Az informatika logikai alapjai
7. feladatsor

Klasszikus elsőrendű nyelv - definíció

Klasszikus elsőrendű nyelven az $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ rendezett ötöst értjük, ahol

- $LC = \{\neg, \supset, \wedge, \vee, \equiv, =, \forall, \exists, (,)\}$ (a nyelv logikai konstansainak halmaza).
- $Var = \{x_n | n = 0, 1, 2, \ldots\}$ a nyelv változóinak megszámlálhatóan végtelen halmaza.
- $Con = \bigcup_{n=0}^{\infty} (\mathcal{F}(n) \cup \mathcal{P}(n))$ a nyelv nemlogikai konstansainak legfeljebb megszámlálhatóan végtelen halmaza.
  - $\mathcal{F}(0)$ a névparaméterek (névkonstansok),
  - $\mathcal{F}(n)$ az n argumentumú ($n = 1, 2, \ldots$) függvényjelek (műveleti jelek),
  - $\mathcal{P}(0)$ az állításparaméterek (állításkonstansok),
  - $\mathcal{P}(n)$ az n argumentumú ($n = 1, 2, \ldots$) predikátumparaméterek (predikátumkonstansok) halmaza.

Elsőrendű nyelv, V.M. 2.b.2/e

$\mathcal{F}(0) = \{$ Péter, én $\}$

$\mathcal{F}(1) = \{$ édesanyja (–) $\}$

$\mathcal{P}(0) = \{$ havazik $\}$

$\mathcal{P}(1) = \{$ piros (–) $\}$

$\mathcal{P}(2) = \{$ munkatársak (–, –) $\}$

$\underbrace{\text{Péter édesanyja}}_{\text{édesanyja(Péter)}}$ $\underbrace{\text{édesanyám}}_{\text{édesanyja(én)}}$ munkatársa.

munkatársak(édesanyja(Péter), édesanyja(én))

Elsőrendű nyelv, V.M. 2.0.2/e

$\mathcal{F}(0) = \{\boxed{\text{Péter, én}}\}$

$\mathcal{F}(1) = \{\text{édesanyja}(-)\}$

$\mathcal{P}(0) = \{\text{havazik}\}$

$\mathcal{P}(1) = \{\text{piros}(-)\}$

$\mathcal{P}(2) = \{\text{munkatársak}(-,-)\}$

Péter édesanyja

édesanyja(Péter)

édesanyám munkatársa.

édesanyja(én)

munkatársak(édesanyja(Péter), édesanyja(én))

Klasszikus elsőrendű nyelv - definíció folytatása

- Az LC, Var, $\mathcal{F}(n)$, $\mathcal{P}(n)$ halmazok ($n = 0, 1, 2, \ldots$) páronként diszjunktak.
- A nyelv **terminusainak** a halmazát, azaz a Term halmazt az alábbi induktív definíció adja meg:
  - $Var \cup \mathcal{F}(0) \subseteq Term$
  - Ha $f \in \mathcal{F}(n)$, $(n=1, 2, \ldots)$, és $t_1, t_2, \ldots, t_n \in Term$, akkor $f(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in Term$
- A nyelv **formuláinak** a halmazát, azaz a Form halmazt az alábbi induktív definíció adja meg:
  - $\mathcal{P}(0) \subseteq Form$
  - Ha $t_1, t_2 \in Term$, akkor $(t_1 = t_2) \in Form$
  - Ha $P \in \mathcal{P}(n)$, $(n=1, 2, \ldots)$, és $t_1, t_2, \ldots, t_n \in Term$, akkor $P(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in Form$.
  - Ha $A \in Form$, akkor $\neg A \in Form$.
  - Ha $A, B \in Form$, akkor $(A \supset B)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \equiv B) \in Form$.
  - Ha $x \in Var$, $A \in Form$, akkor $\forall x A$, $\exists x A \in Form$.

Terminusok: ← „nevek"

– névkonstansok

– nevekből nevet képző függvények

elsőrendű nyelv, V.M. 2.b.2/e

$\mathcal{F}(0) = \{$ Péter, én $\}$

$\mathcal{F}(1) = \{$ édesanyja (–) $\}$

$\mathcal{P}(0) = \{$ $\boxed{\text{havazik}}$ $\}$

$\mathcal{P}(1) = \{$ piros (–) $\}$

$\mathcal{P}(2) = \{$ munkatársak (–, –) $\}$

Péter édesanyja édesanyám munkatársa.

édesanyja (Péter)   édesanyja (én)

$\boxed{\text{munkatársak(édesanyja(Péter), édesanyja(én))}}$

Klasszikus elsőrendű nyelv - definíció folytatása

- Az LC, Var, $\mathcal{F}(n)$, $\mathcal{P}(n)$ halmazok (n = 0, 1, 2, . . .) páronként diszjunktak.
- A nyelv **terminusainak** a halmazát, azaz a Term halmazt az alábbi induktív definíció adja meg:
  - Var$\cup\mathcal{F}(0)\subseteq$Term
  - Ha $f\in\mathcal{F}(n)$, (n=1, 2, ...), és $t_1, t_2, \ldots, t_n\in$Term, akkor $f(t_1,t_2, \ldots, t_n)\in$Term.
- A nyelv **formuláinak** a halmazát, azaz a Form halmazt az alábbi induktív definíció adja meg:
  - $\boxed{\mathcal{P}(0)\subseteq\text{Form}}$
  - Ha $t_1, t_2\in$Term, akkor $(t_1=t_2)\in$Form
  - $\boxed{\text{Ha } P\in\mathcal{P}(n), (n=1, 2, \ldots), \text{ és } t_1, t_2, \ldots, t_n\in\text{Term, akkor } P(t_1,t_2, \ldots, t_n)\in\text{Form.}}$
  - Ha A$\in$Form, akkor $\neg$A$\in$Form.
  - Ha A, B$\in$Form, akkor (A$\supset$B), (A$\wedge$B), (A$\vee$B), (A$\equiv$B)$\in$Form.
  - Ha x$\in$Var, A$\in$Form, akkor $\forall$xA, $\exists$xA$\in$Form.

Formulák ← „állítások”

- állításkonstansok
- akárhány argumentumú predikátum-jelek, melyekbe terminusokat helyettesítünk

- az egyenlőség, mint speciális predikátum
- az eddigieket logikai összekötő jelekkel kombinálhatjuk, és
- az eddigieket kvantálhatjuk:
  - Ha x változó ($x \in Var$) és A formula, akkor
    - $\forall x\ A$
    - $\exists x\ A$

    is formula

Részformula definíciója – elsőrendű nyelvben

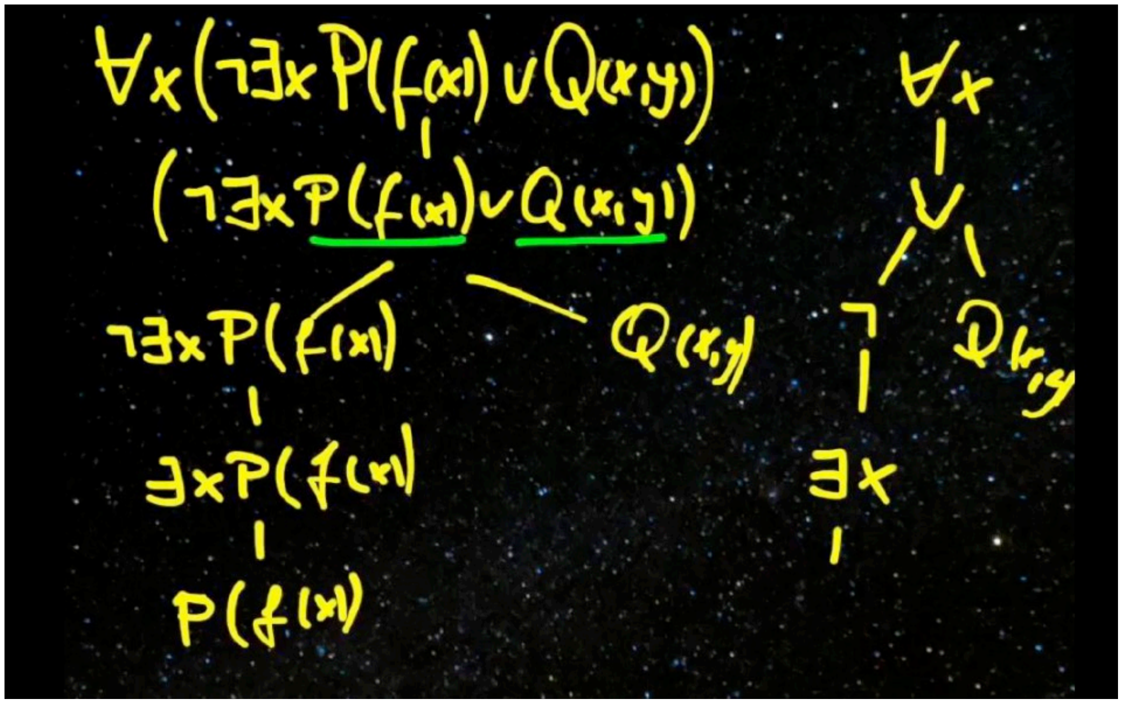
Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy tetszőleges elsőrendű nyelv, $A \in Form$ pedig a nyelv tetszőleges formulája. Az A formula **részformuláinak** halmaza az a legszűkebb halmaz [jelölés: RF(A)], amelyre teljesül, hogy

- $A \in RF(A)$, azaz az A formula részformulája önmagának;
- ha $\neg B \in RF(A)$, akkor $B \in RF(A)$;
- ha $(B \supset C) \in RF(A)$, akkor $B, C \in RF(A)$;
- ha $(B \wedge C) \in RF(A)$, akkor $B, C \in RF(A)$;
- ha $(B \vee C) \in RF(A)$, akkor $B, C \in RF(A)$;
- ha $(B \equiv C) \in RF(A)$, akkor $B, C \in RF(A)$;
- ha $\forall x B \in RF(A)$, akkor $B \in RF(A)$;
- ha $\exists x B \in RF(A)$, akkor $B \in RF(A)$.

Zárójel-elhagyási konvenciók

Az elsőrendű logikában alkalmazott zárójel-elhagyási konvenciók a nulladrendű logikában alkalmazott zárójel-elhagyási konvenciók kibővítése a következő szabályokkal:

- a kvantorok erősebbek bármely állításlogikai műveletnél,
- az univerzális és az egzisztenciális kvantor egyenrangú (azaz erősségben egyik sem előzi meg a másikat).


∀x(¬∃xP(f(x))∨Q(x,y))
(¬∃xP(f(x))∨Q(x,y))
¬∃xP(f(x))
Q(x,y)
∃xP(f(x))
P(f(x))
∀x
∨
¬
Q(x,y)
∃x

1.P.10. Az alábbi formulák közül melyek részformulái a

$$\exists z(\forall x P(x,z) \supset \exists z \forall x P(x,z) \vee \exists z P(x,z))$$

formulának?

(a) $\forall x P(x,z)$

(b) $\forall x P(x,z) \supset \exists z \forall x P(x,z)$

(c) $\exists z \forall x P(x,z) \vee \exists z P(x,z)$

(d) $\exists z P(x,z)$

(e) $\forall x P(x,z) \supset \exists z P(x,z)$

(f) $P(x,z) \vee \exists z P(x,z)$

(g) $P(x,z) \supset \exists z \forall x P(x,z) \vee \exists z P(x,z)$

- Rajzoljuk meg a fenti formula szerkezeti fáját is.

1.P.8. Hagyjuk el az alábbi teljesen zárójelezett formulákból az elhagyható zárójelpárokat!

(a) $\neg(\forall x P(x) \supset (\exists x Q(x,y) \wedge R(x,x)))$

(b) $\exists z(\forall x P(x,z) \supset (\exists z \forall x P(x,z) \vee \exists x P(x,z)))$

(c) $(\forall x Q(x,y) \supset (\forall x(Q(x,y) \supset R(x)) \wedge Q(x,y)))$

(d) $(\exists z(\forall x P(x) \supset Q(z)) \equiv R(x))$

(e) $(\exists y \forall x(P(x) \vee Q(y)) \equiv (Q(y) \supset P(x)))$

- Rajzoljuk meg a formulák szerkezeti fáját is.

Szabad változók halmaza

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy elsőrendű nyelv, és $A \in Form$ egy formula. Az A formula szabad változóinak FreeVar(A)-val jelölt halmazát az alábbi induktív definíció adja meg:

- Ha A atomi formula (azaz $A \in AtForm$), akkor a FreeVar(A) halmaz elemei az A formulában előforduló változók.
- Ha az A formula $\neg B$ alakú, akkor FreeVar(A)=FreeVar(B).
- Ha az A formula $(B \supset C)$, $(B \wedge C)$, $(B \vee C)$ vagy $(B \equiv C)$ alakú, akkor FreeVar(A)=FreeVar(B)∪FreeVar(C).
- Ha az A formula $\forall xB$ vagy $\exists xB$ alakú, akkor FreeVar(A)=FreeVar(B)\{x}.

Kötött változók halmaza

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy elsőrendű nyelv, és $A \in Form$ egy formula. Az A formula kötött változóinak BoundVar(A)-val jelölt halmazát az alábbi induktív definíció adja meg:

- Ha A atomi formula (azaz $A \in AtForm$), akkor a BoundVar(A)=∅.
- Ha az A formula $\neg B$ alakú, akkor BoundVar(A)=BoundVar(B).
- Ha az A formula $(B \supset C)$, $(B \wedge C)$, $(B \vee C)$ vagy $(B \equiv C)$ alakú, akkor BoundVar(A)=BoundVar(B)∪BoundVar(C).
- Ha az A formula $\forall xB$ vagy $\exists xB$ S alakú, akkor BoundVar(A)=BoundVar(B)∪{x}.

Változó előfordulások

Definíció. Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy elsőrendű nyelv, $A \in Form$ egy formula és $x \in Var$ egy változó.

Az x változó valamely A-beli előfordulását szabadnak nevezzük, ha a tekintett előfordulás nem esik az A formula valamely $\forall xB$ vagy $\exists xB$ alakú részformulájába.

Az x változó valamely A-beli előfordulását kötöttnek nevezzük, ha a tekintett előfordulás nem szabad előfordulás.

3.P.2. A következő formulákban állapítsuk meg a kvantorok hatáskörét, és döntsük el, mely változó-előfordulások szabadok és melyek kötöttek! Határozzuk meg a formulák paramétereinek halmazát! (x, y, z változók és c konstansszimbólum.)

(a) $\exists x P(x) \wedge P(x)$

(b) $\forall x Q(x,y) \supset \forall y Q(x,y)$

(c) $\exists x \exists y (Q(x,y) \wedge P(z))$

(d) $\forall x (Q(x,c) \supset \exists y Q(x,y))$

(e) $\forall x (\forall y R(x,y,z) \supset Q(x,y))$

(f) $\forall y \exists z (R(x,g(x,y),z) \supset \exists x Q(z,x))$

(g) $\exists x \forall y (P(x) \vee Q(x,f(y)) \supset \forall y Q(x,y))$

Interpretáció – előzetes

Definíció

Az $\langle U, \varrho \rangle$ párt az $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ **elsőrendű nyelv** egy interpretációjának nevezzük, ha

1. $U \neq \emptyset$, azaz U nemüres halmaz;
2. $Dom(\varrho) = Con$, azaz a ϱ a Con halmazon értelmezett függvény, amelyre teljesülnek a következők:
   a. Ha $a \in \mathcal{F}(0)$, akkor $\varrho(a) \in U$;
   b. Ha $f \in \mathcal{F}(n)$ $(n \neq 0)$, akkor $\varrho(f)$ az $U^{(n)}$ halmazon értelmezett az U halmazba képező függvény $(\varrho(f) : U^{(n)} \to U)$;
   c. Ha $p \in \mathcal{P}(0)$, akkor $\varrho(p) \in \{0, 1\}$;
   d. Ha $P \in \mathcal{P}(n)$ $(n \neq 0)$, akkor $\varrho(P) \subseteq U^{(n)}$. -- az univerzum objektum n-esei, melyekre P teljesül

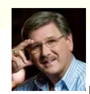
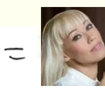
U = a város lakói

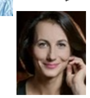
$\mathcal{F}(0) = \{$péter, én, juli-néni, Mari-néni$\}$

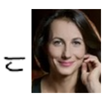
$\mathcal{F}(1) = \{$édesanyja(-)$\}$

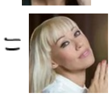
$\mathcal{P}(1) = \{$tanul(-), dolgozik(-)$\}$

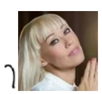
$\mathcal{P}(2) = \{$munkatársak(-,-)$\}$

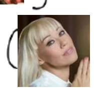
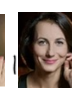
ϱ(Péter) =  ϱ(én) =  ϱ(Juli-néni) = 

ϱ(Mari-néni) = 

ϱ(édesanyja) = f, ahol f() = 

f() = 

ϱ(tanul) = {, } ϱ(dolgozik) = {, , }

ϱ(munkatársak) = {(, )}

(h) *Senki sem szeret mindenkit.*

Megoldás

$$\neg\exists x\forall y\ \mathrm{szeret}(x,y) \qquad \mathrm{szeret}(x,y) - x \text{ szereti } y\text{-t}$$

- Az elsőrendű nyelv olyan, hogy
  - a változók között szerepel *x, y*
  - a kétargumentumú predikátumszimbólumok között szerepel *szereti(-,-)*
- Az interpretáció olyan, hogy
  - az univerzum az emberiség
  - a *szereti(-,-)* olyan *a,b* párokra teljesül, ahol az *a* szereti *b*-t

2.P.6. Az alábbi állításokban vezessünk be új változókat és jelöljük ki a kvantorokat! Használjuk szükség szerint a $\neg$ negációjelet!

(a) *Mindenki szeret valakit.*

(b) *Mindenkit szeret valaki.*

(c) *Mindenki szeret mindenkit.*

(d) *Mindenki szereti önmagát.*

(e) *Van, aki mindenkit szeret.*

(f) *Van, akit mindenki szeret.*

(g) *Van, aki szereti önmagát.*

(i) *Senkit sem szeret mindenki.*

(j) *Van, aki senkit sem szeret.*

(k) *Van, akit senki sem szeret.*

2.P.7. Jelentse $f(x)$ az x természetes számot követő természetes számot (azaz $x+1$-et), $P(x)$ azt, hogy az x természetes szám páros, $Q(x,y)$ pedig azt, hogy $x \leq y$. Olvassuk fel természetes nyelven az alábbi formulákat!

- Vagyis, az elsőrendű nyelv olyan, hogy
  - a változók között szerepel *x, y*
  - az egyargumentumú függvényszimbólumok között szerepel *f(-)*
  - az egyargumentumú predikátumszimbólumok között szerepel *P(-)*
  - a kétargumentumú predikátumszimbólumok között szerepel *Q(-,-)*
- Az interpretáció olyan, hogy
  - az univerzum a természetes számok halmaza
  - az *f(-)* függvény minden számhoz az 1-gyel nagyobb számot rendeli
  - *P(-)* a páros számokra teljesül
  - a *Q(-,-)* olyan *a,b* párokra teljesül, ahol az *a* kisebb vagy egyenlő mint *b*

2.P.7. Jelentse $f(x)$ az x természetes számot követő természetes számot (azaz $x+1$-et), $P(x)$ azt, hogy az x természetes szám páros, $Q(x,y)$ pedig azt, hogy $x \leq y$. Olvassuk fel természetes nyelven az alábbi formulákat!

(a) $\exists x P(x)$

(b) $\neg \forall x P(x)$

(c) $\exists x \neg P(x)$

(d) $\neg\neg \exists x P(x)$

(e) $\exists x \neg \forall y Q(x,y)$

(f) $\exists x \forall y Q(x,y)$

(g) $\forall x \exists y Q(x,y)$

(h) $\forall y \exists x Q(x,y)$

(i) $\neg \exists y \forall x Q(x,y)$

Megoldás

Nincs olyan természetes szám, amely minden természetes számnál nagyobb vagy egyenlő lenne.

2.P.7. Jelentse $f(x)$ az x természetes számot követő természetes számot (azaz $x+1$-et), $P(x)$ azt, hogy az x természetes szám páros, $Q(x,y)$ pedig azt, hogy $x \leq y$. Olvassuk fel természetes nyelven az alábbi formulákat!

(j) $\forall x Q(x,x)$

(k) $\forall x(P(x) \vee P(f(x)))$

(l) $\forall x(P(x) \supset P(f(f(x))))$

(m) $\forall x \forall y \forall z(Q(x,y) \wedge Q(y,z) \supset Q(x,z))$

(n) $\forall x \forall y(P(x) \wedge P(y) \supset Q(x,y) \vee Q(y,x))$

(o) $\neg \exists x \neg Q(x, f(x))$

(p) $\neg \exists x Q(f(x), x)$