Az informatika logikai alapjai 9. előadás

Vaszil György

vaszil.gyorgy@inf.unideb.hu

I. emelet 110-es szoba

A múlt órán

- Interpretáció, változó értékelés, szemantikai szabályok
- Modell, kielégíthetőség, kielégíthetetlenség
- Logikai következmény, érvényesség, ekvivalencia

nulladrendű nyelv

$L^{0} = \langle LC, Con, Form \rangle$

- szemantikai szabályok

$\neg, \wedge, \vee, \supset, \equiv$

„működik"

elsőrendű nyelv

$L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$

- szemantikai szabályok

$\neg, \wedge, \vee, \supset, \equiv, \exists, \forall$

„működik"

nulladrendű nyelv

$L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$

- interpretáció
  - Con elemeinek értéke: logikai érték

elsőrendű nyelv

$L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$

- interpretáció + változó értékelés
  - Univerzum
  - Con elemeinek értéke:
    1. objektumnevek:
       - konstans függvények
       - függvények
    2. állítások:
       - állítás konstansok logikai értékei
       - objektumok között fennálló relációk

nulladrendű nyelv	elsőrendű nyelv
$L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$	$L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$
• interpretáció, ϱ	• interpretáció $\langle U, \varrho \rangle$ + változó értékelés: v
• modell – ϱ, ahol $\lvert A \rvert_\varrho = 1$	• modell – $\langle U, \varrho \rangle$ és v, ahol $\lvert A \rvert^{\langle U, \varrho \rangle}_v = 1$

Példa

$L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$

$\{x, y, z, \ldots\}$

$\{\neg, \supset, \vee, \wedge, \equiv, \forall, \exists, (,)\}$

$\mathcal{F}(0) = \{\text{szám}\}$

$\mathcal{F}(1) = \{S(-)\}$

$\mathcal{F}(2) = \{\text{műv1}(-,-), \text{műv2}(-,-)\}$

$\mathcal{P}(2) = \{\text{viszony}(-,-)\}$

Azaz:

$Con = \{\text{szám}, S(-), \text{műv1}(-,-), \text{műv2}(-,-), \text{viszony}(-,-)\}$

függvények

predikátum

Interpretáció

$\langle U, \varrho \rangle$

- U : $\mathbb{N}$
- ϱ : $\varrho(\text{szám}) = 0$

$\varrho(S(-)) = \_ + 1$

$\varrho(\text{műv1}(-,-)) = \_ + \_$

$\varrho(\text{műv2}(-,-)) = \_ * \_$

$\varrho(\text{viszony}(-,-)) = \_ = \_$

Példa

$L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$

$LC = \{\neg, \supset, \vee, \wedge, \equiv, \forall, \exists, (,)\}$

$Var = \{x, y, z, \ldots\}$

$\mathcal{F}(0) = \{szám\}$

$\mathcal{F}(1) = \{S(-)\}$

$\mathcal{F}(2) = \{műv1(-,-), műv2(-,-)\}$

$\mathcal{P}(2) = \{viszony(-,-)\}$

Azaz:

$Con = \{szám, S(-), műv1(-,-), műv2(-,-), viszony(-,-)\}$

függvények: szám, $S(-)$, $műv1(-,-)$, $műv2(-,-)$

predikátum: $viszony(-,-)$

<u>Interpretáció</u>

$\langle U, \varrho \rangle$

- U: $\mathbb{N}$
- ϱ: $\varrho(szám) = 0$

$\varrho(S(-)) = \_ + 1$

$\varrho(műv1(-,-)) = \_ + \_$

$\varrho(műv2(-,-)) = \_ * \_$

$\varrho(viszony(-,-)) = \_ = \_$

Formalizáljuk, hogy bármelyik természetes számot nullával szorozva nullát kapunk.
Mi történik, ha „szám” interpretációját megváltoztatjuk?

nulladrendű nyelv	elsőrendű nyelv
$L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$	$L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$
• interpretáció, ϱ	• interpretáció $\langle U, \varrho \rangle$ + változó-értékelés: v
• modell	• modell

- kielégíthető formula
  - van modellje
- kielégíthetetlen formula
  - nincs modellje
- $A \vDash B$ ($\Gamma \vDash B$) A formula (Γ halmaz) minden modellje B-nek is modellje
- A formula érvényes, ha $\emptyset \vDash A$

nulladrendű nyelv	elsőrendű nyelv
$L^{(0)}=\langle LC, Con, Form\rangle$	$L^{(1)}=\langle LC, Var, Con, Term, Form\rangle$
• interpretáció ϱ	• interpretáció $\langle U, \varrho\rangle$ + változó értékelés: v
• modell	• modell

- kielégíthető formula
  - van modellje
- kielégíthetetlen formula
  - nincs modellje
- $A \models B$ ($\Gamma \models B$) A formula (Γ halmaz) minden modellje B-nek is modellje
- A formula érvényes, ha $\neg A$ kielégíthetetlen

nulladrendű nyelv	elsőrendű nyelv
$L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$	$L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$
• interpretáció: ϱ	• interpretáció $\langle U, \varrho \rangle$ + változó értékelés: v
• modell	• modell

• kielégíthető formula

• kielégíthetetlen formula

• logikai következmény

• érvényes formula

• logikai ekvivalencia:

$$A \Leftrightarrow B$$

akkor és csak akkor, ha

$$A \models B \text{ és } B \models A$$

nulladrendű nyelv	elsőrendű nyelv
$L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$	$L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$
◦ szemantikai szabályok	◦ szemantikai szabályok
◦ interpretáció ϱ	◦ interpretáció $\langle U, \varrho \rangle$ + változó értékelés: v
◦ modell	◦ modell

- kielégíthető formula
- kielégíthetetlen formula
- logikai következmény
- érvényes formula
- logikai ekvivalencia:

A múlt órán

- Interpretáció, változó értékelés, szemantikai szabályok
- Modell, kielégíthetőség, kielégíthetetlenség
- Logikai következmény, érvényesség, ekvivalencia

A mai órán

- Az eddig szereplő fogalmak rendszerezése
- A centrális logikai fogalmak tulajdonságai
- A kvantifikáció törvényei
- Kötött változók átnevezése, kongruens formulák, változótiszta formulák

nulladrendű nyelv

$L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$

elsőrendű nyelv

$L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$

- kielégíthető formulahalmaz minden részhalmaza kielégíthető

Tétel

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy **elsőrendű nyelv**, $\Gamma \subseteq Form$ egy formulahalmaz.

Ha Γ **kielégíthető formulahalmaz** és $\Delta \subseteq \Gamma$, akkor Δ **kielégíthető formulahalmaz**.

Megjegyzés

- A tétel röviden úgy fogalmazható meg, hogy egy **kielégíthető formulahalmaz** minden részhalmaza kielégíthető.
- Szemléletes értelemben a tétel azt mondja ki, hogy a logikai ellentmondástalanság szűkítéssel nem rontható el.

Bizonyítás

Legyen $\Gamma \subseteq Form$ egy tetszőleges **kielégíthető formulahalmaz**, és $\Delta \subseteq \Gamma$!

Γ kielégíthetősége miatt a Γ formulahalmaznak van modellje, legyen Γ egy modellje az $\langle U, \varrho, v \rangle$ rendezett hármas.

$\langle U, \varrho, v \rangle$ modell tulajdonsága: Ha $A \in \Gamma$, akkor $|A|_v^{\langle U, \varrho \rangle} = 1$

Mivel $\Delta \subseteq \Gamma$, ha $A \in \Delta$, akkor $A \in \Gamma$, s így $|A|_v^{\langle U, \varrho \rangle} = 1$. Azaz az $\langle U, \varrho, v \rangle$ rendezetthármas modellje Δ-nak, tehát Δ kielégíthető.

nulladrendű nyelv

$L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$

elsőrendű nyelv

$L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$

- kielégíthető formulahalmaz minden részhalmaza kielégíthető.

- kielégíthetetlen formulahalmaz minden bővítése kielégíthetetlen.

Tétel

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy **elsőrendű nyelv**, $\Gamma \subseteq Form$ egy formulahalmaz.

Ha Γ **kielégíthetetlen formulahalmaz**, és $\Gamma \subseteq \Delta$, akkor Δ **kielégíthetetelen formulahalmaz**.

Megjegyzés

- A tétel röviden úgy fogalmazható meg, hogy egy **kielégíthetetlen formulahalmaz** minden bővítése kielégíthetetlen.
- Szemléletes értelemben a tétel azt mondja ki, hogy a logikai ellentmondás bővítéssel nem szüntethető meg.

Bizonyítás

Indirekt bizonyítás:

Tegyük fel, hogy $\Gamma \subseteq Form$ tetszőleges **kielégíthetetlen formulahalmaz**, $\Delta \subseteq Form$ pedig tetszőleges formulahalmaz.

Indirekt feltétel: Γ kielégíthetetlen, és $\Gamma \cup \Delta$ kielégíthető.

$\Gamma \subseteq \Gamma \cup \Delta$

A **kielégíthetőségre vonatkozó tétel** miatt Γ kielégíthető, ez pedig ellentmondás.

nulladrendű nyelv

$L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$

elsőrendű nyelv

$L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$

- kielégíthető formulahalmaz minden részhalmaza kielégíthető.

- kielégíthetetlen formulahalmaz minden bővítése kielégíthetetlen.

- A következmény reláció átfogalmazása formulahalmaz kielégíthetetlenség segítségével

Következményreláció, nulladrendű nyelvek

Logikai következmény – szemantikai következmény – reláció

(Adott: $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$, $A \in Form$, $B \in Form$, $\Gamma \subseteq Form$)

- $A \in Form$ formulának következménye a B formula, $A \vDash B$, ha A minden modellje modellje B-nek is
- $\Gamma \subseteq Form$ formulahalmaznak következménye $B \in Form$ $\Gamma \vDash B$, ha Γ minden modellje modellje B-nek is.

Következményreláció, elsőrendű nyelvek

Logikai következmény – szemantikai következmény – reláció

$\boxed{L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle}$ $A \in Form$, $B \in Form$, $\Gamma \subseteq Form$)

- $A \in Form$ formulának következménye a B formula, $A \vDash B$, ha A minden modellje modellje B-nek is
- $\Gamma \subseteq Form$ formulahalmaznak következménye $B \in Form$, $\Gamma \vDash B$, ha Γ minden modellje modellje B-nek is.

Nulladrendben láttuk:

Adott $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$, $\Gamma \subseteq FORM$, $A \in Form$.

<u>Tétel</u>:

$\boxed{\Gamma \models A}$ akkor és csak akkor, ha $\boxed{\Gamma \cup \{\neg A\} \text{ kielégíthetetlen.}}$

A múlt héten ezt is láttuk: A következmény reláció átfogalmazása, elsőrendű nyelv estén

$L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$, $\Gamma \subseteq FORM$, $A \in Form$.

Tétel:

$\boxed{\Gamma \vDash A}$ akkor és csak akkor, ha $\boxed{\Gamma \cup \{\neg A\} \text{ kielégíthetetlen.}}$

<u>nulladrendű nyelv</u>

$L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$

<u>elsőrendű nyelv</u>

$L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$

- kielégíthető formulahalmaz minden részhalmaza kielégíthető.
- kielégíthetetlen formulahalmaz minden bővítése kielégíthetetlen.
- A következményreláció átfogalmazása formulahalmaz kielégíthetetlenségének segítségével
- Érvényes formula minden formulahalmaz következménye

Tétel

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ \ egy **elsőrendű nyelv**, $A \in Form$.

Ha A **érvényes formula** $(\vDash A)$, akkor minden $\Gamma \subseteq Form$ formulahalmaz esetén $\Gamma \vDash A$.

Megjegyzés

A tétel szemléletesen úgy is megfogalmazható, hogy egy érvényes formula minden formulahalmaznak következménye.

Bizonyítás

Ha A **érvényes** formula, akkor a definíció szerint $\emptyset \vDash A$.

Így $\emptyset \cup \{\neg A\} \backslash (= \{\neg A\})$ kielégíthetetlen, s így a **kielégíthetetlenségre kimondott tétel** alapján ennek a halmaznak a bővítései is kielégíthetetlenek.

$\Gamma \cup \{\neg A\}$ bővítése $\{\neg A\}$-nak, így kielégíthetetlen, tehát $\Gamma \vDash A$.

nulladrendű nyelv

$L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$

elsőrendű nyelv

$L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$

- kielégíthető formulahalmaz minden részhalmaza kielégíthető.
- kielégíthetetlen formulahalmaz minden bővítése kielégíthetetlen.
- A következményreláció átfogalmazása formulahalmaz kielégíthetetlenségének segítségével
- Érvényes formula minden formulahalmaz következménye
- Kielégíthetetlen formulahalmaznak minden formula következménye

Tétel

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle \setminus$ egy **elsőrendű nyelv** és $\Gamma \subseteq Form$ egy formulahalmaz..
Ha a Γ formulahalmaz **kielégíthetetlen**, akkor minden A formula esetén $\Gamma \vDash A$.

Megjegyzés

A tétel szemléletesen úgy is megfogalmazható, hogy egy kielégíthetetlen formulahalmaznak minden formula következménye.

Bizonyítás

A **már bizonyított tétel** szerint ha a Γ formulahalmaz kielégíthetetlen, akkor Γ minden bővítése is kielégíthetetlen.
$\Gamma \cup \{\neg A\}$ bővítése Γ-nak, így kielégíthetetlen, tehát $\Gamma \vDash A$.

nulladrendű nyelv

$L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$

elsőrendű nyelv

$L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$

- kielégíthető formulahalmaz minden részhalmaza kielégíthető.
- kielégíthetetlen formulahalmaz minden bővítése kielégíthetetlen.
- A következmény reláció átfogalmazása formulahalmaz kielégíthetetlensége segítségével
- Érvényes formula minden formulahalmaz következménye
  - Kielégíthetetlen formulahalmaznak minden formula következménye

- Következményreláció és implikáció
  - dedukció tétel és megfordítása

Tétel

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy **elsőrendű nyelv**, $\Gamma \subseteq Form$ egy formulahalmaz és $A, B \in Form$ két formula.

Ha $\Gamma \cup \{A\} \vDash B$, akkor $\Gamma \vDash (A \supset B)$.

Megjegyzés

$\Gamma \cup \{A\} \vDash B$ helyett gyakran használjuk a következő rövidebb írásmódot: $\Gamma, A \vDash B$

Bizonyítás

Indirekt feltétel: Tegyük fel, hogy $\Gamma \cup \{A\} \vDash B$ teljesül, de $\Gamma \vDash (A \supset B)$ nem teljesül.

Így $\Gamma \cup \{\neg(A \supset B)\}$ **kielégíthető**, tehát van **modellje**. Legyen egy modellje az $\langle U, \varrho, v \rangle$ rendezett hármas!

Az $\langle U, \varrho, v \rangle$ modell tulajdonságai:

1. Γ minden eleme igaz az $\langle U, \varrho \rangle$ **interpretáció** és a v **értékelés** szerint.
2. $|\neg(A \supset B)|_v^{\langle U, \varrho \rangle} = 1$

$|(A \supset B)|_v^{\langle U, \varrho \rangle} = 0$, azaz $|A|_v^{\langle U, \varrho \rangle} = 1$ és $|B|_v^{\langle U, \varrho \rangle} = 0$. Így $|\neg B|_v^{\langle U, \varrho \rangle} = 1$.

$\Gamma \cup \{A\} \cup \{\neg B\}$ formulahalmaz minden eleme igaz az $\langle U, \varrho \rangle$ **interpretáció** és a v **értékelés** szerint, azaz a formulahalmaz **kielégíthető**, tehát $\Gamma \cup \{A\} \vDash B$ nem teljesül, ami ellentmondás.

Tétel

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy **elsőrendű nyelv**, $\Gamma \subseteq Form$ egy formulahalmaz és $A, B \in Form$ két formula.

$\boxed{\text{Ha } \Gamma \vDash (A \supset B)\text{, akkor } \Gamma \cup \{A\} \vDash B.}$

Bizonyítás

Indirekt feltétel: Tegyük fel, hogy $\Gamma \vDash (A \supset B)$, és ugyanakkor $\Gamma \cup \{A\} \vDash B$ nem teljesül.

Így $\Gamma \cup \{A\} \cup \{\neg B\}$ **kielégíthető**, tehát van modellje. Legyen egy **modellje** az $\langle U, \varrho, v \rangle$ rendezett hármas!

Az $\langle U, \varrho, v \rangle$ modell tulajdonságai:

- Γ minden eleme igaz az $\langle U, \varrho \rangle$ interpretáció és v értékelés szerint.
- $|A|_v^{\langle U, \varrho \rangle} = 1$
- $|\neg B|_v^{\langle U, \varrho \rangle} = 1$, így $|B|_v^{\langle U, \varrho \rangle} = 0$

Így $|(A \supset B)|_v^{\langle U, \varrho \rangle} = 0$, következésképpen $|\neg(A \supset B)|_v^{\langle U, \varrho \rangle} = 1$.

$\Gamma \cup \{\neg(A \supset B)\}$ formulahalmaz minden eleme igaz az $\langle U, \varrho \rangle$ **interpretáció** és v **értékelés** szerint, azaz az $\langle U, \varrho, v \rangle$ rendezett hármas **modellje** a formulahalmaznak, ami egyben azt is jelenti, hogy a formulahalmaz **kielégíthető**. Tehát $\Gamma \vDash (A \supset B)$ nem teljesül, ami ellentmond indirekt feltételünknek.

A dedukciótétel és megfordításának következménye:

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy **elsőrendű nyelv**, és $A, B \in Form$ két formula.

$\boxed{A \vDash B \text{ akkor és csak akkor, ha } \vDash (A \supset B)}$

Bizonyítás

Alkalmazzuk a **dedukció tételt** és **megfordítását** abban az esetben, amikor $\Gamma = \emptyset$.

nulladrendű nyelv

$L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$

elsőrendű nyelv

$L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$

- kielégíthető formulahalmaz minden részhalmaza kielégíthető.
- kielégíthetetlen formulahalmaz minden bővítése kielégíthetetlen.
- A következményreláció átfogalmazása formulahalmaz kielégíthetetlenségének segítségével
- Érvényes formula minden formulahalmaz következménye
- Kielégíthetetlen formulahalmaznak minden formula következménye
- Következményreláció és implikáció
  - dedukció tétel és megfordítása
- Logikai ekvivalencia és "≡" (materiális ekvivalencia)

A dedukciótétel és megfordításának következménye:

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy **elsőrendű nyelv**, és $A, B \in Form$ két formula.

$A \vDash B$ akkor és csak akkor, ha $\vDash (A \supset B)$

Bizonyítás

Alkalmazzuk a **dedukció tételt** és **megfordítását** abban az esetben, amikor $\Gamma = \emptyset$.

A dedukciótétel és megfordításának következménye:

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy **elsőrendű nyelv** és $A, B \in Form$ két formula.

$A \Leftrightarrow B$ akkor és csak akkor, ha $\vDash (A \equiv B)$.

nulladrendű nyelv

$L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$

elsőrendű nyelv

$L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$

- kielégíthető formulahalmaz minden részhalmaza kielégíthető.
- kielégíthetetlen formulahalmaz minden bővítése kielégíthetetlen.
- A következményreláció átfogalmazása formulahalmaz kielégíthetetlensége segítségével
- Érvényes formula minden formulahalmaz következménye
- Kielégíthetetlen formulahalmaznak minden formula következménye
- Következményreláció és implikáció
  - dedukció tétel és megfordítása
- Logikai ekvivalencia és "$\equiv$" (materiális ekvivalencia)

A mai órán

- Az eddig szereplő fogalmak rendszerezése
- A centrális logikai fogalmak tulajdonságai
- A kvantifikáció törvényei
- Kötött változók átnevezése, kongruens formulák, változótiszta formulák

De Morgan törvények | Kifejezhetőség | Kvantorok mozgatása

Tétel

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy **elsőrendű nyelv**, $A \in Form$ egy formula és $x \in Var$ egy változó.

Ekkor

1. $\neg \exists x A \Leftrightarrow \forall x \neg A$
2. $\neg \forall x A \Leftrightarrow \exists x \neg A$

Első De Morgan törvény bizonyítása

A törvény bizonyításához először lássuk be, hogy $\neg\exists xA \vDash \forall x\neg A$.

Indirekt tegyük fel, hogy nem teljesül a következményreláció, azaz a $\{\neg\exists xA, \neg\forall x\neg A\}$ halmaz kielégíthető.

Ekkor a halmaznak van modellje, legyen a tekintett formulahalmaz egy modellje az $\langle U, \varrho, v \rangle$ rendezett hármas.

Az $\langle U, \varrho, v \rangle$ modell tulajdonságai:

1. $|\neg\exists xA|_v^{\langle U,\varrho\rangle} = 1$, és így $|\exists xA|_v^{\langle U,\varrho\rangle} = 0$
2. $|\neg\forall x\neg A|_v^{\langle U,\varrho\rangle} = 1$, azaz $|\forall x\neg A|_v^{\langle U,\varrho\rangle} = 0$

Az **univerzális kvantor szemantikai szabálya** szerint a 2. pont akkor teljesül, ha van olyan $u \in U$, hogy $|\neg A|_{v[x:u]}^{\langle U,\varrho\rangle} = 0$, azaz $|A|_{v[x:u]}^{\langle U,\varrho\rangle} = 1$.

Ez pedig az **egzisztenciális kvantor szemantikai szabálya** szerint azt jelenti, hogy $|\exists xA|_v^{\langle U,\varrho\rangle} = 1$, ami ellentmond az első pontnak.

Első De Morgan törvény bizonyítása

Most lássuk be, hogy $\forall x \neg A \vDash \neg \exists x A$.

Indirekt tegyük fel, hogy nem teljesül a következményreláció, azaz a $\{\forall x \neg A, \neg \neg \exists x A\}$ halmaz kielégíthető.

Ekkor a halmaznak van modellje, legyen a tekintett formulahalmaz egy modellje az $\langle U, \varrho, v \rangle$ rendezett hármas.

Az $\langle U, \varrho, v \rangle$ modell tulajdonságai:

1. $\left|\forall x \neg A\right|_v^{\langle U,\varrho \rangle} = 1$
2. $\left|\neg \neg \exists x A\right|_v^{\langle U,\varrho \rangle} = 1$, azaz $\left|\exists x A\right|_v^{\langle U,\varrho \rangle} = 1$

Az **egzisztenciális kvantor szemantikai szabálya** szerint a 2. pont akkor teljesül, ha van olyan $u \in U$, hogy $\left|A\right|_{v[x:u]}^{\langle U,\varrho \rangle} = 1$, azaz $\left|\neg A\right|_{v[x:u]}^{\langle U,\varrho \rangle} = 0$.

Ez pedig az **univerzális kvantor szemantikai szabálya** szerint azt jelenti, hogy $\left|\forall x \neg A\right|_v^{\langle U,\varrho \rangle} = 0$, ami ellentmond az első pontnak.

De Morgan törvények | Kifejezhetőség | Kvantorok mozgatása

Tétel

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy **elsőrendű nyelv**, $A \in Form$ egy formula és $x \in Var$ egy változó.

Ekkor

1. $\exists x A \Leftrightarrow \neg \forall x \neg A$
2. $\forall x A \Leftrightarrow \neg \exists x \neg A$

Bizonyítás

Ha a **kvantifikáció De Morgan törvényeinek** mindkét oldalát negáljuk, akkor a **kettős negáció törvényének** alkalmazásával megkapjuk a kifejezhetőségre vonatkozó logikai ekvivalenciákat.

---

1. $\neg \exists x A \Leftrightarrow \forall x \neg A$
2. $\neg \forall x A \Leftrightarrow \exists x \neg A$

Továbbá/1

- $\forall x \forall y\, A(x,y) \Longleftrightarrow \forall y \forall x\, A(x,y)$
  $\exists x \exists y\, A(x,y) \Longleftrightarrow \exists y \exists x\, A(x,y)$

- $\exists x \forall y\, A(x,y) \Longrightarrow \forall y \exists x\, A(x,y)$

Visszafelé nem igaz, hiszen tudunk mutatni olyan interpretációt, amikor a jobb oldal teljesül, de a bal nem. Például:

$U=\{a,b\}$ úgy, hogy $A(a,b)$ igaz, $A(b,a)$ igaz, az összes többi kombináció hamis.

(miért is?)

Továbbá/2

- $\exists x\,(A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow \exists x\, A(x) \vee \exists x\, B(x)$

  $\forall x\,(A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow \forall x\, A(x) \wedge \forall x\, B(x)$

- $\forall x\, A(x) \vee \forall x\, B(x) \Rightarrow \forall x\,(A(x) \vee B(x))$

  $\exists x\,(A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists x\, A(x) \wedge \exists x\, B(x)$

Visszafelé nem igaz, hiszen tudunk mutatni olyan interpretációt, amikor a jobb oldal teljesül, de a bal nem. Például:

$U = \{a, b\}$ úgy, hogy $A(a)$ igaz, $A(b)$ hamis,

és $B(a)$ hamis, $B(b)$ igaz.

(miért is?)

Azaz, összefoglalva

- $\forall x \forall y\, A(x,y) \Leftrightarrow \forall y \forall x\, A(x,y)$
  $\exists x \exists y\, A(x,y) \Leftrightarrow \exists y \exists x\, A(x,y)$

- $\exists x \forall y\, A(x,y) \Rightarrow \forall y \exists x\, A(x,y)$

- $\exists x\, (A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow \exists x\, A(x) \vee \exists x\, B(x)$
  $\forall x\, (A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow \forall x\, A(x) \wedge \forall x\, B(x)$

- $\forall x\, A(x) \vee \forall x\, B(x) \Rightarrow \forall x\, (A(x) \vee B(x))$
  $\exists x\, (A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists x\, A(x) \wedge \exists x\, B(x)$

(miért is?)

De Morgan törvények | Kifejezhetőség | Kvantorok mozgatása

Az alábbi törvényeket gyakran a kvantorok mozgatására vonatkozó törvényeknek nevezik. A tényleges tartalmukhoz közelebb állna, ha a kvantorok hatókörének bővítésére vonatkozó törvényeknek neveznénk ezeket.

Kvantorok és konjunkció | Kvantorok és diszjunkció | Univerzális kvantor és implikáció | Egzisztenciális kvantor és implikáció

Tétel

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy **elsőrendű nyelv**, $A, B \in Form$ két formula és $x \in Var$ egy változó.

Ha $x \notin FreeVar(A)$, akkor

1. $A \wedge \forall x B \Leftrightarrow \forall x(A \wedge B)$
2. $A \wedge \exists x B \Leftrightarrow \exists x(A \wedge B)$

Megjegyzés

- A konjunkció kommutativitása miatt a tétel közvetlen következménye az alábbi két logikai ekvivalencia:
  - Ha $x \notin FreeVar(A)$, akkor
    - $\forall x B \wedge A \Leftrightarrow \forall x(B \wedge A)$
    - $\exists x B \wedge A \Leftrightarrow \exists x(B \wedge A)$

De Morgan törvények | Kifejezhetőség | Kvantorok mozgatása

Az alábbi törvényeket gyakran a kvantorok mozgatására vonatkozó törvényeknek nevezik. A tényleges tartalmukhoz közelebb állna, ha a kvantorok hatókörének bővítésére vonatkozó törvényeknek neveznénk ezeket.

Kvantorok és konjunkció | Kvantorok és diszjunkció | Univerzális kvantor és implikáció | Egzisztenciális kvantor és implikáció

Tétel

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy **elsőrendű nyelv**, $A, B \in Form$ két formula és $x \in Var$ egy változó.

Ha $x \notin FreeVar(A)$, akkor

1. $A \wedge \forall x B \Leftrightarrow \forall x(A \wedge B)$
2. $A \wedge \exists x B \Leftrightarrow \exists x(A \wedge B)$

Ha $x \notin FreeVar(A)$, akkor

1. $A \vee \forall x B \Leftrightarrow \forall x(A \vee B)$
2. $A \vee \exists x B \Leftrightarrow \exists x(A \vee B)$

Megjegyzés

- A konjunkció kommutativitása miatt a tétel közvetlen következménye az alábbi két logikai ekvivalencia:
  - Ha $x \notin FreeVar(A)$, akkor
    - $\forall x B \wedge A \Leftrightarrow \forall x(B \wedge A)$
    - $\exists x B \wedge A \Leftrightarrow \exists x(B \wedge A)$
  - Ha $x \notin FreeVar(A)$, akkor
    - $\forall x B \vee A \Leftrightarrow \forall x(B \vee A)$
    - $\exists x B \vee A \Leftrightarrow \exists x(B \vee A)$

Tétel

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy **elsőrendű nyelv**, $A, B \in Form$ két formula és $x \in Var$ egy változó.

Ha $x \notin FreeVar(A)$, akkor

1. $A \supset \forall x B \Leftrightarrow \forall x(A \supset B)$
2. $\forall x B \supset A \Leftrightarrow \exists x(B \supset A)$

Tétel

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy **elsőrendű nyelv**, $A, B \in Form$ két formula és $x \in Var$ egy változó.

Ha $x \notin FreeVar(A)$, akkor

1. $A \supset \forall x B \Leftrightarrow \forall x(A \supset B)$
2. $\forall x B \supset A \Leftrightarrow \exists x(B \supset A)$

Ha $x \notin FreeVar(A)$, akkor

1. $A \supset \exists x B \Leftrightarrow \exists x(A \supset B)$
2. $\exists x B \supset A \Leftrightarrow \forall x(B \supset A)$

A mai órán

- Az eddig szereplő fogalmak rendszerezése
- A centrális logikai fogalmak tulajdonságai
- A kvantifikáció törvényei
- Kötött változók átnevezése, kongruens formulák, változótiszta formulák

3.P.4. Definíció. A QxA formulában a Q kvantor által *kötött x változó átnevezéséről* beszélünk, amikor

- a Qx kvantoros előtagban x helyett egy vele megegyező típusú y változót nevezünk meg, majd
- A-ban az x változó minden szabad előfordulását y-ra cseréljük ki (a kapott formulát jelöljük A^x_y-nal),

és így a QyA^x_y formulát kapjuk.

QxA

y-ra cseréljük

minden szabad x-et y-ra cseréljük

$\boxed{3.P.4.}$ $\forall x(P(x) \wedge R(\cancel{z}))$

y y

3.P.5. Definíció. A QxA formulából *szabályosan végrehajtott kötött változó átnevezéssel* kapjuk a QyA^x_y formulát, ha y nem paramétere QxA-nak, és az x változó egyetlen Q által kötött előfordulása sem tartozik egyetlen y-t kötő kvantor hatáskörébe sem.

$\boxed{3.P.5}$

de $\forall x(P(x) \wedge R(y))$!

de $\forall x(P(x) \wedge \exists y R(x,y))$

viszont

$\forall x(P(x) \wedge \exists y R(y))$

3.P.6. Definíció. Az A' formula az A formula *variánsa* (vagy A és A' *egymással kongruens formulák*) ha egymástól csak kötött változók szabályosan végrehajtott átnevezésében különböznek. Jelölése: $A \approx A'$.

3.P.4. Definíció. A QxA formulában a Q kvantor által *kötött x változó átnevezéséről* beszélünk, amikor

- a Qx kvantoros előtagban x helyett egy vele megegyező típusú y változót nevezünk meg, majd
- A-ban az x változó minden szabad előfordulását y-ra cseréljük ki (a kapott formulát jelöljük A^x_y-nal),

és így a QyA^x_y formulát kapjuk.

3.P.5. Definíció. A QxA formulából *szabályosan végrehajtott kötött változó átnevezéssel* kapjuk a QyA^x_y formulát, ha y nem paramétere QxA-nak, és az x változó egyetlen Q által kötött előfordulása sem tartozik egyetlen y-t kötő kvantor hatáskörébe sem.

3.P.6. Definíció. Az A' formula az A formula *variánsa* (vagy A és A' *egymással kongruens formulák*) ha egymástól csak kötött változók szabályosan végrehajtott átnevezésében különböznek. Jelölése: $A \approx A'$.

QxA

y-ra cseréljük

minden szabad x-et y-ra cseréljük

$\boxed{3.P.4.}$ $\forall \underset{y}{x}(P(\underset{y}{x}) \wedge R(\cancel{z}))$

$\boxed{3.P.5}$

de $\forall x(P(x) \wedge R(y))$!

de $\forall x(P(x) \wedge \exists y R(x,y))$

viszont

$\forall x(P(x) \wedge \exists y R(y))$

x-et nem lehet y-ra átnevezni

x-et át lehet y-ra nevezni

3.P.8. Megjegyzés. Segédeszköz annak eldöntésére, vajon két formula egymás variánsa-e:

- vonalak segítségével jelöljük meg, melyek a kötött változó-előfordulások, és mely kvantorok kötik ezeket;
- töröljük az összekötött változó-előfordulásokat a kvantoros előtagban található változó-megnevezéssel együtt.

Az így kapott alakzatot az eredeti *formula vázának* nevezzük. Két formula pontosan akkor lesz egymás variánsa, ha megegyező a vázuk.

(a) A formulák nem egymás variánsai, mivel vázuk különbözik:

$$\exists x P(x,y) \qquad \exists x P(x,z) \qquad \exists y P(y,y)$$

$$\exists \ \ P(\ \ ,y) \qquad \exists \ \ P(\ \ ,z) \qquad \exists \ \ P(\ \ ,\ \ )$$

3.P.8. Megjegyzés. Segédeszköz annak eldöntésére, vajon két formula egymás variánsa-e:

- vonalak segítségével jelöljük meg, melyek a kötött változó-előfordulások, és mely kvantorok kötik ezeket;
- töröljük az összekötött változó-előfordulásokat a kvantoros előtagban található változó-megnevezéssel együtt.

Az így kapott alakzatot az eredeti *formula vázának* nevezzük. Két formula pontosan akkor lesz egymás variánsa, ha megegyező a vázuk.

(b) A két formula egymás variánsa, mivel vázuk megegyezik:

$$\exists x P(x,y) \supset \forall z P(x,z) \qquad \exists z P(z,y) \supset \forall y P(x,y)$$

$$\exists \ \ P(\ \ ,y) \supset \forall \ \ P(x,\ \ ) \qquad \exists \ \ P(\ \ ,y) \supset \forall \ \ P(x,\ \ )$$

3.P.3. Vizsgáljuk meg, hogy szabályos-e az univerzálisan kvantált x változó átnevezése y változóra az alábbi formulák esetén, és hajtsuk végre a szabályos átnevezést, amennyiben ez lehetséges!

(a) $\forall x(P(x,y) \vee \neg Q(y,x))$

(b) $\forall x \exists y Q(x,y)$

(c) $\forall x(Q(x,x) \supset \exists x \exists y R(x,y))$

3.P.3. Vizsgáljuk meg, hogy szabályos-e az univerzálisan kvantált x változó átnevezése y változóra az alábbi formulák esetén, és hajtsuk végre a szabályos átnevezést, amennyiben ez lehetséges!

(a) $\forall x(P(x,y) \vee \neg Q(y,x))$

(b) $\forall x \exists y Q(x,y)$

(c) $\forall x(Q(x,x) \supset \exists x \exists y R(x,y))$

Megoldás

(a) Az átnevezés nem szabályos, mert az y változó paramétere a formulának.
$$\mathrm{Par}(\forall x(P(x,y) \vee \neg Q(y,x))) = \{y\}$$

(b) Az átnevezés nem szabályos, mert található olyan y változót kötő kvantor, melynek hatásköre a $\exists y Q(x,y)$ formula, ahol az x változó előfordulása a tekintett univerzális kvantor által kötött.

(c) Az átnevezés szabályos, mivel y nem paraméter, és x változót csak a $Q(x,x)$ részformulában köti az univerzális kvantor, és ezen változó előfordulások nem esnek y-t kötő kvantor hatáskörébe.

Behelyettesíthetőség | Átnevezés | Kongruens formulák | Változótiszta alak | Prenex alak

Definíció

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy **elsőrendű nyelv** és $A \in Form$ egy formula.
Az A formulát változóiban tisztának nevezünk, ha

1. szabad és kötött változói diszjunkt halmazt alkotnak, azaz $FreeVar(A) \cap BoundVar(A) = \emptyset$,
2. minden kötött változó pontosan egyszer fordul elő kvantort közvetlenül követő pozícióban (minden kötött változó pontosan egy kvantornak a változója).

Tétel

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy **elsőrendű nyelv** és $A \in Form$ egy formula.
Ekkor létezik olyan $B \in Form$ formula, hogy

1. a B formula változóiban tiszta,
2. a B formula kongruens az A formulával, azaz $B \in Cong(A)$.

Megjegyzés

- A tételben szereplő B formula a kongruencia miatt logikailag ekvivalens az A formulával.

Például: $R(x) \wedge \exists x \neg (P(y,c) \supset \exists x R(x) \vee \forall y Q(x,y,z))$

Behelyettesíthetőség | Átnevezés | Kongruens formulák | Változótiszta alak | Prenex alak

Definíció

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy **elsőrendű nyelv** és $A \in Form$ egy formula.

Az A formulát változóiban tisztának nevezünk, ha

1. szabad és kötött változói diszjunkt halmazt alkotnak, azaz $FreeVar(A) \cap BoundVar(A) = \emptyset$,
2. minden kötött változó pontosan egyszer fordul elő kvantort közvetlenül követő pozícióban (minden kötött változó pontosan egy kvantornak a változója).

Tétel

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy **elsőrendű nyelv** és $A \in Form$ egy formula.

Ekkor létezik olyan $B \in Form$ formula, hogy

1. a B formula változóiban tiszta,
2. a B formula kongruens az A formulával, azaz $B \in Cong(A)$.

Megjegyzés

- A tételben szereplő B formula a kongruencia miatt logikailag ekvivalens az A formulával.

Például:

$$R(x) \wedge \exists x \neg (P(y,c) \supset \exists x R(x) \vee \forall y Q(x,y,z))$$

$$R(x) \wedge \exists x \neg (P(y,c) \supset \exists x R(x) \vee \forall y Q(x,y,z))$$

Definíció

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy **elsőrendű nyelv** és $A \in Form$ egy formula.
Az A formulát változóiban tisztának nevezünk, ha

1. szabad és kötött változói diszjunkt halmazt alkotnak, azaz $FreeVar(A) \cap BoundVar(A) = \emptyset$,
2. minden kötött változó pontosan egyszer fordul elő kvantort közvetlenül követő pozícióban (minden kötött változó pontosan egy kvantornak a változója).

Tétel

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy **elsőrendű nyelv** és $A \in Form$ egy formula.
Ekkor létezik olyan $B \in Form$ formula, hogy

1. a B formula változóiban tiszta,
2. a B formula kongruens az A formulával, azaz $B \in Cong(A)$.

Megjegyzés

- A tételben szereplő B formula a kongruencia miatt logikailag ekvivalens az A formulával.

Például:

$$R(x) \wedge \exists x \neg (P(y,c) \supset \exists x R(x) \vee \forall y Q(x,y,z))$$

$$R(x) \wedge \exists x \neg (P(y,c) \supset \exists x R(x) \vee \forall y Q(x,y,z))$$

$$\boxed{R(x) \wedge \exists u \neg (P(y,c) \supset \exists v R(v) \vee \forall w Q(u,w,z))}$$

A mai órán

- Az eddig szereplő fogalmak rendszerezése
- A centrális logikai fogalmak tulajdonságai
- A kvantifikáció törvényei
- Kötött változók átnevezése, kongruens formulák, változótiszta formulák

Ha maradt idő…

(Nem maradt rá idő, úgyhogy a prenex normálforma a jövő hétre marad)

Definíció

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy tetszőleges **elsőrendű nyelv**.

Az $A \in Form$ formulát $\boxed{\text{prenex alakúnak nevezzük}}$, ha az alábbi két feltétel valamelyike teljesül:

1. az A formula kvantormentes, azaz sem a ∀ sem a ∃ kvantor nem szerepel benne;
2. az A formula $Q_1 x_1 Q_2 x_2 ... Q_n x_n B$ $(n = 1, 2, ...)$ alakú, ahol
   a. $B \in Form$ kvantormentes formula;
   b. $x_1, x_2 ... x_n \in Var$ különböző változók;
   c. $Q_1, Q_2, ..., Q_n \in \{\forall, \exists\}$ kvantorok.

Megjegyzés

- A definíció értelmében ha az A formula kvantormentes, azaz egyetlen kvantor sem szerepel benne, akkor az A formula prenex alakú.

Például:

Prenexformulák: $\neg P(x, x)$, $\forall x \forall y (Q(x, y) \supset \neg P(x))$

Nem prenexformula: $\forall x \forall y Q(x, y) \supset \neg P(x)$

Tétel

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy tetszőleges **elsőrendű nyelv** és $A \in Form$.

Ekkor létezik olyan $B \in Form$, hogy

1. a B formula prenex alakú,
2. $A \Leftrightarrow B$.

A prenex alakra hozás lépései

1. A $(A \equiv B) \Leftrightarrow ((A \supset B) \wedge (B \supset A))$ ekvivalencia segítségével a **(materiális) ekvivalencia** műveletét fel kell oldani.
2. Változótiszta alakra hozás, azaz meg kell határozni az eredeti formulával kongruens **változóiban tiszta formulát**.
3. A **kvantifikáció De Morgan törvényeivel** és az **állításlogikában megtanult ekvivalenciákkal** el kell érni, hogy egyetlen negáció hatókörében se szerepeljen kvantor.
4. **Kvantormozgatási ekvivalenciák** alkalmazásával a kvantorok a formula elejére vihetők.

Például:

Hozzuk a

$$\forall x(\forall y Q(x,y) \supset \neg\exists x P(x)) \supset \forall y Q(x,y)$$

formulát prenex alakúra.

1. Változóiban tiszta alakra hozás:

$$\forall v(\forall w Q(v,w) \supset \neg\exists z P(z)) \supset \forall y Q(x,y)$$

Például:

Hozzuk a

$$\forall x(\forall y Q(x,y) \supset \neg\exists x P(x)) \supset \forall y Q(x,y)$$

formulát prenex alakúra.

1. Változóiban tiszta alakra hozás:

$$\forall v(\forall w Q(v,w) \supset \neg\exists z P(z)) \supset \forall y Q(x,y)$$

2. De Morgan törvényeinek alkalmazása:

$$\forall v(\forall w Q(v,w) \supset \forall z \neg P(z)) \supset \forall y Q(x,y)$$

1. $\neg\exists x A \Leftrightarrow \forall x \neg A$
2. $\neg\forall x A \Leftrightarrow \exists x \neg A$

Például:

Ha $x \notin FreeVar(A)$, akkor

1. $A \supset \forall x B \Leftrightarrow \forall x(A \supset B)$
2. $\forall x B \supset A \Leftrightarrow \exists x(B \supset A)$

Ha $x \notin FreeVar(A)$, akkor

1. $A \supset \exists x B \Leftrightarrow \exists x(A \supset B)$
2. $\exists x B \supset A \Leftrightarrow \forall x(B \supset A)$

Hozzuk a

$$\forall x(\forall y Q(x,y) \supset \neg\exists x P(x)) \supset \forall y Q(x,y)$$

formulát prenex alakúra.

1. Változóiban tiszta alakra hozás:

$$\forall v(\forall w Q(v,w) \supset \neg\exists z P(z)) \supset \forall y Q(x,y)$$

2. De Morgan törvényeinek alkalmazása:

$$\forall v(\forall w Q(v,w) \supset \forall z \neg P(z)) \supset \forall y Q(x,y)$$

3. Kvantorkiemelés:

$$\forall v \exists w \forall z(Q(v,w) \supset \neg P(z)) \supset \forall y Q(x,y)$$

Például:

Ha $x \notin FreeVar(A)$, akkor

1. $A \supset \forall x B \Leftrightarrow \forall x(A \supset B)$
2. $\forall x B \supset A \Leftrightarrow \exists x(B \supset A)$

Ha $x \notin FreeVar(A)$, akkor

1. $A \supset \exists x B \Leftrightarrow \exists x(A \supset B)$
2. $\exists x B \supset A \Leftrightarrow \forall x(B \supset A)$

Hozzuk a

$$\forall x(\forall y Q(x,y) \supset \neg\exists x P(x)) \supset \forall y Q(x,y)$$

formulát prenex alakúra.

1. Változóiban tiszta alakra hozás:

$$\forall v(\forall w Q(v,w) \supset \neg\exists z P(z)) \supset \forall y Q(x,y)$$

2. De Morgan törvényeinek alkalmazása:

$$\forall v(\forall w Q(v,w) \supset \forall z \neg P(z)) \supset \forall y Q(x,y)$$

3. Kvantorkiemelés:

$$\forall v \exists w \forall z(Q(v,w) \supset \neg P(z)) \supset \forall y Q(x,y)$$

4. Kvantorkiemelés:

$$\exists v \forall w \exists z \forall y((Q(v,w) \supset \neg P(z)) \supset Q(x,y))$$