# Az informatika számítástudományi alapjai
# 2. előadás

Vaszil György

vaszil.gyorgy@inf.unideb.hu

1. emelet 110-es szoba

# A múltkor láttuk

- Bevezető: Miről lesz szó, a számítástudomány történetének néhány mérföldköve
- Alapfogalmak: Ábécék, nyelvek, műveletek

*(A fóliák kérdése)*

# Mi is volt a „kontextus”?

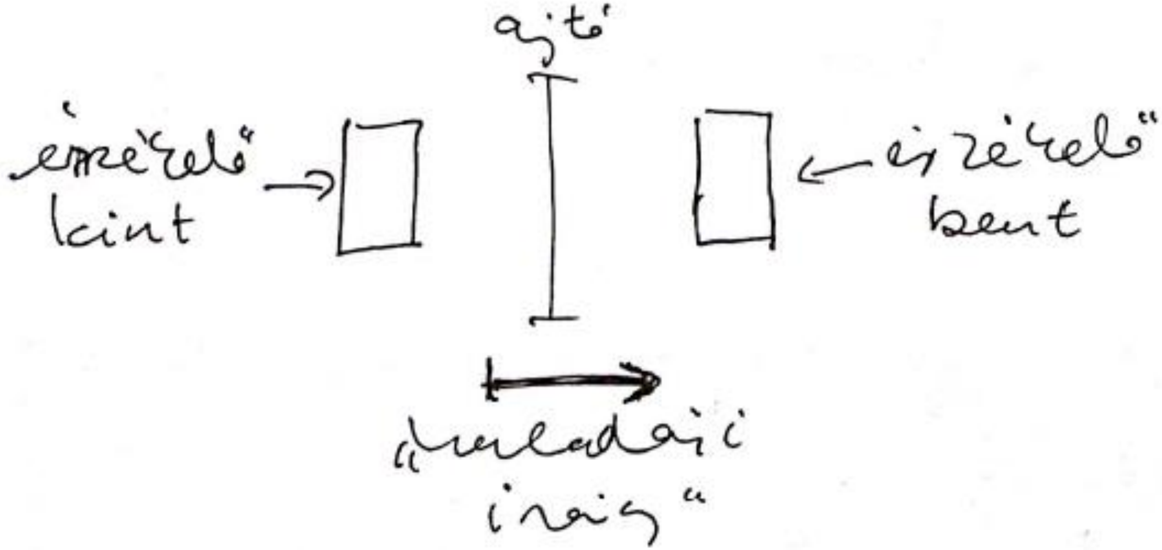
- **Automata**: matematikai “gép”
  - a **számítógép hardver** elvi, matematikai leírása
  - a **számítási folyamat** elvi, matematikai leírása
- Formális **nyelv**: jelsorozatok/sztringek/”szavak” sokasága/halmaza
  - az automaták **számítási képességeinek** jellemzése
  - a számítási **feladatok** formális/elvi/matematikai leírása

# A mai órán

- Véges automaták, véges automaták által definiált nyelvek (elfogadott nyelvek), példák
- A véges automaták állapotainak számáról
- Nyelvek amiket nem lehet véges automatával elfogadni

# Véges automaták

**Példa**: Bejárati ajtó



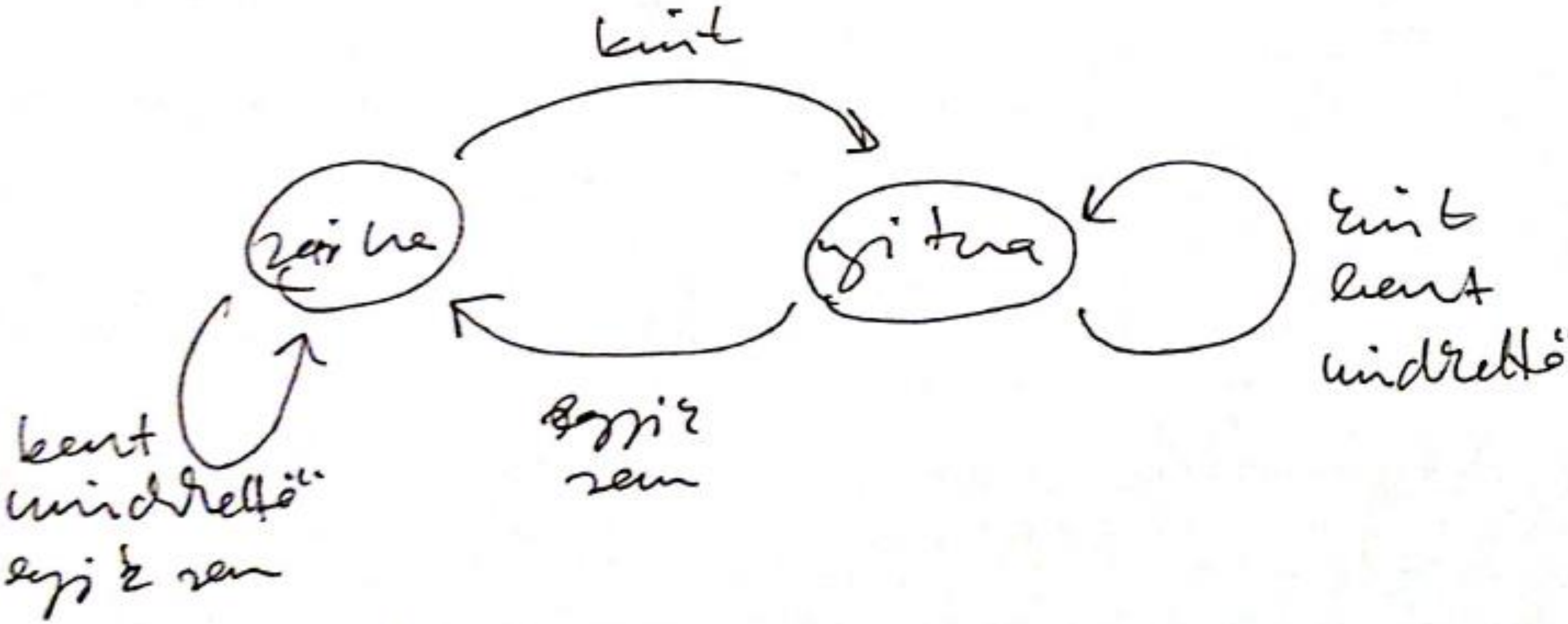

Bemeneti jelek

| Állapotok | kint | bent | mindkettő | egyik sem |
|---|---|---|---|---|
| zárva | nyitva | zárva | zárva | zárva |
| nyitva | nyitva | nyitva | nyitva | zárva |

(Sorban, másodpercenként érkeznek az érzékelőből )

# Példa /2

| | kint | bent | mindkettő | egyik sem |
|---|---|---|---|---|
| zárva | nyitva | zárva | zárva | zárva |
| nyitva | nyitva | nyitva | nyitva | zárva |



# Példa / 3

Az ábécé: $V = \{$ bent, kint, mindkettő, egyik sem $\}$

Az automata szenzorairól érkező bemenő jelek sorozatainak megfelelően automata állapotváltozási sorozatai.

Így nyelveket írhatunk le:

Pl: Milyen bemenetsorozatok viszik az ajtót zárt állapotból zárt állapotba?

Milyen szavak visznek nyitva állapotból zárva állapotba?

— * —

Az, ha adott egy

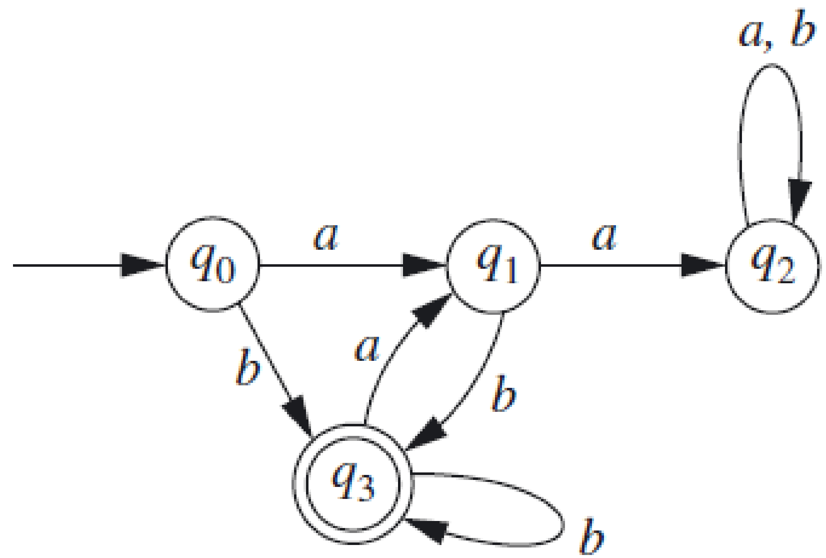
- kezdő állapot → ○
- végállapot ◎

és egy „automata", akkor ezzel meg tudunk adni egy nyelvet.

# Példa

Az ábécé: $V = \{a, b\}$

Az automata:




Milyen nyelvet fogad el?

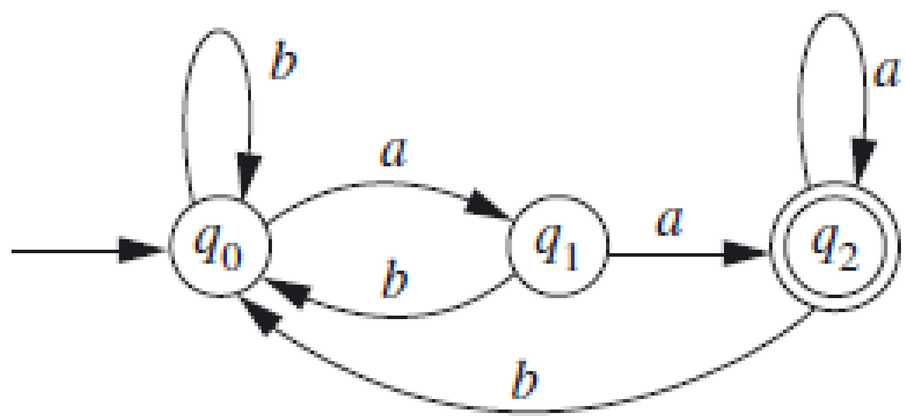
Azaz:
Milyen szavak viszik a kezdőállapotból a végállapotba?

*(Írjuk fel a nyelvet szóhalmazok és múlt órai műveletek segítségével)*

# Példa

Az ábécé: $V=\{a,b\}$

Az automata:




Milyen nyelvet fogad el?

Azaz:
Milyen szavak viszik a kezdőállapotból a végállapotba?

*(Írjuk fel a nyelvet szóhalmazok és múlt órai műveletek segítségével)*

# A mai órán

- Véges automaták, véges automaták által definiált nyelvek (elfogadott nyelvek), példák
- A véges automaták állapotainak számáról
- Nyelvek amiket nem lehet véges automatával elfogadni

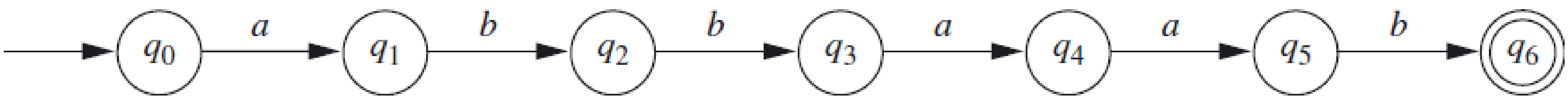
# Konstruáljunk szöveg-minta kereső automatát

Az elfogadott szavakban szerepeljen az *abbaab* résszó

- pl. *aaaabababa**abbaabb**bababaaaaaab* elfogadott szó legyen
- pl. *aaaaaaaaaaaaaaabbbbbbbbbbbabababa* ne legyen elfogadott szó

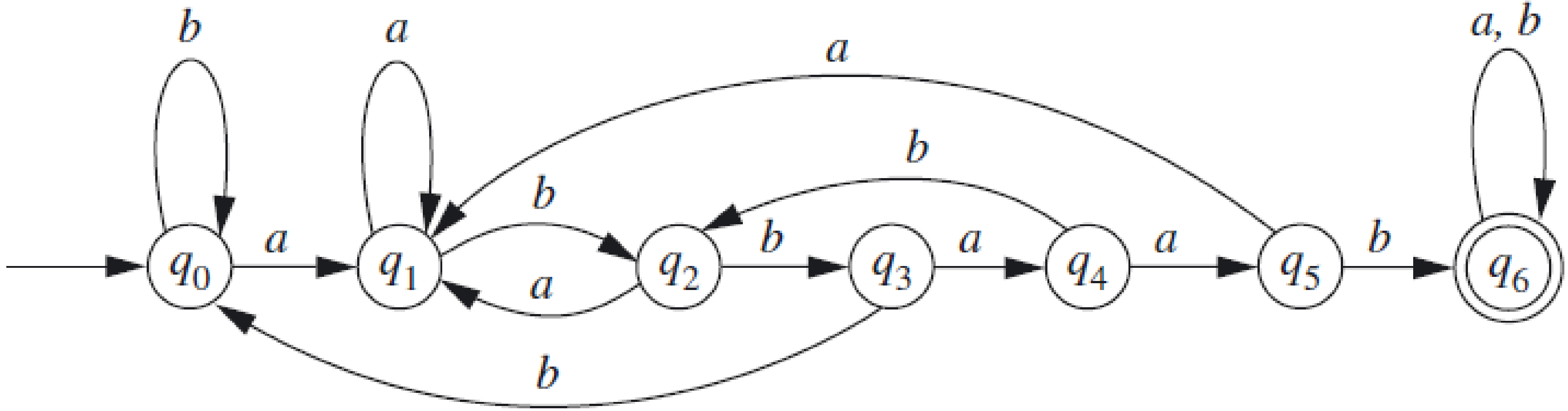
kiindulás

*...abbaab...*




*(lépésenként a gondolatmenetet a táblán, az állapotok „jelentése”, a tanulság megint)*

Araz

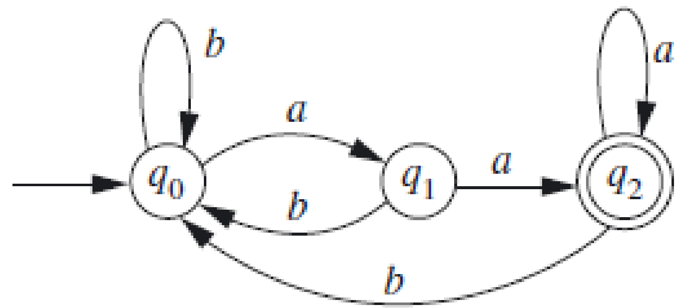


# Formális definíció

egy véges automata $M = (Q, \Sigma, q_0, A, \delta)$,
ahol:

- $Q$ : véges állapothalmaz
- $\Sigma$ : véges bemeneti ábécé
- $q_0 \in Q$ : kezdő állapot
- $A \subseteq Q$ : végállapotok (elfogadó állapotok)
- $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ állapot átmenet függvény

## Például

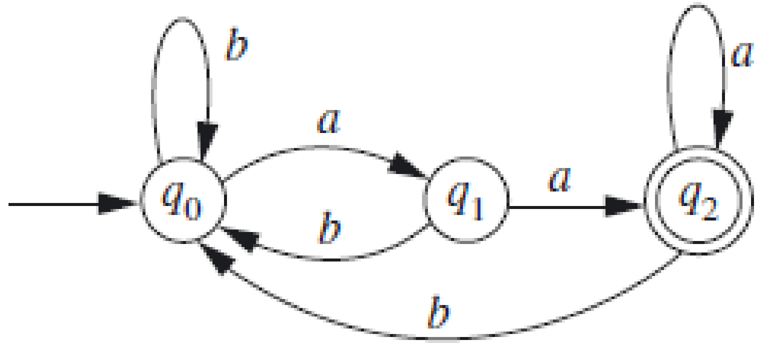



$M = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b\}, q_0, \{q_2\}, \delta)$, ahol

$\delta$ a következő:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \delta(q_0, a) = q_1 & \delta(q_2, a) = q_2 \\ \delta(q_0, b) = q_0 & \delta(q_2, b) = q_0 \\ \delta(q_1, a) = q_2 & \\ \delta(q_1, b) = q_0 & \end{array}}$$

# Jelölés, kiterjesztett állapot átmenet függvény:




$$\delta^*(q_0, abaa) = q_2$$

$$\delta^*(q_2, ab) = q_0$$

és a többi ...

Azért érdekes ez, hogy könnyű legyen az elfogadott szavak halmazát felírni

# Újabb definíció

Kiterjesztett állapotátmenet függvény:

$M = (Q, \Sigma, q_0, A, \delta)$

$\delta^*: Q \times \Sigma^* \to Q$

$\uparrow$

szavak

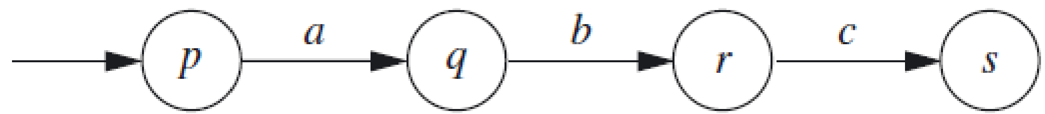
1. $\delta^*(q, \lambda) = q$ minden $q \in Q$-ra
2. $\delta^*(q, ya) = \delta(\delta^*(q, y), a)$

minden $y \in \Sigma^*$-ra

$a \in \Sigma$-ra

$q \in Q$-ra

Aran




$$\delta^*(p, abc) =$$

(1.) $\delta^*(q, \lambda) = q$ burada $q \in Q$-ya

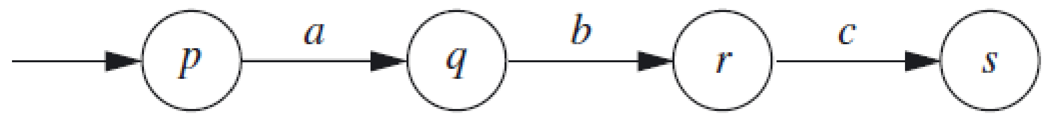
(2.) $\delta^*(q, ya) = \delta(\delta^*(q, y), a)$

burada $y \in \Sigma^*$-ya

$a \in \Sigma$-ya

$q \in Q$-ya

Azaz




$$\delta^*(p, abc) = \delta(\delta^*(p, ab), c)$$

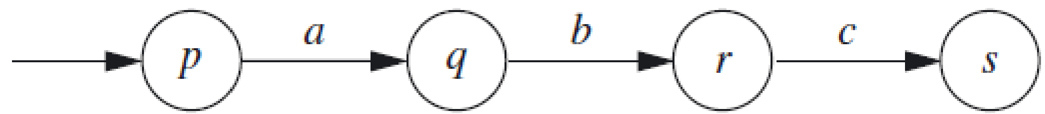
1. $\delta^*(q, \lambda) = q$ minden $q \in Q$-ra
2. $\delta^*(q, ya) = \delta^{\cancel{*}}(\delta^*(q, y), a)$

minden $y \in \Sigma^*$-ra

$a \in \Sigma$-ra

$q \in Q$-ra

Ábra




$$\delta^*(p, abc) = \delta(\delta^*(p, ab), c)$$
$$= \delta(\delta(\delta^*(p, a), b), c)$$

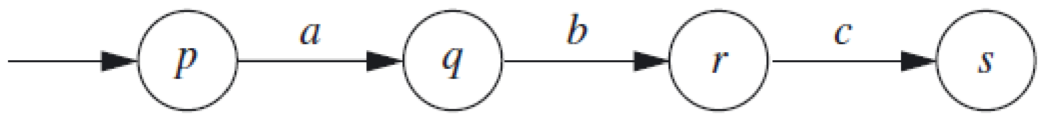
1. $\delta^*(q, \lambda) = q$ minden $q \in Q$-ra
2. $\delta^*(q, ya) = \delta(\delta^*(q, y), a)$

minden $y \in \Sigma^*$-ra

$a \in \Sigma$-ra

$q \in Q$-ra

## Ábra




$$\begin{aligned}\delta^*(p, abc) &= \delta(\delta^*(p, ab), c)\\ &= \delta(\delta(\delta^*(p, a), b), c)\\ &= \delta(\delta(\delta^*(p, \Lambda a), b), c)\end{aligned}$$

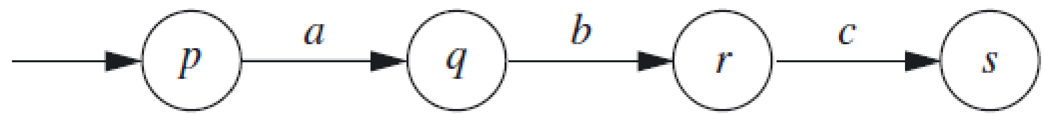
1. $\delta^*(q, \lambda) = q$ minden $q \in Q$-ra
2. $\delta^*(q, ya) = \delta(\delta^*(q, y), a)$

minden $y \in \Sigma^*$-ra

$a \in \Sigma$-ra

$q \in Q$-ra

## Arra




$$
\begin{aligned}
\delta^*(p, abc) &= \delta(\delta^*(p, ab), c) \\
&= \delta(\delta(\delta^*(p, a), b), c) \\
&= \delta(\delta(\delta^*(p, \Lambda a), b), c) \\
&= \delta(\delta(\delta(\delta^*(p, \Lambda), a), b), c)
\end{aligned}
$$

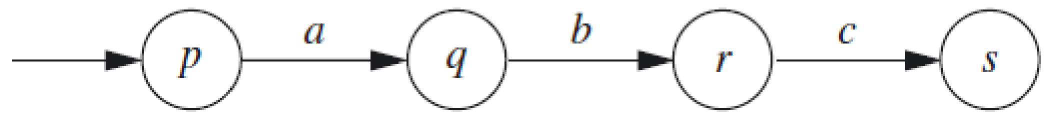
1. $\delta^*(q, \lambda) = q$ minden $q \in Q$-ra
2. $\delta^*(q, ya) = \delta(\delta^*(q, y), a)$

minden $y \in \Sigma^*$-ra

$a \in \Sigma$-ra

$q \in Q$-ra

Azaz



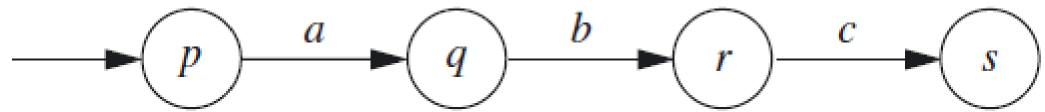

$$\begin{aligned}\delta^*(p, abc) &= \delta(\delta^*(p, ab), c)\\ &= \delta(\delta(\delta^*(p, a), b), c)\\ &= \delta(\delta(\delta^*(p, \Lambda a), b), c)\\ &= \delta(\delta(\delta(\delta^*(p, \Lambda), a), b), c)\\ &= \delta(\delta(\delta(p, a), b), c)\end{aligned}$$

1. $\delta^*(q, \lambda) = q$ minden $q \in Q$-ra
2. $\delta^*(q, ya) = \delta(\delta^*(q, y), a)$

   minden $y \in \Sigma^*$-ra

   $a \in \Sigma$-ra

   $q \in Q$-ra



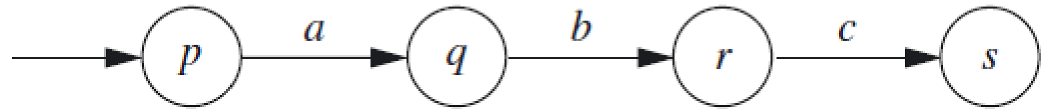

$$
\begin{aligned}
\delta^*(p, abc) &= \delta(\delta^*(p, ab), c) \\
&= \delta(\delta(\delta^*(p, a), b), c) \\
&= \delta(\delta(\delta^*(p, \Lambda a), b), c) \\
&= \delta(\delta(\delta(\delta^*(p, \Lambda), a), b), c) \\
&= \delta(\delta(\delta(p, a), b), c) \\
&= \delta(\delta(q, b), c)
\end{aligned}
$$

1. $\delta^*(q, \lambda) = q$ minden $q \in Q$-ra
2. $\delta^*(q, ya) = \delta^{\cancel{*}}(\delta^*(q, y), a)$

minden $y \in \Sigma^*$-ra

$a \in \Sigma$-ra

$q \in Q$-ra



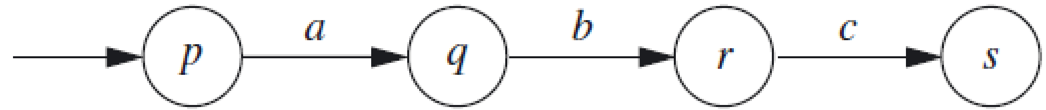

$$
\begin{aligned}
\delta^*(p, abc) &= \delta(\delta^*(p, ab), c) \\
&= \delta(\delta(\delta^*(p, a), b), c) \\
&= \delta(\delta(\delta^*(p, \Lambda a), b), c) \\
&= \delta(\delta(\delta(\delta^*(p, \Lambda), a), b), c) \\
&= \delta(\delta(\delta(p, a), b), c) \\
&= \delta(\delta(q, b), c) \\
&= \delta(r, c)
\end{aligned}
$$

1. $\delta^*(q, \lambda) = q$ minden $q \in Q$-ra
2. $\delta^*(q, ya) = \delta^{\cancel{*}}(\delta^*(q, y), a)$

   minden $y \in \Sigma^*$-ra

   $a \in \Sigma$-ra

   $q \in Q$-ra




$$
\begin{aligned}
\delta^*(p, abc) &= \delta(\delta^*(p, ab), c) \\
&= \delta(\delta(\delta^*(p, a), b), c) \\
&= \delta(\delta(\delta^*(p, \Lambda a), b), c) \\
&= \delta(\delta(\delta(\delta^*(p, \Lambda), a), b), c) \\
&= \delta(\delta(\delta(p, a), b), c) \\
&= \delta(\delta(q, b), c) \\
&= \delta(r, c) \\
&= s
\end{aligned}
$$

1. $\delta^*(q, \lambda) = q$ minden $q \in Q$-ra
2. $\delta^*(q, ya) = \delta^{\cancel{*}}(\delta^*(q, y), a)$

minden $y \in \Sigma^*$-ra

$a \in \Sigma$-ra

$q \in Q$-ra

# Az elfogadott nyelv

Legyen $M = (Q, \Sigma, q_0, A, \delta)$, és legyen $x \in \Sigma^*$.
$M$ elfogadja $x$-et, ha

$$\delta^*(q_0, x) \in A$$

Az $M$ által elfogadott nyelv

$$L(M) = \{ x \in \Sigma^* \mid \delta^*(q_0, x) \in A \}.$$

# A mai órán

- Véges automaták, véges automaták által definiált nyelvek (elfogadott nyelvek), példák
- A véges automaták állapotainak számáról
- Nyelvek amiket nem lehet véges automatával elfogadni

# Hány állapotra van szüksége a véges automatának egy adott nyelv elfogadásához?

<u>Definíció</u>: Két szó **megkülönböztethetősége** egy ***L*** **nyelvre** nézve:

x és y L-megkülönböztethető,
ha létezik z, hogy

$xz \in L$ és $yz \notin L$ vagy $xz \notin L$ és $yz \in L$

*(példa lesz később)*

# Tanácskérő

**Tétel**: Ha $L \subseteq \Sigma^*$, és $L = L(M)$ valami egy $M$ véges automata esetén továbbá $\Sigma^*$-ban van $n$ páronként egymástól $L$-megkülönböztethető szó, akkor $M$-nek legalább $n$ állapota van.

**Bizonyítás**: Ha $M$-nek kevesebb mint $n$ állapota lenne, akkor az $n$ $L$-megkülönböztethető szó közül legalább kettő ugyanabba az állapotba menne, de ez az előzőek szerint nem lehet. ?

*Miért nem lehet?*

# [illegible]

Tétel: Ha $L \subseteq \Sigma^*$ és $L = L(M)$ valamilyen

x és y L-megkülönböztethető, ha létezik z, hogy

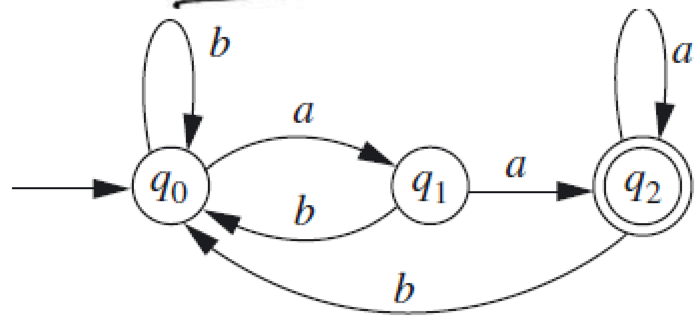
$xz \in L$ és $yz \notin L$ vagy $xz \notin L$ és $yz \in L$

... állapota van.

Bizonyítás: Ha M-nek kevesebb mint n állapota lenne, akkor az n L-megkülönböztethető szó közül legalább kettő ugyanabba az állapotba menne, de ez az előzőek miatt nem lehet. ?

*Miért nem lehet?*

## Például




$L(M) = \{x \in \{a,b\}^* \mid x$ aa-ra végződik$\}$

Lehetne 3-nál kevesebb állapota a legkisebb M-nek?

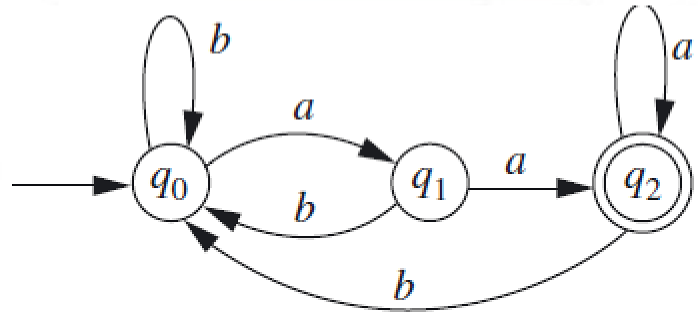
Nem:

b, a, aa ← 3 db L-megkülön-
böztethető szó

$\underbrace{b, \; a}_{a}$ , $\underbrace{a, \; aa}_{\lambda}$

$\underbrace{b, \; a, \; aa}_{\lambda}$ (b és aa)

# Az előző példa



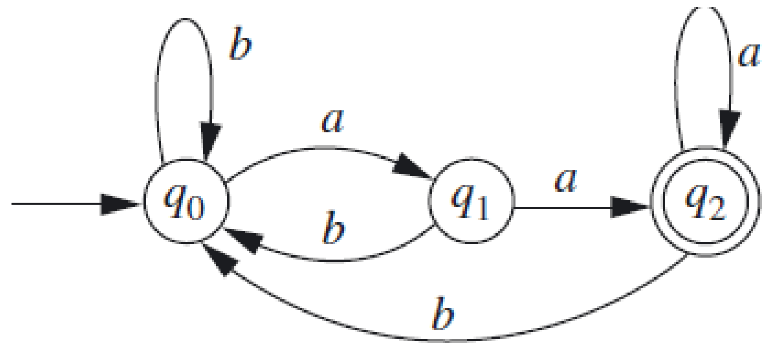

3 db L-megkülönböztethető szó:

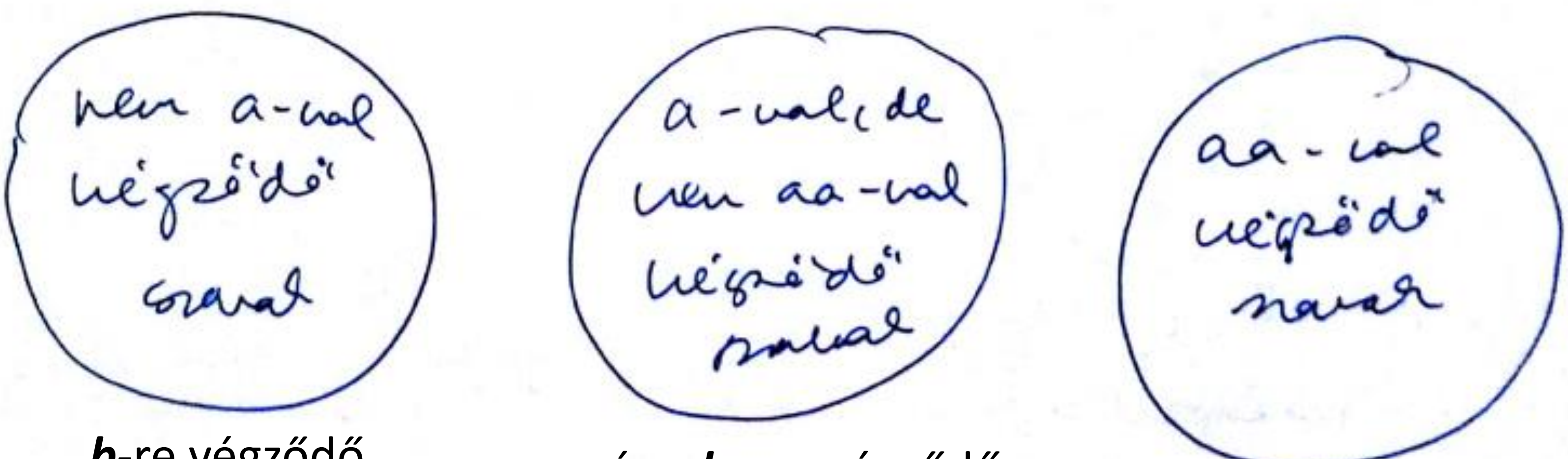
$$b \;,\; a \;,\; aa$$

$$\underbrace{b \;,\; a}_{a} \qquad \underbrace{a \;,\; aa}_{\lambda} \qquad \underbrace{b \;,\; aa}_{\lambda}$$

Vegyük észre, hogy az összes többi szó nem L-megkülönböztethető valamelyiktől.

Az *{a,b}* feletti szavak L megkülönböztethetőség alapján 3 csoportba, azaz **3 ekvivalencia osztályba** sorolhatók.




***b***-re végződő szavak
(és az üresszó)

***a*** *és a* ***ba***-ra végződő szavak

***aa***-ra végződő szavak

(„rendes” bizonyítás nélkül:)

Az **L nyelvet** elfogadó véges automatának **annyi állapotra** van szüksége, mint az **L szerinti** megkülönböztethetőség **ekvivalencia osztályainak száma**.

Hogyan konstruálhatunk minimális állapotszámú automatát ekvivalencia osztályainak meghatározása nélkül ?

a megkülönböztethetőségi reláció

Kiindulva egy adott nyelvet elfogadó véges automatából, ha az állapotok száma nem minimális, akkor csökkenthetjük azt.

Hogyan konstruálhatunk minimális állapotszámú automatát ekvivalencia osztályainak meghatározása nélkül?

a megkülönböztethetőségi reláció

Adott $M=(Q, \Sigma, q_0, A, \delta)$. Ha van olyan $q_1, q_2 \in Q$, hogy minden $z$-re

$$\delta^*(q_1, z) \in F \iff \delta^*(q_2, z) \in F,$$

akkor $q_1$ és $q_2$ „összevonható"!

Az összevonható állapotokat úgy is megkaphatjuk, ha meghatározzuk melyek azok, amiket biztos nem lehet összevonni.

- Induljunk egy teljesen specifikált determinisztikus automatából, és
- visszafejtjük meg, mikor az állapotok amiket képtelenek vagyunk megkülönböztetni:
- z hossza szerint haladunk

↑

a string ami miatt
meg kell különböztetnünk egy állapotot.

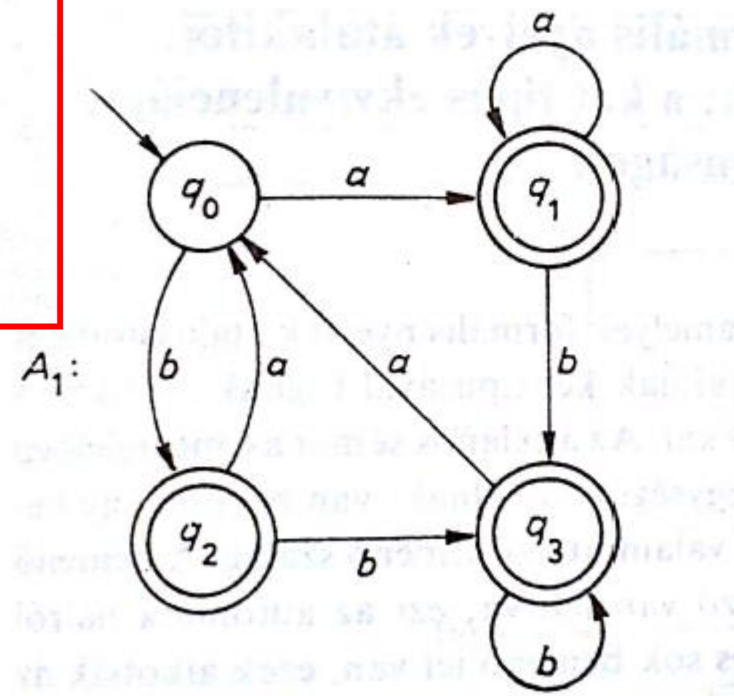
*Mi az, hogy „teljesen specifikált”? Mi az, hogy „determinisztikus”?*

# Például

Adott $M=(Q, \Sigma, q_0, A, \delta)$. Ha van olyan $q_1, q_2 \in Q$, hogy minden $z$-re

$$\delta^*(q_1, z) \in F \iff \delta^*(q_2, z) \in F,$$

akkor $q_1$ és $q_2$ „összevonható"!




(A gyakorlaton lesz róla szó)

*elfogadó <-> nem elfogadó? q1 <-> q3? q2 <-> q3?*

# A mai órán

- Véges automaták, véges automaták által definiált nyelvek (elfogadott nyelvek), példák
- A véges automaták állapotainak számáról
- Nyelvek amiket nem lehet véges automatával elfogadni

# Nyelvek, amelyeket nem lehet véges automatával elfogadni

Tétel: Ha egy $L$ nyelvre nézve végtelen sok páronként $L$-megkülönböztethető szó van, akkor $L \neq L(M)$ semmilyen $M$ véges automatára sem.

Bizonyítás: Legyen $S$ az $L$-megkülönböztethető szavak végtelen halmaza. $S$-nek van $n$ elemű részhalmaza minden $n$-re, azaz az $L$-et elfogadó $M$-nek $n$ állapota kellene hogy legyen minden $n$-re. Ez lehetetlen.

# Példa: Palindrómák

$L = \{x \in \{a,b\}^* \mid x \text{ palindróma}\}$

*{a,b}* ábécé felett végtelen sok páronként L megkülönböztethető szó van, például:

- *ab* és *aab,* mert *ab·baa* nem L-beli*, aab·baa* L-beli
  -->ez 2 osztály: *[ab], [aab]*
- Vegyük most azt, hogy *aaab.* Ez egy harmadik osztály, mert *aaab·baaa L-beli,* de *ab·baaa, aab·baaa* nem L-beli
  -->3 osztály: *[ab], [aab], [aaab]*
- Vegyük most azt, hogy *aaaab.* Ez egy negyedik osztály, mert *aaaab·baaaa,* L-beli, de *ab·baaaa, aab·baaaa, aaab·baaaa* nem L-beli
  --> 4 osztály: *[ab], [aab], [aaab], [aaaab]*
- És így tovább…

# Másik példa

$$\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$$

Ha $i \neq j$, akkor $a^i b^i \in L$ és $a^j b^i \notin L$.

Azaz $a^i$ *és* $a^j$ megkülönböztethető L= $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ -re nézve minden *j*-re (a $b^i$ „megkülönbözteti" őket).

Pl. *a* és *aa*, és *aaa*, és *aaaa* … megkülönböztethető páronként mindegyik, mindegyik másiktól.

# A mai órán

- Véges automaták, véges automaták által definiált nyelvek (elfogadott nyelvek), példák
- A véges automaták állapotainak számáról
- Nyelvek amiket nem lehet véges automatával elfogadni

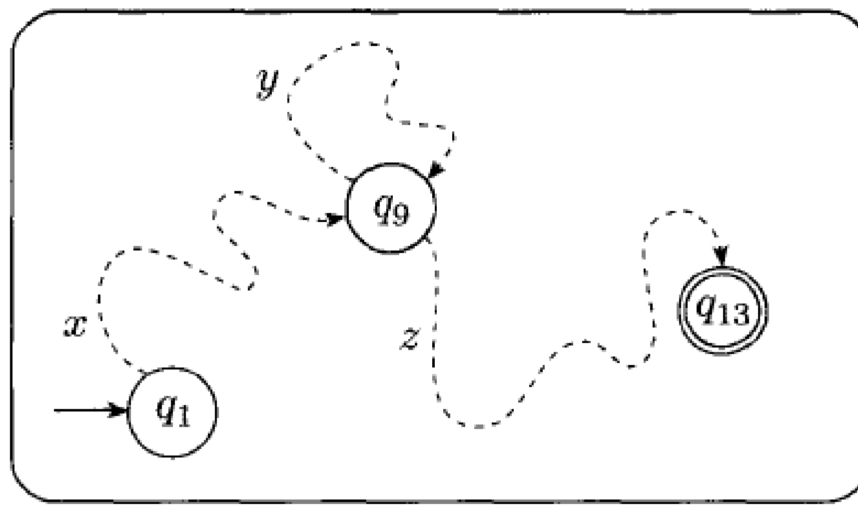
# Pumpálási lemma

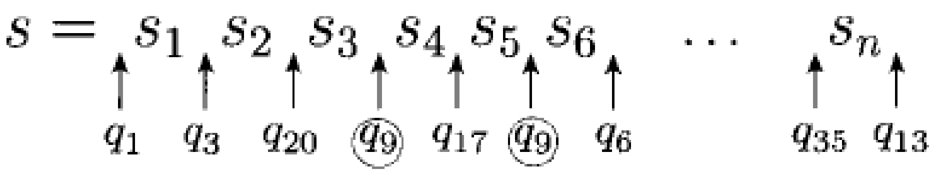
Ha egy véges automata által elfogadott szó elég hosszú, akkor az automata kénytelen legalább egy állapotot többször is felvenni.

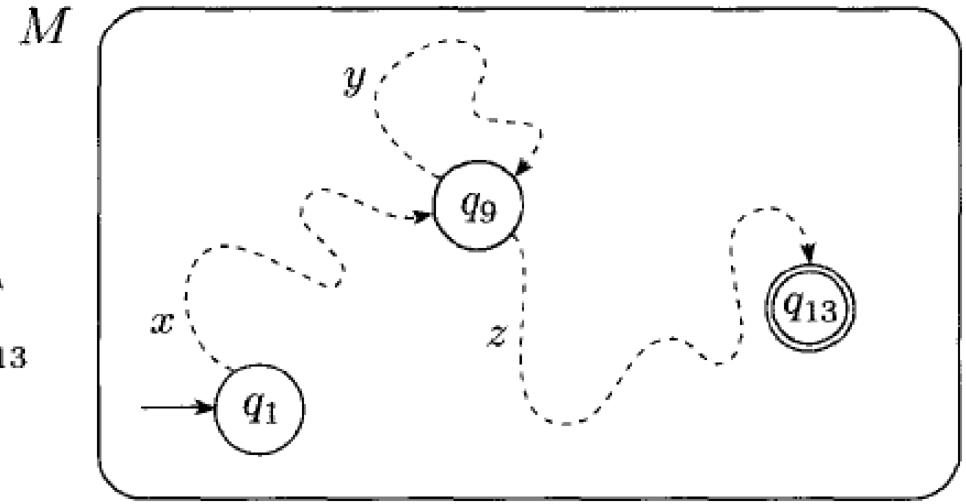
$$s = \; {\uparrow}\, s_1 \,{\uparrow}\, s_2 \,{\uparrow}\, s_3 \,{\uparrow}\, s_4 \,{\uparrow}\, s_5 \,{\uparrow}\, s_6 \,{\uparrow} \quad \cdots \quad {\uparrow}\, s_n \,{\uparrow}$$

$$q_1 \quad q_3 \quad q_{20} \quad q_9 \quad q_{17} \quad q_9 \quad q_6 \qquad q_{35} \quad q_1$$

$M$






Az automata elfogadja az

$$s_1 s_2 s_3\ s_4 s_5\ s_4 s_5\ \dots\ s_4 s_5\ s_6 \dots s_n$$

alakú szavakat is

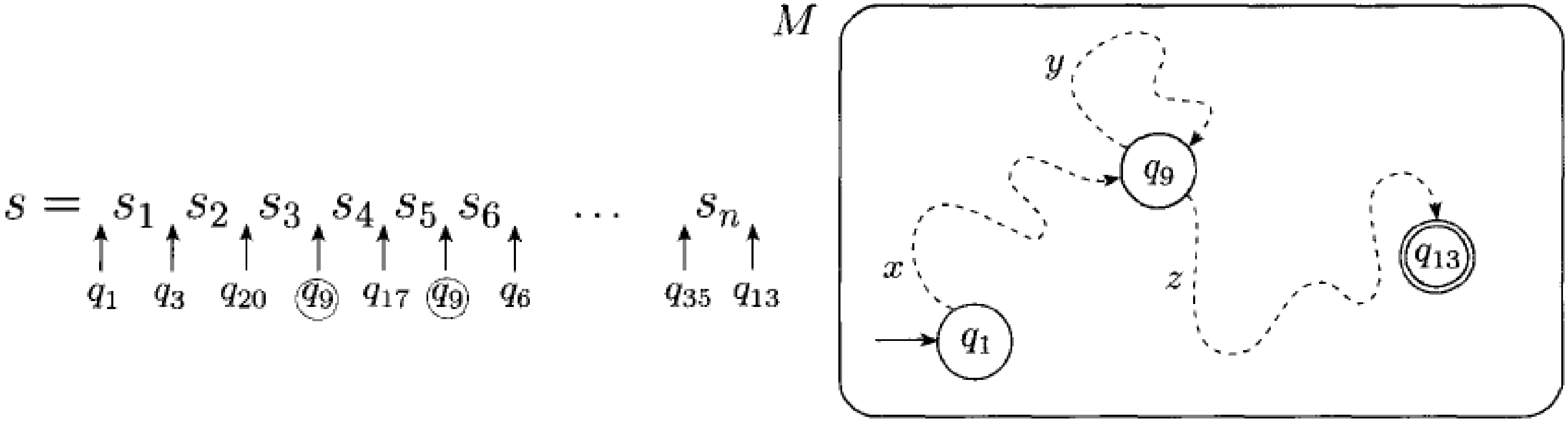
# Azaz:

Ha $L \subseteq \Sigma^*$ nyelvet elfogadja $M = (Q, \Sigma, q_0, A, \delta)$ véges automata és $n = |Q|$, akkor minden olyan $x \in L$ $L$-beli szó, amely $|x| \geq n$, felírható

$$x = uvw$$

alakban, ahol:

1. $|uv| \leq n$
2. $|v| > 0$ (azaz $v \neq \lambda$)
3. Minden $i \geq 0$-ra, $uv^iw \in L$




Az automata elfogadja az

$$s_1 s_2 s_3\ s_4 s_5\ s_4 s_5\ \ldots\ s_4 s_5\ s_6 \ldots s_n$$

alakú szavakat is

Ha egy nyelv nem teljesíti a pumpálási lemma feltételét, nem lehet végesautomatával elfogadni.

Pl.

Nincs olyan $M$, hogy $L = L(M)$, ahol

$$L = \{a^i b^i \mid i \geq 1\} \quad (M \text{ véges automata})$$

Miért?

És mi a helyzet az $\{a,b\}$ feletti palindrómákat tartalmazó nyelvvel?

# A mai órán

- Véges automaták, véges automaták által definiált nyelvek (elfogadott nyelvek), példák
- A véges automaták állapotainak számáról
- Nyelvek amiket nem lehet véges automatával elfogadni

# A könyvekben

- A véges automatákról:
  - **J. Martin: 2.1 fejezet**
  - **Dömösi et al.: 4.1, 4.2 és 4.3 fejezet egyes részei, pl. a 4.1.8 fejezet (a jegyzet az általunk vizsgált automatákat "Rabin-Scott" automatának nevezi)**
- A megkülönböztethetőségi relációról:
  - **J. Martin: 2.3 fejezet, 58-62. oldal és 68-72.oldal**
  - **Dömösi et al. jegyzet: 25. tétel, 104-105. oldal, „Myhill-Nerode tétel"**
- A pumpálási lemmáról:
  - **J. Martin: 2.4 fejezet, 63 - 67. oldal**
  - **Dömösi et al.: 5.10 fejezet („iterációs lemma"), 116. oldal**
  - **M. Sipser: 1.4 fejezet, 77-82. oldal**