Valós függvények differenciálszámítása III.

Teljes függvényvizsgálat

A gyakorlat célja

Ennek a gyakorlatnak a célja a teljes függvényvizsgálat elméletből tanult állításainak az elmélyítése és begyakorlása. Ezeknek az eszközöknek a felhasználásával egy adott valós, differenciálható függvény esetén az alábbiakat tudjuk majd meghatározni.

(i) f értelmezési tartományát ($\mathscr{D}_f$);

(ii) f értékkészletét ($\mathscr{R}_f$);

(iii) f páros, páratlan, periodikus függvény-e;

(iv) f zérushelyeit;

(v) $\mathscr{D}_f$ azon részhalmazait, ahol f előjele állandó;

(vi) f határértékeit $\mathscr{D}_f$ határpontjaiban;

(vii) $\mathscr{D}_f$ azon részhalmazait, ahol f monoton növekedő/csökkenő;

(viii) f szakadási helyeit;

(ix) f derivált függvényeit;

(x) f szélsőérték helyeit és szélsőértékeit;

(xi) $\mathscr{D}_f$ azon részhalmazait, ahol f konvex/konkáv;

(xii) f aszimptotáit.

Felhasznált elméleti anyag

A feladatok megoldásához szükséges elméleti állítások

(i) Lokális minimum/maximum szükséges feltétele

(ii) Lokális minimum/maximum elégséges feltétele

(iii) Monotonitás elegendő feltétele

(iv) Konvexitás elegendő feltétele

Ezek az állítások, néhány kidolgozott példával együtt megtalálhatóak a Kalkulus előadásjegyzet 8.7 fejezetében.

Korábbi előismeretek

Ahhoz, hogy ezt a témakört sikeresen elsajátítsuk, szükség van néhány előismeretre. Ezek az alábbiak

(i) Valós függvények differenciálszámítása (Ha gond van a deriválással, akkor előbb azt kell gyakorolni, anélkül ez a témakör sem fog menni).

(ii) Sokszor lesz szükség a konkrét feladatmegoldásokban algebrai egyenlőtlenségek megoldására, elsősorban arra, hogy hogyan kell másodfokú egyenlőtlenségeket megoldani.

Néhány hasznos tipp

(i) Teljes függvényvizsgálat során mindig törekedni kell arra, hogy a szóban forgó f függvény differenciálhányados-függvényeinek meghatározása után f'-t, f''-t stb. minél egyszerűbb alakra hozzuk. Ez azért fontos, mert általában $f^{(k)}(x) \geq 0$ alakú egyenlőtlenségeket, illetve $f^{(k)}(x) = 0$ alakú egyenleteket kell megoldanunk. Törekedjünk arra, hogy a megoldandó egyenlőtlenségek, illetve egyenletek minél egyszerűbbek legyenek.

(ii) Ahogyan arról már korábban volt szó, a differenciálszámítás egy nagyon algoritmikus dolog. A számításainkat mindig ellenőrizhetjük valamilyen matematikai programcsomag segítségével. Sőt ajánlatos ebben a témakörben a szóban forgó függvényeket valamilyen program segítségével ábrázolni is. Így a kapott eredményeket egy ábrával össze tudjuk vetni, ellenőrizni tudjuk magunkat, illetve ha hiba van a számításunkban, az azonnal kiderül. Egy nagyon könnyen használható, nyílt forráskódú programcsomag a Maxima.

1. Feladat. *Vizsgáljuk meg monotonitás szempontjából az alábbi függvényeket.*

Útmutatás. *Ebben a feladatban az alábbi állítást fogjuk használni.*

1. Tétel (Monotonitás elegendő feltétele). *Ha az $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ függvény differenciálható, akkor*

(A) ha $f' \geq 0$, akkor f monoton növekedő $]a, b[$-n;

(B) ha $f' \leq 0$, akkor f monoton csökkenő $]a, b[$-n.

□

(a)

$$2 + x - x^2$$

Megoldás. *Tekintsük az*

$$f(x) = 2 + x - x^2 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

módon megadott $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt. Mivel ez a függvény az egész értelmezési tartományán differenciálható, így az 1. Tétel értelmében elegendő azt vizsgálni, hogy az f függvény differenciálhányados-függvénye az értelmezési tartománya mely intervallumain nemnegatív és mely intervallumain nempozitív. Ebben az esetben

$$f'(x) = 1 - 2x \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Így,

$$\begin{aligned} f'(x) &\geq 0 \\ 1 - 2x &\geq 0 \\ x &\leq \frac{1}{2} \\ x &\in]-\infty, 1/2]. \end{aligned}$$

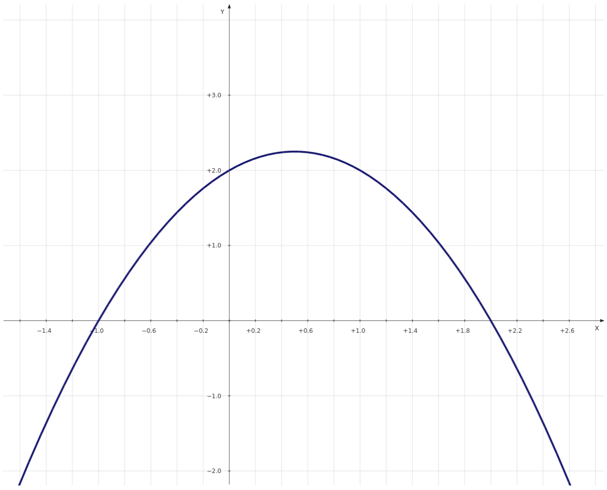
Ez azt jelenti, hogy

- *az f függvény monoton növekedő a $]-\infty, 1/2]$ intervallumon;*
- *az f függvény monoton csökkenő az $]1/2, +\infty[$ intervallumon.*

□

(b)

$$3x - x^3$$



1. ábra. A $2 + x - x^2$ függvény

Megoldás. *Tekintsük az*

$$f(x) = 3x - x^3 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

módon megadott $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt. Mivel ez a függvény az egész értelmezési tartományán differenciálható, így az 1. Tétel értelmében elegendő azt vizsgálni, hogy az f függvény differenciálhányados-függvénye az értelmezési tartománya mely intervallumain nemnegatív és mely intervallumain nempozitív. Ebben az esetben

$$f'(x) = 3 - 3x^2 \qquad (x \in \mathbb{R})\,.$$

Így,

$$\begin{aligned} f'(x) &\geq 0 \\ 3 - 3x^2 &\geq 0 \\ 1 - x^2 &\geq 0 \\ 1 &\geq x^2 \\ x &\in [-1, 1] \end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy

- *az f függvény monoton csökkenő a $]-\infty, -1[$ intervallumon.*
- *az f függvény monoton növekedő a $[-1, 1]$ intervallumon;*
- *az f függvény monoton csökkenő az $[1, +\infty[$ intervallumon.*

	$]-\infty, -1$	$[-1, 1]$	$]1, +\infty[$
f'	$-$	$+$	$-$
f	*monoton csökkenő* ($\searrow$)	*monoton növekedő* ($\nearrow$)	*monoton csökkenő* ($\searrow$)

□

(c)

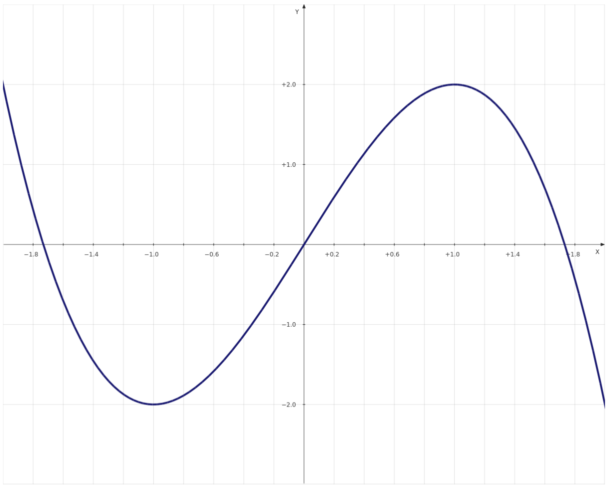
$$x + \sin(x)$$

Megoldás. *Tekintsük az*

$$f(x) = x + \sin(x) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

módon megadott $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt. Mivel ez a függvény az egész értelmezési tartományán differenciálható, így az 1. Tétel értelmében elegendő azt vizsgálni, hogy az f függvény differenciálhányados-függvénye az értelmezési tartománya mely intervallumain nemnegatív és mely intervallumain nempozitív. Ebben az esetben

$$f'(x) = 1 + \cos(x) \qquad (x \in \mathbb{R})\,.$$

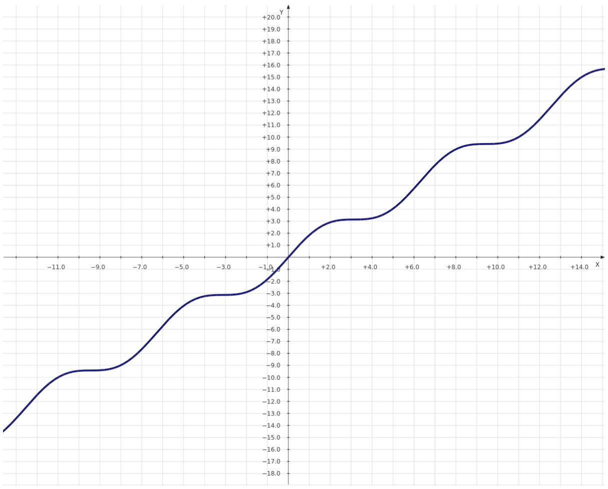


2. ábra. A $3x - x^3$ függvény

Így,

$$\begin{aligned} f'(x) &\geq 0 \\ 1 + \cos(x) &\geq 0 \\ \cos(x) &\geq -1 \end{aligned}$$

Ez az egyenlőtlenség azonban minden $x \in \mathbb{R}$ esetén fennáll. Ez azt jelenti, hogy az f függvény a teljes értelmezési tartományán ***monoton növekedő****.* □



3. ábra. Az $x + \sin(x)$ függvény

(d)

$$x^2 - \ln(x^2)$$

Megoldás. *Tekintsük az*

$$f(x) = x^2 - \ln(x^2) \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

módon megadott $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ függvényt. Mivel ez a függvény az egész értelmezési tartományán differenciálható, így az 1. Tétel értelmében elegendő azt vizsgálni, hogy az f függvény differenciálhányados-függvénye az értelmezési tartománya mely intervallumain nemnegatív és mely intervallumain nempozitív. Ebben az esetben

$$f'(x) = 2x - \frac{2}{x} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Így,

$$\begin{aligned} f'(x) &\geq 0 \\ 2x - \frac{2}{x} &\geq 0 \\ x - \frac{1}{x} &\geq 0 \\ \frac{1}{x}(x^2-1) &\geq 0 \end{aligned}$$

Attól függően, hogy $x > 0$ vagy $x < 0$, két esetet kell megkülönböztetnünk.

ha $x > 0$ *, akkor a fenti egyenlőtlenség*

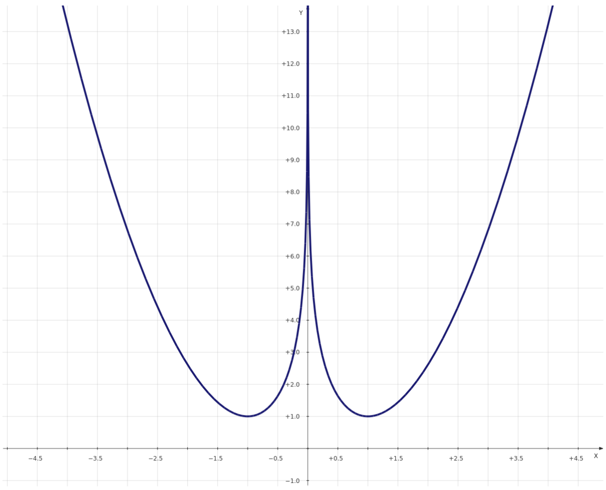
$$\begin{aligned} x^2 - 1 &\geq 0 \\ x &\geq 1 \\ x &\in [1, +\infty[\end{aligned}$$

ha $x < 0$ *, akkor a fenti egyenlőtlenség*

$$\begin{aligned} x^2 - 1 &\leq 0 \\ x &\geq -1 \\ x &\in [-1, 0[\end{aligned}$$

Mindent egybevetve

	$]-\infty, -1]$	$]-1, 0[$	$]0, 1[$	$[1, +\infty[$
f'	$-$	$+$	$-$	$+$
f	*monoton csökkenő (↘)*	*monoton növekedő (↗)*	*monoton csökkenő (↘)*	*monoton növekedő (↗)*



4. ábra. Az $x^2 - \ln(x^2)$ függvény

□

(e)

$$x^{\alpha} e^{-x}$$

(f)

$$(x + 7)^3$$

Megoldás. *Tekintsük az*

$$f(x) = (x + 7)^3 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

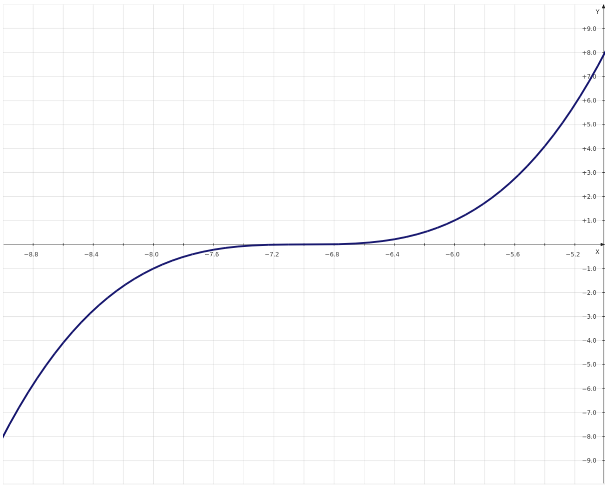
módon megadott $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt. Mivel ez a függvény az egész értelmezési tartományán differenciálható, így az 1. Tétel értelmében elegendő azt vizsgálni, hogy az f függvény differenciálhányados-függvénye az értelmezési tartománya mely intervallumain nemnegatív és mely intervallumain nempozitív. Ebben az esetben

$$f'(x) = 3(x+7)^2 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Így,

$$\begin{aligned} f'(x) &\geq 0 \\ 3(x+7)^2 &\geq 0 \\ (x+7)^2 &\geq 0 \\ x &\in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

*hiszen tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén fennáll az $(x+7)^2 \geq 0$ egyenlőtlenség. Ez azt jelenti, hogy az f függvény a teljes értelmezési tartományán **monoton növekedő**.* □



5. ábra. Az $(x+7)^3$ függvény

(g)

$$x^2\sqrt{5-x}$$

Megoldás. *Tekintsük az*

$$f(x) = x^2\sqrt{5-x} \qquad (x \in]-\infty, 5[)$$

módon megadott $f :]-\infty, 5[\to \mathbb{R}$. Mivel ez a függvény az egész értelmezési tartományán differenciálható, így az 1. Tétel értelmében elegendő azt vizsgálni, hogy az f függvény differenciálhányados-függvénye az értelmezési tartománya mely intervallumain nemnegatív és mely intervallumain nempozitív. Ebben az esetben

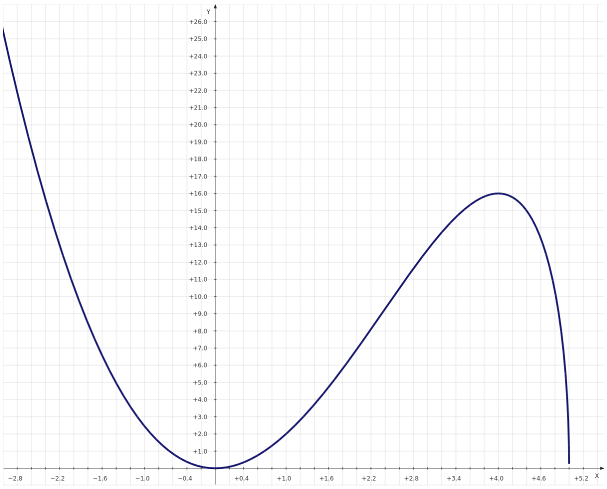
$$f'(x) = 2x\sqrt{5-x} - \frac{x^2}{2\sqrt{5-x}} \qquad (x \in]-\infty, 5[).$$

Így,

$$\begin{aligned} f'(x) &\geq 0 \\ 2x\sqrt{5-x} - \frac{x^2}{2\sqrt{5-x}} &\geq 0 \quad \textit{(szorozzuk meg mindkét oldalt } \sqrt{5-x}\textit{-szel, ami pozitív.)} \\ -\frac{5x^2 - 20x}{2} &\geq 0 \\ 20x - 5x^2 &\geq 0 \\ 4x - x^2 &\geq 0 \\ x(4-x) &\geq 0 \\ x &\in [0, 4]. \end{aligned}$$

Mindent egybevetve

	$]-\infty, 0[$	$[0, 4]$	$]4, 5[$
f'	$-$	$+$	$-$
f	*monoton csökkenő* ($\searrow$)	*monoton növekedő* ($\nearrow$)	*monoton csökkenő* ($\searrow$)



6. ábra. Az $x^2\sqrt{5-x}$ függvény

$\square$

(h)

$$x^4 - 8x^2 + 16$$

(i)

$$x^3 e^x$$

(j)

$$x \sinh(x)$$

(k)

$$\frac{x+2}{x+1}$$

Megoldás. *Tekintsük az*

$$f(x) = \frac{x+2}{x+1} = 1 + \frac{1}{x+1} \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$$

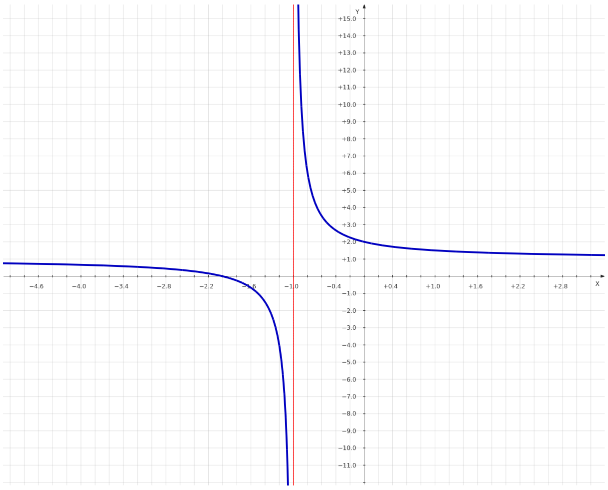
módon megadott $f\colon \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$ *függvényt. Mivel ez a függvény az egész értelmezési tartományán differenciálható, így az 1. Tétel értelmében elegendő azt vizsgálni, hogy az* f *függvény differenciálhányadosfüggvénye az értelmezési tartománya mely intervallumain nemnegatív és mely intervallumain nempozitív. Ebben az esetben*

$$f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}).$$

Mivel tetszőleges $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ *esetén* $(x+1)^2 \geq 0$*, ezért*

$$-\frac{1}{(x+1)^2} \geq 0,$$

azaz, minden $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ *esetén* $f'(x) \leq 0$*, ami azt jelenti, hogy az* f *függvény a* $]-\infty, -1[$ *és a* $]-1, +\infty[$ *intervallumok mindegyikén monoton csökkenő.* $\square$



7. ábra. Az $\dfrac{x+2}{x+1}$ függvény

(l)

$$\ln\left(x^2+x+1\right)$$

Megoldás. *Tekintsük az*

$$f(x)=\ln\left(x^2+x+1\right) \qquad (x\in\mathbb{R})$$

módon megadott $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvényt. Mivel ez a függvény az egész értelmezési tartományán differenciálható, így az 1. Tétel értelmében elegendő azt vizsgálni, hogy az f függvény differenciálhányados-függvénye az értelmezési tartománya mely intervallumain nemnegatív és mely intervallumain nempozitív. Ebben az esetben

$$f'(x)=\frac{2x+1}{x^2+x+1} \qquad (x\in\mathbb{R}),$$

amiből azt kapjuk, hogy

$$\begin{array}{rcll} f'(x) & \geq & 0 & \\ \dfrac{2x+1}{x^2+x+1} & \geq & 0 & \textit{(szorozzuk meg mindkét oldalt } (x^2+x+1)\textit{-gyel, ami pozitív.)} \\ 2x+1 & \geq & 0 & \\ x & \geq & -\dfrac{1}{2}. & \end{array}$$

Ez azt jelenti, hogy

- *az f függvény monoton növekedő a $[-1/2,+\infty[$ intervallumon;*
- *az f függvény monoton csökkenő a $]-\infty,-1/2[$ intervallumon.*

□

(m)

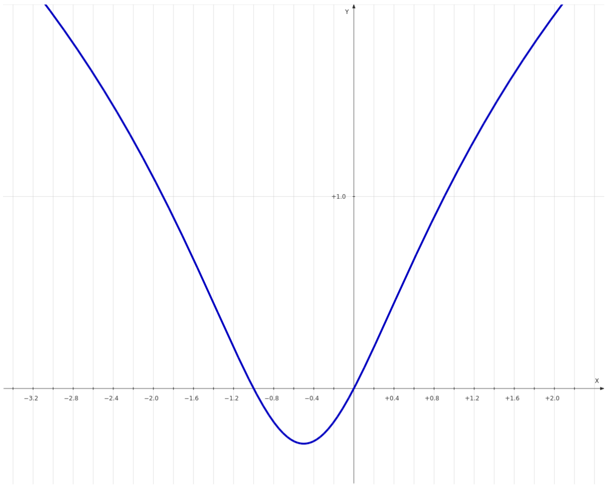
$$\frac{2x}{x^2+1}$$

2. Feladat. *Vizsgáljuk meg a következő függvényeket konvexitás szempontjából.*

Útmutatás. *A megoldások során a következő állítást fogjuk használni.*

2. Tétel. *Az $f:\,]a,b[\to\mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvény pontosan akkor konvex az $]a,b[$ intervallumon, ha $f''(x)\geq 0$ teljesül minden $x\in]a,b[$ esetén.*

□



8. ábra. Az $\ln(x^2 + x + 1)$ függvény

(a) $3x^2 - x^3$

Megoldás. *Tekintsük az*

$$f(x) = 3x^2 - x^3 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

módon megadott $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *függvényt, amely kétszer differenciálható az értelmezési tartományán. Így a konvexitás vizsgálatához elegendő meghatározni az* f *függvény másodrendű deriváltját és azt nézni, hogy ez az értelmezési tartománya mely részintervallumain nemnegatív és mely részintervallumain nempozitív. Ebben az esetben*

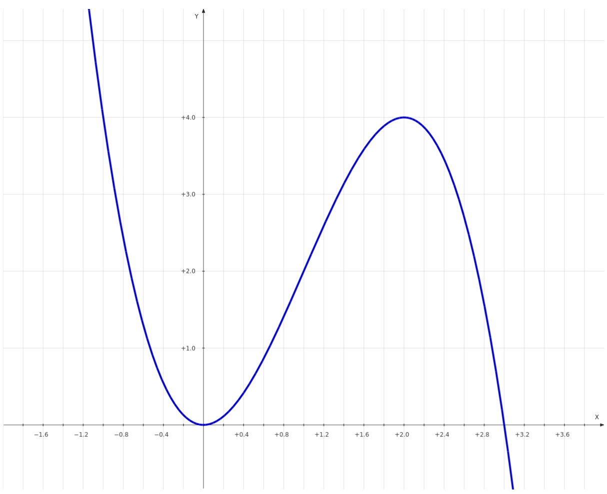
$$\begin{aligned} f'(x) &= 6\,x - 3\,x^2 \\ f''(x) &= 6 - 6\,x, \end{aligned}$$

amiből az adódik, hogy

$$\begin{aligned} f''(x) &\geq 0 \\ 6 - 6\,x &\geq 0 \\ 1 &\geq x \\ x &\in \;]-\infty, 1]. \end{aligned}$$

Mindent egybevetve

- *az* f *függvény konvex a* $]-\infty, 1]$ *intervallumon;*
- *az* f *függvény konkáv az* $]1, +\infty]$ *intervallumon.*



9. ábra. A $3x^2 - x^3$ függvény

□

(b) $\dfrac{1}{1+x^2}$

Megoldás. *Tekintsük az*

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

módon megadott $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *függvényt, amely kétszer differenciálható az értelmezési tartományán. Így a konvexitás vizsgálatához elegendő meghatározni az* f *függvény másodrendű deriváltját és azt nézni, hogy ez az értelmezési tartománya mely részintervallumain nemnegatív és mely részintervallumain nempozitív. Ebben az esetben*

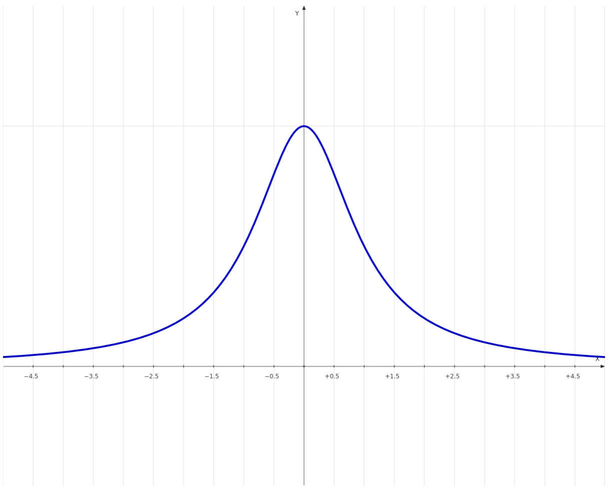
$$\begin{aligned} f'(x) &= (-1)(1+x^2)^{-2}\cdot 2x \\ f''(x) &= \frac{6\,x^2-2}{(1+x^2)^3}, \end{aligned}$$

amiből az adódik, hogy

$$\begin{aligned} f''(x) &\geq 0 \\ \frac{6\,x^2-2}{(1+x^2)^3} &\geq 0 \quad \textit{(szorozzuk meg mindkét oldalt } (1+x^2)^3\textit{-nel, ami pozitív)} \\ 6\,x^2-2 &\geq 0 \\ 3\,x^2-1 &\geq 0 \\ x^2 &\geq \frac{1}{3} \\ x &\in \left]-\infty, -\sqrt{3}/3\right[\cup\left]\sqrt{3}/3, +\infty\right[. \end{aligned}$$

Mindent egybevetve

- *az* f *függvény konvex a* $]-\infty, -\sqrt{3}/3[$ *intervallumon;*
- *az* f *függvény konkáv az* $[-\sqrt{3}/3,\ \sqrt{3}/3]$ *intervallumon;*
- *az* f *függvény konvex a* $]\sqrt{3}/3, +\infty[$ *intervallumon;*



10. ábra. Az $\dfrac{1}{x^2+1}$ függvény

□

(c) $\sqrt{1+x^2}$

(d) e^{-x^2}

Megoldás. *Tekintsük az*

$$f(x) = e^{-x^2} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

módon megadott $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt, amely kétszer differenciálható az értelmezési tartományán. Így a konvexitás vizsgálatához elegendő meghatározni az f függvény másodrendű deriváltját és azt nézni, hogy ez az értelmezési tartománya mely részintervallumain nemnegatív és mely részintervallumain nempozitív. Ebben az esetben

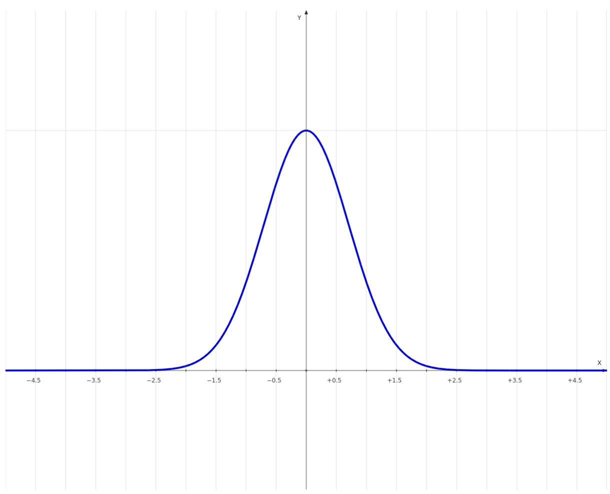
$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{-x^2} \cdot (-2x) \\ f''(x) &= 2\left(2x^2 - 1\right) e^{-x^2} \end{aligned}$$

amiből az adódik, hogy

$$\begin{aligned} f''(x) &\geq 0 \\ 2\left(2x^2 - 1\right) e^{-x^2} &\geq 0 \qquad \textit{(szorozzunk meg mindkét oldalt } e^{x^2}\textit{-nel, ami pozitív.)} \\ 2\left(2x^2 - 1\right) &\geq 0 \\ 2x^2 - 1 &\geq 0 \\ x^2 &\geq \frac{1}{2} \\ x &\in \left]-\infty, -\sqrt{2}/2\right[\cup \left]\sqrt{2}/2, +\infty\right[. \end{aligned}$$

Mindent egybevetve

- *az f függvény konvex a $]-\infty, -\sqrt{2}/2[$ intervallumon;*
- *az f függvény konkáv az $[-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2]$ intervallumon;*
- *az f függvény konvex a $]\sqrt{2}/2, +\infty[$ intervallumon.*



11. ábra. Az $\exp(-x^2)$ függvény

□

(e) $\ln(1 + x^2)$

(f) $a(x - b)^4$

3. Feladat. *Határozzuk meg, hogy a következő függvényeknek mely pontokban van szélsőértékhelyük.*

Útmutatás. *A szélsőértékhelyek meghatározásához és osztályozásához az alábbi két állítást fogjuk minden egyes feladatban használni.*

3. Tétel (Lokális minimum/maximum szükséges feltétele). *Ha az $f\colon]a, b[\to \mathbb{R}$ függvénynek az $x_0 \in]a, b[$ pontban lokális minimuma/maximuma van, és f differenciálható az x_0 pontban, akkor $f'(x_0) = 0$.*

1. Megjegyzés. *A fenti állítás* ***nem*** *azt jelenti, hogy az f függvénynek olyan x_0 pont(ok)ban, ahol $f'(x_0) = 0$ teljesül, szélsőértéke van. A lokális minimum/maximum szükséges feltételét arra tudjuk használni, hogy a segítségével* ***kiszűrjük a lehetséges szélsőértékhelyeket****, ugyanis ez a tétel azt mondja, hogy ha az f függvénynek van szélsőértékhelye, akkor ezekben a pontokban el kell, hogy tűnjön a deriváltja.*

4. Tétel. *Ha az $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ függvény k-szor differenciálható (ahol $k > 1$), és $f'(x_0) = \ldots = f^{(k-1)}(x_0) = 0$ és $f^{(k)}(x_0) \neq 0$, akkor*

(A) ha k páratlan, akkor $f(x_0)$ nem szélsőérték;

(B) ha k páros, akkor

(i) ha $f^{(k)}(x_0) > 0$, akkor $f(x_0)$ szigorú lokális minimum;

(ii) ha $f^{(k)}(x_0) < 0$, akkor $f(x_0)$ szigorú lokális maximum.

□

(a) $2 + x - x^2$

Megoldás. *Tekintsük az*

$$f(x) = 2 + x - x^2 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

módon megadott $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt, mely a teljes értelmezési tartományán kétszer differenciálható. A fenti állítások értelmében, ha ennek a függvénynek van szélsőértékhelye, akkor ebben a pontban el kell, hogy tűnjön a deriváltja. Így, először meghatározzuk a szóban forgó függvény differenciálhányados-függvényét és azt vizsgáljuk, hogy ez mely pontokban tűnik el.

Ebben az esetben

$$f'(x) = 1 - 2x \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ezért

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 1 - 2x &= 0 \\ x &= \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

azaz, ha az f függvénynek van szélsőértékhelye (ezt jelen pillanatban még nem tudjuk, sőt azt sem, hogy ha igen, akkor milyen: lokális minimumhely vagy lokális maximumhely), akkor az csak az $x_0 = \frac{1}{2}$ pontban lehet. Nézzük meg az f függvény másodrendű deriváltját, ami ebben az esetben

$$f''(x) = -2 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Ezt értékeljük ki a lehetséges szélsőértékhelyeken, ami nekünk most

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -2 < 0,$$

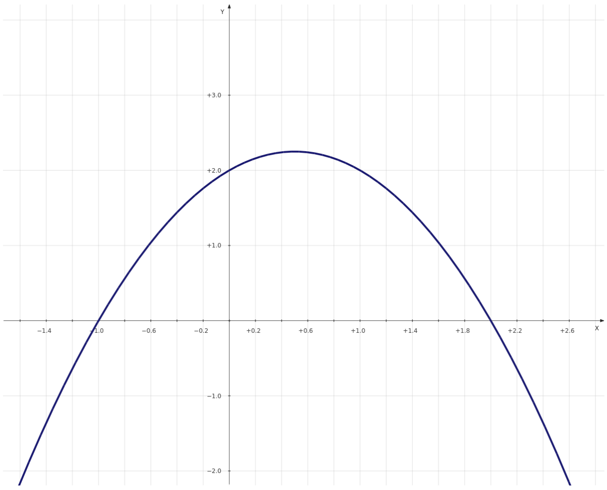
mivel ez az érték negatív, ezért az $x_0 = \frac{1}{2}$ pont az f függvények lokális maximumhelye. □

(b) $(x - 1)^3$

(c) $(x - 1)^\alpha$

(d) $2x^2 - x^4$

(e) $x(x - 1)^2(x - 2)^3$



12. ábra. A $2 + x - x^2$ függvény

Megoldás. *Tekintsük az*

$$f(x) = x(x-1)^2(x-2)^3 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

módon megadott $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *függvényt, mely a teljes értelmezési tartományán kétszer (sőt akárhányszor) differenciálható. A fenti állítások értelmében, ha ennek a függvénynek van szélsőértékhelye, akkor ebben a pontban el kell, hogy tűnjön a deriváltja. Így, először meghatározzuk a szóban forgó függvény differenciálhányados-függvényét és azt vizsgáljuk, hogy ez mely pontokban tűnik el.*

Ebben az esetben

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\,(x-2)^3\,(x-1)\,x + 3\,(x-2)^2\,(x-1)^2\,x + (x-2)^3\,(x-1)^2 \\ &= 2\,(x-2)^2\,(x-1)\left(3\,x^2 - 5\,x + 1\right) \qquad (x \in \mathbb{R}), \end{aligned}$$

ezért

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 2\,(x-2)^2\,(x-1)\left(3\,x^2 - 5\,x + 1\right) &= 0. \end{aligned}$$

Most látjuk, hogy f' *meghatározása után* f'*-t célszerű minél egyszerűbb alakra hozni: rögtön látunk a fenti alak segítségével két gyököt, mégpedig*

$$x_1 = 1 \qquad \textit{és} \qquad x_2 = 2,$$

így már csak a

$$3\,x^2 - 5\,x + 1 = 0$$

másodfokú egyenletet kell megoldani, melynek megoldásai

$$x_{3,4} = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{6}$$

azaz, ha az f *függvénynek van szélsőértékhelye (ezt jelen pillanatban még nem tudjuk, sőt azt sem, hogy ha igen, akkor milyen: lokális minimumhely vagy lokális maximumhely), akkor az csak az* x_1, x_2, x_3, x_4 *pontok valamelyikében lehet. Nézzük meg az* f *függvény másodrendű deriváltját, ami ebben az esetben*

$$\begin{aligned} f''(x) &= 12\,(x-2)^2\,(x-1)\,x + 6\,(x-2)\,(x-1)^2\,x \\ &\quad + 2\,(x-2)^3\,x + 4\,(x-2)^3\,(x-1) + 6\,(x-2)^2\,(x-1)^2 \\ &= 2\,(x-2)\left(15\,x^3 - 50\,x^2 + 50\,x - 14\right) \qquad (x \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Ezt értékeljük ki a lehetséges szélsőértékhelyeken, ami nekünk most

$$\begin{aligned} f''(x_1) = f''(1) &= -2 < 0 \\ f''(x_2) = f''(2) &= 0 \quad (!!!) \\ f''(x_3) = f''\left(\frac{5+\sqrt{13}}{6}\right) &= -\tfrac{61\sqrt{13}-247}{27} > 0 \\ f''(x_4) = f''\left(\frac{5-\sqrt{13}}{6}\right) &= \tfrac{61\sqrt{13}+247}{27} > 0 \end{aligned}$$

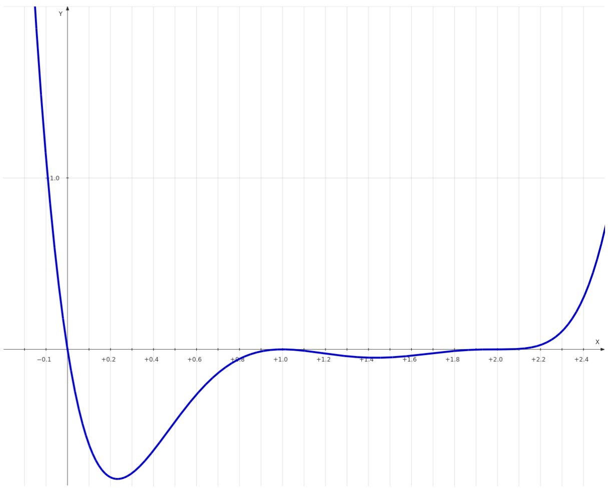
Ebből azt látjuk, hogy az x_1 pont egy lokális maximumhely, az x_3 és x_4 pontok pedig lokális minimumhelyek. Mivel $f''(x_2) = 0$, ezért az x_2 pontot illetően most még nem tudunk dönteni. Képezzük az f függvény harmadrendű deriváltját. Ekkor

$$\begin{aligned} f'''(x) = 36\,(x-2)\,(x-1)\,x + 6\,(x-1)^2\,x \\ + 18\,(x-2)^2\,x + 36\,(x-2)^2\,(x-1) + 18\,(x-2)\,(x-1)^2 + 6\,(x-2)^3 \\ = 12\left(10\,x^3 - 40\,x^2 + 50\,x - 19\right) \end{aligned}$$

és

$$f'''(x_2) = f'''(2) = 12 \neq 0,$$

ami már nem nulla. Viszont az első, el nem tűnő derivált rendje $k = 3$, ami páratlan, így az $x_2 = 2$ pont nem szélsőértékhely. □



13. ábra. Az $x(x-1)^2(x-2)^3$ függvény

(f) $x + \dfrac{1}{x}$

Megoldás. *Tekintsük az*

$$f(x) = x + \frac{1}{x} \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

módon megadott $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ függvényt, mely a teljes értelmezési tartományán kétszer differenciálható. A fenti állítások értelmében, ha ennek a függvénynek van szélsőértékhelye, akkor ebben a pontban el kell, hogy tűnjön a deriváltja. Így, először meghatározzuk a szóban forgó függvény differenciálhányados-függvényét és azt vizsgáljuk, hogy ez mely pontokban tűnik el.

Ebben az esetben

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ezért

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 1 - \tfrac{1}{x^2} &= 0 \\ x &= \pm 1, \end{aligned}$$

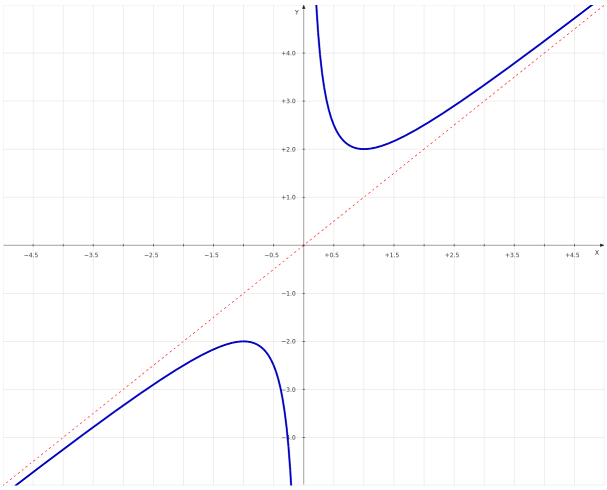
azaz, ha az f függvénynek van szélsőértékhelye (ezt jelen pillanatban még nem tudjuk, sőt azt sem, hogy ha igen, akkor milyen: lokális minimumhely vagy lokális maximumhely), akkor az csak az $x_{1,2} = \pm 1$ pontok valamelyikében lehet. Nézzük meg az f függvény másodrendű deriváltját, ami ebben az esetben

$$f''(x) = \frac{2}{x^3} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Ezt értékeljük ki a lehetséges szélsőértékhelyeken, ami nekünk most

$$f''(x_1) = f''(1) = 2 > 0 \qquad \textit{és} \qquad f''(x_2) = f''(-1) = -2 < 0.$$

Ez azt jelenti, hogy az $x_1 = 1$ pont lokális minimumhely, míg az $x_2 = -1$ pont lokális maximumhely.



14. ábra. Az $x + \dfrac{1}{x}$ függvény

$\square$

(g) $\sqrt[3]{x(1-x)^2}$

(h) $x^{\alpha}(1-x)^{\beta}$

(i) $(x+10)^{10}e^{-x}$

(j) xe^{-x}

Megoldás. *Tekintsük az*

$$f(x) = xe^{-x} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

módon megadott $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt, mely a teljes értelmezési tartományán kétszer differenciálható. A fenti állítások értelmében, ha ennek a függvénynek van szélsőértékhelye, akkor ebben a pontban el kell, hogy tűnjön a deriváltja. Így, először meghatározzuk a szóban forgó függvény differenciálhányados-függvényét és azt vizsgáljuk, hogy ez mely pontokban tűnik el.

Ebben az esetben

$$f'(x) = e^{-x} - x\,e^{-x} = -(x-1)\,e^{-x} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ezért

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ -(x-1)\,e^{-x} &= 0 \\ x-1 &= 0 \\ x &= 1, \end{aligned}$$

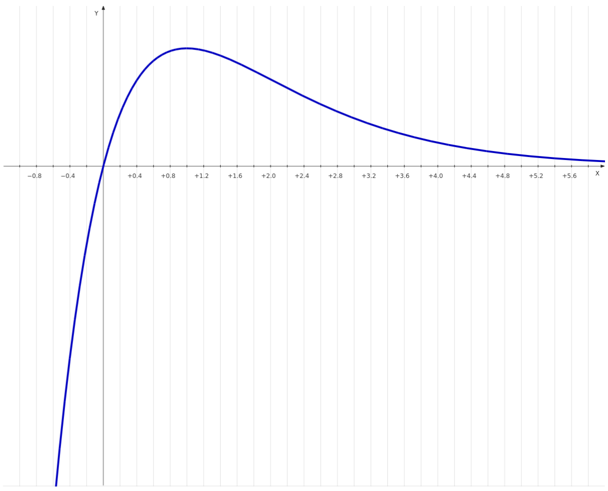
azaz, ha az f függvénynek van szélsőértékhelye (ezt jelen pillanatban még nem tudjuk, sőt azt sem, hogy ha igen, akkor milyen: lokális minimumhely vagy lokális maximumhely), akkor az csak az $x_1 = 1$ pontban lehet. Nézzük meg az f függvény másodrendű deriváltját, ami ebben az esetben

$$f''(x) = x\,e^{-x} - 2\,e^{-x} = (x-2)\;e^{-x} \qquad (x \in \mathbb{R})\,.$$

Ezt értékeljük ki a lehetséges szélsőértékhelyeken, ami nekünk most

$$f''\,(x_1) = f''(1) = -\frac{1}{e} < 0.$$

Ez azt jelenti, hogy az $x_1 = 1$ pont lokális maximumhely. □



15. ábra. Az $x\exp(-x)$ függvény

(k) $\sqrt{x}\ln(x)$

Megoldás. *Tekintsük az*

$$f(x) = \sqrt{x}\ln(x) \qquad (x \in]0,+\infty[)$$

módon megadott $f\colon\ ]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ függvényt, mely a teljes értelmezési tartományán kétszer differenciálható. A fenti állítások értelmében, ha ennek a függvénynek van szélsőértékhelye, akkor ebben a pontban el kell, hogy tűnjön a deriváltja. Így, először meghatározzuk a szóban forgó függvény differenciálhányados-függvényét és azt vizsgáljuk, hogy ez mely pontokban tűnik el.

Ebben az esetben

$$f'(x) = \frac{\ln(x)+2}{2\,\sqrt{x}} \qquad (x \in]0,+\infty[)\,,$$

ezért

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \frac{\ln(x)+2}{2\,\sqrt{x}} &= 0 \\ \ln(x)+2 &= 0 \\ x &= e^{-2} \end{aligned}$$

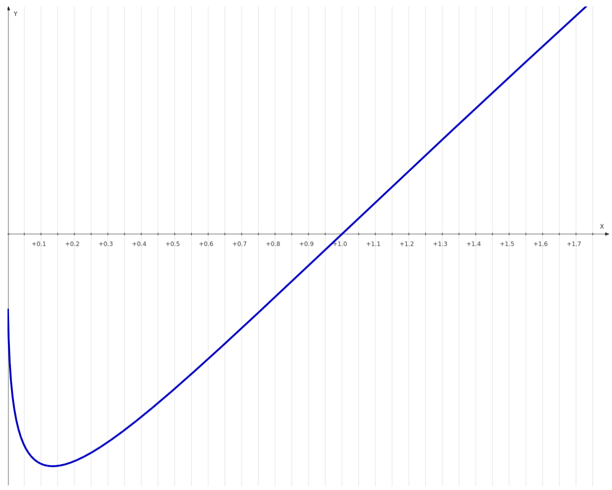
azaz, ha az f függvénynek van szélsőértékhelye (ezt jelen pillanatban még nem tudjuk, sőt azt sem, hogy ha igen, akkor milyen: lokális minimumhely vagy lokális maximumhely), akkor az csak az $x_1 = e^{-2}$ pontban lehet. Nézzük meg az f függvény másodrendű deriváltját, ami ebben az esetben

$$f''(x) = -\frac{\ln(x)}{4\, x^{\frac{3}{2}}} \qquad (x \in]0, +\infty[)\,.$$

Ezt értékeljük ki a lehetséges szélsőértékhelyeken, ami nekünk most

$$f''(x_1) = f''(e^{-2}) = \frac{e^3}{2} > 0$$

Ez azt jelenti, hogy az $x_1 = e^{-2}$ pont lokális minimumhely. □



16. ábra. A $\sqrt{x}\ln(x)$ függvény

(l) $e^x \sin(x)$

(m) $\dfrac{(x+3)^3}{(x+2)^2}$

(n) $a(x-b)^4$

(o) $\dfrac{x}{\ln(x)}$

Megoldás. *Tekintsük az*

$$f(x) = \frac{x}{\ln(x)} \qquad (x \in]0, +\infty[\setminus \{1\})$$

módon megadott $f\colon]0, +\infty[\setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ függvényt, mely a teljes értelmezési tartományán kétszer differenciálható. A fenti állítások értelmében, ha ennek a függvénynek van szélsőértékhelye, akkor ebben a pontban el kell, hogy tűnjön a deriváltja. Így, először meghatározzuk a szóban forgó függvény differenciálhányados-függvényét és azt vizsgáljuk, hogy ez mely pontokban tűnik el.

Ebben az esetben

$$f'(x) = \frac{\ln(x) - 1}{\ln^2(x)} \qquad (x \in]0, +\infty[\setminus \{1\})\,,$$

ezért

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \frac{\ln(x)-1}{\ln^2(x)} &= 0 \\ \ln(x) - 1 &= 0 \\ x &= e \end{aligned}$$

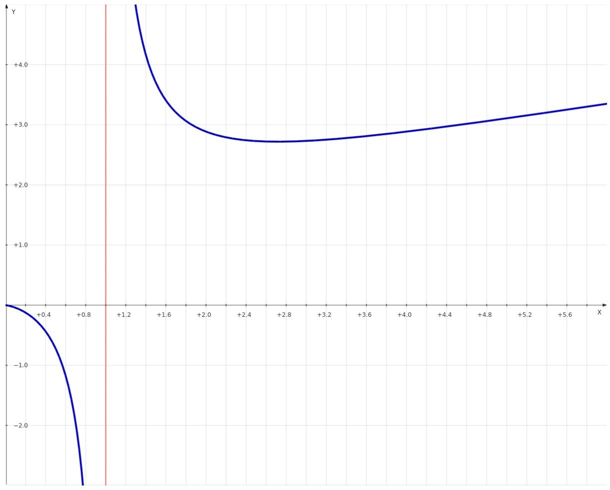
azaz, ha az f függvénynek van szélsőértékhelye (ezt jelen pillanatban még nem tudjuk, sőt azt sem, hogy ha igen, akkor milyen: lokális minimumhely vagy lokális maximumhely), akkor az csak az $x_1 = e$ pontban lehet. Nézzük meg az f függvény másodrendű deriváltját, ami ebben az esetben

$$f''(x) = -\frac{\ln(x) - 2}{x\ \ln^3(x)} \qquad (x \in]0, +\infty[\setminus \{1\}).$$

Ezt értékeljük ki a lehetséges szélsőértékhelyeken, ami nekünk most

$$f''(x_1) = f''(e) = \frac{1}{e} > 0$$

Ez azt jelenti, hogy az $x_1 = e$ pont lokális minimumhely. □



17. ábra. Az $\dfrac{x}{\ln(x)}$ függvény

(p) $\operatorname{arctg}(x) - \dfrac{1}{2}\ln(1 + x^2)$

Megoldás. *Tekintsük az*

$$f(x) = \operatorname{arctg}(x) - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

módon megadott $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt, mely a teljes értelmezési tartományán kétszer differenciálható. A fenti állítások értelmében, ha ennek a függvénynek van szélsőértékhelye, akkor ebben a pontban el kell, hogy tűnjön a deriváltja. Így, először meghatározzuk a szóban forgó függvény differenciálhányados-függvényét és azt vizsgáljuk, hogy ez mely pontokban tűnik el.

Ebben az esetben

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{1 + x^2} = \frac{1 - x}{1 + x^2} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ezért

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \frac{1 - x}{1 + x^2} &= 0 \\ 1 - x &= 0 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

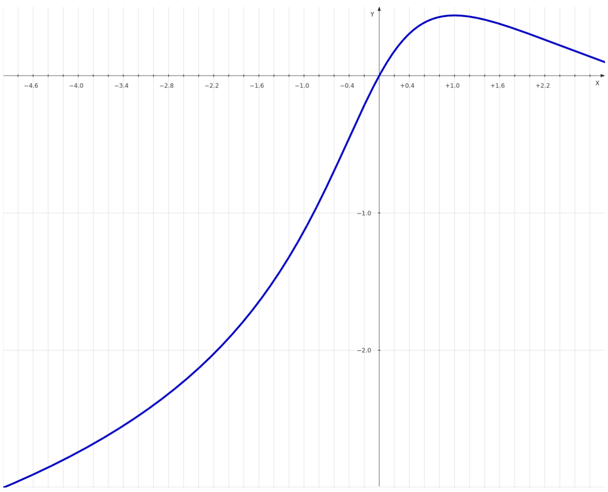
azaz, ha az f függvénynek van szélsőértékhelye (ezt jelen pillanatban még nem tudjuk, sőt azt sem, hogy ha igen, akkor milyen: lokális minimumhely vagy lokális maximumhely), akkor az csak az $x_1 = 1$ pontban lehet. Nézzük meg az f függvény másodrendű deriváltját, ami ebben az esetben

$$f''(x) = \frac{x^2 - 2\,x - 1}{(x^2 + 1)^2} \qquad (x \in]0, +\infty[\setminus \{1\}).$$

Ezt értékeljük ki a lehetséges szélsőértékhelyeken, ami nekünk most

$$f''(x_1) = f''(1) = -\frac{1}{2} < 0$$

Ez azt jelenti, hogy az $x_1 = \frac{1}{2}$ pont lokális maximumhely. □



18. ábra. Az $\operatorname{arctg}(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$ függvény

(q) $\cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x)$

(r) $\dfrac{e^x}{\sin(x-a)}$

4. Feladat. *Végezzünk teljes függvényvizsgálatot az alábbi függvényekre.*

(a) $x^2 + x - 6$

Megoldás. *Tekintsük az*

$$f(x) = x^2 + x - 6$$

módon megadott f függvényt.

*Ekkor az f függvény **értelmezési tartománya** $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$.*

*Az f függvény **nem páros**, hiszen*

$$f(x) = x^2 + x - 6 \neq x^2 - x - 6 = f(-x),$$

*az f függvény **nem páratlan**, ugyanis*

$$f(x) = x^2 + x - 6 \neq -x^2 + x + 6 = -f(-x),$$

*továbbá f **nem periodikus**, hiszen*

$$f(x+p) - f(x) = 2\,p\,x + p^2 + p \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ami pontosan akkor nulla minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, ha $p = 0$.

*Az f függvénynek az $x_1 = -3$ és $x_2 = 2$ pontokban van **zérushelye**.*

Mivel $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$, azért $\mathscr{D}_f$-nek két határpontja van: $+\infty$ és $-\infty$, ezekben a határértékek

$$\lim_{x\to+\infty}(x^2 + x - 6) = +\infty \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to-\infty}(x^2 + x - 6) = +\infty.$$

Az f függvény a teljes értelmezési tartományán folytonos, sőt akárhányszor differenciálható, a differenciálhányados-függvényei pedig

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x+1 \\ f''(x) &= 2 & (x \in \mathbb{R})\,. \\ f^{(k)}(x) &= 0 \quad \textit{(tetszőleges } k \geq 3 \textit{ esetén)} \end{aligned}$$

A monotonitás vizsgálatához tekintsük az f függvény elsőrendű deriváltját.

$$\begin{aligned} f'(x) &\geq 0 \\ 2x+1 &\geq 0 \\ x &\geq -\frac{1}{2} \\ x &\in [-1/2, +\infty[. \end{aligned}$$

Így az f függvény az $[1/2, +\infty[$ intervallumon monoton növekedő, míg a $]-\infty, -1/2[$ intervallumon monoton csökkenő.

Az f függvénynek azokban a pontokban lehetnek szélsőértékhelyei, ahol az elsőrendű deriváltja eltűnik.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 2x+1 &= 0 \\ x &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Így, ha az f függvénynek van szélsőértékhelye, akkor az csak az $x_0 = \frac{1}{2}$ pontban lehet. Mivel

$$f''\left(-\frac{1}{2}\right) = 2 > 0,$$

*ezért ez a pont egy **lokális minimumhely**. A minimum értéke pedig $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{25}{4}$.*

A konvexitás vizsgálatához az f függvény másodrendű deriváltját kell tekintenünk. Mivel

$$f''(x) = 2 \geq 0 \qquad (x \in \mathbb{R})\,,$$

*ezért az f függvény a teljes értelmezési tartományán **konvex**.*

A monotonitásnál, a határérték-tulajdonságnál leírtakat egybevetve, a Bolzano-féle középértéktétel miatt (lásd a Kalkulus előadásjegyzet 4.1.1 Következményét) az f függvény értékkészlete $\mathscr{R}_f = [-25/4, +\infty[$.

□

(b) $2x^2 - 3x - 4$

(c) $5x^3 - 4x^4$

Megoldás. *Tekintsük az*

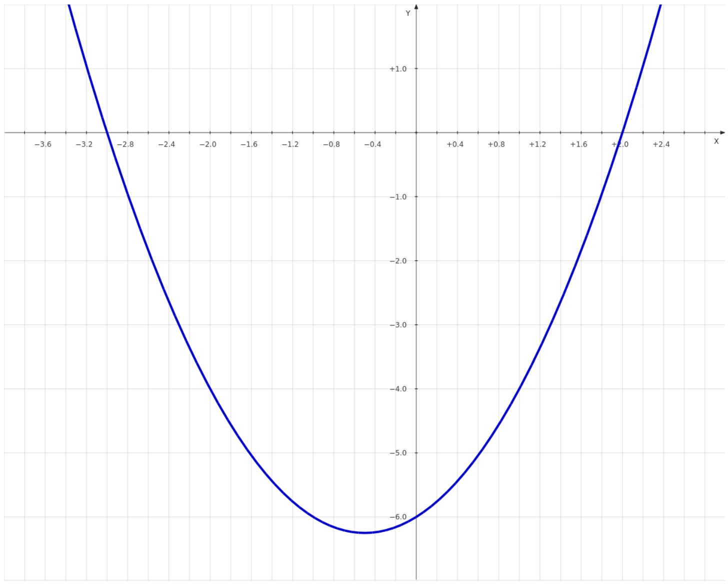
$$f(x) = 5x^3 - 4x^4$$

módon megadott f függvényt.

*Ekkor az f függvény **értelmezési tartománya** $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$.*

*Az f függvény **nem páros**, hiszen*

$$f(x) = 5x^3 - 4x^4 \neq -4\,x^4 - 5\,x^3 = f(-x),$$



19. ábra. Az $x^2 + x - 6$ függvény

*az f függvény **nem páratlan**, ugyanis*

$$f(x) = 5x^3 - 4x^4 \neq 4\,x^4 + 5\,x^3 = -f(-x),$$

*továbbá f **nem periodikus**, hiszen*

$$f(x+p) - f(x) = -16\,p\,x^3 - 24\,p^2\,x^2 + 15\,p\,x^2 - 16\,p^3\,x + 15\,p^2\,x - 4\,p^4 + 5\,p^3 \qquad (x \in \mathbb{R})\,,$$

ami pontosan akkor nulla minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, ha $p = 0$.

*Az f függvénynek az $x_1 = 0$ és $x_2 = \dfrac{5}{4}$ pontokban van **zérushelye**, hiszen*

$$f(x) = 5x^3 - 4x^4 = x^3\,(5 - 4x) \qquad (x \in \mathbb{R})\,.$$

Mivel $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$, azért $\mathscr{D}_f$-nek két határpontja van: $+\infty$ és $-\infty$, ezekben a határértékek

$$\lim_{x\to+\infty}(5x^3 - 4x^4) = -\infty \qquad \textit{és} \qquad \lim_{x\to-\infty}(5x^3 - 4x^4) = -\infty.$$

Az f függvény a teljes értelmezési tartományán folytonos, sőt akárhányszor differenciálható, a differenciálhányados-függvényei pedig

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 15\,x^2 - 16\,x^3\\
f''(x) &= 30\,x - 48\,x^2\\
f'''(x) &= 30 - 96\,x\\
f^{(iv)}(x) &= -96\\
f^{(k)}(x) &= 0 \quad \textit{(tetszőleges } k \geq 5 \textit{ esetén)}
\end{aligned}$$

A monotonitás vizsgálatához tekintsük az f függvény elsőrendű deriváltját.

$$\begin{aligned}
f'(x) &\geq 0\\
15\,x^2 - 16\,x^3 &\geq 0\\
x^2(15 - 16x) &\geq 0 \quad \textit{(osszuk el mindkét oldalt } x^2\textit{-nal, ami nemnegatív.)}\\
15 - 16x &\geq 0\\
\frac{15}{16} &\geq 0\\
x &\in \;]-\infty, -15/16].
\end{aligned}$$

Így az f függvény az $]-\infty, -15/16]$ *intervallumon monoton növekedő, míg a* $]-15/16, +\infty[$ *intervallumon monoton csökkenő.*

Az f függvénynek azokban a pontokban lehetnek szélsőértékhelyei, ahol az elsőrendű deriváltja eltűnik.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 15\,x^2 - 16\,x^3 &= 0 \\ x^2(15-16x) &= 0. \end{aligned}$$

Így, ha az f függvénynek van szélsőértékhelye, akkor az csak az $x_1 = 0$ *és az* $x_2 = -\dfrac{15}{16}$ *pontok valamelyikében lehet.*

Mivel

$$f''\left(-\frac{15}{16}\right) = -\frac{1125}{16} < 0,$$

ezért ez a pont egy ***lokális maximumhely****. A maximum értéke pedig* $f\left(-\dfrac{15}{16}\right) = -\dfrac{118125}{16384}$*. Azonban*

$$\begin{aligned} f''(0) &= 0 \\ f'''(0) &= 30 \neq 0, \end{aligned}$$

ami már nem nulla. Viszont az első, el nem tűnő derivált rendje $k = 3$*, ami páratlan, így az* $x_1 = 0$ *pont nem szélsőértékhely.*

A konvexitás vizsgálatához az f függvény másodrendű deriváltját kell tekintenünk. Mivel

$$f''(x) = 30\,x - 48\,x^2 \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ezért

$$\begin{aligned} f''(x) &\geq 0 \\ 30\,x - 48\,x^2 &\geq 0 \\ x &\in \left[0, \tfrac{5}{8}\right], \end{aligned}$$

az f függvény

- *a* $]-\infty, 0[$ *intervallumon konkáv;*
- *a* $\left[0, \frac{5}{8}\right]$ *intervallumon konvex;*
- *az* $]5/8, +\infty]$ *intervallumon konkáv.*

A monotonitásnál, a határérték-tulajdonságnál leírtakat egybevetve, a Bolzano-féle középértéktétel miatt (lásd a Kalkulus előadásjegyzet 4.1.1 Következményét) az f függvény értékkészlete

$$\mathscr{R}_f =]-\infty, -118125/16384].$$

□

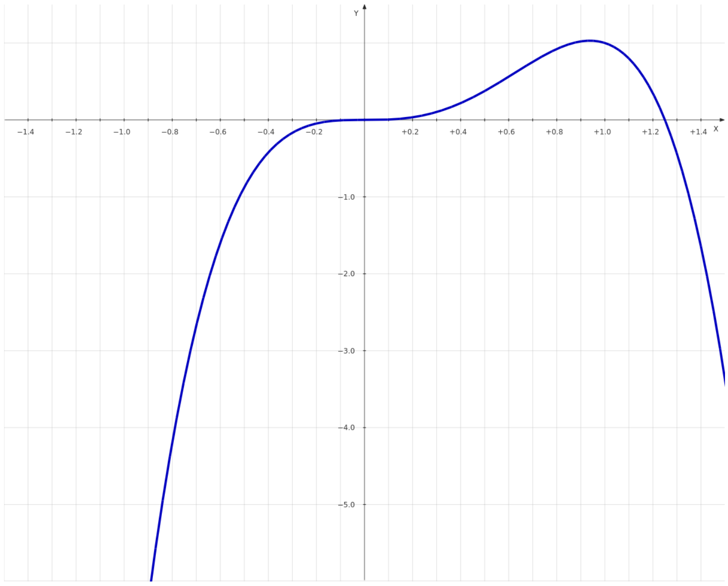
(d) $x^3 - 5x^2$

(e) $2x^3 - 6x^2 - 2x + 6$

(f) $x + \dfrac{1}{x}$

(g) $x^2 + \dfrac{1}{x^2}$

(h) $\dfrac{3x-5}{x-2}$



20. ábra. Az $5x^3 - 4x^4$ függvény

(i) $\sqrt{2-x}$

Megoldás. *Tekintsük az*

$$f(x) = \sqrt{2-x}$$

módon megadott f függvényt.

*Ekkor az f függvény **értelmezési tartománya** $\mathscr{D}_f =]-\infty, 2]$.*

*Az f függvény paritásáról ebben az esetben nincs értelme beszélni, hiszen a szóban forgó függvény értelmezési tartománya nem szimmetrikus az origóra, azaz, nem igaz az, hogy minden $x \in \mathscr{D}_f$ esetén $-x \in \mathscr{D}_f$ is teljesül. Továbbá f **nem periodikus**, hiszen*

$$f(x+p) - f(x) = \sqrt{-x-p+2} - \sqrt{2-x} \qquad (x \in]-\infty, 2])\,,$$

ami pontosan akkor nulla minden olyan $x \in \mathscr{D}_f$ esetén, melyre $x + p \in \mathscr{D}_f$ ha $p = 0$.

*Az f függvénynek az $x_1 = 2$ pontban van **zérushelye**, hiszen*

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ \sqrt{2-x} &= 0 \\ x &= 2. \end{aligned}$$

Mivel $\mathscr{D}_f =]-\infty, 2]$, azért $\mathscr{D}_f$-nek két határpontja van: $+\infty$ és 2, ezekben a határértékek

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{2-x} = +\infty \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to 2} \sqrt{2-x} = 0.$$

Az f függvény a teljes értelmezési tartományán folytonos, sőt az értelmezési tartománya belső pontjaiban akárhányszor differenciálható, a differenciálhányados-függvényei pedig

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{2\sqrt{2-x}} \\ f''(x) &= -\frac{1}{4\,(2-x)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

A monotonitás vizsgálatához tekintsük az f függvény elsőrendű deriváltját.

$$\begin{aligned} f'(x) &\geq 0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{2-x}} &\geq 0 && \text{\scriptsize (szorozzuk meg mindkét oldat (-1)-gyel, ekkor megfordul a egyenlőtlenség.)} \\ \frac{1}{2\sqrt{2-x}} &\leq 0 && \text{\scriptsize (használjuk, hogy egy negatív valós szám reciproka is negatív.)} \\ 2\sqrt{2-x} &\leq 0, \end{aligned}$$

ami lehetetlen. Így az f függvény a teljes értelmezési tartományán ***monoton csökkenő***.

Az f függvénynek azokban a pontokban lehetnek szélsőértékhelyei, ahol az elsőrendű deriváltja eltűnik.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 0 \\
-\frac{1}{2\sqrt{2-x}} &= 0 \\
\sqrt{2-x} &= 0.
\end{aligned}
$$

A fenti egyenlet azonban egyetlen olyan pontban sem teljesül, ami a $\mathscr{D}_f$ halmaz belsejében, azaz a $]-\infty, 2[$ halmazhoz tartozik. Így az f függvénynek nincs a $]-\infty, 2[$ halmazon lokális szélsőértékhelye.

A konvexitás vizsgálatához az f függvény másodrendű deriváltját kell tekintenünk. Ebben az esetben

$$
f''(x) = -\frac{1}{4\,(2-x)^{\frac{3}{2}}} \qquad (x \in \mathbb{R}),
$$

ezért

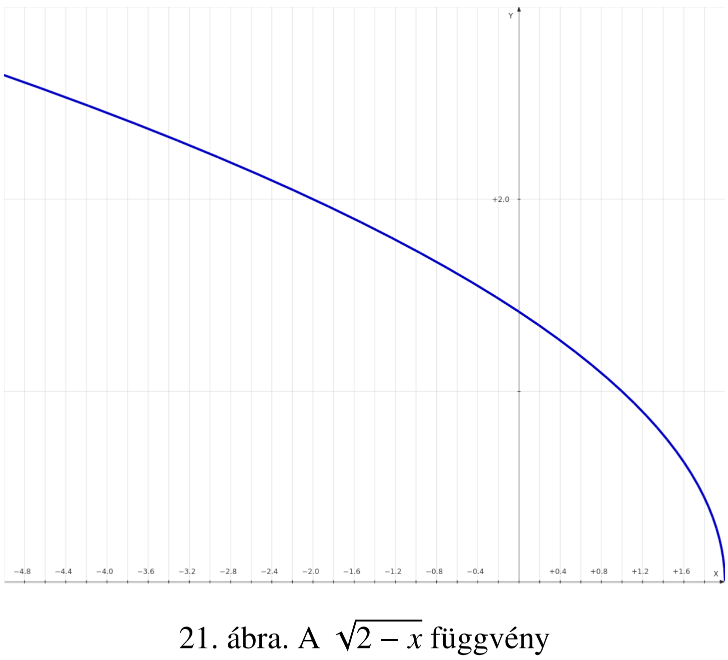
$$
\begin{aligned}
\sqrt{2-x} &\geq 0 && \textit{(ezt emeljük a harmadikonra, az egyenlőtlenség változatlan marad.)} \\
\sqrt{2-x}^{\,3} &\geq 0 && \textit{(térjünk át hatványkitevős alakra.)} \\
(2-x)^{\frac{3}{2}} &\geq 0 && \textit{(használjuk, hogy egy pozitív valós szám reciproka is pozitív.)} \\
(2-x)^{-\frac{3}{2}} &\geq 0 && \textit{(szorozzuk meg mindkét oldalt } -\tfrac{1}{4}\textit{-del, ekkor az egyenlőtlenség megfordul.)} \\
-\frac{1}{4}(2-x)^{-\frac{3}{2}} &\leq 0 \\
f''(x) &\leq 0
\end{aligned}
$$

teljesül minden $x \in \mathscr{D}_f$ esetén, vagyis az f függvény az értelmezési tartományán ***konkáv***.

A monotonitásnál, a határérték-tulajdonságnál leírtakat egybevetve, a Bolzano-féle középértéktétel miatt (lásd a Kalkulus előadásjegyzet 4.1.1 Következményét) az f függvény ***értékkészlete***

$$
\mathscr{R}_f = [2, +\infty[.
$$

□



21. ábra. A $\sqrt{2-x}$ függvény

(j) xe^x

Megoldás. *Tekintsük az*

$$f(x) = xe^x$$

módon megadott f függvényt.

*Ekkor az f függvény **értelmezési tartománya** $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$.*

*Az f függvény **nem páros**, ugyanis*

$$f(x) = xe^x \neq -xe^{-x} = f(-x)$$

*és **nem páratlan**, hiszen*

$$f(x) = xe^x \neq xe^{-x} = -f(-x)$$

*Továbbá f **nem periodikus**, hiszen*

$$f(x+p) - f(x) = (e^p\, x - x + p\, e^p)\; e^x \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ami pontosan akkor nulla, ha $p = 0$.

*Az f függvénynek az $x_1 = 0$ pontban van **zérushelye**, hiszen*

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ xe^x &= 0 \quad \text{\tiny (osszuk el mindkét oldalt } e^x\text{-szel, ami pozitív.)} \\ x &= 0. \end{aligned}$$

Mivel $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$, ezért $\mathscr{D}_f$-nek két határpontja van: $-\infty$ és $+\infty$, ezekben a határértékek

$$\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0 \qquad \textit{és} \qquad \lim_{x\to+\infty} xe^x = +\infty.$$

Az f függvény a teljes értelmezési tartományán folytonos, sőt akárhányszor differenciálható, a differenciálhányados-függvényei pedig

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x+1)\; e^x \\ f''(x) &= (x+2)\; e^x \\ f^{(k)}(x) &= (x+k)e^x \quad (k \in \mathbb{N}) \quad \text{\tiny (ez teljes indukcióval igazolható.)} \end{aligned}$$

A monotonitás vizsgálatához tekintsük az f függvény elsőrendű deriváltját.

$$\begin{aligned} f'(x) &\geq 0 \\ (x+1)\; e^x &\geq 0 \quad \text{\tiny (szorozzuk meg mindkét oldalt } e^x\text{-szel, ami pozitív.)} \\ x+1 &\leq 0 \quad \text{\tiny (használjuk, hogy egy negatív valós szám reciproka is negatív.)} \\ x &\leq -1. \end{aligned}$$

Ez az jelenti, hogy az f függvény

- *a $[-1, +\infty[$ intervallumon **monoton növekedő;***
- *a $]-\infty, -1[$ intervallumon **monoton csökkenő**.*

Az f függvénynek azokban a pontokban lehetnek szélsőértékhelyei, ahol az elsőrendű deriváltja eltűnik.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ (x+1)e^x &= 0 \quad \text{\tiny (szorozzuk meg mindkét oldat } e^x\text{-szel, ami pozitív.)} \\ x+1 &= 0 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy ha az f függvénynek van szélsőértéke, akkor az csak az $x_0 = -1$ pontban lehet. Ahhoz, hogy el tudjuk dönteni, hogy ez a pont szélsőértékhely-e egyáltalán és ha igen, akkor milyen, tekintsük a másodrendű deriváltat. Ebben az esetben

$$f''(x) = (x+2)e^x \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ami a szóban forgó pontban kiértékelve az kapjuk, hogy

$$f''(-1) = (-1+2)e^{-1} = \frac{1}{e} > 0,$$

ami mutatja, hogy az $x_0 = -1$ pont egy lokális minimumhely, a minimum értéke pedig $f(-1) = -\frac{1}{e}$.
A konvexitás vizsgálatához az f függvény másodrendű deriváltját kell tekintenünk. Ebben az esetben

$$f''(x) = (x+2)e^x \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ezért

$$\begin{aligned} f''(x) &\geq 0 \\ (x+2)e^x &\geq 0 \quad \text{\scriptsize (osszuk el mindkét oldalt } e^x\text{-szel, ami pozitív.)} \\ x+2 &\geq 0 \\ x &\geq -2 \\ x &\in [-2, +\infty[. \end{aligned}$$

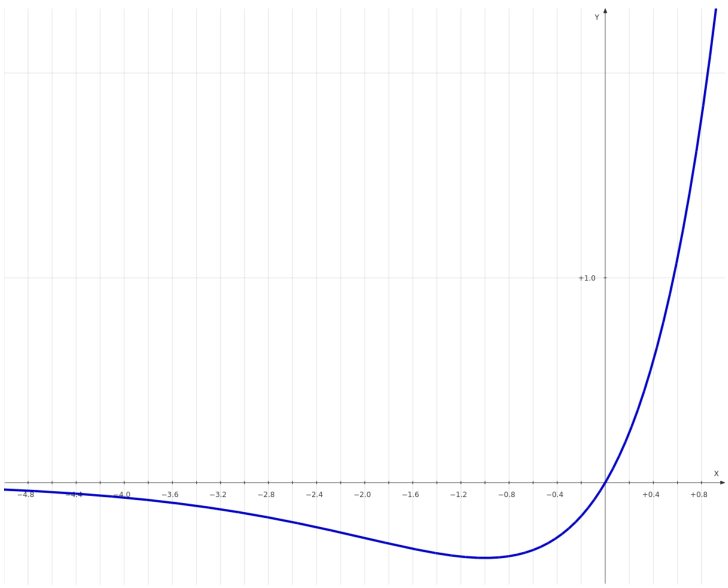
Ez azt jelenti, hogy az f függvény

- *a $[-2, +\infty[$ intervallumon konvex;*
- *a $]-\infty, -2[$ intervallumon konkáv.*

A monotonitásnál, a lokális szélsőértékhelyeknél, illetve a határérték-tulajdonságnál leírtakat egybevetve, a Bolzano-féle középértéktétel miatt (lásd a Kalkulus előadásjegyzet 4.1.1 Következményét) az f függvény ***értékkészlete***

$$\mathscr{R}_f = [-1/e, +\infty[.$$

□



22. ábra. Az $x \exp(x)$ függvény

(k) $x \ln(x)$

(l) $x + \operatorname{arctg}(x)$

(m) $2x - \operatorname{tg}(x)$

(n) e^{-x^2}

(o) $\dfrac{x}{(1-x)^2(1+x)}$

Megoldás. *Tekintsük az*

$$f(x) = \frac{x}{(1-x)^2(1+x)}$$

módon megadott f függvényt.

*Ekkor az f függvény **értelmezési tartománya** $\mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.*

*Az f függvény **nem páros**, ugyanis*

$$f(x) = \frac{x}{(1-x)^2(1+x)} \neq -\frac{x}{(1-x)\,(x+1)^2} = f(-x)$$

*és **nem páratlan**, hiszen*

$$f(x) = \frac{x}{(1-x)^2(1+x)} \neq \frac{x}{(1-x)\,(x+1)^2} = -f(-x)$$

*Továbbá f **nem periodikus**, hiszen*

$$f(x+p) - f(x) = -\frac{p\left(2\,x^3 + 3\,p\,x^2 - x^2 + p^2\,x - p\,x - 1\right)}{(x-1)^2\,(x+1)\,(x+p-1)^2\,(x+p+1)} \qquad \left(x \in \mathscr{D}_f\right),$$

ami pontosan akkor nulla, ha $p = 0$.

*Az f függvénynek az $x_1 = 0$ pontban van **zérushelye**, hiszen*

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ \frac{x}{(1-x)^2(1+x)} &= 0 \quad \text{\scriptsize (szorozzuk meg mindkét oldalt a nevezővel)} \\ x &= 0. \end{aligned}$$

Mivel $\mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, ezért $\mathscr{D}_f$-nek négy határpontja van: $-\infty$, $+\infty$ -1 és 1, ezekben a határértékek

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{(1-x)^2(1+x)} = \frac{x}{x^3 - x^2 - x + 1} = 0 \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{(1-x)^2(1+x)} = \frac{x}{x^3 - x^2 - x + 1} = 0,$$

továbbá,

$$\lim_{x\to-1-} \frac{x}{(1-x)^2(1+x)} = \lim_{x\to-1-} \frac{x}{x^3 - x^2 - x + 1} = +\infty$$

és

$$\lim_{x\to-1+} \frac{x}{(1-x)^2(1+x)} = \lim_{x\to-1+} \frac{x}{x^3 - x^2 - x + 1} = -\infty,$$

ami mutatja, hogy a -1 pontban nem létezik az f függvénynek a határértéke, továbbá,

$$\lim_{x\to1-} \frac{x}{(1-x)^2(1+x)} = \lim_{x\to1-} \frac{x}{x^3 - x^2 - x + 1} = +\infty$$

és

$$\lim_{x\to1+} \frac{x}{(1-x)^2(1+x)} = \lim_{x\to1+} \frac{x}{x^3 - x^2 - x + 1} = +\infty.$$

Az f függvény a teljes értelmezési tartományán folytonos, sőt akárhányszor differenciálható, a differenciálhányados-függvényei pedig

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{2\,x^2+x+1}{(x-1)^3\,(x+1)^2} \\ f''(x) &= \frac{2\left(3\,x^3+3\,x^2+5\,x+1\right)}{(x-1)^4\,(x+1)^3}. \end{aligned}$$

A monotonitás vizsgálatához tekintsük az f függvény elsőrendű deriváltját.

$$\begin{aligned} f'(x) &\geq 0 \\ -\frac{2\,x^2+x+1}{(x-1)^3\,(x+1)^2} &\geq 0 \quad \text{\scriptsize (szorozzuk meg mindkét oldalt } (x-1)^4(1+x)^2\text{-szel, ami pozitív.)} \\ -(x-1)\left(2\,x^2+x+1\right) &\leq 0 \quad \text{\scriptsize (szorozzuk meg mindkét oldalt } \left(2\,x^2+x+1\right)\text{-gyel, ami pozitív.)} \\ -(x-1) &\geq 0 \\ x-1 &\leq 0 \\ x &\leq 1 \\ x &\in \,]-\infty,-1[\cup]-1,1[. \end{aligned}$$

Ez az jelenti, hogy az f függvény

- *a $[-\infty,-1[$ intervallumon* ***monoton növekedő;***
- *a $[-1,1[$ intervallumon* ***monoton növekedő;***
- *a $]1,+\infty[$ intervallumon* ***monoton csökkenő.***

Az f függvénynek azokban a pontokban lehetnek szélsőértékhelyei, ahol az elsőrendű deriváltja eltűnik.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ -\frac{2\,x^2+x+1}{(x-1)^3\,(x+1)^2} &= 0 \quad \text{\scriptsize (szorozzuk meg mindkét oldalt a nevezővel)} \\ 2\,x^2+x+1 &= 0. \end{aligned}$$

Ennek az egyenletnek azonban (a $\mathscr{D}_f$ halmazon) nincsen megoldása, így az f függvénynek nincsen lokális szélsőértékhelye.

A konvexitás vizsgálatához az f függvény másodrendű deriváltját kell tekintenünk. Ebben az esetben

$$f''(x)=\frac{2\left(3\,x^3+3\,x^2+5\,x+1\right)}{(x-1)^4\,(x+1)^3} \qquad (x\in\mathbb{R})\,,$$

ezért

$$\begin{aligned} f''(x) &\geq 0 \\ \frac{2\left(3\,x^3+3\,x^2+5\,x+1\right)}{(x-1)^4\,(x+1)^3} &\geq 0 \quad \text{\scriptsize (szorozzuk meg mindkét oldalt } (x-1)^4\,(x+1)^4\text{-nel , ami pozitív.)} \\ 2\left(3\,x^3+3\,x^2+5\,x+1\right)(x+1) &\geq 0 \\ \left(3\,x^3+3\,x^2+5\,x+1\right)(x+1) &\geq 0 \\ 6\,x^4+12\,x^3+16\,x^2+12\,x+2 &\geq 0. \end{aligned}$$

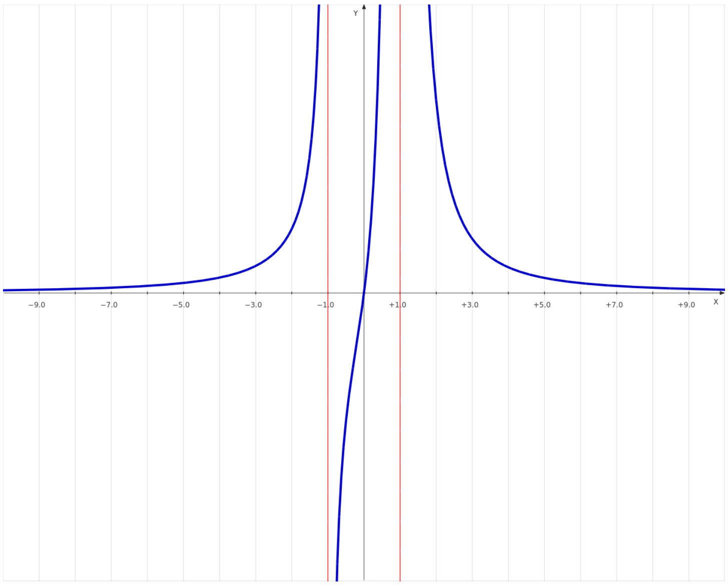
A fenti negyedfokú polinomnak két valós gyöke van, $x_1 = 1$ és $x_2 = \frac{\left(2\,\sqrt{17}+2\right)^{\frac{2}{3}}-\left(2\,\sqrt{17}+2\right)^{\frac{1}{3}}-4}{3\left(2\,\sqrt{17}+2\right)^{\frac{1}{3}}}$. Ez azt jelenti, hogy az f függvény

- *a $]-\infty,-1[$ intervallumon konvex;*

- *a* $]-1, x_2[$ *intervallumon konvex;*
- *az* $]x_2, 1[$ *intervallumon konkáv;*
- *az* $]1, +\infty[$ *intervallumon konvex.*

*A monotonitásnál, a lokális szélsőértékhelyeknél, illetve a határérték-tulajdonságnál leírtakat egybevetve, a Bolzano-féle középértéktétel miatt (lásd a Kalkulus előadásjegyzet 4.1.1 Következményét) az f függvény **értékkészlete***

$$\mathscr{R}_f = \mathbb{R}.$$



23. ábra. Az $\dfrac{x}{(1-x)^2(1+x)}$ függvény

$\square$

(p) $\sin(x)\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$