Alkalmazott matematika

Baran Ágnes

Nemlineáris egyenletek

Nemlineáris egyenlet gyökei Matlab-bal: `fzero`

Példa: Határozzuk meg a

$$4\cos x = x$$

egyenlet $[-2\pi, 2\pi]$-be eső gyökeit!

Rendezzük 0-ra az egyenletet:

$$4\cos x - x = 0$$

Az egyenlet megoldása az

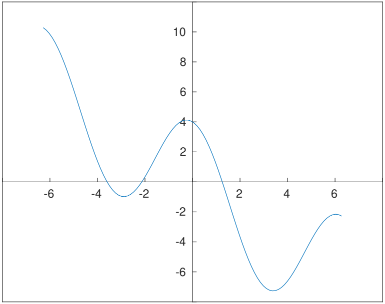
$$f(x) = 4\cos x - x$$

függvény zérushelyeinek megkeresését jelenti.

Nemlineáris egyenlet gyökei Matlab-bal: fzero

A Matlab a függvény gyökét egy iterációval közelíti, ehhez szüksége van egy kiinduló közelítésre.

Ilyen kezdeti közelítésre pl. a függvény ábrázolásával tehetünk szert:



(A függvény gyöke: ahol a gráfja metszi az x-tengelyt.)

Az ábra alapján ebben az intervallumban 3 gyök van: -4, -2 és 1 környékén.

Nemlineáris egyenlet gyökei Matlab-bal: fzero

Ha `f` egy function handle típusú változó, `x0` egy kezdeti közelítés, akkor

`fzero(f,x0)`

az `f` egy gyökének közelítésével tér vissza.

```
>> f=@(x) 4*cos(x)-x;
>> fzero(f,-4)
ans =
   -3.5953
>> fzero(f,-2)
ans =
   -2.1333
>> fzero(f,1)
ans =
    1.2524
```

A három gyök közelítése: -3.5953, -2.1333, 1.2524

Nemlineáris egyenlet gyökei Matlab-bal: `fzero`

Ha az `fzero` függvényt 2 visszatérési értékkel hívjuk, akkor nem csak a gyök közelítését, hanem ezen a helyen a függvény értékét is visszaadja:

```
>> [gyok,fvertek]=fzero(f,-4)
gyok =
   -3.5953
fvertek =
     0
>> [gyok,fvertek]=fzero(f,-2)
gyok =
   -2.1333
fvertek =
   4.4409e-16
```

Látjuk, hogy
-3.5953-ben az f értéke 0,
-2.1333-ben nem 0, de 0-hoz nagyon közeli ($4.4409 \cdot 10^{-16}$).

Nemlineáris egyenlet gyökei Matlab-bal: `fzero`

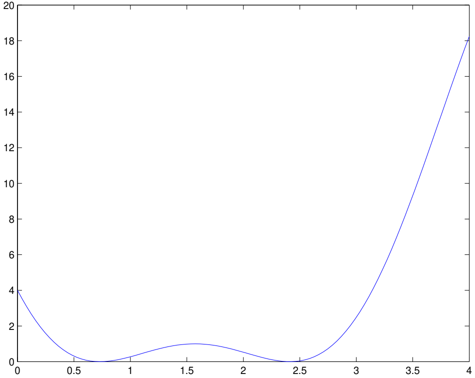
Ha a függvény nem vált előjelet a gyök környezetében, akkor az `fzero` függvény nem találja meg a gyököt:

```
>> f=@(x) 13-9*cos(x).^2-12*sin(x);
>> x=fzero(f,0)
Exiting fzero: aborting search for an interval containing a sign change
    because NaN or Inf function value encountered during search.
(Function value at -Inf is NaN.)
Check function or try again with a different starting value.

x =

   NaN
```

Ábrázoljuk az f függvényt a $[0, 4]$ intervallumon!



Az ábra alapján azt sejtjük, hogy a függvénynek 0.5 és 2.5 környezetében van 1-1 gyöke, ahol a függvény nem vált előjelet. Az is látszik, hogy itt a függvénynek minimuma van.

Nemlineáris egyenlet gyökei Matlab-bal: fsolve

Ha az fzero függvény helyett az fsolve függvényt használjuk:

```
>> f=@(x) 13-9*cos(x).^2-12*sin(x);
>> x=fsolve(f,0)
Equation solved.

fsolve completed because the vector of function values is
near zero as measured by the value of the function tolerance,
and the problem appears regular as measured by the gradient.

<stopping criteria details>

x =
    0.7277
```

Így megkaptuk az egyik gyök közelítését. Egy másik lehetőség, ha ilyenkor a függvény minimumhelyét próbáljuk megkeresni.

fminbnd

- `x=fminbnd(f,xmin,xmax)`
- `[x,fval,exitflag,output]=fminbnd(f,xmin,xmax)`

Megkeresi az `f` függvény $[xmin, xmax]$ intervallumbeli minimumát.

```
>> f=@(x) 13-9*cos(x).^2-12*sin(x);
>> [x,fval]=fminbnd(f,0,1)
x =
    0.7297
fval =
   9.2491e-11
>> [x,fval]=fminbnd(f,2,3)
x =
    2.4119
fval =
   1.7231e-13
```

A függvényérték mindkét esetben 0-hoz nagyon közeli, így a gyökök közelítését kaptuk.

Polinomok gyökei: roots

Polinomok gyökeinek közelítésére a roots függvényt használhatjuk:

```
r=roots(p)
```

ahol a p vektorban a polinom együtthatóit kell felsorolni a főegyütthatóval kezdve.

Példa

Közelítsük a $p(x) = 2x^3 - x + 1$ polinom gyökeit.

```
>> p=[2 0 -1 1]
>> r=roots(p)
r =

  -1.00000 + 0.00000i
   0.50000 + 0.50000i
   0.50000 - 0.50000i
```

1. feladat

(a) Közelítse a $3x = \cos(x)$ egyenlet gyökeit!

(b) Közelítse a $3x^3 - 12x + 4 = 0$ egyenlet gyökeit!

(c) Közelítse az $e^x = \sin(x)$ egyenlet gyökeit!

(d) Közelítse az $\ln(x) = 2 - x$ egyenlet gyökét!

(e) Közelítse a $\cos^2(x) + 2\sin(x) = 2$ egyenlet gyökét!

(f) Közelítse az $x^4 - x^3 - 2x^2 - 2x + 4 = 0$ egyenlet gyökeit!

Nemlineáris egyenletrendszer megoldása: `fsolve`

Példa: Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert!

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{2y^2}{x} &= 5 \\ y^2 - xy &= -1 \end{aligned}$$

Rendezzük 0-ra az egyenleteket:

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{2y^2}{x} - 5 &= 0 \\ y^2 - xy + 1 &= 0 \end{aligned}$$

Hozzunk létre egy függvényt, mely egy kételemű vektorral tér vissza: az előző rendszer bal oldalán álló kifejezések értékével. A függvénynek 1 változója legyen, egy vektor, azaz $x \mapsto x_1$, $y \mapsto x_2$.

```
f=@(x) [x(1)^2+2*x(2)^2/x(1)-5,x(2)^2-x(1)*x(2)+1];
```

Nemlineáris egyenletrendszer megoldása: fsolve

```
f=@(x) [x(1)^2+2*x(2)^2/x(1)-5,x(2)^2-x(1)*x(2)+1];
```

Hívjuk meg az `fsolve` függvényt:

```
[gyok,fvertek]=fsolve(f,x0)
```

ahol `x0` a gyökök kezdeti közelítését tartalmazó vektor.

Egy nemlineáris egyenletrendszernek több gyöke is lehet, a megfelelő kezdeti értékek megkeresése sokszor nem egyszerű feladat.

Más-más kezdeti közelítésből indulva más-más gyököket kaphatunk.

Az is előfordulhat, hogy egy adott kezdeti közelítésből indulva a Matlab nem talál gyököt.

Nemlineáris egyenletrendszer megoldása: fsolve

```
>> [gyok,fvertek]=fsolve(f,[1,1])
```

A parancs végrehajtása után a Matlab az alábbi értékekkel tér vissza:

```
gyok =
    2.0000    1.0000
fvertek =
   1.0e-08 *
    0.8598    0.7406
```

Tehát az egyenletrenszer gyökei 4 tizedesjegyre kerekítve (az eredeti jelölésekkel) $x = 2$ és $y = 1$. A Matlab a kiszámolt értékeket visszhelyettesítette az átrendezett egyenletek bal oldalán álló kifejezésekbe. Az így kapott értékek: $0.8598 \cdot 10^{-8}$ és $0.7406 \cdot 10^{-8}$.

Most kézzel is könnyen ellenőrizhető, hogy $x = 2$ és $y = 1$ pontos megoldások.

2. feladat

Közelítse az alábbi egyenletrendszer gyökét a $[-1, 1]^2$ tartományon.

$$\sin(x_1 + 2x_2) + x_1 x_2 = 0$$
$$\cos(x_2 - 1) - \sin(x_1) = 0$$

3. feladat

Közelítse az alábbi egyenletrendszer gyökét a $[-\pi, \pi]^2$ tartományon.

$$\begin{aligned} -4x_1 + \cos(2x_1 - x_2) &= 3 \\ -3x_2 + \sin x_1 &= 2 \end{aligned}$$

4. feladat

Mutassa meg, hogy az $3x^3 - 12x + 4 = 0$ egyenletnek van gyöke a $[0, 1]$ intervallumban. Vizsgálja meg az $x_0 \in [0, 1]$,

$$x_{k+1} = \frac{3x_k^3 + 4}{12}, \quad k = 0, 1, \dots$$

eljárás konvergenciáját! Írjon egy Matlab-kódot, amely kiszámolja az iteráció első néhány lépését! Módosítsa a kódot úgy, hogy olyan k értékre álljon le, amelyre $|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$, ahol $\varepsilon > 0$ adott.

5. feladat

Írjunk egy Matlab-függvényt, mely megadott x_0 kezdőpont, `maxit` maximális iterációszám, ε pontosság esetén egy adott f függvény gyökének Newton-módszerrel számított közelítésével és az elvégzett iterációk számával tér vissza, illetve ha az algoritmus nem konvergál, vagy egy Newton-lépés nem definiált, akkor a megfelelő hibaüzenettel.

6. feladat

Alkalmazzuk a Newton-módszert az $f(x) = x^3 - 5x$ függvény gyökének közelítésére az $x_0 = 1$ pontból indulva!

7. feladat

Közelítsük a

$$\begin{aligned} -4x_1 + \cos(2x_1 - x_2) &= 3 \\ -3x_2 + \sin x_1 &= 2 \qquad x_1, x_2 \in [-\pi, \pi] \end{aligned}$$

egyenletrendszer megoldását fixpont-iterációval pl. az $x^{(0)} = [0, 0]^T$ kezdővektorból indulva.