Valós függvények differenciálszámítása I.

Differenciálhatóság

1. Definíció. *Legyen* $]a,b[\subset \mathbb{R}$ *valódi intervallum, és* $f\colon\,]a,b[\to \mathbb{R}$ *egy valós függvény. Ekkor a*

$$\varphi(x,x_0)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \qquad (x\neq x_0,\, x,x_0\in]a,b[)$$

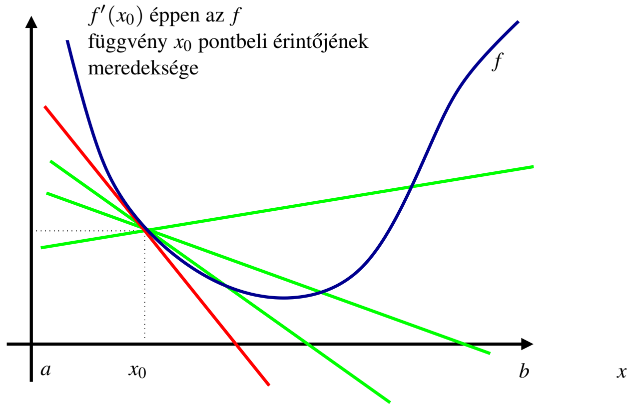
módon definiált függvényt az f *függvény* x, x_0 *pontokhoz tartozó* ***differenciahányados függvény****ének nevezzük.*

1. Megjegyzés (A differenciahányados függvény geometriai interpretációja). *Az* f *függvény* x, x_0 *pontokhoz tartozó* $\varphi(x,x_0)$ *differenciahányados függvénye éppen az* f *függvény görbéjének* $(x, f(x))$ *és* $(x_0, f(x_0)))$ *pontjaihoz tartozó* ***szelő meredeksége****.*

2. Definíció. *Legyen* $I\subset\mathbb{R}$ *nemüres, nyílt intervallum,* $x_0\in I$*. Azt mondjuk, hogy az* $f\colon I\to\mathbb{R}$ *függvény az* $x_0\in I$ *pontban* ***differenciálható****, ha létezik és véges az alábbi határérték*

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

2. Megjegyzés (A differenciálhányados geometriai interpretációja). $f'(x_0)$ *éppen az* f *függvény görbéjéhez az* x_0 *pontban húzott* ***érintő meredeksége****.*



3. Definíció. *Legyen* $]a,b[\subset\mathbb{R}$ *valódi intervallum, ha az* $f\colon\,]a,b[\to\mathbb{R}$ *függvény differenciálható az* $x_0\in]a,b[$ *pontban, akkor az*

$$y=f'(x_0)\cdot(x-x_0)+f(x_0)$$

egyenletű egyenest az f *függvény görbéje* $(x_0, f(x_0))$*-beli* ***érintőjé****nek nevezzük.*

1. Példa. *Legyen* $c\in\mathbb{R}$ *egy rögzített konstans és* $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$*,* $f(x)=c$*. Ekkor minden* $x_0\in\mathbb{R}$ *esetén*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{c-c}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}0=0.$$

Tehát $f'(x)=0\ (x\in\mathbb{R})$*.*

2. Példa. *Tekintsük az* $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$*,* $f(x)=x$ *függvényt, ekkor tetszőleges* $x_0\in\mathbb{R}$ *esetén*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{x-x_0}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}1=1,$$

azaz $f'(x)=1\ (x\in\mathbb{R})$*.*

1. Tétel (Differenciálhatóság ⇒ folytonosság). *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nemüres, nyílt intervallum, $x_0 \in I$ Ha a $f: I \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható az $x_0 \in I$ pontban, akkor f folytonos is az x_0 pontban.*

3. Megjegyzés (Folytonosság ⇏ differenciálhatóság). *Az előző tétel megfordítása* **nem** *igaz, ugyanis az $f(x) = |x|$ függvény folytonos a 0 pontban, de ott nem differenciálható, hiszen nem létezik a*

$$\lim_{x\to 0} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$$

határérték.

2. Tétel (Differenciálhatóság és műveletek). *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nemüres, nyílt intervallum és $x_0 \in I$. Ha az $f, g: I \to \mathbb{R}$ függvények differenciálhatóak az $x_0 \in I$ pontban, akkor az $f + g$, $\lambda \cdot f$ ($\lambda \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstans), $f \cdot g$, és ha $g(x) \neq 0$ teljesül az x_0 pont valamely környezetében, akkor az $\frac{f}{g}$ függvény is differenciálható az x_0 pontban, továbbá*

(i)

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

(ii)

$$(\lambda \cdot f)'(x_0) = \lambda \cdot f'(x_0)$$

(iii)

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$$

(iv)

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)\, g(x_0) - f(x_0)\, g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

3. Tétel (Az összetett függvény differenciálhatósága). *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nemüres, nyílt intervallum, $x_0 \in I$ és $g: I \to \mathbb{R}$ és $f: g(I) \to \mathbb{R}$ olyan függvények, hogy g differenciálható az x_0 pontban, f pedig differenciálható a $g(x_0)$ pontban. Ekkor az $f \circ g$ függvény differenciálható az x_0 pontban, továbbá*

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

4. Tétel (Az inverz függvény differenciálhatósága). *Legyen $]a, b[\subset \mathbb{R}$ valódi intervallum, ha az $f:]a, b[\to \mathbb{R}$ függvény szigorúan monoton, folytonos $]a, b[$-n, és létezik $f'(x_0)$ és az nem nulla, akkor az f^{-1} függvény differenciálható az $f(x_0)$ pontban és*

$$\left(f^{-1}\right)'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)},$$

azaz

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Néhány elemi függvény differenciálhányados függvénye

$f(x)$	$f'(x)$
c	0
x	1
x^μ $(\mu \neq 0)$	$\mu x^{\mu-1}$
$\exp(x)$	$\exp(x)$
a^x $(a > 0)$	$a^x \ln(a)$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\mathrm{tg}(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$

$f(x)$	$f'(x)$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\mathrm{arctg}(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\mathrm{arcctg}(x)$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$\tanh(x)$	$\frac{1}{\cosh^2(x)}$
$\coth(x)$	$-\frac{1}{\sinh^2(x)}$

Feladatok

1. Feladat. *A differenciálhányados definíciójából kiindulva határozzunk meg az alábbi függvények differenciálhányadosfüggvényeit.*

(a) x^2

(b) x^3

(c) $\dfrac{1}{x}$

(d) $\sqrt{x}$

(e) $\sqrt[3]{x}$.

2. Feladat. *Számítsuk ki az $f'(1), f'(2)$ és $f'(3)$ értékeket, ha*

$$f(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

3. Feladat. *Legyen $f(x) = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} - 2x$ $(x \in \mathbb{R})$. Milyen $x_0 \in \mathbb{R}$ értékekre teljesül, hogy*

(a) $f'(x_0) = 0$

(b) $f'(x_0) = -2$

(c) $f'(x_0) = 10$

(d) $f'(x_0) = -\pi$.

4. Feladat. *Határozzuk meg a következő függvények differenciálhányados függvényeit.*

(a) $4x^3$

(b) $6x^2 - x^4$

(c) $x^3 + x^2 + x + 1$

(d) $x^3 - \sqrt[3]{x} + 3x$

(e) $1 - x^3$

(f) $\sqrt[3]{x^2}$

(g) $\sqrt[7]{x^5} + \sqrt{x}$

(h) $8\sqrt[4]{x^3}$

(i) $4x^2 - 16\sqrt[4]{x^2}$

(j) $x^9 + \sqrt{x}$

(k) x^7

(l) x^{-4}

(m) $\dfrac{1}{x^6}$

(n) $\sqrt[3]{x}$

(o) $\dfrac{2}{\sqrt[4]{x^3}}$

(p) $\dfrac{x^4}{\sqrt[3]{x}}$

(q) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

(r) $\sqrt{x\sqrt[3]{x}}$

(s) $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[6]{x}}}$

(t) $\dfrac{1}{x\sqrt[3]{x}}$

(u) $\dfrac{3x\sqrt{x}}{\sqrt[5]{x}}$

5. Feladat. *Határozzuk meg az alábbi függvények differenciálhányadosfüggvényeit.*

(a) $x^{11} + x^{\frac{1}{11}} - 11x + \sqrt[110]{x}$

(b) $x^5 - 4x^{10} + 5x^6$

(c) $x^{100} + x^{10} + x + x^{-10}$

(d) $\dfrac{5}{x^2} + \dfrac{2}{\sqrt{x}} + \dfrac{3}{x^4}$

(e) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{x^2}$

(f) $\dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{x\sqrt{x}}}$

(g) $5x^6 + 4x^4 - 3x^3$

(h) $4x^7 + \dfrac{1}{x^3} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

(i) $4x^4 - x^2 + 0,96$

(j) $3x\sqrt{x} - \dfrac{5}{\sqrt[6]{x}} + 2$

(k) $\dfrac{3x^2 + 2x^3}{\sqrt{x}}$

(l) $\dfrac{5\sqrt{x} - 6\sqrt[3]{x}}{x^2}$.

6. Feladat. *Határozzuk meg az alábbi függvények differenciálhányados függvényeit.*

(a) $\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{3x^4}{2} + \dfrac{13x^5}{5} - 2x^6 + \dfrac{4x^7}{4}$

(b) $3x^{\frac{7}{3}} - 4x^{\frac{13}{4}} + 9x^{\frac{2}{3}} - 6x^{\frac{1}{2}} + 4x^{-\frac{1}{2}} - \dfrac{4}{7}x^{-\frac{7}{2}}$

(c)
$$\sqrt[3]{x^2}+\frac{2}{x^3}+\frac{x\sqrt[3]{x^2}}{5}+\frac{m}{n}\sqrt[m]{x^n}-\frac{p}{\sqrt[p]{x^q}}+\frac{1}{\sqrt{x}}$$

(d)
$$27x^3-\frac{81x^2\sqrt[3]{x^2}}{2}+12x^2+\frac{12x\sqrt[3]{x}^2}{2}$$

(e)
$$\frac{5x^2}{\sqrt[5]{x^2}}+30\sqrt[15]{x}+\frac{6}{\sqrt[3]{x}}$$

(f)
$$x\sqrt[6]{x^5}-\frac{18x^2\sqrt[6]{x^5}}{17}+\frac{3x^3\sqrt[3]{x}}{10}$$

7. Feladat. *A szorzat differenciálási szabályát alkalmazva, határozzuk meg a következő függvények differenciálhányados függvényeit.*

(a)
$$-\frac{1}{2}x(x^2-2)$$

(b)
$$(4x^2+x-1)(x^2+3x+5)$$

(c)
$$(ax-1)(x^2+5x+6)$$

(d)
$$\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}+\sqrt[5]{x}\right)$$

(e)
$$(x^2+10)\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}+3\right)$$

(f)
$$e^x\sqrt{x}$$

(g)
$$(x^2+x+1)\ln(x)$$

(h)
$$\ln(x)(e^x-2^x)$$

(i)
$$2^x\cdot x^2-10$$

(j)
$$(x-1)(x-2)(x-3)$$

(k)
$$(a+bx)(c+dx)$$

(l)
$$e^x\left(x^3-3x^2+6x-6\right)$$

(m)
$$e^{ax}\left(a\sin(x)-\cos(x)\right)$$

(n)
$$e^{ax}\left(a\cos(x)+\sin(x)\right)$$

(o)
$$x^3\left(\frac{2x^2\sqrt{x}}{11}-\frac{27x}{23\sqrt[6]{x}}+\frac{16}{3}\right)$$

(p)
$$\sqrt[3]{x}\left(\frac{x\sqrt[3]{x}}{5}+\frac{18x\sqrt{x}}{11}+\frac{27\sqrt[6]{x^5}}{7}\right)$$

(q)
$$\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^{100}}+x^{100}\right)$$

(r)
$$\left(\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}\right)(\sin(x)+\sinh(x)-1)$$

8. Feladat. *A hányados differenciálási szabályát alkalmazva, határozzuk meg a következő függvények differenciálhányados függvényeit.*

(a)
$$\frac{x-1}{x-2}$$

(b)
$$\frac{x}{x+1}$$

(c)
$$\frac{\sqrt{x}}{x+3}$$

(d)
$$\frac{1-x}{x+5}$$

(e)
$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$$

(f)
$$\frac{-x}{1-x}$$

(g)
$$\frac{1}{a^2-ax+x^2}$$

(h)
$$\frac{a^2-x^2}{a^2+x^2}$$

(i)
$$\frac{5+3x+x^2}{5-3x+x^2}$$

(j)
$$\frac{e^x}{x+1}$$

(k)
$$\frac{x}{\ln(x)}$$

(l)
$$\frac{\sqrt{x}}{e^x}$$

(m)
$$\frac{e^x}{\sqrt{x}}$$

(n)
$$e\cdot\ln(x)$$

(o)
$$e^x\ln(x)$$

(p)
$$\frac{2+\ln(x)}{x^2}$$

(q)
$$\frac{2e^x-4}{e^x+1}$$

(r)
$$\frac{e^x-a}{e^x+a}$$

(s)
$$\frac{2^x+x^2}{3^x+x^3}$$

(t)
$$\frac{\sin(x)}{\sinh(x)}$$

(u)
$$\frac{\sin(x)+\sinh(x)}{\cos(x)+\cosh(x)}$$

(v)
$$\frac{10^x+e^x+\pi^x}{\ln(x)+\sqrt{x}+\sqrt[100]{x}}$$

(w)
$$\frac{x^2-4}{\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}+1}$$

(x)
$$\frac{ax+b}{a-bx+cx^2}$$