Debreceni Egyetem

Természettudományi és Technológiai Kar

Kalkulus példatár

Gselmann Eszter

Debrecen, 2021

Tartalomjegyzék

Előszó

- Lehetek a tanítványod?
- Csak azért vagy tanítvány, mert szemed zárva van.
Mihelyt megnyitod, már nem lesz mit tanulnod tőlem, vagy bárki mástól.
- Mi szükség van akkor Mesterre?
- Hogy megláttassa veled, mennyire haszontalan dolog Mesterre hagyatkozni.

(Anthony De Mello)

Ezt a példatárat a Debreceni Egyetem Informatikai Karán a programtervező informatikus, illetve mérnökinformatikus BSc képzésben résztvevő hallgatók számára készítettem. Az itt található anyag teljesen lefedi a számukra első évfolyamon kötelező *Kalkulus* gyakorlat anyagát és szervesen kötődik a Kalkulus jegyzetemhez. A 2005/06-os tanév első félévében, még demonstrátorként kezdtem el Kalkulus 1, illetve 2 gyakorlatot tanítani a különböző képzésekben résztvevő informatikus hallgatók számára, majd 2011-től, már tanársegédként előadást is tartottam. Mind az előadásaimhoz, mind a gyakorlataimhoz már akkor elkezdtem különféle oktatási segédanyagokat készíteni. Az akkor még két féléves tantárgy mára egy féléves lett, az oktatási segédanyagaim pedig ennek a hosszú folyamatnak a során többször átalakultak, formálódtak. Minden javítás, módosítás során a hallgatók szempontjait igyekeztem szem előtt tartani. Ennek megfelelően minden fejezet úgy épül fel, hogy először a feladatok megoldásához nélkülözhetetlen definíciók és állítások szerepelnek, majd ezt követően a feladatok. Törekedtem arra, hogy az egyes fejezetek feladatanyaga jóval bővebb legyen, mint amennyi példát az egyes gyakorlatokon meg lehet oldani. A fennmaradó feladatok jól jöhetnek gyakorláskor, illetve a zárthelyi dolgozatokra való készüléskor. Bár ez a példatár kifejezetten a Kalkulus gyakorlatokhoz készült, tematikáját tekintve lefedi a valós analízis egy jó részét. Így abban reménykedem, hogy más képzések hallgatói is haszonnal forgathatják.

Köszönettel tartozom minden egykori hallgatómnak, a velük való közös munka remélem, hogy ezekben a segédanyagokban is tükröződik.

Debrecen, 2021. augusztus 31.

Gselmann Eszter

A tananyag elkészítését az EFOP-3.4.3-16-2016-00021 számú projekt támogatta. A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósult meg.

1. fejezet

Valós számsorozatok

Elméleti áttekintés

Alapfogalmak és kapcsolatuk

1.1. Definíció. *Egy $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ függvényt **valós számsorozat**nak nevezünk.*

1.2. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valós számsorozat **(alulról/felülről) korlátos**, ha az $\{x_n | n \in \mathbb{N}\}$ számhalmaz (alulról/felülről) korlátos.*

1.3. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat **monoton növekedő/csökkenő**, ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén*

$$x_n \leq x_{n+1} \quad \textit{illetve} \quad x_n \geq x_{n+1}$$

teljesül. Továbbá, ha a fenti egyenlőtlenségek minden $n \in \mathbb{N}$ esetén szigorúak, úgy szigorú monoton növekedésről, illetve csökkenésről beszélünk.

1.4. Definíció. *Az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot **konvergens**nek nevezzük, ha létezik olyan $x \in \mathbb{R}$, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \geq n(\varepsilon)$ esetén $|x_n - x| \leq \varepsilon$ teljesül, erre a továbbiakban a $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ jelölést fogjuk használni.*

1.5. Definíció. *Az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot **divergens**nek nevezzük, ha nem konvergens, azaz, ha tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén létezik olyan $\varepsilon > 0$, hogy tetszőleges $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ esetén létezik olyan $n \geq n(\varepsilon)$, hogy $|x_n - x| > \varepsilon$.*

1.6. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat $+\infty$**-hez divergál**, hogy tetszőleges $K \in \mathbb{R}$ esetén létezik olyan $n(K) \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \geq n(K)$ esetén $x_n \geq K$ teljesül. Azt mondjuk, hogy az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat $-\infty$**-hez divergál**, hogy tetszőleges $k \in \mathbb{R}$ esetén létezik olyan $n(k) \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \geq n(K)$ esetén $x_n \leq k$ teljesül.*

1.1. Tétel (Konvergens sorozat határértéke egyértelmű). *Legyenek $x, y \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, ha $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy olyan számsorozat, mely egyaránt tart az x és y bővített valós számokhoz, akkor $x = y$.*

1.2. Tétel (konvergencia $\Rightarrow$ korlátosság). *Minden konvergens sorozat korlátos.*

1.3. Tétel. *Egy monoton növekedő sorozat alulról, míg egy monoton csökkenő sorozat felülről korlátos.*

1.4. Tétel (monotonitás+korlátosság $\Rightarrow$ konvergencia). *Egy monoton sorozat pontosan akkor konvergens, ha korlátos.*

1.7. Definíció. *Legyen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy valós számsorozat $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ egy szigorúan monoton függvény, ekkor ay $y_n = x_{\varphi(n)}$ ($n \in \mathbb{N}$) sorozatot az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat **részsorozat**ának nevezzük.*

1.5. Tétel. *Konvergens sorozat bármely részsorozata is konvergens, és a két sorozat határértéke megegyezik.*

1.8. Definíció. *Az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot **Cauchy-sorozat**nak nevezzük, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, hogy minden $n, m \geq n(\varepsilon)$ esetén $|x_n - x_m| \leq \varepsilon$ teljesül.*

1.6. Tétel (konvergens sorozat $\Leftrightarrow$ Cauchy-sorozat). *Egy valós számsorozat pontosan akkor konvergens, ha Cauchy-sorozat.*

Konvergencia és műveletek

1.7. Tétel. *Legyen* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *és* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *két konvergens sorozat, tegyük fel továbbá, hogy* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ *és* $\lim_{n\to\infty} y_n = y$*. Ekkor az* $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *és az* $(x_n \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozatok is konvergensek és*

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = x + y \quad \textit{és} \quad \lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = xy.$$

Továbbá, ha $\lambda \in \mathbb{R}$ *és* $k \in \mathbb{N}$ *tetszőlegesek, akkor a* $(\lambda \cdot x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *és az* $(x_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozatok is konvergensek és*

$$\lim_{n\to\infty}(\lambda \cdot x_n) = \lambda \cdot x \quad \textit{és} \quad \lim_{n\to\infty}(x_n^k) = x^k.$$

Valamint, ha tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ *esetén* $x_n \neq 0$ *és* $x \neq 0$*, akkor az* $(y_n/x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat is konvergens és*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = \frac{y}{x}.$$

1.1. Következmény. *Ha* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$*, akkor tetszőleges* $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *polinom esetén a* $(P(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat is konvergens és*

$$\lim_{n\to\infty} P(x_n) = P(x).$$

Konvergencia és rendezés

1.8. Tétel. *Legyenek* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *és* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *olyan valós számsorozatok, amelyeknek létezik* x*, illetve* y *bővített valós szám határértéke. Ha minden* $n \in \mathbb{N}$ *esetén*

$$x_n \leq y_n$$

teljesül, akkor $x \leq y$*.*

1.9. Tétel (A jeltartás tétele). *Ha az* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *olyan konvergens sorozat, melyre* $\lim_{n\to\infty} x_n \neq 0$*, akkor véges sok* $n \in \mathbb{N}$ *index kivételével*

$$\mathrm{sgn}(x_n) = \mathrm{sgn}(x)$$

teljesül.

1.10. Tétel (Rendőr–elv). *Ha az* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *és* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozatoknak közös a határértéke és a* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat olyan, hogy minden* $n \in \mathbb{N}$ *esetén*

$$x_n \leq z_n \leq y_n$$

teljesül, akkor a $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat is konvergens és*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Nevezetes sorozatok és határértékeik

1. Legyen $r \in \mathbb{Q}, r > 0$. Ekkor
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^r} = 0 \qquad \text{és} \qquad \lim_{n\to\infty} n^r = +\infty.$$

2. Legyen $k \in \mathbb{N}$ és $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1} \in \mathbb{R}$ és $a_k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Tekintsük az
$$x_n = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \ldots + a_1 n + a_0$$
sorozatot. Ekkor
$$\lim_{n\to\infty} x_n = \begin{cases} +\infty, & \text{ha} \quad a_n > 0 \\ -\infty, & \text{ha} \quad a_n < 0. \end{cases}$$

3. $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

4.
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty.$$

5. Legyen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan sorozat, mely esetén léteznek olyan $a, b > 0$ és $N > 0$ számok, hogy minden $n > N$ esetén $a < x_n < b$. Ekkor
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = 1.$$
Speciálisan, tetszőleges $a > 0$ esetén
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

6. Tetszőleges $a \in \mathbb{R}$ esetén
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

7.
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

8. Tetszőleges $k \in \mathbb{N}$ esetén
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{n!} = 0.$$

9.
$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

10. Legyen $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy olyan sorozat, mely vagy $+\infty$–hez, vagy $-\infty$–hez divergál, ekkor
$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{p_n}\right)^{p_n} = e.$$

11. Tekintsük az $x_n = q^n, n \in \mathbb{N}$ úgynevezett geometriai sorozatot.
    - ha $|q| < 1$, akkor az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens és $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$;
    - ha $q = 1$, akkor az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens és határértéke 1;
    - ha $q > 1$, akkor az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat $+\infty$–hez divergál;
    - ha $q = -1$, akkor az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat korlátos és divergens;
    - ha $q < -1$, akkor az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat nem korlátos és divergens.

12. Legyen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan konvergens sorozat, melyre $\lim_{n\to\infty} x_n \in]-1, 1[$. Ekkor
$$\lim_{n\to\infty} x_n^n = 0.$$

13. Legyen $k \in \mathbb{N}$ és $q \in \mathbb{R}, q > -1$. Ekkor
$$\lim_{n\to\infty} q^n n^k = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad q \in]-1, 1[\\ +\infty, & \text{ha} \quad q > 1. \end{cases}$$

14. Legyen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan konvergens sorozat, melynek határértéke $x \in \mathbb{R}$. Legyen továbbá,
$$\sigma_n = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \qquad (n \in \mathbb{N})$$
az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat úgynevezett számtani-közép–sorozata. Ekkor a $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat is konvergens és
$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = x.$$

Feladatok

Valós számsorozatok korlátossága és monotonitása

1.1. Feladat. *Írjuk fel az alább $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valós számsorozatok első öt elemét.*

(a)
$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(b)
$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{n-1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(c)
$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$$

(d)
$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(n^2-1\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(e)
$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left((-1)^n n^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(f)
$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1+(-1)^n}{2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(g)
$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sqrt[n]{2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(h)
$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(i)
$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1-n}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(j)
$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{2^n}{2^{n+1}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(k)
$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{2^n-1}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

1.2. Feladat. *Vizsgáljuk meg korlátosság, monotonitás és konvergencia szempontjából az alábbi sorozatokat.*

(a)
$$\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(b)
$$((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$$

(c)
$$(n)_{n\in\mathbb{N}}$$

(d)
$$\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(e)
$$\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(f)
$$((-1)^n n)_{n\in\mathbb{N}}$$

(g)
$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(h)
$$(n!)_{n\in\mathbb{N}}$$

(i)
$$\left(n^2-22n+121\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

1.3. Feladat. *Mutassuk meg, hogy ha $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (szigorúan) monoton növekedő/csökkenő sorozatok, akkor $(x_n+y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is (szigorúan) monoton növekedő/csökkenő.*

1.4. Feladat. *Mutassuk meg, hogy ha $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (szigorúan) monoton növekedő/csökkenő sorozat, akkor $(-x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (szigorúan) monoton csökkenő/növekedő.*

1.5. Feladat. *Írjuk fel zárt alakban az alábbi rekurzívan megadott valós számsorozatokat.*

(a)
$$x_1 = 1 \qquad x_{n+1} = x_n + \frac{1}{2^n} \qquad (n\in\mathbb{N})$$

(b)
$$x_1 = 1 \qquad x_{n+1} = \frac{x_n}{n+1} \qquad (n\in\mathbb{N})$$

(c)
$$x_1 = 2 \qquad x_{n+1} = (-1)^{n+1}\frac{x_n}{2} \qquad (n\in\mathbb{N})$$

(d)
$$x_1 = -2 \qquad x_{n+1} = \frac{nx_n}{n+1} \qquad (n\in\mathbb{N})$$

(e)
$$x_1 = x_2 = 1 \qquad x_{n+2} = x_{n+1} + x_n \qquad (n\in\mathbb{N})$$

(f)
$$x_1 = 2,\ x_2 = -1 \qquad x_{n+2} = \frac{x_{n+1}}{x_n} \qquad (n\in\mathbb{N})$$

Valós számsorozatok konvergenciája

1.6. Feladat. *Ha* $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, *akkor igazoljuk, hogy az* $(|x_n|)$ *sorozat* $|x_0|$*-hoz konvergál.*

1.7. Feladat. *Adjunk meg olyan korlátos valós sorozatot, mely divergens.*

1.8. Feladat. *Adjunk meg olyan* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *valós divergens sorozatot, melyre az* $(|x_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat konvergens.*

1.9. Feladat. *Legyenek* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *és* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *divergens sorozatok.*

(a) Igaz-e, hogy az $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat is divergens?*

(b) Igaz-e, hogy az $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat konvergens?*

(c) Igaz-e, hogy az $(x_n \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat divergens?*

(d) Igaz-e, hogy az $(x_n \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat konvergens?*

1.10. Feladat. *Adjunk példát olyan* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *és* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozatokra, melyekre*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \quad \textit{és} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = -\infty$$

úgy, hogy

(a) $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = +\infty$*;*

(b) $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = -\infty$*;*

(c) $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = c$*, ahol* c *egy előre rögzített valós szám.*

(d) az előző esetek egyike sem teljesül.

1.11. Feladat. *Adjunk példát olyan* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *és* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozatokra, melyekre*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \quad \textit{és} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = -\infty$$

úgy, hogy

(a) $\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = +\infty$*;*

(b) $\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = -\infty$*;*

(c) $\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = c$*, ahol* c *egy előre rögzített valós szám;*

(d) az $(x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat korlátos és divergens;*

(e) az $(x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat nem korlátos és divergens.*

1.12. Feladat. *Adjunk példát olyan* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *és* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozatokra, melyekre*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \quad \textit{és} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = 0$$

úgy, hogy

(a) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = +\infty$*;*

(b) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = -\infty$*;*

(c) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = c$*, ahol* c *egy előre rögzített valós szám;*

(d) a fentiek egyike sem teljesül.

1.13. Feladat. *Tegyük fel, hogy az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és az $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatokra*

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = 0$$

teljesül. Következik-e ebből, hogy legalább az egyik sorozat nullsorozat?

1.14. Feladat. *Legyen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy valós számsorozat, és*

$$\alpha_n = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \qquad (n \in \mathbb{N})\,.$$

Mutassuk meg, hogy

1. *ha az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat korlátos, akkor*

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \leq \liminf_{n\to\infty} \alpha_n \leq \limsup_{n\to\infty} \alpha_n \leq \limsup_{n\to\infty} x_n;$$

2. *ha az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens, akkor az $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat is konvergens és*

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

3. *következik-e az $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergenciájából az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergenciája?*

1.15. Feladat. *Legyen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy pozitív valós számokból álló, konvergens sorozat és*

$$\beta_n = \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \qquad (n \in \mathbb{N})\,.$$

Mutassuk meg, hogy ekkor a $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat is konvergens és

$$\lim_{n\to\infty} \beta_n = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

1.16. Feladat. *Legyenek $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ rögzítettek és*

$$x_1 = \alpha,\ x_2 = \beta, \quad \text{és} \quad x_n = \frac{x_{n-1} + x_{n-2}}{2} \qquad (n \geq 3)\,.$$

Mutassuk meg, hogy az így megadott $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens, és határozzuk meg a határértékét.

1.17. Feladat. *Legyen $x_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tetszőleges és*

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right) \qquad (n \in \mathbb{N})\,.$$

Igazoljuk, hogy az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens és $\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2}$.

1.18. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy a $(n^{(-1)^n})_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat divergens.*

1.19. Feladat. *Döntsük el, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak. A hamis állításokat ellenpéldával támasszuk alá.*

(a) Van legalább egy olyan valós számsorozat, ami konvergens.

(b) Van legalább egy olyan valós számsorozat, ami divergens.

(c) Minden valós számsorozat vagy monoton növekedő vagy monoton csökkenő.

(d) Van olyan Cauchy-sorozat, ami nem korlátos.

(e) Minden monoton sorozatnak van korlátos részsorozata.

(f) Minden valós számsorozatnak van korlátos részsorozata.

(g) Ha egy valós számsorozat minden részsorozata korlátos, akkor ez a sorozat konvergens.

(h) Ha az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens, akkor az $(x_{n+10})_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat is az, de a két sorozat határértéke nem feltétlenül egyezik meg.

(i) Ha az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatokra az teljesül, hogy $(x_n - y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nullsorozat, akkor ezek a sorozatok Cauchy-sorozatok.

(j) Ha egy valós számsorozatnak van két különböző szigorúan monoton csökkenő részsorozata, akkor ez a sorozat szigorúan monoton csökkenő.

(k) Ha egy valós számsorozatnak minden részsorozata Cauchy-sorozat, akkor ez a sorozat konvergens.

1.20. Feladat. *Vizsgáljuk meg, hogy konvergensek-e az alábbi sorozatok.*

(a)
$$\left(\frac{n-2}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(b)
$$\left(\frac{n+1999}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(c)
$$\left(\frac{n}{3n+2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(d)
$$\left(\frac{\pi n^2+1}{2n-5}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(e)
$$\left(\frac{3n^2-2n+5}{2n^2+8}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(f)
$$\left(\frac{2n^2+12}{3-n-3n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(g)
$$\left(\frac{1-3n^2}{n-2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(h)
$$\left(\frac{-2n^2-5n+12}{2-8n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(i)
$$\left(\frac{n^3-n+3}{n^2-1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(j)
$$\left(\frac{n^5-25n^3}{7n^9-2n^7}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(k)
$$\left(\frac{(n+4)^3-n(n+6)^2}{n^3}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(l)
$$\left(\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

1.21. Feladat. *Számítsuk ki a következő sorozatok határértékét.*

(a)
$$\left(\sqrt{\frac{2n}{n+1}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(b)
$$\left(\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(c)
$$\left(\frac{\sqrt{1+2n}}{1+\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(d)
$$\left(\frac{\sqrt[4]{n^3+n}-n}{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(e)
$$\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(f)
$$\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(g)
$$\left(\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(h)
$$\left(\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(i)
$$\left(\frac{\sqrt[n]{8}-1}{\sqrt[n]{2}-1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

1.22. Feladat. *Határozzuk meg az alábbi sorozatok határértékét.*

(a)
$$\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(b)
$$\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(c)
$$\left(\sqrt{n+\pi}-\sqrt{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(d)
$$\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(e)
$$\left(\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(f)
$$\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(g)
$$\left(\sqrt{n+\sqrt[3]{n^2}}-\sqrt{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(h)
$$\left(\sqrt{2n^2+3n}-\sqrt{2n^2-2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(i)
$$\left(n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\sqrt{1-\frac{2}{n}}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(j)
$$\left(n-\sqrt{n^n+n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(k)
$$\left(\frac{1}{\sqrt{n^1+1}-\sqrt{n^2+n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

1.23. Feladat. *A Rendőr-elv felhasználásával határozzuk meg az alábbi sorozatok határértékét.*

(a)
$$\left(\sqrt[n]{n^3+3n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(b)
$$\left(\sqrt[2n]{n^2-16}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(c)
$$\left(\sqrt[n]{3^n+2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(d)
$$\left(\frac{2n+\sin(2n)}{3n+\cos(3n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(e)
$$\left(\frac{\sin(n)}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(f)
$$\left(\frac{3\sin(n)+7\cos\left(\frac{n}{2}\right)+6n^2}{1-2n^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(g)
$$\left(\frac{\sin^2(n)}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(h)
$$\left(\frac{n+\cos(n)}{2n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(i)
$$\left(\frac{n^2-\cos(n)}{n+\sin(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(j)
$$\left(\frac{(n+1)^2-(n-1)^2}{2n+1}\cos(n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(k)
$$\left(\frac{n+\cos(n)}{n^2+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(l)
$$\left(\frac{2n^2 + n\cos(n) - 1}{n^2 - \sin(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(m)
$$\left(\frac{n\sin(n^2+1)}{n^2+3}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(n)
$$\left(\sqrt[n]{n^3+n^2+2n+11}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(o)
$$\left(\sqrt[n]{n^2+2n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(p)
$$\left(\sqrt[n]{\frac{1}{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(q)
$$\left(\sqrt[n-3]{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(r)
$$\left(\sqrt[n]{3\cdot 11^n + 20\cdot 5^n + 19\cdot \pi^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(s)
$$\left(\sqrt[2n]{10n^2+55}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(t)
$$\left(\sqrt[n]{\frac{1}{n^2+10n+7}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

1.24. Feladat. *Számítsuk ki a következő sorozatok határértékét.*

(a)
$$\left(\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(b)
$$\left(\left(1+\frac{1}{n-12}\right)^{n+5}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(c)
$$\left(\left(1+\frac{4}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(d)
$$\left(\left(\frac{n+4}{n+1}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(e)
$$\left(\left(1-\frac{5}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(f)
$$\left(\left(\frac{n+a}{n-a}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(g)
$$\left(\left(0,9999+\frac{1}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(h)
$$\left(\left(1,1+\frac{1}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(i)
$$\left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(j)
$$\left(\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(k)
$$\left(\left(\frac{3n-2}{3n+5}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(l)
$$\left(\left(\frac{5n-3}{5n+3}\right)^{-n-2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(m)
$$\left(\left(1-\frac{5}{n}\right)^{3n+2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(n)
$$\left(\left(1+\frac{3}{n+2}\right)^{11n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(o)
$$\left(\left(1-\frac{11}{n}\right)^{3n+8}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(p)
$$\left(\left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^{4n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(q)
$$\left(\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(r)
$$\left(\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(s)
$$\left(\left(1+\frac{5}{n+1}\right)^{n-1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(t)

$$\left(\left(1-\frac{2}{n}\right)^{23n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(u)

$$\left(\left(1+\frac{3}{n}\right)^{n-2012}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(v)

$$\left(\left(1+\frac{e}{n}\right)^{en}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

1.25. Feladat. *Határozzuk meg az alábbi sorozatok határértékét.*

1. $$\left(\frac{2^{n+1}+3^n}{2^n+3^{n+1}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

2. $$\left(\frac{2^n+3^{n+1}}{2^{n+1}+3^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

3. $$\left(\frac{2-4^n}{7^{n+1}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

4. $$\left(\frac{5^n-3}{2-3^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

5. $$\left(\frac{7^{n+2}+(-1)^n}{7^n-7}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

6. $$\left(\frac{6\cdot 7^n+7^{-n}}{9\cdot 7^n-7^{-n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

7. $$\left(\frac{5^{2n-3}-4\cdot 6^{n+10}}{2^{1+4n}+7^{n+1}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

8. $$\left(\frac{3^{2n+5}-4\cdot 5^{n+1}}{(-2)^{1+3n}+9^{n+2}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

9. $$\left(\frac{(-1)^n+2^{2n}}{3^{n+1}+5^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

10. $$\left(\frac{(-2)^n+20^{n-1}}{(-20)^{n+1}+2^{n-1}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

11. $$\left(\frac{2^n-3^n}{3^n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

12. $$\left(2^{2n}-3\cdot 3^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

13. $$\left(\frac{\pi^n+e^{n-1}}{2\pi^{n-2}+5e^{n+5}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

14. $$\left(\frac{e^n-e^{2n}}{e^n+e^{2n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

15. $$\left(\frac{e^{n+1}+\sin(n)}{e^n-1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

16. $$\left(\frac{3^n\cdot 6^n}{2^{-n}n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

17. $$\left(\frac{\left(\frac{10}{11}\right)^n}{\left(\frac{9}{10}\right)^n+\left(\frac{11}{12}\right)^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

1.26. Feladat. *Számítsuk ki a következő sorozatok határértékét.*

(a)

$$\left(\frac{\sqrt[3]{n^2\sin(n!)}}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(b)

$$\left(\frac{1+a+a^2+\ldots+a^n}{1+b+b^2+\ldots+b^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(c)

$$\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\ldots+\frac{n-1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(d)

$$\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n}+\frac{3}{n}+\ldots+\frac{(-1)^n n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(e)

$$\left(\frac{1^2}{n^3}+\frac{2^2}{n^3}+\ldots+\frac{(n-1)^2}{n^3}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(f)

$$\left(\frac{1^2}{n^3}+\ldots+\frac{(2n-1)^2}{n^3}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(g)
$$\left(\frac{1}{2}+\ldots+\frac{2n-1}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(h)
$$\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(i)
$$\left(n\left(1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(j)
$$\left(\frac{n^2}{n-1}\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(k)
$$\left(\frac{(\ln(n))^{100}}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(l)
$$\left(\frac{\sqrt[5]{\ln(n)}}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

1.27. Feladat. *Vizsgáljuk meg, hogy konvergensek-e az alábbi sorozatok.*

(a)
$$\left((-1)^{n-1}\left(2+\frac{3}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}};$$

(b)
$$\left((-1)^n\frac{1}{n}+\frac{1+(-1)^n}{2}\right)_{n\in\mathbb{N}};$$

(c)
$$\left(1+\frac{n}{n+1}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}};$$

(d)
$$\left(1+2(-1)^{n+1}+3(-1)^{n(n-1)}\right)_{n\in\mathbb{N}};$$

(e)
$$\left(\frac{n-1}{n+1}\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}};$$

(f)
$$\left(n^{(-1)^n}\right)_{n\in\mathbb{N}};$$

(g)
$$\left(1+n\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(h)
$$\left(\frac{(-1)^n+2^{2n}}{3^{n+1}+5^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(i)
$$\left(\frac{(-2)^n+20^{n-1}}{(-20)^{n+1}+2^{n-1}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(j)
$$\left(\frac{2^n-3^n}{3^n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(k)
$$\left(2^{2n}-3\cdot 3^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(l)
$$\left(\frac{\pi^n+e^{n-1}}{2\pi^{n-2}+5e^{n+5}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(m)
$$\left(\frac{e^n-e^{2n}}{e^n+e^{2n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(n)
$$\left(\frac{e^{n+1}+\sin(n)}{e^n-1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

2. fejezet

Valós sorok

Elméleti áttekintés

2.1. Definíció. *Legyen* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *egy valós számsorozat, akkor az* $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ *bővített valós számot az* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***sorozat torlódási pontjá**nak nevezzük, ha az* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozatnak létezik olyan* (x_{n_k}) *részsorozata, melyre* $x_{n_k} \to a$*.*

2.1. Tétel. *Az* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozatnak az* $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ *bővített valós szám pontosan akkor torlódási pontja, ha az a tetszőleges környezetében végtelen sok sorozatelem van.*

2.1. Megjegyzés. *Mivel **minden valós számsorozatnak** van monoton részsorozata, ezért **van torlódási pontja** is a bővített valós számok halmazában.*

2.2. Definíció. *Az* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat torlódási pontjai halmazának a pontos alsó, korlátját az* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat **limes inferior**ának, míg az* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat torlódási pontjai halmazának pontos felső korlátját az* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat **limes superior**ának nevezzük, és* $\liminf x_n$*-nel illetve* $\limsup x_n$*-nel jelöljük.*

2.2. Megjegyzés. *Tetszőleges* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *valós számsorozat esetén*

$$\liminf x_n \leq \limsup x_n$$

teljesül.

2.2. Tétel. *Egy* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *valós számsorozat pontosan akkor konvergens, ha*

$$\liminf x_n = \limsup x_n$$

teljesül.

2.3. Definíció. *Legyen* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *egy valós számsorozat, és képezzük az alábbi sorozatot*

$$\sigma_1 = x_1 \quad \sigma_n = x_1 + \ldots + x_n, \quad (n \in \mathbb{N})$$

ekkor a $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozatot az* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozatból képzett **sor**nak nevezzük, és a továbbiakban* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$*-nel jelöljük. Ha létezik a* $\lim_{n\to\infty} \sigma_n$ *határérték, akkor azt mondjuk, hogy a* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *sor **konvergens**. A* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *sort **abszolút konvergens**nek nevezzük, ha a* $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ *sor konvergens. Ha a* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *sor konvergens, de nem abszolút konvergens, akkor **feltételesen konvergens**nek nevezzük.*

2.3. Tétel. *Ha egy valós sor abszolút konvergens, akkor konvergens is.*

2.4. Tétel. *Ha a* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *sor konvergens, akkor* $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$*.*

2.5. Tétel (Összehasonlító kritérium). *Legyenek* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *és* $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ *olyan nemnegatív tagú sorok, hogy* $x_n \leq y_n$ *teljesül minden* $n \in \mathbb{N}$ *esetén. Ekkor,* *(i) ha $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ konvergens, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ is konvergens;*

(ii) ha $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ divergens, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ is divergens.

2.6. Tétel. *Legyenek $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ és $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ olyan pozitív tagú sorok, melyekre létezik és pozitív a $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}$ határérték. Ekkor a $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ és a $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ sorok egyszerre konvergensek, illetve egyszerre divergensek.*

2.7. Tétel (Cauchy–féle gyökkritérium). *Legyen $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ egy valós sor.*

(i) Ha $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|} < 1$, akkor az $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ sor abszolút konvergens.

(ii) Ha $\liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|} > 1$, akkor az $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ sor divergens.

2.8. Tétel (D'Alembert–féle hányadoskritérium). *Legyen $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ egy olyan valós sor, melynek minden tagja nullától különböző.*

(i) Ha $\limsup_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} < 1$, akkor az $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ sor abszolút konvergens.

(ii) Ha $\liminf_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} > 1$, akkor az $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ sor divergens.

2.9. Tétel (A harmonikus sor). *Legyen $\alpha \in \mathbb{R}_{++}$, ekkor a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ sor abszolút konvergens, ha $\alpha > 1$ és divergens, ha $\alpha \leq 1$.*

2.10. Tétel (A geometriai sor). *Legyen $q \in \mathbb{R}$ olyan, hogy $|q| < 1$, ekkor a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ sor konvergens, és*

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1-q}.$$

2.11. Tétel (Leibniz-féle kritérium alternáló sorokra). *Legyen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy monoton nullsorozat, ekkor a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x_n$$

sor konvergens.

2.12. Tétel (Cauchy-féle ritkítási kritérium). *Legyen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy nemnegatív tagú, monoton csökkenő valós számsorozat. Ekkor a $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ valós sor pontosan akkor konvergens, ha a $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x_{2^n}$ sor konvergens.*

Feladatok

Alapfogalmak

2.1. Feladat. *Igazoljuk, hogy*

$$\liminf(-1)^n = -1 \quad \text{és} \quad \limsup(-1)^n = 1.$$

2.2. Feladat. *Igazoljuk, hogy*

$$\liminf -x_n = -\limsup x_n \quad \text{és} \quad \limsup -x_n = -\liminf x_n.$$

2.3. Feladat. *Tegyük fel, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ és $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ nemnegatív tagú sorok divergensek. Mit állíthatunk a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \min\{x_n, y_n\} \quad \text{és a} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \max\{x_n, y_n\}$$

sorok konvergenciájáról?

2.4. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy a* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ *sor konvergens, és összege nem nagyobb, mint* 3.

2.5. Feladat. *Legyen* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *egy olyan valós számsorozat, melyre minden* $k \in \mathbb{N}$ *esetén*

$$\lim_{n\to\infty} (x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{n+k}) = 0$$

teljesül. Igaz-e, hogy ekkor a $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *sor konvergens?*

2.6. Feladat. *Határozzuk meg az alábbi sorok összegét*

(a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

(b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$$

(c)
$$\sum_{n=1}^{\infty} 100 \cdot (0,9)^n$$

(d)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3^n}$$

(e)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$$

(f)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{(2n+1)(2n-1)}$$

(g)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(4n-3)(4n+1)}$$

(h)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{40n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$$

(i)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

(j)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$$

(k)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+2)} - \frac{1}{\ln(n+1)}$$

(l)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{2}} - \frac{1}{\sqrt[n+1]{2}}$$

2.7. Feladat. *Igazoljuk, hogy a következő sorok divergensek*

(a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

(b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}$$

(c)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{0,2}$$

2.8. Feladat. *A sorokra vonatkozó Cauchy-féle konvergenciakritérium segítségével igazoljuk, hogy az alábbi sorok konvergensek.*

(a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{2^n},$$

ahol $x \in \mathbb{R}$ *adott;*

(b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx) - \cos((n+1)x)}{x};$$

(c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(x^n)}{n^2}$$

ahol $x \in \mathbb{R}$ adott.

2.9. Feladat. *A sorokra vonatkozó Cauchy-féle konvergenciakritérium segítségével igazoljuk, hogy az alábbi sorok divergensek.*

(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n};$$

(b)

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$$

(c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$$

2.10. Feladat. *Mit állíthatunk két sor összegéről, ha*

(a) az egyik konvergens, a másik divergens;

(b) mindkettő divergens?

Konvergenciakritériumok

2.11. Feladat. *Határozzuk meg, hogy az alábbi sorok közül melyek konvergensek, abszolút konvergensek és melyek divergensek.*

(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}};$$

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10n+3};$$

(c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}};$$

(d)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^n};$$

(e)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-1};$$

(f)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n};$$

(g)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{100^n}{n!};$$

(h)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n};$$

(i)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt[n]{3}};$$

(j)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n}{n^2};$$

(k)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n-2}}{n^{\alpha}}$$

(l)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^{\sqrt{n}};$$

(m)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(a \cdot n + b)^{\alpha}};$$

(n)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)};$$

(o)
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n)};$$

(p)
$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n) \ln(\ln(n))};$$

(q)
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n + \sqrt{n}}{n^2 - n};$$

(r)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + a}{n};$$

(s)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + a^n};$$

(t)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{a} - 1 \right);$$

(u)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{a} - 1 - \frac{1}{n} \right);$$

(v)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{3^n - 1};$$

(w)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10n + 1}{n(n+1)(n+2)};$$

(x)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{n^2};$$

(y)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + 2^n}{n^2 2^n};$$

2.12. Feladat. *Döntsük el, hogy az alábbi sorok közül melyek konvergensek.*

(a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}};$$

(b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n}{(6n+1)^3};$$

(c)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^2};$$

(d)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n\sqrt{n}}};$$

(e)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3n + 4};$$

(f)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3^n};$$

(g)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^n}{n^3};$$

(h)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1000n}{(1,1)^n};$$

(i)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n};$$

(j)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^3 + 3};$$

(k)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[10]{n}}$$

(l)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}};$$

(m)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}};$$

(t)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{(1,00001)^n};$$

(n)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3\left(\sqrt{2}+(-1)^n\right)}{3^n};$$

(u)
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt[10]{n}};$$

(o)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n}{(6n+1)^3};$$

(v)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3n+4};$$

(p)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^2};$$

(w)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3^n};$$

(q)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n\sqrt{n}}};$$

(x)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^n}{n^3};$$

(r)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)+1};$$

(y)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1000n}{(1,1)^n};$$

(s)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^3+3};$$

(z)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n};$$

2.13. Feladat. *Döntsük el, hogy az alábbi sorok közül melyek konvergensek.*

(a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} a^n \cdot n;$$

(g)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!e^n}{n^{n+1000}};$$

(b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n+3^n};$$

(h)
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-\sqrt{n}};$$

(c)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}};$$

(i)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n!};$$

(d)
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right);$$

(j)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n-1}{3^n};$$

(e)
$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\left(\frac{1}{3^n}\right);$$

(k)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\pi);$$

(f)
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)^{\ln(n)}};$$

(l)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{5^n};$$

(m)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{1}{n}\right);$$

(t)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos(n)}{n^2};$$

(n)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right);$$

(u)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2\sqrt{n}};$$

(o)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n;$$

(v)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n+1}\right)^n;$$

(p)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{\pi}\right)^n$$

(w)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+2}};$$

(q)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}};$$

(x)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\ln(n)};$$

(r)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n+\sqrt{n}};$$

(y)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\ln^2(n)};$$

(s)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(n)}{2^n};$$

(z)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-n}{n2^n}$$

Vizsgáljuk meg az alábbi két sort konvergencia szempontjából.

(a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+2+\cdots+n}$$

(b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1^2+2^2+\cdots+n^2}$$

2.14. Feladat. *Mely $x \in \mathbb{R}$ számok esetén lesznek a következő sorok konvergensek?*

(a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n};$$

(e)
$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n n$$

(b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (x-4)^n;$$

(f)
$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n$$

(c)
$$\sum_{n=1}^{\infty} 4^n x^n;$$

(g)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\cdot 2^n}$$

(d)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{2^{n+1}};$$

(h)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+(-1)^n}{n} x^n$$

(i)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\alpha^n} \quad (\alpha > 0 \text{ adott})$$

(j)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\alpha^n + \beta^n} \quad (\alpha, \beta > 0 \text{ adottak})$$

(k)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

(l)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$$

(m)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1} x^{2n-1}}{(4n-3)^2}$$

(n)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$$

(o)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^5 x^{2n}}{(2n+1)}$$

(p)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (2n+1)^2 x^n$$

(q)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

(r)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

(s)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

(t)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

(u)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

(v)
$$\sum_{n=1}^{\infty} n! x^n$$

(w)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$$

(x)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^{2n-1} x^n$$

(y)
$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^{n^2} x^{n^2}$$

(z)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{x}{2}\right)^n$$

2.15. Feladat. *Vizsgáljuk meg, hogy mely $x \in \mathbb{R}$ számok esetén lesznek a következő sorok konvergensek?*

(a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! x^n}{n^n}$$

(b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n \cdot 3^n \ln(n)}$$

(c)
$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n!}$$

(d)
$$\sum_{n=1}^{\infty} n! x^{n!}$$

(e)
$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot (x-1)^n$$

(f)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n \cdot 5^n}$$

(g)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n \cdot 9^n}$$

(h)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n^2}$$

(i)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(2n-1)2^n}$$

(j)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{(n+1)\ln(n+1)}$$

(k)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sin(x))^n$$

(l)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\ln(x))^n$$

(m)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2} \cdot \left(\frac{1}{3+\sin(x)}\right)^n$$

2.16. Feladat. *Igazoljuk, hogy ha a $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ pozitív tagú sor konvergens, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$ sor is konvergens. Igaz–e a megfordítás?*

2.17. Feladat. *Bizonyítsd be, hogy ha a $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$ és $\sum_{n=1}^{\infty} y_n^2$ sorok konvergensek, akkor*

1. *a* $\sum_{n=1} |x_n y_y|$ *sor is konvergens;*
2. *a* $\sum_{n=1}^{\infty} (x_n + y_n)^2$ *sor is konvergens.*

2.18. Feladat. *Igazoljuk, hogy ha a $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ pozitív tagú sor konvergens, akkor az alábbi sorok mindegyike konvergens.*

(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$$

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n x_{n+1}$$

(c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x_n - x_{n+1}) \quad \textit{és} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (x_n - x_{n+1}) = x_1.$$

Igaz-e a fenti állítások valamelyikének a megfordítása?

2.19. Feladat. *Adjunk meg olyan $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergens és olyan $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ divergens sorokat, melyekre*

(a)

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|y_n|};$$

(b) minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \leq 1 \quad \textit{és} \quad \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{y_{n+1}}{y_n}\right| \leq 1.$$

(c) minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \geq 1 \quad \textit{és} \quad \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{y_{n+1}}{y_n}\right| \geq 1.$$

2.20. Feladat. *Írjuk fel az alábbi végtelen szakaszos tizedes törteket két egész szám hányadosaként.*

(a) $0,\dot{1}$

(b) $0,\dot{9}$

(c) $0,\overline{25}$

(d) $3,\overline{14}$

(e) $-4,2\overline{63}$

(f) $0,\overline{1984}$

(g) $0,0\overline{23}$

(h) $0,\overline{234}$

(i) $1,\overline{414}$

3. fejezet

Valós függvények

Elméleti áttekintés

3.1. Definíció. *Legyen $D \subset \mathbb{R}$ egy nemüres halmaz, ekkor az $f : D \to \mathbb{R}$ függvényt **valós függvény**nek nevezzük.*

3.2. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az $f : D \to \mathbb{R}$ függvény **alulról/felülről korlátos**, ha létezik olyan $K \in \mathbb{R}$ konstans, hogy*

$$f(x) \geq K, \qquad \text{illetve} \qquad f(x) \leq K$$

*teljesül minden $x \in D$ esetén. Azt mondjuk továbbá, hogy az $f : D \to \mathbb{R}$ függvény **korlátos**, ha mind alulról, mind felülről korlátos.*

3.1. Megjegyzés. *Az $f : D \to \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor korlátos (alulról/felülről), ha az $f(D) \subset \mathbb{R}$ halmaz korlátos (alulról/felülről).*

3.3. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az $f : D \to \mathbb{R}$ valós függvény **monoton növekedő/csökkenő**, ha minden olyan $x, y \in D$ esetén, melyre $x \leq y$,*

$$f(x) \leq f(y), \qquad \text{illetve} \qquad f(x) \geq f(y)$$

*teljesül. Ha a fenti egyenlőtlenségek minden $x \neq y$ esetén szigorúak, akkor **szigorú monoton növekedés**ről, illetve **szigorú monoton csökkenés**ről beszélünk.*

3.4. Definíció. *Az $f : D \to \mathbb{R}$ függvény **folytonos az** $x_0 \in D$ **pontban**, ha bármely $\varepsilon \geq 0$ esetén van olyan $\delta \geq 0$, hogy ha $x \in D$ és $|x - x_0| \leq \delta$, akkor $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$ teljesül.*

3.1. Tétel (Átviteli elv). *Az $f : D \to \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor folytonos az $x_0 \in D$ pontban, ha tetszőleges (x_n) D–beli elemekből álló, x_0–hoz konvergáló sorozat esetén $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.*

3.2. Megjegyzés. *Az $f : D \to \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor **nem folytonos** az $x_0 \in D$ pontban, ha van olyan (x_n) D–beli elemekből álló, x_0–hoz konvergáló sorozat, melyre $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq f(x_0)$.*

3.5. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az $f : D \to \mathbb{R}$ függvény az $A \subset D$ halmazon **egyenletesen folytonos**, ha bármely $\varepsilon \geq 0$ esetén létezik olyan $\delta \geq 0$, hogy ha $x, y \in A$ és $|x - y| \leq \delta$, akkor $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$ teljesül.*

3.3. Megjegyzés (Egyenletes folytonosság ⇒ folytonosság). *Ha az $f : D \to \mathbb{R}$ függvény az $A \subset D$ halmazon egyenletesen folytonos, akkor az A halmaz minden pontjában folytonos.*

3.2. Tétel (Folytonosság és műveletek). *Ha az $f, g : D \to \mathbb{R}$ függvények folytonosak az $x_0 \in D$ pontban, akkor*

(i) az $f + g$ függvény is folytonos az x_0 pontban;

(ii) tetszőleges $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén a λf függvény is folytonos az x_0 pontban;

(iii) az $f \cdot g$ függvény is folytonos az x_0 pontban;

(iv) ha tetszőleges $x \in D$ esetén $g(x) \neq 0$, akkor az $\dfrac{f}{g}$ függvény is folytonos az x_0 pontban.

3.3. Tétel (Az összetett függvény folytonossága). *Legyenek $f : D \to \mathbb{R}$ és $g : f(D) \to \mathbb{R}$ adott függvények. Ha az f függvény folytonos az $x_0 \in D$ pontban, a g pedig az $f(x_0) \in f(D)$ pontban, akkor a $g \circ f$ függvény folytonos az x_0 pontban.*

3.4. Tétel. *Legyen $f : D \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, $K \subset D$ kompakt halmaz. Ekkor az $f(K)$ halmaz is kompakt.*

3.5. Tétel. *Legyen $K \subset \mathbb{R}$ kompakt halmaz, $f : K \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ekkor f felveszi K–n a minimumát és a maximumát.*

3.6. Tétel (Heine). *Legyen $K \subset \mathbb{R}$ kompakt halmaz, $f : K \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, ekkor f egyenletesen folytonos K.*

3.6. Definíció. *Legyen $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D'$. Azt mondjuk, hogy*

- *az f függvénynek **az x_0 pontban a határértéke** α, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha $x \in D$ és $|x - x_0| < \delta$, akkor $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$. Erre a $\lim_{x\to x_0} f(x) = \alpha$ jelölést alkalmazzuk.*
- *az f függvénynek **az x_0 pontban a határértéke** $+\infty$, ha tetszőleges $K \in \mathbb{R}$ esetén létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha $x \in D$ és $|x - x_0| < \delta$, akkor $f(x) > K$. Erre a $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ jelölést alkalmazzuk.*
- *az f függvénynek **az x_0 pontban a határértéke** $-\infty$, ha tetszőleges $k \in \mathbb{R}$ esetén létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha $x \in D$ és $|x - x_0| < \delta$, akkor $f(x) < k$. Erre a $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ jelölést alkalmazzuk.*
- *az f függvénynek **a $+\infty$–ben a határértéke** α, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $K \in \mathbb{R}$, hogy ha $x \in D$ és $x \geq K$, akkor $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$. Erre a $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \alpha$ jelölést alkalmazzuk.*
- *az f függvénynek **a $-\infty$–ben a határértéke** α, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $k \in \mathbb{R}$, hogy ha $x \in D$ és $x \leq k$, akkor $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$. Erre a $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \alpha$ jelölést alkalmazzuk.*
- *az f függvénynek **a $+\infty$–ben a határértéke** $+\infty$, ha tetszőleges $K \in \mathbb{R}$ esetén létezik olyan $K^* \in \mathbb{R}$, hogy ha $x \in D$ és $x \geq K^*$, akkor $f(x) \geq K$. Erre a $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ jelölést alkalmazzuk.*
- *az f függvénynek **a $+\infty$–ben a határértéke** $-\infty$, ha tetszőleges $k \in \mathbb{R}$ esetén létezik olyan $K^* \in \mathbb{R}$, hogy ha $x \in D$ és $x \geq K^*$, akkor $f(x) \leq k$. Erre a $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ jelölést alkalmazzuk.*
- *az f függvénynek **a $-\infty$–ben a határértéke** $+\infty$, ha tetszőleges $K \in \mathbb{R}$ esetén létezik olyan $k^* \in \mathbb{R}$, hogy ha $x \in D$ és $x \leq k^*$, akkor $f(x) \geq K$. Erre a $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ jelölést alkalmazzuk.*
- *az f függvénynek **a $-\infty$–ben a határértéke** $-\infty$, ha tetszőleges $k \in \mathbb{R}$ esetén létezik olyan $k^* \in \mathbb{R}$, hogy ha $x \in D$ és $x \leq k^*$, akkor $f(x) \leq k$. Erre a $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ jelölést alkalmazzuk.*

3.7. Tétel (Átviteli–elv). *Legyen $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$, illetve $x_0 \in D'$ és $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Ekkor $\lim_{x\to x_0} f(x) = \alpha$ pontosan akkor teljesül, ha tetszőleges $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ D–beli, x_0–hoz konvergáló sorozat esetén $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \alpha$ teljesül.*

3.8. Tétel (Folytonosság és függvényhatárérték kapcsolata). *Legyen $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ és $x_0 \in D$. Ekkor az f függvény pontosan akkor folytonos az x_0 pontban, ha létezik a $\lim_{x\to x_0} f(x)$ határérték, és*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Nevezetes függvényhatárértékek

1. Legyen $n \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$ és
$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$
Ekkor
$$\lim_{x\to+\infty} P(x) = \begin{cases} +\infty, & \text{ha } \ a_n > 0 \\ -\infty, & \text{ha } \ a_n < 0 \end{cases}$$
és
$$\lim_{x\to-\infty} P(x) = \begin{cases} +\infty, & \text{ha } \ a_n > 0 \text{ és } n \text{ páros} \\ -\infty, & \text{ha } \ a_n < 0 \text{ és } n \text{ páros} \\ -\infty, & \text{ha } \ a_n > 0 \text{ és } n \text{ páratlan} \\ +\infty, & \text{ha } \ a_n < 0 \text{ és } n \text{ páratlan} \end{cases}$$

2. Legyen $a > 0$, ekkor
$$\lim_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} +\infty, & \text{ha } \ a > 1 \\ 0, & \text{ha } \ a < 1 \end{cases} \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} 0, & \text{ha } \ a > 1 \\ +\infty, & \text{ha } \ a < 1 \end{cases}$$

3. $$\lim_{x\to0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

4. $$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1 \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to0+} x^x = 1.$$

5. $$\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to-\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to0+} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

6. Legyen $1 \neq \alpha > 0$, ekkor
$$\lim_{x\to0} \frac{\alpha^x - 1}{x} = \ln(\alpha).$$

7. Legyenek $\alpha > 0$ és $a \in \mathbb{R}$, ekkor
$$\lim_{x\to a} \frac{\alpha^x - \alpha^a}{x - a} = \alpha^a \ln(\alpha).$$

Feladatok

Valós függvények korlátossága és monotonitása

3.1. Feladat. *Legyenek $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ rögzítettek. Vizsgáljuk meg korlátosság és monotonitás szempontjából az*
$$f(x) = ax + b \qquad (x \in \mathbb{R})$$
módon értelmezett függvényt.

3.2. Feladat. *Korlátos-e az*
$$f(x) = 5 - x^2 \qquad (x \in \mathbb{R})$$
módon megadott függvény?

3.3. Feladat. *Legyenek $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Vizsgáljuk meg az*
$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (x \in \mathbb{R})$$
függvényt korlátosság szempontjából.

3.4. Feladat. *Vizsgáljuk meg az alábbi függvényeket korlátosság szempontjából.*

(a)
$$f(x) = \frac{1}{x} \quad (x \in]0, +\infty[)$$

(b)
$$f(x) = x^2 - 4x + 6 \quad (x \in \mathbb{R})$$

(c)
$$f(x) = -\frac{2x+3}{x-1} \quad (x \in]1, +\infty[)$$

(d)
$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad (x \in \mathbb{R})$$

3.5. Feladat. *Vizsgáljuk meg az alábbi függvényeket monotonitás szempontjából.*

(a)
$$f(x) = \frac{1}{x} \quad (x \in]0, +\infty[)$$

(b)
$$f(x) = |x - \pi| \quad (x \in \mathbb{R})$$

(c)
$$f(x) = x^n \qquad (x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \text{ rögzített })$$

(d)
$$f(x) = \operatorname{sign}(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

(e)
$$f(x) = x + \sqrt{|x|} \quad (x \in \mathbb{R})$$

(f)
$$f(x) = x^2 + x + 1 \quad (x \in \mathbb{R})$$

Valós függvények folytonossága

3.6. Feladat.

Adjunk példát olyan $f, g : D \to \mathbb{R}$ függvényekre, melyekre az alábbiak egyidejűleg teljesülnek.

(a) *f, g nem folytonos az $x_0 \in D$ pontban és $f + g$ folytonos x_0–ban.*

(b) *f, g nem folytonos az $x_0 \in D$ pontban és $f \cdot g$ folytonos x_0–ban.*

(c) *f a D halmaz egyetlen pontjában sem folytonos, és az $|f|$ függvény a D minden pontjában folytonos.*

(d) *f a D halmaz egyetlen pontjában sem folytonos, és az f^2 függvény a D minden pontjában folytonos.*

3.7. Feladat. *Legyen $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$ és $f, g \colon D \to \mathbb{R}$ függvények, $x_0 \in D$.*

(a) *Igaz-e, hogy az $f + g$ függvénynek az x_0 szakadási helye, ha f folytonos az x_0 pontban, g azonban nem?*

(b) *Igaz-e, hogy az $f + g$ függvénynek az x_0 szakadási helye, ha az x_0 pont szakadási helye mind az f, mind a g függvénynek?*

3.8. Feladat. *Legyen $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$ és $f, g \colon D \to \mathbb{R}$ függvények, $x_0 \in D$.*

(a) *Igaz-e, hogy az $f \cdot g$ függvénynek az x_0 szakadási helye, ha f folytonos az x_0 pontban, g azonban nem?*

(b) *Igaz-e, hogy az $f \cdot g$ függvénynek az x_0 szakadási helye, ha az x_0 pont szakadási helye mind az f, mind a g függvénynek?*

3.9. Feladat. *Legyen $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$, $f \colon D \to \mathbb{R}$ és $x_0 \in D$. Válasszuk ki az alábbi állítások közül azokat, melyek ekvivalensek az f függvény x_0 pontbeli folytonosságával.*

(a) *Minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $\delta > 0$ és olyan $x \in D$, hogy $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ és $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.*

(b) *Van olyan $\delta > 0$, melyhez létezik olyan $\varepsilon > 0$, hogy minden olyan $x \in D$ esetén, melyre $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, az teljesül, hogy $|x - x_0| < \delta$.*

(c) *Minden $\delta > 0$ esetén van olyan $\varepsilon > 0$, hogy minden olyan $x \in D$ esetén, melyre $|x - x_0| < \varepsilon$, az teljesül, hogy $|f(x) - f(x_0)| < \delta$.*

(d) *Minden $\varepsilon > 0$ és minden $\delta > 0$ esetén van olyan olyan $x \in D$ esetén, melyre $|x - x_0| < \delta$ és $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Minden $\delta > 0$ esetén van olyan $\varepsilon > 0$, hogy minden olyan $x \in D$ esetén, melyre $|x - x_0| < \delta$, az teljesül, hogy $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.*

(e) *Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén van olyan $\delta_n > 0$ szám, hogy ha $x \in D$ olyan, hogy $|x - x_0| < \delta_n$, akkor $|f(x) - f(x_0)| < \frac{1}{n}$.*

(f) *Minden olyan $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, D-beli sorozat esetén, melyre $f(x_n) \to f(x_0)$, az teljesül, hogy $x_n \to x_0$.*

(g) *Minden olyan $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, D-beli sorozat esetén, melyre $x_n \to x_0$, az teljesül, hogy $f(x_n) \to f(x_0)$.*

(h) *Van legalább két különböző olyan $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, D-beli sorozat, melyre $x_n \to x_0$, úgy, hogy $f(x_n) \to f(x_0)$.*

3.10. Feladat. *Legyen $[a, b] \subset \mathbb{R}$ és $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ egy folytonos függvény. Igazoljuk, hogy ekkor az*

(a)
$$m(x) = \inf \{f(\xi) \,|\, a \leq \xi \leq x\} \qquad (x \in [a, b])$$

(b)
$$M(x) = \sup \{f(\xi) \,|\, a \leq \xi \leq x\} \qquad (x \in [a, b])$$

módon megadott $m, M : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvények is folytonosak.

3.11. Feladat. *Legyen $[a, b] \subset \mathbb{R}$ és $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvények. Igazoljuk, hogy ekkor az*

(a)
$$\phi(x) = \min \{f(x), g(x)\} \qquad (x \in [a, b])$$

(b)
$$\psi(x) = \max \{f(x), g(x)\} \qquad (x \in [a, b])$$

módon megadott $\phi, \psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvények is folytonosak.

3.12. Feladat. *Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ egy folytonos függvény és $x_1, \ldots, x_n \in [a, b]$. Mutassuk meg, hogy ekkor van olyan $\xi \in]a, b[$, melyre*
$$f(\xi) = \frac{f(x_1) + \cdots + f(x_n)}{n}$$
teljesül.

3.13. Feladat.

Adjunk példát olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre, melyre

(a) *f nem folytonos az $\{1, 2, 3\}$ halmaz pontjaiban, minden más pontban azonban folytonos.*

(b) *f nem folytonos a $[0, 1]$ halmaz pontjaiban, minden más pontban azonban folytonos.*

(c) *f csak az $x_0 = 0$ pontban folytonos.*

(d) *f folytonos a $\{-1, 0, 1\}$ halmaz pontjaiban, minden más pontban azonban nem folytonos.*

(e) *f az $x_0 = 0$ pontot kivéve mindenhol folytonos és az $x_0 = 0$ pontban megszüntethető szakadása van.*

(f) *f az $x_0 = \pi$ pontot kivéve minden pontban folytonos és az $x_0 = 0$ pontban elsőfajú, nem megszüntethető szakadása van.*

(g) *f az $x_{1,2} = \pi, 2\pi$ pontokat kivéve minden pontban folytonos és az $x_1 = \pi$ pontban másodfajú, míg az $x_2 = 2$ pontban elsőfajú szakadása van.*

3.14. Feladat. *Vizsgáljuk meg az alábbi függvényeket folytonosság szempontjából.*

(a)

$$f(x) = |x| \quad (x \in \mathbb{R})$$

(b)

$$f(x) = ax + b \quad (x \in \mathbb{R}, a, b \in \mathbb{R} \, \textit{rögzítettek})$$

(c)

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (x \in \mathbb{R}, a, b, c \in \mathbb{R} \, \textit{rögzítettek})$$

(d)

$$f(x) = \left|x^2 - 4\right| \quad (x \in \mathbb{R})$$

(e)

$$f(x) = x^r \quad (x \in]0, +\infty[, r \in \mathbb{Q} \ \textit{rögzített})$$

3.15. Feladat. *Vizsgáljuk meg az alábbi függvényeket folytonosság szempontjából.*

(a)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x + 2} & \textit{ha } x \neq -2 \\ 0 & \textit{ha } x = -2 \end{cases}$$

(b)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x + 2} & \textit{ha } x \neq -2 \\ -4 & \textit{ha } x = -2 \end{cases}$$

3.16. Feladat. *Vizsgáljuk meg az alábbi függvényeket folytonosság szempontjából.*

(a)

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & \textit{ha} \quad x \geq 0 \\ x^2 - 2x, & \textit{ha} \quad x > 0 \end{cases}$$

(b)

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \textit{ha } x \leq 1 \\ x^2 - 5x & \textit{ha } x > 1 \end{cases}$$

(c)

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \textit{ha } x < 4 \\ 2 & \textit{ha } x = 4 \\ x^2 - 12x + 39 & \textit{ha } x > 4 \end{cases}$$

3.17. Feladat. *Vizsgáljuk meg az alábbi függvényeket folytonosság szempontjából.*

(a)

$$f(x) = \begin{cases} \sin(\pi x) & \textit{ha } x < 2 \\ 2 & \textit{ha } x = 2 \\ \dfrac{1}{x - 2} & \textit{ha } x < 2 \end{cases}$$

(b)

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x), & \textit{ha} - \pi \leq x \leq \pi \\ |x - \pi|, & \textit{egyébként} \end{cases}$$

(c)

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{\left|x^2 - 2\right|}, & \textit{ha} - \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3} \\ \sqrt{|x| + 1}, & \textit{egyébként} \end{cases}$$

(d)

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}, & \textit{ha } x>1\\ 5-3x, & \textit{ha } -2\le x\le 1\\ \dfrac{6}{x-4}, & \textit{ha } x<-2\end{cases}$$

3.18. Feladat. *Vizsgáljuk meg az alábbi függvényeket folytonosság szempontjából.*

(a)

$$f(x)=\begin{cases}1 & \textit{ha } x\in\mathbb{Q}\\ 0 & \textit{ha } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$$

(b)

$$f(x)=\begin{cases}x^2 & \textit{ha } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\\ 0 & \textit{ha } x\in\mathbb{Q}\end{cases}$$

(c)

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & \textit{ha} \quad x\in\mathbb{Q}\\ \sqrt{|x|}, & \textit{ha} \quad x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$$

(d)

$$f(x)=\begin{cases}x, & \textit{ha} \quad x\in\mathbb{Q}\\ x+1, & \textit{ha} \quad x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$$

3.19. Feladat. *Vizsgáljuk meg az alábbi függvényeket folytonosság szempontjából.*

(a)

$$f(x)=\operatorname{sgn}(x) \quad (x\in\mathbb{R})$$

(b)

$$f(x)=[x] \quad (x\in\mathbb{R})$$

(c)

$$f(x)=\{x\} \quad (x\in\mathbb{R}),$$

(d)

$$f(x)=\operatorname{sgn}(x^2-3x+2) \quad (x\in\mathbb{R})$$

ahol $[x]$ *az* x *valós szám egészrészét, míg* $\{x\}$ *az* x *valós szám törtrészét jelöli.*

3.20. Feladat. *Vizsgájuk meg az alábbi függvényeket folytonosság szempontjából.*

(a)

$$f(x)=\operatorname{sgn}(3x^2-x) \qquad (x\in\mathbb{R})$$

(b)

$$f(x)=\operatorname{sgn}(x(1-x^2)) \qquad (x\in\mathbb{R})$$

(c)

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & \textit{ha } x\in[0,1]\\ 2-x, & \textit{egyébként}\end{cases}$$

(d)

$$f(x)=\begin{cases}x, & \textit{ha } x\in[-1,1]\\ 1, & \textit{egyébként}\end{cases}$$

(e)

$$f(x)=\begin{cases}x, & \textit{ha } x\in[-1,1]\\ x^3, & \textit{egyébként}\end{cases}$$

(f)

$$f(x)=\begin{cases}x^2+1, & \textit{ha } x\in[0,1]\\ \sqrt{|x|+3}, & \textit{egyébként}\end{cases}$$

3.21. Feladat. *Vizsgáljuk meg, hogy a következő függvényeket folytonosság szempontjából.*

(a)
$$f(x) = x^2 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

(b)
$$f(x) = \sqrt{x} \qquad (x \in [0, +\infty[)$$

(c)
$$f(x) = |x| \qquad (x \in \mathbb{R})$$

(d)
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1+x)^2}, & ha\ x \neq -1 \\ 0, & ha\ x = -1 \end{cases}$$

(e)
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{(1+x)^2}, & ha\ x \neq -1 \\ 11, & ha\ x = -1 \end{cases}$$

(f)
$$f(x) = \operatorname{sgn}(x^2 - 2x + 1) \quad (x \in \mathbb{R})$$

(g)
$$f(x) = \operatorname{sgn}(3x^2 - x) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

(h)
$$f(x) = \operatorname{sgn}(x(1 - x^2)) \quad (x \in \mathbb{R})$$

(i)
$$f(x) = \begin{cases} x^2, & ha\ x \in [0, 1] \\ 2 - x, & egyébként \end{cases}$$

(j)
$$f(x) = \begin{cases} x, & ha\ x \in [-1, 1] \\ 1, & egyébként \end{cases}$$

(k)
$$f(x) = \begin{cases} x, & ha\ x \in [-1, 1] \\ x^3, & egyébként \end{cases}$$

(l)
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & ha\ x \in [0, 1] \\ -\sqrt{|x|}, & egyébként \end{cases}$$

(m)
$$f(x) = \begin{cases} 3x - 5, & ha\ x \neq 1 \\ 2, & ha\ x = 1 \end{cases}$$

(n)
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & ha\ x \leq -2 \\ x^3 - 6x, & ha\ x > -2 \end{cases}$$

(o)
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-6}{x-6}, & ha\ x < 0 \\ 2, & ha\ x = 0 \\ \sqrt{4 + x^2}, & ha\ x > 0 \end{cases}$$

(p)
$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 2, & ha\ x < 2 \\ 5, & ha\ x = 2 \\ x^2 + 5, & ha\ x > 2 \end{cases}$$

3.22. Feladat. *Hogyan válasszuk meg az α és β számokat, hogy az alábbi függvények folytonosak legyenek?*

1.
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x + 4, & ha \quad x < -2 \\ \alpha x + \beta, & ha \quad -2 \leq x \leq 3 \\ \sqrt{2x+3}, & ha \quad x > 3 \end{cases}$$

2.
$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - \alpha x + 4, & ha \quad x < -2 \\ 6, & ha \quad x = -2 \\ -2x + \beta, & ha \quad x > -2 \end{cases}$$

3.
$$f(x) = \begin{cases} \alpha^2 x - \alpha, & ha\ x > 3 \\ 4, & ha\ x \leq 3 \end{cases}$$

4.
$$f(x) = \begin{cases} \alpha x - \beta, & ha\ x \leq -1 \\ 2x^2 + 3\alpha x + \beta, & ha\ -1 < x < 1 \\ 4, & ha\ x > 1 \end{cases}$$

5.
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2, & ha\ x < 1 \\ \alpha x - 4, & ha\ x \geq 1 \end{cases}$$

6.

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x, & \textit{ha } x < 3 \\ 5, & \textit{egyébként} \end{cases}$$

7.

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x, & \textit{ha } 0 \leq x < 2 \\ 3x^2, & \textit{egyébként} \end{cases}$$

8.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{5x^3 - 10x^2}{x - 2}, & \textit{ha } x \neq 2 \\ \alpha, & \textit{ha } x = 2 \end{cases}$$

9.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \textit{ha } x < 3 \\ 2\alpha x, & \textit{egyébként} \end{cases}$$

10.

$$f(x) = \begin{cases} x, & \textit{ha } x < -2 \\ \alpha x^2, & \textit{egyébként} \end{cases}$$

3.23. Feladat. *Az alábbi függvények nincsenek értelmezve minden $x \in \mathbb{R}$ pontban. Hogyan válasszuk meg ezeket a függvényértéket, hogy az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény minden pontban folytonos legyen?*

(a)

$$f(x) = \frac{x^2}{x - 2}$$

(b)

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

(c)

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x - 10}{x - 2}$$

(d)

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$$

(e)

$$f(x) = \frac{x^2 - 16}{x^2 - 3x - 4}$$

(f)

$$f(x) = \frac{1 + x^3}{1 + x}$$

(g)

$$f(x) = \frac{\sqrt{7 + x} - 3}{x^2 - 4}$$

(h)

$$f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$$

(i)

$$f(x) = x \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$$

(j)

$$f(x) = \frac{x}{\sin(x)}$$

(k)

$$f(x) = \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$$

(l)

$$f(x) = \frac{10^x - 1}{x}$$

(m)

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{|x|}$$

(n)

$$f(x) = \frac{5\cos(x)}{4x - 2\pi}$$

(o)

$$f(x) = \frac{10^{|x|-1}}{x}$$

(p)

$$f(x) = \frac{x - 1}{x - \sqrt[4]{x}}$$

(q)

$$f(x) = (1 + |x|)^{\frac{1}{x}}$$

(r)

$$f(x) = (1 + 2x)^{\frac{1}{x}}$$

(s)

$$f(x) = \frac{|x|}{1 - 2^{|x|}}$$

(t)

$$f(x) = \frac{\ln(1+x) - \ln(1-x)}{x}$$

3.24. Feladat. *Legyenek $b, c \in \mathbb{R}$ adottak. Határozzuk meg az összes olyan a valós számot, melyre az f függvény folytonos, ha*

(a)

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x), & \text{ha } x \le c \\ ax + b, & \text{ha } x > c \end{cases}$$

(b)

$$f(x) = \begin{cases} 2\cos(x), & \text{ha } x \le c \\ ax^2 + b, & \text{ha } x > c \end{cases}$$

3.25. Feladat. *Igazoljuk, hogy az $x^2 - 3x + 1 = 0$ egyenletnek van gyöke a $[0, 2]$ intervallumban.*

3.26. Feladat. *Mutassuk meg, hogy az $x^3 + 15x - 1 = 0$ egyenletenek van három gyöke a $[-4, 4]$ intervallumban.*

3.27. Feladat. *Igazoljuk, hogy az alábbi egyenletek mindegyikének van legalább egy megoldása a valós számok körében.*

(a)

$$\cos(x) = x$$

(b)

$$x + \sin(2x) = \sqrt{\pi}$$

3.28. Feladat. *Mutassuk meg, hogy minden páratlan fokszámú valós polinomnak van legalább egy valós gyöke.*

3.29. Feladat. *Legyen $n \in \mathbb{N}$ és $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ olyanok, hogy $a_0 \cdot a_n < 0$. Mutassuk meg, hogy ekkor a*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

polinomnak van legalább egy valós gyöke.

3.30. Feladat. *Legyenek $a, b \in \mathbb{R}$ tetszőlegesek, de rögzítettek és definiáljuk az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt az*

$$f(x) = (x-a)^2 \cdot (x-b)^2 + x \qquad (x \in \mathbb{R})$$

módon. Mutassuk meg, hogy ekkor van olyan $\xi \in \mathbb{R}$, melyre $f(\xi) = \dfrac{a+b}{2}$ teljesül.

3.31. Feladat. *Legyen*

$$f(x) = x^4 - 10x + 2 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Mutassuk meg, hogy létezik olyan $\xi \in \mathbb{R}$, melyre $f(\xi) = \eta$ teljesül, ha

(a) $\eta = \pi$ *(b)* $\eta = -\sqrt{3}$ *(c)* $\eta = 5000000$

3.32. Feladat. *Legyen $f(x) = \mathrm{tg}(x)$. Tudjuk, hogy*

$$\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \quad \text{és} \quad \mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -1.$$

Ennek ellenére nem létezik olyan $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$, melyre $f(x) = 0$ teljesülne. Miért nem mond ez ellent a Bolzano-féle középértéktételnek?

3.33. Feladat. *Legyen $f\colon [0, 1] \to [0, 1]$ egy folytonos függvény.*

(a) Mutassuk meg, hogy van olyan $\xi \in [0, 1]$, melyre $f(\xi) = \xi$ teljesül.

(b) Igaz-e az (a) állítás, ha az f függvényről nem tesszük fel, hogy folytonos?

(c) Mit tudunk mondani akkor, ha $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$, azaz, ha nem tudjuk, hogy az f függvény a $[0, 1]$ intervallumba képez?

(d) Érvényben marad-e az állítás, ha $f\colon]0, +\infty[\to]0, +\infty[$?

Valós függvények határértéke

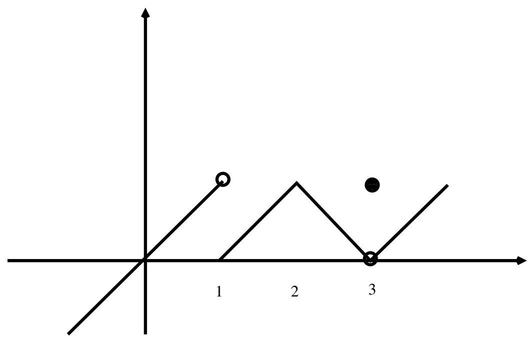
3.34. Feladat. *Legyen $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$, $f, g : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ a D halmaz torlódási pontja. Igazoljuk, hogy*

(a) ha az f függvénynek létezik az x_0 pontban a határértéke, a g függvénynek pedig nem, akkor az $(f+g)$ függvénynek sem létezik a határértéke az x_0 pontban;

(b) ha $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$, és az x_0 pontnak van olyan környezete, melyen a g függvény korlátos, akkor az $f \cdot g$ függvénynek létezik x_0-ban a határértéke és $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = 0$;

(c) ha az f függvénynek létezik az x_0 pontban a határértéke és $\lim_{x\to x_0} f(x) \neq 0$, a g függvénynek pedig nem létezik x_0-ban a határértéke, akkor az $f \cdot g$ függvénynek nem létezik az x_0 pontban a határértéke.

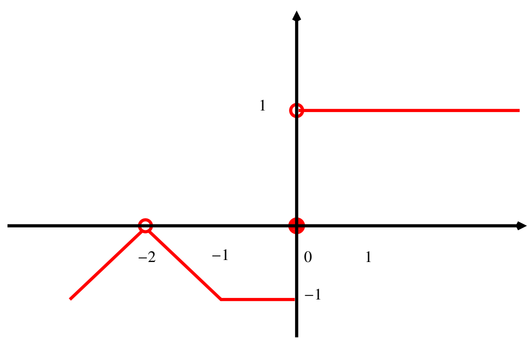
3.35. Feladat. *Az f függvény gráfja a következő ábrán látható.*



Vizsgáljuk meg, hogy léteznek-e az alábbi határértékek.

(a) $$\lim_{x\to 1} f(x)$$ *(b)* $$\lim_{x\to 2} f(x)$$ *(c)* $$\lim_{x\to 3} f(x)$$

3.36. Feladat. *Az f függvény gráfja a következő ábrán látható.*



Vizsgáljuk meg, hogy léteznek-e az alábbi határértékek.

(a) $$\lim_{x\to -2} f(x)$$ *(b)* $$\lim_{x\to -1} f(x)$$ *(c)* $$\lim_{x\to 0} f(x)$$

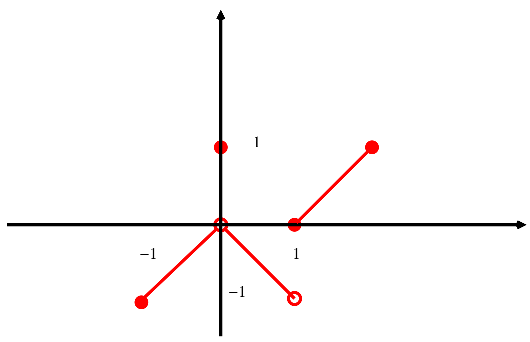
3.37. Feladat. *Az f függvény gráfja a következő ábrán látható. Válasszuk ki az alábbi állítások közül az igazakat.*

(a) $$\lim_{x\to 0} f(x) \text{ létezik}$$

(b) $$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

(c) $$\lim_{x\to 0} f(x) = 1$$

(d) $$\lim_{x\to 1} f(x) = 1$$



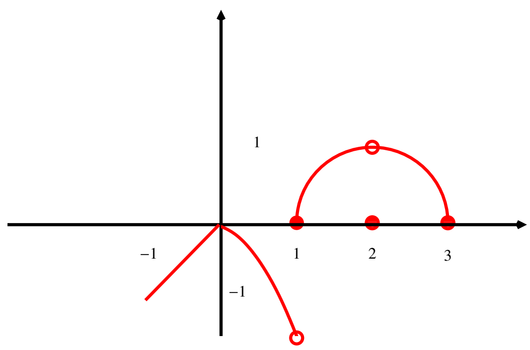
(e)

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 0$$

(f)

$\lim_{x\to x_0} f(x)$ *létezik*
minden $x_0 \in]-1,1[$ *esetén*

3.38. Feladat. *Az f függvény gráfja a következő ábrán látható. Válasszuk ki az alábbi állítások közül az igazakat.*



(a)

$$\lim_{x\to 2} f(x) \textit{ létezik}$$

(b)

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

(c)

$$\lim_{x\to 3} f(x) = 0$$

(d)

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 0$$

(e)

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 0$$

(f)

$\lim_{x\to x_0} f(x)$ *létezik*
minden $x_0 \in]-1,1[$ *esetén*

(g)

$\lim_{x\to x_0} f(x)$*létezik*
minden $x_0 \in]1,3[$ *esetén*

3.39. Feladat. *Legyen* $x_0 \in \mathbb{R}$ *és* $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *olyan függvények, melyekre*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 5 \quad \textit{és} \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = 2.$$

Számítsuk ki az alábbi határértékeket.

(a)

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x)$$

(b)

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) + 3g(x))$$

(c)

$$\lim_{x\to x_0} f^2(x)\cdot g(x)$$

(d)

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{f(x)-g(x)}.$$

3.40. Feladat. *Legyenek* $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *olyan függvények, melyekre*

$$\lim_{x\to 4} f(x) = 0 \quad \textit{és} \quad \lim_{x\to 4} g(x) = -3.$$

Számítsuk ki az alábbi határértékeket.

(a)
$$\lim_{x\to 4}(g(x)+3)$$

(b)
$$\lim_{x\to 4} x f(x)$$

(c)
$$\lim_{x\to 4} g^2(x)$$

(d)
$$\lim_{x\to 4}\frac{g(x)}{f(x)-1}.$$

3.41. Feladat. *Legyenek $f, g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ olyan függvények, melyekre*
$$\lim_{x\to 0} f(x)=\frac{1}{2} \quad \textit{és} \quad \lim_{x\to 0} g(x)=\sqrt{2}.$$
Számítsuk ki az alábbi határértékeket.

(a)
$$\lim_{x\to 0} -g(x)$$

(b)
$$\lim_{x\to 0}(f(x)+g(x))$$

(c)
$$\lim_{x\to 0} x+f(x)$$

(d)
$$\lim_{x\to 0} f(x)\cdot g(x)$$

(e)
$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{f(x)}$$

(f)
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)\cos(x)}{x-1}.$$

3.42. Feladat. *Legyen $x_0\in\mathbb{R}$ és $f, g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ olyan függvények, melyekre*
$$\lim_{x\to x_0} f(x)=7 \quad \textit{és} \quad \lim_{x\to x_0} g(x)=-3.$$
Számítsuk ki az alábbi határértékeket.

(a)
$$\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x))$$

(b)
$$\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x)$$

(c)
$$\lim_{x\to x_0} 4g(x)$$

(d)
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}.$$

3.43. Feladat. *A határérték definíciójának felhasználásával igazoljuk az alábbiakat.*

(a)
$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-1}=\frac{3}{2}$$

(b)
$$\lim_{x\to 4}(3x-5)=7$$

(c)
$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}$$

(d)
$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{x+2}-2}=4$$

(e)
$$\lim_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right]=1$$

3.44. Feladat. *Vizsgáljuk meg, hogy léteznek-e az alábbi határértékek.*

(a)
$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$$

(b)
$$\lim_{x\to \alpha}\frac{1}{(x-\alpha)^2} \quad (\alpha>0 \textit{ adott})$$

(c)

$$\lim_{x\to 0}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

(d)

$$\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$$

(e)

$$\lim_{x\to 1}2^{\frac{1}{x-1}}$$

3.45. Feladat. *Mutassuk meg, hogy a*

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x)=\begin{cases}1, & ha \quad x\in\mathbb{Q}\\ 0, & ha \quad x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

módon értelmezett $\chi_{\mathbb{Q}}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *ún. Dirichlet-függvénynek egyetlen pontban sem létezik a határértéke.*

3.46. Feladat. *Számítsuk ki az alábbi függvényhatárértékeket.*

(a)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+77x-5}{4x^3+11x^2-3x+18}$$

(b)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{11x^2-10x+9}{22x^2+30x-48}$$

(c)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-3x^5+20x^4-2x^3+8x^2-17x+26}{x^4+78x^3-43x^2+45x+17}$$

(d)

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2+20x+3}{x^2-152x+28}$$

(e)

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3+96x^2-4x+17}{13x^2+22x+6}$$

(f)

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{5x^2-49x+23}{-11x+2}$$

(g)

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{7x^8-38x^7+4x^5-16x^3+x^2-25}{x^{11}-22x^{10}+3x^9-8x^8+56x^2-12}$$

(h)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(5x-1)^5}$$

(i)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$$

(j)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+1)(x^2+1)\cdots(x^n+1)}{((nx)^n+1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}\qquad (n\in\mathbb{N}\ \textit{adott})$$

3.47. Feladat. *Határozzuk meg a következő határértékeket.*

(a)

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^2+x-2}$$

(b)

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-x}{x^2+8x+7}$$

(c)

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-11x+10}{x^2-x}$$

(d)

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x^2+x-6}$$

(e)

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^2-8x+15}{x^2-6x+5}$$

(f)

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-4x+3}{x^2-2x+3}$$

(g)

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{x^3+5x^2-14}$$

(h)

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-4x+4}{x^3+5x^2-14}$$

(i)

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x}{x^5+2x^4+x^3}$$

3.48. Feladat. *Vizsgáljuk meg, hogy léteznek-e az alábbi határértékek.*

(a)

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+10x+2}-\sqrt{x^2+2}$$

(b)

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+10}-\sqrt{x}$$

(c)

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{2x^2+3x}-\sqrt{2x^2+10}$$

(d)

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^3+x^2}-\sqrt{x^3}$$

(e)

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{6x^2+2x}-\sqrt{3x^2+20x}$$

(f)

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{2x^2+10x-2}-x$$

(g)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$$

(h)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}$$

3.49. Feladat. *Számítsuk ki az alábbi függvényhatárértékeket.*

(a)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x+10}$$

(b)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{2x+5}$$

(c)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{2x+5}$$

(d)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}-5}$$

(e)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{x+1}$$

(f)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+1}{2x+2}\right)^{2x}$$

(g)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{x+3}$$

(h)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x+3}\right)^{x+4}$$

3.50. Feladat. *Legyenek $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\beta>0$, igazoljuk, hogy*

(a)

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{x^2-\alpha^2}{x-\alpha}=2\alpha$$

(b)

$$\lim_{x\to\beta}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{\beta}}{x-\beta}=\frac{1}{2\sqrt{\beta}}$$

3.51. Feladat. *Számítsuk ki az alábbi határértékeket.*

(a)

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{x}}{x-1}$$

(b)

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{x^2-\alpha^2}{x^4-\alpha^4}$$

(c)

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}$$

(d)

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}$$

(e)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2+x}-\frac{1}{2}}{x}$$

(f)

$$\lim_{x\to 0}\frac{(2+x)^3-8}{x}$$

3.52. Feladat. *Számítsuk ki a következő határértékeket.*

(a)

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$$

(b)

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$$

(c)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$$

3.53. Feladat. *Határozzuk meg a következő függvényhatárértékeket.*

(a)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}$$

(b)

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sin(x)}{x}$$

(c)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin(x)}{x}$$

(d)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\alpha x)}{\beta x}$$

(e)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\alpha x)}{\sin(\beta x)}$$

(f)

$$\lim_{x\to 0}x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

(g)

$$\lim_{x\to+\infty}x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

(h)

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}$$

(i)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}\quad (n\in\mathbb{N}\ \textit{adott})$$

(j)

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sqrt{1-\mathrm{tg}(x)}+\sqrt{1+\mathrm{tg}(x)}}{\sin(2x)}$$

(k)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}(x)-\sin(x)}{\sin^3(x)}$$

(l)

$$\lim_{x\to -1}\frac{\sin(x^2-x+2)}{x+1}$$

(m)

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin(1-\sqrt{x})}{x-1}$$

(n)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(1-\cos(x)\right)}{x}$$

(o)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin(x))}{x}$$

(p)

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sin(x^2-4)}{x-2}$$

(q)
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{\sin(\sqrt{x})}$$

(r)
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2+x)}{x}$$

(s)
$$\lim_{x\to 9}\frac{\sin\left(\sqrt{x}-3\right)}{x-9}$$

3.54. Feladat. *Legyenek $\alpha,\beta>0$ adott valós számok, határozzuk meg a következő függvényhatárértékeket.*

(a)
$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha^x-\beta^x}{x}$$

(b)
$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha^x+\beta^x}{2}$$

(c)
$$\lim_{x\to \alpha}\frac{\alpha^x-x^\alpha}{x-\alpha}$$

3.55. Feladat. *Határozzuk meg az $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvény $x_0\in\mathbb{R}$ pontbeli határértékét, ha tudjuk, hogy*

(a)
$$\lim_{x\to 0+}\sqrt[3]{4f(x)}=2 \qquad x_0=0+$$

(b)
$$\lim_{x\to 1}\frac{3x^2+1}{f(x)}=+\infty \qquad x_0=1$$

(c)
$$\lim_{x\to -2}\frac{5-x^2}{\sqrt{f(x)}}=0 \qquad x_0=0$$

(d)
$$\lim_{x\to 0}\frac{4-f(x)}{x}=0 \qquad x_0=0$$

(e)
$$\lim_{t\to -4}\left(t\lim_{x\to 0}f(x)\right)=2 \qquad x_0=0$$

3.56. Feladat. *Legyen $f\colon[-1,1]\to\mathbb{R}$ egy olyan függvény, melyre minden $x\in[-1,1]$ esetén*

$$\sqrt{5-2x^2}\leq f(x)\leq\sqrt{5-x^2}$$

teljesül. Mutassuk meg, hogy ekkor létezik a $\lim_{x\to x_0}f(x)$ határérték és számítsuk ki az értékét.

3.57. Feladat. *Legyen $f\colon[-1,1]\to\mathbb{R}$ egy olyan függvény, melyre minden $x\in[-1,1]$ esetén*

$$x^2\leq f(x)\leq x^4$$

teljesül. Melyek azok az $x_0\in[-1,1]$ pontok, melyekben a fentiek alapján a $\lim_{x\to x_0}f(x)$ határérték létezhet? Számítsuk ki ezeket a határértékeket.

3.58. Feladat. *Legyenek $a,b,c\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$. Vizsgáljuk meg, hogy mi történik az*

$$ax^2+bx+c=0$$

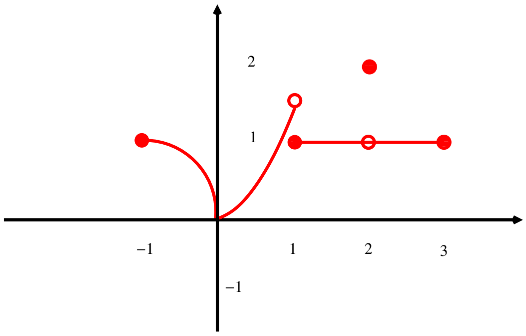
másodfokú egyenlet gyökeivel, ha rögzített b és c paraméterek esetén a-val nullához tartunk.

3.59. Feladat. *Határozzuk meg az α,β valós számokat, ha tudjuk, hogy*

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\alpha x+\beta-\frac{x^3+1}{x^2+1}\right)=0$$

teljesül.

3.60. Feladat. *Az f függvény gráfja az alábbi ábrán látható. Válasszuk ki az alábbi állítások közül az igazakat.*



(a) $\lim_{x\to 1+} f(x) = 1$

(b) $\lim_{x\to 2} f(x)$ *nem létezik*

(c) $\lim_{x\to} f(x) = 2$

(d) $\lim_{x\to 1-} f(x) = 1$

(e) $\lim_{x\to} f(x) = -2$

(f) $\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0+} f(x)$

(g) $\lim_{x\to 1} f(x)$ *nem létezik*

(h) $\lim_{x\to x_0} f(x)$ *létezik minden* $x_0 \in]-1,1[$ *esetén*

(i) $\lim_{x\to x_0} f(x)$ *létezik minden* $x_0 \in]1,3[$ *esetén*

(j) $\lim_{x\to 3+} f(x)$ *nem létezik*

(k) $\lim_{x\to 1-} f(x) = 1$

(l) $\lim_{x\to 1-} f(x)$ *nem létezik.*

4. fejezet

Valós függvények differenciálszámítása

Elméleti áttekintés

4.1. Definíció. *Legyen* $]a,b[\subset \mathbb{R}$ *valódi intervallum, és* $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ *egy valós függvény, akkor a*

$$\varphi(x, x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad (x \neq x_0, x, x_0 \in]a,b[)$$

módon definiált függvényt az f *függvény* x, x_0 *pontokhoz tartozó* ***differenciahányados függvény****ének nevezzük.*

4.1. Megjegyzés (A differenciahányados függvény geometriai interpretációja). *Az* f *függvény* x, x_0 *pontokhoz tartozó* $\varphi(x, x_0)$ *differenciahányados függvénye éppen az* f *függvény görbéjének* $(x, f(x))$ *és* $(x_0, f(x_0)))$ *pontjaihoz tartozó* ***szelő meredeksége****.*

4.2. Definíció. *Legyen* $D \subset \mathbb{R}$ *nemüres, nyílt halmaz,* $x_0 \in D$ *Azt mondjuk, hogy az* $f : D \to \mathbb{R}$ *függvény az* $x_0 \in D$ *pontban* ***differenciálható****, ha létezik és véges az alábbi határérték*

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

4.2. Megjegyzés (A differenciálhányados geometriai interpretációja). $f'(x_0)$ *éppen az* f *függvény görbéjéhez az* $(x_0, f(x_0))$ *pontban húzott* ***érintő meredeksége****.*

4.3. Definíció. *Legyen* $]a,b[\subset \mathbb{R}$ *valódi intervallum, ha az* $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ *függvény differenciálható az* $x_0 \in]a,b[$ *pontban, akkor az*

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

egyenletű egyenest az f *függvény görbéje* $(x_0, f(x_0))$*-beli* ***érintőjé****nek nevezzük.*

4.1. Példa. *Legyen* $c \in \mathbb{R}$ *egy rögzített konstans és* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = c$*. Ekkor minden* $x_0 \in \mathbb{R}$ *esetén*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{c - c}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} 0 = 0.$$

Tehát $f'(x) = 0 \ (x \in \mathbb{R})$.

4.2. Példa. *Tekintsük az* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ *függvényt, ekkor tetszőleges* $x_0 \in \mathbb{R}$ *esetén*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} 1 = 1,$$

azaz $f'(x) = 1 \ (x \in \mathbb{R})$.

4.1. Tétel (Differenciálhatóság ⇒ folytonosság). *Legyen* $D \subset \mathbb{R}$ *nemüres, nyílt halmaz,* $x_0 \in D$ *Ha a* $f : \ \to \mathbb{R}$ *függvény differenciálható az* $x_0 \in D$ *pontban, akkor* f *folytonos is az* x_0 *pontban.*

4.3. Megjegyzés (Folytonosság $\not\Rightarrow$ differenciálhatóság). *Az előző tétel megfordítása* **nem** *igaz, ugyanis az $f(x) = |x|$ függvény folytonos a 0 pontban, de ott nem differenciálható, hiszen nem létezik a*

$$\lim_{x\to 0} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$$

határérték.

4.2. Tétel (Differenciálhatóság és műveletek). *Legyen $D \subset \mathbb{R}$ nemüres, nyílt halmaz és $x_0 \in D$. Ha az $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ függvények differenciálhatóak az $x_0 \in D$ pontban, akkor az $f+g$, $\lambda\cdot f$ ($\lambda \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstans), $f\cdot g$, és ha $g(x) \neq 0$ teljesül az x_0 pont valamely környezetében, akkor az f/g függvény is differenciálható az x_0 pontban, továbbá*

(i)

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0);$$

(ii)

$$(\lambda \cdot f)'(x_0) = \lambda \cdot f'(x_0);$$

(iii)

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0);$$

(iv)

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)\, g(x_0) - f(x_0)\, g'(x_0)}{g^2(x_0)};$$

4.3. Tétel (Az összetett függvény differenciálhatósága). *Legyen $D \subset \mathbb{R}$ nemüres, nyílt halmaz, $x_0 \in D$ és $g\colon D \to \mathbb{R}$ és $f\colon g(D) \to \mathbb{R}$ olyan függvények, hogy g differenciálható az x_0 pontban, f pedig differenciálható a $g(x_0)$ pontban. Ekkor az $f \circ g$ függvény differenciálható az x_0 pontban, továbbá*

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

4.4. Tétel (Az inverz függvény differenciálhatósága). *Legyen $]a, b[\subset \mathbb{R}$ valódi intervallum, ha az $f\ :]a, b[\to \mathbb{R}$ függvény szigorúan monoton, folytonos $]a, b[$-n, és létezik $f'(x_0)$ és az nem nulla, akkor az f^{-1} függvény differenciálható az $f(x_0)$ pontban és*

$$\left(f^{-1}\right)'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)},$$

azaz

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y_0)\right)}.$$

Néhány elemi függvény differenciálhányadosfüggvénye

(a)

$$[c]' = 0$$

(b)

$$x^{\mu} = \mu x^{\mu-1} \; (\mu \in \mathbb{R} \text{ rögzített})$$

(c)

$$[a^x]' = a^x \ln(a) \; (a > 0 \text{ rögzített})$$

(d)

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}$$

(e)

$$\sin'(x) = \cos(x)$$

(f)

$$\cos'(x) = -\sin(x)$$

(g)

$$\mathrm{tg}'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

(h)

$$\mathrm{ctg}'(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)}$$

(i)

$$\sinh'(x) = \cosh(x)$$

(j)
$$\cosh'(x) = \sinh(x)$$

(k)
$$\tanh'(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}$$

(l)
$$\coth'(x) = -\frac{1}{\sinh^2(x)}$$

(m)
$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(n)
$$\arccos'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(o)
$$\mathrm{arctg}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

(p)
$$\mathrm{arcctg}'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$$

Feladatok

Valós függvények differenciálszámítása

4.1. Feladat.

A differenciálhányados definíciójából kiindulva határozzunk meg az alábbi függvények differenciálhányadosfüggvényeit.

(a)
$$2$$

(b)
$$x^2$$

(c)
$$x^3$$

(d)
$$\frac{1}{x}$$

(e)
$$\sqrt{x}$$

(f)
$$\sqrt[3]{x}$$

4.2. Feladat. *Számítsuk ki az $f'(1)$, $f'(2)$ és $f'(3)$ értékeket, ha*

$$f(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Számítsuk ki az $f'(0)$ értéket, ha

$$f(x) = x(x-1)(x-2)\cdots(x-1000) \quad (x \in \mathbb{R})$$

4.3. Feladat. *Legyen*

$$f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x \quad (x \in \mathbb{R}),$$

milyen $x_0 \in \mathbb{R}$ értékekre teljesül, hogy

(a)
$$f'(x_0) = 0$$

(b)
$$f'(x_0) = -2$$

(c)
$$f'(x_0) = 10.$$

4.4. Feladat. *Legyen*

$$f(x) = \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x - 1 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Határozzuk meg az f függvény gráfján azokat a pontokat, melyekhez húzott érintő meredeksége

(a)
$$0$$

(b)
$$-1$$

(c)
$$5$$

4.5. Feladat. *Határozzuk meg az*

$$f(x) = x + \sin(x) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

módon megadott f függvény gráfján azokat a pontokat, melyekhez húzott érintő meredeksége nulla.

4.6. Feladat. *Legyen $c \in \mathbb{R}$ adott. Határozzuk meg az $a, b \in \mathbb{R}$ konstansokat úgy, hogy az f függvény differenciálható legyen a c pontban, határozzuk meg az $f'(c)$ értéket is, ha*

1.

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x), & \text{ha } x \leq c \\ ax + b, & \text{ha } x > c \end{cases}$$

2.

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{ha } x \leq c \\ ax + b, & \text{ha } x > c \end{cases}$$

3.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{|x|}, & \text{ha } x \leq c \\ ax + b, & \text{ha } x > c \end{cases}$$

4.7. Feladat. *Határozzuk meg a következő függvények differenciálhányados függvényeit.*

(a)
$$4x^3$$

(b)
$$6x^2 - x^4$$

(c)
$$x^3 + x^2 + x + 1$$

(d)
$$1 - x^3$$

(e)
$$\sqrt[3]{x^2}$$

(f)
$$\sqrt[7]{x^5} + \sqrt{x}$$

(g)
$$8\sqrt[4]{x^3}$$

(h)
$$4x^2 - 16\sqrt[4]{x^2}$$

(i)
$$x^9 + \sqrt{x}$$

(j)
$$4x^4 - x^2 + 0,96$$

4.8. Feladat. *Határozzuk meg az alábbi függvények differenciálhányados függvényeit.*

(a)
$$\frac{x^3}{3} - \frac{3x^4}{2} + \frac{13x^5}{5} - 2x^6 + \frac{4x^7}{4}$$

(b)
$$3x^{\frac{7}{3} - 4x^{\frac{13}{4}}} + 9x^{\frac{2}{3}} - 6x^{\frac{1}{2}} + 4x^{-\frac{1}{2}} - \frac{4}{7}x^{-\frac{7}{2}}$$

(c)
$$\sqrt[3]{x^2} + \frac{2}{x^3} + \frac{x\sqrt[3]{x^2}}{5} + \frac{m}{n}\sqrt[m]{x^n} - \frac{p}{\sqrt[q]{x^q}} + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

(d)
$$27x^3 - \frac{81x^2\sqrt[3]{x^2}}{2} + 12x^2 + \frac{12x\sqrt[3]{x}^2}{2}$$

(e)
$$\frac{5x^2}{\sqrt[5]{x^2}} + 30\sqrt[15]{x} + \frac{6}{\sqrt[3]{x}}$$

(f)
$$x\sqrt[6]{x^5} - \frac{18x^2\sqrt[6]{x^5}}{17} + \frac{3x^3\sqrt[3]{x}}{10}$$

4.9. Feladat. *A szorzat differenciálási szabályát alkalmazva, határozzuk meg a következő függvények differenciálhányados függvényeit.*

(a)
$$-\frac{1}{2}x(x^2-2)$$
(b)
$$(4x^2+x-1)(x^2+3x+5)$$
(c)
$$(ax-1)(x^2+5x+6)$$
(d)
$$(\sqrt{x}-1)\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}+\sqrt[5]{x}\right)$$
(e)
$$(x^2+10)(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}+3)$$
(f)
$$e^x\sqrt{x}$$
(g)
$$(x^2+x+1)\ln(x)$$
(h)
$$\left(\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}\right)(\sin(x)+\sinh(x)-1)$$
(i)
$$\ln(x)(e^x-2^x)$$
(j)
$$2^x\cdot x^2-10$$
(k)
$$(x-1)(x-2)(x-3)$$
(l)
$$\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^{100}}+x^{100}\right)$$
(m)
$$(a+bx)(c+dx)$$
(n)
$$x^3\left(\frac{2x^2\sqrt{x}}{11}-\frac{27x}{23\sqrt[6]{x}}+\frac{16}{3}\right)$$
(o)
$$\sqrt[3]{x}\left(\frac{x\sqrt[3]{x}}{5}+\frac{18x\sqrt{x}}{11}+\frac{27\sqrt[6]{x^5}}{7}\right)$$
(p)
$$e^x\left(x^3-3x^2+6x-6\right)$$
(q)
$$e^{ax}(a\sin(x)-\cos(x))$$
(r)
$$e^{ax}(a\cos(x)+\sin(x))$$

4.10. Feladat. *A hányados differenciálási szabályát alkalmazva, határozzuk meg a következő függvények differenciálhányados függvényeit.*

(a)
$$\frac{x-1}{x-2}$$
(b)
$$\frac{x}{x+1}$$
(c)
$$\frac{\sqrt{x}}{x+3}$$
(d)
$$\frac{1-x}{x+5}$$
(e)
$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$$
(f)
$$\frac{-x}{1-x}$$
(g)
$$\frac{1}{a^2-ax+x^2}$$
(h)
$$\frac{a^2-x^2}{a^2+x^2}$$
(i)
$$\frac{5+3x+x^2}{5-3x+x^2}$$
(j)
$$\frac{e^x}{x+1}$$
(k)
$$\frac{x}{\ln(x)}$$
(l)
$$\frac{\sqrt{x}}{e^x}$$
(m)
$$\frac{e^x}{\sqrt{x}}$$
(n)
$$e\cdot\ln(x)$$
(o)
$$e^x\ln(x)$$
(p)
$$\frac{2+\ln(x)}{x^2}$$
(q)
$$\frac{2e^x-4}{e^x+1}$$
(r)
$$\frac{e^x-a}{e^x+a}$$
(s)
$$\frac{x^2-4}{\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}+1}$$
(t)
$$\frac{\sin(x)}{\sinh(x)}$$

(u) $\dfrac{\sin(x)+\sinh(x)}{\cos(x)+\cosh(x)}$

(v) $\dfrac{2^x+x^2}{3^x+x^3}$

(w) $\dfrac{10^x+e^x+\pi^x}{\ln(x)+\sqrt{x}+\sqrt[100]{x}}$

(x) $\dfrac{1}{a-bx+cx^2}$

4.11. Feladat. *Az összetett függvény differenciálási szabályát alkalmazva, határozzuk meg a következő függvények differenciálhányados függvényeit.*

(a) $(x+12)^{12}$

(b) $(x^2+1)^5$

(c) $2(x^2+5)^8$

(d) $(x^9-3)^6$

(e) $10(x^3-5x)^3$

(f) $(x+1)^3$

(g) $2(x^2-1)^8$

(h) $(x^4+2)^6$

(i) $\sqrt{x^2+1}$

(j) $(3x^3+7)^7$

(k) $\sqrt[3]{x^3+3}$

(l) $\sqrt{e^x-4}$

(m) e^{-2x}

(n) e^2-e^{-x}

(o) $e^{\sqrt{x}+1}$

(p) $e^{4\ln(x)}$

(q) e^{ax}

(r) $(e^x-e^{-x})^2$

(s) x^{x^3+1000}

(t) $\sqrt[3]{e^{2x}}$

(u) $\ln(x^3+x)$

(v) $\ln(4)$

(w) $\ln(4x+1)$

(x) $\ln(x^3-2)$

(y) $\ln(x^6+3x^4+1)$

(z) $(\ln(x))^2$

4.12. Feladat. *Az összetett függvény differenciálási szabályát alkalmazva, határozzuk meg a következő függvények differenciálhányados függvényeit.*

(a) $\ln(5x-7)$

(b) $\ln(x^2e^x)$

(c) $\ln(3+x)-\ln(3-x)$

(d) $\sin\left(3x^2+20x-19\right)$

(e) $\cosh(\sqrt{x}+x^2+200)$

(f) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{x+1}{x^2+x+1}\right)$

(g) $\operatorname{tg}(\sin(5x))$

(h) $\sin\left(6x^2-3x+2\right)$

(i) $\cos\left(\sqrt[4]{2x}+1\right)$

(j) $\sinh(5x)$

(k)
$$4\sinh(3x+e^x)+5\cosh\left(x^2-2^x\right)$$

(l)
$$\cosh^2\left(6x+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)$$

(m)
$$\tanh^2(5x^2)$$

(n)
$$\sinh(2x^3-3x-4)$$

(o)
$$\sinh(\cos(x))$$

(p)
$$\sin(x)\sinh(x)+\coth(x)\mathrm{tg}(x)$$

(q)
$$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$$

(r)
$$\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$$

(s)
$$\sin^n(x)\cdot\cos(nx)$$

(t)
$$\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)-\mathrm{ctg}\left(\frac{x}{2}\right)$$

(u)
$$\sqrt[3]{\left(\frac{1-x^3}{1+x^3}\right)}$$

4.13. Feladat. *Az összetett függvény differenciálási szabályát alkalmazva, határozzuk meg a következő függvények differenciálhányados függvényeit.*

(a)
$$\left(6x^2-\frac{x^5}{5}\right)^4$$

(b)
$$\sqrt[3]{(3x-2x^2)^2}$$

(c)
$$\sqrt[4]{(2x^2-x^3)^3}$$

(d)
$$\frac{3x(4-3x)}{4\sqrt[4]{2x^3-x^3}}$$

(e)
$$\sqrt[3]{4+2\sqrt{3x}+3x^2}$$

(f)
$$\sqrt[4]{(3+4\sqrt[3]{2x})^3}$$

(g)
$$\sqrt[4]{\left(2\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}+\sqrt[3]{x}\right)^3}$$

(h)
$$\sqrt[5]{(a+x^2)^4}\cdot\sqrt[3]{(a+x^2)^2}$$

(i)
$$\sqrt{(a^2+ax+x^2)(a-x)}$$

(j)
$$(5+3x)\sqrt{6x-5}$$

(k)
$$(3x^2+5ax-2a^3)\sqrt{a^2+3x^2}$$

(l)
$$\frac{27x}{\sqrt{6x-5}}$$

(m)
$$x(a^2+x^2)\sqrt{a^2-x^2}$$

(n)
$$\frac{a^4+a^2x^2-4a^4}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

(o)
$$\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\sqrt{1+x^2}$$

(p)
$$\left(\frac{3}{x^7}+\frac{2}{x^5}\right)\sqrt{(3-5x^2)^5}$$

(q)
$$\frac{1}{x}\sqrt{a^2-x^2}$$

(r)
$$\frac{1}{2x^2\sqrt{3x+x^2}}$$

(s)
$$\frac{81x^2}{2\sqrt{5+3x}}$$

(t)
$$7x^2\sqrt{5+2x}$$

(u)

$$\left(7-\frac{6}{x^2}\right)\sqrt[7]{\left(3+\frac{6}{x^2}\right)^6}$$

(v)

$$\left(\frac{2}{3x^3}+\frac{28}{27}x\right)\sqrt{7x^2-9}$$

(w)

$$\frac{18}{x^4\sqrt{7x^2-9}}$$

4.14. Feladat. *Az összetett függvény differenciálási szabályát alkalmazva, határozzuk meg a következő függvények differenciálhányados függvényeit.*

(a)

$$\frac{6(5-x^2)}{(5-3x+x^2)^2}$$

(b)

$$\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}$$

(c)

$$\frac{x}{x+\sqrt{1+x^2}}$$

(d)

$$\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}-x}$$

(e)

$$\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$$

(f)

$$\frac{\sqrt{(4x^3-5)^3}}{\sqrt[3]{(5x^2+1)^2}}$$

(g)

$$\frac{10x}{9\sqrt[3]{\left(2-\sqrt{x}\right)^4}}$$

(h)

$$-\frac{27}{x^4\sqrt{(3x+5x^6)^5}}$$

4.15. Feladat. *Az összetett függvény differenciálási szabályát alkalmazva, határozzuk meg a következő függvények differenciálhányados függvényeit.*

(a)

$$\ln\left(\frac{x}{1-x^2}\right)$$

(b)

$$\ln\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

(c)

$$\ln\left(\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x}}\right)$$

(d)

$$\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$$

(e)

$$\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$$

(f)

$$\ln\left(\frac{x^2-2}{\sqrt{(6-2x^3)^2}}\right)$$

(g)

$$\frac{x^2(x^3-4)}{\sqrt[3]{(\ln(x)^2)}}$$

4.16. Feladat. *Az összetett függvény differenciálási szabályát alkalmazva, határozzuk meg a következő függvények differenciálhányados függvényeit.*

(a)

$$\mathrm{tg}(x)-\frac{\mathrm{tg}(x^3)}{3}$$

(b)

$$\left(\cos(x^3)+\frac{2}{3}\right)\sin\left(x^3\right)$$

(c)

$$\frac{\mathrm{tg}^4(x)}{4}-\frac{\mathrm{tg}^2(x)}{2}-\ln\left(\cos(x)\right)$$

(d)

$$\frac{1}{\sin^2(x)\cos^6(x)}$$

(e)
$$\frac{(3\cos(4x)-7)\,\mathrm{ctg}(x)}{\sin^3(2x)}$$
(f)
$$\frac{\sin^2(x)}{a+b\cos^2(x)}$$

4.17. Feladat. *Határozzuk meg az alábbi függvények tizedik deriváltját.*

(a) $$\frac{1}{\sqrt{x}}$$
(b) $$\sqrt[3]{x}$$
(c) $$\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$
(d) $$\sqrt[3]{x^2}$$
(e) $$(a+bx)^{10}$$
(f) $$\frac{x}{a\pm bx}$$
(g) $$x\sqrt{a+bx}$$
(h) $$\frac{1}{a^2-b^2x^2}$$
(i) $$\frac{x}{a^2-b^2x^2}$$
(j) $$\left(a+\sqrt{bx}\right)^{10}$$
(k) $$e^{a+bx}$$
(l) $$e^{a^2+b^2x^2}$$
(m) $$a^x$$
(n) $$e^x x^{10}$$
(o) $$\ln(a+bx)$$
(p) $$\ln(a^2+b^2x^2)$$
(q) $$\sin(ax)$$
(r) $$\cos^{10}(x)$$

4.18. Feladat. *A következőekben jelöljön f egy differenciálható valós függvényt. Határozzuk meg a φ függvény differenciahányados függvényét, ha*

(a)
$$\varphi(x)=f(x^2)\quad (x\in\mathbb{R})$$
(b)
$$\varphi(x)=f(\sin^2(x))+f(\cos^2(x))\quad (x\in\mathbb{R})$$
(c)
$$\varphi(x)=f(e^x)+e^{f(x)}\quad (x\in\mathbb{R})$$
(d)
$$\varphi(x)=f(f(x))\quad (x\in\mathbb{R})$$

4.19. Feladat. *Határozzuk meg az $\dfrac{f'}{f}$ függvényt, ha*

(a)
$$f(x)=x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$
(b)
$$f(x)=\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^n$$
(c)
$$f(x)=(x-x_1)^{\alpha_1}\cdot(x-x_2)^{\alpha_2}\cdots(x-x_n)^{\alpha_n}$$

4.20. Feladat. *Legyen $n\in\mathbb{N}$ és tekintsük az*
$$f(x)=\begin{cases} x^n\sin\left(\dfrac{1}{x}\right), & \text{ha } x\neq 0\\ 0, & \text{ha } x=0\end{cases}$$
módon megadott $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvényt. Mely esetben lesz az f függvény

(a) folytonos az $x = 0$ pontban?

(b) differenciálható az $x = 0$ pontban?

(c) folytonosan differenciálható az $x = 0$ pontban?

4.21. Feladat. *Vizsgáljuk meg, hogy mely pontokban differenciálhatóak az alábbi függvények.*

1.
$$f(x) = [x]\sin(\pi x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

2.
$$f(x) = \begin{cases} x\left|\cos\left(\dfrac{\pi}{x}\right)\right|, & ha\ x \neq 0 \\ 0, & ha\ x = 0 \end{cases} \quad (x \in \mathbb{R})$$

3.
$$f(x) = \sqrt{\sin(x^2)} \quad \left(x \in [-\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}]\right)$$

4.
$$f(x) = \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}} \quad (x \in \mathbb{R})$$

5.
$$f(x) = \sqrt{1 - e^{-x^2}} \quad (x \in \mathbb{R})$$

6.
$$f(x) = |\ln(|x|)| \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

4.22. Feladat. *Legyenek $c, m \in \mathbb{R}$ adottak. Hogyan határozzuk meg az α, β valós számokat úgy, hogy az*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{m^2}{|x|}, & ha\ |x| > c \\ \alpha x^2 + \beta, & ha\ |x| \leq c \end{cases}$$

módon értelmezett $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható legyen?

4.23. Feladat. *Milyen összefüggésnek kell ahhoz fennállnia az a, b, c együtthatók között, hogy az*

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (x \in \mathbb{R})$$

egyenletű parabola érintse az x-tengelyt.
Definiáljuk az $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ függvényt az

$$f(x) = \begin{cases} x, & ha\ 0 \leq x < 1 \\ 0, & ha\ x = 1 \end{cases}$$

módon. Mutassuk meg, hogy

(a) $f(0) = f(1) = 0$

(b) f differenciálható a $]0,1[$ intervallumon

(c) minden $x \in]0,1[$ esetén $f'(x) \neq 0$

(d) miért nem mond ellent (c) a Rolle-féle középértéktételnek?

4.24. Feladat. *Határozzuk meg az α, β, γ valós konstansokat úgy, hogy az*

$$f(x) = \begin{cases} 3, & ha\ x = 0 \\ -x^2 + 3x + \alpha, & ha\ x \in]0,1[\\ \beta x + \gamma, & ha\ x \in [1,2] \end{cases}$$

módon megadott $f\colon [0,2] \to \mathbb{R}$ függvényre teljesüljenek a Lagrange-féle középértéktétel feltételei.

4.25. Feladat. *Az alábbiakban megadtunk néhány $[a,b] \subset \mathbb{R}$ intervallumot, ezeken értelmezett $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ függvényeket. Határozzuk meg azokat a $\xi \in]a,b[$ pontokat, melyekkel fennáll a Cauchy-féle középértéktétel.*

(a)

$$f(x) = x \qquad g(x) = x^2 \qquad [a,b] = [-2,0]$$

(b)

$$f(x) = x \qquad g(x) = x^3 \qquad [a,b] \subset \mathbb{R}\ \textit{tetszőleges}$$

(c)

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - 4x \qquad g(x) = x^2 \qquad [a,b] = [0,3]$$

(d)

$$f(x) = \cos(x) \qquad g(x) = \sin(2x) \qquad [a,b] = [0,2\pi]$$

Teljes függvényvizsgálat

4.26. Feladat. *Vizsgáljuk meg monotonitás szempontjából az alábbi függvényeket.*

(a)

$$2 + x - x^2$$

(b)

$$3x - x^3$$

(c)

$$x + \sin(x)$$

(d)

$$\frac{x+1}{x+2}$$

(e)

$$x^2 - \ln(x^2)$$

(f)

$$x^\alpha e^{-x}$$

4.27. Feladat. *Legyenek*

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} \qquad g(x) = \frac{d - x}{\sqrt{b^2 - (d-x)^2}} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

illetve

$$h(x) = \frac{x}{c_1\sqrt{x^2 + a^2}} - \frac{d - x}{c_2\sqrt{b^2 - (d-x)^2}} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ahol $a, b, d \in \mathbb{R}$, $c_1, c_2 > 0$ adottak. Mutassuk meg, hogy

(a) f szigorúan monoton növekedő

(b) g szigorúan monoton csökkenő

(c) h szigorúan monoton növekedő.

4.28. Feladat. *Legyen*

$$f(x) = 3 + 4\cos(x) + \cos(2x) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

(a) Melyek azok az $x \in \mathbb{R}$ pontok, melyekre

$$f(x) < 0$$

teljesül?

(b) Az (a) részben miért elegendő a $[0,2\pi]$ intervallumra szorítkozni?

4.29. Feladat. *Vizsgáljuk meg a következő függvényeket konvexitás szempontjából.*

(a) $$3x^2 - x^3$$

(b) $$x^4 - 14x^3 + 60x^2 + 27$$

(c) $$\frac{1}{1+x^2}$$

(d) $$\sqrt{1+x^2}$$

(e) $$e^{-x^2}$$

(f) $$\ln(1+x^2)$$

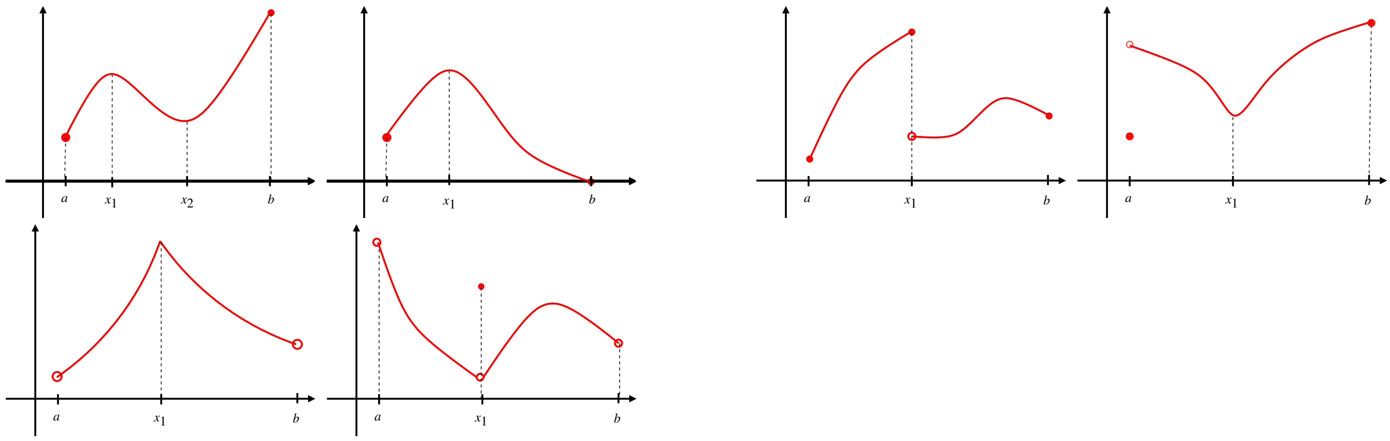
4.30. Feladat. *Alább néhány függvény gráfja látható. Mindegyik esetében döntsük el az alábbiakat.*

(a) Felveszi-e az f függvény a minimumát az $[a, b]$ intevallumon?

(b) Felveszi-e az f függvény a maximumát az $[a, b]$ intevallumon?

(c) Létezik-e az f függvénynek lokális minimumhelye az $]a, b[$ intervallumon?

(d) Létezik-e az f függvénynek lokális maximumhelye az $]a, b[$ intervallumon?



4.31. Feladat. *Az alább megadott f függvények mindegyike felveszi a maximumát és a minimumát is a megadott intervallumokon. Határozzuk meg, hogy az f függvénynek hol vannak szélsőértékhelyei és határozzuk meg a szélsőértékeket is.*

(a) $$f(x) = \frac{2x}{3} - 5 \quad (x \in [-2, 3])$$

(b) $$f(x) = -x - 4 \quad (x \in [-4, 1])$$

(c) $$f(x) = 4 - x^2 \quad (x \in [-3, 1])$$

(d) $$f(x) = x^2 - 1 \quad (x \in [-1, 2])$$

(e) $$f(x) = -\frac{1}{x^2} \quad (x \in [1/2, 2])$$

(f) $$f(x) = \sqrt[3]{x} \quad (x \in [-1, 8])$$

(g) $$f(x) = \sqrt{4 - x^2} \quad (x \in [-2, 1])$$

(h) $$f(x) = 2 - |x| \quad (x \in [-1, 3])$$

(i) $$f(x) = |x - 5| \quad (x \in [4, 7])$$

(j) $$f(x) = |x - 2| + |x + 3| \quad (x \in [-5, 5])$$

(k) $$f(x) = |x - 1| - |x - 5| \quad (x \in [-2, 7])$$

(l) $$f(x) = |x + 2| - |x - 3| \quad (x \in \mathbb{R})$$

(m) $$f(x) = |x + 1| + |x + 3| \quad (x \in \mathbb{R})$$

4.32. Feladat. *Az alábbi esetekben meg van adva az f függvény differenciálhányados függvénye. Ez alapján határozzuk meg az f függvény stacionárius pontjait, majd osztályozzuk azokat.*

(a)
$$f'(x) = x(x-1)$$

(b)
$$f'(x) = (x-1)^2(x+2)$$

(c)
$$f'(x) = (x-1)(x+2)(x-3)$$

(d)
$$f'(x) = (x-7)(x+1)(x+5)$$

(e)
$$f'(x) = \frac{x+2}{\sqrt[3]{x}}$$

(f)
$$f'(x) = (x-1)(x+2)$$

(g)
$$f'(x) = (x-1)^2(x+2)^2$$

(h)
$$f'(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x}}$$

4.33. Feladat. *Határozzuk meg, hogy a következő függvényeknek mely pontokban van szélsőértékhelyük.*

(a)
$$2 + x - x^2$$

(b)
$$(x-1)^3$$

(c)
$$2x^3 - 9x^2 + 12x - 1$$

(d)
$$(x-1)^\alpha$$

(e)
$$2x^2 - x^4$$

(f)
$$x(x-1)^2(x-2)^3$$

(g)
$$x + \frac{1}{x}$$

(h)
$$\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

(i)
$$\sqrt[3]{x(1-x)^2}$$

(j)
$$x^\alpha(1-x)^\beta$$

(k)
$$(x+10)^{10}e^{-x}$$

(l)
$$e^{x^2-1}$$

(m)
$$xe^{-x}$$

(n)
$$\sqrt{x}\ln(x)$$

(o)
$$e^x \sin(x)$$

4.34. Feladat. *Vizsgáljuk meg, hogy a következő függvényeknek mely pontokban van szélsőértékhelyük.*

(a)
$$x^3 - 6x^2 + 9x - 4$$

(b)
$$\frac{2x}{1+x^2}$$

(c)
$$\frac{x^2-3x+2}{x^2+2x+1}$$

(d)
$$\sqrt{2x-x^2}$$

(e)
$$x\sqrt[3]{x-1}$$

(f)
$$\frac{\ln^2(x)}{x}$$

(g)
$$\cos(x) + \frac{\cos(2x)}{2}$$

(h)
$$\frac{10}{1+\sin^2(x)}$$

(i)
$$\operatorname{arctg}(x) - \frac{\ln(1+x^2)}{2}$$

(j)
$$|x|\, e^{-|x-1|}$$

(k)
$$\frac{x^3+x}{x^4-x^2+1}$$

(l)
$$\frac{(x+3)^3}{(x+2)^2}$$

(m)
$$a(x-b)^4$$

(n)
$$(x-1)(2-x)^2$$

(o)
$$x^3+x^2+1$$

(p)
$$(x-a)^4(x-b)^5$$

(q)
$$\frac{x}{\ln(x)}$$

(r)
$$\sin^n(x)\sin^m(a-x)$$

(s)
$$\sin^n(x)\cos^m(a-x)$$

(t)
$$\frac{e^x}{\sin(x-a)}$$

(u)
$$\cos(x)+\cos(2x)+\cos(3x)$$

4.35. Feladat. *Vizsgáljuk meg az alábbi függvényeket monotonitás szempontjából és határozzuk meg a stacionárius pontjaikat is, illetve osztályozzuk azokat.*

(a)
$$f(x)=-x^2-3x+3$$

(b)
$$f(x)=-x^3+2x^2$$

(c)
$$f(x)=3x^2-4x^3$$

(d)
$$f(x)=3x^3+16x$$

(e)
$$f(x)=-3x^2+9x+5$$

(f)
$$f(x)=2x^3-18x$$

(g)
$$f(x)=6x-x^3$$

(h)
$$f(x)=(x+7)^3$$

(i)
$$f(x)=x^4-8x^2+16$$

(j)
$$f(x)=\frac{3x^4}{2}-x^6$$

(k)
$$f(x)=x\sqrt{8x^2}$$

(l)
$$f(x)=\frac{x+8}{\sqrt[3]{x}}$$

(m)
$$f(x)=\frac{x^2-4}{\sqrt[3]{x}}$$

(n)
$$f(x)=x^4-4x^3+4x^2$$

(o)
$$f(x)=15x^3-x^5$$

(p)
$$f(x)=x^2\sqrt{5-x}$$

(q)
$$f(x)=\frac{x^3}{3x^2+1}$$

(r)
$$f(x)=\sqrt[3]{x^2}(x+5)$$

(s)
$$f(x)=\sqrt[3]{x^2}(x^2-4)$$

4.36. Feladat. *Legyen*
$$f(x)=x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma \qquad (x\in\mathbb{R}).$$
Hogyan válasszuk meg az α,β,γ valós konstansokat úgy, hogy az f függvénynek az $x=1$ pont inflexiós pontja legyen?

4.37. Feladat. *Az alábbi feladatokban meg van adva az f függvény differenciálhányados függvénye. Ez alapján határozzuk meg f''-at és vizsgáljuk meg az f függvényt konvexitás szempontjából.*

(a)
$$f'(x) = 2 + x - x^2$$

(b)
$$f'(x) = x(x-3)^2$$

(c)
$$f'(x) = x(x^2 - 12)$$

(d)
$$f'(x) = (8x - 5x^2)(4 - x)^2$$

(e)
$$f'(x) = x^2 - x - 6$$

(f)
$$f'(x) = x^2(2 - x)$$

(g)
$$f'(x) = (x-1)^2(2x+3)$$

(h)
$$f'(x) = (x^2 - 2x)(x - 5)$$

(i)
$$f'(x) = \cos(x)$$

(j)
$$f'(x) = \sin(x)$$

(k)
$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}$$

(l)
$$f'(x) = \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2}}$$

4.38. Feladat. *Végezzünk teljes függvényvizsgálatot a következő függvényeken.*

(a)
$$2x^2 - 8$$

(b)
$$\frac{x^2}{2} + x - 4$$

(c)
$$30x^2 - 1800x + 29000$$

(d)
$$1 + 6x - x^2$$

(e)
$$x^3 + 6x^2 + 9x$$

(f)
$$x^3 + \frac{3x^2}{2} + 6x$$

(g)
$$8x - 2x^2$$

(h)
$$x^2 + x + 1$$

(i)
$$x^2 - x^4$$

(j)
$$-3x^2 + 2x - 5$$

(k)
$$3x - 2x + 5$$

(l)
$$-x^2 - 4x + 3$$

(m)
$$2x^2 - 2x + 2$$

(n)
$$x^2 + 6x + 4$$

(o)
$$x^2 - 4x + 9$$

(p)
$$x^3 - 3x^2 + 3x + 1$$

4.39. Feladat. *Végezzünk teljes függvényvizsgálatot a következő függvényeken.*

(a)
$$\frac{1}{1+x^2}$$

(b)
$$\frac{1-x}{1+x}$$

(c)
$$2x + \frac{1}{x-2}$$

(d)
$$\frac{2x}{1+x^2}$$

(e)
$$e^{-x^2}$$

(f)
$$\frac{e^x}{x+1}$$

(g)
$$1 - e^{-x}$$

(h)
$$1 + x + e^x$$

(i)
$$(1 + x^2)e^{-x^2}$$

(j)
$$\sqrt{x}\ln(x)$$

(k)
$$\sqrt[3]{x+1}$$

(l)
$$\sqrt{2x - x^2}$$

(m)
$$\sin^2(x)$$

(n)
$$\sin(x^2)$$

(o)
$$\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

(p)
$$\sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

4.40. Feladat. *Hajtsunk végre egy teljes függvényvizsgálatot az alábbi függvényeken.*

(a)
$$x + \mathrm{arctg}(x)$$

(b)
$$x + e^{-x}$$

(c)
$$(x-3)\sqrt{x}$$

(d)
$$\sin(x) + \frac{\sin(3x)}{3}$$

(e)
$$2x - \mathrm{tg}(x)$$

(f)
$$\frac{x^4}{1+x^3}$$

(g)
$$\frac{x}{(1-x)^2(1+x)}$$

(h)
$$\sqrt{1 - e^{-x^2}}$$

(i)
$$\sin(x)\sin(3x)$$

4.41. Feladat. *Egy felül nyitott, négyzet alapú doboz készítéséhez* $2m^2$ *területű lemezt használhatunk fel. Hogyan válasszuk meg a doboz méreteit, hogy a térfogata a legnagyobb legyen és mekkora ez a legnagyobb térfogat?*

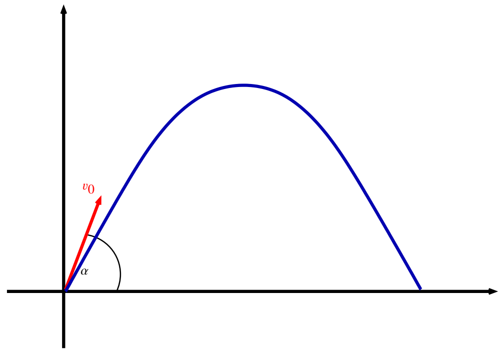
4.42. Feladat. *Egy felül nyitott, henger alakú,* $0,5$ *literes mérőedényt szeretnénk készíteni. Hogyan válasszuk meg az edény alapjának a sugarát és a magasságát, hogy minél kevesebb lemezt használjunk fel és mennyi lesz a felhasznált lemezmennyiség?*

4.43. Feladat. *Egy tűzfal mellett* $600m^2$*-es téglalap alakú területet akarunk elkeríteni. Csak három oldalon kell kerítést készítenünk, mert a negyedik oldal a tűzfal. Hogyan válasszuk meg a téglalap oldalait, hogy a kerítés hossza a lehető legkisebb legyen és mennyi ez a minimális hossz?*

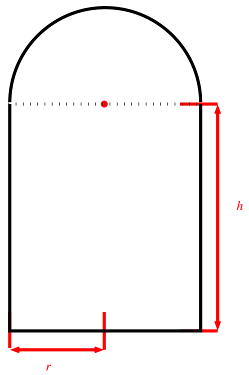
4.44. Feladat. *A ferde hajítás távolságát megadó képlet*

$$s = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g},$$

ahol v_0 *az elhajított test kezdősebessége,* α *a kezdősebesség irányának a vízszintessel bezárt szöge* ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$)*,* g *pedig a nehézség gyorsulás (lásd a 4.1. ábrát). Milyen* α *érték mellet lesz legnagyobb a hajítás távolsága és mekkora ez a maximális távolság?*



4.1. ábra. Ferde hajítás



4.2. ábra. Csatorna

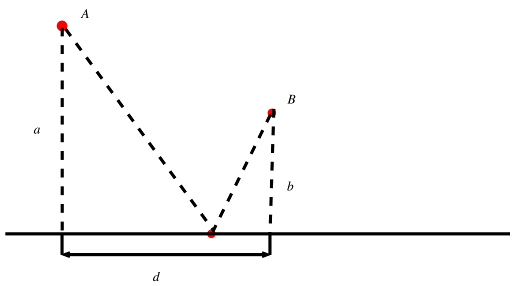
4.45. Feladat. *Egy csarona keresztmetszete a 4.2. ábrán látható. A keresztmetszet* $2m^2$ *kell, hogy legyen. Hogyan válasszuk meg a csatorna r és h méretét, hogy a kerület a lehető legkisebb legyen? Mekkora lesz a minimális kerület?*

4.46. Feladat. *Valamely mennyiséget n-szer megmérünk. Legyenek a mérési eredmények* $x_1, \ldots, x_n$*. A mennyiség valósi értéke legjobb becslésének azt az x számot tekintjük, amelytől a mérési eredmények eltérésének a négyzet-összege a legkisebb. Más szóval, bevezetve az*

$$A = (x - x_1)^2 + \cdots + (x - x_n)^2$$

jelölést, keressük azt az x értéket, amelyre A minimális.

4.47. Feladat. *Egy országúttól a távolságra van az A község és b távolságra a B község. A két település vetületének távolsága az országúton d. Mindkét községhez az országút egyazon pontjából kiinduló egyenes bekötő utat kell építeni úgy, hogy a két bekötő út együttes hossza a legkisebb legyen. Hogyan válasszuk meg ezt a pontot (lásd a 4.3. ábrát)?*



4.3. ábra. Bekötő út építése

4.48. Feladat. *Határozzuk meg a K kerületű téglalapok közül azt, mely a legnagyobb területet határolja.*

4.49. Feladat. *Határozzuk meg a T területű téglalapok közül azt, melynek a legkisebb a kerülete.*

4.50. Feladat. *Tegyük fel, hogy egy háromszögnek adva van két oldalának a hosszúsága, legyenek ezek a és b. Hogyan válasszuk meg ezen oldalak bezárt szögét, ha azt szeretnénk, hogy a háromszög területe a lehető legnagyobb legyen?*

4.51. Feladat. *Számítsuk ki az alábbi határértékeket.*

(a)
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\alpha x)}{\sin(\beta x)}$$

(b)
$$\lim_{x\to 0}\frac{x\mathrm{ctg}(x)-1}{x^2}$$

(c)
$$\lim_{x\to 0}\frac{\cosh(x)-\cos(x)}{x^2}$$

(d)
$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{tg}(3x)}{\mathrm{tg}(x)}$$

(e)
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+ax)}{x}$$

(f)
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}$$

(g)
$$\lim_{x\to 0+}\sqrt{x}\ln(x)$$

(h)
$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln(x)}{\sqrt[3]{x}}$$

(i)
$$\lim_{x\to \pi}\frac{\sin(x)}{1-\cos(x)}$$

(j)
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin(x)}\right)$$

(k)
$$\lim_{x\to 0}\frac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^3}$$

(l)
$$\lim_{x\to 3}\frac{3^x-x^3}{x-3}$$

(m)
$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-3x+2}{x^4-4x+3}$$

(n)
$$\lim_{x\to 1}\frac{x^4-3x+2}{x^5-4x+3}$$

(o)
$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-2x^2-4x+8}{x^4-8x^2+16}$$

(p)
$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3-2x+1}{x^5-2x-1}$$

(q)
$$\lim_{x\to 2}\frac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}}$$

(r)
$$\lim_{x\to 1}\frac{x^{100}-2x+1}{x^{50}+2x+1}$$

(s)
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos(x^2)}}{1-\cos(x)}$$

(t)
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos(x)}}{1-\cos(\sqrt{x})}$$

(u)
$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}(x)-x}{x-\sin(x)}$$

(v)
$$\lim_{x\to 0}\frac{3\mathrm{tg}(4x)-12\mathrm{tg}(x)}{3\sin(4x)-12\sin(x)}$$

(w)
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\sin(ax))}{\ln(\cos(bx))}$$

(x)
$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\sin(x))-\cos(x)}{x^4}$$

(y)
$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln(x)}{x^\alpha}\ (\alpha>0)$$

(z)
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}$$

4.52. Feladat. *Számítsuk ki az alábbi határértékeket.*

(a)
$$\lim_{x\to a} \frac{x^m - a^m}{x^n - a^n}$$

(b)
$$\lim_{x\to 1} \frac{mx^{m+1} - (m+1)x^m + 1}{x^2 - 2x + 1}$$

(c)
$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 1}{x^3 - 2x^2 + 2x - 1}$$

(d)
$$\lim_{x\to 5} \frac{x^3 - 8x^2 + 17x - 10}{x^4 - 5x^3 - 2x^2 + 11x - 5}$$

(e)
$$\lim_{x\to -1} \frac{x^3 - 5x^2 + 2x + 8}{x^4 - 2x^3 - 16x^2 + 2x + 15}$$

(f)
$$\lim_{x\to 2} \frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^4 - 3x^3 - 4}$$

(g)
$$\lim_{x\to -3} \frac{x^4 + 3x^3 - 7x^2 - 27x - 18}{x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 27x - 18}$$

(h)
$$\lim_{x\to c} \frac{ax^2 - 2acx + ac^2}{bx^2 - 2bcx + bc^2}$$

(i)
$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - x^2 - 8x + 12}{x^3 - 4x^2 + x + 6}$$

(j)
$$\lim_{x\to a} \frac{\sqrt{a+x} - \sqrt{2a}}{\sqrt{x+2a} - \sqrt{3a}}$$

(k)
$$\lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x^3 - a^3}}{\sqrt{x-a}}$$

(l)
$$\lim_{x\to a} \frac{\sqrt{a} - \sqrt{a} - \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

(m)
$$\lim_{x\to a} \frac{a^x - b^x}{\ln(1-x)}$$

(n)
$$\lim_{x\to a} \frac{a^n - x^n}{\ln(a^n) - \ln(x^n)}$$

(o)
$$\lim_{x\to 1} \frac{1 - x + \ln(x)}{1 - \sqrt{2x - x^2}}$$

(p)
$$\lim_{x\to 1} \frac{x - (n+1)x^{n+1} + nx^{n+2}}{(1 - x^2)}$$

(q)
$$\lim_{x\to 1} \frac{x^x - x}{1 - x + \ln(x)}$$

(r)
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{e^x \ln(1-x)}$$

(s)
$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin(x)}{x^3}$$

(t)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x\cos(x)}{\sin^3(x)}$$

(u)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - \cos(x) + 1}{\sin(x) + \cos(x) - 1}$$

4.53. Feladat. *Számítsuk ki az alábbi határértékeket.*

(a)
$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos(x)}{\cos(x)\sin^2(x)}$$

(b)
$$\lim_{x\to 0} \frac{(e^x - e^{-x})^2}{x^2\cos(x)}$$

(c)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(a+x) - \operatorname{tg}(a-x)}{\operatorname{arctg}(a+x) - \operatorname{arctg}(a-x)}$$

(d)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\operatorname{tg}(x))}{\ln(\operatorname{tg}(2x))}$$

(e)
$$\lim_{x\to 1} \frac{2}{x^2 - 1} - \frac{1}{x - 1}$$

(f)
$$\lim_{x\to 1} \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln(x)}$$

(g)

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2}$$

(h)

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x\mathrm{tg}(x)}$$

(i)

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\ln(x+1)} - \frac{1}{x}$$

5. fejezet

Határozatlan integrál

Elméleti áttekintés

5.1. Definíció. *Legyen* $]a,b[\subset \mathbb{R}$ *nemüres, nyílt intervallum,* $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ *függvény. Az* $F :]a,b[\to \mathbb{R}$ *függvényt az* f *függvény* ***primitív függvény****ének vagy* ***határozatlan integrál****jának nevezzük, ha*

$$F'(x) = f(x)$$

teljesül minden $x \in]a,b[$ *esetén. Az* F *függvényre a továbbiakban az* $\int f$ *vagy az* $\int f(x)dx$ *jelölést használjuk.*

5.1. Tétel. *Ha* $f, F :]a,b[\to \mathbb{R}$ *és* $F' = f$*, akkor* $G :]a,b[\to \mathbb{R}$ ***pontosan akkor*** primitív függvénye f*-nek, ha létezik olyan* $C \in \mathbb{R}$*, hogy*

$$F(x) = G(x) + C \qquad (x \in]a,b[)$$

5.2. Tétel (A határozatlan integrál linearitása). *Legyenek* $f, g :]a,b[\to \mathbb{R}$ *olyan függvények, melyekre létezik* $\int f$ *és* $\int g$*, legyenek továbbá* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *tetszőleges konstansok. Ekkor létezik* $\int \alpha \cdot f + \beta \cdot g$ *is, és létezik olyan* $C \in \mathbb{R}$*, hogy*

$$\int \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx + C.$$

5.3. Tétel (A parciális integrálás tétele). *Ha az* $f, g :]a,b[\to \mathbb{R}$ *függvények differenciálhatóak* $]a,b[$*-n, és létezik* $\int f' \cdot g$*, akkor létezik* $\int f \cdot g'$ *is, és létezik olyan* $C \in \mathbb{R}$ *konstans, hogy*

$$\int f(x) \cdot g'(x)dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)dx + C. \quad (x \in]a,b[)$$

5.4. Tétel (A helyettesítéses integrálás tétele). *Ha* $f :]a,b[\to \mathbb{R}$*,* $g :]c,d[\to \mathbb{R}$ *olyan függvények, melyek esetén létezik* $g' :]c,d[\to]a,b[$ *és létezik* $\int f$ *is, akkor létezik* $\int (f \circ g) \cdot g'$ *is, és van olyan* $C \in \mathbb{R}$*, hogy*

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)dx = \left(\left(\int f\right) \circ g\right)(x) + C = \int f(t)dt\Big|_{t=g(x)} + C. \quad (x \in]c,d[)$$

5.5. Tétel. *Legyen* $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ *differenciálható* $]a,b[$*-n,* $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$*, ekkor* $f^\alpha \cdot f'$ *függvénynek létezik a primitív függvénye* $]a,b[$*-n és*

$$\int f^\alpha(x) \cdot f'(x)dx = \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + C,$$

teljesül valamely $C \in \mathbb{R}$ *konstanssal.*

5.6. Tétel. *Ha* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *folytonos* $[a,b]$*-n,* $f(x) \neq 0$ $(x \in [a,b])$*,* f *differenciálható* $]a,b[$*-n, akkor az* $\dfrac{f'}{f}$ *függvénynek létezik a primitív függvénye, és létezik olyan* $C \in \mathbb{R}$*, hogy*

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln(|f(x)|) + C.$$

5.7. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ tetszőlegesek. Ha létezik $\int f$, akkor létezik $\int f(\alpha x + \beta)\,dx$ is, és létezik olyan $C \in \mathbb{R}$ konstans, hogy*

$$\int f(\alpha x + \beta)\,dx = \frac{F(\alpha x + \beta)}{\alpha} + C, \qquad (x \in \mathbb{R})$$

ahol F jelöli az f függvény primitív függvényét.

Alapintegrálok

1.
$$\int e^x\,dx = e^x$$

2.
$$\int a^x\,dx = \frac{1}{\ln a} a^x$$

3.
$$\int \ln(x)\,dx = x\ln(x) - x$$

4.
$$\int \log_a(x)\,dx = \frac{1}{\ln a}(x\ln(x) - x)$$

5.
$$\int x^\alpha\,dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} & \text{ha } \alpha \neq -1, \\ \ln|x| & \text{ha } \alpha = -1\,, \end{cases}$$

6.
$$\int \cos(x)\,dx = \sin(x)$$

7.
$$\int \sin(x)\,dx = -\cos(x)$$

8.
$$\int \mathrm{tg}(x)\,dx = -\ln|\cos(x)|$$

9.
$$\int \mathrm{ctg}(x)\,dx = \ln|\sin(x)|$$

10.
$$\int \arccos(x)\,dx = x\arccos(x) - \sqrt{1 - x^2}$$

11.
$$\int \arcsin(x)\,dx = x\arcsin(x) + \sqrt{1 - x^2}$$

12.
$$\int \mathrm{arctg}(x)\,dx = x\,\mathrm{arctg}(x) - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2)$$

13.
$$\int \mathrm{arcctg}(x)\,dx = x\,\mathrm{arcctg}(x) + \frac{1}{2}\ln(1 + x^2)$$

14.

$$\int \cosh(x)\,dx = \sinh(x)$$

15.

$$\int \sinh(x)\,dx = \cosh(x)$$

16.

$$\int \tanh(x)\,dx = \ln|\cosh(x)|$$

17.

$$\int \coth(x)\,dx = \ln|\sinh(x)|$$

18.

$$\int \operatorname{arcosh}(x)\,dx = x\operatorname{arcosh}(x) - \sqrt{x^2+1}$$

19.

$$\int \operatorname{arsinh}(x)\,dx = x\operatorname{arsinh}(x) - \sqrt{x^2+1}$$

20.

$$\int \operatorname{artanh}(x)\,dx = x\operatorname{artanh}(\mathrm{x}) + \frac{1}{2}\ln|1-x^2|$$

21.

$$\int \operatorname{arcoth}(x)\,dx = x\operatorname{arcoth}(x) + \frac{1}{2}\ln|x^2-1|$$

22.

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}(x)$$

23.

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg}(x)$$

24.

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin(x)$$

25.

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\arccos(x)$$

26.

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg}(x)$$

27.

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = -\operatorname{arcctg}(x)$$

28.

$$\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh(x)$$

29.

$$\int \frac{dx}{\sinh^2 x} = -\coth(x)$$

30.
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{arsinh}(x)$$

31.
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arcosh}(x)$$

32.
$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{artanh}(x)$$

33.
$$\int \frac{dx}{x^2-1} = -\operatorname{arcoth}(x)$$

Feladatok

5.1. Feladat. *Határozzuk meg az alábbi függvények primitív függvényét.*

(a)
$$\int x^5 dx$$

(b)
$$\int x^{-3} dx,$$

(c)
$$\int \sqrt{x} dx,$$

(d)
$$\int \sqrt[3]{x^2} dx,$$

(e)
$$\int \frac{1}{\sqrt[4]{x}} dx$$

(f)
$$\int \sqrt{x}\sqrt[3]{x} dx,$$

(g)
$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} dx,$$

(h)
$$\int \frac{x}{\sqrt[5]{x^4}} dx,$$

(i)
$$\int \sqrt{x\sqrt[3]{x}} dx,$$

(j)
$$\int (3-x^2)^3 dx,$$

(k)
$$\int x^2(5-x^4) dx,$$

(l)
$$\int (1-x)(1-2x)(1-3x) dx,$$

(m)
$$\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx,$$

(n)
$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx,$$

(o)
$$\int \frac{x^2}{1+x^2} dx,$$

(p)
$$\int \frac{x^2}{1-x^2} dx,$$

(q)
$$\int \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}} dx$$

(r)
$$\int \frac{\sqrt[4]{x\sqrt[5]{x}}}{\sqrt[6]{x}} dx,$$

(s)
$$\int 3x^4 + \frac{4}{x^5} dx,$$

(t)
$$\int \frac{x^4 - 4x^3 + 2\sqrt[3]{x}}{\sqrt[5]{x^4}} dx$$

5.2. Feladat. *Számítsuk ki a következő függvények határozatlan integráljait.*

(a)
$$\int 5^x dx,$$

(b)
$$\int 2e^x dx,$$

(c)
$$\int 6\sin(x) + 5\cos(x) dx,$$

(d)
$$\int 2 \cdot 5^x + 4\sin(x) - 3\cos(x) dx,$$

(e)
$$\int \mathrm{tg}^2(x) dx,$$

(f)
$$\int \mathrm{ctg}^2(x) dx,$$

(g)
$$\int \frac{\cos(x)^2 - 5}{1 + \cos(2x)} dx,$$

(h)
$$\int \frac{1 + \cos(2x)}{\cos(x)^2 - 1} dx,$$

(i)
$$\int \frac{5\cos(2x)}{\sin(x) + \cos(x)} dx$$

5.3. Feladat. *A parciális integrálás tételének segítségével határozzuk meg a következő függvények primitív függvényeit.*

(a)
$$\int \ln(x) dx,$$

(b)
$$\int x^n \ln(x) dx, \ (n \neq -1)$$

(c)
$$\int \sqrt{x} \ln^2(x) dx,$$

(d)
$$\int xe^{-x} dx,$$

(e)
$$\int x^2 e^{-2x} dx,$$

(f)
$$\int (x^2 + 2)\ln(x) dx,$$

(g)
$$\int (x-1)e^x dx,$$

(h)
$$\int (x^2 + x + 1)e^x dx,$$

(i)
$$\int x^2 e^{x+1} dx,$$

(j)
$$\int x^3 e^{-x^2} dx,$$

(k)
$$\int x\cos(x) dx,$$

(l)
$$\int x^2 \sin(2x) dx,$$

(m)
$$\int x\sinh(x) dx,$$

(n)
$$\int x^3 \cosh(3x) dx,$$

(o)
$$\int e^{\sqrt{x}} dx,$$

(p)
$$\int x\sin(\sqrt{x}) dx,$$

(q)
$$\int \frac{x}{\cos^2(x)} dx,$$

(r)
$$\int \frac{xe^x}{(x+1)^2} dx,$$

(s)
$$\int e^x \cos(x) dx,$$

(t)
$$\int e^{2x}\sin(3x)dx,$$

(u)
$$\int e^{2x}\sin^2(x)dx,$$

(v)
$$\int (e^x - \cos(x))^2\, dx,$$

5.4. Feladat. *Határozzuk meg az alábbi függvények primitív függvényeit.*

(i)
$$\int \frac{\cos^2(x) - 5}{1 + \cos(2x)}dx,$$

(ii)
$$\int \frac{1 + \cos(2x)}{\cos^2(x) - 1}dx,$$

(iii)
$$\int \frac{2\cos(2x)}{\sin(x) + \cos(x)}dx,$$

(iv)
$$\int \frac{3}{\cos^2(x)} - \frac{7}{5\sin^2(x)}dx,$$

(v)
$$\int 4\sinh(x) + 2\cosh(x)dx$$

(vi)
$$\int \frac{5}{\sinh^2(x)}dx,$$

(vii)
$$\int 5\tanh^2(x)dx,$$

(viii)
$$\int \coth^2(x)dx,$$

(ix)
$$\int \frac{\cosh^2(x) - 2}{\cosh(2x) + 1}dx,$$

(x)
$$\int \frac{1}{\sinh(x)\cosh(x)}dx$$

5.5. Feladat. *Az 5.7. Tétel segítségével határozzuk meg a következő függvények primitív függvényeit.*

(a)
$$\int (3x + 2)^3\, dx,$$

(b)
$$\int (5x - 4)^5\, dx,$$

(c)
$$\int \sqrt[4]{7x - 16}dx,$$

(d)
$$\int \frac{1}{(-3x + 4)^4}dx$$

(e)
$$\int (2x - 3)^{10}dx,$$

(f)
$$\int \sqrt[3]{1 - 3x}dx,$$

(g)
$$\int \frac{1}{\sqrt{2 - 5x}}dx,$$

(h)
$$\int \frac{1}{(5x - 2)^{\frac{5}{2}}}dx$$

(i)
$$\int e^{5x+4}dx,$$

(j)
$$\int \frac{2}{3}e^{3x-2}dx,$$

(k)
$$\int 3^{4x-7}dx,$$

(l)
$$\int 5^{2-3x}dx,$$

(m)
$$\int \sin(6x + 4)\, dx,$$

(n)
$$\int \cos(-4 - 5x)\, dx,$$

(o)
$$\int \frac{1}{\sin^2(3x+2)}dx,$$

(p)
$$\int \sinh(2-7x)\,dx$$

5.6. Feladat. *Az 5.7. Tétel segítségével számítsuk ki az alábbi függvények határozatlan integráljait.*

(a)
$$\int x^2(2x^3+4)^2dx,$$

(b)
$$\int \sin(x)\cos(x)dx,$$

(c)
$$\int \frac{\ln(x)}{x}dx,$$

(d)
$$\int (2x^3+4)^5x^2dx$$

(e)
$$\int x^2\sqrt{6x^3+1}dx,$$

(f)
$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx,$$

(g)
$$\int \frac{5x^2}{\sqrt[3]{3x^3+18}}dx,$$

(h)
$$\int e^x\sqrt{1-e^x}dx$$

(i)
$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx,$$

(j)
$$\int x^2\sqrt[3]{1+x^2}dx,$$

(k)
$$\int \frac{x}{3-2x^2}dx,$$

(l)
$$\int \frac{x}{(1+x^2)^2}dx$$

5.7. Feladat. *Az 5.6. Tétel felhasználásával határozzuk meg az alábbi függvények primitív függvényeit.*

(a)
$$\int \frac{xe^{x^2}}{e^{x^2}+1}dx,$$

(b)
$$\int \frac{e^x}{e^x+2}dx,$$

(c)
$$\int \frac{\ln^5(x)}{x}dx,$$

(d)
$$\int \frac{1}{x\ln(x)\ln(\ln(x))}dx,$$

(e)
$$\int \sin^5(x)\cos(x)dx,$$

(f)
$$\int \frac{\sin(x)}{\sqrt{\cos^3(x)}}dx,$$

(g)
$$\int \frac{\sinh(x)}{\cosh^2(x)}dx,$$

(h)
$$\int \frac{1}{\sin^2(x)\sqrt[4]{\operatorname{ctg}(x)}}dx$$

(i)
$$\int \frac{2x}{x^2+7}dx$$

(j)
$$\int \frac{5x^2}{x^3+4}dx,$$

(k)
$$\int \frac{4\sin(x)}{5\cos(x)+4}dx,$$

(l)
$$\int \frac{5\sin(2x)}{\sin^2(x)+12\pi}dx,$$

(m)
$$\int \frac{-\sin(2x)}{5+\cos^2(x)}dx$$

(n)
$$\int \frac{1}{\cos^2(x)\operatorname{tg}(x)}dx,$$

(o)
$$\int \frac{1}{\sin^2(x)\mathrm{ctg}(x)}dx,$$

(p)
$$\int \mathrm{tg}(x)dx$$

(q)
$$\int \frac{1}{x\ln(x)}dx,$$

(r)
$$\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3}dx$$

5.8. Feladat. *A parciális törtekre bontás tételének felhasználásával határozzuk meg az alábbi függvények primitív függvényeit.*

(a)
$$\int \frac{A}{\alpha x+\beta}dx,\ (A,\alpha\neq 0)$$

(b)
$$\int \frac{A}{(\alpha x+\beta)^n}dx,\ (A,\alpha\neq 0, n\neq 1)$$

(c)
$$\int \frac{Ax}{(\alpha x+\beta)^n}dx, (A,\alpha\neq 0)$$

(d)
$$\int \frac{4}{3x-5}dx,$$

(e)
$$\int \frac{5}{2-3x}dx,$$

(f)
$$\int \frac{5}{(2x-4)^6}dx,$$

(g)
$$\int \frac{14}{(6-4x)^7}dx,$$

(h)
$$\int \frac{x}{(2x+3)^4}dx,$$

(i)
$$\int \frac{5x}{(3x-4)^6}dx$$

(j)
$$\int \frac{2}{x+3}dx,$$

(k)
$$\int \frac{5}{(x+1)^2}dx,$$

(l)
$$\int \frac{x^2}{x+1}dx,$$

(m)
$$\int \frac{x+1}{x^2+x+1}dx,$$

(n)
$$\int \frac{x+2}{x^2-1}dx,$$

(o)
$$\int \frac{3x-4}{x^2-x-6}dx,$$

(p)
$$\int \frac{x^2}{(x-3)(x+2)^2}dx,$$

(q)
$$\int \frac{1}{x^2+\alpha^2}dx\ (\alpha\neq 0)$$

(r)
$$\int \frac{1}{\alpha^2+\beta^2x^2}dx,\ (\alpha\beta\neq 0)$$

(s)
$$\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}dx,$$

(t)
$$\int \frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)}dx,$$

(u)
$$\int \frac{1}{x^2-x+2}dx,$$

(v)
$$\int \frac{1}{(x-2)(x+4)}dx,$$

(w)
$$\int \frac{14}{(x-3)(x+2)(x-4)}dx,$$

(x)
$$\int \frac{5x-3}{(x-1)(x-3)^2}dx,$$

(y)
$$\int \frac{5}{x(x^2+4)}dx,$$

(z)
$$\int \frac{2x^2}{x^4-1}dx$$

5.9. Feladat. *Határozzuk meg az alábbi függvények határozatlan integrálját a helyettesítéses integrálás tételének segítségével.*

(a)
$$\int \frac{1}{x+a}dx$$

(b)
$$\int (2x-3)^{10}dx$$

(c)
$$\int \sqrt[3]{1-3x}dx$$

(d)
$$\int \frac{1}{\sqrt{2-5x}}dx$$

(e)
$$\int \frac{1}{(5x-2)^{\frac{5}{2}}}dx$$

(f)
$$\int \frac{\sqrt[5]{1-2x+x^2}}{1-x}dx$$

(g)
$$\int e^{-x}+e^{-2x}dx$$

(h)
$$\int (x+4)^{2012}dx$$

(i)
$$\int \cos(2x+7)dx$$

(j)
$$\int e^{8x-13}dx$$

(k)
$$\int \frac{2}{1-2x}dx$$

(l)
$$\int (2x-1)^7dx$$

(m)
$$\int \sin(7x-3)dx$$

(n)
$$\int (9+x^2)^2dx$$

(o)
$$\int \sqrt{3x+12}dx$$

(p)
$$\int \sin(\sqrt{2}x+8)dx$$

(q)
$$\int e^{\pi x-3}dx$$

(r)
$$\int \frac{2}{3x-5}dx$$

(s)
$$\int (1-x)^{200}dx$$

5.10. Feladat. *A helyettesítéses integrálás tételének felhasználásával számítsuk ki a következő függvények primitív függvényeit.*

(a)
$$\int \cos(1-x)dx$$

(b)
$$\int e^{3x-1}dx$$

(c)
$$\int \sqrt{2x+1}dx$$

(d)
$$\int x\sqrt{1+3x}dx$$

(e)
$$\int x^2\sqrt{x+1}dx$$

(f)
$$\int \frac{x}{\sqrt{2-3x}}dx$$

(g)
$$\int \sin^3(x)dx$$

(h)
$$\int x\sqrt[3]{x-1}dx$$

(i)
$$\int \frac{\cos(x)}{\sin^3(x)}dx$$

(j)
$$\int \cos(2x)\sqrt{4-\sin(2x)}dx$$

(k)
$$\int \frac{\sin(x)}{(3+\cos(x))^2}dx$$

(l)
$$\int \frac{\sin(x)}{\sqrt{\cos^3(x)}}dx$$

(m)
$$\int \frac{\sin(\sqrt{x+1})}{\sqrt{x+1}}dx$$

(n)
$$\int x^{\kappa-1}\sin(x^{\kappa})dx$$

(o)
$$\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^6}}dx$$

(p)
$$\int x\sqrt[4]{1+x}dx$$

(q)
$$\int \sqrt{(x^2+1)^3}dx$$

(r)
$$\int x^2\sqrt[3]{(8x^3+27)^2}dx$$

(s)
$$\int \frac{\sin(x)+\cos(x)}{\sqrt[3]{\sin(x)-\cos(x)}}dx$$

5.11. Feladat. *A helyettesítéses integrálás tételének felhasználásával számítsuk ki a következő függvények primitív függvényeit.*

(a)
$$\int e^{\sin(x)}\cos(x)dx,$$

(b)
$$\int (3x^2+2)\sin(x^2+2x-4)dx,$$

(c)
$$\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}dx,$$

(d)
$$\int \frac{1}{x^2+\alpha^2}dx,\ (\alpha\neq 0)$$

(e)
$$\int \frac{1}{x^2}\sin\left(\frac{1}{x}\right)dx,$$

(f)
$$\int \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}dx,$$

(g)
$$\int \frac{1}{e^x+e^{-x}}dx,$$

(h)
$$\int \frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}dx,$$

5.12. Feladat. *A helyettesítéses integrálás tételének felhasználásával számítsuk ki a következő függvények primitív függvényeit.*

(a)
$$\int \frac{1}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2x^2}}dx,$$

(b)
$$\int \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2x^2}}dx,$$

(c)
$$\int \frac{1}{\sqrt{\beta^2x^2-\alpha^2}}dx$$

(d)
$$\int \frac{1}{\sqrt{9-16x^2}}dx,$$

(e)
$$\int \frac{1}{\sqrt{4+25x^2}}dx,$$

(f)
$$\int \frac{1}{\sqrt{114x^2-4}}dx$$

(g)
$$\int \sqrt{1-x^2}dx,$$
(h)
$$\int \sqrt{1+x^2}dx,$$
(i)
$$\int \sqrt{x^2-1}dx$$
(j)
$$\int \sqrt{\alpha^2-\beta^2x^2}dx,$$
(k)
$$\int \sqrt{\alpha^2+\beta^2x^2}dx,$$
(l)
$$\int \sqrt{\beta^2x^2-\alpha^2}dx$$
(m)
$$\int \sqrt{36-49x^2}dx,$$
(n)
$$\int \sqrt{1+9x^2}dx,$$
(o)
$$\int \sqrt{169x^2-114}dx$$

5.13. Feladat. *A helyettesítéses integrálás tételének felhasználásával számítsuk ki a következő függvények primitív függvényeit.*

(a)
$$\int (7x+5)^{-10}dx$$
(b)
$$\int e^{4x-9}dx$$
(c)
$$\int \frac{1}{-10x-4}dx$$
(d)
$$\int \cos(8x+7)dx$$
(e)
$$\int \frac{1}{(-10x+7)^{10}}dx$$
(f)
$$\int \frac{1}{5x-7}dx$$
(g)
$$\int \frac{1}{(-2x+8)^7}dx$$
(h)
$$\int e^{-3x+7}dx$$
(i)
$$\int (8x-3)^3dx$$
(j)
$$\int (x-2)^{10}dx$$
(k)
$$\int (x+5)^3dx$$
(l)
$$\int (2x-1)^7dx$$
(m)
$$\int \sin(7x-3)dx$$
(n)
$$\int e^{3x-2}dx$$
(o)
$$\int \cos(1-x)dx$$
(p)
$$\int \frac{1}{7x+5}dx$$
(q)
$$\int 2x\sqrt{1+x^2}dx$$
(r)
$$\int x\cos(x^2)dx$$
(s)
$$\int \frac{4x}{\sqrt{2x^2+1}}dx$$
(t)
$$\int \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx$$

(u)

$$\int 2xe^{x^2-5}dx$$

5.14. Feladat. *A helyettesítéses integrálás tételének felhasználásával számítsuk ki a következő függvények primitív függvényeit.*

(a)

$$\int -2x\sin(1-x^2)dx$$

(b)

$$\int \frac{\cos(x)}{1+\sin(x)}dx$$

(c)

$$\int 5x\sqrt{1-x^2}dx$$

(d)

$$\int \frac{x^3}{x^4+3}dx$$

(e)

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}dx$$

(f)

$$\int \frac{x^3}{\sqrt[3]{x^4+16}}dx$$

(g)

$$\int (1+\sin(x))^7\cos(x)dx$$

(h)

$$\int \frac{\sin(\ln(x))}{x}dx$$

(i)

$$\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}+1}}dx$$

(j)

$$\int xe^{-x^2}dx$$

(k)

$$\int x\sin(x^2-3)dx$$

(l)

$$\int x^3\sqrt{x^4+1}dx$$

(m)

$$\int 5x^3\sqrt{1-x^3}dx$$

(n)

$$\int \frac{\cos(x)}{(5+\sin(x))^2}dx$$

(o)

$$\int x^4(1+x^5)^3dx$$

(p)

$$\int \frac{1}{x+x\ln^2(x)}dx$$

(q)

$$\int e^x\cos(e^x)dx$$

(r)

$$\int (3x+2)\sqrt{4x+1}dx$$

(s)

$$\int \frac{2x-5}{\sqrt{3x+1}}dx$$

(t)

$$\int \sin\left(\sqrt{5x+3}\right)dx$$

(u)

$$\int \frac{7}{x+\sqrt{x}-12}dx$$

(v)

$$\int \frac{2e^{2x}+3e^x}{e^{2x}+1}dx$$

(w)

$$\int \frac{5e^{2x}-8e^x}{2e^{2x}+9e^x-5}dx$$

(x)

$$\int \frac{\cosh(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx$$

5.15. Feladat. *Határozzuk meg az alábbi függvények primitív függvényeit, a helyettesítéses integrálás tételének segítségével.*

(a)
$$\int e^{\sqrt{2x-4}}dx$$
(b)
$$\int \frac{e^x-9}{e^{x+3}}dx$$
(c)
$$\int x^3\sqrt{x^2+1}dx$$
(d)
$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$$
(e)
$$\int \frac{2x-1}{x^2-x-7}dx$$
(f)
$$\int \frac{x-1}{x^2-2x+7}dx$$
(g)
$$\int \frac{4x^2}{x^3-1}dx$$
(h)
$$\int \frac{3x^2}{x^3-6}dx$$
(i)
$$\int \frac{8x}{x^2-4}dx$$
(j)
$$\int \frac{x^2}{x^3+2}dx$$
(k)
$$\int \frac{\sinh(x)}{1-\cosh(x)}dx$$
(l)
$$\int \sinh(x)\cosh(x)dx$$
(m)
$$\int \sin(2x)\cos(2x)dx$$
(n)
$$\int \sinh(3x)\cosh(3x)dx$$
(o)
$$\int \sin^4(x)\cos(x)dx$$
(p)
$$\int \sinh^3(x)\cosh(x)dx$$
(q)
$$\int x^3\sqrt{x^4+1}dx$$
(r)
$$\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}dx$$
(s)
$$\int 5x\sqrt{1-x^2}dx$$
(t)
$$\int \frac{x^3}{\sqrt{x^4+16}}dx$$
(u)
$$\int 5x^2\sqrt{1-x^3}dx$$
(v)
$$\int \frac{\cos(x)}{(5+\sin(x))^2}dx$$
(w)
$$\int (x^2+2x)(x^3+3x^2-4)^4dx$$

5.16. Feladat. *A helyettesítéses integrálás tételének segítségével határozzuk meg a következő függvények primitív függvényeit.*

(a)
$$\int (x^3+2)\cos(x^4+8x)dx$$
(b)
$$\int 2\sin(x)\sin(\cos(x))dx$$
(c)
$$\int (-16x^3-16)\sin(2x^4+4x^2)dx$$
(d)
$$\int -\frac{9}{2}x^2\sin(-3x^3-9)dx$$

(e)
$$\int 3\cos(x)\cos(\sin(x))dx$$

(f)
$$\int (-x^4 - 2x^3)^7(-4x^3 - 6x^2)dx$$

(g)
$$\int 16x(8x^2 + 4)dx$$

(h)
$$\int 28x^3\cos(7x^4 + 5)dx$$

(i)
$$\int 27x^2\cos(9x^3 + 12)dx$$

(j)
$$\int \frac{x}{\sqrt{2x+2}}dx$$

(k)
$$\int x\sqrt{2x+3}dx$$

(l)
$$\int \frac{x}{\sqrt{4x+1}}dx$$

(m)
$$\int x^2\sqrt[3]{2x-2}dx$$

(n)
$$\int x^2\sqrt[3]{-3x-2}dx$$

(o)
$$\int x\sqrt{10x-10}dx$$

(p)
$$\int x\sqrt{5x+2}dx$$

(q)
$$\int x^3(x^2+1)^{99}dx$$

(r)
$$\int x^3(-2x^2-5)dx$$

(s)
$$\int \frac{x}{(-x^2-3)^2}dx$$

(t)
$$\int x^5(x^2-5)^{45}dx$$

(u)
$$\int \frac{x^3}{(-2x^2)^{13}}dx$$

(v)
$$\int \frac{x^3}{(3-3x)^{40}}dx$$

6. fejezet

Riemann-integrál

Elméleti áttekintés

Legyen $[a, b] \subset \mathbb{R}$ egy zárt intervallum és $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ egy korlátos függvény.

6.1. Definíció. *Legyen $n \in \mathbb{N}$. A*

$$P = \{x_i \,|\, a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < \ldots < x_n = b\}$$

*halmazt az $[a, b]$ **intervallum egy felosztásá**nak nevezzük.*

*Az x_i pontokat a P felosztás **osztópontjai**nak hívjuk, míg az $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$ intervallumokat a **felosztás részintervallumai**nak mondjuk.*

Továbbá, a

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

jelölés bevezetése mellett a

$$\|P\| = \sup\{\Delta x_i \,|\, i = 1, \ldots, n\}$$

*számot a **felosztás finomságá**nak nevezzük.*

6.2. Definíció. *Felosztások egy $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozatát **normális felosztássorozat**nak mondjuk, hogy*

$$\lim_{k\to\infty} \|P_k\| = 0.$$

6.3. Definíció. *Legyen P_1, illetve P_2 az $[a, b]$ intervallum felosztásai. Abban az esetben, ha*

$$P_1 \subset P_2$$

*teljesül, azt mondjuk, hogy a P_2 felosztás **finomítás**a a P_1 felosztásnak.*

6.4. Definíció. *Legyen P az $[a, b]$ intervallum egy felosztása és*

$$M_i = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) \qquad \text{és} \qquad M_i = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

6.1. Megjegyzés. *Az f függvény korlátossága miatt minden $i = 1, \ldots, n$ esetén léteznek és végesek.*

6.5. Definíció. *A fenti jelölések megtartása mellett legyenek*

$$\sigma(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta_i \qquad \Sigma(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta_i \qquad \text{és} \qquad \mathcal{O}(f, P) = \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)\Delta_i.$$

*Ezeket a mennyiségeket rendre az f függvény P felosztásához tartozó **alsó, felső**, illetve **oszcillációs összeg**ének nevezzük.*

6.6. Definíció. *Továbbá, ha minden $i = 1, \dots, n$ esetén $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, akkor az*

$$\mathfrak{I}(f, P) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

*számot az f függvény P felosztásához és a $\xi_1, \dots, \xi_n$ pontokhoz tartozó **integrálközelítő összegé**nek mondjuk.*

6.7. Definíció. *Legyen $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ egy korlátos függvény. Ekkor az*

$$\underline{\mathfrak{I}}(f) = \sup\left\{\sigma(f, P) \,|\, P \text{ az } [a, b] \text{ felosztása}\right\},$$

illetve az

$$\overline{\mathfrak{I}}(f) = \inf\left\{\sigma(f, P) \,|\, P \text{ az } [a, b] \text{ felosztása}\right\},$$

*számokat az f függvény $[a, b]$ intervallum feletti **alsó**, illetve **felső Darboux-integrál**jának nevezzük.*

6.8. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény **Riemann-integrálható**, ha*

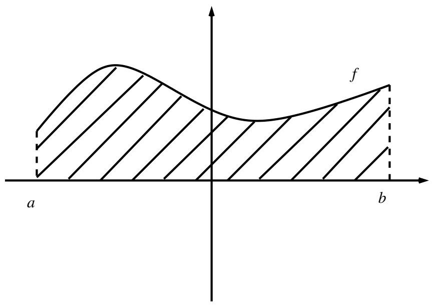
$$\underline{\mathfrak{I}}(f) = \overline{\mathfrak{I}}(f)$$

*teljesül. Ezt a közös értéket az f függvény $[a, b]$ intervallum feletti **Riemann-integrál**jának mondjuk és rá az*

$$\int_a^b f(x)dx$$

jelölést használjuk.

6.2. Megjegyzés (A Riemann-integrál geometriai jelentése). *Az $\int_a^b f(x)dx$ Riemann-integrál annak a tartománynak az **előjeles területe**, melyet az $y = f(x)$ görbe, az x-tengely, valamint az $x = a$ és $y = b$ egyenletű egyenes határol.*



6.1. Tétel (Riemann-integrál és műveletek). *Legyenek $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható függvények, $\lambda \in \mathbb{R}$. Ekkor*

— *az $f + g$ függvény is Riemann-integrálható és*

$$\int_a^b (f + g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx;$$

— *a $\lambda \cdot f$ függvény is Riemann-integrálható és*

$$\int_a^b (\lambda \cdot f)(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx;$$

— *ha minden $x \in [a,b]$ esetén $f(x) \leq g(x)$ teljesül, akkor*

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx;$$

— *ha $[c,d] \subset [a,b]$, akkor az f függvény Riemann-integrálható a $[c,d]$ intervallumon is;*

— *ha $c \in]a,b[$, akkor*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx;$$

— *ha $K \geq 0$ olyan, hogy*

$$|f(x)| \leq K \qquad (x \in [a,b]),$$

akkor

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq K(b-a).$$

6.2. Tétel (Newton–Leibniz). *Legyen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ egy folytonos függvény és jelölje $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ az f függvény egy primitív függvényét. Ekkor*

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

6.3. Tétel (Helyettesítéses integrálás tétele). *Legyen $\varphi\colon [a,b] \to [A,B]$ egy olyan szigorúan monoton növekedő, folytonosan differenciálható függvény, melyre $\varphi(a) = A$ és $\varphi(b) = B$. Ha az $f\colon [\varphi(a), \varphi(b)] \to \mathbb{R}$ függvény folytonos, akkor*

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)dt.$$

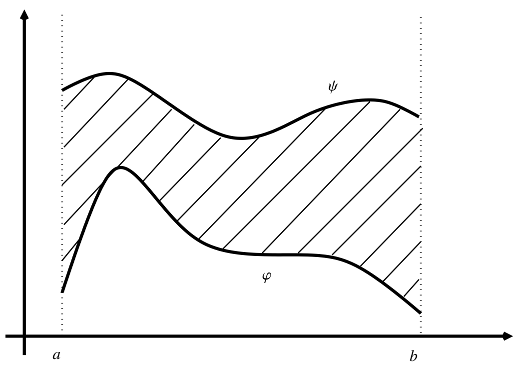
6.4. Tétel (Parciális integrálás tétele). *Legyenek $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ olyan differenciálható függvények, melyek deriváltjai Riemann-integrálhatóak. Ekkor*

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

Legyenek $\varphi, \psi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ olyan folytonos függvények, melyekre

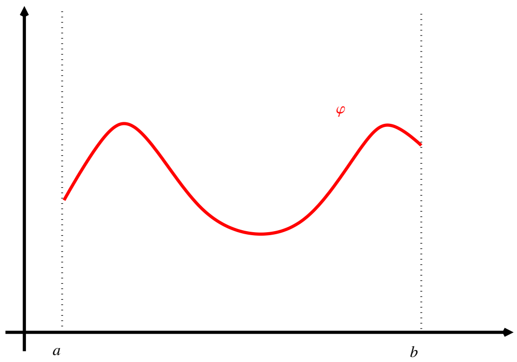
$$\varphi(x) \leq \psi(x) \qquad (x \in [a,b])$$

teljesül és jelölje S annak a síkidomnak a területét, melyet az $y = \varphi(x)$, $y = \psi(x)$ görbék valamint az $x = a$ és $x = b$ egyenesek határolnak.



Legyen $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ egy folytonosan differenciálható függvény, ekkor a φ függvény által meghatározott görbedarab ívhossza,

$$L(\varphi) = \int_a^b \sqrt{1 + (\varphi'(x))^2}dx.$$

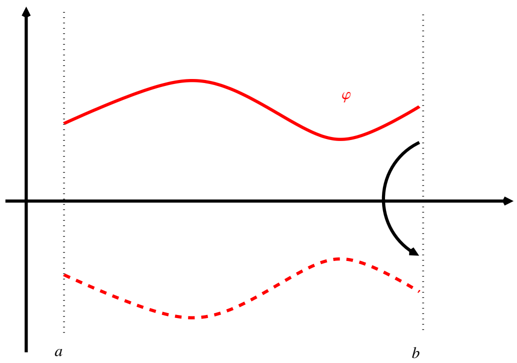


Legyen $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ egy folytonos függvény és forgassuk meg az x tengely körül az

$$a \leq x \leq b \qquad 0 \leq y \leq \varphi(x)$$

tartományt. A forgás során súrolt pontok egy S forgástestet alkotnak, melynek térfogata

$$V(S) = \pi \int_a^b \varphi^2(x)dx.$$



6.9. Definíció. *Legyen a valós, b pedig bővített valós szám, úgy, hogy $a < b$ teljesül. Legyen továbbá $f\colon [a,b[\to \mathbb{R}$ egy olyan függvény, mely minden $x \in [a,b[$ esetén Riemann-integrálható az $[a,x]$ intervallumon. Értelmezzük az $F\colon [a,b[\to \mathbb{R}$ függvényt az*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \qquad (x \in [a,b[)$$

formulával. Ha az F függvénynek a b pontban létezik és véges a baloldali határértéke, akkor azt mondjuk, hogy az $\int_a^b f(x)dx$ ***improprius integrál konvergens*** *és ebben az esetben*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{x\to b-} F(x).$$

6.10. Definíció. *Legyen a bővített valós, b pedig valós szám, úgy, hogy $a < b$ teljesül. Legyen továbbá $f\colon]a,b] \to \mathbb{R}$ egy olyan függvény, mely minden $x \in]a,b]$ esetén Riemann-integrálható az $[x,b]$ intervallumon. Értelmezzük az $F\colon]a,b] \to \mathbb{R}$ függvényt az*

$$F(x) = \int_x^b f(t)dt \qquad (x \in]a,b])$$

formulával. Ha az F függvénynek az a pontban létezik és véges a jobboldali határértéke, akkor azt mondjuk, hogy az $\int_a^b f(x)dx$ ***improprius integrál konvergens*** *és ebben az esetben*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{x \to a+} F(x).$$

6.11. Definíció. *Legyenek a, b bővített valós számok úgy, hogy $a < b$. Legyen továbbá $f\colon\,]a, b[\to \mathbb{R}$ egy olyan függvény, mely az $]a, b[$ intervallum minden zárt részintervallumán Riemann-integrálható. Tegyük fel, hogy van olyan $c \in]a, b[$, mely esetén az*

$$\int_a^c f(x)dx \qquad \text{és az} \qquad \int_c^b f(x)dx$$

improprius integrálok konvergensek. Ebben az esetben azt mondjuk, hogy az $\int_a^b f(x)dx$ improprius integrál is konvergens és

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Feladatok

Riemann-integrál

6.1. Feladat. *A Newton–Leibniz-formula felhasználásával számítsuk ki az alábbi Riemann-integrálokat.*

(a)
$$\int_2^4 x^3 dx,$$

(b)
$$\int_2^7 \sqrt{x} dx,$$

(c)
$$\int_{-4}^{-2} \frac{1}{x^2} dx,$$

(d)
$$\int_2^6 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx,$$

(e)
$$\int_2^8 \frac{5}{x} dx,$$

(f)
$$\int_{12}^{120} \frac{7}{x} dx,$$

(g)
$$\int_6^{10} \frac{2}{x-3} dx,$$

(h)
$$\int_{-1}^{2} \frac{2}{x-3} dx,$$

6.2. Feladat. *A Newton–Leibniz-formula felhasználásával számítsuk ki az alábbi Riemann-integrálokat.*

(a)
$$\int_0^{\pi/4} \sin(x) dx,$$

(b)
$$\int_0^{2\pi} \cos(x) dx,$$

(c) $$\int_0^{\pi/3} \sin(3x)dx,$$

(d) $$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{\sin^2(x)}dx,$$

(e) $$\int_2^4 e^x dx$$

6.3. Feladat. *A Newton–Leibniz-formula felhasználásával számítsuk ki az alábbi Riemann-integrálokat.*

(a) $$\int_2^6 3^x dx,$$

(b) $$\int_{-4}^{7} \frac{1}{1+x^2}dx,$$

(c) $$\int_2^4 \sinh(x)dx,$$

(d) $$\int_{\frac{1}{2}}^{3} \frac{\cosh(x)}{2}dx,$$

6.4. Feladat. *A parciális integrálás tételének felhasználásával számítsuk ki az alábbi Riemann-integrálokat.*

(a) $$\int_0^2 xe^x dx,$$

(b) $$\int_2^3 x^2e^{2x}dx,$$

(c) $$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} x\sin(x)dx,$$

(d) $$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} x^2\cos(x)dx,$$

(e) $$\int_e^{e^2} x^2\ln(x)dx$$

(f) $$\int_{\frac{1}{2}}^{1} e^x\sin(x)dx,$$

(g) $$\int_{-1}^{0} e^{2x}\cos(x)dx,$$

(h) $$\int_2^4 x\sinh(x)dx,$$

(i) $$\int_1^{10} x^2\cosh(x)dx,$$

6.5. Feladat. *A helyettesítéses integrálás tételének felhasználásával számítsuk ki az alábbi Riemann-integrálokat.*

(a) $$\int_1^2 (3x+4)^3dx,$$

(b) $$\int_2^3 \frac{1}{(2x+1)^4}dx,$$

(c) $$\int_2^3 \frac{x^2}{\sqrt{x^3-2}}dx,$$

(d) $$\int_1^2 \frac{e^{3x}}{e^{3x}+1}dx,$$

(e) $$\int_{-1}^{0} \frac{3}{e^{x+1}}dx,$$

(f) $$\int_1^4 \frac{x}{\sqrt{5x-4}}dx,$$

(g)

$$\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{2x^2}{\sqrt{1+x^2}}dx,$$

(h)

$$\int_{3}^{4} 3x^2\sqrt{x^2-1}dx,$$

6.6. Feladat. *Számítsuk ki az alábbi Riemann-integrálokat.*

(a)

$$\int_0^3 \mathrm{sign}(x-x^3)dx$$

(b)

$$\int_0^2 e^{[x]}dx$$

(c)

$$\int_0^6 [x]\sin\left(\frac{\pi x}{6}\right)dx$$

(d)

$$\int_0^{\pi} x\mathrm{sign}(\cos(x))dx$$

(e)

$$\int_0^1 \mathrm{sign}\left(\sin(\ln(x))\right)dx$$

(f)

$$\int_1^{n+1} \ln\left([x]\right)dx$$

ahol $n \in \mathbb{N}, n > 1$ rögzített és $[x]$ jelöli az x valós szám egészrészét.

6.7. Feladat. *Legyen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy olyan folytonos függvény, melyre minden $x \in \mathbb{R}$ esetén*

$$\int_0^x f(t)dt = -\frac{1}{2} + x^2 + x\sin(2x) + \frac{1}{2}\cos(2x)$$

teljesül. Határozzuk meg az $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ és az $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ értékeket.

6.8. Feladat. *Legyen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy folytonos függvény, melyre*

$$\int_c^x f(t)dt = \cos(x) - \frac{1}{2} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Határozzuk meg a c konstans értékét és az f függvényt.

6.9. Feladat. *Legyen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy folytonos függvény, melyre*

$$\int_0^x f(t)dt = \int_x^1 t^2 f(t)dt + \frac{x^{16}}{8} + \frac{x^{18}}{9} + c \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Határozzuk meg a c konstans értékét és az f függvényt.

6.10. Feladat. *Definiáljuk az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt az*

$$f(x) = 3 + \int_0^x \frac{1+\sin(t)}{2+t^2}dt \qquad (x \in \mathbb{R})$$

képlettel, legyen továbbá

$$p(x) = a + bx + cx^2.$$

Határozzuk meg az a, b, c konstansokat, ha tudjuk, hogy

$$p(0) = f(0) \qquad p'(0) = f'(0) \qquad p''(0) = f''(0).$$

6.11. Feladat. *Számítsuk ki az $f(2)$ értéket, ha*

(a)

$$\int_0^x f(t)dt = x^2(1+x)$$

(b)

$$\int_0^{x^2} f(t)dt = x^2(1+x)$$

(c)

$$\int_0^{f(x)} t^2 dt = x^2(1+x)$$

(d)

$$\int_0^{x^2(1+x)} f(t)dt = x$$

6.12. Feladat. *Magyarázzuk meg, hogy az alábbi integrálok esetében az x változó megadott helyettesítése miért vezet hamis eredményre.*

(a)

$$\int_{-1}^1 1dx \quad t = x^{\frac{2}{3}}$$

(b)

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2}dx \quad x = \frac{1}{t}$$

(c)

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{1+\sin^2(x)}dx \quad t = \mathrm{tg}(x)$$

(d)

$$\int_0^3 x\sqrt[3]{1-x^2}dx \quad x = \sin(t)$$

6.13. Feladat. *Számítsuk ki az alábbi integrálokat.*

(a)

$$\int_0^2 f(x)dx \qquad \text{ahol} \qquad f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{ha } x \in [0,1] \\ 2-x & \text{ha } x \in]0,2] \end{cases}$$

(b)

$$\int_0^1 f(x)dx \qquad \text{ahol} \qquad f(x) = \begin{cases} x & \text{ha } x \in [0,t] \\ \dfrac{t(1-x)}{1-t} & \text{ha } x \in]t,1] \end{cases}$$

és $t \in]0,1[$ *rögzített.*

6.14. Feladat. *Számítsuk ki az alábbi, paramétertől függő integrálokat és ábrázoljuk az* $I(\alpha)$ *függvény, ha*

(a)

$$I(\alpha) = \int_0^1 x|x-\alpha|dx$$

(b)

$$I(\alpha) = \int_0^{\pi} \frac{\sin^2(x)}{1+2\alpha\cos(x)+\alpha^2}dx$$

6.15. Feladat. *Legyen* $a \in]0,+\infty[$ *rögzített és* $f\colon [-a,a] \to \mathbb{R}$ *egy folytonos függvény. Igazoljuk, hogy ha az f függvény páros, akkor*

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx,$$

ha az f függvény páratlan, akkor pedig

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0$$

teljesül. Adjunk geometriai magyarázatot ezekre az eredményekre.

6.16. Feladat. *Legyen* $f\colon [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ *egy pozitív, folytonos függvény és*

$$\Phi(x) = \frac{\displaystyle\int_0^x tf(t)dt}{\displaystyle\int_0^x f(t)dt} \qquad (x \in]0,+\infty[)\,.$$

Igazoljuk, hogy az így megadott $\Phi\colon]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ *függvény monoton növekedő.*

6.17. Feladat. *Legyen* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *egy olyan függvény, melyre az* $|f|$ *függvény Riemann-integrálható az* $[a,b]$ *intervallumon. Igaz-e, hogy ekkor az f függvény is Riemann-integrálható az* $[a,b]$ *intervallumon?*

Improprius integrálok

6.18. Feladat.

Vizsgáljuk meg, hogy konvergensek-e az alábbi improprius integrálok.

(a)
$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx,$$

(b)
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}dx,$$

(c)
$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx,$$

(d)
$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{25+x^2}dx,$$

(e)
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{1+x^2}dx,$$

(f)
$$\int_5^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}dx,$$

(g)
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}dx,$$

(h)
$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{(x-2)^3}dx,$$

(i)
$$\int_5^{+\infty} \frac{2}{(x-3)(x+4)}dx,$$

(j)
$$\int_3^{+\infty} \frac{5}{(x-1)(x+5)}dx,$$

(k)
$$\int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{(x+1)(x-3)}dx,$$

(l)
$$\int_1^{+\infty} e^{-x}dx,$$

(m)
$$\int_2^{+\infty} 5e^{-2x}dx,$$

(n)
$$\int_{-\infty}^{3} e^{x}dx,$$

(o)
$$\int_1^{+\infty} \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx,$$

(p)
$$\int_{10}^{+\infty} xe^{x}dx,$$

(q)
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\ln(x)}dx$$

6.19. Feladat. *Vizsgáljuk meg, hogy konvergensek-e az alábbi improprius integrálok.*

(a)
$$\int_0^{5} \frac{1}{\sqrt{25-x^2}}dx,$$

(b)
$$\int_{-10}^{10} \frac{1}{\sqrt{100-x^2}}dx,$$

(c)
$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx,$$

(d)
$$\int_{-2}^3 \frac{1}{\sqrt{|x|}}dx,$$

(e)
$$\int_0^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx$$

6.20. Feladat. *Vizsgáljuk meg, hogy konvergensek-e az alábbi improprius integrálok.*

(a)
$$\int_{-2}^3 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx,$$

(b)
$$\int_{-2}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx,$$

(c)
$$\int_{-1}^1 \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}dx,$$

(d)
$$\int_0^1 \ln(x)dx,$$

6.21. Feladat. *Döntsük el, hogy az alábbi improprius integrálok közül melyek konvergensek.*

(a)
$$\int_2^{+\infty} \sin(x)dx$$

(b)
$$\int_2^{+\infty} \frac{\cos^2(x)}{x^2}dx$$

(c)
$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{x+e^x}dx$$

(d)
$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{x-e^x}dx$$

(e)
$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}dx$$

(f)
$$\int_1^{+\infty} e^{-x^2}dx$$

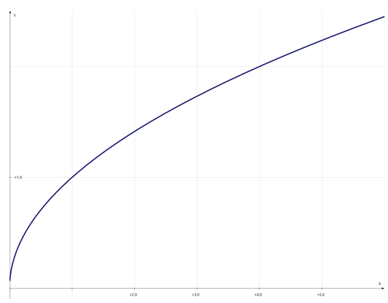
(g)
$$\int_0^{+\infty} x^2 2^x dx$$

(h)
$$\int_0^{+\infty} e^{-x}x^n dx \quad (n \in \mathbb{N})$$

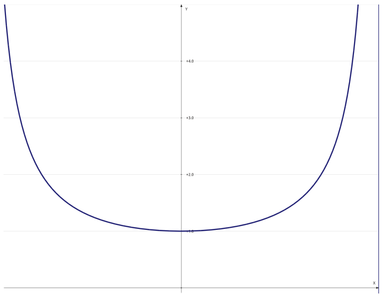
Területszámítás

6.22. Feladat.

Határozzuk meg az $y = \sqrt{x}$ függvény és az x-tengely által határolt területet az $a = 0$-tól a $b = 6$ abszcisszájú pontig.



6.23. Feladat. *Határozzuk meg az* $y = \dfrac{1}{1-x^2}$ *függvény görbéje, az x-tengely és az* $a = 0$, $b = 0,5$ *abszcisszájú pontokhoz tartozó ordinátatengelyek által meghatározott síkrész területét.*



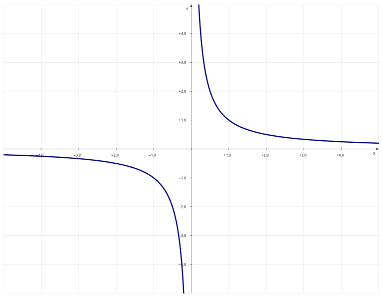
6.24. Feladat. *Határozzuk meg az* $y = \dfrac{1}{x}$ *függvény görbéje és az x-tengely közé eső területet a következő intervallumok felett:*

(a) $[0, a]$, *ahol* $a > 0$ *adott;*

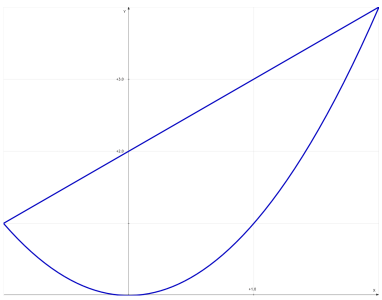
(b) $[a, +\infty[$, *ahol* $a > 0$ *adott;*

(c) $[3, 10]$

(d) $[-2, -1]$.



6.25. Feladat. *Határozzuk meg az* $y = x^2$ *függvény görbéje és az* $y = x + 2$ *egyenes által határolt területrészt.*

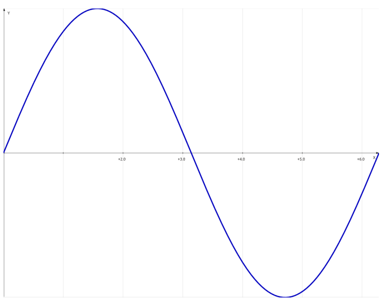


6.26. Feladat. *Határozzuk meg az* $y = \sin(x)$ *függvény görbéje és az x-tengely által határolt területet a*

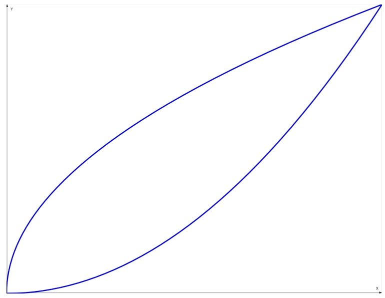
(a) $[0, \pi]$*;*

(b) $[0, 2\pi]$*;*

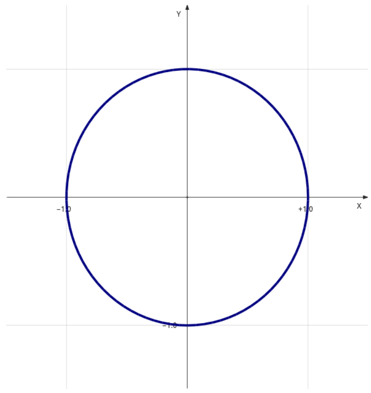
intervallumok felett.



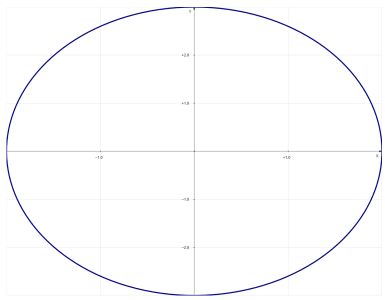
6.27. Feladat. *Határozzuk meg az* $y = x^2$ *és az* $y^2 = x$ *görbék által határolt területet.*



6.28. Feladat. *Számítsuk ki az origó középpontú $r > 0$ sugarú körlap területét.*



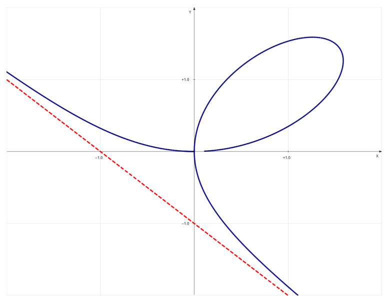
6.29. Feladat. *Legyenek $a, b > 0$ adottak. Határozzuk meg az a kistengelyű és b nagytengelyű ellpiszis területét.*



6.30. Feladat. *Legyen $a > 0$ adott. Határozzuk meg az*

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0$$

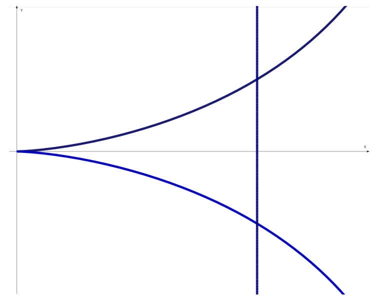
egyenletű, ún. Descartes-féle levél által határolt korlátos tartomány területét.



6.31. Feladat. *Határozzuk meg az $x = \dfrac{1}{2}$ egyenletű egyenes és az*

$$x^3 + (x - 1)y^2 = 0$$

egyenletű cisszoid által határolt korlátos tartomány területét.



6.32. Feladat. *Határozzuk meg az alábbi görbékkel határolt síkidom területét.*

(a)
$$x = 2x - x^2,\ x + y = 0$$

(b)
$$y = 2^x,\ y = 2,\ x = 0$$

(c)
$$y = |\ln(x)|\,,\ y = 0,\ x = \frac{1}{10},\ x = 10$$

(d)
$$y = (x+1)^2,\ x = \sin(\pi y),\ y = 0$$

(e)
$$y = x,\ y = x + \sin^2(x) \quad (x \in [0, \pi])$$

(f)
$$y = \frac{a^3}{a^2 + x^2},\ y = 0$$

(g)
$$y^2 = x^2\left(a^2 - x^2\right)$$

6.33. Feladat. *Számítsuk ki az alábbi görbék ívhosszát.*

(a)
$$y = \sqrt{x^3} \quad (x \in [0, 4])$$

(b)
$$y^2 = 2px \quad (x \in [0, x_0])$$

(c)
$$y = a\cosh\left(\frac{x}{a}\right) \quad (x \in [0, a])$$

(d)
$$y = e^x \quad (x \in [0, x_0])$$

(e)
$$x = \frac{y^2}{4} - \frac{\ln(y)}{2} \quad (y \in [1, e])$$

(f)
$$y = a\ln\left(\frac{a^2}{a^2 - x^2}\right) \quad (x \in [0, a/2])$$

(g)
$$y = \ln(\cos(x)) \qquad \left(x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]\right)$$

7. fejezet

Többváltozós függvények

Elméleti áttekintés

Többváltozós függvények folytonossága

7.1. Definíció. *Legyenek* $n, m \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ *nemüres halmaz,* $f \colon D \to \mathbb{R}^m$ *függvény. Azt mondjuk, hogy az* f *függvény* ***folytonos az*** $x_0 \in D$ ***pontban****, ha bármely* $\varepsilon > 0$ *esetén létezik olyan* $\delta > 0$*, hogy ha* $x \in D$ *olyan, hogy* $\|x - x_0\|_{\mathbb{R}^n} < \delta$*, akkor*

$$\|f(x) - f(x_0)\|_{\mathbb{R}^m} < \varepsilon.$$

Ha az f *függvény a* D *halmaz minden pontjában folytonos, akkor azt mondjuk, hogy az* f *függvény* ***folytonos a*** D ***halmazon****.*

7.1. Tétel (Átviteli elv). *Legyenek* $n, m \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ *nemüres halmaz,* $f \colon D \to \mathbb{R}^m$*. Az* f *függvény akkor és csakis akkor folytonos az* $x_0 \in D$ *pontban, ha tetszőleges* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ D *halmazbeli elemekből álló,* x_0*-hoz konvergáló sorozat esetén az* $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat* $f(x_0)$*-hoz konvergál.*

7.1. Megjegyzés. *Legyen* $D \subset \mathbb{R}^n$ *nemüres halmaz,* $f \colon D \to \mathbb{R}^m$*. Az* f *függvény akkor és csakis akkor nem folytonos az* $x_0 \in D$ *pontban, ha van olyan* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ D *halmazbeli elemekből álló,* x_0*-hoz konvergáló sorozat, melyre az* $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat nem* $f(x_0)$*-hoz konvergál.*

7.2. Tétel. *Legyenek* $n, m \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ *nemüres halmaz. Ha az* $f, g : D \to \mathbb{R}^m$ *függvények folytonosak az* $x_0 \in D$ *pontban, akkor*

(i) az $f + g$ *függvény is folytonos az* x_0 *pontban;*

(ii) tetszőleges $\lambda \in \mathbb{R}$ *esetén a* λf *függvény is folytonos az* x_0 *pontban;*

7.3. Tétel (Az összetett függvény folytonossága). *Legyenek* $n, m, k \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ *nemüres halmaz és legyenek* $f : D \to \mathbb{R}^m$ *és* $g : f(D) \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ *adott függvények. Ha az* f *függvény folytonos az* $x_0 \in D$ *pontban, a* g *pedig az* $f(x_0) \in f(D)$ *pontban, akkor a* $g \circ f \colon D \to \mathbb{R}^k$ *függvény folytonos az* x_0 *pontban.*

Többváltozós függvények határértéke

7.2. Definíció. *Legyenek* $n, m \in \mathbb{N}$, $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}^m$, $x_0 \in D'$ *és* $\alpha \in \mathbb{R}^m$*. Azt mondjuk, hogy az* f *függvénynek* ***az*** x_0 ***pontban a határértéke*** α*, ha tetszőleges* $\varepsilon > 0$ *esetén létezik olyan* $\delta > 0$*, hogy ha* $x \in D$ *és* $\|x - x_0\|_{\mathbb{R}^n} < \delta$*, akkor* $\|f(x) - \alpha\|_{\mathbb{R}^m} < \varepsilon$*. Erre a* $\lim_{x\to x_0} f(x) = \alpha$ *jelölést alkalmazzuk.*

7.4. Tétel (Átviteli elv). *Legyenek* $n, m \in \mathbb{N}$, $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}^m$*, illetve* $x_0 \in D'$ *és* $\alpha \in \mathbb{R}^m$*. Ekkor* $\lim_{x\to x_0} f(x) = \alpha$ *pontosan akkor teljesül, ha tetszőleges* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ D*–beli,* x_0*–hoz konvergáló sorozat esetén* $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \alpha$ *teljesül.*

7.5. Tétel (Határérték és műveletek). *Legyenek $n, m \in \mathbb{N}$, $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^n$, $x_0 \in D'$ $f, g : D \to \mathbb{R}^m$, illetve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^m$. Ha az f és g függvényeknek létezik a határértéke az x_0 pontban és*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \alpha \quad \textit{és} \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = \beta,$$

akkor

(i) az $f + g$ függvénynek is létezik az x_0 pontban a határértéke

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \alpha + \beta;$$

(ii) tetszőleges $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén a $\lambda \cdot f$ függvénynek is létezik az x_0 pontban a határértéke és

$$\lim_{x \to x_0} \lambda \cdot f(x) = \lambda \cdot \alpha.$$

7.6. Tétel (Határérték és folytonosság). *Legyenek $n, m \in \mathbb{N}$, $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}^m$ és $x_0 \in D$. Ekkor az f függvény pontosan akkor folytonos az x_0 pontban, ha létezik a $\lim_{x \to x_0} f(x)$ határérték, és*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Feladatok

7.1. Feladat.

Vizsgáljuk meg az alábbi függvényeket folytonosság szempontjából.

(a)

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \left((x, y) \in \mathbb{R}^2\right)$$

(b)

$$f(x, y) = x^2 - y^2 \quad \left((x, y) \in \mathbb{R}^2\right)$$

(c)

$$f(x, y) = \sqrt{xy} \quad (x, y \in [0, +\infty[)$$

(d)

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin\left(\dfrac{1}{x^2 + y^2}\right) & ((x, y) \neq (0, 0)) \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)) \end{cases}$$

(e)

$$f(x, y) = \begin{cases} x \sin\left(\dfrac{1}{y}\right) + y \sin\left(\dfrac{1}{x}\right), & (x, y) \in \mathbb{R}^2, \ xy \neq 0 \\ 0, & xy = 0 \end{cases}$$

(f)

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & y \geq x \\ 0 & y < x \end{cases}$$

(g)

$$f(x, y) = \operatorname{sign}(x^2 + y^2 - 1) \qquad \left((x, y) \in \mathbb{R}^2\right)$$

(h)

$$f(x, y, z) = x + 2y + z \quad \left((x, y, z) \in \mathbb{R}^3\right)$$

(i)

$$f(x,y)=x^2e^{-(x^2-y)}\quad \left((x,y)\in\mathbb{R}^2\right)$$

(j)

$$f(x,y)=\begin{cases}\sin\left(\dfrac{1}{xy}\right) & xy\neq 0\\ 0 & xy=0\end{cases}$$

(k)

$$f(x,y)=\ln\left(1-x^2-y^2\right)\quad \left((x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x^2+y^2<1\right)$$

(l)

$$f(x,y)=\frac{1}{xy}\quad (x,y\in[0,+\infty[)$$

(m)

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

(n)

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

(o)

$$f(x,y)=\begin{cases}xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq 0\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

(p)

$$f(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{xyz}{x^2+y^2+z^2} & (x,y,z)\neq(0,0,0)\\ 0 & (x,y,z)=(0,0,0)\end{cases}$$

7.2. Feladat. *Vizsgáljuk meg, hogy léteznek-e a következő határértékek, amennyiben igen, számítsuk ki őket.*

(a)

$$\lim_{(x,y)\to(5,1)}\frac{xy}{x^2+y^2}$$

(b)

$$\lim_{(x,y,z)\to(2,1,-1)}3x^2z+xy\cos(\pi x-\pi z)$$

(c)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy^2}{x^2+y^4}$$

(d)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x+y}$$

(e)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$$

(f)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\sqrt{x^2+y^2}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

(g)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

(h)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

(i)

$$\lim_{(x,y)\to(0,\alpha)}\frac{\sin(xy)}{x}$$

(j)

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}\sin\left(\frac{\pi x}{2x+y}\right)$$

(k)

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} \frac{x^2 + y^2}{x^4 + y^4}$$

(l)

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} \frac{x + y}{x^2 - xy + y^2}$$

8. fejezet

Többváltozós függvények differenciálszámítása

Elméleti áttekintés

Fréchet-differenciálhatóság

8.1. Definíció. *Legyenek $n, m \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ nemüres, nyílt halmaz, $f\colon D \to \mathbb{R}^m$ függvény. Azt mondjuk, hogy az f függvény **Fréchet-differenciálható** az $x_0 \in D$ pontban, ha létezik egy olyan $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ lineáris leképezés, hogy*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)\|_{\mathbb{R}^m}}{\|x - x_0\|_{\mathbb{R}^n}} = 0$$

teljesül. Ebben az esetben az A lineáris leképezést az f függvény x_0 pontbeli differeciálhányadosának nevezzük és rá a továbbiakban az $f'(x_0)$ jelölést használjuk.

8.1. Tétel (Differenciálhatóság $\implies$ folytonosság). *Legyenek $n, m \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ nemüres, nyílt halmaz, $f\colon D \to \mathbb{R}^m$ függvény. Ha az f függvény Fréchet-differenciálható az $x_0 \in D$ pontban, akkor f folytonos az $x_0 \in D$ pontban.*

8.1. Megjegyzés. *Az előző tétel megfordítása **nem** igaz, hiszen az*

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{ha } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

módon megadott $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény folytonos a $(0, 0)$ pontban, azonban ebben a pontban nem differenciálható.

Iránymenti és parciális differenciálhatóság

8.2. Definíció. *Legyenek $n, m \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ nemüres, nyílt halmaz, $x_0 \in D$ $f\colon D \to \mathbb{R}^m$ függvény és $v \in \mathbb{R}^n$. Ha létezik a*

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}$$

*határérték, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény az x_0 pontban a v **irány mentén differenciálható**. Ebben az esetben a fenti határértékre a $D_v f(x_0)$ jelölést alkalmazzuk.*

8.2. Tétel (Differenciálhatóság $\implies$ iránymenti differenciálhatóság). *Legyenek $n, m \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ nemüres, nyílt halmaz, $f\colon D \to \mathbb{R}^m$ függvény. Ha az f függvény az x_0 pontban (totálisan) differenciálható, akkor ebben a pontban tetszőleges $v \in \mathbb{R}^n$ irány mentén is differenciálható és*

$$D_v f(x_0) = f'(x_0) \cdot v$$

teljesül.

8.3. Definíció. *Legyenek $n, m \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ nemüres, nyílt halmaz, $f\colon D \to \mathbb{R}^m$ függvény. Legyen továbbá minden $i = 1, \ldots, n$ esetén*

$$e_i = (0, \ldots, 0, \overset{i}{1}, 0, \ldots, 0).$$

Ha létezik a $D_{e_i} f(x_0)$ iránymenti derivált, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény az x_0 pontban az i-edik változója szerint ***parciálisan differenciálható*** *az $x_0 \in D$ pontban. Ebben az esetben a $D_{e_i} f(x_0)$ jelölés helyett általában a $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$ jelölést fogjuk használni.*

8.3. Tétel (Fréchet-differenciálhatóság $\Longrightarrow$ parciális differenciálhatóság). *Legyenek $n, m \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ nemüres, nyílt halmaz, $f\colon D \to \mathbb{R}^m$ függvény. Ha az f függvény az $x_0 \in D$ pontban (totálisan) differenciálható, akkor az f függvény ebben a pontban mindegyik változója szerint parciálisan is differenciálható és*

$$f'(x_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \ldots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \ldots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}.$$

8.4. Tétel. *Legyenek $n, m \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ nemüres, nyílt halmaz, $f\colon D \to \mathbb{R}^m$ függvény. Ha az f függvény az $x_0 \in D$ pont egy környezetében mindegyik változója szerint parciálisan differenciálható és ezek a parciális deriváltak folytonosak az $x_0 \in D$ pontban, akkor az f függvény az $x_0 \in D$ pontban differenciálható.*

8.5. Tétel (Differenciálhatóság és műveletek). *Legyenek $n, m \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ $D \subset \mathbb{R}^n$ nemüres, nyílt halmaz, $x_0 \in D$. Ha az $f, g\colon D \to \mathbb{R}^m$ függvények differenciálhatóak az $x_0 \in D$ pontban, akkor*

— *az $f + g$ függvény is differenciálható az x_0 pontban és*

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0);$$

— *a $\lambda \cdot f$ függvény is differenciálható az x_0 pontban és*

$$(\lambda \cdot f)'(x_0) = \lambda \cdot f'(x_0).$$

8.6. Tétel (Az összetett függvény differenciálási szabálya). *Legyenek $n, m, k \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ nemüres, nyílt halmaz, $x_0 \in D$, $f\colon D \to \mathbb{R}^m$ és $g\colon f(D) \to \mathbb{R}^k$ függvények. Ha az f függvény differenciálható az $x_0 \in D$ pontban, a g függvény pedig az $f(x_0) \in f(D)$ pontban, akkor a $g \circ f$ függvény differenciálható az x_0 pontban és*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'\left(f(x_0)\right) \cdot f'(x_0).$$

Lokális szélsőértékszámítás

8.4. Definíció. *Legyen $D \subseteq \mathbb{R}^n$ egy halmaz, x_0 a D halmaz egy pontja, $f : D \to \mathbb{R}$ pedig egy függvény. Akkor mondjuk, hogy az f függvénynek az x_0 pontban* ***lokális minimuma (maximuma) van****, ha van az x_0-nak olyan környezete, melynek D-beli x pontjaiban $f(x) \geq f(x_0)$ ($f(x) \leq f(x_0)$) teljesül. Más szóval, létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha x a D halmaz olyan pontja, melyre fennáll az $\|x - x_0\| < \delta$ egyenlőtlenség, akkor*

$$f(x) \geq f(x_0), \quad \text{illetve} \quad f(x) \leq f(x_0)$$

teljesül. Ha itt $x \neq x_0$ esetén szigorú egyenlőtlenség teljesül, akkor ***szigorú minimum****ról, illetve* ***szigorú maximum****ról beszélünk. A „lokális” jelzőt „globális” váltja fel, ha ezek a feltételek bármely $\delta > 0$ esetén, azaz, a D halmaz minden x pontjában teljesülnek. A lokális (globális) minimumhelyet és maximumhelyet közösen* ***szélsőértékhely****nek nevezzük, magát az $f(x_0)$ függvényértéket pedig a megfelelő szélsőérték értékének mondjuk.*

8.7. Tétel. *Legyen $D \subseteq \mathbb{R}^n$ egy halmaz, x_0 a D halmaz egy belső pontja, $f : D \to \mathbb{R}$ pedig egy x_0-ban parciálisan differenciálható függvény. Ha az f függvénynek az x_0 pontban lokális szélsőértéke van, akkor $f'(x_0) = 0$.*

8.5. Definíció. *Legyen $D \subseteq \mathbb{R}^n$ egy halmaz, x_0 a D halmaz egy belső pontja, $f : D \to \mathbb{R}$ pedig egy x_0-ban parciálisan differenciálható függvény. Ha az x_0 pontban az f függvény összes parciális deriváltja nulla, akkor az x_0 pontot az f függvény* ***stacionárius pontj****ának nevezzük.*

8.2. Megjegyzés. *A fenti tétel feltételei mellett tehát az f függvénynek csak stacionárius pontokban lehet lokális szélsőértéke.*

8.8. Tétel. *Legyen $D \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, $f : D \to \mathbb{R}$ egy $\mathcal{C}^2(D)$-osztályú függvény, s a D-beli x_0 pont legyen az f stacionárius pontja. Ha az*

$$f''(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

mátrix

— *pozitív definit, akkor az f függvénynek az x_0 pontban lokális minimuma van;*

— *negatív definit, akkor az f függvénynek az x_0 pontban lokális maximuma van;*

— *indefinit, akkor az f függvénynek az x_0 pontban nincs lokális szélsőértéke.*

Feladatok

8.1. Feladat. *Számítsuk ki a következő függvények elsőrendű parciális deriváltjait.*

(a)
$$f(x,y) = x^3 - 2x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 + 10$$

(b)
$$f(x,y) = x^4 + 6\sqrt{y} - 10$$

(c)
$$f(x,y,z) = x^2y - 10y^2z^3 + 43x - 7\mathrm{tg}(4y)$$

(d)
$$f(x,y) = x^7\ln(y^2) + \frac{9}{x^3} - \sqrt[5]{y^4}$$

(e)
$$f(x,y) = (x^2 + y^2)e^{xy}$$

(f)
$$f(x,y,z) = x^{yz}$$

(g)
$$f(x,y) = e^{xy}\ln(1+y)$$

(h)
$$f(x,y,z) = e^{x+yz}$$

(i)
$$f(x,y) = \ln(xy^2)$$

(j)
$$f(x,y) = \mathrm{tg}^2(x+y)$$

(k)
$$f(x,y) = \sqrt{x^2 + \ln(5x - 3y^2)}$$

(l)
$$f(x,y) = \cos(x^2 + 2xy) + \sin(y^2 - 4x + 1 - y)$$

(m)
$$f(x,y) = \frac{\ln(1+y)}{1+xy}$$

(n)
$$f(x,y) = \sqrt{1+xy}$$

(o)
$$f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$$

(p)
$$f(x,y,z) = z^3 + 5xyz - 2xy - 2xz$$

(q)
$$f(x,y) = x^2e^y + y^2e^x + e^{xy}$$

(r)

$$f(x,y) = \frac{9x}{x^3+5y}$$

(s)

$$f(x,y,z) = \frac{x\sin(y)}{z^2}$$

8.2. Feladat. *Számítsuk ki az alábbi függvények másodrendű parciális deriváltjait.*

(a)

$$f(x,y) = xe^{-x^2y^2}$$

(b)

$$f(x,y) = a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2$$

(c)

$$f(x,y,z) = z^3 + 5xyz - 2xy - 2x^2z^3 + 11$$

(d)

$$f(x,y) = \cos(2x) - x^2e^{5y} + 3y^2$$

(e)

$$f(x,y,z) = z^3y^2\ln(x)$$

(f)

$$f(x,y,z) = e^{xy+z}$$

(g)

$$f(x,y) = \cos\left(\frac{x}{y}\right)$$

(h)

$$f(x,y,z) = e^{x+y+z}$$

(i)

$$f(x,y,z) = e^{xyz}$$

(j)

$$f(x,y) = \ln(xy)$$

8.3. Feladat. *Állítsuk elő a megadott parciális deriváltakat.*

(a)

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(x,y),\ \frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}(x,y),\ \frac{\partial^4 f}{\partial y^4}(x,y),$$

$$\textit{ha}\quad f(x,y) = x - y + x^2 + 2xy + y^2 + x^3 - 3x^2y - y^3 + x^4 - 4x^2y^2 + y^4$$

(b)

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(x,y) \quad \textit{ha} \quad f(x,y) = x\ln(xy)$$

(c)

$$\frac{\partial^6 f}{\partial x^3\partial y^3}(x,y) \quad \textit{ha} \quad f(x,y) = x^3\sin(y) + y^3\sin(x)$$

(d)

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial z}(x,y,z) \quad \textit{ha} \quad f(x,y,z) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x+y+z-xyz}{1-xy-xz-yz}\right)$$

(e)

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial z}(x,y,z) \quad \textit{ha} \quad f(x,y,z) = e^{xyz}$$

(f)

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x\partial y\partial \xi\partial \eta}(x,y,\xi,\eta) \quad \textit{ha} \quad f(x,y,\xi,\eta) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}\right)$$

(g)

$$\frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m\partial y^n}(x,y) \quad \textit{ha} \quad f(x,y) = (x-x_0)^m(y-y_0)^n$$

(h)

$$\frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial y^n}(x,y) \quad ha \quad f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$$

(i)

$$\frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial y^n}(x,y) \quad ha \quad f(x,y) = (x^2+y^2)e^{x+y}$$

(j)

$$\frac{\partial^{m+n+k} f}{\partial x^m \partial y^n \partial z^k}(x,y,z) \quad ha \quad f(x,y,z) = xyze^{x+y+z}$$

(k)

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}(x,y,z) \quad ha \quad f(x,y,z) = xyz$$

(l)

$$\frac{\partial^6 f}{\partial x^3 \partial y^3}(x,y), \frac{\partial^6 f}{\partial x \partial y^5}(x,y), \frac{\partial^6 f}{\partial x^5 \partial y}(x,y), \frac{\partial^6 f}{\partial x^2 \partial y^4}(x,y) \qquad ha \quad f(x,y) = \cos(x)\cosh(y)$$

(m)

$$\frac{\partial^{n+m+k} f}{\partial x^m \partial y^n \partial z^k}(x,y,z) \quad ha \quad f(x,y,z) = e^{\alpha x+\beta y+\gamma z}$$

8.4. Feladat. *Határozzuk meg az f függvény x_0 pontbeli v iránymenti deriváltját, ha*

(a)

$$f(x,y) = |x+y| \qquad x_0 = (0,0) \qquad \textit{és} \qquad v = (1,0)$$

(b)

$$f(x,y) = |x+y| \qquad x_0 = (0,0) \qquad \textit{és} \qquad v = (0,1)$$

(c)

$$f(x,y) = \sqrt{|xy|}, \qquad x_0 = (0,0) \qquad \textit{és} \qquad v = (1,0)$$

(d)

$$f(x,y) = \sqrt{x^3y^5}, \qquad x_0 = (0,0) \qquad \textit{és} \qquad v = (0,1)$$

(e)

$$f(x,y) = \sqrt[3]{xy}, \qquad x_0 = (0,0) \qquad \textit{és} \qquad v = (1,0)$$

(f)

$$f(x,y) = \sqrt[3]{xy}, \qquad x_0 = (0,0) \qquad \textit{és} \qquad v = (0,1)$$

(g)

$$f(x,y) = x\cos(y), \qquad x_0 \in \mathbb{R}^2 \textit{ tetszőleges} \qquad \textit{és} \qquad v = (2,1)$$

(h)

$$f(x,y,z) = x^2+z+y^3z^2-xyz, \qquad x_0 \in \mathbb{R}^3 \textit{ tetszőleges} \qquad \textit{és} \qquad v = (-1,0,3)$$

(i)

$$f(x,y) = xe^{xy}+y, \qquad x_0 = (2,0) \qquad \textit{és} \qquad v = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

(j)

$$f(x,y) = x^2-y^2, \qquad x_0 = (1,2) \qquad \textit{és} \qquad v = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

(k)

$$f(x,y,z)=\sin(x^2)+ze^y, \qquad x_0=(0,0,1) \qquad \text{és} \qquad v=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

(l)

$$f(x,y,z)=e^xyz, \qquad x_0=(1,1,1) \qquad \text{és} \qquad v=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

8.5. Feladat. *Mutassuk meg, hogy az*

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-t)^2}{4a^2t}} \qquad (x\in\mathbb{R}, t\in]0,+\infty[)$$

módon megadott függvényre minden $(x,t)\in\mathbb{R}\times]0,+\infty[$ *esetén*

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$$

teljesül.

8.6. Feladat. *Legyenek* $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ *és*

$$u(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2}} \qquad \left((x,y,z)\in\mathbb{R}^3\setminus\{(\alpha,\beta,\gamma)\}\right).$$

Mutassuk meg, hogy ekkor minden $(x,y,z)\neq(\alpha,\beta,\gamma)$ *esetén*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y,z)+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y,z)+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(x,y,z)=0$$

teljesül.

8.7. Feladat. *Határozzuk meg a következő függvények stacionárius pontjait és osztályozzuk azokat.*

(a)

$$f(x,y)=x^2+(y-1)^2$$

(b)

$$f(x,y)=(x-y+1)^2$$

(c)

$$f(x,y)=x^2-(y-1)^2$$

(d)

$$f(x,y)=x^2-xy+y^2-2x+y$$

(e)

$$f(x,y)=2x^2+y^2-2xy+4x-2y+5$$

(f)

$$f(x,y)=(x^2-6x)(y^2-4y)$$

(g)

$$f(x,y)=(y^2-x^2)(y^2-2x^2)$$

(h)

$$f(x,y)=x(2y-3)$$

(i)

$$f(x,y)=x^2+12y^2-3x+10y+100$$

(j)

$$f(x,y)=x^3+y^3$$

(k)

$$f(x,y)=x^3+y^3-3xy$$

(l)

$$f(x,y)=x^3-3xy^2-3x^2+3y^2+4x+y-1$$

(m)

$$f(x,y)=2x^4+y^4-x^2-2y^2$$

(n)

$$f(x,y)=x^4+y^4-2x^2y^2-26x^2-10y^2$$

(o)

$$f(x,y)=1-\sqrt{x^2+y^2}$$

(p)
$$f(x,y) = xy\ln(x^2+y^2)$$
(q)
$$f(x,y) = e^{x^2+y^2}$$
(r)
$$f(x,y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}$$
(s)
$$f(x,y) = (x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}$$
(t)
$$f(x,y) = (x^2+y^2)e^{x^2-y^2}$$
(u)
$$f(x,y) = \ln(9+x^2+y^2)$$
(v)
$$f(x,y) = x+y+\sin(x)+\sin(y)$$

8.8. Feladat. *Határozzuk meg az alábbi függvények feltételes szélsőértékeit a megadott feltételek mellett.*

(a)
$$\begin{cases} f(x,y) = 5x-3y \\ x^2+y^2 = 136 \end{cases}$$
(b)
$$\begin{cases} f(x,y) = xy \\ x+y = 1 \end{cases}$$
(c)
$$\begin{cases} f(x,y,z) = xyz \\ x+y+z = 1 \end{cases}$$
(d)
$$\begin{cases} f(x,y) = x^2-y^2 \\ (x,y) \in \left\{(u,v) \in [0,+\infty[\mid u^2+v^2 \leq 1\right\} \end{cases}$$
(e)
$$\begin{cases} f(x,y,z) = \sin(x)\sin(y)\sin(z) \\ x+y+z = \pi \end{cases}$$
(f)
$$\begin{cases} f(x,y,z) = 4xyz \\ x^2+2y^2+z-4 = 0 \end{cases}$$

8.9. Feladat. *Határozzuk meg a $z^2 - xy = 1$ egyenletű felület azon pontját, mely a legközelebb van az origóhoz.*

8.10. Feladat. *Határozzuk meg az $y^2 = 4x$ görbe azon pontjait, melyek a legközelebb vannak a $(0,1)$ koordinátájú ponthoz.*

8.11. Feladat. *Legyen $a \in \mathbb{R}$ és $n \in \mathbb{N}$. Bontsuk fel az a valós számot n tag szorzatára úgy, hogy a tagok reciprokösszege minimális legyen.*

8.12. Feladat. *Legyen $a \in \mathbb{R}$ és $n \in \mathbb{N}$. Bontsuk fel az a valós számot n tag összegére úgy, hogy a tagok négyzetösszege minimális legyen.*

8.13. Feladat. *Legyen $K > 0$ adott. Határozzuk meg a K kerületű téglalapok közül azt, amely a legnagyobb területet határolja.*

8.14. Feladat. *Egy felül nyitott téglatest alakú kád térfogata $V > 0$. Milyen méretek mellett lesz a kád felszíne minimális?*

8.15. Feladat. *Egy félhenger alakú, felül nyitott kád felszíne $S > 0$. Milyen méretek mellett lesz a kád térfogata maximális?*

8.16. Feladat. *Melyik az a téglalap, melynek kerülete $K > 0$ és amelyet valamelyik oldala mentén megforgatva a legnagyobb térfogatú fogástest keletkezik?*