Kalkulus

INBPM0207G **Első zárthelyi dolgozat** **2023. január 31.**

Név, Neptun-kód: ....

Gselmann Eszter	
Kiss Tibor	
Nagy Gergő	
Muzsnay Anna	
Tóth Mariann	
Tóth Norbert	
Tóth Péter	

Kérem, hogy tegyen X-et a gyakorlatvezetője neve mellé.

Igaz-hamis kérdések[1]

1. Van legalább egy szigorúan monoton csökkenő valós számsorozat.

   Megoldás. Igaz. Például az
   $$x_n = \frac{1}{n} \qquad (n \in \mathbb{N})$$
   módon megadott sorozat ilyen. □

2. Van olyan valós számsorozat, amelynek minden részsorozata monoton csökkenő.

   Megoldás. Igaz. Például az
   $$x_n = \frac{1}{n} \qquad (n \in \mathbb{N})$$
   módon megadott sorozat ilyen. □

3. Van legalább egy konvergens valós számsorozat.

   Megoldás. Igaz. Például az
   $$x_n = \frac{1}{n} \qquad (n \in \mathbb{N})$$
   módon megadott sorozat ilyen. □

4. Van legalább nyolcvannégy divergens valós számsorozat.

   Megoldás. Igaz. Minden $i = 1, \ldots, 84$ esetén az
   $$x_{i,n} = i(-1)^n \qquad (n \in \mathbb{N})$$
   sorozatok ilyenek. □

5. Ha az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatok nullsorozatok, akkor az $(x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat is az.

   Megoldás. Igaz. Ez a konvergencia és műveletek kapcsolatáról szóló tétel egyik következménye. □

[1] A zárthelyi dolgozatban az igaz-hamis kérdések esetében nem szükséges indoklást írni.

6. Ha az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatok nullsorozatok, akkor az $\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat is az.

   Megoldás. Hamis. Legyenek

$$x_n = \frac{1}{n} \qquad \text{és} \qquad y_n = \frac{1}{n^2} \qquad (n \in \mathbb{N})\,.$$

   Ekkor

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \qquad \text{és} \qquad \lim_{n\to\infty} y_n = 0,$$

   azonban

$$\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = n \xrightarrow{n\to\infty} +\infty.$$

$\square$

7. Vannak olyan divergens $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatok, hogy az $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens.

   Megoldás. Igaz. Legyenek

$$x_n = (-1)^n \qquad y_n = (-1)^{n+1} = -(-1)^n \qquad (n \in \mathbb{N})\,.$$

   Ekkor az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és az $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat is divergens, azonban

$$x_n + y_n = (-1)^n + (-1)^{n+1} = (-1)^n + (-(-1)^n) = (-1)^n - (-1)^n = 0 \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

$\square$

8. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0.$

   Megoldás. Igaz. $\square$

9. $\lim_{n\to\infty}(8n^3 + 7n^2 - 3n + 2) = -\infty.$

   Megoldás. Hamis. $\lim_{n\to\infty}(8n^3 + 7n^2 - 3n + 2) = +\infty$ $\square$

10. Van olyan $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, melynek pontosan harminchárom szakadási helye van.

    Megoldás. Igaz. Tekintsük az

$$f(x) = \operatorname{sign}((x-1)(x-2)\cdots(x-33)) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

    módon megadott $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt, melynek éppen az $x_i = i$, $i = 1, \ldots, 33$ pontokban van szakadási helye.

$\square$

11. $\lim_{x\to-\infty} 2x^3 + 8x^2 - 3 = +\infty.$

    Megoldás. Hamis. $\lim_{x\to-\infty} 2x^3 + 8x^2 - 3 = -\infty.$ $\square$

12. Ha az $f\colon\,]a,b[\to \mathbb{R}$ függvény folytonos az $x_0 \in]a,b[$ pontban, akkor az f függvény differenciálható is ebben a pontban.

Megoldás. Hamis. Az

$$f(x) = |x - x_0| \qquad (x \in]a, b[)$$

módon megadott $f\colon]a, b[\to \mathbb{R}$ módon megadott függvény az $]a, b[$ intervallum minden pontjában folytonos, azonban az $x_0 \in]a, b[$ pontban nem differenciálható. □

13. Az exponenciális függvényre $\exp(1) = 0$ teljesül.

Megoldás. Hamis. $\exp(1) = e$. □

14. Ha $f(x) = \sqrt{1 - x}$, akkor $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{1 - x}}$.

Megoldás. Hamis. Ha $f(x) = \sqrt{1 - x}$, akkor $f'(x) = -\dfrac{1}{2\sqrt{1 - x}}$. □

15. Ha $f(x) = \sin(x)$ $(x \in \mathbb{R})$, akkor $f'(x) = -\cos(x)$ $(x \in \mathbb{R})$.

Megoldás. Hamis. Ha $f(x) = \sin(x)$ $(x \in \mathbb{R})$, akkor $f'(x) = \cos(x)$ $(x \in \mathbb{R})$. □

Kérdés	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
Válasz	I	I	I	I	I	H	I	I	H	I	H	H	H	H	H

Helyes válasz 1 pont, helytelen válasz -1 pont, üresen hagyott mező 0 pont. Ez a pontozási módszer bünteti a tippelést. Kérem, hogy a saját érdekében ne tippeljen.

Feladatok

1. Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét.

(a)

$$x_n = \frac{n^3 + 25n^2 + 3n + 2}{2n^3 - 17n^2 + 9n - 6} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Megoldás.

$$\frac{n^3 + 25n^2 + 3n + 2}{2n^3 - 17n^2 + 9n - 6} = \frac{n^3}{n^3} \cdot \frac{1 + 25\frac{1}{n} + 3\frac{1}{n^2} + 2\frac{1}{n^3}}{2 - 17\frac{1}{n} + 9\frac{1}{n^2} - 6\frac{1}{n^3}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2},$$

hiszen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} = 0 \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0 \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

□

(b)

$$x_n = \sqrt{n^2 + 3n + 2} - \sqrt{n^2 + n - 1} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Megoldás.

$$\begin{aligned}
\sqrt{n^2 + 3n + 2} - \sqrt{n^2 + n - 1} &= \left(\sqrt{n^2 + 3n + 2} - \sqrt{n^2 + n - 1}\right) \cdot \frac{\sqrt{n^2 + 3n + 2} + \sqrt{n^2 + n - 1}}{\sqrt{n^2 + 3n + 2} + \sqrt{n^2 + n - 1}} \\
&= \frac{(n^2 + 3n + 2) - (n^2 + n - 1)}{\sqrt{n^2 + 3n + 2} + \sqrt{n^2 + n - 1}} = \frac{2n + 3}{\sqrt{n^2 + 3n + 2} + \sqrt{n^2 + n - 1}} \\
&= \frac{n}{n} \cdot \frac{2 + 3\frac{1}{n}}{\sqrt{1 + 3\frac{1}{n} + 2\frac{1}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{2}{2} = 1.
\end{aligned}$$

□

(c)

$$x_n = \frac{2n^2 + 2\sin(n) + 1}{n^3 + 3\cos(n) + 5} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Megoldás. Mivel tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$-1 \leq \sin(x) \leq 1 \qquad \text{és} \qquad -1 \leq \cos(x) \leq 1$$

teljesül, ezért minden $n \in \mathbb{N}$ esetén is fennállnak az

$$-2 \leq 2\sin(n) \leq 2 \qquad -3 \leq 3\cos(n) \leq 3$$

egyenlőtlenségek.

Így,

$$\frac{2n^2-1}{n^3+8} = \frac{2n^2-2+1}{n^3+3+5} \leq \frac{2n^2+2\sin(n)+1}{n^3+3\cos(n)+5} \leq \frac{2n^2+2+1}{n^3-3+5} = \frac{2n^2+3}{n^3+2}$$

teljesül minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. Mivel

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2-1}{n^3+8} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+3}{n^3+2} = 0,$$

ezért a Rendőr-elv miatt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+2\sin(n)+1}{n^3+3\cos(n)+5} = 0.$$

□

(d)

$$x_n = \left(\frac{n+4}{n+1}\right)^{n+2} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Megoldás.

$$\left(\frac{n+4}{n+1}\right)^{n+2} = \left(\frac{(n+1)+3}{n+1}\right)^{n+2} = \left(1+\frac{3}{n+1}\right)^{n+2} = \left(1+\frac{1}{\frac{n+1}{3}}\right)^{n+2}$$

$$= \left(1+\frac{1}{\frac{n+1}{3}}\right)^{n+1} \cdot \left(1+\frac{1}{\frac{n+1}{3}}\right)^{1} = \left[\left(1+\frac{1}{\frac{n+1}{3}}\right)^{\frac{n+1}{3}}\right]^3 \cdot \left(1+\frac{1}{\frac{n+1}{3}}\right)^{1} \xrightarrow{n\to\infty} e^3 \cdot 1 = e^3,$$

hiszen

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{\frac{n+1}{3}}\right)^{\frac{n+1}{3}} = e \qquad \text{és} \qquad \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{\frac{n+1}{3}}\right)^{1} = 1.$$

□

(e)

$$x_n = \frac{5\cdot 3^n + 4\cdot 5^n + 9\cdot 2^n}{7\cdot 2^n - 9\cdot 5^n + 2\cdot 3^n} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Megoldás.

$$\frac{5\cdot 3^n + 4\cdot 5^n + 9\cdot 2^n}{7\cdot 2^n - 9\cdot 5^n + 2\cdot 3^n} = \frac{5^n}{5^n} \cdot \frac{5\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^n + 4 + 9\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^n}{7\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^n - 9 + 2\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^n} \xrightarrow{n\to\infty} -\frac{4}{9},$$

mert

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n = 0 \qquad \text{és} \qquad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n = 0$$

□

(5 – 5 pont)

2. Döntse el, hogy konvergens-e a
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3^n}$$
sor.

Megoldás. A Cauchy féle-gyökkritérium szerint,

- ha $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|} < 1$, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ sor abszolút konvergens.
- ha $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|} > 1$, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ sor divergens.

Ebben az esetben,
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2n}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{2} \cdot \sqrt[n]{n}}{3} = \frac{1}{3} < 1,$$
hiszen
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1 \qquad \text{és} \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$
Mivel
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2n}{3^n}} < 1,$$
ezért a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3^n}$ sor abszolút konvergens. □

(5 pont)

3. Számítsa ki a
$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 3}$$
határértéket.

Megoldás. **(Gyöktényezős alakra hozással)** Mivel
$$x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1) \qquad \text{és} \qquad x^2 - 4x + 3 = (x-3)(x-1),$$
ezért
$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-2)(x-1)}{(x-3)(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x-2}{x-3} = \frac{1}{2},$$
hiszen
$$\lim_{x\to 1}(x-2) = -1 \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to 1}(x-3) = -2.$$
□

Megoldás. **(L'Hospital-szabállyal)** Mivel,
$$\lim_{x\to 1}(x^2 - 3x + 2) = 0 \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to 1}(x^2 - 4x + 3) = 0,$$
ezért a feladatban megadott határértékre teljesülnek a L'Hospital-szabály feltételei. Ekkor
$$\lim_{x\to 1} \frac{[x^2 - 3x + 2]'}{[x^2 - 4x + 3]'} = \lim_{x\to 1} \frac{2x-3}{2x-4} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}.$$

Mivel a $\lim_{x\to 1} \dfrac{[x^2-3x+2]'}{[x^2-4x+3]'}$ határérték létezik és véges, ezért a $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$ határérték is létezik és véges, és a két határérték megegyezik. Így a L'Hospital-szabály alkalmazásával azt kapjuk, hogy a feladatban szereplő határérték létezik és

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3} = \frac{1}{2}.$$

□

(5 pont)

4. Számítsa ki az alábbi függvények differenciálhányadosfüggvényeit.

(a)

$$f(x) = 12x^{12} + 3\sin(x) - 5\cos(x) + 10e^x + 28\ln(x) - 2$$

Megoldás.

$$f'(x) = 12 \cdot 12x^{11} + 3\cos(x) + 5\sin(x) + 10e^x + \frac{28}{x}.$$

□

(b)

$$f(x) = \left(1 - 2x + \frac{1}{x^3}\right)\left(\sqrt[3]{x} - \frac{2}{\sqrt{x}}\right)$$

Megoldás. Legyenek

$$f_1(x) = 1 - 2x + \frac{1}{x^3} \quad \text{és} \quad f_2(x) = \sqrt[3]{x} - \frac{2}{\sqrt{x}}.$$

Ekkor

$$f_1'(x) = -2 - 3\frac{1}{x^4} \quad \text{és} \quad f_2'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} - 2\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}}.$$

Ezért

$$f'(x) = f_1'(x) \cdot f_2(x) + f_1(x) \cdot f_2'(x) = \left(-2 - 3\frac{1}{x^4}\right)\left(\sqrt[3]{x} - \frac{2}{\sqrt{x}}\right) + \left(1 - 2x + \frac{1}{x^3}\right)\left(\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} - 2\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}}\right).$$

□

(c)

$$f(x) = \frac{\sin(x) - x\cos(x)}{\sinh(x) - x\cosh(x)}$$

Megoldás. Legyen

$$f_1(x) = \sin(x) - x\cos(x)$$

és

$$f_2(x) = \sinh(x) - x\cosh(x).$$

Ekkor

$$f(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)},$$

és

$$f_1'(x) = \cos(x) - \cos(x) + x\sin(x) = x\sin(x),$$

illetve,

$$f_2'(x) = \cosh(x) - \cosh(x) - x\sinh(x) = -x\sinh(x).$$

Így a hányados differenciálási szabályát alkalmazva,

$$f'(x) = \frac{f_1'(x)f_2(x) - f_1(x)f_2'(x)}{f_2^2(x)} = \frac{x\sin(x)\left(\sinh(x) - x\cosh(x)\right) - \left(\sin(x) - x\cos(x)\right)\left(-x\sinh(x)\right)}{\left(\sinh(x) - x\cosh(x)\right)^2}$$

□

(d)

$$f(x) = \ln\left(\frac{\sqrt{2x+1}}{\sin^2(x)}\right)$$

Megoldás. A logaritmus függvény addíciós tételét alkalmazva,

$$\ln\left(\frac{\sqrt{2x+1}}{\sin^2(x)}\right) = \frac{1}{2}\ln(2x+1) - 2\ln\left(\sin(x)\right),$$

ezért

$$f'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{2x+1}\cdot 2 - 2\frac{1}{\sin(x)}\cdot\cos(x) = \frac{1}{2x+1} - \frac{2\cos(x)}{\sin(x)}.$$

Itt még felhasználtuk azt is, hogy ha $]a,b[\subset \mathbb{R}$ és $g\colon\,]a,b[\to \mathbb{R}$ egy pozitív és differenciálható függvény, akkor az $\ln\circ g$ függvény is differenciálható és

$$\left(\ln\circ g\right)'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)} \qquad (x\in]a,b[)\,.$$

□

(5 – 5 pont)

A dolgozatban összesen 15 + 55 = 70 pont szerezhető. A dolgozat **legalább** 42 **pont** megszerzése esetén tekinthető sikeresnek.