Az informatika logikai alapjai
2. előadás

Vaszil György

vaszil.gyorgy@inf.unideb.hu

I. emelet 110-es szoba

A múlt órán

- Bevezető megjegyzések, motiváció (szabad művészetek, intellektus, praktikum)
- A tematikáról, segédanyagok, olvasmányok
- A helyes következtetésről
- A logika történetéről

A LOGIKA ALAPVETŐ FELADATA
A HELYES KÖVETKEZTETÉS FOGALMÁNAK
SZABATOS MEGHATÁROZÁSA, TÖRVÉNYEINEK FELTÁRÁSA.

Mi is hát a helyes következtetés?

• A premisszák igazsága szükségszerűen vonja maga után a konklúzió igazságát

(Lehetetlen olyan eset, hogy a premisszák igazak, a konklúzió hamis.)

Tisztázni kell viszont a „szükségszerű" és a „lehetetlen" jelentését

a természet törvényei szerint?

a szavak jelentése szerint?

Valami ilyesmire szeretnénk kilyukadni:

Premisszák: Esik az eső.
Ha esik az eső, sáros az út.
Konklúzió: Sáros az út.

Premisszák: Ha dolgozom, elfáradok.
Dolgozom.
Konklúzió: Elfáradok.

Premisszák: Ha három lábon gyábokorsz, a Kálán Púgra nem tudsz menni.
Három lábon gyábokorsz.
Konklúzió: A Kálán Púgra nem tudsz menni.

Premisszák: Esik az eső.
Ha esik az eső, sáros az út.
Konklúzió: Sáros az út.

Premisszák: Ha dolgozom, elfáradok.
Dolgozom.
Konklúzió: Elfáradok.

Premisszák: Ha három lábon gyábokorsz, a Kálán Púgra nem tudsz menni.
Három lábon gyábokorsz.
Konklúzió: A Kálán Púgra nem tudsz menni.

Premisszák : Ha A akkor B.
A
Konklúzió : B

Állítások és logikai szavak:

1. Ma kedd van.

2. Xéna keddenként miniszoknyában jár az órákra.

   vagyis

   Ha kedd van, akkor Xéna miniszoknyában van.

3. Xéna ma miniszoknyában van.

---

1. A
2. Ha A, akkor B
3. B

Egy következtetés logikai helyessége független a benne szereplő állítások tartalmától.

→ Csupán a logikai szavak jelentésétől és a logikai szavak meghatározta szerkezettől függ.

Kis kitérő (nem nagy)

- **Extenzionális logika**: A „logikai szavak” segítségével képzett (összetett) állítások igazságértéke a logikai szavak „működésén” kívül csak a kiinduló alapállítások (rész-állítások) igazságértékétől függ
  – Esik az eső és süt a nap
- Más fajta (**intenzionális**) logika is van, amikor ez nem feltétlen teljesül
  - A vőlegény aggódott mert a menyasszony késett

A mai órán:
Állításlogika (más néven kijelentéslogika vagy nulladrendű logika)

- Állítások, nemlogikai és logikai konstansok
- Szintaxis:
  - Az állításlogika nyelve, formulák
- Szemantika:
  - A formulák jelentése, interpretáció, igazságtáblázat
- Szemantikai fogalmak:
  - modell
  - kielégíthetőség, kielégíthetetlenség
  - logikai (szemantikai) következmény reláció
  - érvényesség
  - logikai ekvivalencia

Állításlogika, más néven nulladrendű logika (kijelentéslogika)

Állítás alatt olyan mondatot értünk, amelyről egyértelműen eldönthető, hogy igaz vagy hamis.

Állításokból kötőszavakkal összetett állításokat képezhetünk.

Az összetett állítások igazságértékét a benne szereplő rész-állítások igazságértéke és a kötőszavak jelentése határozza meg.

igazságfunktor (igazságfüggvényeket jelölnek)

Például

- Esik eső, süt a nap, Paprikajancsi mosogat.

Az elemi állítások:

- Esik az eső.
- Süt a nap.
- Paprikajancsi mosogat.

Az <u>és</u> mint „igazságfüggvényt” jelölő szó.

Mi az, hogy igazságfüggvény?

Másik példa a múltkori gyakorlatról

Juli elmegy, és Éva itt marad, vagy mindketten elmennek, és Juli vissza sem jön, de Éva vagy visszajön, vagy nem.

((Juli elmegy)∧(Éva itt marad))∨((Juli elmegy)∧(Éva elmegy)∧¬(Juli vissza-jön)∧((Éva visszajön)∨¬(Éva visszajön)))

Juli elmegy, és Éva itt marad, vagy mindketten elmennek, és Juli vissza sem jön, de Éva vagy visszajön, vagy nem.

((Juli elmegy)$\wedge$(Éva itt marad))$\vee$((Juli elmegy)$\wedge$(Éva elmegy)$\wedge\neg$(Juli visszajön)$\wedge$((Éva visszajön)$\vee\neg$(Éva visszajön)))

Juli elmegy, és Éva itt marad,

<u>vagy</u>

mindketten elmennek, és Juli vissza sem jön, de Éva vagy visszajön, vagy nem.

Juli elmegy, és Éva itt marad, vagy mindketten elmennek, és Juli vissza sem jön, de Éva vagy visszajön, vagy nem.

((Juli elmegy)$\wedge$(Éva itt marad))$\vee$((Juli elmegy)$\wedge$(Éva elmegy)$\wedge\neg$(Juli visszajön)$\wedge$((Éva visszajön)$\vee\neg$(Éva visszajön)))

(Juli elmegy) <u>és</u> (Éva itt marad)

<u>vagy</u>

mindketten elmennek, és Juli vissza sem jön, de Éva vagy visszajön, vagy nem.

Juli elmegy, és Éva itt marad, vagy mindketten elmennek, és Juli vissza sem jön, de Éva vagy visszajön, vagy nem.

$((\text{Juli elmegy}) \wedge (\text{Éva itt marad})) \vee ((\text{Juli elmegy}) \wedge (\text{Éva elmegy}) \wedge \neg(\text{Juli visszajön}) \wedge ((\text{Éva visszajön}) \vee \neg(\text{Éva visszajön})))$

(Juli elmegy) <u>és</u> (Éva itt marad)

<u>vagy</u>

(mindketten elmennek)
<u>és</u> (Juli vissza sem jön)
<u>és</u> (Éva vagy visszajön, vagy nem)

Juli elmegy, és Éva itt marad, vagy mindketten elmennek, és Juli vissza sem jön, de Éva vagy visszajön, vagy nem.

$$((\text{Juli elmegy}) \wedge (\text{Éva itt marad})) \vee ((\text{Juli elmegy}) \wedge (\text{Éva elmegy}) \wedge \neg(\text{Juli visszajön}) \wedge ((\text{Éva visszajön}) \vee \neg(\text{Éva visszajön})))$$

(Juli elmegy) és (Éva itt marad)

vagy

((Juli elmegy) és (Éva elmegy))

és (Juli vissza sem jön)

és (Éva vagy visszajön, vagy nem)

Juli elmegy, és Éva itt marad, vagy mindketten elmennek, és Juli vissza sem jön, de Éva vagy visszajön, vagy nem.

$$((\text{Juli elmegy})\land(\text{Éva itt marad}))\lor((\text{Juli elmegy})\land(\text{Éva elmegy})\land\neg(\text{Juli visszajön})\land((\text{Éva visszajön})\lor\neg(\text{Éva visszajön})))$$

(Juli elmegy) <u>és</u> (Éva itt marad)

<u>vagy</u>

((Juli elmegy) <u>és</u> (Éva elmegy))
<u>és</u> (<u>nem</u> (Juli visszajön))
<u>és</u> (Éva vagy visszajön, vagy nem)

Juli elmegy, és Éva itt marad, vagy mindketten elmennek, és Juli vissza sem jön, de Éva vagy visszajön, vagy nem.

((Juli elmegy)∧(Éva itt marad))∨((Juli elmegy)∧(Éva elmegy)∧¬(Juli visszajön)∧((Éva visszajön)∨¬(Éva visszajön)))

(Juli elmegy) és (Éva itt marad)

vagy

((Juli elmegy) és (Éva elmegy))
és (nem (Juli visszajön))

és ((Éva visszajön)
vagy (nem (Éva visszajön)))

Elemi állítások, logikai „kötőszavak”

(Juli elmegy) <u>és</u> (Éva itt marad)

<u>vagy</u>

((Juli elmegy) <u>és</u> (Éva elmegy))
<u>és</u> (<u>nem</u> (Juli visszajön))
<u>és</u> ((Éva visszajön)
<u>vagy</u> (<u>nem</u> (Éva visszajön)))

Elemi állítások, logikai „kötőszavak”

(Juli elmegy) <u>és</u> (Éva itt marad)

<u>vagy</u>

((Juli elmegy) <u>és</u> (Éva elmegy))
<u>és</u> (<u>nem</u> (Juli visszajön))

<u>és</u> ((Éva visszajön)
<u>vagy</u> (<u>nem</u> (Éva visszajön)))

Je: Juli elmegy
Ém: Éva itt marad
Ée: Éva elmegy
Jv: Juli visszajön
ÉV: Éva visszajön

Elemi állításokat jelölő jelek és logikai jelek

és, vagy, nem, (,)

Je: Juli elmegy
Ém: Éva itt marad
Ée: Éva elmegy
Jv: Juli visszajön
ÉV: Éva visszajön

(Je és Ém) vagy ((Je és Ém) és (nem Jv) és (Év vagy (nem Év)))

Juli elmegy, és Éva itt marad, vagy mindketten elmennek, és Juli vissza sem jön, de Éva vagy visszajön, vagy nem.

A mai órán:
Állításlogika (más néven kijelentéslogika vagy nulladrendű logika)

- Állítások, nemlogikai és logikai konstansok
- Szintaxis:
  - Az állításlogika nyelve, formulák
- Szemantika:
  - A formulák jelentése, interpretáció, igazságtáblázat
- Szemantikai fogalmak:
  - modell
  - kielégíthetőség, kielégíthetetlenség
  - logikai (szemantikai) következmény reláció
  - érvényesség
  - logikai ekvivalencia

Szintaxis és szemantika

Hogyan kell a szöveget megformálni?

- jólformáltság
- grammatikai szabályok

Hogyan rendelünk jelentést a szöveghez?

Szintaxis: Az állításkalkulus nyelve

Klasszikus nulladrendű nyelv:

$\boxed{L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle}$ ahol

- $LC=\{\neg,\supset,\wedge,\vee,\equiv,(,)\}$ -**logikai konstansok** halmaza
- $Con \neq \emptyset$ -**nemlogikai konstansok** (állítás- vagy kijelentés-paraméterek) legfeljebb megszámlálhatóan végtelen halmaza
  $Con = \{p, q, r, \ldots\}$
  $LC \cap Con = \emptyset$
- Form -**formulák** (jól formált kifejezések)

LC véges. Mi az, hogy Con megsz.-ható végtelen?

Kitérő a logikai konstansokról, később erről még beszélünk

- ¬ – negáció, tagadás, (nem)
- ⊃ – implikáció, kondicionális (ha...akkor) (!)
- ∧ – konjunkció (és)
- ∨ – diszjunkció (vagy)
- ≡ – ekvivalencia (akkor és csak akkor)

Miért kitérő ez?

A formulák megformálásának szabályai (ez egy ún. induktív definíció)

- $Con \subseteq Form$ — $p, q, r, \ldots$ ← atomi formulák
- Ha $A, B \in Form$, akkor
  - $\neg(A) \in Form$ — $\neg(p), \neg(q), \neg(r), \ldots$
  - $(A \wedge B) \in Form$, — $(p \wedge q), (\neg(r) \wedge p), \ldots$
  - $(A \vee B) \in Form$, — $(p \vee \neg(r)), ((\neg(r) \wedge p) \vee p), \ldots$
  - $(A \equiv B) \in Form$ — $((\neg(r) \wedge p) \vee p) \equiv (\neg(r) \wedge p)), \ldots$
  - $(A \supset B) \in Form$, — $((((\neg(r) \wedge p) \supset p)) \supset (p \wedge q)), \ldots$

és így tovább, pl.:

$\ldots \neg ((((\neg(r) \wedge p) \supset p)) \supset (p \wedge q)), \quad ((\neg(r) \wedge p) \supset (p \vee \neg(r))), \ldots$

A formulák mint fák és mint stringek

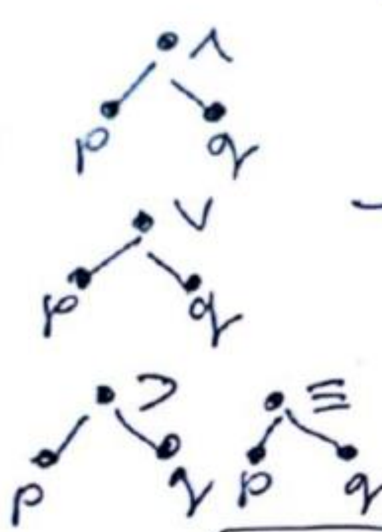
- atomi formula p $\Longleftrightarrow$ - a fa egy levele p-vel címkézve

$\bullet\, p$

- $\neg(p)$ $\Longleftrightarrow$

- egy csúcs $\neg$-mal címkézve, egyetlen „gyerekkel" ami p-vel címkézett

- $(p \wedge q)$
$(p \vee q)$
$(p \supset q)$
$(p \equiv q)$ $\Longleftrightarrow$



- egy csúcs a műveleti jellel/operátorral és 2 gyerek az operandusokkal címkézve

(levél, gyerek)

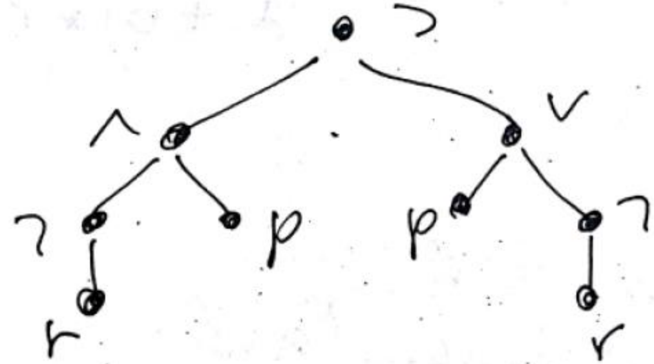
(Miért, hogy fa?)

Például

formula

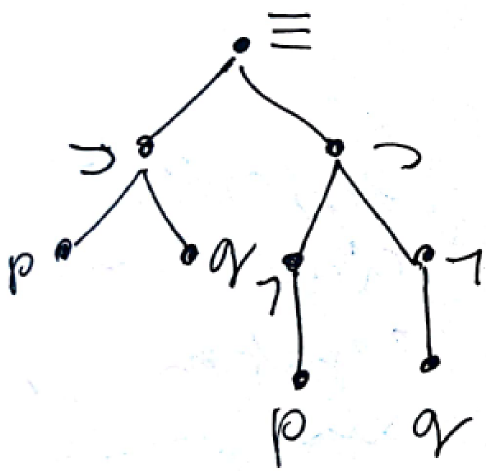
$$((\neg(r)\wedge p)\supset(p\vee\neg(r)))\quad\longleftrightarrow$$

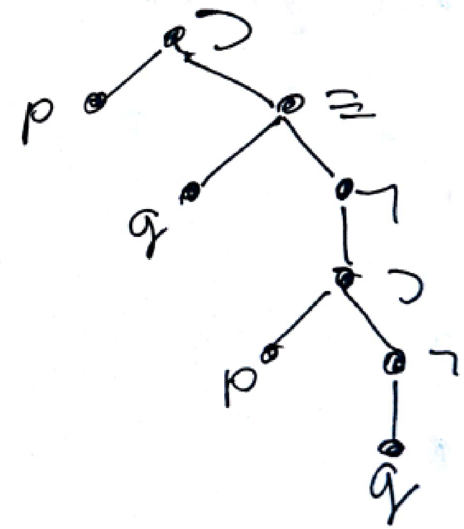
szerkezeti fa



→ Látszik, hogy miért kell a sok zárójel.

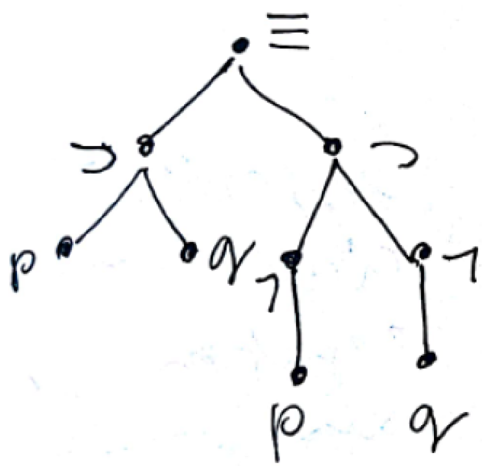
Zárójelek nélkül a sztring reprezentáció nem egyértelmű

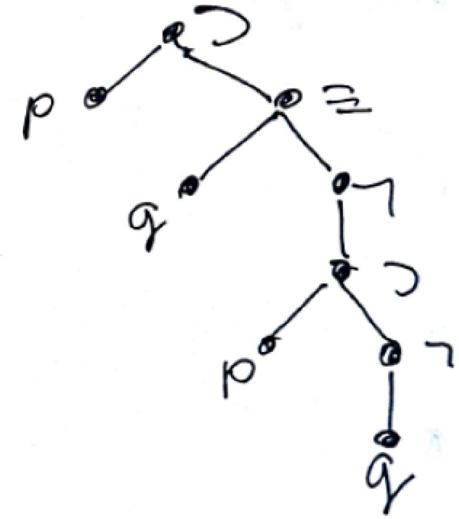




$p \supset q \equiv \neg p \supset \neg q$ $\qquad$ $p \supset q \equiv \neg p \supset \neg q$

Zárójelek nélkül a sztring reprezentáció nem egyértelmű





$p \supset q \equiv \neg p \supset \neg q$

$((p \supset q) \equiv (\neg(p) \supset \neg(q)))$

$p \supset q \equiv \neg p \supset \neg q$

$(p \supset (q \equiv (\neg(p \supset \neg(q)))))$

Bizonyos zárójelek amit elhagyhatók — precedencia

Például: $(a+(b*c)) \longleftrightarrow a+b*c$

$$((a+b)*c) \longleftrightarrow (a+b)*c$$

Hiszen a műveletek precedenciájának sorrendje: $*, +$ (A $*$ precedenciája nagyobb)

A logikai operátorok precedenciája

Csökkenő sorrendben: $\neg, \wedge, \vee, \supset, \equiv$

Ezek szerint, például:

- $\big((p \supset q) \equiv (\neg(p) \supset \neg(q))\big) \iff p \supset q \equiv \neg p \supset \neg q$
- $\big(p \supset (q \equiv (\neg(p \supset \neg(q))))\big) \iff p \supset \big(q \equiv \neg(p \supset \neg q)\big)$

Továbbá: (példák)

- $p \vee ((q \wedge r) \vee s) \iff p \vee q \wedge r \vee s$
- $\big((p \vee q) \wedge (r \vee s)\big) \iff (p \vee q) \wedge (r \vee s)$

Tömörítés: (példák)

- $p \vee q \vee r$, $p \wedge q \wedge r$ -t így értjük: $(p \vee (q \vee r))$, $(p \wedge (q \wedge r))$

Ez mindegy

Ez fontos

- $p \supset q \supset r$ -t így értjük: $(p \supset (q \supset r))$

Két „argumentumú” operátorok, kettesével lehet őket végrehajtani

[illegible]

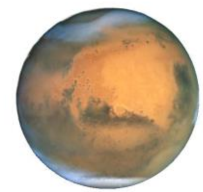
Operator	Alternates	Java language
$\neg$	$\sim$	!
$\wedge$	&	&, &&
$\vee$		|, ||
$\rightarrow$	$\supset, \Rightarrow$	
$\leftrightarrow$	$\equiv, \Leftrightarrow$	

A mai órán: Állításlogika (más néven kijelentéslogika vagy nulladrendű logika)

- Állítások, nemlogikai és logikai konstansok
- Szintaxis:
  - Az állításlogika nyelve, formulák
- Szemantika:
  - A formulák jelentése, interpretáció, igazságtáblázat
- Szemantikai fogalmak:
  - modell
  - kielégíthetőség, kielégíthetetlenség
  - logikai (szemantikai) következmény reláció
  - érvényesség
  - logikai ekvivalencia

Interpretáció

p: „a bolygón van víz"
q: „a bolygónak van élővilága"
r: „a bolygó a nap körül kering"



Föld

p: igaz
q: igaz
r: igaz

pl. $\boxed{p \wedge q \wedge r : \text{igaz}}$

Mars

p: hamis
q: hamis
r: igaz

$\boxed{p \wedge q \wedge r : \text{hamis}}$

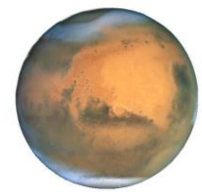
Interpretáció

p: „a bolygón van víz"
q: „a bolygónak van élővilága"
r: „a bolygó a nap körül kering"

Föld

egyik interpretáció →

p : igaz
q : igaz
r : igaz



Mars

← másik interpretáció

p : hamis
q : hamis
r : igaz

pl.

$\boxed{p \wedge q \wedge r : \text{igaz}}$

$\boxed{p \wedge q \wedge r : \text{hamis}}$

Interpretáció: értelmezés („interpreter")

Interpretáció – Formálisan

$L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ nulladrendű nyelv
interpretációja olyan ϱ függvény, ami:

$$\varrho : Con \to \{0,1\}$$

ϱ logikai értékeket (igaz: 1, hamis: 0) rendel
az atomi formulákhoz (a nemlogikai
konstansokhoz)

Interpretáció – megjegyzések

- Minden szemantikai úton felépített logikai rendszer esetén az interpretáció feladata az, hogy szemantikai értéket rendeljen a nemlogikai konstansokhoz.
- A nulladrendű logikában a nemlogikai konstansok állítások helyettesítésére szolgálnak. Az állítások lehetséges szemantikai értékei az igazságértékek, így egy interpretáció minden nemlogikai konstanshoz egy igazságértéket rendel (megmondja, hogy az adott szituációban az állításparaméter milyen igazságértékű állítás helyett szerepel).
- Ha a nulladrendű nyelvben *n* darab nemlogikai konstans van, akkor a különböző interpretációk száma 2^n.

Aszalós László megjegyzései

Formula szemantikai értékének (igaz, hamis) meghatározása

Szemantikai szabályok:

Adott $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$,

$\varrho : Con \to \{0, 1\}$

Ha $A \in Form$ („A" egy formulát jelöl), akkor $\varrho(A)$-t jelöljük $|A|_\varrho$-val.

- Ha $p \in Con$, akkor $|p|_\varrho = \varrho(p)$
- Ha $A \in Form$, akkor $|\neg A|_\varrho = 1 - |A|_\varrho$.
- Ha $A, B \in Form$, akkor

$$|(A \wedge B)|_\varrho = \begin{cases} 1, & \text{ha } |A|_\varrho = 1 \text{ és } |B|_\varrho = 1 \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

$$|(A \vee B)|_\varrho = \begin{cases} 0, & \text{ha } |A|_\varrho = 0 \text{ és } |B|_\varrho = 0 \\ 1, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

$$|(A \supset B)|_\varrho = \begin{cases} 0, & \text{ha } |A|_\varrho = 1 \text{ és } |B|_\varrho = 0 \\ 1, & \text{egyébként} \end{cases}$$

$$|(A \equiv B)|_\varrho = \begin{cases} 1, & \text{ha } |A|_\varrho = |B|_\varrho \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Az iménti szemantikai szabályok táblázatba foglalva

$\lvert A \rvert_\varrho$	$\lvert B \rvert_\varrho$	$\lvert \neg A \rvert_\varrho$	$\lvert (A \supset B) \rvert_\varrho$	$\lvert (A \wedge B) \rvert_\varrho$	$\lvert (A \vee B) \rvert_\varrho$	$\lvert (A \equiv B) \rvert_\varrho$
0	0	1	1	0	0	1
0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	0	0	1	0
1	1	0	1	1	1	1

Nulladrendű szemantikai szabályok – megjegyzések

- A szemantikai szabályok megadása induktív definícióval történik,amelyben a bázist a Con halmaz elemeire vonatkozó 1. szabály alkotja.
- Minden szemantikai úton felépített logikai rendszer esetén a szemantikai szabályok feladata a logikai konstansok jelentésének megadása.
- A nulladrendű szemantikai szabályok segítségével egy adott interpretációban a nulladrendű nyelv minden formulájához igazságértéket rendelünk.

Megengedő „vagy" és kizáró „vagy"

- Este moziba megyek, vagy színházba megyek.
- Popcornt kérsz a büfében, vagy kólát?

„v"-t megengedő értelemben használjuk:

- A Föld távolabb van a Naptól mint a Vénusz $\boxed{\vee}$ $1+1=3$.
- A Föld távolabb van a Naptól mint a Vénusz $\boxed{\vee}$ $1+1=2$.

} igaz

- A Vénusz távolabb van a Naptól mint a Föld $\boxed{\vee}$ $1+1=3$.

} hamis

Az implikációról – „materiális implikáció” (kondicionális)

p	q	p ⊃ q
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

- A Föld távolabb van a Naptól mint a Vénusz ⊃ $1+1=3$ } hamis
- A Vénusz távolabb van a Naptól mint a Föld ⊃ $1+1=3$ } igaz

(miért „materiális”?)

- Ha Zebulonnak diplomája van, én vagyok a kínai császár.
- Ha a bálnák elevenszülők, a tengervíz sós.
  Ha a cetek tojásrakók, a tengervíz sós.

„Valódi” feltételes állítások:

- Ha a vezetőn áram halad át, a vezető körül mágneses tér keletkezik.
- Ha Péter sikeresen diplomázik, mopedet kap apjától.
- Ha a híd határidő előtt elkészül, a kivitelezők prémiumot kapnak.
  Ha az esőzés tartós lesz, nagyon gyönge lesz a kukoricatermés.
- Ha János most otthon van, akkor szabadnapos.

Miért ilyen furcsa az implikáció definíciója?

„Valódi” feltételes állítások:

- Ha a vezetőn áram halad át, a vezető körül mágneses tér keletkezik.
- Ha Péter sikeresen diplomázik, mopedet kap apjától.
- Ha a híd határidő előtt elkészül, a kivitelezők prémiumot kapnak.
  Ha az esőzés tartós lesz, nagyon gyönge lesz a kukoricatermés.
- Ha János most otthon van, akkor szabadnapos.

→ Mi bennük a közös minimum? Ez:

„Ha A akkor B” nem lehet igaz, ha **A igaz és B** mégis **hamis**

Az implikációról – „materiális implikáció" (kondicionális)

p	q	p ⊃ q
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

A kondicionális definíciójaként fogadjuk el ezt:

$(A \supset B) \quad \leftrightarrow \quad \neg(A \wedge \neg B)$

Miért ilyen furcsa az implikáció definíciója?

„Így lesz jó." Például:

Szeretnénk, ha $\boxed{(A \wedge B) \supset B}$ mindig „igaz" lenne.

A lehetőségek ezek:

A	B	$(A \wedge B) \supset B$
1	1	$1 \supset 1$
0	1	$0 \supset 1$
1	0	$0 \supset 0$
0	0	$0 \supset 0$

Ezeket mind „igaz" ítéletnek szeretnénk.

(Miért akarjuk, hogy ez $(A \wedge B) \supset B$ mindig igaz legyen?) 5

Igazságtáblázat – példa

p	q	r	¬p	(q ⊃ r)	(¬p ∧ (q ⊃ r))
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	1	0
1	1	0	0	0	0
1	1	1	0	1	0

(¬	p	∧	(q	⊃	r))
1	0	1	0	1	0
1	0	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	0
0	1	0	0	1	1
0	1	0	1	0	0
0	1	0	1	1	1

Még egy példa

Example 2.23 The computation of the truth value of $(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$ for the interpretation $\mathscr{I}(p) = T$ and $\mathscr{I}(q) = F$ is:

$$(p \quad \to \quad q) \quad \leftrightarrow \quad (\neg \quad q \quad \to \quad \neg \quad p)$$

(Mások a jelölések: interpretáció, implikáció, ekvivalencia, F, T)
(Melyik melyik?)

Még egy példa

Example 2.23 The computation of the truth value of $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$ for the interpretation $\mathscr{I}(p) = T$ and $\mathscr{I}(q) = F$ is:

$$\begin{array}{ccccccccc} (p & \rightarrow & q) & \leftrightarrow & (\neg & q & \rightarrow & \neg & p) \\ T & & F & & & F & & & T \end{array}$$

(Mások a jelölések: interpretáció, implikáció, ekvivalencia, F, T)
(Melyik melyik?)

Még egy példa

Example 2.23 The computation of the truth value of $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$ for the interpretation $\mathscr{I}(p) = T$ and $\mathscr{I}(q) = F$ is:

$(p$	$\rightarrow$	$q)$	$\leftrightarrow$	$(\neg$	q	$\rightarrow$	$\neg$	$p)$
T		F			F			T
T		F		$\boxed{T}$	F			T

(Mások a jelölések: interpretáció, implikáció, ekvivalencia, F, T)
(Melyik melyik?)

Még egy példa

Example 2.23 The computation of the truth value of $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$ for the interpretation $\mathscr{I}(p) = T$ and $\mathscr{I}(q) = F$ is:

$(p$	$\rightarrow$	$q)$	$\leftrightarrow$	$(\neg$	q	$\rightarrow$	$\neg$	$p)$
T		F			F			T
T		F		T	F			T
T		F		$\boxed{T}$	F		$\boxed{F}$	T

(Mások a jelölések: interpretáció, implikáció, ekvivalencia, F, T)
(Melyik melyik?)

Még egy példa

Example 2.23 The computation of the truth value of $(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$ for the interpretation $\mathscr{I}(p) = T$ and $\mathscr{I}(q) = F$ is:

$$\begin{array}{ccccccccc}
(p & \to & q) & \leftrightarrow & (\neg & q & \to & \neg & p) \\
T & & F & & & F & & & T \\
T & & F & & T & F & & & T \\
T & & F & & T & F & & F & T \\
T & & F & & T & F & \boxed{F} & F & T
\end{array}$$

(Mások a jelölések: interpretáció, implikáció, ekvivalencia, F, T)
(Melyik melyik?)

Még egy példa

Example 2.23 The computation of the truth value of $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$ for the interpretation $\mathscr{I}(p) = T$ and $\mathscr{I}(q) = F$ is:

$(p$	$\rightarrow$	$q)$	$\leftrightarrow$	$(\neg$	q	$\rightarrow$	$\neg$	$p)$
T		F			F			T
T		F		T	F			T
T		F		T	F		F	T
T		F		T	F	F	F	T
T	$\boxed{F}$	F		T	F	F	F	T

(Mások a jelölések: interpretáció, implikáció, ekvivalencia, F, T)
(Melyik melyik?)

Még egy példa

Example 2.23 The computation of the truth value of $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$ for the interpretation $\mathscr{I}(p) = T$ and $\mathscr{I}(q) = F$ is:

$(p$	$\rightarrow$	$q)$	$\leftrightarrow$	$(\neg$	q	$\rightarrow$	$\neg$	$p)$
T		F			F			T
T		F		T	F			T
T		F		T	F		F	T
T		F		T	F	F	F	T
T	F	F		T	F	F	F	T
T	F	F	$\boxed{T}$	T	F	F	F	T

Azaz: Ebben az interpretációban a formula igaz

(Mások a jelölések: interpretáció, implikáció, ekvivalencia, F, T)
(Melyik melyik?)

A mai órán: Állításlogika (más néven kijelentéslogika vagy nulladrendű logika)

- Állítások, nemlogikai és logikai konstansok
- Szintaxis:
  - Az állításlogika nyelve, formulák
- Szemantika:
  - A formulák jelentése, interpretáció, igazságtáblázat
- Szemantikai fogalmak:
  - modell
  - kielégíthetőség, kielégíthetetlenség
  - logikai (szemantikai) következmény reláció
  - érvényesség
  - logikai ekvivalencia

Formula és formulahalmaz modellje

Legyen adott: • $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ nulladrendű nyelv
• ϱ interpretáció

Ekkor:

• ϱ interpretáció az $A \in Form$ formula modellje, ha

$$|A|_\varrho = 1$$

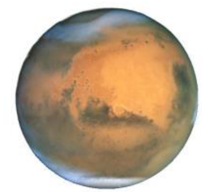
• ϱ interpretáció az $\Gamma \subseteq Form$ formulahalmaz modellje, ha

$$|A|_\varrho = 1 \text{ minden } A \in \Gamma\text{-ra}$$

Interpretáció

p: „a bolygón van víz"
q: „a bolygónak van élővilága"
r: „a bolygó a nap körül kering"

Föld



Mars

egyik interpretáció →

p	igaz
q	igaz
r	igaz

modellje $p \wedge q \wedge r$ -nek

pl. $\boxed{p \wedge q \wedge r : \text{igaz}}$

másik ← interpretáció

p	hamis
q	hamis
r	igaz

nem modellje $p \wedge q \wedge r$ -nek

$\boxed{p \wedge q \wedge r : \text{hamis}}$

A mai órán: Állításlogika (más néven kijelentéslogika vagy nulladrendű logika)

- Állítások, nemlogikai és logikai konstansok
- Szintaxis:
  - Az állításlogika nyelve, formulák
- Szemantika:
  - A formulák jelentése, interpretáció, igazságtáblázat
- Szemantikai fogalmak:
  - modell
  - kielégíthetőség, kielégíthetetlenség
  - logikai (szemantikai) következmény reláció
  - logikai ekvivalencia
  - érvényesség

Kielégíthetőség

(Adott: $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$, $A \in Form$, $\Gamma \subseteq Form$)

Egy A formula vagy egy Γ formulahalmaz kielégíthető, ha van modellje.

Megjegyzés.

- Az A fomula kielégíthető, ha van olyan interpretáció, amelyben a formula igaz.
- Kielégíthető formula: a formula lehet igaz, azaz nem logikai hamisság.
- Ha egy formulahalmaz kielégíthető, akkor minden eleme kielégíthető.
- Az előző állítás megfordítása nem igaz. Pl.: a {p,¬p} formulahalmaz minden eleme kielégíthető, de maga a formulahalmaz nem kielégíthető.

Megjegyzés.

- A Γ fomulahalmaz kielégíthető, ha van olyan interpretáció, amelyben a formulahalmaz minden eleme igaz.
- Kielégíthető formulahalmaz: nem tartalmaz logikai ellentmondást, azaz a formulahalmaz elemei lehetnek egyszerre igazak.

Kielégíthetetlenség

(Adott: $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$, $A \in Form$, $\Gamma \subseteq Form$)

Egy A formula vagy egy Γ formulahalmaz kielégíthetetlen, ha nem kielégíthető, azaz, ha nincs modellje.

Megjegyzés.

- Az A fomula kielégíthetetlen, ha nincs olyan interpretáció, amelyben a formula igaz, azaz minden interpretációban a formula hamis értékű.

Megjegyzés.

- A Γ formulahalmaz kielégíthetetlen, ha nincs olyan interpretáció, amelyben a formulahalmaz mindeneleme igaz.
- Kielégíthetetlen formulahalmaz: logikai ellentmondást tartalmaz, azaz a formulahalmaz elemei nem lehetnek egyszerre igazak

A mai órán:
Állításlogika (más néven kijelentéslogika vagy nulladrendű logika)

- Állítások, nemlogikai és logikai konstansok
- Szintaxis:
  - Az állításlogika nyelve, formulák
- Szemantika:
  - A formulák jelentése, interpretáció, igazságtáblázat
- Szemantikai fogalmak:
  - modell
  - kielégíthetőség, kielégíthetetlenség
  - logikai (szemantikai) következmény reláció
  - logikai ekvivalencia
  - érvényesség

Érvényesség

(Adott $L^{(0)}_F$ (LC, Con, Form), $A \in$ Form)

Egy A formula érvényes, ha

minden interpretációban igaz, azaz

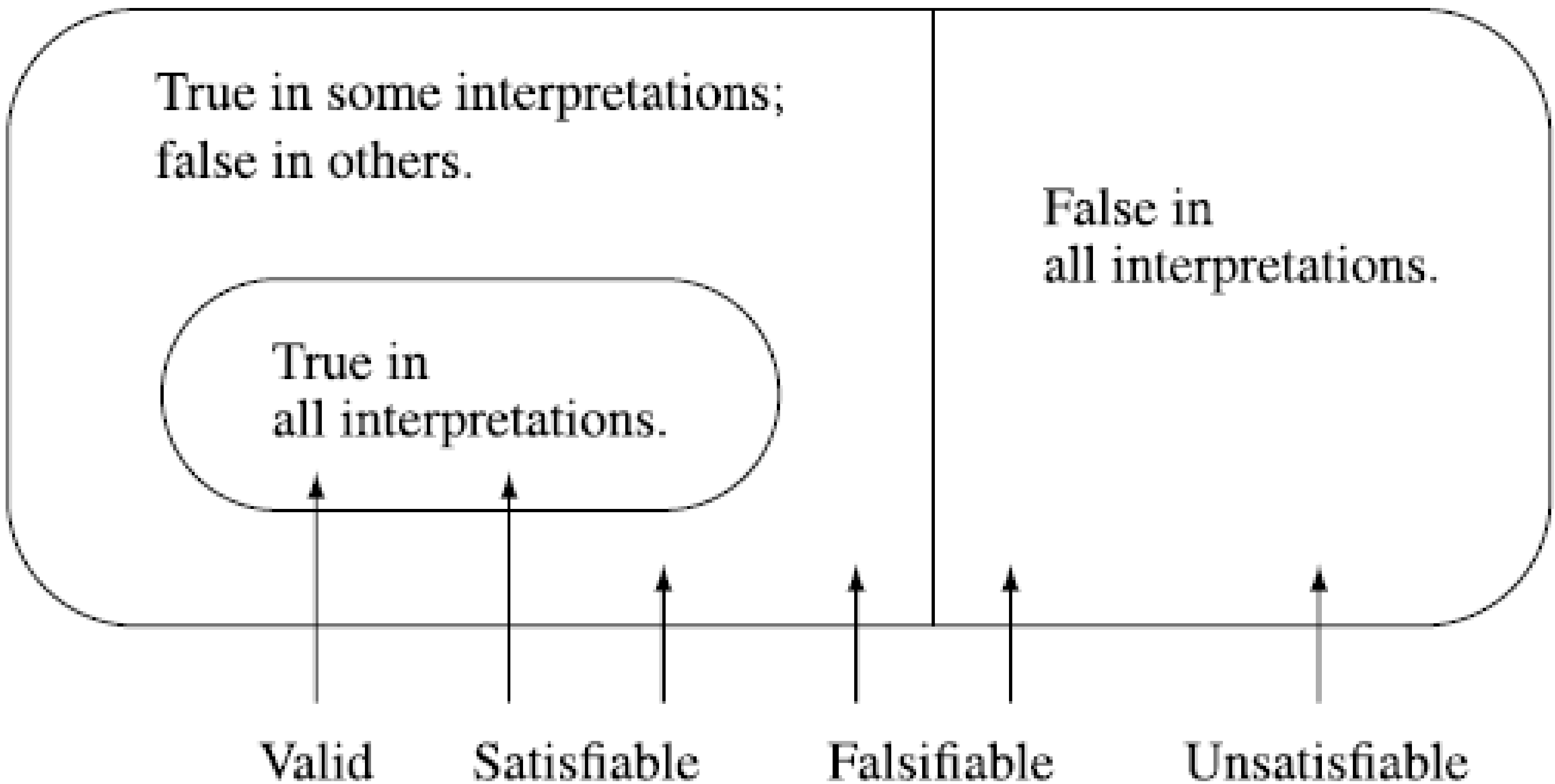
$|A|_g = 1$ minden $g: Con \to \{0,1\}$-re

Ha A formula érvényes, akkor A tautológia

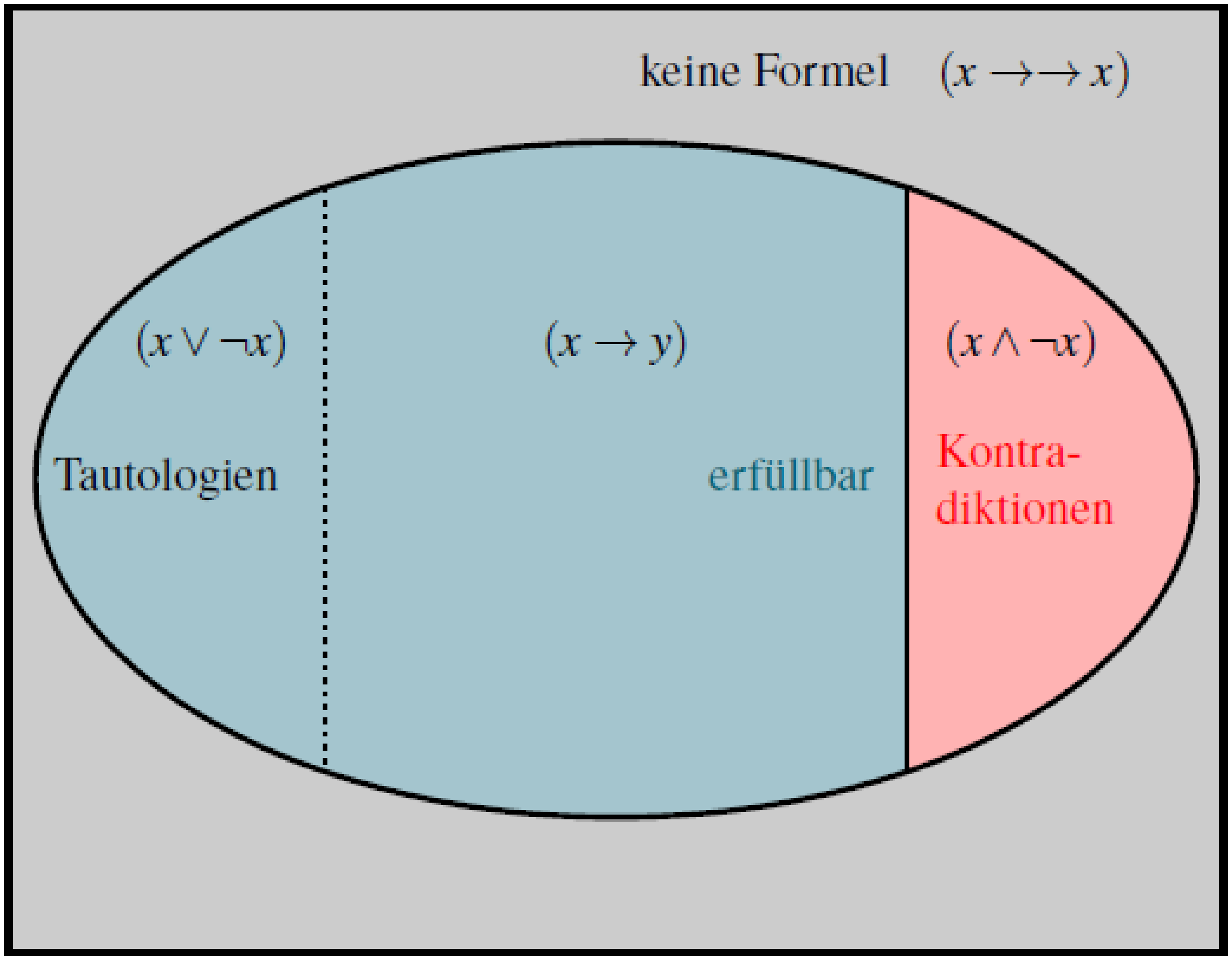
másik elnevezés

logikai törvény ←

Érvényes, kielégíthető, kielégíthetetlen formulák halmazai



Egy másik hasonló ábra



Az „erfüllbar” kéken van írva, ez utal rá, hogy a „Tautologien” részhalmaza az „erfüllbar”-nak

A mai órán: Állításlogika (más néven kijelentéslogika vagy nulladrendű logika)

- Állítások, nemlogikai és logikai konstansok
- Szintaxis:
  - Az állításlogika nyelve, formulák
- Szemantika:
  - A formulák jelentése, interpretáció, igazságtáblázat
- Szemantikai fogalmak:
  - modell
  - kielégíthetőség, kielégíthetetlenség
  - logikai (szemantikai) következmény reláció
  - logikai ekvivalencia
  - érvényesség