nulla, nem tartalmazhat egyenest, ezért egy egyenes vagy két pontban metszi, vagy érinti, vagy nem metszi a felületet. A nulla szignatúrájú nemelfajuló másodrendű felület (egyköpenyű hiperboloid) tartalmaz egyenest, és mint azt látni fogjuk, minden felületi ponton keresztül két felületre illeszkedő egyenes határozható meg.

Definíció

Adott $a_{IK}x_Ix_K = 0$ nemelfajuló másodrendű felület és $P_1(\underset{1}{x}_I)$ egy tetszőleges pont. Az $a_{IK}\underset{1}{x}_I x_K = 0$ egyenlőséggel definiált sík a felület P_1-hez tartozó *polársík*ja.

A számítások során kedvezőbb a mátrixalakot használni a polársík meghatározására:

$$\begin{pmatrix} \underset{1}{x}_1 & \underset{1}{x}_2 & \underset{1}{x}_3 & \underset{1}{x}_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{pmatrix}$$

Definíció

Azt a síkot, amely a másodrendű felület egy pontján vagy ponton áthaladó alkotóján kívül más felületi pontot nem tartalmaz, a másodrendű felület *érintősík*jának nevezzük.

Ha a $P_1(\underset{1}{x}_I)$ felületi pontja az $a_{IK}x_Ix_K=0$ nemelfajuló másodrendű felületnek, akkor a P_1-hez tartozó polársík a felület P_1-beli érintősíkja.

Tétel

Másodrendű felület síkmetszete másodrendű görbe.

Bizonyítás

Az $a_{IK}x_Ix_K = 0$ (I, K=1, 2, 3, 4) másodrendű felületet a Σ síkkal fogjuk metszeni. A Σ-ban vegyünk fel egy koordináta alapalakzatot: $P_1(\underset{1}{x}_K)$, $P_2(\underset{2}{x}_K)$, $P_3(\underset{3}{x}_K)$. A Σ minden pontja előáll

$$x_K = \xi_1 \underset{1}{x}_K + \xi_2 \underset{2}{x}_K + \xi_3 \underset{3}{x}_K = \xi_s \underset{s}{x}_K$$

alakban, köztük a felület és sík közös pontjai is. Ekkor a közös pontokra

$$a_{IK} x_I x_K = a_{IK} \underset{s}{x}_I \underset{r}{x}_K \xi_s \xi_r = 0,$$

ahol $c_{sr} = a_{IK} \underset{s}{x}_I \underset{r}{x}_K$ egy 3×3-as szimmetrikus mátrix, vagyis $c_{sr}\xi_s\xi_r = 0$ egy másodrendű görbe a Σ-ban a P_1, P_2, P_3 koordinátarendszerre vonatkoztatva.

Tétel

Egy nemelfajuló másodrendű felület különböző pontjaiban különbözőek az érintősíkok.

Bizonyítás

Az $a_{IK} x_I x_K = 0$ (I,K=1, 2, 3) nemelfajuló másodrendű felület, azaz $\det(a_{IK}) \neq 0$.

A $P_1(\underset{1}{x}_K)$ és $P_2(\underset{2}{x}_K)$ különböző pontokhoz tartozó a polársíkok π_1 és π_2, melyek koordinátái $u_K = a_{IK} \underset{1}{x}_I$ és $v_K = a_{IK} \underset{2}{x}_I$.

A bizonyítás indirekt, vagyis feltesszük, hogy bár a P_1 és P_2 pontok különbözőek, a π_1 és π_2 polársíkok megegyeznek. Ez azt jelenti, hogy az u_K és v_K koordináták egy konstansszorzóban térnek el egymástól. ($\rho \neq 0$)

$$u_K = \rho \cdot v_K$$

Részletesebben: $a_{IK} \underset{1}{x}_I = \rho \cdot a_{IK} \underset{2}{x}_I$, melyet átrendezve: $a_{IK}(\underset{1}{x}_I - \rho \cdot \underset{2}{x}_I) = 0$. Mivel az a_{IK} mátrix invertálható, ezért ez az egyenlőség csak akkor teljesül minden esetben, ha a zárójelben lévő különbség tűnik el. Ez pedig azt jelentené, hogy a P_1 és P_2 pontok homogén koordinátái egy konstansszorzóban térnek el, vagyis a két pont megegyezik. Ez ellentmondás azzal a feltétellel, hogy P_1 és P_2 különböző pontok.

Egy pólus-polársík kapcsolatot mindig meghatároz a nemelfajuló másodrendű felület. Ugyanis a felület segítségével a projektív tér bármely pontjához hozzá tudunk rendelni egy síkot, mint polársíkot, és a tér bármely síkjához hozzárendelhető egy pont, mint pólus. Ha síkhoz rendeljük a pontot, akkor ez egy lineáris egyenletrendszer megoldását jelenti.

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 + a_{41}x_4 &= u_1 \\
a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3 + a_{42}x_4 &= u_2 \\
a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 + a_{43}x_4 &= u_3 \\
a_{14}x_1 + a_{24}x_2 + a_{34}x_3 + a_{44}x_4 &= u_4
\end{aligned}$$

Az u_I adottak és x_I-re keressük a megoldásokat. Az egyenletrendszernek akkor van megoldása, ha az alapmátrix reguláris mátrix, ez a feltétel teljesül, mivel nemelfajuló másodrendű felületről van szó.

Tétel

Ha a $P_1(\underset{1}{x}_K)$ pont nem illeszkedik az $a_{IK}x_Ix_K = 0$ nemelfajuló másodrendű felületre, akkor a P_1 polársíkja nem érintheti a felületet.

Bizonyítás

Az $a_{IK}x_Ix_K = 0$ (I,K=1, 2, 3) nemelfajuló másodrendű felület, azaz $\det(a_{IK}) \neq 0$.

A bizonyítás indirekt, vagyis feltesszük, hogy a $P_1(\underset{1}{x}_K)$ pont π_1 polársíkja egy P_1-től különböző $P_2(\underset{2}{x}_K)$ pontban érinti a felültetet.

Ez azt jeleneti, hogy a π_1 polársík egyenlete: $a_{IK}\underset{1}{x}_I x_K = 0$.

A P_2 érintési pontban az érintősík egyenlete: $a_{IK}\underset{2}{x}_I x_K = 0$.

A két egyenlet ugyanazt a síkot jellemzi, ezért a kétféleképpen kiszámolt koordináták csak egy konstansszorzóban térhetnek el egymástól. ($\rho \neq 0$)

$$a_{IK}\underset{1}{x}_I = \rho \cdot a_{IK}\underset{2}{x}_I$$

Egy oldalra rendezve: $a_{IK}(\underset{1}{x}_I - \rho \cdot \underset{2}{x}_I) = 0$. Mivel az a_{IK} mátrix invertálható, ezért ez az egyenlőség csak akkor teljesül minden esetben, ha a zárójelben lévő különbség tűnik el. Ez pedig azt jelentené, hogy a P_1 és P_2 pontok homogén koordinátái egy konstansszorzóban térnek el, vagyis a két pont megegyezik. Ez ellentmondás azzal a feltétellel, hogy P_1 és P_2 különböző pontok.

Definíció

Adott az $a_{IK}x_Ix_K = 0$ (I,K=1, 2, 3) nemelfajuló másodrendű felület. A $P_1(\underset{1}{x}_K)$ és $P_2(\underset{2}{x}_K)$ pontokat *konjugált*aknak nevezzük az adott másodrendű felületre nézve, ha koordinátáik kielégítik az $a_{IK}\underset{1}{x}_I \underset{2}{x}_K = 0$ egyenletet.

Következmény

Egy adott nemelfajuló másodrendű felületre nézve a P ponthoz konjugált pontok a P pont polársíkján vannak. Önmagukhoz pedig csak a felület pontjai konjugáltak.

Tétel

Egy adott nemelfajuló másodrendű felületre nézve a konjugált pontok illeszkednek egymás polársíkjára.

Bizonyítás

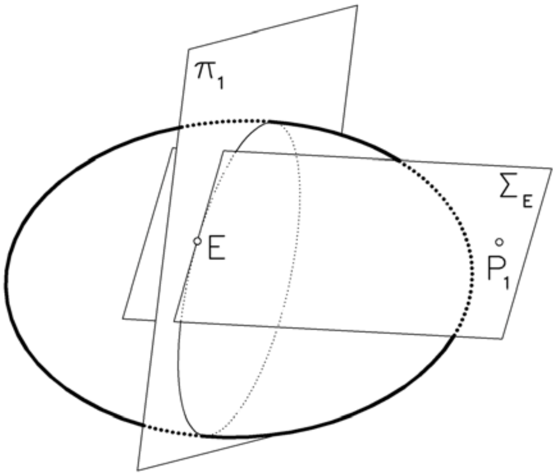
Az $a_{IK}x_Ix_K = 0$ (I,K=1, 2, 3) nemelfajuló másodrendű felület, azaz $\det(a_{IK}) \neq 0$.

$P_1(\underset{1}{x}_K)$és $P_2(\underset{2}{x}_K)$ pontok konjugáltak a felületre nézve, ezért $a_{IK}\underset{1}{x}_I \underset{2}{x}_K = 0$.

A P_1 és P_2 pontokhoz tartozó a polársíkok π_1 és π_2, melyek koordinátái $u_K = a_{IK}\underset{1}{x}_I$ és $v_K = a_{IK}\underset{2}{x}_I$. Ebből már látható, hogy $u_K\underset{2}{x}_K = 0$ és $v_K\underset{1}{x}_K = 0$, amely azt jelenti, hogy P_2 illeszkedik a π_1 polársíkra és a P_1 illeszkedik a π_2 polársíkra. (Itt felhasználtuk, hogy az a_{IK} mátrix szimmetrikus.)

Tétel

Ha a P_1 pont nem illeszkedik az $a_{IK}x_I x_K = 0$ nemelfajuló másodrendű felületre, akkor a P_1-ből a felülethez húzott tetszőleges érintősík a felületet olyan pontban érinti, amely illeszkedik a P_1 pont π_1 polársíkjára.



Bizonyítás

Tegyük fel, hogy egy P_1-re illesztett sík az $E(\underset{E}{x}_K)$ pontban érinti az $a_{IK}x_I x_K = 0$ nemelfajuló másodrendű felületet. Ekkor ennek a síknak az egyenlete: $a_{IK}\underset{E}{x}_I x_K = 0$, melyre a P_1 illeszkedik, azaz $a_{IK}\underset{E}{x}_I \underset{1}{x}_K = 0$. Ha először K szerint összegeznénk, akkor azt látnánk, hogy az E pont koordinátái kielégítik a P_1 pont π_1 polársíkjának $a_{IK}\underset{1}{x}_I x_K = 0$ egyenletét. Így valóban illeszkedik az E pont a π_1 síkra.

Definíció

Olyan egyenest, amelynek egy nemelfajuló másodrendű felülettel egy közös pontja van, a felület *érintő egyenes*ének nevezzük.

Tétel

Ha egy pont nem illeszkedik egy nemelfajuló másodrendű felületre és a pont polársíkja belemetsz a felületbe, akkor a pontból a felülethez húzott érintők a pont polársíkja nemelfajuló másodrendű görbe pontjaiban érintik a felületet.

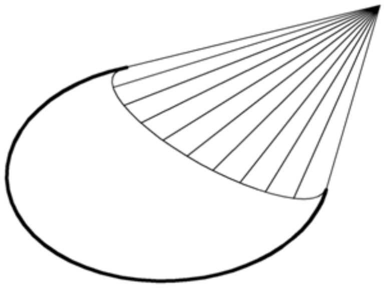
Definíció

Ha egy nemelfajuló másodrendű görbe pontjait egy olyan ponttal kötjük össze, amely nem illeszkedik a görbe síkjára, akkor másodrendű kúpot kapunk. A másodrendű görbe a kúp vezérgörbéje, a görbe síkjára nem illeszkedő pont a kúp csúcsa, az összekötő egyenesek a kúp alkotói.

Ha a pont végtelen távoli pont, akkor a görbe pontjait vele összekötő egyenesek mind párhuzamosak, és egy másodrendű hengerfelületet kapunk. A másodrendű henger tehát olyan másodrendű kúp, amelynek a csúcsa a végtelenben van.

Következmény

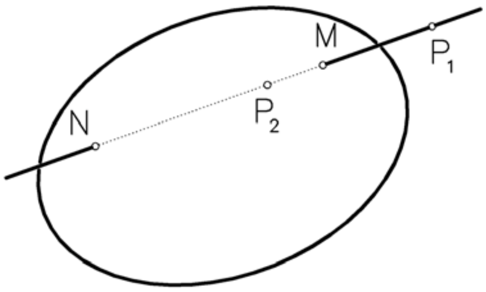
Ha egy pont nem illeszkedik egy nemelfajuló másodrendű felületre és a pont polársíkja belemetsz a felületbe, akkor a pontból a felülethez húzott érintők egy másodrendű kúpfelületet alkotnak.



Ha végtelen távoli pont polársíkjával metsszük a felületet, akkor a végtelen távolból húzott, felületet érintő egyenesek egy másodrendű hengert alkotnak.

A másodrendű felület képkontúrja párhuzamos vagy centrális vetítés esetén másodrendű görbe és a felületen a kontúrgörbe is másodrendű görbe.

Tétel



Adott nemelfajuló másodrendű felületre nézve vett P_1 és P_2 konjugált pontokat összekötő egyenes az M és N pontokban metszi a felületet. Ekkor a P_1, P_2, M, N harmonikus pontnégyest alkot, azaz $(P_1P_2MN)=-1$.

Bizonyítás

Az egyenesre egy síkot fektetünk, amely egy nemelfajuló másodrendű görbében metszi a felületet. Ennek a görbének és az egyenesnek a közös pontjai M és N. A metsző síkban már teljesül, hogy P_1, P_2, M, N harmonikus pontnégyest alkot, azaz $(P_1P_2MN)=-1$.

Tétel

Ha egy egyenes két pontban metsz egy nemelfajuló másodrendű felületet, akkor a metszéspontokat harmonikusan elválasztó pontok konjugáltak felületre nézve.

Megjegyzés

Egy nemelfajuló másodrendű felületet metsző egyenesen végtelen sok olyan pontpár határozható meg, amely harmonikusan választja el a metszéspontokat. A konjugáltság, mint kapcsolat, kettősviszonnyal kifejezhető, ezért a konjugáltság projektív transzformációval szemben invariáns. Ha egy pontpár konjugált egy adott nemelfajuló másodrendű felületre, akkor egy projektív transzformáció után a képeik konjugáltak lesz a képfelületre nézve, amely szintén nemelfajuló másodrendű felület. A konjugáltság projektív transzformációval szemben invariáns.

Tétel

Adott egy nemelfajuló másodrendű felület. Egy adott Σ sík pontjainak polársíkjai áthaladnak a Σ pólusán.

Bizonyítás

Az $a_{IK}x_Ix_K = 0$ nemelfajuló másodrendű görbe, azaz $\det(a_{IK})\neq 0$. A $P_1(\underset{1}{x}_K)$ pont polársíkja az $a_{IK}\underset{1}{x}_I x_K = u_K x_K = 0$ sík, melyet π_1-gyel jelölünk. Legyen ezen a síkon $P_2(\underset{2}{x}_K)$ egy tetszőleges pont, ezért teljesül $a_{IK}\underset{1}{x}_I\,\underset{2}{x}_K = 0$. Ha csak K szerint végezzük el az összegzést, akkor $a_{IK}\underset{2}{x}_K\,\underset{1}{x}_I = v_I\underset{1}{x}_I = 0$ teljesül, vagyis a $P_1(\underset{1}{x}_K)$ illeszkedik a $P_2(\underset{2}{x}_K)$ π_2 polársíkjára, melynek a koordinátái $v_I = a_{IK}\underset{2}{x}_K$. Mivel a P_2 pontot tetszőlegesen választottuk a π_1 síkról, emiatt tetszőleges P_2 polársíkja áthalad a P_1 ponton.

Definíció

Azt a tetraédert, melynek csúcsai egymáshoz páronként konjugáltak egy adott nemelfajuló másodrendű felületre nézve, *polátetraéder*nek nevezzük.

Tétel

Minden nemelfajuló másodrendű felületnek végtelen sok polártetraédere van, melyek mindegyike megadható három egymáshoz konjugált pont által. Egy polártetraéderben egy csúcspont polársíkja a vele szemköztes tetraéderlap.

Bizonyítás

A $P_1P_2P_3$ egy polárháromszög arra a másodrendű görbére nézve, amely a felületből a $P_1P_2P_3$ sík által metszhető ki. Ennek a síknak a P_4 pólusa lesz a tetraéder negyedik csúcsa.

Tétel

Adott egy nemelfajuló másodrendű felület és egy P_0 pont, amely nem illeszkedik a felületre. A pont π_0 polársíkja egy nemelfajuló másodrendű görbét metsz ki a felületből. Legyen $P_1P_2P_3$ egy polárháromszöge a metszetgörbének. Ekkor a $P_0P_1P_2P_3$ egy polártetraédere a felületnek.

Megjegyzés

Ha P_0 pont polársíkja valós, nemelfajuló másodrendű görbét metsz ki a felületből, akkor a P_0 pontot felületre nézve *külső pont*nak nevezzük. Külső pont esetén a pontra illesztett érintőkúp valós kúpfelület.

Ha P_0 pont polársíkja képzetes, nemelfajuló másodrendű görbét metsz ki a felületből (ilyenkor a felületnek és a síknak nincs egyetlen közös valós pontja sem), akkor a P_0 pontot felületre nézve *belső pont*nak nevezzük. Belső pont esetén a pontra illesztett érintőkúp képzetes kúpfelület, melynek csak egy valós pontja van, méghozzá az adott P_0 pont. Képzetes nemelfajuló másodrendű görbe esetén is létezik polárháromszög, ezért az előbbi tétel ebben az esetben is alkalmazható polártetraéder meghatározásra.

Tétel

Egy nemelfajuló másodrendű felület egy polártetraéderének csúcspontjai egy kanonikus koordinátarendszer alappontjait adják. (mindez azt jelenti, hogy ebben a koordinátarendszerben a felület egyenlete csak négyzetes tagokat tartalmaz.)

(A bizonyítást a másodrendű görbéknél alkalmazott bizonyításhoz hasonlóan lehet elvégezni.)

Definíció

Adott egy nemelfajuló másodrendű felület. Egy adott sík pólusán áthaladó egyeneseket a síkhoz *konjugált egyenesek*nek nevezzük az adott felületre nézve.

Tétel

Adott egy nemelfajuló másodrendű felület és egy *g* egyenes. A *g* egyenesre illeszkedő pontok polársíkjai síksort alkotnak, vagyis a *g* pontjaihoz tartozó polársíkok egy *m* egyenesre illeszkednek. A *g* és *m* egyeneseket *reciprokpolárisnak* nevezzük.

Bizonyítás

Az $a_{IK}x_Ix_K = 0$ nemelfajuló másodrendű görbe, azaz $\det(a_{IK})\neq 0$. A $P_1(\underset{1}{x}_K)$ és $P_2(\underset{2}{x}_K)$ két különböző pontja a *g* egyenesnek, ekkor a *g* bármely pontjának homogén koordinátái előállíthatók $\lambda_1\underset{1}{x}_K+\lambda_2\underset{2}{x}_K=x_K$ alakban. Ekkor a polársíkok koordinátáira

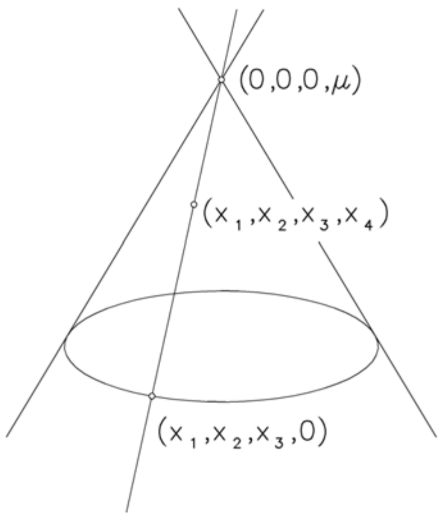
$$a_{IK}(\lambda_1\underset{1}{x}_I+\lambda_2\underset{2}{x}_I)=\lambda_1(a_{IK}\underset{1}{x}_I)+\lambda_2(a_{IK}\underset{2}{x}_I),$$

vagyis a síkok koordinátái a π_1 és π_2 polársíkok koordinátáinak lineáris kombinációjával adódnak, a π_1 és π_2 síkok a síksorban megadható koordináta alapalakzat alapsíkjai.

Következmény

1. Egy másodrendű felület tetszőleges polártetraéderének kitérő élei reciprokpolárisok.
2. Ha egy felületre nézve a reciprokpolárisok egybeesnek, akkor a felület kúpfelület, melynek az egybeeső reciprokpolárisai az alkotói.

Másodrendű kúp



A projektív térben adottak a

$P_1(1, 0, 0, 0)$
$P_2(0, 1, 0, 0)$
$P_3(0, 0, 1, 0)$
$P_4(0, 0, 0, 1)$

pontok. A P_1, P_2, P_3 pontok illeszkednek az $x_4=0$ egyenletű síkra. Ebben a síkban adjunk meg egy nemelfajuló másodrendű görbét. Ennek egyenlete:

$$x_1^2+x_2^2\pm x_3^2=0.$$

Ha a térben felveszünk egy pontot, és azt a görbe pontjaival összekötjük, akkor másodrendű kúpot kapunk. Koordináta-transzformációval mindig elérhető, hogy ennek a pontnak a koordinátái éppen (0,0,0,1) legyenek.

Állítsuk elő az alkotókat!

Legyen a $P_0(x_{01}, x_{02}, x_{03}, 0)$ az $x_4=0$ síkban az adott másodrendű görbére illeszkedő tetszőleges pont. A P_0P_4 alkotó tetszőleges $P(x_1, x_2, x_3, x_4)$ pontjának koordinátája valamely λ, μ valós számokkal vett kombináció lesz, azaz

$$x_1=\lambda\cdot 0+\mu\cdot x_{01}$$
$$x_2=\lambda\cdot 0+\mu\cdot x_{02}$$
$$x_3=\lambda\cdot 0+\mu\cdot x_{03}$$
$$x_1=\lambda\cdot 1+\mu\cdot 0.$$

Két paraméter felhasználásával valóban felületet kapunk. A másodrendű felületek projektív osztályozásánál láttuk, hogy azok az elfajuló másodrendű felületek, melyek rangja 3 a másodrendű kúpok osztályát adják. Ha az egyenlet $x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$ alakú, akkor képzetes kúpfelületről van szó, melynek csak a (0, 0, 0, 1) az egyetlen valós pontja. Ha az egyenlet $x_1^2+x_2^2-x_3^2=0$ alakú, akkor valós kúpfelületet kapunk.

Tétel

A másodrendű kúp két pontjának érintősíkja pontosan akkor esik egybe, ha a két pont ugyanarra a kúpalkotóra illeszkedik.

Tétel

A másodrendű kúp síkmetszete másodrendű görbe. A keletkezett görbe nemelfajuló, ha a metsző sík nem tartalmazza a kúp csúcspontját. Amennyiben a kúp csúcspontján áthalad a metsző sík, akkor a metszet elfajuló másodrendű görbe lesz.

Ha a metszet rangja 2, akkor a metszet a valós kúp esetén a csúcspontra illeszkedő valós, metsző egyenespár; képzetes kúp esetén képzetes metsző egyenespár, amely tartalmazza a kúp valós csúcspontját, de ezen kívül egyetlen valós pontja sincs.

Ha a metszet rangja 1, akkor sík egy alkotó mentén vett érintősík.

Mivel a másodrendű görbe valamely kúp síkmetszeteként származtatható, ezért ezeket kúpszeleteknek is nevezhetjük.

Definíció

Adott az $a_{IK}x_Ix_K=0$ másodrendű kúpfelület. Azt a $P_0(x_{01}, x_{02}, x_{03}, x_{04})$ pontot, amely teljesíti az $a_{IK}x_{0I}=0$ egyenlőséget, szinguláris pontnak nevezzük.

A definíció alapján könnyen belátható, hogy a kúp (0, 0, 0, 1) csúcspontja szinguláris pont lesz.

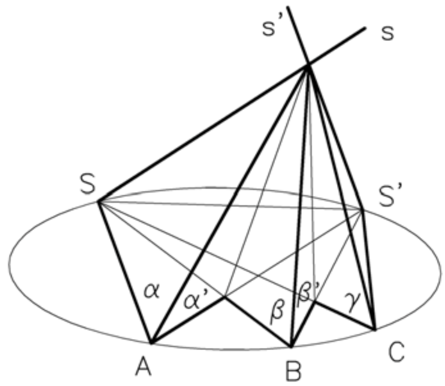
Projektív előállítás

Definíció

Két síksor közötti kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést projektívnek nevezünk, ha tetszőleges négy sík és a nekik megfelelő négy sík kettősviszonya megegyezik.
(Ha az egyik síksor α, β, χ, δ négy tetszőleges síkja és α', β', χ', δ' az ezeknek megfelelő síkok a másik síksorban, akkor $(\alpha\beta\chi\delta)=(\alpha'\beta'\chi'\delta')$)

Tétel (Steiner II. tétele a kúpfelületre megfogalmazva)

Két projektív síksor tartóegyenesei (sorozóegyenesei) egymást egy pontban messék. Ekkor a projektív kapcsolatban egymásnak megfelelő síkok metszésvonalai másodrendű kúpfelületet határoznak meg, melynek a sorozóegyenesek metszéspontja a kúp csúcspontja, alkotót a megfelelő síkok metszésvonala ad. Ha a sorozóegyenesek által felfeszített sík önmagának felel meg, akkor a projektív kapcsolat perspektivitás, és a megfelelő síkok metszésvonalai metsző síkpáron vannak.



Bizonyítás

Csak vázlatszerűen mutatjuk be:
A projektív síksorokat egy olyan síkkal metsszük, amely nem illeszkedik a sorozóegyenesek metszéspontjára. Ekkor egymáshoz projektív sugársorokat kapunk.
Ha a sorozóegyenesek síkja nem önmagának felelt meg, akkor a kimetszett sugársorokban a sorozópontokat összekötő egyenes sem önmagának felel meg. A metsző síkban Steiner II. tétele miatt a projektív sugársorok megfelelő sugarai egy nemelfajuló másodrendű görbe pontjaiban metszik egymást. Ezt a görbét kell összekötni a sorozóegyenesek metszéspontjával, és megkapjuk a másodrendű kúpot.
Ha a sorozóegyenesek síkja önmagának felelt meg, akkor a kimetszett sugársorokban a sorozópontokat összekötő egyenes is önmagának felel meg. A metsző síkban perspektív sugársorok megfelelő sugarai egy egyenes pontjaiban metszik egymást. Ezt az egyenest kell összekötni a sorozóegyenesek metszéspontjával, és megkapjuk a metsző síkpárt.

Másodrendű vonalfelületek

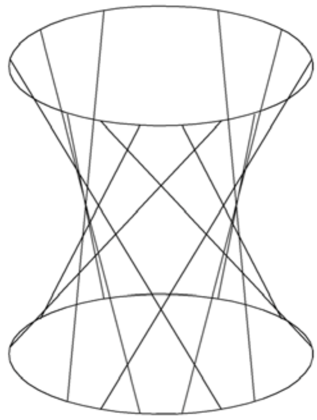
A nemelfajuló másodrendű felületek között az egyköpenyű hiperboloidok tartalmaznak egyeneseket. Ide tartoznak az affin osztályozásban az egyköpenyű hiperboloid (más néven a hiperbolikus hiperboloid) és a nyeregfelület (más néven a hiperbolikus paraboloid).

Tétel

Az $x_1^2+x_2^2-x_3^2-x_4^2=0$ egyenlettel megadható egyköpenyű hiperboloidra illeszkedő egyenesek két osztályba sorolhatók és a következő tulajdonsággal rendelkeznek:

- Az ugyanabba az osztályba tartozó egyenesek kitérők egymáshoz.
- A különböző osztályba tartozó egyenesek metszik egymást.

A felület minden pontján áthalad pontosan egy-egy alkotó a fent említett osztályokból.



Bizonyítás

A felületen végrehajtunk egy projektív transzformációt (amely tulajdonképpen egy koordináta-transzformáció), mellyel elérjük, hogy az egyköpenyű hiperboloid egyenlete egyszerűbb alakban adható meg. A felület egyenlete: $x_1^2+x_2^2-x_3^2-x_4^2=0$.

A transzformációt leíró egyenletek:

$$x_1'=x_1-x_3$$
$$x_2'=-x_2+x_4$$
$$x_3'=x_2+x_4$$
$$x_4'=x_1+x_3.$$

A fenti egyenletekből x_i-t kifejezve és a hiperboloid egyenletébe helyettesítve a felület egyenlete:

$$x_1'\cdot x_4'-x_2'\cdot x_3'=0.$$

Megmutatjuk, hogy a következő egyenesseregek rendelkeznek a tételben leírt tulajdonságokkal és illeszkednek a felületre.

1. Az ebbe az osztályba tartozó egyenesek a térben a következő koordinátákkal adhatók meg:

$$A=\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \end{pmatrix}, \text{ ahol}$$

az a és b valós számok, egyszerre nem lehetnek nullák, vagyis $a^2+b^2>0$. RangA=2.

2. Az ebbe az osztályba tartozó egyenesek a térben a következő koordinátákkal adhatók meg:

$$A^*=\begin{pmatrix} a^* & 0 & b^* & 0 \\ 0 & a^* & 0 & b^* \end{pmatrix}, \text{ ahol}$$

az a* és b* valós számok, egyszerre nem lehetnek nullák, vagyis $a^{*2}+b^{*2}>0$. RangA*=2.

Vegyünk egy-egy tetszőleges egyenest a fenti osztályokból és nézzük meg, hogy elmetszik-e egymást!

Az egyenesek koordinátáiból egy 4×4-es mátrixot képezve a mátrix determinánsa a kifejtés után:

$$\det\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ a^* & 0 & b^* & 0 \\ 0 & a^* & 0 & b^* \end{pmatrix} = -a\cdot b\cdot a^*\cdot b^* + a\cdot b\cdot a^*\cdot b^* = 0.$$

Mindez azt jelenti, hogy a fenti 4×4-es mátrix rangja 3 és ezzel a két egyenes metszi egymást.

Vegyünk az első osztályból két alkotót! Ezek koordinátáiból is 4×4-es mátrixot képezve és a determinánst kiszámolva

$$\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & b_2 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Ekkor a két egyenesnek nincs közös pontja.

Vegyünk a második osztályból két alkotót! Ezek koordinátáiból is 4×4-es mátrixot képezve és a determinánst kiszámolva most is egy 0-tól különböző értéket kapunk. Ekkor ennek a két egyenesnek sincs közös pontja.

Most meg kell mutatni, hogy a fenti egyenesosztályok a hiperboloidra illeszkednek.

Az $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \end{pmatrix}$ mátrix elemei azt jelentik, hogy térben egy egyenest úgy tudunk megadni, hogy az (a, b, 0, 0) és (0, 0, a, b) síkokat elmetszünk egymással.

Egyenletekkel leírva mindezt:

$$a\cdot x_1' + b\cdot x_2' = 0$$
$$a\cdot x_3' + b\cdot x_4' = 0$$

Ez a-ra és b-re egy lineáris egyenletrendszer, melynek akkor van triviálistól különböző megoldása, ha az alapmátrix determinánsa nulla, azaz

$$x_1'\cdot x_4' - x_2'\cdot x_3' = 0.$$

Tehát a fenti egyenes illeszkedik a felületre.

Ha a másik osztály egy tetszőleges elemét kiválasztjuk, akkor az (a*, 0, b*, 0) és (0, a*, 0, b*) síkokat kell elmetszeni egymással; ennek az egyenletrendszere:

$$a^*\cdot x_1' + b^*\cdot x_3' = 0$$
$$a^*\cdot x_2' + b^*\cdot x_4' = 0$$

Ez a*-ra és b*-ra egy lineáris egyenletrendszer, melynek akkor van triviálistól különböző megoldása, ha az alapmátrix determinánsa nulla, azaz

$$x_1'\cdot x_4' - x_2'\cdot x_3' = 0.$$

Tehát ez az egyenes illeszkedik a felületre.

Tétel

Az $x_1^2+x_2^2-x_3^2-x_4^2=0$ egyköpenyű hiperboloid egy pontjában vett két alkotó (a felületre illeszkedő egyenes) a felület adott pontbeli érintősíkját feszíti fel.

Bizonyítás

Csak a bizonyítás vázlatát mutatjuk meg:

A felületet egy koordináta transzformáció után az $x_1\cdot x_4 - x_2\cdot x_3 = 0$ egyenlettel adjuk meg (végre hajtottuk az előző tételben leírt transzformációt, de az egyszerűség kedvéért nem írjuk ki a vesszőket.). Ekkor a $P_0(x_{0i})$ pont polársíkja a $(x_{04}, -x_{03}, -x_{02}, -x_{01})$ koordinátájú $x_{04}\cdot x_1-x_{03}\cdot x_2-x_{02}\cdot x_3-x_{01}\cdot x_4=0$ sík. Ez a sík tartalmazza az alkotókat is, melyek a fenti tulajdonságokkal rendelkeznek.

Tétel (Steiner I. tétele az egyköpenyű hiperboloidra megfogalmazva)
Az $x_1^2+x_2^2-x_3^2-x_4^2=0$ egyköpenyű hiperboloid két egy osztályba tartozó g_1, g_2 alkotójából egy harmadik, ehhez az osztályhoz tartozó g_3 alkotót projiciálva egymáshoz projektív síksorokat kapunk.

Ez azt jelenti, hogy ha A, B, C, D… pontokat tekintjük a g_3 egyenesen, akkor a síksorokban egymásnak felelnek meg a következő síkok:

$$[A, g_1]\leftrightarrow[A, g_2]$$
$$[B, g_1]\leftrightarrow[B, g_2]$$
$$[C, g_1]\leftrightarrow[C, g_2]$$
$$[D, g_1]\leftrightarrow[D, g_2]$$
$$\ldots$$

Tétel
Az $x_1^2+x_2^2-x_3^2-x_4^2=0$ egyköpenyű hiperboloid két kitérő alkotóját a másik osztálybeli alkotók projektív pontsorokban metszik.

Ez azt jelenti, hogy ha a, b, c, d… alkotók egy osztályba tartoznak és tekintjük a g_1 és g_2 alkotókat a másik osztályból. Akkor az a, b, c, d… alkotók az A_1, B_1, C_1, D_1… pontokban metszik a g_1 alkotót és az A_2, B_2, C_2, D_2… pontokban metszik a g_2 alkotót. A következő megfeleltetés projektív kapcsolat:

$$A_1\leftrightarrow A_2$$
$$B_1\leftrightarrow B_2$$
$$C_1\leftrightarrow C_2$$
$$D_1\leftrightarrow D_2$$
$$\ldots$$

Tétel
Az $x_1^2+x_2^2-x_3^2-x_4^2=0$ egyköpenyű hiperboloidon g_1 és g_2 két kitérő alkotó. Ekkor a g_1 alkotó a g_2-re illeszkedő síksort illetve a g_2 alkotó a g_1-re illeszkedő síksort egymáshoz projektív pontsorban metszi.

Tétel
Létezik pontosan egy olyan egyköpenyű hiperboloid, amely adott három, egymáshoz páronként kitérő egyenest tartalmaz.

Bizonyítás
Tekintsük a g_1, g_2, g_3 egymáshoz páronként kitérő egyeneseket. A g_1, g_2 egyenesekre illeszkedő síksorok elemei között azt a megfeleltetést adjuk meg, hogy az egymásnak megfelelő síkok a g_3 egyenest ugyanabban a pontban metsszék el. Be kell látni, hogy az egymásnak megfelelő síkok metszésvonala a másik (a g_1, g_2, g_3 osztályától különböző) osztályba tartozó egyenes.
Tekintsük a g_1 alkotót, melynek pontja a $P_1(0, 0, 0, 1)$ és a $P_4(0, 0, 1, 0)$ pont. A g_2 alkotónak a $P_3(0, 1, 0, 0)$ és a $P_2(1, 0, 0, 0)$ pontja. A kitérő egyenesen általános pontnégyest adtunk meg, melyek az E(1, 1, 1, 1) ponttal egy koordinátaalakzatot adnak a projektív térben. (Ha ez nem teljesülne, akkor egy koordináta-

transzformációval mindig elérhető.) Ekkor a $g_1\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$ és a $g_2\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ koordinátájú egyenes.

A g_1 egyenesre illeszkedő síksor az (1, 0, 0, 0) és (0, 1, 0, 0) koordinátájú ($x_1=0$ és $x_2=0$ egyenletű) síkokból lineáris kombinációval állítható elő, azaz

$$\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2=0,\text{ valamely } \lambda_1,\lambda_2 \text{ valós értékre } (\lambda_1^2+\lambda_2^2>0).$$

A g_2 egyenesre illeszkedő síksor az (0, 0, 1, 0) és (0, 0, 0, 1) koordinátájú ($x_3=0$ és $x_4=0$ egyenletű) síkokból lineáris kombinációval állítható elő, azaz

$$\mu_1 x_3+\mu_2 x_4=0,\text{ valamely } \mu_1,\mu_2 \text{ valós értékre } (\mu_1^2+\mu_2^2>0).$$

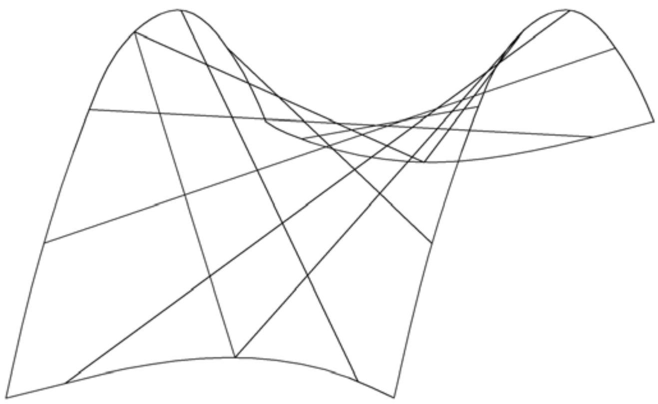
Feleltessük meg egymásnak azokat a síkokat, mely előállítására a $\lambda_1=\mu_1$ és $\lambda_2=\mu_2$ teljesül! Ekkor egy homogén lineáris egyenletrendszert kapunk λ_1,λ_2-re. Akkor van triviálistól különböző megoldása, ha a mátrixának determinánsa nulla, vagyis

$$x_1\cdot x_4-x_2\cdot x_3=0.$$

Következmény

Ha két egyköpenyű hiperboloidnak három egy osztálybeli (azaz páronként kitérő) alkotója közös, akkor a két hiperboloid megegyezik.

Ha a páronként kitérő három alkotót egy adott síkkal párhuzamosan vesszük fel, akkor az adott sík végtelen távoli egyenese a másik osztálybeli egyik alkotó lesz. De a megadott alkotók osztályában is van egy végtelen távoli egyenes. Mivel két végtelen távoli egyenes illeszkedik a felületre a végtelen távoli sík érinti ezt a felületet. A felületet hiperbolikus paraboloidnak (nyeregfelületnek) nevezzük.



Következmény

Kitérő tengelyű projektív pontsorok transzverzálisai egyköpenyű hiperboloidot alkotnak.

Három kitérő egyenes transzverzálisai egyköpenyű hiperboloidot alkotnak.

Projektív síkok közötti korreláció

Definíció

A Σ és Σ' projektív síkok *korrelatív vonatkozás*ban vannak, ha Σ tetszőleges P pontjának a Σ' egy u' egyenese és a Σ tetszőleges u egyenesének a Σ' egy P' pontja felel meg, és ez a leképezés kölcsönösen egyértelmű és illeszkedéstartó.

Tekintsünk a Σ és Σ' síkokban egy-egy koordinátaalakzatot, melyre a P pont és u egyenes, valamint a képekként előálló u' egyenes és P' pont koordinátái rendre (x_i), (u_i), (u_i'), (x_i'). A projektív leképezéseket, mint reguláris lineáris transzformációkat adtuk meg, ezért a P pont (x_i) koordinátáiból egy reguláris a_{ij} mátrix felhasználásával az u' egyenes (u_i') koordinátái kiszámíthatók. Azaz

$$u_i'=a_{ij}x_j.$$

Ekkor balról az a_{ij} mátrix inverzével a b_{ik} mátrixszal szorozva:

$$b_{ik}u_i'=b_{ik}a_{ij}x_j=x_k.$$

A $b_{ik}u_i'=x_k$. összefüggéssel a képegyenes koordinátáiból az eredeti pontkoordináták meghatározhatók.
A $P(x_i)$ pont illeszkedik az $u(u_i)$ egyenesre a Σ síkban: $u_kx_k=0$. az előbbi összefüggéseket felhasználva:

$$u_kx_k=u_k(b_{ik}u_i')=(u_kb_{ik})u_i'=0,$$

ahol az $u_kb_{ik}=x_i'$, azaz $x_i'u_i'=0$ miatt a P' és u' illeszkedése is teljesül Σ' síkban.

Tétel

Ha két projektív sík között egy korrelatív leképezés van, akkor az egymásnak megfeleltetett első fajú projektív alapalakzatok projektív vonatkozásban vannak. (Más szóval a leképezés kettősviszonytartó.)

A korrelatív leképezés egy egyenes pontjaihoz, mint pontsorhoz, egy sugársort rendel hozzá és egy sugársorhoz egy pontsort.
Teljesül, hogy ha A, B, C, D kollineáris pontnégyes a Σ síkban, akkor a', b', c', d' egy sugársor négy egyenese a Σ'-ban és (ABCD)=(a'b'c'd'). És ha e, f, g, h egy sugársor négy egyenese a Σ-ban, akkor az E', F', G', H' kollineáris pontnégyes Σ'-ben és (efgh)=(E'F'G'H').

Megjegyzés

A korrelációt négy tetszőleges elempár nem határozza meg, de pl. négy pont és a nekik megfeleltetett négy egyenes az igen. Ha két pontot és két egyenest és a nekik megfeleltetett elemeket megadva a korrelációt nem tudjuk megadni!!!!

Tétel

Ha adott a Σ és Σ' valamint a Σ' és Σ'' projektív síkok között egy-egy korrelatív leképezés, akkor ezeket egymás után végrehajtva a Σ és Σ'' síkok közötti kollineációt kapunk.

Tétel

Két projektív sík közötti korrelatív leképezést egyértelműen meghatározza az egyik sík négy általános helyzetű pontja és a nekik megfeleltetett négy általános helyzetű egyenes.

Projektív síknak önmagára vonatkozó korrelatív leképezése

Egy Σ síknak önmagára való korrelatív leképzése a Σ síknak önmagára való olyan projektív leképezése, amely kölcsönösen egyértelmű és illeszkedéstartó, és tetszőleges P pontnak egy u' egyenes és tetszőleges u egyenesnek egy P' pont felel meg.

Tekintsünk a Σ síkban két koordinátaalakzatot. Az egyikre vonatkozóan a P pont és u egyenes, a másikra vonatkozóan a képekként előálló u' egyenes és P' pont koordinátái rendre (x_i), (u_i), (u_i'), (x_i'). Mint ahogy azt a különböző síkok közötti korrelációnál láttuk a projektív leképezéseket, mint reguláris lineáris transzformációkat adjuk meg; ezért a P pont (x_i) koordinátáiból egy reguláris a_{ik} mátrix felhasználásával az u' egyenes (u_i') koordinátái kiszámíthatók. Azaz

$$u_i'=a_{ik}x_{i..}$$

Ekkor az a_{ik} mátrix b_{ik} inverzét felhasználva:

$$b_{ik}u_i'=x_{k..}$$

Mivel a Σ síkot önmagára képezzük le ezért érdemes megvizsgálni azt, hogy egy pont mikor a hozzá képként rendelt egyenesre, illetve egy egyenes mikor illeszkedik a képpontjára.

A $P(x_i)$ pont képegyenese az $u_i'=a_{ik}x_i$ koordinátákkal rendelkezik. A P pont akkor illeszkedik az u' egyenesre, ha a koordinátákra:

$$u_i'x_i=a_{ik}x_ix_k=0,$$

amely azt jelenti, hogy a pont koordinátái kielégítik annak a nemelfajuló másodrendű görbének az egyenletét, melynek a mátrixa a_{ik}.

Az $u(u_i)$ egyeneshez a korreláció az $x_i'=b_{ik}u_i$ koordinátákkal rendelkező P' pontot rendeli. Az u egyenes akkor illeszkedik a P' pontra ha a koordinátákra:

$$x_k'u_k=b_{ik}u_iu_k=0,$$

amely azt jelenti, hogy az egyenes koordinátái kielégítik annak a másodosztályú görbének az egyenletét, melynek a mátrixa b_{ik}.

Ez alapján kimondható a következő

Tétel

Egy sík önmagára vonatkozó korrelatív leképezésénél egy pont pontosan akkor illeszkedik a képegyenesére, ha a koordináták kielégítik az $a_{ik}x_ix_k=0$ egyenletet.

Egy sík önmagára vonatkozó korrelatív leképezésénél egy egyenes pontosan akkor illeszkedik a képpontjára, ha a koordináták kielégítik a $b_{ik}u_iu_k=0$ egyenletet.

Ekkor az a_{ik} és b_{ik} mátrixok regulárisak és egymás inverzei.

Tétel

A projektív síkban nem létezik olyan korreláció, amelynél minden pont illeszkedik a képegyenesére.

Bizonyítás

Ha a korrelációban az a_{ik} reguláris mátrix segítségével határozhatóak meg egy pont képegyenesének koordinátái és a pont illeszkedik a képegyenesére, akkor $a_{ik}x_ix_i=0$ teljesül.

Az $a_{ik}x_ix_i=0$ egyenletnek minden $P(x_i)$ pont esetén teljesülnie kell, ezért ebből az a_{ik} mátrix elemei meghatározhatók. Ha tekintünk a síkon egy koordinátaalakzatot, akkor annak az alappontjaira is teljesül a feltétel.

Az (1, 0, 0) pontot illesztjük, akkor ebből az következik, hogy az $a_{11}=0$.
Az (0, 1, 0) pontot illesztjük, akkor ebből az következik, hogy az $a_{22}=0$.
Az (0, 0, 1) pontot illesztjük, akkor ebből az következik, hogy az $a_{33}=0$.

Ezzel a főátló elemei kinullázódtak.

Az (1, 1, 1) egységpont koordinátatengelyekre eső vetületei esetén

Az (1, 1, 0) pontot illesztjük, akkor ebből az következik, hogy az $a_{12}+a_{21}=0$.
Az (1, 0, 1) pontot illesztjük, akkor ebből az következik, hogy az $a_{13}+a_{31}=0$.
Az (0, 1, 1) pontot illesztjük, akkor ebből az következik, hogy az $a_{23}+a_{32}=0$.

Ezzel a mátrix ferdén szimmetrikus lett, azaz $a_{ii}=0$ és $a_{ik}=-a_{ki}$, ha $i\neq k$.

A ferdén szimmetrikus, reguláris A mátrixra teljesül, hogy

$$A^T=-A.$$

A determinánsokra

$$|A^T|=|-A|.$$

Mivel $|A^T|=|A|$, ezért $|A|=(-1)^3|A|$. ez pedig azt jelenti, hogy a mátrix determinánsa nulla, ami ellentmond annak, hogy A reguláris.

Mivel a 3×3-as mátrixok között nincs ferdén szimmetrikus reguláris mátrix, ezért a projektív síkon nincs olyan korreláció, melyben minden pont illeszkedik a képegyenesére.

Megjegyzés

Térben (páratlan dimenziójú terekben) van olyan korreláció, amelyben minden pont illeszkedik a síkra (duális párjára). A háromdimenziós tér eme korrelációját *nullarendszer*nek hívják és segítségével a tér összes euklideszi értelemben vett mozgása leírható.

Definíció

Azt a korrelációt, amely az inverzével együtt (egymás után végrehajtva őket) az identikus leképezést adja *involutórikus korreláció*nak nevezzük. Az involutórikus korrelációt *polaritás*nak is nevezik. Ebben az esetben a pontoknak megfelelő egyeneseket polárisnak, az eredeti pontokat pólusnak nevezzük.

Tétel

Egy korreláció pontosan akkor involutórikus, ha a korreláció $A(a_{ik})$ mátrixa szimmetrikus.

Tétel

Azon pontok összessége, melyek az $A(a_{ik})$ szimmetrikus, reguláris mátrix által adott $u_i'=a_{ik}x_i$ korrelációban illeszkednek a képegyenesükre, egy nemelfajuló másodrendű görbét határoznak meg. Ekkor a görbe mátrixa éppen a korreláció mátrixa. A korrelációban egy ponthoz rendelt egyenes az előbbi görbére vett poláris egyenes, és egy egyeneshez rendelt pont az egyenes pólusa a görbére nézve.

Következmény

A projektív síkon minden nemelfajuló másodrendű görbe egy polaritást határoz meg, és minden polaritás megadható egy nemelfajuló másodrendű görbe által. A görbét a korreláció *vezető kúpszeleté*nek nevezzük.

Korrelatív nyalábok

Definíció

Adott a Σ és Σ' projektív síkok között egy korrelatív kapcsolat, amelyben a Σ sík minden pontjához hozzárendeljük a Σ' sík valamely egyenesét. Ekkor legyenek az O és O' pontok vetítési centrumok. A O-ból a Σ pontjait, az O'-ből a Σ' egyeneseit vetítjük. Az így előálló két elemhalmazt korrelatív nyalábnak nevezzük. A korrelatív nyalábban egymásnak megfelelő elemek (egyenes és a hozzá rendelt sík) az eredtei síkokban a korreláció megfelelő elempárjait (pontot és a hozzá rendelt egyenest) indukálják.

Ha az O pontra illeszkedő sugárnyalábban (ezt a O-ra illeszkedő egyenesek alkotják) olyan egyeneseket tekintünk melyek egy sugársorhoz tartoznak (azaz egy síkban vannak), akkor az O'-re illeszkedő síknyalábban (ezt az O'-re illeszkedő síkok alkotják) a nekik megfelelő síkok egy síksorhoz tartoznak (azaz egy közös egyenesük van).
Az eredeti Σ és Σ' síkokban ezt megfogalmazva: A Σ síkban egy egyenesre illeszkedő pontok képei a Σ' síkban egy sugársor elemei lesznek.

A Σ és Σ' síkok közötti korrelatív vonatkozás a Σ négy általános helyzetű pontja és a Σ' négy általános egyenese által adott. Ennek megfelelően a korrelatív nyalábok közötti kapcsolat négy nem egy síkra illeszkedő sugár és négy nem egy síksorhoz tartozó sík által adott.

Projektív terek közötti korreláció

Adott két egymástól nem feltétlenül különböző, Σ és Σ’ projektív tér. A két tér korrelatív vonatkozásban van, ha

1. A Σ tér minden $P(x_I)$ pontjához a Σ’ térben egy $u'(u_I')$ síkot, és a Σ tér minden $u(u_I)$ síkjához a Σ’ tér egy $P'(x_I')$ pontot rendelünk hozzá.
2. A korrelatív leképezés illeszkedéstartó, azaz ha a P pont illeszkedik az u síkra, akkor az u’ sík illeszkedik a P’ pontra. ($u_I x_I=0 \rightarrow u_I' x_I'=0$)
3. A Σ tér egy g egyenesére illeszkedő pontok képei egy g’ sorozóegyenesű síksort alkotnak a Σ’ térben.
4. Az előző pontban leírt módon a Σ tér egy g egyenesének a Σ’ tér g’ egyenese felel meg.

A projektív leképezéseket, mint reguláris lineáris transzformációkat adtuk meg, azaz a térben 4×4-es reguláris $A(a_{IK})$ mátrix jellemez egy transzformációt. A Σ tér $P(x_I)$ pontjához a Σ’ térben azt az $u'(u_I')$ síkot, rendeljük, melyre $u_I'= a_{IK}x_K$. A Σ tér $u(u_I)$ síkjához a Σ’ térben azt a $P'(x_I')$ pontot rendelünk hozzá, melyre $x_I'= b_{IK}u_K$. Az $A(a_{IK})$ és $B(b_{IK})$ mátrixok egymás inverzei.

Ahogy a síkbeli esetben is vizsgáltuk, egy térnek lehet önmagára is venni korrelatív vonatkozását. Ekkor felmerül a kérdés, hogy milyen pontok illeszkednek a képsíkjukra, illetve van-e olyan korreláció, melyben minden pont illeszkedik a hozzá rendelt síkra.

Tétel

Egy tér önmagára vonatkozó korrelatív leképezésénél egy pont pontosan akkor illeszkedik a képsíkjára, ha a koordináták kielégítik az $a_{IK}x_I x_K=0$ egyenletet.
Egy tér önmagára vonatkozó korrelatív leképezésénél egy sík pontosan akkor illeszkedik a képpontjára, ha a koordináták kielégítik a $b_{IK}u_I u_K=0$ egyenletet.
Ekkor az a_{IK} és b_{IK} mátrixok regulárisak és egymás inverzei.

Bizonyítás

A $P(x_I)$ pont képsíkja az $u_I'=a_{IK}x_K$ koordinátákkal rendelkezik. A P pont akkor illeszkedik az u’ síkra, ha a koordinátákra:

$$u_I' x_I=a_{IK}x_K x_I=0,$$

amely azt jelenti, hogy a pont koordinátái kielégítik annak a nemelfajuló másodrendű felületnek az egyenletét, melynek a mátrixa a_{IK}.
Az $u(u_I)$ síkhoz a korreláció az $x_I'=b_{IK}u_K$ koordinátákkal rendelkező P’ pontot rendeli. Az u sík akkor illeszkedik a P’ pontra ha a koordinátákra:

$$x_I' u_I=b_{IK}u_K u_I=0,$$

amely azt jelenti, hogy az sík koordinátái kielégítik annak a másodosztályú felületnek az egyenletét, melynek a mátrixa b_{IK}. (A síkbeli esethez hasonlóan másodosztályú felületen egy nemelfajuló másodrendű felület érintősíkjaiból álló síkhalmazt értjük.)

Definíció

Azt a korrelációt, amely az inverzével való összetettje az azonos projektív leképezést *involutórikus korreláció*nak nevezzük.

Tétel

Egy térbeli korreláció pontosan akkor involutórikus, ha a korreláció $A(a_{IK})$ mátrixa szimmetrikus vagy ferdén szimmetrikus.

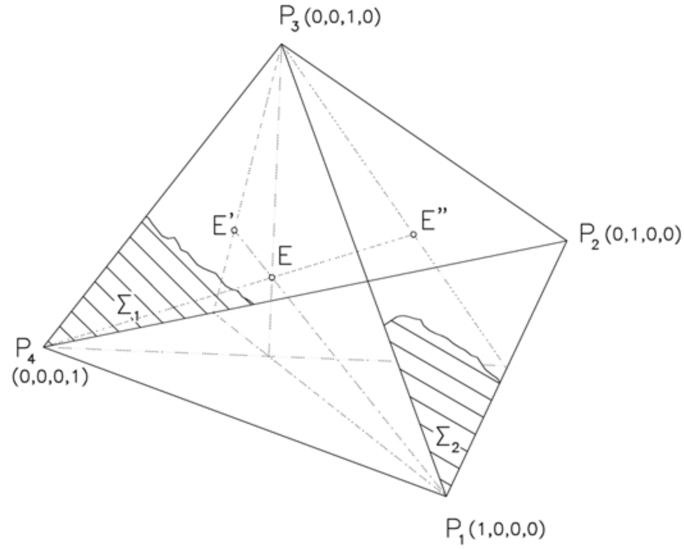
Ha az $A(a_{IK})$ mátrix szimmetrikus, akkor a korrelációt *polaritás*nak nevezzük. Ebben az esetben a pontoknak megfelelő síkokat polársíknak, az eredeti pontokat pólusnak nevezzük.
Ha az $A(a_{IK})$ mátrix ferdén szimmetrikus, akkor a korrelációt *nullarendszer*nek nevezzük. A 4×4-es mátrixok körében létezik reguláris, ferdén szimmetrikus mátrix. (A 3×3-as mátrixok körében láttuk, hogy nem volt reguláris, ferdén szimmetrikus mátrix!)

Tétel

Azon pontok összessége, melyek az $A(a_{IK})$ szimmetrikus, reguláris mátrix által adott $u_I'=a_{IK}x_K$ korrelációban illeszkednek a képsíkjukra, egy nemelfajuló másodrendű felületet határoznak meg. Ekkor a felület mátrixa éppen a korreláció mátrixa. A korrelációban egy ponthoz rendelt sík az előbbi felületre vett polársík, és egy síkhoz rendelt pont a sík pólusa a felületre nézve.

Következmény

A projektív térben minden nemelfajuló másodrendű felület egy polaritást határoz meg, és minden polaritás megadható egy nemelfajuló másodrendű felület által. A felületet a korreláció vezérfelületének nevezzük.



A Σ_1 és Σ_2 síkok között korrelatív kapcsolatot létesítettünk. Válasszuk a koordinátarendszert úgy, hogy a Σ_1 és Σ_2 síkok a térbeli koordinátarendszer $[P_2, P_3, P_4]$ és $[P_1, P_2, P_3]$ koordinátasíkjai legyenek. (Ez a helyzet mindig elérhető egy koordináta-transzformáció végrehajtásával.) Ekkor a Σ_1 egyenlete: $x_1=0$, és a Σ_2 egyenlete: $x_4=0$. Válasszuk koordináta-alapalakzatnak a Σ_1-ben a P_2, P_3, P_4, E' pontokat, a Σ_2-ben a P_1, P_2, P_3, E" pontokat. (Az E' és E" pontok a térbeli koordinátarendszer E egységpontjának vetületei a megfelelő síkokon.) A Σ_1 síkon lévő P pont koordinátáit jelölje (x_2, x_3, x_4) a P_2, P_3, P_4, E' rendszerben, és a Σ_2 síkon lévő v egyenes koordinátáit (v_1, v_2, v_3) a P_1, P_2, P_3, E" rendszerben.

A Σ_1 és Σ_2 síkok közötti korrelációt egy 3×3-as, reguláris B mátrix írja le, azaz

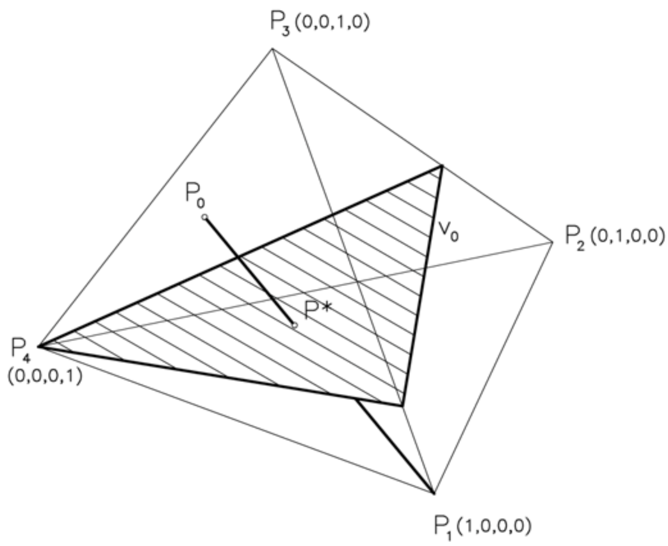
$$v_i=b_{ik}x_k \qquad (i=1,\ 2,\ 3 \text{ és } k=2,\ 3,\ 4),$$

ahol x_i a Σ_1 sík egy P pontjának, a v_i a Σ_2 sík P-hez rendelt v egyenesének a megfelelő síkon lévő koordinátái. Ekkor a B mátrix az indexeket figyelembe véve a következő alakú:

$$B=\begin{pmatrix} b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{32} & b_{33} & b_{34} \end{pmatrix}.$$

A Σ_1 sík pontjait és egyeneseit a P_1 pontból, a Σ_2 sík egyeneseit és pontjait a P_4 pontból projiciáljuk. Így nyerünk két korrelatív nyalábot. Ha a síkok közötti korrelációban $P(\in\Sigma_1)$ és $v(\in\Sigma_2)$ megfelelő pár volt, akkor a P_1-re illeszkedő nyaláb PP_1 sugara és a P_2-re illeszkedő nyaláb $[v, P_4]$ síkja megfelelő párt alkot. Az egymásnak megfelelő elemek metszéspontját fogjuk vizsgálni.

Most rögzítsük a Σ_1 síkon a P_0 pontot. Ennek a koordinátái a síkon $(\underset{0}{x}_2, \underset{0}{x}_3, \underset{0}{x}_4)$, a térben $(0, \underset{0}{x}_2, \underset{0}{x}_3, \underset{0}{x}_4)$. A P_1-re illeszkedő nyaláb P_0P_1 egyenesén a P_1 és P_0 pontokat alappontoknak választva, az egyenes tetszőleges pontjának térbeli koordinátái a P_1 és P_0 koordinátáiból a λ_1, λ_2 valós értékek (egyenesen lévő koordináták) felhasználásával kombinálható. Mivel $P_0(0, \underset{0}{x}_2, \underset{0}{x}_3, \underset{0}{x}_4)$ és $P_1(1,\ 0,\ 0,\ 0)$, ekkor az egyenes tetszőleges pontjának koordinátái:



$$x_1=\lambda_1\,,\quad x_2=\lambda_2\cdot \underset{0}{x}_2\,,\quad x_3=\lambda_2\cdot \underset{0}{x}_3\,,\quad x_4=\lambda_2\cdot \underset{0}{x}_4\,.$$

A P_0 korrelatív képe a v_0 egyenes. Ennek a koordinátái a Σ_2 síkon $(\underset{0}{v}_1, \underset{0}{v}_2, \underset{0}{v}_3)$. A P_4 pontból vetítve a Σ_2 síkot, a $[v_0, P_4]$ sík koordinátái: $(\underset{0}{v}_1, \underset{0}{v}_2, \underset{0}{v}_3, 0)$.

Jelölje P^* a P_0P_1 egyenes és a $[v_0, P_4]$ sík metszéspontját. Ennek a koordinátái kielégítik a

$$\underset{0}{v}_I\cdot x_I^* = 0$$

egyenletet, melyből a P^* pont inhomogén koordinátája már meghatározható.

A B mátrixot egészítsük ki egy sorral és egy oszloppal a következőképpen:

$$\hat{B}=\begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} & b_{14}\\ 0 & b_{22} & b_{23} & b_{24}\\ 0 & b_{32} & b_{33} & b_{34}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

A $\hat{B}$ és $\hat{B}^T$ ($\hat{B}$ transzponáltja) mátrixokból egy újabb mátrixot készítünk: $A=\frac{1}{2}\hat{B}+\frac{1}{2}\hat{B}^T$, amely egy szimmetrikus mátrix.

Állítjuk, hogy az előbbi P^* pontok az A mátrixhoz tartozó másodrendű felület pontjai. Ehhez azt kell belátnunk, hogy $X^{*T}\cdot A\cdot X^*=0$ teljesül minden P^* pontra. (Az X^* a P^* pont koordinátáiból képzett oszlopmátrix és X^{*T} annak transzponáltja.)

$$X^{*T}\cdot A\cdot X^* = \tfrac{1}{2}X^{*T}\cdot\hat{B}\cdot X^* + \tfrac{1}{2}X^{*T}\cdot\hat{B}^T\cdot X^*$$

$$\hat{B}\cdot X^*=\begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} & b_{14}\\ 0 & b_{22} & b_{23} & b_{24}\\ 0 & b_{32} & b_{33} & b_{34}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\underset{0}{x}_2\\ \lambda_2\underset{0}{x}_3\\ \lambda_2\underset{0}{x}_4\end{pmatrix}=\lambda_2\begin{pmatrix}\underset{0}{v}_1\\ \underset{0}{v}_2\\ \underset{0}{v}_3\\ 0\end{pmatrix}\qquad \text{és}\qquad X^*\cdot\hat{B}^T=\lambda_2\begin{pmatrix}\underset{0}{v}_1 & \underset{0}{v}_2 & \underset{0}{v}_3 & 0\end{pmatrix}$$

Az előbbieket felhasználva és $\underset{0}{v}_I\cdot x_I^*=0$ -t figyelembe véve az $X^{*T}\cdot A\cdot X^*=0$. Ezzel igazoltuk a következő tételt:

Tétel

Két korrelatív nyaláb metszési alakzata nemelfajuló másodrendű felület.

Tétel (Steiner legáltalánosabb tétele a másodrendű felületek előállítására vonatkozóan)

Minden nemelfajuló másodrendű felület korrelatív nyalábok képződménye (metszési alakzata).

Bizonyítás

Tekintsünk egy másodrendű felületet, melyet mátrix alakban adunk meg:

$$X^T\cdot A\cdot X=0,\quad \text{ahol } |A|\neq 0 \text{ és } A=A^T.$$

Válasszuk meg a koordinátarendszert úgy, hogy a felület az (1, 0, 0, 0) és (0, 0, 0, 1) pontokat tartalmazza. Ekkor $a_{11}=0$ és $a_{44}=0$. Ezek után keressünk egy olyan B, 3×3-as, reguláris mátrixot, amelynek az elemei:

$b_{12}=2a_{12}$	$b_{13}=2a_{13}$	$b_{14}=2a_{14}$
$b_{22}=a_{22}$	$b_{33}=a_{33}$	$b_{24}=2a_{24}$
	$b_{23}+b_{32}=2a_{23}$	$b_{34}=2a_{34}$

A B mátrix elemei a b_{23} és b_{32} kivételével az A mátrixból egyértelműen meghatározhatók:

$$B = \begin{pmatrix} 2a_{12} & 2a_{13} & 2a_{14} \\ a_{22} & 2a_{23} - x & 2a_{24} \\ x & a_{33} & 2a_{34} \end{pmatrix}$$

A B mátrixnak regulárisnak kell lennie, azaz $|B| \neq 0$. A B mátrix determinánsának kiszámolásakor egy olyan kifejezést kapunk, amely x-ben másodfokú.

$$|B| = 2(\alpha \cdot x^2 - 2\beta \cdot x - \gamma),$$

ahol $\alpha = a_{14}$, $\beta = \begin{vmatrix} a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{14} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & a_{34} \\ a_{12} & a_{14} \end{vmatrix}$, és $\gamma = \begin{vmatrix} 0 & a_{33} & 2a_{34} \\ a_{22} & 2a_{23} & 2a_{34} \\ a_{12} & a_{13} & a_{14} \end{vmatrix}$.

Meg kell mutatnunk, hogy x válaszható úgy, hogy a $\alpha \cdot x^2 - 2\beta \cdot x - \gamma = 0$ egyenletnek ne legyen a gyöke.

- Ha az egyenlet diszkriminánsa pozitív (azaz $D>0$), akkor az egyenletnek két valós gyöke van. A B mátrix megadásakor az x helyére minden olyan valós szám beírható, amely nem egyezik meg a gyökökkel.
- Ha az egyenlet diszkriminánsa nulla (azaz $D=0$), akkor az egyenletnek egy valós megoldása van. A B mátrix megadásakor az x helyére minden olyan valós szám beírható, amely nem egyezik meg a gyökkel.
- Ha az egyenlet diszkriminánsa negatív ($D<0$), akkor nincs az egyenletnek valós gyöke. Ezért a B mátrix megadásakor az x tetszőleges valós szám lehet.
- Végül azt az esetet is meg kell vizsgálni, amikor minden valós szám gyöke az egyenletnek. Ebben az esetben igazából nincs is másodfokú egyenlet, mert minden együtthatója nulla. $\alpha=0$, $\beta=0$, $\gamma=0$.

  Az $\alpha=0$-ból következik, hogy $a_{14}=0$.

  Ekkor $\beta = \begin{vmatrix} a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & a_{34} \\ a_{12} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{24} \\ a_{13} & a_{34} \end{vmatrix} = 0$.

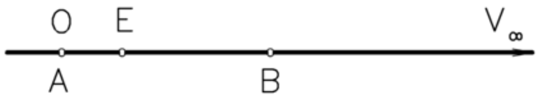
  Az A mátrixra: $|A| = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{24} \\ a_{13} & a_{34} \end{vmatrix}^2$, amely így nullával egyenlő. Ez a feltevésünkkel ellentmondó, ezért ez az eset nem fordulhat elő.

Így létezik olyan x érték, melyre a B mátrix reguláris, azaz az adott felület A mátrixából kiindulva a felülethez tartozó korreláció meghatározható.

Projektív metrika

A projektív síkon való méréssel szemben vannak elvárásaink. Mint ahogy azt az euklideszi síkon tapasztaltuk, a metrikus meghatározások a mozgással szemben invariánsak. Ez alapján a projektív metrika meghatározásainak projektív transzformációval szemben invariánsnak kell lennie. Itt azonnal eszünkbe juthat, hogy a kettős viszony invariánsan viselkedik ezekkel a transzformációkkal szemben, és ezért szerepelhetne a definíciókban. Ezenkívül azt is tudjuk, hogy a projektív síkot az euklideszi sík kibővítéseként nyertük, ezért a projektív metrikának speciális esetként az euklideszi távolság és szög fogalmat tartalmaznia kell.

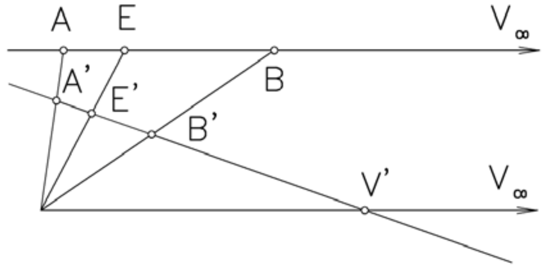
Távolság



Ha az euklideszi számegyenest a projektív síkon kibővítjük a végtelen távoli ponttal, és ha egy P pont koordinátája (x) volt, akkor a $(PEOV_\infty)=x$.
Ha egy AB szakasz projektív értelemben vett hosszára vagyunk kíváncsiak, akkor az AB egyenesen fel kell venni még egy E egységpontot és a V_∞ pontot. Ekkor

$$d(AB):=(BEAV_\infty)$$

az AB szakasz hossza.
Ez a definíció a vetítéssel, mint alapvető projektív transzformációval szemben invariánsan viselkedik, mivel minden projektív transzformáció a kettősviszonyt megtartja.



$$d(AB):=(BEAV_\infty)=(B'E'A'V')=d(A'B')$$

Mielőtt a szög mérésére adnánk definíciót, néhány bevezető tételre van szükségünk.

Tétel

A sík végtelen távoli egyenese minden kört ugyanabban a két képzetes pontban metsz.

Bizonyítás

A kör egyenlete az euklideszi síkon:

$$(x-a)^2+(y-b)^2-r^2=0.$$

Térjünk át homogén koordinátákra:

$$(x_1-a\cdot x_3)^2+(x_2-b\cdot x_3)^2-r^2\cdot x_3^2=0.$$

Metsszük el a kört a végtelen távoli egyenessel, amely azt jelenti, hogy olyan pontot, vagy pontokat keresünk a körön, melyekre $x_3=0$. Ekkor a többi koordinátára

$$x_1^2+x_2^2=0$$

teljesül, amely egyenletnek nem lehetnek triviálistól különböző valós megoldásai. (A 0,0 számpár kielégíti ugyan az egyenletet, de mivel megkívántuk, hogy egy pont mindhárom homogén koordinátája nem lehet egyszerre 0, így mondhatjuk, hogy nincs olyan valós pont, amely megoldása lehet.)

Alakítsuk szorzattá:

$$(x_1+ix_2)(x_1-ix_2)=0.$$

Ennek az egyenletnek a komplex számok körében a megoldását az

$$x_1+ix_2=0$$
$$x_1-ix_2=0$$

egyenletek szolgáltatják. A megoldásként kapott pontok nem valósak, mert a koordináták között komplex szám is van:

$$I_1(1, i, 0) \qquad \text{és} \qquad I_2(1, -i, 0).$$

Definíció

A tétel bizonyítása során kapott $I_1(1, i, 0)$ és $I_2(1, -i, 0)$ pontokat *abszolút képzetes körpontok*nak nevezzük.

Az abszolút jelzőre a következő tétel mutat rá.

Tétel

Minden olyan nemelfajuló másodrendű görbe, amely illeszkedik az abszolút képzetes körpontokra, az euklideszi értelemben vett kör.

Bizonyítás

A nemelfajuló másodrendű görbe egyenlete általános alakban:

$$a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3+a_{33}x_3^2=0.$$

Ha az $I_1(1, i, 0)$-re illeszkedik, akkor

$$a_{11}+2ia_{12}-a_{22}=0.$$

Ha az $I_2(1, -i, 0)$-re illeszkedik, akkor

$$a_{11}-2ia_{12}-a_{22}=0.$$

Az egyenletekből következik, hogy $a_{12}=0$ és $a_{11}=a_{22}$. Ekkor a görbe egyenletében nincsen x_1x_2-t tartalmazó tag (xy-t tartalmazó tag) és az x_1^2 és x_2^2 együtthatója (x^2 és y^2 együtthatója) megegyezik. Tehát a másodrendű görbe kör.

Tétel

Az abszolút képzetes körpontokat a projektív sík bármely pontjával összekötő egyenesek (euklideszi értelemben) merőlegesek egymásra.

Bizonyítás

Az a pont, mellyel a képzetes körpontokat összekötjük, lehet a (0, 0, 1) pont. Ez mindig elérhető egy megfelelő koordináta-transzformációval.

A (0, 0, 1) pontot kössük össze az $I_1(1, i, 0)$ ponttal!

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & i & 0 \end{vmatrix} = 0$$ -ből következik, hogy az egyenes egyenlete: $x_2=i\cdot x_1$, vagyis $y=i\cdot x$.

A (0, 0, 1) pontot kössük össze az $I_1(1, -i, 0)$ ponttal!

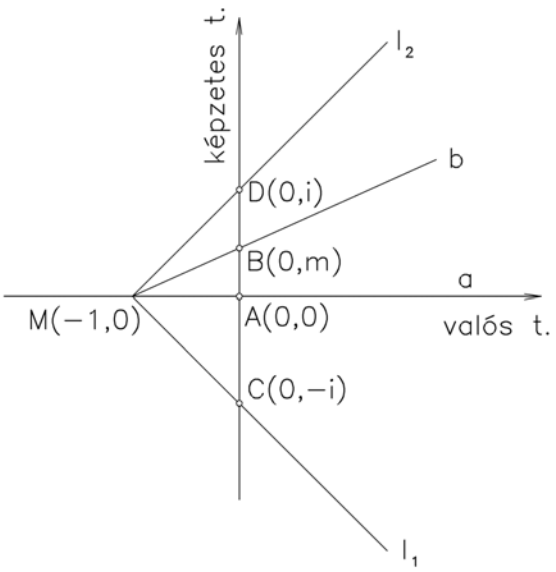
$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -i & 0 \end{vmatrix} = 0$$ -ből következik, hogy az egyenes egyenlete: $x_2=-i\cdot x_1$, vagyis $y=-i\cdot x$.

Az euklideszi síkon két egyenes akkor merőleges egymásra, ha iránytangenseik szorzata 1-gyel egyenlő. Ez most teljesül, azaz a két egyenes egymásra merőleges.

Megjegyzés

Az egyeneseket *minimálegyenesek*nek nevezzük. A jelző abból származik, hogy az egyenes bármely két pontjának euklideszi távolsága nulla.

Szögfogalom



A szög szárai legyenek az a és b egyenesek. Ezekhez egy Gauss-féle komplex számsíkot vezetünk be úgy, hogy a szög csúcsa legyen az M(-1,0) koordinátájú pont, az a egyenes essen a valós tengelyre. A mininálegyeneseket a csúcsponton át vegyük fel. A szög két szára és a két minimálegyenes egy M csúcspontú sugársort ad. Ezt a sugársort a képzetes tengellyel metszve az A(0, 0), B(0, m), C(0, -i), D(0, i) pontokat kapjuk.

$(a\ b\ i_1\ i_2)=(A_\infty B_\infty I_{1\infty} I_{2\infty})=(ABCD)=$

$\dfrac{AC}{BC}:\dfrac{AD}{BD}=\dfrac{-i}{-i-m}\cdot\dfrac{i-m}{i}=\dfrac{i-m}{i+m}.$

Ha az a és b szögét φ-vel jelöljük, akkor $m=\mathrm{tg}\varphi=\dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$, és a helyettesítéssel

$$\frac{i-m}{i+m}=\frac{i-\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}}{i+\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}}=\frac{i\cos\varphi-\sin\varphi}{i\cos\varphi+\sin\varphi}=\frac{\cos\varphi-i\sin\varphi}{\cos\varphi+i\sin\varphi}=\frac{e^{i\varphi}}{e^{-i\varphi}}=e^{2i\varphi}.$$

Ebből φ-t kifejezve:

$$\varphi=\frac{1}{2i}\ln(A_\infty B_\infty I_{1\infty} I_{2\infty}).$$

Ezt a kifejezést *Laguerre-féle szögképlet*nek nevezzük.

Megjegyzés

A szög nem komplex szám, bár a tört nevezőjében ott van a képzetes egység, ugyanis a logaritmus érték is komplex szám lesz.

Merőlegesség projektív meghatározása

Tétel

Minden gömbfelület a végtelen távoli síkot ugyanabban a képzetes körben metszi.

Bizonyítás

A gömb egyenlete homogén koordinátákban $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=0$. A végtelen távoli síkot olyan pontokból áll, melyek negyedik koordinátája $x_4=0$. Ez éppen a végtelen távoli sík egyenlete is. Elmetszve egymással az $x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$ képzetes másodrendű görbét kapjuk.

Definíció

Az előbbi tételben szereplő képzetes kört *abszolút képzetes kör*nek nevezzük

Tétel

Minden olyan nemelfajuló másodrendű felület, amely áthalad az abszolút képzetes körön, az euklideszi értelemben vett gömbfelület.

Bizonyítás

A nemelfajuló másodrendű felület egyenlete általános alakban:

$$a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3+a_{33}x_3^2+2a_{14}x_1x_4+2a_{24}x_2x_4+2a_{34}x_3x_4+a_{44}x_4^2=0.$$

Ha az $I_1(1, i, 0)$ illeszkedik, akkor

$$a_{11}+2ia_{12}-a_{22}=0.$$

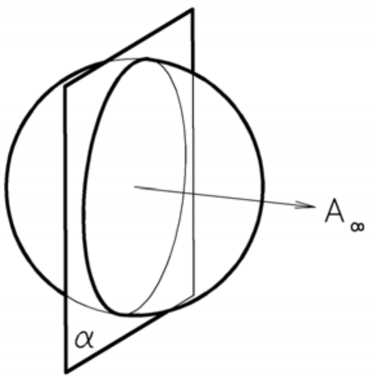
Ha az $I_2(1, -i, 0)$ illeszkedik, akkor

$$a_{11}-2ia_{12}-a_{22}=0.$$

Az egyenletekből következik, hogy $a_{12}=0$ és $a_{11}=a_{22}$. Ekkor a görbe egyenletében nincsen x_1x_2-t tartalmazó tag (xy-t tartalmazó tag) és az x_1^2 és x_2^2 együtthatója (x^2 és y^2 együtthatója) megegyezik. Tehát a másodrendű görbe kör.

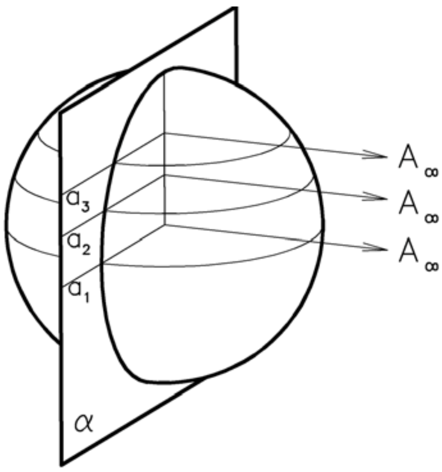
Megjegyzés

Az abszolút képzetes kör a különböző síkállásokhoz tartozó abszolút képzetes körpontokból álló görbe. Ha az abszolút képzetes kör pontjait egy valós ponttal kötjük össze, akkor egy képzetes kúpfelületet ($x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$) kapunk, melyet *minimálkúp*nak nevezünk. A minimálkúp valós reprezentánsa egy 90° nyílásszögű forgáskúp. A minimálkúpot gyakran Laguerre-féle kúpnak is nevezik.



Tekintsünk egy gömböt és egy A_∞ végtelen távoli pontot. Az A_∞ α polársíkja belemetsz a gömbbe és áthalad a gömb középpontján. Kössük össze a gömb O középpontját az A_∞ ponttal! Ez az egyenes euklideszi értelemben merőleges az α síkra. Az $A_\infty O$ egyenes keresztül fektessünk egy síkot, amely az a_1 egyenesben metszi az α síkot. Ebben a síkban A_∞ és a_1 pólus-poláris kapcsolatban vannak a gömbből a sík által kimetszett körre nézve.

Ezt a síkállást megtartva továbbra is érvényes, hogy a síkok által az α síkból kimetszett a_2, a_3,.. egyenesek és az A_∞ pont a megfelelő síkmetszetre nézve poláris-pólus kapcsolatban vannak. Minden ilyen síkban a poláris és az A_∞-be mutató bármely egyenes egymásra merőleges. A most elmondottak akkor is érvényesek, ha a sík képzetes körben metszi a síkot. Mozgassuk addig a síkot, amíg a végtelen távoli sík lesz belőle. Ekkor a gömb síkmetszete az abszolút képzetes kör, az α-ból kimetszett egyenes is végtelen távoli lesz és az A_∞ ponttal pólus poláris kapcsolatban van.



Definíció

Ekkor azt mondhatjuk, hogy egy sík és egy egyenes akkor merőleges egymásra, ha a sík végtelen távoli egyenese és az egyenes végtelen távoli pontja pólus-poláris kapcsolatban van egymással az abszolút képzetes körre nézve.

Hasonló gondolatmenettel kimondható, hogy:

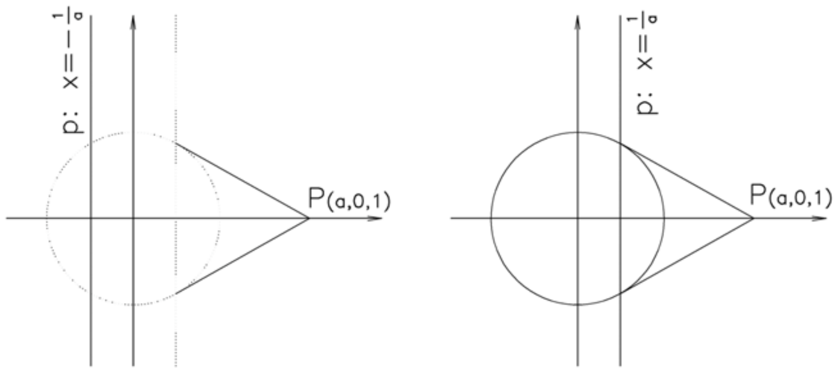
Két sík akkor merőleges egymásra, ha a végtelen távoli egyeneseik konjugáltak az abszolút képzetes körre nézve.

Két egyenes akkor merőleges egymásra, ha a végtelen távoli pontjaik konjugáltak az abszolút képzetes körre nézve.

Megjegyzés

Az utóbbi három mondatot egybe is foglalhatjuk: Két térelem pontosan akkor merőleges egymásra, ha a végtelen távoli elemeik konjugáltak az abszolút képzetes körre nézve.

Végül érdemes megnézni, hogy hogyan viselkedik egy képzetes körre vett pólus-poláris kapcsolat.



Ezért tekintsük a végtelen távoli síkon az $x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$ képzetes kört. A P(a, 0, 1) pont polárisa az $x = -\frac{1}{a}$ egyenes. Most tekintsük azt a valós kört, melynek az egyenlete: $x_1^2+x_2^2-x_3^2=0$. Ezt a kört az előbbi képzetes kör valós reprezentánsának nevezzük. A valós reprezentánsra vett poláris az $x = \frac{1}{a}$. A két poláris egymás tükörképe a körök közös középpontjára nézve.

Egy pontnak a képzetes körre vonatkozó polárisát úgy szerkeszthetjük meg, ha vesszük a képzetes kör valós reprezentánsára vonatkozó polárist, és azt tükrözzük a kör középpontjára.
Valós kör esetén azt az egyenest, amely egy pont polárisának középpontra való tükörképe a pont *antipolárisának* nevezzük.
Egy képzetes körre vett pólus-poláris kapcsolat megegyezik a képzetes kör valós reprezentánsára vett pólus-antipoláris kapcsolattal.