5. Polinomok, rekurziók

5.1. Írjuk fel az alábbi polinomok gyöktényezős felbontását $\mathbb{R}$ felett!

(a) $2x^2 - 2x - 12$

(b) $-x^3 - 3x^2 + 4x$

(c) $4x^2 - 4x - 3$

(d) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

(e) $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

(f) $x^3 - 3x^2 - x + 3$

(g) $x^4 - 16$

(h) $x^4 - 2x^2 + 1$

5.2. Legyen $p(x)$ egy olyan 11-edfokú valós együtthatós polinom, melynek a 0 egyszeres, a $\sqrt{2}$, a $2+i$ és az $1-\sqrt{3}i$ kétszeres gyöke. Adja meg a p összes gyökét!

5.3. Írjunk fel olyan minimális fokszámú valós együtthatós polinomot, melynek

(a) a -3 kétszeres, az 1 egyszeres gyöke;

(b) az 5 és az i gyöke;

(c) a 2 és az $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$ gyöke;

(d) az i kétszeres gyöke.

5.4. Adjuk meg azt a minimális fokszámú p polinomot, melynek a -1, a 2 és a 3 gyöke, és $p(0) = 4$.

5.5. Horner-algoritmus segítségével határozzuk meg az alábbi helyettesítési értékeket!

(a) $p(x) = 2x^5 - 3x^4 + x^3 - 5x^2 + 2x - 4$, $p(2) =?$, $p(-1) =?$

(b) $p(x) = 2x^6 - 3x^4 + x^2 + 2x + 1$, $p(-2) =?$

(c) $p(x) = x^5 - 3x^4 + 4x^2 + 3x + 2$, $p(-2) =?$, $p(3) =?$

(d) $p(x) = 6x^3 + 9x^2 - 5x - 4$, $p\left(-\frac{1}{2}\right) =?$

5.6. Végezzük el a kijelölt osztásokat!

(a) $(2x^3 - x^2 - 5x - 2) : (x - 2)$

(b) $(2x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 14x - 6) : (x - 3)$

(c) $(-3x^3 + 48x) : (x - 4)$

(d) $(6x^3 + 9x^2 - 5x - 4) : (2x + 1)$

(e) $(x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 11x - 6) : (x + 1)^2$

(f) $(6x^4 - 7x^3 + 5x^2 - 2x) : (2x^2 - x + 1)$

5.7. Végezzük el az alábbi polinomokon a maradékos osztást!

(a) $2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6$, $x^2 - 3x + 1$

(b) $2x^5 - 5x^3 - 8x$, $x + 3$

(c) $x^5 - 3x^4 + 1$, $x^2 + x + 1$

(d) $x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1$, $x^3 + x^2 - x - 1$

5.8. Hányszoros gyöke lesz az $x_0 = -1$ a

$$p(x) = 2x^5 + 8x^4 + 11x^3 + 5x^2 - x - 1$$

polinomnak?

5.9. Oldjuk meg az alábbi rekurziókat! (Adjunk explicit képletet az alábbi, rekurzióval megadott sorozatok általános tagjára.)

(a) $a_1 = 1$, $a_2 = 5$ és $a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2}$, ha $n \geq 3$

(b) $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ és $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}$, ha $n \geq 3$

(c) $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ és $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$, ha $n \geq 3$

5.10. Hányféleképpen mehetünk fel egy n lépcsőfokból álló lépcsőn, ha egyszerre 1, vagy 2 lépcsőfokot léphetünk?

<u>5.11</u>. Hányféleképpen fedhetünk le egy $2 \times n$-es táblát 1×2-es lapokkal?

5.12. Hány olyan n hosszúságú, az 1, 2 és 3 számjegyekből álló karaktersorozat van, melyben nem áll egymás mellett két 1-es?

<u>5.13</u>. Hány olyan részhalmaza van az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaznak, mely nem tartalmaz szomszédos számokat?

5.14.* Felezzük meg a $[0, 1]$ intervallumot, jelölje f_1 a felezőpontját. A baloldali részintervallum felezőpontját jelölje f_2. A legutóbb megfelezett intervallum jobboldali részintervallumának felezőpontját jelölje f_3. Folytassuk az algoritmust, mindig felváltva választva a jobb- és baloldali részintervallumot. Hova tart f_n, ha $n \to \infty$?