

Matematika Mérnököknek 1.

Baran Ágnes

Gyakorlat Függvények, Matlab alapok

A tananyag elkészítését az EFOP-3.4.3-16-2016-00021 számú projekt támogatta. A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósult meg.

Függvények

1. feladat

Ábrázolja a következő függvényeket!

(a)* $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = (x + 3)^2 - 1,$

(b)* $f : [0, 2\pi] \rightarrow [-1, 1], \quad f(x) = \sin x,$

(c)* $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & \text{ha } x < 0 \\ x^2, & \text{ha } x \geq 0 \end{cases}$$

(d)* $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{ha } x < 0 \\ \sqrt{2x + 1}, & \text{ha } 0 \leq x \leq 4 \\ \frac{x}{2} + 1 & x > 4 \end{cases}$$

2. feladat

Adja meg az $f \circ g$ függvényt, ha

(a)* $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$ és $g(x) = x + 3$,

(b)* $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ és $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 + 3$,

(c) $f : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ és $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$,

(d) $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$ és $g(x) = x^3$.

MATLAB

MATLAB = „Matrix laboratory”

Részletes leírás, help: <http://www.mathworks.com/help/>

Irodalom: Stoyan Gisbert (szerk.), MATLAB, Typotex, 2008

A parancsablakba utasításokat gépelhetünk, pl:

```
>> 3+4
```

```
ans =
```

```
7
```

```
>> 3*1.5
```

```
ans =
```

```
4.5000
```

```
>> cos(0)
```

```
ans =
```

```
1
```

Ha másképp nem rendelkezünk, akkor az eredmény az `ans` nevű változóba kerül.

Használhatunk más változókat is, pl.:

```
>> a=3+4
```

```
a =
```

```
7
```

```
>> a=3; b=4; c=a+b
```

```
c =
```

```
7
```

Ha egy értékadó utasítást pontosvesszővel zárunk le, akkor az értékadás végrehajtódik, de az eredmény nem jelenik meg a parancsablakban. Pl.:

```
>> a=3; b=4; c=a+b;
```

A változó értékét ekkor is megkérdezhetjük, nevének begépelésével:

```
>> c
```

```
c =
```

```
7
```

Változónevek

- Betűvel kell kezdődniük, tartalmazhatnak betűket, számokat, aláhúzást. **Megkülönbözteti a kis- és nagybetűket.** Ne használjunk ékezetes betűket!
- Nem lehetnek változónevek a Matlab kulcsszavai (pl. `if`, `end`, `stb`), az `iskeyword` utasítással felsoroltathatjuk ezeket a kulcsszavakat.
- Figyeljünk rá, hogy ne használjuk változónévként Matlab-függvények neveit (pl. `cos`, `size`, `stb`). Ha nem vagyunk biztosak benne, hogy egy név létezik-e már, akkor az `exist` függvénnyel ellenőrizhetjük (pl. `exist cos`)
- A `clear` utasítással törölhetünk változókat (pl. `clear a,b` törli az `a` és `b` változókat). A `clear all` utasítással minden változó törlődik.

Egy egyszerű ábra

Példa

Rajzoltassuk ki a $(-1, 2)$, $(0, 1)$, $(1, 1.5)$, $(2, 3)$ pontokat a síkon!

1. lépés: Soroljuk fel egy változóban a pontok első koordinátáit!

```
>> x=[-1, 0, 1, 2];
```

(Az értékeket szögletes zárójelek között soroljuk fel, egymástól vesszővel, vagy szóközzel elválasztva.)

2. lépés: Soroljuk fel egy másik változóban a pontok második koordinátáit!

```
>> y=[2, 1, 1.5, 3];
```

(Figyeljünk rá, hogy Matlab-ban “tizedesvessző” helyett “tizedespont” szerepel)

3. lépés: A plot függvény segítségével rajzoltassuk ki a pontokat!

```
>> plot(x,y,'*')
```


M-fájlok

A Matlab futtatható állományai az M-fájlok.

- Nyissunk meg a szerkesztőablakban egy új fájlt:

Kattintsunk a bal felső sarokban a + ikonra, vagy

New → Script

- Írjuk ide a programunkat

```
% kirajzolunk 4 pontot  
x=[-1, 0, 1, 2];  
y=[2, 1, 1.5, 3];  
plot(x,y,'*')
```

A megjegyzéseinket %-jel mögött helyezhetjük el.

Itt is figyeljünk a sorvégi pontosvesszőkre, ha egy értékadó utasítás végén lemarad, akkor annak eredménye futás közben megjelenik a parancsablakban.

M-fájlok

- Mentsük el a fájlt.

Olyan könyvtárba mentsünk, amelyet a Matlab el tud érni. Ezek listáját megkaphatjuk, ha a parancsablakba a `path` utasítást gépeljük, vagy menüből:

HOME → Set Path

A fájl `.m` kiterjesztésű legyen, pl. `rajz.m`

- Futtassuk a programunkat.

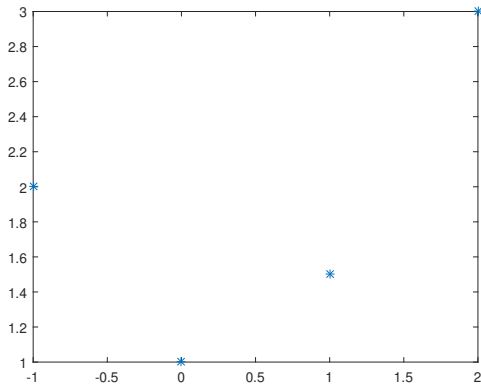
Írjuk be a fájl nevét a parancsablakba kiterjesztés nélkül:

```
>> rajz
```

vagy menüből

EDITOR → Run

```
% kirajzolunk 4 pontot  
x=[-1, 0, 1, 2];  
y=[2, 1, 1.5, 3];  
plot(x,y,'*')
```



Az elkészült programunkat könnyen módosíthatjuk. Pl.

```
% kirajzolunk 4 pontot  
figure  
x=[-1, 0, 1, 2];  
y=[2, 1, 1.5, 3];  
plot(x,y,'*')  
axis([-1.5 2.5 0.5 3.5])
```

A `figure` utasítás hatására egy új grafikus ablak nyílik. Ennek hiányában, ha van megnyitott grafikus ablak, akkor abba készíti el az ábrát, annak korábbi tartalmát felülírva.

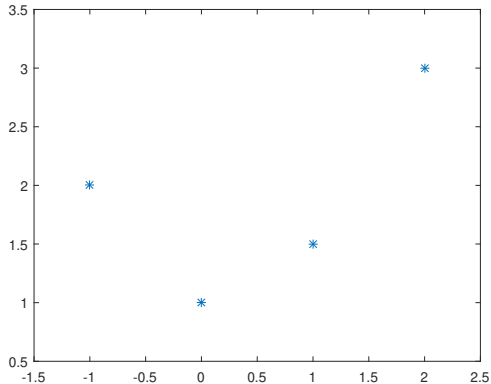
Az `axis` beállítja a tengelyek határait.

A `plot` függvényről (ill. hasonlóan bármely más Matlab-függvényről) a parancsablakba a

```
>> help plot
```

utasítást gépelve tudhatunk meg többet.

```
% kirajzolunk 4 pontot  
figure  
x=[-1, 0, 1, 2];  
y=[2, 1, 1.5, 3];  
plot(x,y,'*')  
axis([-1.5 2.5 0.5 3.5])
```



A plot függvény

- `plot(x,y)`
ábrázolja azokat a síkbeli pontokat, melyeknek első koordinátája az x , második az y változóban szerepel, és összeköti őket.
- `plot(x,y,'szin típus')`
ábrázolja a pontokat, a megadott típusú markerrel, illetve vonaltípussal, a megadott színnel.

Vonaltípusok

- - folyamatos vonal
(alapértelmezés)
- : pontozott vonal
- - - szaggatott vonal
- -. szaggatott-pontozott vonal

A plot függvény

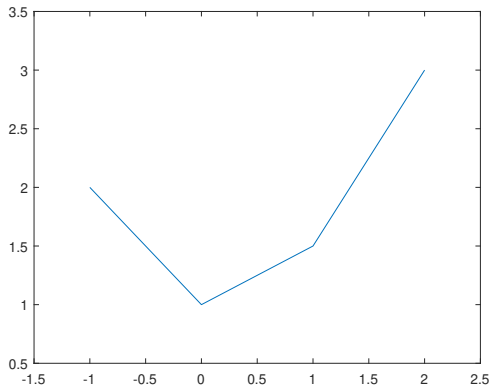
Markerek

- * csillag
- o kör
- + összeadás jel
- x kereszt
- s négyzet
- d rombusz
- p ötszög
- h hatszög
- < balra mutató háromszög
- > jobbra mutató háromszög
- ^ felfele mutató háromszög
- v lefele mutató háromszög

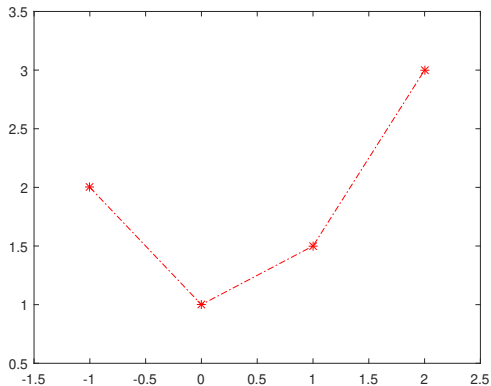
Színek

- b kék
- r piros
- g zöld
- k fekete
- w fehér
- y sárga
- m magenta
- c cián

```
% kirajzolunk 4 pontot  
figure  
x=[-1, 0, 1, 2];  
y=[2, 1, 1.5, 3];  
plot(x,y)  
axis([-1.5 2.5 0.5 3.5])
```




```
% kirajzolunk 4 pontot  
figure  
x=[-1, 0, 1, 2];  
y=[2, 1, 1.5, 3];  
plot(x,y,'-.r*')  
axis([-1.5 2.5 0.5 3.5]))}
```



Függvények ábrázolása

Példa

Rajzoltassuk ki az $f(x) = \sin(x)$ függvényt a $[0, 2\pi]$ intervallumon!

Függvényeket úgy ábrázolhatunk, hogy a függvénygörbe nagyon sok pontját kirajzoltatjuk.

Vegyünk a $[0, 2\pi]$ intervallumon sok pontot, pl:

```
>> x=linspace(0,2*pi,50);
```

vagy

```
>> x=linspace(0,2*pi);
```

Az első esetben 50, a másodikban 100 egyforma lépcsőközű pontot kapunk a $[0, 2\pi]$ intervallumon.

Függvények ábrázolása

Általában:

```
x=linspace(elsoelem,utolsoelem,elemekszama)
```

ahol az elemek egyforma lépésközzel követik egymást, vagy

```
x=linspace(elsoelem,utolsoelem)
```

ekkor az elemek száma 100.

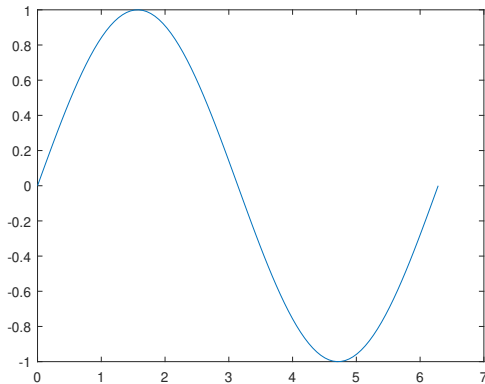
Minden pontban számítsuk ki a függvény értékét és rajzoltassuk ki a pontokat!

```
>> y=sin(x);
```

```
>> plot(x,y)
```

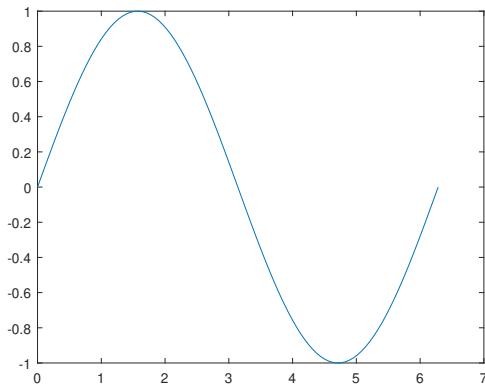
A legtöbb Matlab-függvény vektor-argumentummal is hívható. Ebben az esetben az x minden egyes elemének kiszámolja a szinuszt, ezek kerülnek az y -ba. x és y ugyanannyi elemet tartalmaz.

```
x=linspace(0,2*pi);  
y=sin(x);  
figure; plot(x,y)
```



Az fplot függvény

```
figure;  
fplot('sin',[0,2*pi])
```



Példa

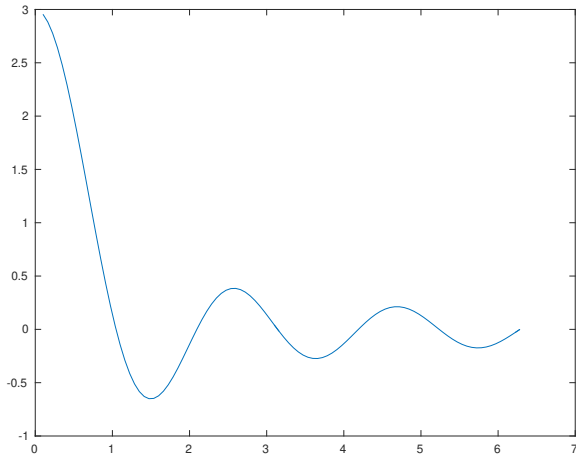
Rajzoltassuk ki az $f(x) = \frac{\sin(3x)}{x}$ függvényt a $[0.1, 2\pi]$ intervallumon!

```
x=linspace(0.1,2*pi);  
y=sin(3*x)./x;  
figure; plot(x,y)
```

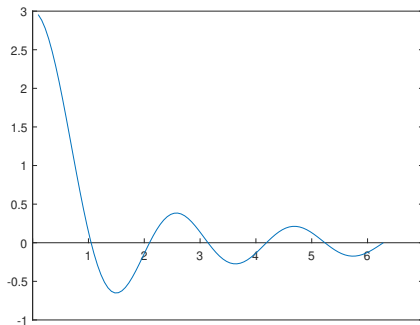
Ha a és b két ugyanolyan méretű vektor, akkor

- $a+b$ a koordinátánkénti összegük
- $3*a$ az a vektort koordinátánként szorozza 3-mal
- $a.*b$ a koordinátánkénti szorzatuk
- $a./b$ a koordinátánkénti hányadosuk
- $a.^2$ koordinátánként négyzetre emeli

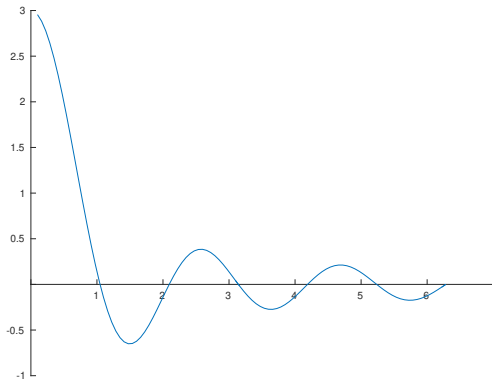
```
x=linspace(0.1,2*pi);  
y=sin(3*x)./x;  
figure; plot(x,y)
```



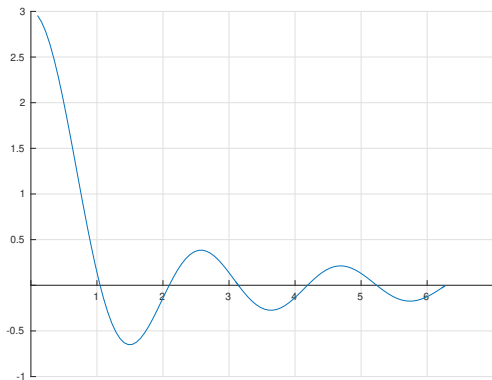
```
x=linspace(0.1,2*pi);  
y=sin(3*x)./x;  
figure; plot(x,y)  
ax=gca;  
ax.XAxisLocation = 'origin';  
ax.YAxisLocation = 'origin';
```



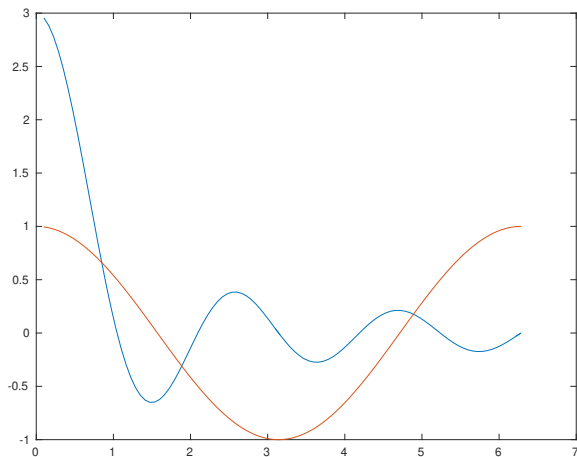

```
x=linspace(0.1,2*pi);  
y=sin(3*x)./x;  
figure; plot(x,y)  
ax=gca;  
ax.XAxisLocation = 'origin';  
ax.YAxisLocation = 'origin';  
box off
```



```
x=linspace(0.1,2*pi);  
y=sin(3*x)./x;  
figure; plot(x,y)  
ax=gca;  
ax.XAxisLocation = 'origin';  
ax.YAxisLocation = 'origin';  
box off; grid on
```



Több függvény egy ábrán



Több függvény egy ábrán

```
x=linspace(0.1,2*pi);  
y=sin(3*x)./x;  
z=cos(x);  
figure; plot(x,y,x,z)
```

vagy

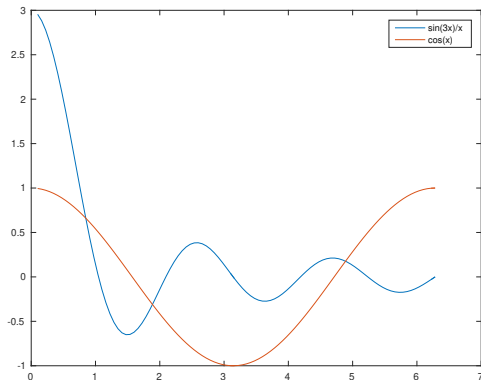
```
x=linspace(0.1,2*pi);  
y=sin(3*x)./x;  
z=cos(x);  
figure; plot(x,y)  
hold on;  
plot(x,z)  
hold off;
```

- hold on

bekapcsolja a „rárajzoló” üzemmódot: az aktuális figure-ablakba rajzol, az ottani eredeti ábra meghagyásával

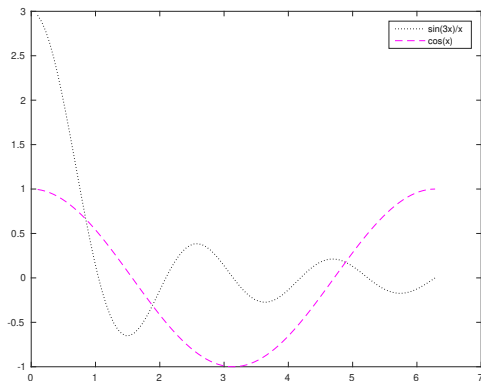
Több függvény egy ábrán, legend box

```
x=linspace(0.1,2*pi);  
y=sin(3*x)./x;  
z=cos(x);  
figure; plot(x,y,x,z)  
legend('sin(3x)/x','cos(x)')
```



Vonaltípus és szín megadása

```
x=linspace(0.1,2*pi);  
y=sin(3*x)./x;  
z=cos(x);  
figure; plot(x,y,'k:',x,z,'m--')  
legend('sin(3x)/x','cos(x)')
```



3. feladat

Ábrázolja az f függvényt az T intervallumon, és jellemezze a függvényt!

- (a) $f(x) = x^2$ és $T = [-3, 3]$
- (b*) $f(x) = (x - 2)^2 + 3$ és $T = [-3, 5]$
- (c) $f(x) = x^3$ és $T = [-2, 2]$
- (d*) $f(x) = (x - 1)^3 + 2$ és $T = [-2, 4]$
- (e) $f(x) = \sin(x)$ és $T = [0, 2\pi]$
- (f) $f(x) = \cos(x)$ és $T = [0, 2\pi]$
- (g) $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ és $T = [0, 2\pi]$
- (h*) $f(x) = \sin(3x)$ és $T = [0, 2\pi]$
- (i*) $f(x) = 3 \sin(x)$ és $T = [0, 2\pi]$
- (j) $f(x) = \operatorname{tg}(x)$ és $T = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
- (k) $f(x) = \operatorname{ctg}(x)$ és $T = [0, \pi]$

4. feladat

Ábrázolja az f függvényt az T intervallumon, és jellemezze a függvényt!

(a*) $f(x) = e^x$ és $T = [-2, 5]$

(b*) $f(x) = e^{-x}$ és $T = [-2, 5]$

(c) $f(x) = \ln(x)$ és $T = (0, 5]$

(d) $f(x) = 2^x$ és $T = [-2, 4]$

(e) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ és $T = [-2, 4]$

(f) $f(x) = \arcsin(x)$ és $T = [-1, 1]$

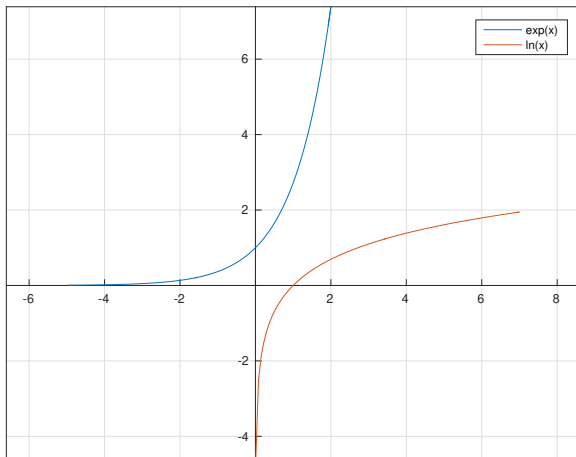
(g) $f(x) = \arccos(x)$ és $T = [-1, 1]$

Példa

Ábrázoljuk az $f(x) = e^x$ és $g(x) = \ln(x)$ függvényeket egy ábrán!

```
x1=linspace(-5,2); y1=exp(x1);  
x2=linspace(0.01,7); y2=log(x2);  
figure; plot(x1,y1,x2,y2);  
ax=gca;  
ax.XAxisLocation = 'origin';  
ax.YAxisLocation = 'origin';  
axis equal; grid on;  
legend('exp(x)', 'ln(x)')
```

`axis equal` : minden tengelyen ugyanolyan hosszú legyen az egység



5. feladat

Ábrázolja az f és g függvényeket egy ábrán!

(a) $f(x) = e^x$, $g(x) = \ln(x)$,

(b) $f(x) = e^x$, $g(x) = e^{-x}$,

(c) $f(x) = \ln(x)$, $g(x) = \log_{10}(x)$,

(d) $f(x) = \arcsin(x)$, $g(x) = \arccos(x)$,

(e) $f(x) = \sin(x)$, $g(x) = \arcsin(x)$,