Matematikai és számítástudományi ismeretek, 5. tétel

1 Első rész

Mátrix fogalma, műveletek, determináns, rang. Speciális mátrixok, inverz. Mátrix, mint lineáris transzformáció. Sajátérték, sajátvektor.

Mátrixok

Definíció

Egy m sorral és n oszloppal rendelkező számtáblázatot $m \times n$-es mátrixnak nevezünk.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad A \text{ elemei: } a_{ij} \qquad A = (a_{ij})$$

Az összes $m \times n$-es mátrix halmazát $\mathcal{M}_{m \times n}$-nel jelöljük.

Definíció

- Ha $n = m$, akkor a mátrix négyzetes vagy kvadratikus.
- Egy mátrix főátlója alatt az $(a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots)$ szám k-ast értjük ($k = \min\{m, n\}$).
- Két mátrix egyenlő, ha azonos típusúak (azaz ugyanannyi soruk és oszlopuk van), és a megfelelő elemeik megegyeznek.
- Azon $n \times n$-es mátrixot, melynek főátlójában csupa 1-es áll, minden más eleme 0, n-edrendű vagy n-dimenziós egységmátrixnak nevezzük. Jele: E_n vagy I_n.

Mátrixműveletek

1. Mátrixok összeadása

Csak azonos típusú mátrixokat tudunk összeadni.
Legyenek $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij})$ $m \times n$-es mátrixok.
Ekkor $C = A + B$, ha $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$; $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$.

2. Mátrixok skalárral való szorzása

Elemenként végezzük, azaz ha $\lambda \in \mathbb{R}$, $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}$, akkor $\lambda A = (\lambda a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}$.

Speciálisan: ha A és B sor-, vagy oszlopvektorok, akkor a fenti 2 művelet éppen a vektorok szokásos összeadása és skalárral való szorzása.

3. Mátrixszorzás

Legyen $A = (a_{ij})$ $m \times k$, $B = (b_{ij})$ $k \times n$ típusú mátrix. Ekkor A és B szorzata az a $C = (c_{ij})$ $m \times n$ típusú mátrix, amelyre

$$c_{ij} = \sum_{r=1}^{k} a_{ir} b_{rj}.$$

Tétel – a mátrixszorzás tulajdonságai

- Ha A $m \times n$ típusú, akkor $E_m \cdot A = A$ és $A \cdot E_n = A$.
- Legyenek A, B mátrixok és tegyük fel, hogy létezik AB. Ha $\lambda \in \mathbb{R}$ tetszőleges, akkor $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$.
- Ha A, B, C olyan mátrixok, hogy AB és BC létezik, akkor $(AB)C = A(BC)$. Azaz a mátrixszorzás asszociatív.
- Ha A és B azonos típusú mátrixok és létezik AC, akkor BC is létezik és $(A + B)C = AC + BC$. Azaz teljesül a disztributivitás.
- A mátrixszorzás nem kommutatív, azaz általában $AB \neq BA$.

Definíció

Legyen A egy $m \times n$-es mátrix. Azt az A^T-vel jelölt $n \times m$-es mátrixot, amelynek sorai az A oszlopai A transzponáltjának nevezzük.

Állítás – a transzponálás tulajdonságai

- $(A^T)^T = A$ (azaz a transzponálás involutív művelet)
- A transzponálás és a mátrixszorzás kapcsolata: $(AB)^T = B^T \cdot A^T$.

Definíció

Legyen A egy n-edrendű kvadratikus mátrix.

- A szimmetrikus, ha $A^T = A$,
- A ferdeszimmetrikus, ha $A^T = -A$.

Példák:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & -1 & 7 \\ 4 & 7 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -5 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Állítás – szimmetrikus és ferdeszimmetrikus mátrixok tulajdonságai

- Ferdeszimmetrikus mátrix főátlójában 0-k állnak.
- Szimmetrikus mátrixok összege szimmetrikus.
- Ferdeszimmetrikus mátrixok összege ferdeszimmetrikus.
- Szimmetrikus mátrixok szorzata nem feltétlenül szimmetrikus. De ha A és B szimmetrikus és felcserélhetőek (azaz $AB = BA$), akkor AB is szimmetrikus.

Mátrixok inverze

Definíció

Azt mondjuk az A n-edrendű négyzetes mátrixról, hogy invertálható, vagy létezik az inverze, ha létezik olyan B n-edrendű kvadratikus mátrix, hogy

$$AB = BA = E_n.$$

Tétel

Ha A invertálható, akkor az inverze egyértelmű. Jele: A^{-1}.

Példa:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}$$

Állítás – a mátrixinvertálás tulajdonságai

- Ha A invertálható, akkor A^{-1} is az és $(A^{-1})^{-1} = A$.
- Ha A és B invertálható és létezik AB, akkor ez is invertálható és $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- Ha A invertálható, akkor A^T is az és $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

Determinánsok

Definíció

Legyen $n \in \mathbb{N}$ és jelölje σ az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz egy permutációját, azaz legyen

$$\sigma\colon \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\},\ \ i \mapsto \sigma(i)$$

bijektív függvény. (Itt $\sigma(i)$ jelöli a permutációban az i. helyen álló elemet.) Azt mondjuk, hogy a σ permutációnál az i és j elem inverzióban áll, ha $i < j$ és $\sigma(i) > \sigma(j)$. Egy σ permutáció páros, ha benne az inverzióban álló párok száma páros, és páratlan, ha ez a szám páratlan.

Példa: $J_4 = \{1, 2, 3, 4\}$,

$\sigma_1 = (1, 3, 4, 2)$	Inverziók száma: 2
$\sigma_2 = (1, 2, 3, 4)$	Inverziók száma: 0
$\sigma_3 = (4, 3, 2, 1)$	Inverziók száma: 6
$\sigma_4 = (2, 3, 4, 1)$	Inverziók száma: 3

Determinánsok

Definíció

Legyen $A = (a_{ij})$ egy $n \times n$-es kvadratikus mátrix. Az A n^2 eleméből válasszunk ki úgy n elemet, hogy minden sorból és oszlopból pontosan egyet választunk. A kiválasztott elemek alakja:

$$a_{1\sigma(1)}, a_{2\sigma(2)}, \ldots, a_{n\sigma(n)}.$$

Az A mátrix determinánsa:

$$\det(A) = |A| = \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots a_{n\sigma(n)}.$$

Ez az összeg $n!$ tagú. Itt: $\varepsilon(\sigma) = \begin{cases} 1, & \text{ha } \sigma \text{ páros,} \\ -1, & \text{ha } \sigma \text{ páratlan.} \end{cases}$

Példa:

1. $n = 2$: $\det(A) = |A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.
2. $n = 3$: $\det(A) = \ldots$.

Tétel – a determinánsok szorzástétele

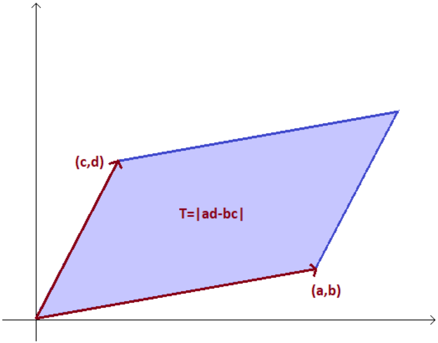
Ha A és B azonos rendű négyzetes mátrixok, akkor

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B).$$

A determináns szemléletes jelentése

- másodrendű (2x2-es) determináns: a determináns sorai, mint vektorok által kifeszített parallelogramma előjeles területe

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$



- harmadrendű (3x3-as) determináns: a determináns sorai, mint vektorok által kifeszített paralelepipedon előjeles térfogata

Állítás – a determináns tulajdonságai

- $\det(A) = \det(A^T)$
- Ha A valamely sora csupa 0 elemből áll, akkor $\det(A) = 0$.
- Ha A két sorát felcseréljük, a determináns -1-szeresére változik.
- Ha A két sora egyenlő, akkor $\det(A) = 0$.
- Ha A valamely sorát megszorozzuk egy λ valós számmal, akkor az így kapott mátrix determinánsa $\lambda \cdot \det(A)$.
- Ha A minden sorát megszorozzuk egy λ számmal és A n-edrendű, akkor a kapott mátrix determinánsa $\lambda^n \cdot \det(A)$.
- Ha A két sora egymás skalárszorosa, akkor $\det(A) = 0$.
- Egy mátrix determinánsa nem változik, ha valamely sorához hozzáadjuk egy másik sor λ-szorosát.
- Ha A valamely sora előállítható a többi sor lináris kombinációjaként, akkor $\det(A) = 0$.
- A fentiek igazak sorok helyett oszlopokra is.

Következmény

Ha $\det(A) \neq 0$, akkor A sorai (vagy oszlopai) lineárisan független vektorok. Ekkor ha A $n \times n$-es: sorai $\mathbb{R}^n$ egy bázisát alkotják.

A determináns kapcsolata az invertálással

Definíció

Azt mondjuk, hogy az A négyzetes mátrix szinguláris, ha determinánsa 0. Ellenkező esetben (azaz ha $\det(A) \neq 0$) A reguláris.

Tétel

Egy négyzetes mátrix pontosan akkor invertálható, ha reguláris.

Megjegyzés: Legyen A egy reguláris mátrix. Mivel $A \cdot A^{-1} = E$, ahol E az A-val azonos méretű egységmátrix, ezért a determinánsok szorzástétele alapján

$$\det(A) \cdot \det(A^{-1}) = \det(E) = 1.$$

(Itt az, hogy $\det(E) = 1$, akár a definícióból, akár a determináns kiszámítási módjai alapján könnyen adódik.) A fenti egyenletből következik, hogy A és A^{-1} determinánsa egymás reciproka:

$$\det(A)^{-1} = \det(A^{-1}).$$

A determináns kiszámítási módjai

1. Sarrus-szabály: 2×2-es és 3×3-as mátrixok determinánsára
2. Gauss-elimináció: bizonyos – a fenti tulajdonságokat használó – átalakítások révén a mátrixot felső háromszög alakúra hozzuk (főátló alatt csupa 0), ekkor a determináns éppen a főátlóbeli elemek szorzata. Ezek az átalakítások:
   - sorcsere, ekkor a determináns előjelet vált;
   - $\lambda \in \mathbb{R}$ kiemelése egy sorból;
   - egy sor λ-szorosának hozzáadása egy másik sorhoz.
3. Kifejtési tétel: Legyen A egy n-edrendű mátrix.
   - Kiválasztjuk A egy tetszőleges sorát (vagy oszlopát),
   - ennek minden elemét megszorozzuk az elemhez tartozó algebrai aldeterminánssal,
   - majd a kapott szorzatokat összeadjuk.

Definíció

Az a_{ij} elemhez tartozó algebrai aldetermináns $(-1)^{i+j}A_{ij}$, ahol A_{ij} annak az $(n-1)$-edrendű determinánsnak az értéke, amelyet A-ból az i. sor és j. oszlop kihúzásával kapunk.

Definíció

Egy mátrix rangja alatt a mátrix sorai (vagy oszlopai), mint vektorok által alkotott vektorrendszer rangját értjük. Jelölés: rang(A).

Tétel – rangkritérium

- Egy lineáris egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(A|b)$.
- Ha megoldható és $\mathrm{rang}(A) = n$ (ahol n az ismeretlenek száma), akkor határozott, ha $\mathrm{rang}(A) < n$, akkor határozatlan.

Mátrix rangja, determinánsa

Az alábbi átalakítások nem változtatják meg a mátrix rangját:

- Egy sor szorzása $\lambda \neq 0$-val.
- Egy sorhoz hozzáadni egy másik sor λ-szorosát.
- Sorok sorrendjének megváltoztatása.

- Mátrix determinánsa nem változik, ha egy sorához hozzáadjuk egy másik sor λ-szorosát.
- A determináns (-1)-szeresére változik, ha a mátrix két sorát felcseréljük.
- Háromszögmátrix determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata.

$\Longrightarrow$ a Gauss-eliminációt használhatjuk mátrix (vektorrendszer) rangjának megállapítására és mátrix determinánsának kiszámítására.

Lineáris leképezések

Ha $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, akkor A minden n elemű oszlopvektorhoz hozzárendel egy m elemű oszlopvektort.

Példa:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_3 \\ x_2 - x_3 \end{pmatrix}$$

Lineáris leképezések

A mátrixműveletek tulajdonságaiból:

- $\forall u, v \in \mathbb{R}^n$ esetén $A(u+v) = Au + Av$,
- $\forall v \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén $A(\lambda u) = \lambda(Au)$

Definíció

Legyenek V és W vektorterek $\mathbb{R}$ felett. $\varphi\colon V \to W$ lineáris leképezés, ha

- additív, azaz $\forall u, v \in V$: $\varphi(u+v) = \varphi(u) + \varphi(v)$;
- homogén, azaz $\forall v \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$: $\varphi(\lambda v) = \lambda\varphi(v)$.

Ha $V = W$, akkor a lineáris leképezést lineáris transzformációnak hívjuk.

Így $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ esetén $\varphi(u) = Au$ lineáris leképezés $\mathbb{R}^n$-ből $\mathbb{R}^m$-be.
Ha $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, akkor $\varphi(u) = Au$ lineáris transzformáció.
Megjegyzés: lineáris leképezésekk esetén nullvektor képe nullvektor.

Ha $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ bázisa $\mathbb{R}^n$-nek, akkor minden $v \in \mathbb{R}^n$ felírható ebben a bázisban:

$$v = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \dots + \lambda_n b_n$$

Ekkor

$$Av = \lambda_1 Ab_1 + \lambda_2 Ab_2 + \dots + \lambda_n Ab_n,$$

azaz minden vektornak a képe felírható a bázisvektorok képéből.

Egy lineáris transzformációt egyértelműen meghatároz egy bázison való hatása. Ha $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ bázisa V-nek, és $\varphi(b_i) = w_i$, akkor ha $v = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \cdots + \lambda_n b_n$, akkor ennek φ általi képe:

$$\varphi(v) = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \cdots + \lambda_n w_n.$$

Definíció

Legyen V egy n-dimenziós valós vektortér, $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ bázisa V-nek, tekintsünk továbbá egy $\varphi\colon V \to V$ lineáris transzformációt. Ekkor φ-nek a $\mathcal{B}$ bázisra vonatkozó mátrixa az az $n \times n$-es mátrix, amelynek i-edik oszlopában $\varphi(b_i)$-nek a $\mathcal{B}$ bázisra vonatkozó koordinátái állnak.

$\Longrightarrow$ minden φ lineáris transzformáció felírható $\varphi(v) = Av$ alakban.

Sajátérték, sajátvektor

Példa

Élőlények egy zárt populációjában az egyedek legfeljebb 3 évig élnek. Az egyedeknek az első évben nem keletkezik utódja, a másodéves egyedek esetén az átlagos reprodukciósszám 6, a harmadik éves egyedeknél 8. Az 1 és 2 éves egyedek $50 - 50\%$-a éli meg a következő évet. Adjunk egy olyan kiinduló korcsoportonkénti egyedszámot, melynek koreloszlása nem változik az évek során.

$x = (x_1, x_2, x_3)^T$ a kiinduló egyedszámok. Van-e olyan x, melyre valamely $\lambda > 0$ valós számmal

$$\begin{pmatrix} 0 & 6 & 8 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

teljesül?

Lineáris transzformáció sajátértékei, sajátvektorai

Definíció

Legyen $\varphi\colon V \to V$ lineáris transzformáció. Egy nem-nulla $v \in V$ vektort φ sajátvektorának hívunk, ha $\exists \lambda \in \mathbb{R}$: $\varphi(v) = \lambda v$. Ekkor λ-t φ v-hez tartozó sajátértékének nevezzük.

Megjegyzés

A vektorteret nem csak $\mathbb{R}$ felett, hanem $\mathbb{C}$ felett is definiálhatjuk. (Ekkor a skalárral való szorzás $\mathbb{C} \times V \to V$ műveletként van értelmezve, és minden további definíció, tulajdonság ennek megfelelően módosul.)
Ha $\varphi\colon V \to V$ lineáris transzformáció, ahol V egy $\mathbb{C}$ feletti vektortér, akkor egy $0 \neq v \in V$ vektort φ sajátvektorának hívunk, ha $\exists \lambda \in \mathbb{C}$: $\varphi(v) = \lambda v$. Ekkor λ-t φ v-hez tartozó sajátértékének nevezzük.

Megjegyzések:

- Ha v sajátvektora φ-nek, akkor a hozzá tartozó sajátérték egyértelmű.
- Ha λ sajátérték, akkor a hozzá tartozó sajátvektorok halmaza altér: $L_\lambda := \{v \in V \mid \varphi(v) = \lambda v\}$ altér V-ben: a λ-hoz tartozó sajátaltér.

Ha $\varphi(v) = Av$, akkor $v \neq 0$ sajátvektora, λ pedig a hozzátartozó sajátértéke φ-nek (azaz A-nak), ha

$$Av = \lambda v.$$

Átrendezve:

$$(A - \lambda E)v = 0,$$

azaz a sajátvektorok egy homogén lineáris egyenletrendszer megoldásai. Egy homogén lineáris egyenletrendszernek pontosan akkor van a triviálistól különböző megoldása, ha az alapmátrixának determinánsa 0:

$$\det(A - \lambda E) = 0.$$

Definíció és tétel

Egy φ lineáris transzformáció karakterisztikus polinomján a $\det(A - \lambda E_n)$ n-edfokú polinomot értjük, ahol n a tér dimenziója, A pedig φ mátrixa *tetszőleges* bázisban. Ennek gyökei éppen φ sajátértékei.

Példa sajátértékek, sajátvektorok meghatározására

Határozzuk meg az alábbi φ sajátértékeit és sajátvektorait!

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ -12x_1 + 3x_2 \end{pmatrix}$$

φ mátrixa a természetes bázisban $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -12 & 3 \end{pmatrix}$. Így φ karakterisztikus polinomja

$$\det(A - \lambda E_n) = \left| \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -12 & 3 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -12 & 3-\lambda \end{pmatrix} \right| =$$

$$= (2-\lambda)(3-\lambda) - (-1)(-12) = \lambda^2 - 5\lambda - 6 = (\lambda+1)(\lambda-6).$$

Így a sajátértékek $\lambda_1 = -1$ és $\lambda_2 = 6$. Például a $\lambda_2 = 6$-hoz tartozó sajátvektorok:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 6x_1 \\ -12x_1 + 3x_2 = 6x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$

Megjegyzés

- Egy $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix karakterisztikus polinomja egy valós együtthatós n-edfokú polinom $\implies$ egy $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixnak a komplex számok körében multiplicitással számolva n darab sajátértéke van.
- Ha egy komplex szám sajátértéke az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixnak, akkor a konjugáltja is sajátérték lesz.
- Diagonális mátrix sajátértékei a főátlóban álló számok.
- Háromszögmátrix sajátértékei a főátlóban álló számok.
- Egy mátrix pontosan akkor invertálható, ha a 0 nem szerepel a sajátértékei között.

2 Második rész

A problémaredukciós reprezentáció és az ÉS/VAGY gráfok. Ismeretreprezentációs technikák, bizonytalanság-kezelés (fuzzy logika). A rezolúciós kalkulus. A logikai program és az SLD rezolúció. A logikai programozás alapvető módszerei.

Gyakran előfordul, hogy egy problémát úgy próbálunk megoldani, hogy több külön-külön megoldandó részproblémára bontjuk. Ha a részproblémákat megoldjuk, az eredeti probléma megoldását is megkapjuk. A részproblémák megoldását további részek megoldására vezetjük vissza, egészen addig, amíg csupa olyan problémához nem jutunk, amelyeket egyszerűségüknél fogva már könnyedén meg tudunk oldani. A probléma megoldásnak ezt a módját problémaredukciónak nevezzük.

Problémaredukciós reprezentáció:

- Először is le kell írni az eredeti problémát. Egy probléma részproblémákra bontása során a nyert részek az eredeti problémához hasonló, de annál egyszerűbb problémák.
- amit meg tudunk oldani, vagy ismerjük a megoldást: egyszerű probléma
- Meg kell még adni a problémákat egyszerűsítő, illetve részekre bontó redukciós operátorokat. Egy redukciós operátor egy problémához azokat a (rész)problémákat rendeli hozzá, melyek egyenkénti megoldásával a probléma megoldása is előáll.
- Egy problémahalmazt egy operátorsorozat segítségével egy másik problémahalmazzá redukálhatunk
- A probléma megoldható egy reprezentációban, ha csupa egyszerű problémából álló problémahalmazzá redukálható, az alkalmazott operátorok a redukciós operátorsorozatot alkotják.
- A feladatunk lehet
  - annak eldöntése, hogy megoldható-e a probléma az adott problémaredukciós reprezentációban
  - egy (esetleg az összes) megoldás előállítása

  - valamilyen minősítés alapján jó megoldás előállítása (a megoldások között különbséget tehetünk, pl. a megoldás költsége alapján).

- Pl: Hanoi tornyai

ÉS/VAGY gráfok:

- Egy reprezentáció egy irányított gráfot, ún. ÉS/VAGY gráfot határoz meg.
- A problémahalmaz elemei (a problémák) a gráf csúcsai.
- A kiinduló probléma a startcsúcs, a terminális csúcsok az egyszerű problémák
- A problémákból irányított éleket húzunk azokhoz a problémákhoz, melyek közvetlen elérhetők. Ezek az élek összetartozónak tekinthetők: egy ÉS élköteget vagy hiperélt alkotnak.
- Pontosan akkor oldható meg P, ha van a reprezentációs gráfban a startcsúcsból induló olyan hiperút, melynek levelei terminális csúcsok.
- Megoldáskereső módszerek:
  - Visszalépéses megoldáskeresés
  - Keresőfával megoldáskeresés

Ismeretreprezentációs technikák:

- Az ismeretreprezentáció és a hozzá elválaszthatatlanul kapcsolódó következtetés a mesterséges intelligencia egyik alapkérdése: miként modellezhető a világ úgy, hogy a modell elégséges alapot adjon az intelligens cselekvéshez?
- Procedurális reprezentáció
- Logikai alapú reprezentációk (Logikai nyelvek, szabályalapú reprezentációk)
- Strukturált reprezentáció (Szemantikus hálók és keretek (frame), döntési fák)

- Hibrid reprezentációk

Bizonytalanságkezelés, fuzzy logika:

- A fuzzy logika célja a nem egyértelmű állítások matematikai kezelhetősége. Ilyen állítás lehet például, hogy meleg van, vagy valaki magas vagy valaki szegény. Észre kell venni, hogy ezek az állítások szubjektívek, azaz a pontos értelmezésük függ a kinyilatkoztatótól. Hány foktól van meleg, hány cm-től magas valaki, stb... Tehát ennek érdekében a fuzzy logika bevezeti, hogy az állítások [0;1] értéket is felvehetnek. Ahol továbbra is 1 jelenti az igaz állítást, 0 pedig a hamisat. A közte lévő értékek egy bizonytalanságot reprezentálnak. Például az időjárási példánál egy fázós ember azt mondhatja, hogy az állítás értéke 0.2, tehát nem hamis az állítás, de közelebb áll ahhoz mint az igaz értékhez.
- a fuzzy halmazok és logika alkalmazása lehetővé teszi a természetes emberi intelligenciát jobb hatásfokkal másoló, ugyanolyan közelítési pontosság mellett alacsonyabb számítási bonyolultságú modellek, algoritmusok alkalmazását.

A rezolúciós kalkulus:

- A formulahalmaz kielégíthetetlenségének igazolása a háttér szemantikus eldöntésprobléma: $A_1, A_2, ..., \neg B$ formulahalmaz kielégíthetetlen-e
- Konjunktív normálformára kell hozni a fenti formulahalmazt, ami pontosan akkor kielégíthetetlen, ha a halmaz formuláiban szereplő klózok halmaza kielégíthetetlen: ha bármely interpretáció mellett van a halmaz elemei között legalább egy h igazságértékű klóz.
- klózhalmaz szemantikus fája: a levezetésben segíthet
- rezolválás: például a klózpár: $(X \vee Y, \neg Y \vee Z)$ és ennek a rezolvense: $X \vee Z$ (mivel Y és $\neg Y$ szerepeltek a klózokban)
- Levezetési fa: csúcsai klózok. Két csúcsból pedig pontosan akkor vezet él egy harmadik, közös csúcsba, ha ott a két klóz rezolvense található.

- Egy másik módszer a lineáris rezolúció
- A kérdés az, hogy levezethető-e S-ből (kiinduló klózhalmaz) az üres klóz. Azt, hogy S-ből levezethető az üres klóz, úgy is ki lehet fejezni, hogy S-nek van rezolúciós cáfolata. Amennyiben az üres klóz levezethető, a klózhalmaz nem kielégíthetetlen.
- `https://gyires.inf.unideb.hu/KMITT/a02/ch06s03.html`

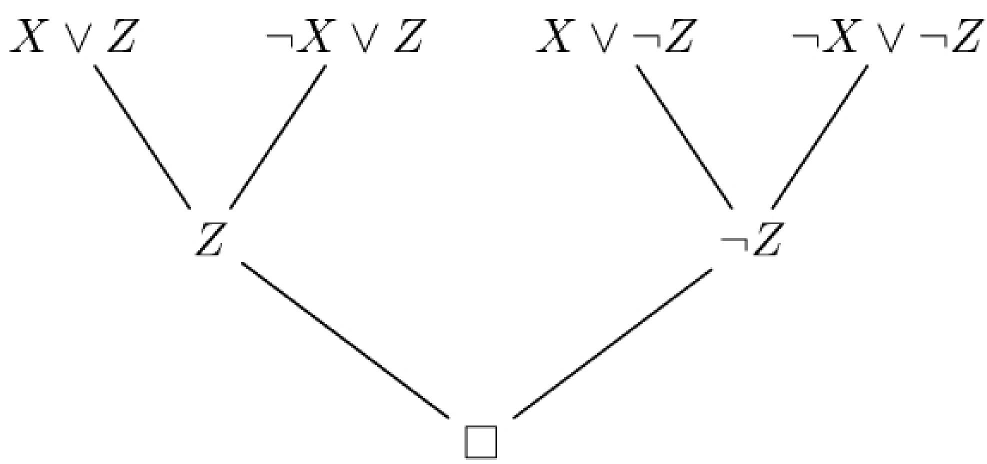


Figure 1: Levezetési fa

A logikai program és az SLD rezolúció, A logikai programozás alapvető módszerei:

- Az imperatív program egy recepthez hasonló: meghatározza, hogy mit és milyen sorrendben kell megtenni a programot futtató gépnek. A logikai program viszont egy tudást ír le, melyet a gép a neki feltett kérdésekre való válaszoláshoz felhasznál.
- egy logikai program nem más mint logikai állítások halmaza
- egy logikai program futása: következtetési folyamat
- Prolog: 70-es évektől, a legismertebb logikai nyelv. A programnak meg kell adnunk egy célformulát (célklózt), ezután ellenőrzi, hogy a célklóz

a logikai (forrás)program logikai következményei közt van-e. A döntési eljárás az SLD (Linear resolution with Selection function for Definite clauses) elsőrendű rezolúciós kalkulus.

- gyakori példaprogram: rokoni kapcsolatokat adunk meg, melyből további rokonsági kérdésekre kaphatunk választ