8. Mátrixok

8.1. Legyenek adottak az A, B, C és D mátrixok a következőképpen:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 10 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Végezzük el az alábbi műveleteket, amennyiben lehetséges!

$$A+B,\ 3A-2B,\ A^T+B^T,\ AD,\ CB,\ CD,\ D^TD,\ AC+BC,\ (A+B)C$$

8.2. Legyen

$$v = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix},$$
$$B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Számítsuk ki a következő kifejezések értékét!

$$v^Tw, \quad vw^T, \quad Av, \quad Aw \quad A(u+v), \quad w^TA^T, \quad A+B, \quad (-2C)^T, \quad 2A-3B, \quad (A+B)^T,$$
$$AB, \quad BA, \quad B^TA^T, \quad AE, \quad EA, \quad AC, \quad A(B+C), \quad C(A-2B), \quad A^TA, \quad AA^T.$$

8.3. Legyen

$$v = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 7 & -3 \\ 4 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & -6 \\ -3 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -3 \\ -3 & 1 & -5 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Számítsuk ki a következő kifejezések értékét!

$$Av, \quad Aw \quad A(u+v), \quad w^TA^T, \quad A+B, \quad (-2C)^T, \quad 2A-3B, \quad (A+B)^T, \quad AB, \quad BA,$$
$$B^TA^T, \quad AE, \quad EA, \quad AC, \quad A(B+C), \quad C(A-2B), \quad A^TA, \quad AA^T.$$

8.4. Valaki egy adott napon kétféle müzliszeletet eszik, az I. típusúból x_1, a II. típusúból x_2 darabot. A müzliszeletek egyes darabjainak cukor és fehérjetartalmát (grammban) a lenti táblázat tartalmazza:

	I.	II.
cukor	9	8
fehérje	7	10

Ha

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

akkor mit adnak meg az $y = Ax$ vektor koordinátái?

8.5. Élőlények egy zárt populációjában az egyedek legfeljebb 3 évig élnek. Az egyedeknek az első évben nem keletkezik utódja, a másodéves egyedek esetén az átlagos reprodukciósszám 6, a harmadik éves egyedeknél 8. Az 1 és 2 éves egyedek $50-50\%$-a éli meg a következő évet. Ha az $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ vektor koordinátái adják az 1, 2 és 3 éves egyedek számát egy adott évben, akkor adja meg azt az A mátrixot, mellyel $y = Ax$ koordinátái a következő év egyedszámait adják. Mit ad meg az A^2x, illetve az A^5x vektor?

8.6. December elején egy jótékonysági szervezet ajándékcsomagokat készít. Kétféle csomag készül, az egyikbe 3 gyümölcs és 3 csokoládé, a másikba 2 gyümölcs és 4 csokoládé kerül. Arra vagyunk kíváncsiak, hogy melyik csomagból mennyi készült, ha összesen 170 gyümölcsöt és 250 csokoládét használtak fel. Írja fel a megoldandó egyenletet mátrix-vektor alakban.

8.7. Számoljuk ki az alábbi mátrixok determinánsát a Sarrus-szabály segítségével.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 2 \\ 3 & 8 & -7 \end{pmatrix}$

(f) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

8.8. Határozzuk meg az alábbi mátrixok inverzét, amennyiben létezik.

(a) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

(f) $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

8.9. Számoljuk ki az alábbi mátrixok determinánsát kifejtési tétellel.

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 2 \\ 3 & 8 & -7 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -5 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & 5 \\ 3 & -2 & 4 & 1 \\ -4 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$