2. Teljes indukció

Bizonyítsuk be teljes indukcióval az alábbi állításokat!

<u>2.1</u>. $1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}$ esetén;

2.2. $1^2+2^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}$ esetén;

2.3. $1^3+2^3+\cdots+n^3=\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}$ esetén;

<u>2.4</u>. $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}$ esetén;

2.5. $1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2=\dfrac{n(4n^2-1)}{3}$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}$ esetén;

2.6. $1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+n(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}$ esetén;

<u>2.7</u>. $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{n}{n+1}$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}$ esetén;

2.8. $1\cdot 4+2\cdot 7+\cdots+n(3n+1)=n(n+1)^2$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}$ esetén;

2.9. $\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\left(1-\dfrac{1}{9}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{(n+1)^2}\right)=\dfrac{n+2}{2n+2}$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}$ esetén;

2.10. $1\cdot 1!+2\cdot 2!+\cdots+n\cdot n!=(n+1)!-1$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}$ esetén;

2.11. $6|(n^3-n)$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}$ esetén;

2.12. $6|(n^3+5n)$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}$ esetén;

2.13. $5|(2^{4n+1}+3)$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}$ esetén;

2.14. $3|(n^3+5n+6)$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}$ esetén;

2.15. $9|(10^n+3\cdot 4^{n+2}+5)$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}$ esetén;

<u>2.16</u>. $4|(7^n+10n-5)$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}$ esetén;

<u>2.17</u>. $\dfrac{n^3}{3}+\dfrac{n^5}{5}+\dfrac{7n}{15}$ egész szám minden $n \in \mathbb{N}$ esetén;

2.18. $(n+1)! > 2^{n+3}$, ha $n \geq 5$, $n \in \mathbb{N}$;

2.19. (*) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq 2(\sqrt{n+1}-1)$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}$ esetén;

2.20. $\dbinom{2n}{n} < 4^{n-1}$, ha $n \geq 5$, $n \in \mathbb{N}$;

2.21. (*) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$ esetén;

2.22. (*) $n^3 < 2^{n+1}$, ha $n > 8$, $n \in \mathbb{N}$;

2.23. (*) $\sqrt{n} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$ esetén.

2.24. Tegyük fel, hogy $n \geq 4$ idős hölgy mindegyike tud egy pletykát (mindenki különbözőt). A hölgyek mindegyikének van telefonja, és ha két hölgy felhívja egymást, akkor az összes addig tudomásukra jutott pletykát elmondják egymásnak. Bizonyítsuk be teljes indukcióval, hogy $2n - 4$ telefonhívással megoldható, hogy mindannyian ismerjék az összes pletykát!