Az informatika logikai alapjai
8. előadás

Vaszil György

vaszil.gyorgy@inf.unideb.hu

I. emelet 110-es szoba

A múlt órán

- **Klasszikus elsőrendű nyelv**
- **Szintaxis, kis szemantikai kitérővel**
- Szabad és kötött változók

Elsőrendű nyelv, V.M. 2.D.2/e

$\mathcal{F}(0) = \{$ Péter, én $\}$

$\mathcal{F}(1) = \{$ édesanyja $(-)$ $\}$

$\mathcal{P}(0) = \{$ havazik $\}$

$\mathcal{P}(1) = \{$ piros $(-)$ $\}$

$\mathcal{P}(2) = \{$ munkatársak $(-,-)$ $\}$

$\underbrace{\text{Péter édesanyja}}_{\text{édesanyja(Péter)}}$ $\underbrace{\text{édesa ám}}_{\text{édesanyja(én)}}$ munkatársa.

munkatársa(édesanyja(Péter), édesanyja(én))

Terminusok: ← „nevek"

- névkonstansok
- névből nevet képző függvények

Klasszikus elsőrendű nyelv - definíció

Klasszikus elsőrendű nyelven az $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ rendezett ötöst értjük, ahol

- $LC = \{\neg, \supset, \wedge, \vee, \equiv, =, \forall, \exists, (,)\}$ (a **nyelv logikai konstansainak** halmaza).
- $Var = \{x_n | n = 0, 1, 2, ...\}$ a **nyelv változóinak** megszámlálhatóan végtelen halmaza.
- $Con = \bigcup_{n=0}^{\infty} (\mathcal{F}(n) \cup \mathcal{P}(n))$ a **nyelv nemlogikai konstansainak** legfeljebb megszámlálhatóan végtelen halmaza.
  - $\mathcal{F}(0)$ a névparaméterek (névkonstansok),
  - $\mathcal{F}(n)$ az n argumentumú ($n = 1, 2, \ldots$) függvényjelek (műveleti jelek),
  - $\mathcal{P}(0)$ az állításparaméterek (állításkonstansok),
  - $\mathcal{P}(n)$ az n argumentumú ($n = 1, 2, \ldots$) predikátumparaméterek (predikátumkonstansok) halmaza.

Klasszikus elsőrendű nyelv - definíció folytatása

- Az LC, Var, $\mathcal{F}(n)$, $\mathcal{P}(n)$ halmazok ($n = 0, 1, 2, \ldots$) páronként diszjunktak.
- A nyelv **terminusainak** a halmazát, azaz a Term halmazt az alábbi induktív definíció adja meg:
  - $Var \cup \mathcal{F}(0) \subseteq Term$
  - Ha $f \in \mathcal{F}(n)$, ($n=1, 2, ...$), és $t_1, t_2, ..., t_n \in Term$, akkor $f(t_1, t_2, ..., t_n) \in Term$.
- A nyelv **formuláinak** a halmazát, azaz a Form halmazt az alábbi induktív definíció adja meg:
  - $\mathcal{P}(0) \subseteq Form$
  - Ha $t_1, t_2 \in Term$, akkor $(t_1 = t_2) \in Form$
  - Ha $P \in \mathcal{P}(n)$, ($n=1, 2, \ldots$), és $t_1, t_2, ..., t_n \in Term$, akkor $P(t_1, t_2, ..., t_n) \in Form$.
  - Ha $A \in Form$, akkor $\neg A \in Form$.
  - Ha $A, B \in Form$, akkor $(A \supset B)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \equiv B) \in Form$.
  - Ha $x \in Var$, $A \in Form$, akkor $\forall x A$, $\exists x A \in Form$.

Elsőrendű nyelv, V.M. 2.0.2/e

$\mathcal{F}(0) = \{\boxed{\text{Péter, én}}\}$

$\mathcal{F}(1) = \{\text{édesanyja}(-)\}$

$\mathcal{P}(0) = \{\text{havazik}\}$

$\mathcal{P}(1) = \{\text{piros}(-)\}$

$\mathcal{P}(2) = \{\text{munkatársak}(-,-)\}$

Péter édesanyja

édesanyja(Péter)

édesa anyám munkatársa.

édesanyja(én)

munkatársa(édesanyja(Péter), édesanyja(én))

Terminusok: ← „nevek"

– névkonstansok

– névből nevet képző függvények

Klasszikus elsőrendű nyelv - definíció

Klasszikus elsőrendű nyelven az $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ rendezett ötöst értjük, ahol

- $LC = \{\neg, \supset, \wedge, \vee, \equiv, =, \forall, \exists, (,)\}$ (a nyelv logikai konstansainak halmaza).
- $Var = \{x_n | n = 0, 1, 2, ...\}$ a nyelv változóinak megszámlálhatóan végtelen halmaza.
- $Con = \bigcup_{n=0}^{\infty} (\mathcal{F}(n) \cup \mathcal{P}(n))$ a nyelv nemlogikai konstansainak legfeljebb megszámlálhatóan végtelen halmaza.
  - $\mathcal{F}(0)$ a névparaméterek (névkonstansok),
  - $\mathcal{F}(n)$ az n argumentumú (n = 1, 2, . . .) függvényjelek (műveleti jelek),
  - $\mathcal{P}(0)$ az állításparaméterek (állításkonstansok),
  - $\mathcal{P}(n)$ az n argumentumú (n = 1, 2, . . .) predikátumparaméterek (predikátumkonstansok) halmaza.

Klasszikus elsőrendű nyelv - definíció folytatása

- Az LC, Var, $\mathcal{F}(n)$, $\mathcal{P}(n)$ halmazok (n = 0, 1, 2, . . .) páronként diszjunktak.
- A nyelv terminusainak a halmazát, azaz a Term halmazt az alábbi induktív definíció adja meg:
  - $Var \cup \mathcal{F}(0) \subseteq Term$
  - Ha $f \in \mathcal{F}(n)$, (n=1, 2, ...), és $t_1, t_2, ..., t_n \in Term$, akkor $f(t_1, t_2, ..., t_n) \in Term$
- A nyelv formuláinak a halmazát, azaz a Form halmazt az alábbi induktív definíció adja meg:
  - $\mathcal{P}(0) \subseteq Form$
  - Ha $t_1, t_2 \in Term$, akkor $(t_1 = t_2) \in Form$
  - Ha $P \in \mathcal{P}(n)$, (n=1, 2, . . .), és $t_1, t_2, ..., t_n \in Term$, akkor $P(t_1, t_2, ..., t_n) \in Form$.
  - Ha $A \in Form$, akkor $\neg A \in Form$.
  - Ha $A, B \in Form$, akkor $(A \supset B)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \equiv B) \in Form$.
  - Ha $x \in Var$, $A \in Form$, akkor $\forall x A$, $\exists x A \in Form$.

Elsőrendű nyelv, V.M. 2.D.2/e

$\mathcal{F}(0) = \{$ Péter, én $\}$

$\mathcal{F}(1) = \{$ édesanyja (–) $\}$

$\mathcal{P}(0) = \{ \boxed{\text{havazik}} \}$

$\mathcal{P}(1) = \{$ piros (–) $\}$

$\mathcal{P}(2) = \{$ munkatársak (–, –) $\}$

Péter édesanyja édesanyám munkatársa.

édesanyja(Péter)   édesanyja(én)

$\boxed{\text{munkatársa(édesanyja(Péter), édesanyja(én))}}$

Klasszikus elsőrendű nyelv - definíció folytatása

- Az LC, Var, $\mathcal{F}(n)$, $\mathcal{P}(n)$ halmazok (n = 0, 1, 2, . . .) páronként diszjunktak.
- A nyelv **terminusainak** a halmazát, azaz a Term halmazt az alábbi induktív definíció adja meg:
  - Var$\cup\mathcal{F}(0)\subseteq$Term
  - Ha $f\in\mathcal{F}(n)$, (n=1, 2, ...), és $t_1, t_2, ..., t_n\in$Term, akkor $f(t_1,t_2, ..., t_n)\in$Term.
- A nyelv **formuláinak** a halmazát, azaz a Form halmazt az alábbi induktív definíció adja meg:
  - $\boxed{\mathcal{P}(0)\subseteq\text{Form}}$
  - Ha $t_1, t_2\in$Term, akkor $(t_1=t_2)\in$Form
  - $\boxed{\text{Ha } P\in\mathcal{P}(n), (n=1, 2, . . .), \text{ és } t_1, t_2, ..., t_n\in\text{Term, akkor } P(t_1,t_2, ..., t_n)\in\text{Form.}}$
  - Ha A$\in$Form, akkor $\neg$A$\in$Form.
  - Ha A, B$\in$Form, akkor (A$\supset$B), (A$\wedge$B), (A$\vee$B), (A$\equiv$B)$\in$Form.
  - Ha x$\in$Var, A$\in$Form, akkor $\forall$xA, $\exists$xA$\in$Form.

Formulák ← „állítások"

- állításkonstansok
- akárhány argumentumú predikátum-jelek, melyekbe terminusokat helyettesítünk

- az egyenlőség, mint speciális predikátum
- az eddigieket logikai összekötő jelekkel kombinálhatjuk, és
- az eddigieket kvantálhatjuk:
  - Ha x változó ($x \in Var$) és A formula, akkor
    - $\forall x\ A$
    - $\exists x\ A$

  is formula

Elsőrendű atomi formula

Definíció. Ha $L^{(1)}$ egy elsőrendű nyelv (azaz $L^{(1)} = \langle$ LC, Var, Con, Term, Form $\rangle$), akkor az **elsőrendű atomi formulák halmazát** (jelölés: AtForm) az alábbi induktív definíció adja meg:

- $\mathcal{P}(0) \subseteq$ AtForm
- Ha $t_1, t_2 \in$ Term, akkor $(t_1 = t_2) \in$ AtForm
- Ha $P \in \mathcal{P}(n)$, $(n = 1, 2, \ldots)$, és $t_1, t_2, \ldots, t_n \in$ Term, akkor $P(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in$ AtForm.

Megjegyzés. Az elsőrendű jelzőt, ha félreértést nem okoz, akkor gyakran elhagyjuk, s csak atomi formulákról vagy prímformulákról beszélünk.

AtForm halmaz elemeit elsőrendű atomi formuláknak vagy **elsőrendű prímformuláknak** nevezzük.

Példa V.M. 2.P.4 alapjá

$U = \mathbb{N}$ (a természetes számok)

$\mathcal{F}(0) = \{ I, II, III, IV, V \}$

$\mathcal{F}(1) = \{ \text{ktsz}(-) \}$

$\mathcal{P}(1) = \{ \text{ps}(-), \text{ej}(-) \}$

$\mathcal{P}(2) = \{ >(-,-) \}$

Példák:
- $\exists x \; \text{ps}(x)$
- $\forall x \; \text{ej}(x)$
- $\neg(\exists x > (x, V))$

Elsőrendű nyelv, V.M. 2.P.2/e

$\mathcal{F}(0) = \{ \text{Péter}, \text{én} \}$

$\mathcal{F}(1) = \{ \text{édesanyja}(-) \}$

$\mathcal{P}(0) = \{ \text{havazik} \}$

$\mathcal{P}(1) = \{ \text{piros}(-) \}$

$\mathcal{P}(2) = \{ \text{munkatársak}(-,-) \}$

$\underbrace{\text{Péter édesanyja}}_{\text{édesanyja(Péter)}}$ $\underbrace{\text{édesanyám}}_{\text{édesanyja(én)}}$ munkatársa.

munkatársa(édesanyja(Péter), édesanyja(én))

Közvetlen részformula definíciója elsőrendű nyelvben

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy tetszőleges elsőrendű nyelv.

- Ha A elsőrendű atomi formula, akkor nincs közvetlen részformulája;
- $\neg A$ egyetlen közvetlen részfomulája A;
- Az $(A \supset B)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \equiv B)$ formulák közvetlen részformulái az A és a B formulák.
- $\forall x A$ egyetlen közvetlen részformulája A;
- $\exists x A$ egyetlen közvetlen részformulája A.

Részformula definíciója – közvetlen részformula segítségével

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy tetszőleges elsőrendű nyelv, $A \in Form$ pedig a nyelv tetszőleges formulája. Egy A formula részformuláinak halmaza az a legszűkebb halmaz [jelölés: RF(A)], amelyre teljesül, hogy

- $A \in RF(A)$, (azaz az A formula részformulája önmagának);
- ha $B \in RF(A)$ és C közvetlen részformulája B-nek, akkor $C \in RF(A)$ (azaz, ha egy B formula részformulája A-nak, akkor B összes közvetlen részformulája is részformulája A-nak).

Részformula, közvetlen részformula

V.M. 1.P.7 a, b, c, d

a) $(P(x) \wedge P(y))$

b) $Q(f(x), g(y, x), y)$

c) $\forall x \exists y \exists z\, Q(x, y, z)$

d) $(\exists x\, Q(x, y, x) \supset \neg(P(g(x, y)) \wedge \forall z\, P(z)))$

Zárójel-elhagyási konvenciók

Az elsőrendű logikában alkalmazott zárójel-elhagyási konvenciók a nulladrendű logikában alkalmazott zárójel-elhagyási konvenciók kibővítése a következő szabályokkal:

- a kvantorok erősebbek bármely állításlogikai műveletnél,
- az univerzális és az egzisztenciális kvantor egyenrangú (azaz erősségben egyik sem előzi meg a másikat).

A múlt órán

- Klasszikus elsőrendű nyelv
- Szintaxis, kis szemantikai kitérővel
- **Szabad és kötött változók**

Változó előfordulások

Definíció. Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy elsőrendű nyelv, $A \in Form$ egy formula és $x \in Var$ egy változó.

Az x változó valamely A-beli előfordulását szabadnak nevezzük, ha a tekintett előfordulás nem esik az A formula valamely $\forall xB$ vagy $\exists xB$ alakú részformulájába.

Az x változó valamely A-beli előfordulását kötöttnek nevezzük, ha a tekintett előfordulás nem szabad előfordulás.

Nyílt és zárt formula

Definíció. Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy elsőrendű nyelv, és $A \in Form$ egy formula. Ha $FreeVar(A) \neq \emptyset$, akkor az A formulát **nyílt formulának** nevezzük. Ha az A formula nem nyílt, akkor **zárt formulának** nevezzük.

Megjegyzés.

- A nyílt formulákat nyitott formuláknak is szokták nevezni.
- Ha A nyílt formula, akkor legalább egy változó legalább egy helyen szabadon fordul elő benne.
- Ha A zárt formula, akkor $FreeVar(A) = \emptyset$.
- Ha A zárt formula, akkor egyetlen változó sem fordul elő benne szabadon, minden változó minden előfordulása kötött.

Nem az a felírat az érdekes, hogy egy változó szabad vagy kötött, hanem a

szabad előfordulás vagy kötött előfordulás

- Nézzük meg az 1.8.7/d-t az előző lapon

Nyílt/zárt formula

- Az előző példák közül melyik milyen?

Részformula, közvetlen részformula

V.M. 1.8.7 a, b, c, d

a) $(P(x) \wedge P(y))$

b) $Q(f(x), g(y, x), y)$

c) $\forall x \exists y \exists z\, Q(x, y, z)$

d) $(\exists x\, Q(x, y, x) \supset \neg(P(g(x, y)) \wedge \forall z\, P(z)))$

A mai órán

- Interpretáció, változó értékelés, szemantikai szabályok
- Modell, kielégíthetőség, kielégíthetetlenség
- Logikai következmény, érvényesség, ekvivalencia
- Az eddigiek áttekintése

Mi kell még ahhoz, hogy a logikai nyelvet használni is tudjuk?

<u>Nulladrendű nyelv</u>

- nemlogikai konstansok
  - állítások jelölő konstansok
- a logikai konstansok működése
  - szemantikai szabályok

<u>Elsőrendű nyelv</u>

- nemlogikai konstansok
  - univerzum, változók (a lehetséges dolgok)
  - objektumokat (dolgokat) jelölő konstansok (argumentum nélküli függvények)
  - függvények (→objektumhoz rendelnek objektumot)
  - állításokat jelölő konstansok (argumentum nélküli predikátumok)
  - predikátumok/relációk (→logikai értéket rendelnek objektum(ok)hoz)
- a logikai konstansok működése
  - az eddigi szabályok
  - $\exists x, \forall x$ (van olyan objektum…, minden objektum…)

Emlékeztető - A múlt heti példa

Definíció

Az $\langle U, \varrho \rangle$ párt az $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ **elsőrendű nyelv** egy interpretációjának nevezzük, ha

1. $U \neq \emptyset$, azaz U nemüres halmaz;
2. $Dom(\varrho) = Con$, azaz a ϱ a Con halmazon értelmezett függvény, amelyre teljesülnek a következők:
   a. Ha $a \in \mathcal{F}(0)$, akkor $\varrho(a) \in U$;
   b. Ha $f \in \mathcal{F}(n)$ $(n \neq 0)$, akkor $\varrho(f)$ az $U^{(n)}$ halmazon értelmezett az U halmazba képező függvény $\left(\varrho(f) : U^{(n)} \to U\right)$;
   c. Ha $p \in \mathcal{P}(0)$, akkor $\varrho(p) \in \{0, 1\}$;
   d. Ha $P \in \mathcal{P}(n)$ $(n \neq 0)$, akkor $\varrho(P) \subseteq U^{(n)}$. -- az univerzum objektum n-esei, melyekre P teljesül

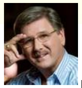
$U =$ a város lakói

$\mathcal{F}(0) = \{$ péter, én, juli-néni, Mari-néni $\}$

$\mathcal{F}(1) = \{$ édesanyja(-) $\}$

$\mathcal{P}(1) = \{$ tanul(-), dolgozik(-) $\}$

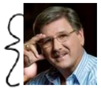
$\mathcal{P}(2) = \{$ munkatársak(-,-) $\}$

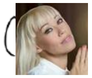
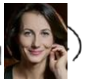
ϱ(Péter) =  ϱ(én) =  ϱ(juli-néni) = 

ϱ(Mari-néni) = 

ϱ(édesanyja) = f, ahol f() = 

f() = 

ϱ(tanul) = { ,  } ϱ(dolgozik) = { , ,  }

ϱ(munkatársak) = { (, ) }

Definíció

Az $\langle U, \varrho \rangle$ párt az $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ **elsőrendű nyelv** egy interpretációjának nevezzük, ha

1. $U \neq \emptyset$, azaz U nemüres halmaz;
2. $Dom(\varrho) = Con$, azaz a ϱ a Con halmazon értelmezett függvény, amelyre teljesülnek a következők:
   a. Ha $a \in \mathcal{F}(0)$, akkor $\varrho(a) \in U$;
   b. Ha $f \in \mathcal{F}(n)$ $(n \neq 0)$, akkor $\varrho(f)$ az $U^{(n)}$ halmazon értelmezett az U halmazba képező függvény $(\varrho(f): U^{(n)} \to U)$;
   c. Ha $p \in \mathcal{P}(0)$, akkor $\varrho(p) \in \{0, 1\}$;
   d. Ha $P \in \mathcal{P}(n)$ $(n \neq 0)$, akkor $\varrho(P) \subseteq U^{(n)}$. -- az univerzum objektum n-esei, melyekre P teljesül

$U =$ a város lakói

$\mathcal{F}(0) = \{$Péter, én, Juli-néni, Mari-néni$\}$

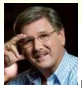
$\mathcal{F}(1) = \{$édesanyja$(-)\}$

$\mathcal{P}(1) = \{$tanul$(-)$, dolgozik$(-)\}$

$\mathcal{P}(2) = \{$munkatársak$(-,-)\}$

$|\forall x\ \text{tanul}(x)|_\varrho = 0$

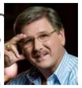
$|\exists x\ \text{tanul}(x)|_\varrho = 1$

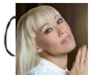
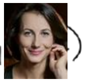
ϱ(Péter) =  ϱ(én) =  ϱ(Juli-néni) = 

ϱ(Mari-néni) = 

ϱ(édesanyja) = f, ahol f() = 

f() = 

ϱ(tanul) = {, } ϱ(dolgozik) = {, , }

ϱ(munkatársak) = {(, )}

Definíció

Az $\langle U, \varrho \rangle$ párt az $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ **elsőrendű nyelv** egy interpretációjának nevezzük, ha

1. $U \neq \emptyset$, azaz U nemüres halmaz;
2. $Dom(\varrho) = Con$, azaz a ϱ a Con halmazon értelmezett függvény, amelyre teljesülnek a következők:
   a. Ha $a \in \mathcal{F}(0)$, akkor $\varrho(a) \in U$;
   b. Ha $f \in \mathcal{F}(n)$ $(n \neq 0)$, akkor $\varrho(f)$ az $U^{(n)}$ halmazon értelmezett az U halmazba képező függvény $\left(\varrho(f) : U^{(n)} \to U\right)$;
   c. Ha $p \in \mathcal{P}(0)$, akkor $\varrho(p) \in \{0, 1\}$;
   d. Ha $P \in \mathcal{P}(n)$ $(n \neq 0)$, akkor $\varrho(P) \subseteq U^{(n)}$. -- az univerzum objektum n-esei, melyekre P teljesül

U = a város lakói

$\mathcal{F}(0) = \{$ Péter, én, juli-néni, Mari-néni $\}$

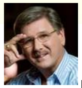
$\mathcal{F}(1) = \{$ édesanyja(-) $\}$

$\mathcal{P}(1) = \{$ tanul(-), dolgozik(-) $\}$

$\mathcal{P}(2) = \{$ munkatársak(-,-) $\}$

$\exists x($tanul$(x) \wedge$ dolgozik$(x))$

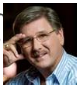
$\neg$munkatársak(Péter, én)

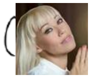
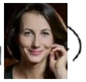
ϱ(Péter) =  ϱ(én) =  ϱ(juli-néni) = 

ϱ(Mari-néni) = 

ϱ(édesanyja) = f, ahol f() = 

f() = 

ϱ(tanul) = {  ,  } ϱ(dolgozik) = {  ,  ,  }

ϱ(munkatársak) = { ( , ) }

A mai órán

- Interpretáció, változó értékelés, szemantikai szabályok
- Modell, kielégíthetőség, kielégíthetetlenség
- Logikai következmény, érvényesség, ekvivalencia
- Az eddigiek áttekintése

Interpretáció, példa

Rögzítenünk kell, hogy „mi micsoda". Például:

$\forall x \; P(a, x)$ ← egy formula

változó

két argumentumú predikátum/reláció

objektumot jelölő konstans (argumentum nélküli fv.)

- Milyen értékei lehetnek az x-nek? $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$
- Melyik objektumot jelöli az a? 0, 1
- Melyik reláció a $P(-,-)$? $\leq$

Kérdés: Mikor mit jelent a formula?

Interpretáció elsőrendű nyelv esetén

Interpretáció | Értékelés | Elsőrendű szemantikai szabályok | Alaptételek

Definíció

Az $\langle U, \varrho \rangle$ párt az $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ **elsőrendű nyelv** egy interpretációjának nevezzük, ha

1. $U \neq \emptyset$, azaz U nemüres halmaz;
2. $Dom(\varrho) = Con$, azaz a ϱ a Con halmazon értelmezett függvény, amelyre teljesülnek a következők:
   a. Ha $a \in \mathcal{F}(0)$, akkor $\varrho(a) \in U$;
   b. Ha $f \in \mathcal{F}(n)$ $(n \neq 0)$, akkor $\varrho(f)$ az $U^{(n)}$ halmazon értelmezett az U halmazba képező függvény ($\varrho\left(f\right): U^{(n)} \to U$);
   c. Ha $p \in \mathcal{P}(0)$, akkor $\varrho(p) \in \{0, 1\}$;
   d. Ha $P \in \mathcal{P}(n)$ $(n \neq 0)$, akkor $\varrho\left(P\right) \subseteq U^{(n)}$.

Mihálydeák Tamás anyagai, https://arato.inf.unideb.hu/mihalydeak.tamas/Logika_my_twt-treeview.html

A múltkori példa még egyszer

<U,ρ> interpretáció:

1. U a város lakóinak halmaza: {lakó1, lakó2, lakó3, lakó4, lakó5, ...}
2. ρ a következő függvény:
   a) ρ(Péter)=lakó1, ρ(én)=lakó2, ρ(Juli néni)=lakó3, ρ(Mari néni)=lakó4
   b) ρ(édesanyja(_)) olyan függvény, ahol
      lakó2→lakó4, lakó1→lakó3
   c) ρ(tanul(_)) = { lakó1, lakó2 }
      ρ(dolgozik(_)) = { lakó4 }
      ρ(munkatársak(_ , _)) =
      = { (lakó2,lakó5),
      (lakó5,lakó2),
      (lakó3,lakó4),
      (lakó4,lakó3) }

$\mathcal{F}(0)$ = { péter, én, juli-néni, Mari-néni }

$\mathcal{F}(1)$ = { édesanyja(_) }

$\mathcal{P}(1)$ = { tanul(_), dolgozik(_) }

$\mathcal{P}(2)$ = { munkatársak(_,_) }

Definíció

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy **elsőrendű nyelv**, $\langle U, \varrho \rangle$ pedig a nyelv egy **interpretációja**. Az $\langle U, \varrho \rangle$ interpretációra támaszkodó v értékelésen egy olyan függvényt értünk, amely teljesíti a következőket:

1. $Dom(v) = Var$;
2. Ha $x \in Var$, akkor $v(x) \in U$.

Megjegyzés

- Az értékelésen egy $v: Var \rightarrow U$ függvényt értünk.

Definíció (A módosított értékelés fogalma)

Legyen v egy tetszőleges $\langle U, \varrho \rangle$ interpretációra támaszkodó értékelés, $x \in Var$ egy változó és $u \in U$ egy objektum. Ekkor bármely $y \in Var$ esetén

$$v\left[x:u\right]\left(y\right) = \begin{cases} u, & ha \quad y = x; \\ v(y), & egyébként. \end{cases}$$

Megjegyzés

- Az módosított értékelésen egy olyan $v[x:u]$ Var $\rightarrow U$ függvényt értünk, amely legfeljebb az x változóhoz rendelt értékben különbözik a v értékeléstől. Az x változóhoz az u értéket rendeli, azaz $v[x:u](x) = u$.

Interpretáció és változó értékelés

<U,ρ> interpretáció:

1. U a város lakóinak halmaza: {lakó1, lakó2, lakó3, lakó4, lakó5, ...}
2. ρ a következő függvény:
   a) ρ(Péter)=lakó1, ρ(én)=lakó2, ρ(Juli néni)=lakó3, ρ(Mari néni)=lakó4
   b) ρ(édesanyja(_)) olyan függvény, ahol
      lakó2→lakó4, lakó1→lakó3
   c) ρ(tanul(_)) = { lakó1, lakó2 }
      ρ(dolgozik(_)) = { lakó4 }
      ρ(munkatársak(_ , _)) =
      = { (lakó2,lakó5),
      (lakó5,lakó2),
      (lakó3,lakó4),
      (lakó4,lakó3) }

F(0) = { péter, én, juli-néni, Mari-néni }
F(1) = { édesanyja(_) }
P(1) = { tanul(_), dolgozik(_) }
P(2) = { munkatársak(_,_) }

Var={x,y,z,...}

3. ν: értékelés
   – egy értékelés: ν(x)=lakó1 (ekkor munkatársak(én,x) hamis)
   – egy másik értékelés: ν(x)=lakó5 (ekkor munkatársak(én,x) igaz

Szemantikai szabályok/1

Interpretáció | Értékelés | Elsőrendű szemantikai szabályok | Alaptételek

Definíció

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy **elsőrendű nyelv**, $\langle U, \varrho \rangle$ a nyelv egy **interpretációja**, v pedig az $\langle U, \varrho \rangle$ interpretációra támaszkodó értékelés.

1. Ha $a \in \mathcal{F}(0)$, akkor $|a|_v^{\langle U, \varrho \rangle} = \varrho(a)$.
2. Ha $x \in Var$, akkor $|x|_v^{\langle U, \varrho \rangle} = v(x)$.
3. Ha $f \in \mathcal{F}(n)$, $(n = 1, 2, ...)$, és $t_1, t_2, ..., t_n \in Term$, akkor
$$|f(t_1, t_2, ..., t_n)|_v^{\langle U, \varrho \rangle} = \varrho(f)\left(|t_1|_v^{\langle U, \varrho \rangle}, |t_2|_v^{\langle U, \varrho \rangle}, ..., |t_n|_v^{\langle U, \varrho \rangle}\right)$$
4. Ha $p \in \mathcal{P}(0)$, akkor $|p|_v^{\langle U, \varrho \rangle} = \varrho(p)$

Szemantikai szabályok/2

Interpretáció | Értékelés | Elsőrendű szemantikai szabályok | Alaptételek

Definíció

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy **elsőrendű nyelv**, $\langle U, \varrho \rangle$ a nyelv egy **interpretációja**, v pedig az $\langle U, \varrho \rangle$ interpretációra támaszkodó értékelés.

5. Ha $t_1, t_2 \in Term$, akkor

$$\left|\left(t_1 = t_2\right)\right|_v^{\langle U,\varrho \rangle} = \begin{cases} 1, & ha \quad |t_1|_v^{\langle U,\varrho \rangle} = |t_2|_v^{\langle U,\varrho \rangle} \\ 0, & egy\acute{e}bk\acute{e}nt. \end{cases}$$

6. Ha $P \in \mathcal{P}(n) \backslash (n \neq 0)$, $\quad t_1, \ldots, t_n \in Term$, akkor

$$\left|P\left(t_1, \ldots, t_n\right)\right|_v^{\langle U,\varrho \rangle} = \begin{cases} 1, & ha \quad \langle |t_1|_v^{\langle U,\varrho \rangle}, \ldots, |t_n|_v^{\langle U,\varrho \rangle} \rangle \in \varrho(P); \\ 0, & egy\acute{e}bk\acute{e}nt. \end{cases}$$

Szemantikai szabályok/3

7. Ha $A \in Form$, akkor $\left|\neg A\right|_v^{\langle U,\varrho\rangle} = 1 - \left|A\right|_v^{\langle U,\varrho\rangle}$.

8. Ha $A, B \in Form$, akkor

$$\left|\left(A \supset B\right)\right|_v^{\langle U,\varrho\rangle} = \begin{cases} 0 & ha \quad |A|_v^{\langle U,\varrho\rangle} = 1, \text{ és } \quad |B|_v^{\langle U,\varrho\rangle} = 0; \\ 1, & egyébként. \end{cases}$$

$$\left|\left(A \wedge B\right)\right|_v^{\langle U,\varrho\rangle} = \begin{cases} 1 & ha \quad |A|_v^{\langle U,\varrho\rangle} = 1, \text{ és } \quad |B|_v^{\langle U,\varrho\rangle} = 1; \\ 0, & egyébként. \end{cases}$$

$$\left|\left(A \vee B\right)\right|_v^{\langle U,\varrho\rangle} = \begin{cases} 0 & ha \quad |A|_v^{\langle U,\varrho\rangle} = 0, \text{ és } \quad |B|_v^{\langle U,\varrho\rangle} = 0; \\ 1, & egyébként. \end{cases}$$

$$\left|\left(A \equiv B\right)\right|_v^{\langle U,\varrho\rangle} = \begin{cases} 1 & ha \quad |A|_v^{\langle U,\varrho\rangle} = |B|_v^{\langle U,\varrho\rangle}; \\ 0, & egyébként. \end{cases}$$

Szemantikai szabályok/4

Interpretáció | Értékelés | **Elsőrendű szemantikai szabályok** | Alaptételek

Definíció

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy **elsőrendű nyelv**, $\langle U, \varrho \rangle$ a nyelv egy **interpretációja**, v pedig az $\langle U, \varrho \rangle$ interpretációra támaszkodó értékelés.

9. Ha $A \in Form, x \in Var$, akkor

$$|\forall x A|_v^{\langle U,\varrho \rangle} = \begin{cases} 0, & ha \quad van \quad olyan \quad u \in U, hogy \quad |A|_{v[x:u]}^{\langle U,\varrho \rangle} = 0; \\ 1, & egyébként. \end{cases}$$

$$|\exists x A|_v^{\langle U,\varrho \rangle} = \begin{cases} 1, & ha \quad van \quad olyan \quad u \in U, hogy \quad |A|_{v[x:u]}^{\langle U,\varrho \rangle} = 1; \\ 0, & egyébként. \end{cases}$$

Interpretáció és változó értékelés

<U,ρ> interpretáció:

1. U a város lakóinak halmaza: {lakó1, lakó2, lakó3, lakó4, lakó5, ...}
2. ρ a következő függvény:
   a) ρ(Péter)=lakó1, ρ(én)=lakó2, ρ(Juli néni)=lakó3, ρ(Mari néni)=lakó4
   b) ρ(édesanyja(_)) olyan függvény, ahol
      lakó2 → lakó4, lakó1 → lakó3
   c) ρ(tanul(_)) = { lakó1, lakó2 }
      ρ(dolgozik(_)) = { lakó4 }
      ρ(munkatársak(_ , _)) =
      = { (lakó2,lakó5),
      (lakó5,lakó2),
      (lakó3,lakó4),
      (lakó4,lakó3) }

F(0) = { péter, én, juli-néni, Mari-néni }
F(1) = { édesanyja(_) }
P(1) = { tanul(_), dolgozik(_) }
P(2) = { munkatársak(_,_) }

Var={x,y,z,...}

3. ν: értékelés
   – egy értékelés: ν(x)=lakó1 (ekkor munkatársak(én,x) hamis)
   – egy másik értékelés: ν(x)=lakó5 (ekkor munkatársak(én,x) igaz

Interpretáció és változó értékelés

<U,ρ> interpretáció:

1. U a város lakóinak halmaza: {lakó1, lakó2, lakó3, lakó4, lakó5, ...}
2. ρ a következő függvény:
   a) ρ(Péter)=lakó1, ρ(én)=lakó2, ρ(Juli néni)=lakó3, ρ(Mari néni)=lakó4
   b) ρ(édesanyja(_)) olyan függvény, ahol
      lakó2→lakó4, lakó1→lakó3
   c) ρ(tanul(_)) = { lakó1, lakó2 }
      ρ(dolgozik(_)) = { lakó4 }
      ρ(munkatársak(_ , _)) =
      = { (lakó2,lakó5),
      (lakó5,lakó2),
      (lakó3,lakó4),
      (lakó4,lakó3) }

$\mathcal{F}(0) = \{$ péter, én, juli-néni, Mari-néni $\}$
$\mathcal{F}(1) = \{$ édesanyja(_) $\}$
$\mathcal{P}(1) = \{$ tanul(_), dolgozik(_) $\}$
$\mathcal{P}(2) = \{$ munkatársak(_,_) $\}$

Var={x,y,z,...}

3. v: értékelés

ha $v(x) =$ lakó1, akkor $|\text{munkatársak}(\text{én}, x)|^{\langle U,\rho\rangle}_{v} = 0$

ha $v(x) =$ lakó5, akkor $|\text{munkatársak}(\text{én}, x)|^{\langle U,\rho\rangle}_{v} = 1$

Interpretáció és változó értékelés

<U,ρ> interpretáció:

1. U a város lakóinak halmaza: {lakó1, lakó2, lakó3, lakó4, lakó5, ...}
2. ρ a következő függvény:
   a) ρ(Péter)=lakó1, ρ(én)=lakó2, ρ(Juli néni)=lakó3, ρ(Mari néni)=lakó4
   b) ρ(édesanyja(_)) olyan függvény, ahol
      lakó2→lakó4, lakó1→lakó3
   c) ρ(tanul(_)) = { lakó1, lakó2 }
      ρ(dolgozik(_)) = { lakó4 }
      ρ(munkatársak(_ , _)) =
      = { (lakó2,lakó5),
      (lakó5,lakó2),
      (lakó3,lakó4),
      (lakó4,lakó3) }

$\mathcal{F}(0) = \{$ péter, én, juli-néni, Mari-néni $\}$
$\mathcal{F}(1) = \{$ édesanyja(_) $\}$

$\mathcal{P}(1) = \{$ tanul(_), dolgozik(_) $\}$
$\mathcal{P}(2) = \{$ munkatársak(_,_) $\}$

Var={x,y,z,...}

3. v: értékelés

Zárt formulák esetén?

$|\forall x \text{ munkatársak}(\text{én}, x)|^{\langle U,\rho\rangle}_{v} = 0$, hiszen

$|\text{munkatársak}(\text{én}, x)|^{\langle U,\rho\rangle}_{v[x:\text{lakó1}]} = 0$

Vegyük észre: zárt formulák esetén az értékelés nem befolyásolja, hogy igazak/hamisak-e

Interpretáció és változó értékelés

<U,ρ> interpretáció:

1. U a város lakóinak halmaza: {lakó1, lakó2, lakó3, lakó4, lakó5, ...}
2. ρ a következő függvény:
   a) ρ(Péter)=lakó1, ρ(én)=lakó2, ρ(Juli néni)=lakó3, ρ(Mari néni)=lakó4
   b) ρ(édesanyja(_)) olyan függvény, ahol
      lakó2 → lakó4, lakó1 → lakó3
   c) ρ(tanul(_)) = { lakó1, lakó2 }
      ρ(dolgozik(_)) = { lakó4 }
      ρ(munkatársak(_ , _)) =
      = { (lakó2,lakó5),
      (lakó5,lakó2),
      (lakó3,lakó4),
      (lakó4,lakó3) }

$\mathcal{F}(0) = \{$ péter, én, juli-néni, Mari-néni $\}$
$\mathcal{F}(1) = \{$ édesanyja(_) $\}$

$\mathcal{P}(1) = \{$ tanul(_), dolgozik(_) $\}$
$\mathcal{P}(2) = \{$ munkatársak(_,_) $\}$

Var={x,y,z,...}

3. v: értékelés

Zárt formulák esetén?

$|\exists x\ \text{munkatársak}(\text{én},x)|_v^{\langle U,\rho\rangle} = 1$, hiszen

$|\text{munkatársak}(\text{én},x)|^{\langle U,\rho\rangle}_{v[x:\text{lakó}5]} = 1$

Vegyük észre: zárt formulák esetén az értékelés nem befolyásolja, hogy igazak/hamisak-e

Tétel

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy **elsőrendű nyelv**, $A \in Form$ egy formula, $\langle U, \varrho \rangle$ egy **elsőrendű interpretáció** és v egy $\langle U, \varrho \rangle$ interpretációra támaszkodó **értékelés**.
Ekkor az $|A|_v^{\langle U, \varrho \rangle}$ érték egyértelműen meghatározott.

Tétel

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy **elsőrendű nyelv**, $A \in Form$ egy formula, $\langle U, \varrho \rangle$ egy **elsőrendű interpretáció** és v_1, v_2 két $\langle U, \varrho \rangle$ interpretációra támaszkodó **értékelés**.
Ha minden $x \in FreeVar(A)$ esetén $v_1(x) = v_2(x)$, akkor
$|A|_{v_1}^{\langle U, \varrho \rangle} = |A|_{v_2}^{\langle U, \varrho \rangle}$

Következmény

- A zárt formulák értéke független az értékelés megválasztásától, azaz zárt formulák értékét az interpretáció egyértelműen meghatározza.

Példa

$L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$

$\{\neg, \supset, \vee, \wedge, \equiv, \forall, \exists, (,)\}$

$\{x, y, z, \dots\}$

$\mathcal{F}(0) = \{szám\}$

$\mathcal{F}(1) = \{S(-)\}$

$\mathcal{F}(2) = \{műv1(-,-), műv2(-,-)\}$

$\mathcal{P}(2) = \{viszony(-,-)\}$

Azaz:

Con = {szám, S(-), műv1(-,-), műv2(-,-), viszony(-,-)}

függvények

predikátum

Interpretáció

$\langle U, \varrho \rangle$

- U : $\mathbb{N}$
- ϱ : $\varrho(szám) = 0$

  $\varrho(S(-)) = \_ + 1$

  $\varrho(műv1(-,-)) = \_ + \_$

  $\varrho(műv2(-,-)) = \_ * \_$

  $\varrho(viszony(-,-)) = \_ = \_$

Példa

$L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$

$\{x, y, z, \ldots\}$

$\{\neg, \supset, \vee, \wedge, \equiv, \forall, \exists, (,)\}$

$\mathcal{F}(0) = \{szám\}$

$\mathcal{F}(1) = \{S(-)\}$

$\mathcal{F}(2) = \{műv1(-,-), műv2(-,-)\}$

$\mathcal{P}(2) = \{viszony(-,-)\}$

Azaz:

$Con = \{szám, S(-), műv1(-,-), műv2(-,-), viszony(-,-)\}$

függvények

predikátum

Interpretáció

$\langle U, \varsigma \rangle$

- U : $\mathbb{N}$
- ς : $\varsigma(szám) = 0$

$\varsigma(S(-)) = \_ + 1$

$\varsigma(műv1(-,-)) = \_ + \_$

$\varsigma(műv2(-,-)) = \_ * \_$

$\varsigma(viszony(-,-)) = \_ = \_$

- $viszony(műv2(S(S(szám)), S(S(szám))), S(S(S(S(szám)))))$
- $\exists y \; viszony(x, műv2(y, y))$

A mai órán

- Interpretáció, változó értékelés, szemantikai szabályok
- Modell, kielégíthetőség, kielégíthetetlenség
- Logikai következmény, érvényesség, ekvivalencia
- Az eddigiek áttekintése

Definíció

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy **elsőrendű nyelv** és $\Gamma \subseteq Form$ egy tetszőleges formulahalmaz.
Az $\langle U, \varrho, v \rangle$ rendezett hármas elsőrendű modellje a Γ formulahalmaznak, ha

1. $\langle U, \varrho \rangle$ egy **interpretációja** az $L^{(1)}$ nyelvnek;
2. v egy $\langle U, \varrho \rangle$ interpretációra támaszkodó **értékelés**;
3. minden $A \in \Gamma$ esetén $|A|_v^{\langle U, \varrho \rangle} = 1$

Megjegyzés

Az elsőrendű nyelv egy adott formulahalmazának a(z elsőrendű) modellje a nyelv egy (elsőrendű) interpretációjának és az interpretációra támaszkodó értékelésnek olyan együttese, amelyben a tekintett formulahalmaz minden eleme igaz.

Definíció

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy **elsőrendű nyelv** és $A \in Form$ egy tetszőleges formula.
Az A formula modelljén az $\{A\}$ egyelemű formulahalmaz modelljét értjük.

Elsőrendű modell | Kielégíthetőség | Kielégíthetetlenség | Következményreláció | Érvényesség | Logikai ekvivalencia

Definíció

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy **elsőrendű nyelv** és $\Gamma \subseteq Form$ egy tetszőleges formulahalmaz.

A Γ fomulahalmaz kielégíthető, ha van **(elsőrendű) modellje**.

Megjegyzés

- A Γ fomulahalmaz kielégíthető, ha van olyan **(elsőrendű) interpretáció** és az interpretációra támaszkodó **értékelés**, amelyben a formulahalmaz minden eleme igaz.
- Kielégíthető formulahalmaz: nem tartalmaz logikai ellentmondást, azaz a formulahalmaz elemei lehetnek egyszerre igazak.

Elsőrendű modell | **Kielégíthetőség** | Kielégíthetetlenség | Következményreláció | Érvényesség | Logikai ekvivalencia

Definíció

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy **elsőrendű nyelv** és $A \in Form$ egy tetszőleges formula.

Az A formula kielégíthető, ha az $\{A\}$ formulahalmaz kielégíthető.

Megjegyzés

- Az A formula kielégíthető, ha van olyan **(elsőrendű) interpretáció** és az interpretációra támaszkodó **értékelés**, amelyben a formula igaz.
- Kielégíthető formula: a formula lehet igaz, azaz nem logikai hamisság.

- Ha egy formulahalmaz kielégíthető, akkor minden eleme kielégíthető.

Elsőrendű modell | Kielégíthetőség | Kielégíthetetlenség | Következményreláció | Érvényesség | Logikai ekvivalencia

Definíció

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy **elsőrendű nyelv** és $\Gamma \subseteq Form$ egy tetszőleges formulahalmaz.

A Γ fomulahalmaz kielégíthetetlen, ha nem kielégíthető, azaz nincs modellje.

Megjegyzés

- A Γ fomulahalmaz kielégíthetetlen, ha nincs olyan **(elsőrendű) interpretáció** és az interpretációra támaszkodó **értékelés**, amelyben a formulahalmaz **minden** eleme igaz.
- Kielégíthetetlen formulahalmaz: logikai ellentmondást tartalmaz, azaz a formulahalmaz elemei nem lehetnek egyszerre igazak.

Definíció

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy **elsőrendű nyelv** és $A \in Form$ egy tetszőleges formula.

Az A formula kielégíthetetlen, ha az $\{A\}$ formulahalmaz kielégíthetetlen.

A mai órán

- Interpretáció, változó értékelés, szemantikai szabályok
- Modell, kielégíthetőség, kielégíthetetlenség
- Logikai következmény, érvényesség, ekvivalencia
- Az eddigiek áttekintése

A nulladrendű nyelveknél láttuk:

Logikai következmény – szemantikai következmény – reláció

(Adott: $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$, $A \in Form$, $B \in Form$, $\Gamma \subseteq Form$)

- $A \in Form$ formulának következménye a B formula, $A \vDash B$, ha A minden modellje modellje B-nek is

- $\Gamma \subseteq Form$ formulahalmaznak következménye $B \in Form$, $\Gamma \vDash B$, ha Γ minden modellje modellje B-nek is.

Következményreláció, elsőrendű nyelvek

Logikai következmény – szemantikai következmény – reláció

$\boxed{L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle}$ $A \in Form$, $B \in Form$, $\Gamma \subseteq Form$)

- $A \in Form$ formulának következménye a B formula, $A \vDash B$, ha A minden modellje modellje B-nek is
- $\Gamma \subseteq Form$ formulahalmaznak következménye $B \in Form$ $\Gamma \vDash B$, ha Γ minden modellje modellje B-nek is.

Nulladrendben láttuk:

Adott $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$, $\Gamma \subseteq FORM$, $A \in Form$.

Tétel:

$\boxed{\Gamma \models A}$ akkor és csak akkor, ha $\boxed{\Gamma \cup \{\neg A\} \text{ kielégíthetetlen.}}$

Bizonyítás: $(\Rightarrow)$

Tegyük fel, hogy Γ minden modellje modellje A-nak is, de $\Gamma \cup \{\neg A\}$ kielégíthető. Akkor $\Gamma \cup \{\neg A\}$-nak van modellje. Legyen ez a ϱ interpretáció.

Ekkor: $|B|_\varrho = 1$ minden $B \in \Gamma$-ra, de $|\neg A|_\varrho = 1$, azaz $|A|_\varrho = 0$.

Vagyis Γ-nak van olyan modellje, ami nem modellje A-nak.

Ellentmondás.

A következmény reláció átfogalmazása, elsőrendű nyelv estén/1

$L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$, $\Gamma \subseteq Form$, $A \in Form$.

Tétel:

$\boxed{\Gamma \vDash A}$ akkor és csak akkor, ha $\Gamma \cup \{\neg A\}$ kielégíthetetlen.

Bizonyítás: $(\Rightarrow)$

Tegyük fel, hogy Γ minden modellje modellje A-nak is, de $\Gamma \cup \{\neg A\}$ kielégíthető. Ekkor $\Gamma \cup \{\neg A\}$-nak van modellje. Legyen $\langle U, \varrho \rangle$ interpretáció, v értékelés. Ekkor $|B|_v^{\langle U,\varrho\rangle} = 1$, minden $B \in \Gamma$-ra, de $|\neg A|_v^{\langle U,\varrho\rangle} = 1$.

Vagyis Γ-nak van olyan modellje, ami nem modellje A-nak. $|A|_v^{\langle U,\varrho\rangle} = 0$

Ellentmondás.

Nulladrendben láttuk:

Adott $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$, $\Gamma \subseteq Form$, $A \in Form$.

Tétel:

$\boxed{\Gamma \vDash A}$ akkor és csak akkor, ha $\boxed{\Gamma \cup \{\neg A\} \text{ kielégíthetetlen.}}$

Bizonyítás: $(\Leftarrow)$

Tegyük fel indirekt, hogy $\Gamma \cup \{\neg A\}$ kielégíthetetlen, de $\Gamma \nvDash A$, azaz Γ-nak van olyan modellje, ami A-nak nem modellje. Legyen ez g interpretáció.

Ekkor $|B|_g = 1$ minden $B \in \Gamma$ esetén, de $|A|_g = 0$, azaz $|\neg A|_g = 1$.

Vagyis g kielégíti $\Gamma \cup \{\neg A\}$-t, azaz $\Gamma \cup \{\neg A\}$ kielégíthető.

Ez ellentmondás, azaz az indirekt feltétel hamis volt.

A következmény reláció átfogalmazása, elsőrendű nyelv estén/2

$L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$, $\Gamma \subseteq FORM$, $A \in Form$.

Tétel:

$\boxed{\Gamma \models A}$ akkor és csak akkor, ha $\boxed{\Gamma \cup \{\neg A\} \text{ kielégíthetetlen.}}$

Bizonyítás: ($\Leftarrow$)

Tegyük fel indirekt, hogy $\Gamma \cup \{\neg A\}$ kielégíthetetlen, de $\Gamma \not\models A$, azaz Γ-nak van olyan modellje, ami A-nak nem modellje. Legyen ez a $\langle U, \varrho \rangle$ interpretáció, v értékelés. Erre $|B|_v^{\langle U,\varrho\rangle} = 1$ minden $B \in \Gamma$ esetén, de $|A|_v^{\langle U,\varrho\rangle} = 0$

$$|A|_v^{\langle U,\varrho\rangle} = 0$$

Vagyis ϱ kielégíti $\Gamma \cup \{\neg A\}$-t, azaz $\Gamma \cup \{\neg A\}$ kielégíthető!

Ez ellentmondás, azaz az indirekt feltétel hamis volt.

Definíció

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy **elsőrendű nyelv**, és $A \in Form$ egy formula. Az A formula érvényes, ha $\emptyset \vDash A$, azaz ha az A formula **logikai következménye** az üres halmaznak.

- Jelölés: $\vDash A$

Elsőrendű modell | Kielégíthetőség | Kielégíthetetlenség | Következményreláció | Érvényesség | **Logikai ekvivalencia**

Definíció

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy **elsőrendű nyelv**, és $A, B \in Form$ két formula.

Az A és a B formula logikailag ekvivalens, ha $A \vDash B$ és $B \vDash A$.

Jelölés: $A \Leftrightarrow B$

Példák

Kielégíthető, kielégíthetetlen, érvényes?

- $\forall(x)\, p(x) \supset p(a)$
- $\forall x \forall y\, (p(x,y) \supset p(y,x))$
- $\forall x\, \exists y\, p(x,y)$
- $\exists x\, \exists y\, (p(x) \wedge \neg p(y))$
- $\forall x\, (P(x) \wedge Q(x)) \equiv \forall x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x)$

A mai órán

- Interpretáció, változó értékelés, szemantikai szabályok
- Modell, kielégíthetőség, kielégíthetetlenség
- Logikai következmény, érvényesség, ekvivalencia
- Az eddigiek áttekintése

nulladrendű nyelv

$L^0 = \langle LC, Con, Form \rangle$

- szemantikai szabályok
  - $\neg, \wedge, \vee, \supset, \equiv$ „működik"

elsőrendű nyelv

$L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$

- szemantikai szabályok
  - $\neg, \wedge, \vee, \supset, \equiv, \exists, \forall$ „működik"

nulladrendű nyelv

$L^{0} = \langle LC, Con, Form \rangle$

- interpretáció
  - Con elemeinek értéke: logikai értékek

szemantikai szabályok

elsőrendű nyelv

$L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$

- interpretáció

  \+ szemantikai szabályok

változó értékelés

- Univerzum
- Con elemeinek értéke:
  1. objektumnevek:
     - konstans függvények
     - függvények
  2. állítások:
     - állítás konstansok logikai értékei
     - objektumok között fennálló relációk

nulladrendű nyelv

$L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$

- interpretáció, ϱ

- modell

  – ϱ, ahol $|A|_\varrho = 1$

elsőrendű nyelv

$L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$

- interpretáció $\langle U, \varrho \rangle$

  \+ változó értékelés: v

- modell

  – $\langle U, \varrho \rangle$ és v, ahol

  $$|A|_v^{\langle U, \varrho \rangle} = 1$$

nulladrendű nyelv	elsőrendű nyelv
$L^{0} = \langle LC, Con, Form \rangle$	$L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$
• interpretáció ϱ	• interpretáció $\langle U, \varrho \rangle$ + változó értékelés: v
• modell	• modell

- kielégíthető formula
  - van modellje
- kielégíthetetlen formula
  - nincs modellje
- $A \vDash B$ ($\Gamma \vDash B$) A formula (Γ halmaz) minden modellje B-nek is modellje
- A formula érvényes, ha $\emptyset \vDash A$

nulladrendű nyelv	elsőrendű nyelv
$L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$	$L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$
• interpretáció ϱ	• interpretáció $\langle U, \varrho \rangle$ + változókiértékelés: v
• modell	• modell

- kielégíthető formula
  – van modellje
- kielégíthetetlen formula
  – nincs modellje
- $A \vDash B$ ($\Gamma \vDash B$) A formula (Γ halmaz) minden modellje B-nek is modellje
- A formula érvényes, ha $\neg A$ kielégíthetetlen

nulladrendű nyelv

$L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$

- interpretáció ϱ
- modell

elsőrendű nyelv

$L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$

- interpretáció $\langle U, \varrho \rangle$ + változókiértékelés: v
- modell

- kielégíthető formula
- kielégíthetetlen formula
- logikai következmény
- érvényes formula
- logikai ekvivalencia:

$$A \Leftrightarrow B$$

akkor és csak akkor, ha

$$A \models B \text{ és } B \models A$$

nulladrendű nyelv	elsőrendű nyelv
$\mathcal{L}^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$	$\mathcal{L}^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$
∘ interpretáció ϱ	∘ interpretáció $\langle U, \varrho \rangle$ + változó-értékelés: v
∘ modell	∘ modell

∘ kielégíthető formula

∘ kielégíthetetlen formula

∘ logikai következmény

∘ érvényes formula

∘ logikai ekvivalencia:

Egy korábbi példa még egyszer:

Vizsgáljuk meg ezt a példát is, az előzőek szellemében:

1. Ma kedd van.
2. Xéna keddenként miniszoknyában jár az órákra.
3. Xéna ma miniszoknyában van.

Következtetések (!?)

- Következik-e 1 és 2-ből 3? (Dedukció)
- Következik-e 2 és 3-ból 1?
- Következik-e 1 és 3-ból 2?

1. A
2. Ha A, akkor B
3. B

A ,probléma: Formálisan, ha „A" igaz és „B" igaz, akkor „ha A akkor B" is igaz, noha a szöveges részben, a hétköznapi értelmezés szerint az 1. és a 3. állításból nem következik a 2. állítás. Azaz, a jobb oldali keretben lévő formalizáció nem jó, mert nem pontosan fedi le a bal oldali keretben lévő szöveg állításait.

Írjuk fel a lehetséges interpretációkat és válaszoljuk meg a három kérdést (tábla)

Hogyan kezelhető a helyzet az elsőrendű logika eszközeivel?

Vizsgáljuk meg ezt a példát is, az előzőek szellemében:

1. Ma kedd van.
2. Xéna keddenként miniszoknyában jár az órákra.
3. Xéna ma miniszoknyában van.

Következtetések (!?)

- Következik-e 1 és 2-ből 3? (Dedukció)
- Következik-e 2 és 3-ból 1?
- Következik-e 1 és 3-ból 2?

1. A
2. Ha A, akkor B
3. B

A mai órán

- Interpretáció, változó értékelés, szemantikai szabályok
- Modell, kielégíthetőség, kielégíthetetlenség
- Logikai következmény, érvényesség, ekvivalencia
- Az eddigiek áttekintése