Valós függvények folytonossága és határértéke
Előadásjegyzet

Valós függvények folytonossága

Alapfogalmak és kapcsolatuk

1. Definíció. *Legyen $D \subset \mathbb{R}$ nemüres halmaz, ekkor az $f\colon D \to \mathbb{R}$ függvényt* ***valós függvény****nek nevezzük.*

2. Definíció. *Legyen $D \subset \mathbb{R}$ nemüres halmaz, $f\colon D \to \mathbb{R}$ függvény. Azt mondjuk, hogy az f függvény* ***folytonos az*** *$x_0 \in D$* ***pontban****, ha bármely $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha $x \in D$ olyan, hogy $|x - x_0| < \delta$, akkor*

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Ha az f függvény a D halmaz minden pontjában folytonos, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény ***folytonos a*** *D* ***halmazon****.*

1. Példa. *A*

$$\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1, & ha\ x > 0 \\ 0, & ha\ x = 0 \\ -1, & ha\ x < 0 \end{cases}$$

signum függvény nem folytonos az $x_0 = 0$ pontban.

2. Példa. *Az*

$$f(x) = x \qquad (x \in \mathbb{R})$$

identikus függvény minden pontban folytonos.

3. Példa. *Az*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & ha\ x \in \mathbb{Q} \\ 0, & ha\ x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$$

úgynevezett ***Dirichlet-függvény*** *egyetlen pontban sem folytonos.*

1. Tétel (Átviteli elv). *Legyen $D \subset \mathbb{R}$ nemüres halmaz, $f\colon D \to \mathbb{R}$. Az f függvény akkor és csakis akkor folytonos az $x_0 \in D$ pontban, ha tetszőleges $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ D halmazbeli elemekből álló, x_0-hoz konvergáló sorozat esetén az $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat $f(x_0)$-hoz konvergál.*

1. Megjegyzés. *Legyen $D \subset \mathbb{R}$ nemüres halmaz, $f\colon D \to \mathbb{R}$. Az f függvény akkor és csakis akkor nem folytonos az $x_0 \in D$ pontban, ha van olyan $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ D halmazbeli elemekből álló, x_0-hoz konvergáló sorozat, melyre az $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat nem $f(x_0)$-hoz konvergál.*

Folytonosság és műveletek

2. Tétel. *Legyen $D \subset \mathbb{R}$ nemüres halmaz. Ha az $f, g : D \to \mathbb{R}$ függvények folytonosak az $x_0 \in D$ pontban, akkor*

(i) az $f + g$ függvény is folytonos az x_0 pontban;

(ii) tetszőleges $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén a λf függvény is folytonos az x_0 pontban;

(iii) az $f \cdot g$ függvény is folytonos az x_0 pontban;

(iv) ha tetszőleges $x \in D$ esetén $g(x) \neq 0$, akkor az $\dfrac{f}{g}$ függvény is folytonos az x_0 pontban.

3. Tétel (Az összetett függvény folytonossága). *Legyen $D \subset \mathbb{R}$ nemüres halmaz és legyenek $f : D \to \mathbb{R}$ és $g : f(D) \to \mathbb{R}$ adott függvények. Ha az f függvény folytonos az $x_0 \in D$ pontban, a g pedig az $f(x_0) \in f(D)$ pontban, akkor a $g \circ f$ függvény folytonos az x_0 pontban.*

4. Tétel. *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ egy korlátos intervallum, $f\colon I \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ekkor az $f(I) \subset \mathbb{R}$ halmaz is egy korlátos intervallum.*

1. Következmény (Bolzano-féle középértéktétel). *Legyenek $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ha $f(a) < f(b)$ és $\eta \in \mathbb{R}$ olyan, hogy $f(a) < \eta < f(b)$, akkor van olyan $\xi \in]a, b[$, melyre $f(\xi) = \eta$ teljesül.*

Folytonosság és monotonitás

3. Definíció. *Legyen $D \subset \mathbb{R}$ nemüres halmaz, $f\colon D \to \mathbb{R}$ függvény. Ha az f függvény az $x_0 \in D$ pontban nem folytonos, akkor azt mondjuk, hogy az $x_0 \in D$ pont az f függvénynek* ***szakadási hely**e.*

5. Tétel. *Legyen $D \subset \mathbb{R}$ nemüres halmaz, $f\colon D \to \mathbb{R}$ monoton függvény. Ekkor azoknak a pontoknak a halmaza, melyek az f függvénynek szakadási helyei, megszámlálható számosságú.*

Függvények határértéke

Alapfogalmak

4. Definíció. *Legyen $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D'$ és $\alpha \in \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek* ***az x_0 pontban a határértéke*** *α, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha $x \in D$ és $|x - x_0| < \delta$, akkor $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$. Erre a $\lim_{x \to x_0} f(x) = \alpha$ jelölést alkalmazzuk.*

5. Definíció. *Legyen $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D'$. az f függvénynek* ***az x_0 pontban a határértéke*** *$+\infty$, ha tetszőleges $K \in \mathbb{R}$ esetén létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha $x \in D$ és $|x - x_0| < \delta$, akkor $f(x) > K$. Erre a $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ jelölést alkalmazzuk.*

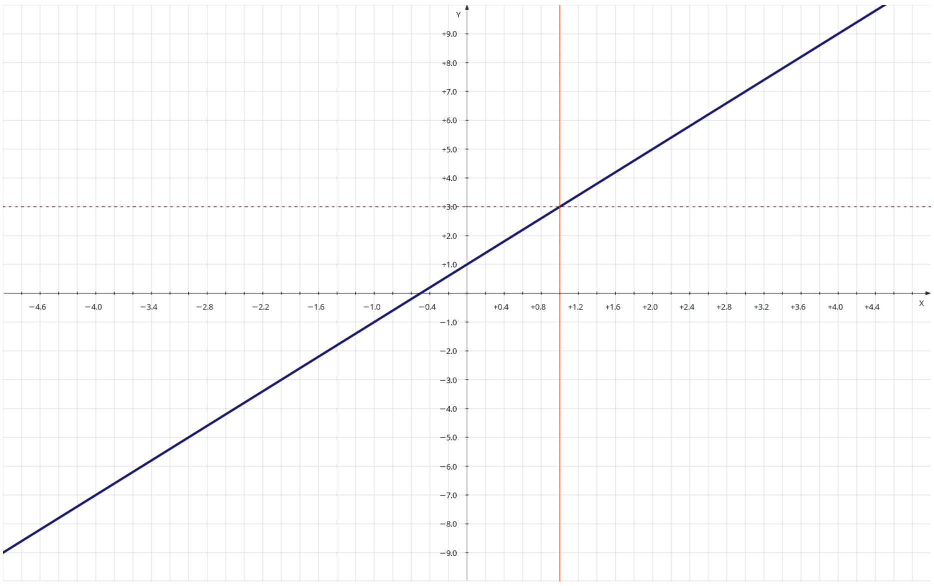
6. Definíció. *Legyen $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D'$. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek* ***az x_0 pontban a határértéke*** *$-\infty$, ha tetszőleges $k \in \mathbb{R}$ esetén létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha $x \in D$ és $|x - x_0| < \delta$, akkor $f(x) < k$. Erre a $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ jelölést alkalmazzuk.*

4. Példa. *Tekintsük az*

$$f(x) = 2x + 1 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

módon megadott $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt. Ekkor

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 3$$

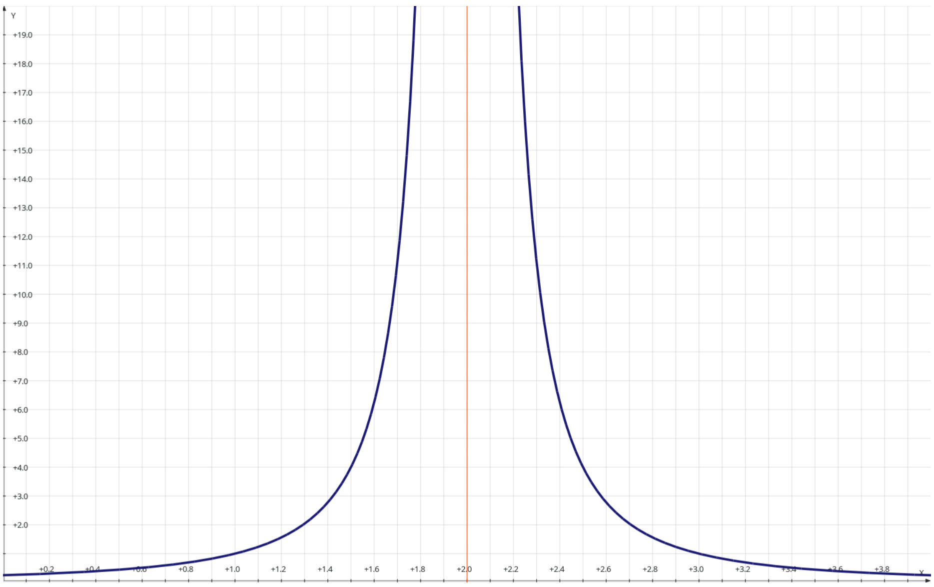


5. Példa. *Legyen*

$$f(x) = \frac{1}{(x-2)^2} \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})\,.$$

Ekkor

$$\lim_{x \to 2} f(x) = +\infty.$$



7. Definíció. *Legyen* $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$ *egy olyan halmaz, mely felülről nem korlátos,* $f : D \to \mathbb{R}$*. Azt mondjuk, hogy az* f *függvénynek* ***a*** $+\infty$***–ben a határértéke*** α*, ha tetszőleges* $\varepsilon > 0$ *esetén létezik olyan* $K \in \mathbb{R}$*, hogy ha* $x \in D$ *és* $x \geqslant K$*, akkor* $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$*. Erre a* $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \alpha$ *jelölést alkalmazzuk.*

8. Definíció. *Legyen* $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$ *egy olyan halmaz, mely alulról nem korlátos,* $f : D \to \mathbb{R}$*. Azt mondjuk, hogy az* f *függvénynek* ***a*** $-\infty$***–ben a határértéke*** α*, ha tetszőleges* $\varepsilon > 0$ *esetén létezik olyan* $k \in \mathbb{R}$*, hogy ha* $x \in D$ *és* $x \leqslant k$*, akkor* $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$*. Erre a* $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \alpha$ *jelölést alkalmazzuk.*

9. Definíció. *Legyen* $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$ *egy olyan halmaz, mely felülről nem korlátos,* $f : D \to \mathbb{R}$*. Azt mondjuk, hogy az* f *függvénynek* ***a*** $+\infty$***–ben a határértéke*** $+\infty$*, ha tetszőleges* $K \in \mathbb{R}$ *esetén létezik olyan* $K^* \in \mathbb{R}$*, hogy ha* $x \in D$ *és* $x \geqslant K^*$*, akkor* $f(x) \geqslant K$*. Erre a* $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ *jelölést alkalmazzuk.*

10. Definíció. *Legyen $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$ egy olyan halmaz, mely felülről nem korlátos, $f : D \to \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek **a $+\infty$–ben a határértéke** $-\infty$, ha tetszőleges $k \in \mathbb{R}$ esetén létezik olyan $K^* \in \mathbb{R}$, hogy ha $x \in D$ és $x \geqslant K^*$, akkor $f(x) \leqslant k$. Erre a $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ jelölést alkalmazzuk.*

11. Definíció. *Legyen $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$ egy olyan halmaz, mely alulról nem korlátos, $f : D \to \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek **a $-\infty$–ben a határértéke** $+\infty$, ha tetszőleges $K \in \mathbb{R}$ esetén létezik olyan $k^* \in \mathbb{R}$, hogy ha $x \in D$ és $x \leqslant k^*$, akkor $f(x) \geqslant K$. Erre a $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ jelölést alkalmazzuk.*

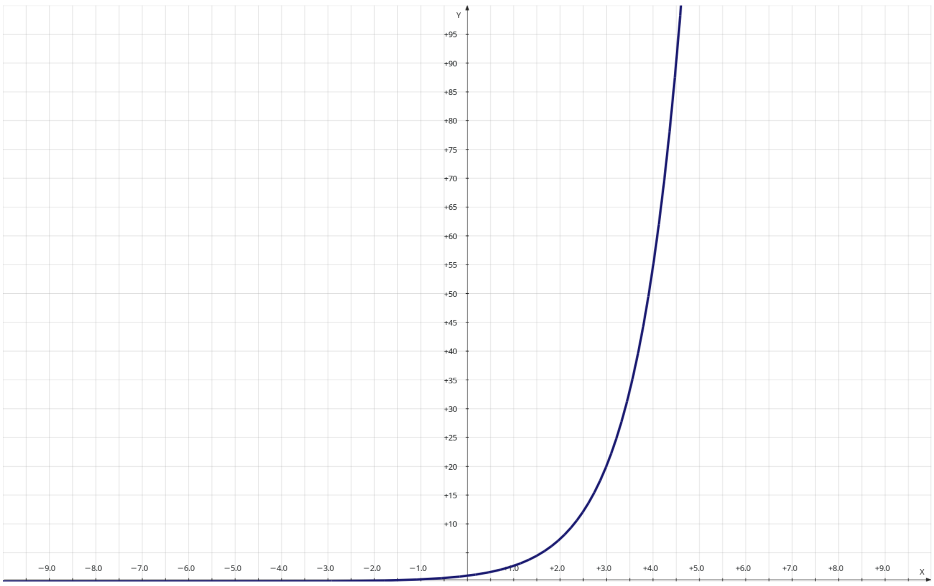
12. Definíció. *Legyen $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$ egy olyan halmaz, mely alulról nem korlátos, $f : D \to \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek **a $-\infty$–ben a határértéke** $-\infty$, ha tetszőleges $k \in \mathbb{R}$ esetén létezik olyan $k^* \in \mathbb{R}$, hogy ha $x \in D$ és $x \leqslant k^*$, akkor $f(x) \leqslant k$. Erre a $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ jelölést alkalmazzuk.*

6. Példa. *Legyen*

$$f(x) = e^x \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ekkor

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

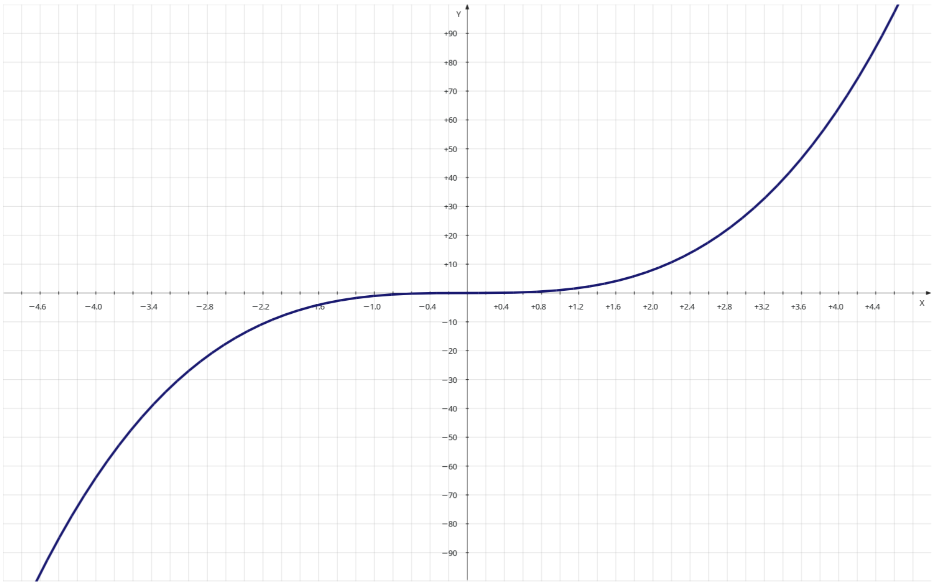


7. Példa. *Tekintsük az*

$$f(x) = x^3 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

módon megadott $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt. Ekkor

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad \textit{és} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$



6. Tétel (Átviteli elv). *Legyen* $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$, *illetve* $x_0 \in D'$ *és* $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. *Ekkor* $\lim_{x \to x_0} f(x) = \alpha$ *pontosan akkor teljesül, ha tetszőleges* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *D–beli,* x_0*–hoz konvergáló sorozat esetén* $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \alpha$ *teljesül.*

Határértéke és folytonosság kapcsolata

7. Tétel. *Legyen* $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ *és* $x_0 \in D$. *Ekkor az* f *függvény pontosan akkor folytonos az* x_0 *pontban, ha létezik a* $\lim_{x \to x_0} f(x)$ *határérték, és*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Határérték és műveletek

8. Tétel. *Legyen* $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in D'$ $f, g : D \to \mathbb{R}$, *illetve* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. *Ha az* f *és* g *függvényeknek létezik a határértéke az* x_0 *pontban és*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \alpha \quad \text{és} \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = \beta,$$

akkor

(i) *az* $f + g$ *függvénynek is létezik az* x_0 *pontban a határértéke*

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \alpha + \beta;$$

(ii) *tetszőleges* $\lambda \in \mathbb{R}$ *esetén a* $\lambda \cdot f$ *függvénynek is létezik az* x_0 *pontban a határértéke és*

$$\lim_{x \to x_0} \lambda \cdot f(x) = \lambda \cdot \alpha;$$

(iii) *az* $f \cdot g$ *függvénynek is létezik az* x_0 *pontban a határértéke és*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = \alpha \cdot \beta$$

(iv) *az* $\dfrac{f}{g}$ *függvénynek is létezik a határértéke az* x_0 *pontban és*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\alpha}{\beta},$$

feltéve, hogy $\beta \neq 0$ *és* $g(x) \neq 0$ *teljesül minden* $x \in D$ *esetén.*

13. Definíció. *Legyen* $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in D'$ $f : D \to \mathbb{R}$. *Azt mondjuk, hogy az f függvénynek az x_0 pontban létezik a* ***jobboldali határérték****e, ha van olyan* $\alpha \in \mathbb{R}$, *hogy bármely* $\varepsilon > 0$ *esetén létezik olyan* $\delta > 0$, *hogy ha* $x \in D$ *olyan, hogy* $x_0 < x < x_0 + \delta$, *akkor* $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$ *teljesül.*

Erre a $\lim_{x\to x_0+0} f(x) = \alpha$ *jelölést fogjuk használni.*

14. Definíció. *Legyen* $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in D'$ $f : D \to \mathbb{R}$. *Azt mondjuk, hogy az f függvénynek az x_0 pontban létezik a* ***baloldali határérték****e, ha van olyan* $\alpha \in \mathbb{R}$, *hogy bármely* $\varepsilon > 0$ *esetén létezik olyan* $\delta > 0$, *hogy ha* $x \in D$ *olyan, hogy* $x_0 - \delta < x < x_0$, *akkor* $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$ *teljesül.*

Erre a $\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \alpha$ *jelölést fogjuk használni.*

8. Példa. *Tekintsük a*

$$\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1, & ha\ x > 0 \\ 0, & ha\ x = 0 \\ -1, & ha\ x < 0 \end{cases}$$

módon megadott $\operatorname{sign}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *függvényt. Ekkor*

$$\lim_{x\to 0+0} \operatorname{sign}(x) = 1 \qquad \lim_{x\to 0-0} \operatorname{sign}(x) = -1$$

1. Állítás. *Legyen* $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in D'$ $f : D \to \mathbb{R}$. *Ha az f függvénynek létezik az x_0 pontban a határértéke, akkor f-nek az x_0 pontban létezik a bal- és a jobboldali határértéke is és*

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = \lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0} f(x)$$

Szakadási helyek osztályozása

15. Definíció. *Legyen $D \subset \mathbb{R}$ nyílt halmaz,* $x_0 \in D$, $f\colon D \to \mathbb{R}$. *Ha az x_0 pont az f függvénynek szakadási helye és léteznek a* $\lim_{x\to x_0-0} f(x)$ *és* $\lim_{x\to x_0+0} f(x)$ *bal- és jobboldali határértékei az f függvénynek az x_0 pontban, akkor azt mondjuk, hogy az f függvénynek az x_0 pontban* ***elsőfajú szakadás*** *van.*

Ha még az is teljesül, hogy

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x),$$

akkor azt mondjuk, hogy az f függvénynek az x_0 pontban ***megszüntethető szakadás****a van.*

Ha az f függvénynek az x_0 pontban szakadása van és az nem elsőfajú, akkor azt mondjuk, hogy az f függvénynek az x_0 pontban ***másodfajú szakadás****a van.*

9. Példa. *Az*

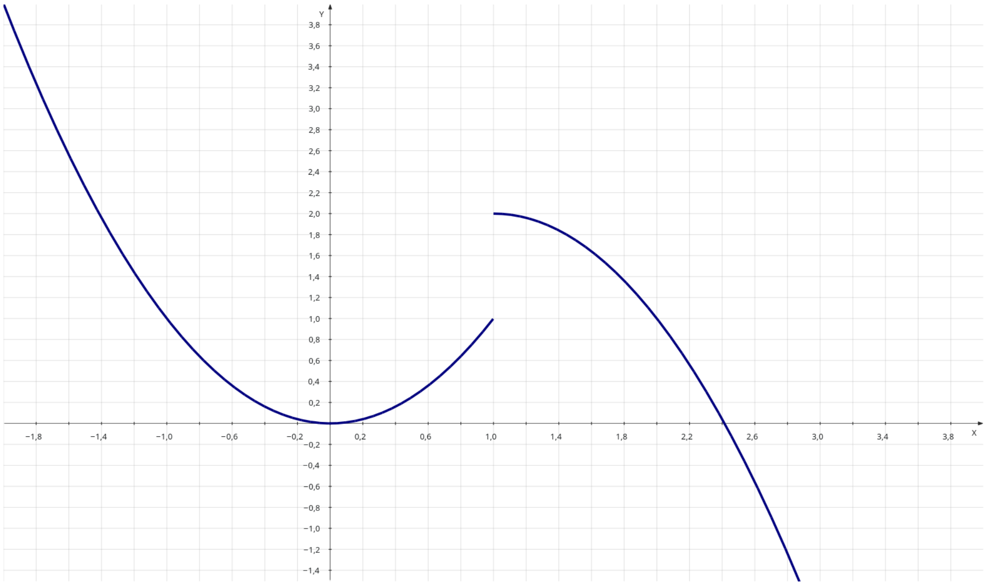
$$f(x) = \begin{cases} x, & ha\ x \neq 2 \\ 4, & ha\ x = 2 \end{cases}$$

módon megadott $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *függvénynek az* $x_0 = 2$ *pontban megszüntethető szakadása van.*

10. Példa. *Az*

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & ha\ x < 1 \\ 0, & ha\ x = 1 \\ 2 - (x-1)^2, & ha\ x > 1 \end{cases}$$

módon megadott $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *függvénynek az* $x_0 = 1$ *pontban elsőfajú, nem megszüntethető szakadása van.*



11. Példa. *Az*

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right), & ha\ x \neq 0 \\ 0, & ha\ x = 0 \end{cases}$$

módon megadott $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *függvénynek az* $x_0 = 0$ *pontban másodfajú szakadása van.*