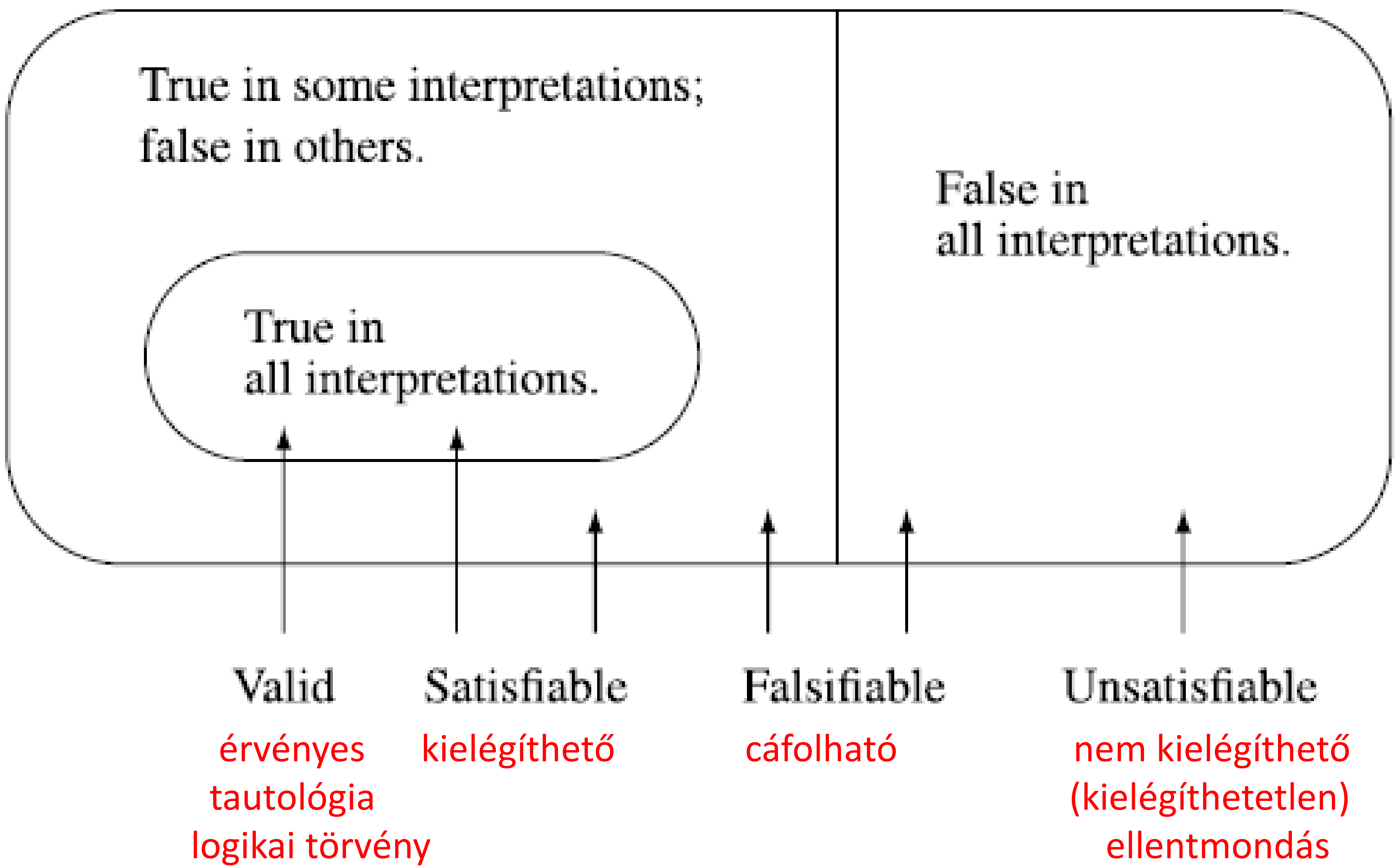
Az informatika logikai alapjai
3. feladatsor

Érvényes, kielégíthető, kielégíthetetlen formulák halmazai



A kielégíthetőségről

Tétel

Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ egy **nulladrendű nyelv**, $\Gamma \subseteq Form$ egy formulahalmaz.

Ha Γ **kielégíthető formulahalmaz** és $\Delta \subseteq \Gamma$, akkor Δ **kielégíthető formulahalmaz**.

Megjegyzés

- A tétel röviden úgy fogalmazható meg, hogy egy **kielégíthető formulahalmaz** minden részhalmaza kielégíthető.
- Szemléletes értelemben a tétel azt mondja ki, hogy a logikai ellentmondástalanság szűkítéssel nem rontható el.

Forrás: Mihálydeák Tamás, https://arato.inf.unideb.hu/mihalydeak.tamas/Logika_my_twt-treeview.html

A kielégíthetetlenségről

Tétel

Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ egy **nulladrendű nyelv**, és Γ, $\Delta \subseteq Form$ két formulahalmaz.

Ha Γ **kielégíthetetlen formulahalmaz**, és $\Gamma \subseteq \Delta$, akkor Δ **kielégíthetetelen formulahalmaz**.

Megjegyzés

- A tétel röviden úgy fogalmazható meg, hogy egy **kielégíthetetlen formulahalmaz** minden bővítése kielégíthetetlen.
- Szemléletes értelemben a tétel azt mondja ki, hogy a logikai ellentmondás bővítéssel nem szüntethető meg.

7.I.1. Mely állítás igaz, és miért?

(a) Egy formula akkor és csak akkor kielégíthető, ha logikai törvény.

(b) Egy formula csak akkor kielégíthető, ha logikai törvény.

(c) Egy formula csak akkor logikai törvény, ha kielégíthető.

(d) Egy formula pontosan akkor nem lesz kielégíthető, ha ellentmondásos.

(e) Annak szükséges feltétele, hogy egy formula logikai törvény legyen az, hogy a formula legyen kielégíthető.

(f) Annak elegendő feltétele, hogy egy formula ne legyen logikai törvény az, hogy a formula ne legyen ellentmondásos.

(g) Ha egy formula kielégíthető, akkor a negáltja is kielégíthető.

(h) Ha egy formula logikai törvény, akkor a negáltja nem elégíthető ki.

(i) Ha egy formula negáltja kielégíthető, akkor a formula logikai törvény.

7.I.13. Igaz-e, hogy

(a) minden kielégíthetetlen formulahalmaznak van kielégíthető (nem-üres) része?

(b) minden kielégíthető formulahalmaznak van kielégíthetetlen bővítése?

(c) egy kielégíthetetlen formulahalmaznak minden részhalmaza kielégíthetetlen?

Logikai következmény – szemantikai következmény – reláció

(Adott: $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$, $A \in Form$, $B \in Form$, $\Gamma \subseteq Form$)

- $A \in Form$ formulának következménye a B formula, $\underline{\underline{A \vDash B}}$, ha A minden modellje modellje B-nek is

- $\Gamma \subseteq Form$ formulahalmaznak következménye $B \in Form$ $\underline{\underline{\Gamma \vDash B}}$, ha Γ minden modellje modellje B-nek is.

A következményreláció tulajdonságai - 1

Adott $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$, $\Gamma \subseteq FORM$, $A \in Form$.

<u>Tétel</u>:

$\boxed{\Gamma \models A}$ akkor és csak akkor, ha $\boxed{\Gamma \cup \{\neg A\} \text{ kielégíthetetlen.}}$

7.I.17. Az $X \supset (Y \supset Z), Y, \neg Z$ premisszáknak melyik formula logikai következménye? Indokoljunk!

(a) $\neg X$ (b) $Y \supset Z$

(c) X (d) $X \wedge Y \wedge \neg Z$

7.I.18. A $\neg X \supset \neg Y \vee Z, Y, \neg Z$ premisszáknak mely formula logikai következménye? Indokoljunk!

(a) $X \wedge Z$ (b) $Z \supset \neg X$

(c) $X \wedge Y$ (d) $X \wedge Y \wedge Z$

7.I.21. Döntsük el, hogy az alábbi következményrelációk fennállnak-e!

(a) $X \supset \neg Y \vDash X \supset (Y \supset Z)$

(b) $\neg X \vee Y, Z \supset \neg Y \vDash X \supset \neg Z$

7.I.23. Ellenőrizzük, hogy az alábbi következtetések helyesek-e!

(a) Premisszák:
Ha reggel uszodába megyek, korán kelek. Ha viszont sok dolgozatot kell kijavítanom éjszaka, nem tudok reggel korán kelni. Ma reggel uszodában voltam.
Konklúzió:
Tegnap éjszaka nem kellett sok dolgozatot kijavítanom.

7.I.23. Ellenőrizzük, hogy az alábbi következtetések helyesek-e!

(c) Premisszák:
Éva úgy gondolta, hogy ha a kölcsönzőben nem talál megfelelő jelmezt, akkor vagy varr magának egyet, vagy felveszi a tavalyit. Kiderült, hogy a kölcsönzőben nincs Évának tetsző jelmez, a tavalyit pedig nem tudja felvenni, mert szűk.
Konklúzió:
Éva jelmezt varr magának.

(e) Premisszák:
Anna és Bella egyforma magas, vagy Anna magasabb Bellánál. Ha Anna és Bella egyfoma magas, akkor Cili és Bella is egyforma magas. Ha Anna magasabb Bellánál, akkor Bella magasabb Dóránál.
Konklúzió:
Cili és Bella egyforma magas, vagy Bella magasabb Dóránál.

- Ha ebben a parkolóban parkolok, akkor az én autóm a legszebb a parkolóban. Ha az én autóm a legszebb a parkolóban, akkor a feleségem máshol parkol. A feleségem máshol parkol.

-> Ebben a parkolóban parkolok.

(b) Premisszák:

Ha a 2 prímszám, akkor a 2 a legkisebb prímszám. Ha a 2 a legkisebb prímszám, akkor az 1 nem prímszám. Az 1 nem prímszám.

Konklúzió:

Tehát a 2 prímszám.