Alkalmazott matematika

Baran Ágnes

Interpoláció

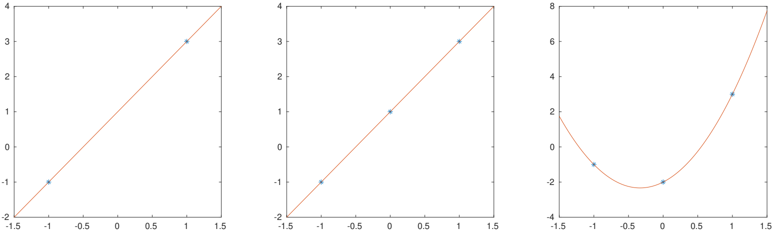
Lagrange-interpoláció

Síkbeli pontokra szeretnénk polinomot illeszteni.

A legkisebb négyzetes közelítéssel ellentétben most

- feltételezzük, hogy az adataink hibamentesek, azaz az illesztett függvénynek pontosan illeszkednie kell a pontokra.
- minden esetben polinomot illesztünk

A lehető legkisebb fokszámú polinomot keressük



Lagrange-interpoláció

A feladat:

Adott $n + 1$ pont:
$x_0, x_1, \ldots, x_n$ páronként különböző helyeken az
$f_0, f_1, \ldots, f_n$ értékek.

Olyan minimális fokszámú $\varphi(x)$ polinomot keresünk melyre

$$\varphi(x_i) = f_i, \quad i = 0, \ldots, n$$

Állítás: Egyértelműen létezik olyan legfeljebb n-edfokú polinom, amely teljesíti a

$$\varphi(x_i) = f_i, \quad i = 0, \ldots, n$$

illeszkedési feltételeket.

$n + 1$ pont $\Longrightarrow$ legfeljebb n-edfokú polinom

A Lagrange-polinom rekurzív előállítása (Newton-alak)

Jelölje $L_k(x)$ az (x_0, f_0), (x_1, f_1),..., (x_k, f_k) adatokra illeszkedő Lagrange-polinomot.

- ha csak 1 adat ismert, (x_0, f_0):

  $L_0(x) \equiv f_0$

- ha 2 adat ismert, (x_0, f_0), (x_1, f_1):

  $L_1(x) = L_0(x) + b_1(x - x_0)$

  Ekkor $L_1(x_0) = L_0(x_0) = f_0$. Ezután b_1-et úgy határozzuk meg, hogy $L_1(x_1) = f_1$ teljesüljön:

$$L_1(x_1) = f_0 + b_1(x_1 - x_0) = f_1$$

$$b_1 = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}$$

- ha 3 adat ismert, (x_0, f_0), (x_1, f_1), (x_2, f_2):

  $L_2(x) = L_1(x) + b_2(x - x_0)(x - x_1)$

  Ekkor
  $L_2(x_0) = L_1(x_0) = f_0$ és
  $L_2(x_1) = L_1(x_1) = f_1$.

  b_2-t úgy határozzuk meg, hogy $L_2(x_2) = f_2$ teljesüljön:

$$b_2 = \frac{1}{x_2 - x_0}\left(\frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} - \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}\right)$$

- Ha $k+1$ adat ismert, (x_0, f_0), (x_1, f_1),..., (x_k, f_k):

  $L_k(x) = L_{k-1}(x) + b_k\omega_k(x)$,

  ahol $\omega_k(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{k-1})$.

  Ekkor
  $L_k(x_0) = L_{k-1}(x_0) = f_0$,
  $L_k(x_1) = L_{k-1}(x_1) = f_1$,
  $\vdots$
  $L_k(x_{k-1}) = L_{k-1}(x_{k-1}) = f_{k-1}$.

  b_k-t úgy határozzuk meg, hogy $L_k(x_k) = f_k$ teljesüljön:

$$b_k = (f_k - L_{k-1}(x_k))/\omega_k(x_k)$$

  Hogyan lehet egyszerűen előállítani a b_k együtthatókat?

Osztott differenciák

Tfh adottak az $x_0, x_1, \dots, x_n$ páronként különböző alappontok és az $f_0, f_1, \dots, f_n$ értékek.
Az x_i, x_{i+1} pontokra támaszkodó elsőrendű osztott differencia:

$$[x_i, x_{i+1}]f := \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i}$$

Az $x_i, \dots, x_{i+k}$ pontokra támaszkodó k-adrendű osztott differencia:

$$[x_i, \dots, x_{i+k}]f = \frac{[x_{i+1}, \dots, x_{i+k}]f - [x_i, \dots, x_{i+k-1}]f}{x_{i+k} - x_i}$$

Legyen $[x_i]f = f_i$.

Állítás: A Lagrange-polinom Newton-alakjában

$$b_k = [x_0, \dots, x_k]f$$

Számítási séma

$$
\begin{array}{c|ccccc}
x_0 & [x_0]f \searrow & & & & \\
 & & [x_0, x_1]f \searrow & & & \\
x_1 & [x_1]f \nearrow & & [x_0, x_1, x_2]f \searrow & & \\
 & \searrow & [x_1, x_2]f \nearrow & & \dots & \\
\vdots & & \vdots & & \searrow & \\
\vdots & & \vdots & & & [x_0, \dots, x_n]f \\
\vdots & & \vdots & & \dots \nearrow & \\
x_{n-1} & [x_{n-1}]f \searrow & & & & \\
 & & [x_{n-1}, x_n]f \nearrow & & & \\
x_n & [x_n]f \nearrow & & & &
\end{array}
$$

A Lagrange-polinom Newton-alakja

$$
\begin{array}{c|ccccccccc}
x_0 & [x_0]f & \searrow & & & & & & & \\
 & & & [x_0,x_1]f & \searrow & & & & & \\
x_1 & [x_1]f & \nearrow & & & [x_0,x_1,x_2]f & \searrow & & & \\
 & & \searrow & [x_1,x_2]f & \nearrow & & & \ldots & & \\
\vdots & & \vdots & & & & & & \searrow & \\
\vdots & & \vdots & & & & & & & [x_0,\ldots,x_n]f \\
\vdots & & \vdots & & & & & \ldots & \nearrow & \\
x_{n-1} & [x_{n-1}]f & \searrow & & & & & & & \\
 & & & [x_{n-1},x_n]f & \nearrow & & & & & \\
x_n & [x_n]f & \nearrow & & & & & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
L_n(x) = {} & [x_0]f + [x_0,x_1]f \cdot (x-x_0) + [x_0,x_1,x_2]f \cdot (x-x_0)(x-x_1) \\
& + \cdots + [x_0,\ldots,x_n]f \cdot (x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})
\end{aligned}
$$

Példa

Határozzuk meg a $(-2,-31),(-1,-7),(0,-1),(2,5)$ pontokra illeszkedő minimális fokszámú polinomot!

$$
\begin{array}{r|rrrr}
-2 & -31 & & & \\
 & & 24 & & \\
-1 & -7 & & -9 & \\
 & & 6 & & 2 \\
0 & -1 & & -1 & \\
 & & 3 & & \\
2 & 5 & & &
\end{array}
$$

$$L_3(x) = -31 + 24(x+2) - 9(x+2)(x+1) + 2(x+2)(x+1)x$$

Megjegyzés

A Lagrange-polinom nem függ az adatok sorrendjétől, így választhattuk volna a táblázat alsó "élét" is:

$$
\begin{array}{r|rrrr}
-2 & -31 & & & \\
 & & 24 & & \\
-1 & -7 & & -9 & \\
 & & 6 & & 2 \\
0 & -1 & & -1 & \\
 & & 3 & & \\
2 & 5 & & & \\
\end{array}
$$

$$L_3(x) = 5 + 3(x-2) - 1 \cdot (x-2)x + 2(x-2)x(x+1)$$

Mindkét esetben

$$L_3(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - 1$$

Példa

Határozzuk meg a $(-2,-5),(-1,3),(1,-5),(2,-9)$ pontokra illeszkedő minimális fokszámú polinomot!

$$
\begin{array}{r|rrrr}
-2 & -5 & & & \\
 & & 8 & & \\
-1 & 3 & & -4 & \\
 & & -4 & & 1 \\
1 & -5 & & 0 & \\
 & & -4 & & \\
2 & -9 & & &
\end{array}
$$

$$L_3(x) = -5 + 8(x+2) - 4(x+2)(x+1) + (x+2)(x+1)(x-1)$$

Példa

Határozzuk meg azt a minimális fokszámú polinomot, amely az előző adatokon kívül a $(0,9)$ pontra is illeszkedik!

Használjuk fel az előző feladat eredményét!

$$
\begin{array}{r|rrrr}
-2 & -5 & & & \\
 & & 8 & & \\
-1 & 3 & & -4 & \\
 & & -4 & & 1 \\
1 & -5 & & 0 & \\
 & & -4 & & \\
2 & -9 & & &
\end{array}
$$

Egészítsük ki a táblázatot az új adattal és számítsuk ki a hiányzó értékeket!

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
-2 & -5 & & & & \\
 & & 8 & & & \\
-1 & 3 & & -4 & & \\
 & & -4 & & 1 & \\
1 & -5 & & 0 & & 2 \\
 & & -4 & & 5 & \\
2 & -9 & & 5 & & \\
 & & -9 & & & \\
\color{green}{0} & \color{green}{9} & & & &
\end{array}
$$

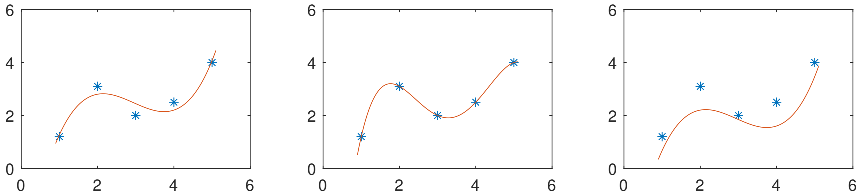
$$L_4(x) = L_3(x) + 2(x+2)(x+1)(x-1)(x-2)$$

Példa

Matlab-ban definiáltuk az `x` és `y` változókat, majd lefuttattuk az alábbi két kódot. Melyik kód melyik ábrát állította elő?

```
p=polyfit(x,y,4);
xx=linspace(0.9,5.1);
yy=polyval(p,xx);
figure; plot(x,y,'*',xx,yy)
```

```
p=polyfit(x,y,3);
xx=linspace(0.9,5.1);
yy=polyval(p,xx);
figure; plot(x,y,'*',xx,yy)
```



Horner-algoritmus

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

ahol $a_n \neq 0$. Legyen $x^\star \in \mathbb{R}$ adott, $p(x^\star) =?$

$$p(x^\star) = (((\cdots(a_n x^\star + a_{n-1})x^\star + \cdots)x^\star + a_2)x^\star + a_1)x^\star + a_0$$

Az algoritmus:

$$\begin{aligned}
c_0 &= a_n \\
c_1 &= c_0 x^\star + a_{n-1} \\
c_2 &= c_1 x^\star + a_{n-2} \\
&\vdots \\
c_n &= c_{n-1} x^\star + a_0 = p(x^\star)
\end{aligned}$$

Táblázatban:

	a_n	a_{n-1}	$\cdots$	a_2	a_1	a_0
$x^\star$	c_0	c_1	$\cdots$	c_{n-2}	c_{n-1}	c_n

$p(x^\star) = c_n$

Példa

$$p(x) = 2x^5 + 3x^4 - 3x^2 + 5x - 1, \qquad p(-2) = ?$$

	2	3	0	-3	5	-1
-2	2	-1	2	-7	19	-39

$p(-2) = -39$

Általánosított Horner-algoritmus

$$\begin{aligned} L_n(x) = & b_0 + b_1 \cdot (x - x_0) + b_2 \cdot (x - x_0)(x - x_1) + \\ & + \cdots + b_n \cdot (x - x_0)(x - x_1)(x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

ahol $b_k = [x_0, \dots, x_k]f$. $L_n(x^\star) = ?$

$$\begin{aligned} c_0 &= b_n \\ c_1 &= c_0(x^\star - x_{n-1}) + b_{n-1} \\ c_2 &= c_1(x^\star - x_{n-2}) + b_{n-2} \\ &\vdots \\ c_n &= c_{n-1}(x^\star - x_0) + b_0 = L_n(x^\star) \end{aligned}$$

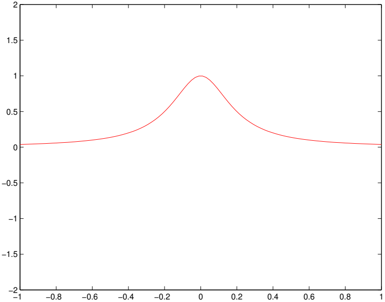
Megjegyzés

Ha nincs szükségünk a Lagrange-polinom együtthatóira, csak bizonyos helyeken a polinom értékeire, akkor nem érdemes a Newton-alakban kibontani a zárójeleket.

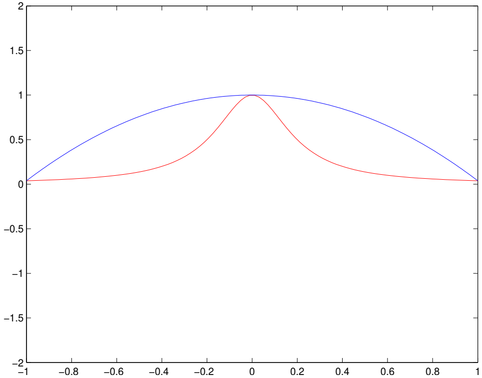
Megjegyzés

Ha egy függvényt szeretnénk közelíteni úgy, hogy elkészítjük adott alappontok esetén az illeszkedő Lagrange-polinomot, akkor az alappontok számának növelésével a hiba nem feltétlenül csökken, sőt akár tetszőlegesen naggyá válhat.

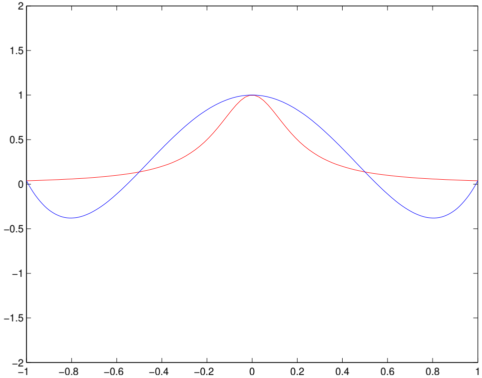
Példa: Az $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ függvény $[-1, 1]$ fölött



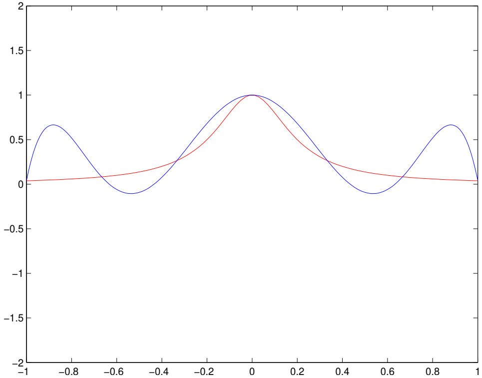
Lagrange-interpoláció, $n = 2$



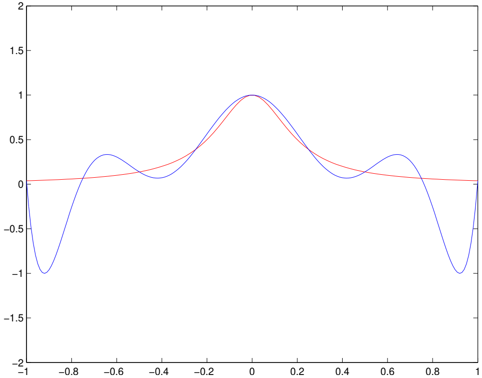
Lagrange-interpoláció, $n = 4$



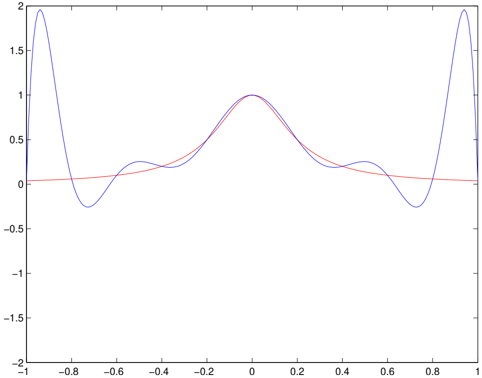
Lagrange-interpoláció, $n = 6$



Lagrange interpoláció, $n = 8$



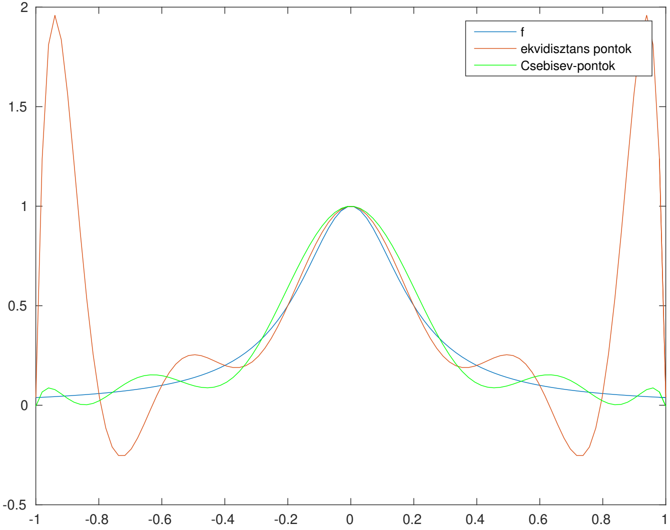
Lagrange-interpoláció, $n = 10$



Példa

Rajzoltassuk ki közös ábrára az alábbi 3 függvényt:

- az
$$f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$$
függvényt a $[-1, 1]$ intervallumon
- az f függvény
$$-1, -0.8, -0.6, ..., 0.6, 0.8, 1$$
egyenlő lépésközű (ekvidisztáns) alappontokhoz tartozó Lagrange-polinomját
- az f függvény
$$x_k = \cos\left(\frac{2k-1}{22}\pi\right), \quad k = 1, 2, \ldots, 11$$
alappontokhoz (Csebisev-pontok) tartozó Lagrange-polinomját.


f
ekvidisztans pontok
Csebisev-pontok
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1

Megjegyzés

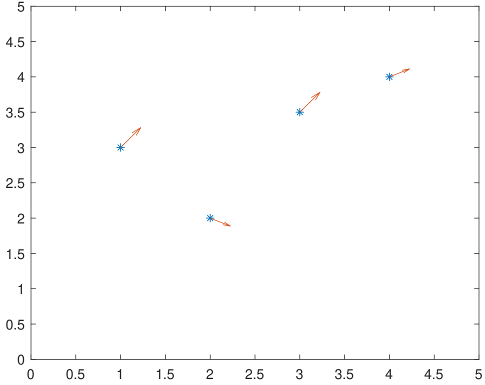
Ha az $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ függvényre n helyen illeszkedő Lagrange-polinomot szeretnénk elkészíteni, akkor az

$$x_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right), \quad k = 1, 2, \dots, n$$

alappontok (Csebisev-pontok) esetén lesz minimális a polinom és a függvény legnagyobb eltérése.
Ha f nem a $[-1, 1]$ intervallumon értelmezett, akkor megfelelő lineáris transzformációval leképezzük a pontokat a megadott intervallumra.

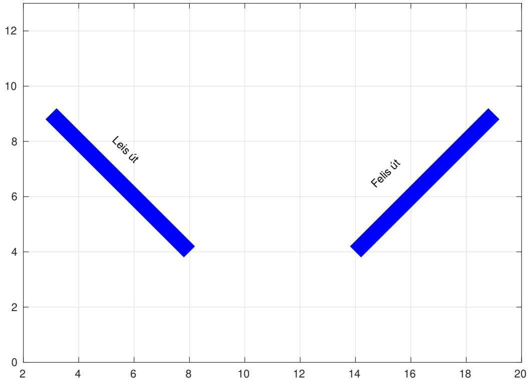
Hermite-interpoláció

Előfordulhat, hogy az alappontokban nem csak a függvény értéke van előírva, hanem az is, hogy a polinom a megadott pontokon ,,milyen irányban" haladjon át, azaz az alappontokban az első derivált értéke is, vagy esetleg további deriváltértékek is.



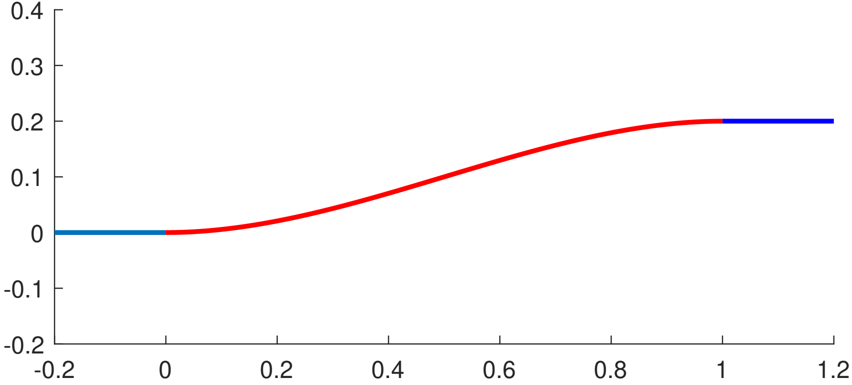
Példa

Az ábrán látható két útszakasz (Leis út, Felis út) egymáshoz közelebbi végei között szeretnénk utat építeni úgy, hogy az így kapott út menetében ne legyen törés. Adja meg a hiányzó útszakasz nyomvonalát leíró függvényt!



Példa

Egy garázs bejárata az úttól 1 méterre, az úttest szintje felett 20 cm-rel van. Tervezze meg az úttestet a bejárattal összekötő útszakaszt úgy, hogy a bejutás a garázsba minél simább legyen.



Hermite-interpoláció

Adottak az $x_0, x_1, \ldots, x_n$ páronként különböző alappontok, és az alappontokban függvény-, illetve deriváltértékek:

x_0-ban: $f(x_0), f'(x_0), \ldots f^{(m_0-1)}(x_0)$, ($m_0$ előírt érték)
x_1-ben: $f(x_1), f'(x_1), \ldots f^{(m_1-1)}(x_1)$, ($m_1$ előírt érték)
$\vdots$
x_n-ben: $f(x_n), f'(x_n), \ldots f^{(m_n-1)}(x_n)$, ($m_n$ előírt érték)

(Pontonként különböző lehet az előírt értékek száma, de ha valahol adott a k-adik derivált értéke, akkor abban a pontban a függvényérték, és az $1., 2., \ldots (k-1)$. derivált értéke is ismert)

Olyan minimális fokszámú $H(x)$ polinomot keresünk, melyre

$$H^{(j)}(x_i) = f^{(j)}(x_i), \qquad i = 0, 1, \ldots, n, \quad j = 0, \ldots, m_i - 1.$$

Állítás: Az Hermite-interpoláció feladata egyértelműen megoldható a legfeljebb $(m-1)$-edfokú polinomok körében, ahol m az összes előírt érték száma.

Példa

Keressük meg azt a minimális fokszámú polinomot, mely illeszkedik az alábbi adatokra!

x_i	-1	1
$f(x_i)$	2	4
$f'(x_i)$	-5	3

2 alappont, $2+2=4$ illeszkedési feltétel $\Longrightarrow$ legfeljebb harmadfokú polinom. A kiinduló tábla:

$$\begin{array}{c|ll} x_0 & f(x_0) & \\ & & f'(x_0) \\ x_0 & f(x_0) & \\ & & \\ x_1 & f(x_1) & \\ & & f'(x_1) \\ x_1 & f(x_1) & \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{r|ll} -1 & 2 & \\ & & -5 \\ -1 & 2 & \\ & & \\ 1 & 4 & \\ & & 3 \\ 1 & 4 & \end{array}$$

x_i	-1	1
$f(x_i)$	2	4
$f'(x_i)$	-5	3

$$
\begin{array}{r|llll}
-1 & 2 & & & \\
 & & -5 & & \\
-1 & 2 & & 3 & \\
 & & 1 & & -1 \\
1 & 4 & & 1 & \\
 & & 3 & & \\
1 & 4 & & &
\end{array}
$$

Az illesztett polinom:

$$H(x) = 2 - 5(x+1) + 3(x+1)^2 - (x+1)^2(x-1)$$

Példa

Keressük meg azt a minimális fokszámú polinomot, mely illeszkedik az alábbi adatokra!

x_i	-1	1
$f(x_i)$	2	4
$f'(x_i)$		3
$f''(x_i)$		-2

2 alappont, $1+3=4$ illeszkedési feltétel $\Longrightarrow$ legfeljebb harmadfokú polinom. A kiinduló tábla:

$$
\begin{array}{c|cccc}
x_0 & f(x_0) & & & \\
 & & & & \\
x_1 & f(x_1) & & & \\
 & & f'(x_1) & & \\
x_1 & f(x_1) & & \frac{f''(x_1)}{2} & \\
 & & f'(x_1) & & \\
x_1 & f(x_1) & & &
\end{array}
\quad \Longrightarrow \quad
\begin{array}{c|cccc}
-1 & 2 & & & \\
 & & & & \\
1 & 4 & & & \\
 & & 3 & & \\
1 & 4 & & -1 & \\
 & & 3 & & \\
1 & 4 & & &
\end{array}
$$

x_i	-1	1
$f(x_i)$	2	4
$f'(x_i)$		3
$f''(x_i)$		-2

$$
\begin{array}{r|lllll}
-1 & 2 & & & \\
 & & 1 & & \\
1 & 4 & & 1 & \\
 & & 3 & & -1 \\
1 & 4 & & -1 & \\
 & & 3 & & \\
1 & 4 & & &
\end{array}
$$

Az illesztett polinom:

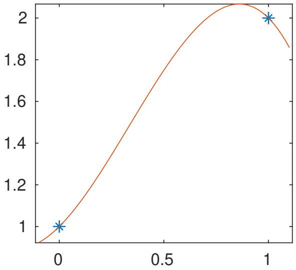
$$H(x) = 2 + (x+1) + (x+1)(x-1) - (x+1)(x-1)^2$$

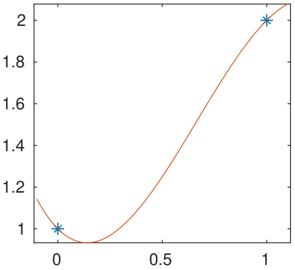
Példa

Meghatároztuk az alábbi adatokra illeszkedő minimális fokszámú polinomot:

x_i	0	1
$f(x_i)$	1	2
$f'(x_i)$	1	-1

A pontokat és a kapott polinomot ábrázoltuk. Melyik ábrát kaptuk az alábbiak közül?





Alkalmazások

Példa

Legyen az f valós függvény differenciálható az x_0 pontban. Hermite-interpoláció segítségével írjuk fel az f függvény x_0-beli értintőjének egyenletét!

Azt a $H(x)$ legfeljebb elsőfokú Hermite-polinomot keressük, melyre $H(x_0) = f(x_0)$ és $H'(x_0) = f'(x_0)$

$$\begin{array}{c|cc} x_0 & f(x_0) & \\ & & f'(x_0) \\ x_0 & f(x_0) & \end{array}$$

$$H(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Példa

Írjuk fel az x_0, $f(x_0)$, $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, ...,$f^{(n)}(x_0)$ adatokra illeszkedő Hermite-polinomot!

$$
\begin{array}{c|cccccc}
x_0 & f(x_0) & & & & & \\
 & & f'(x_0) & & & & \\
x_0 & f(x_0) & & \frac{f''(x_0)}{2!} & & & \\
 & & f'(x_0) & & \frac{f'''(x_0)}{3!} & & \\
x_0 & f(x_0) & & \frac{f''(x_0)}{2!} & & \ddots & \\
 & & f'(x_0) & & & & \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \\
x_0 & f(x_0) & & & & & \\
\vdots & \vdots & & & & & \\
x_0 & f(x_0) & & & & & \\
 & & f'(x_0) & & & & \\
x_0 & f(x_0) & & & & &
\end{array}
$$

Ekkor

$$
\begin{aligned}
H(x) =& f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 \\
&+ \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n
\end{aligned}
$$

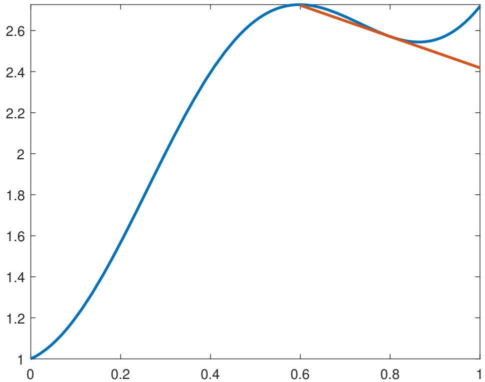
az f függvény x_0 körüli Taylor-polinomja.

Példa

Az

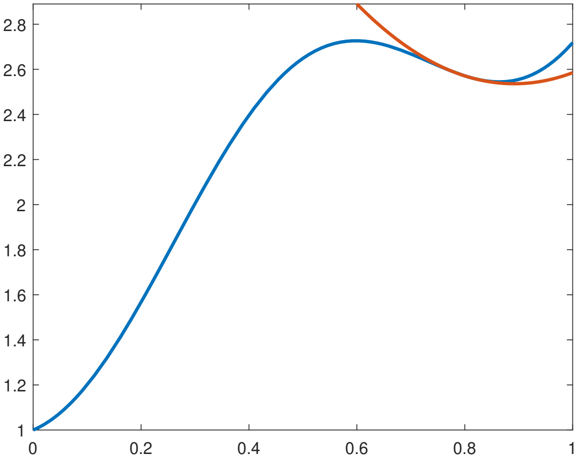
$$f(x) = \sin^2(\pi x) + e^x$$

függvény $x_0 = 0.8$-beli érintője. $(y(x_0) = f(x_0)$ és $y'(x_0) = f'(x_0))$



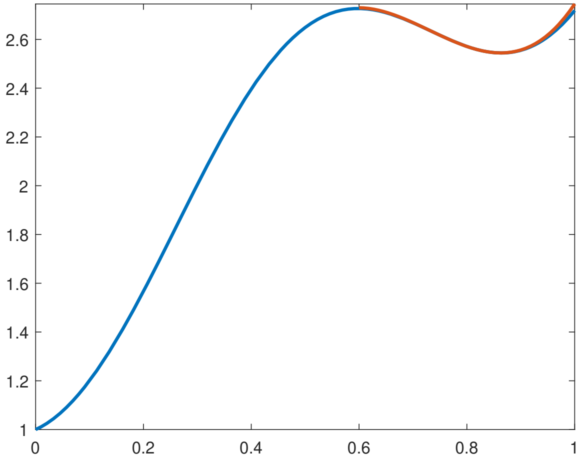
$$y(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Ha a második deriváltak egyezését is előírjuk, azaz $y(x_0) = f(x_0)$, $y'(x_0) = f'(x_0)$ és $y''(x_0) = f''(x_0)$



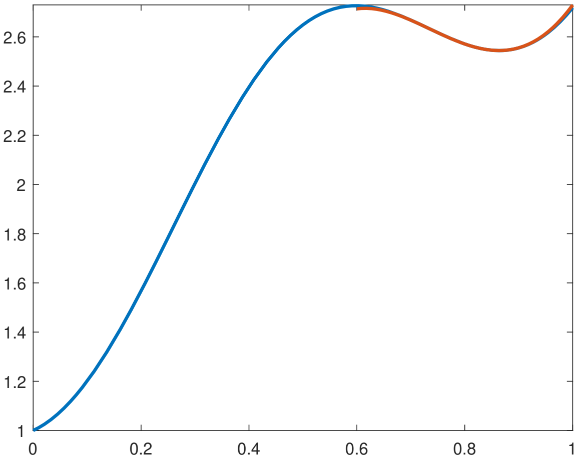
$$y(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2$$

Ha a harmadik deriváltak egyezését is előírjuk, azaz $y(x_0) = f(x_0)$, $y'(x_0) = f'(x_0)$, $y''(x_0) = f''(x_0)$ és $y'''(x_0) = f'''(x_0)$



$$y(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3$$

Ha a negyedik deriváltak egyezését is előírjuk, azaz $y(x_0) = f(x_0)$, $y'(x_0) = f'(x_0)$, $y''(x_0) = f''(x_0)$, $y'''(x_0) = f'''(x_0)$ és $y^{(4)}(x_0) = f^{(4)}(x_0)$



$$y(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}(x - x_0)^4$$

Szakaszonkénti interpoláció

Az alappontok számának növelésével nő az illesztett polinom fokszáma, de a közelítés hibája nem feltétlenül csökken.

Egyetlen magas fokszámú polinom illesztése helyett részintervallumonként alacsonyabb fokszámú polinomok

Osszuk fel az $[a, b]$ intervallumot m darab részintervallumra:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_m = b$$

Minden $[x_{i-1}, x_i]$ intervallumon végezzük el a Lagrange-interpolációt!

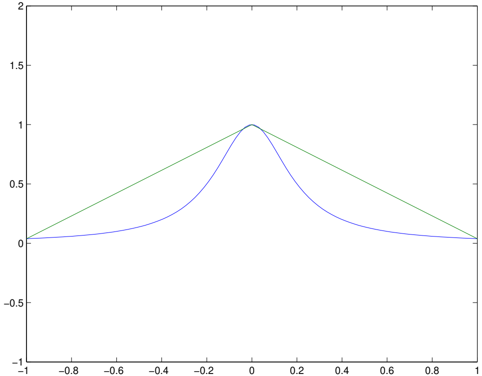
Ha az $[x_{i-1}, x_i]$ intervallumon csak az $f(x_{i-1})$, $f(x_i)$ adatok ismertek, akkor szakaszonkénti lineáris interpoláció (töröttvonal interpoláció)

Ha $h := x_i - x_{i-1}$, $i = 1, \ldots, m$, és f kétszer folyt. diff.ható $[a, b]$-n, akkor az $L_{m\times 1}(x)$ töröttvonalra:

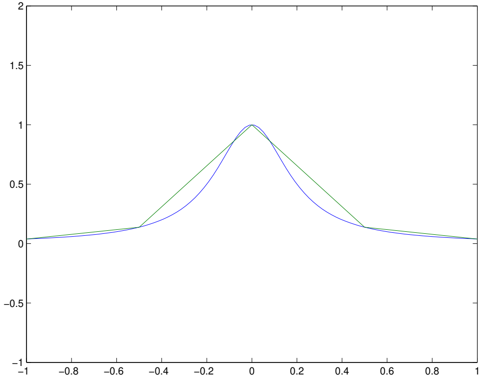
$$|f(x) - L_{m\times 1}(x)| \leq \frac{M_2}{8} h^2, \qquad x \in [a, b]$$

Ez tart 0-hoz, ha $h \to 0$

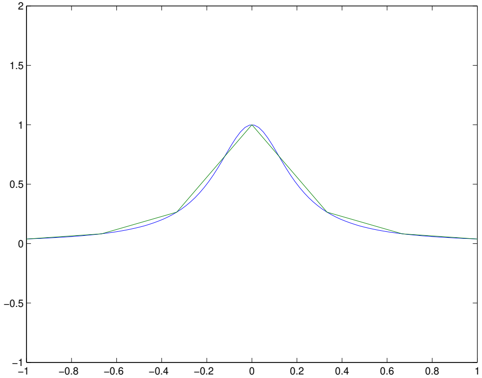
Szakaszonként lineáris interpoláció, 2 részintervallum



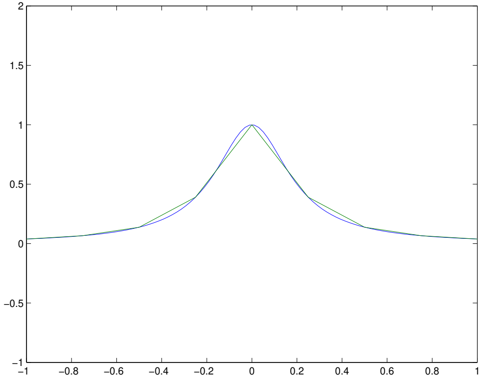
Szakaszonként lineáris interpoláció, 4 részintervallum



Szakaszonként lineáris interpoláció, 6 részintervallum



Szakaszonként lineáris interpoláció, 8 részintervallum



Szakaszonként harmadfokú Hermite-interpoláció

A töröttvonal interpolációval illesztett függvény folytonos, de az osztópontokban “törik”, azaz nem differenciálható.

Sima (folytonosan differenciálható) függvény illesztése: az osztópontokban előírjuk az 1. derivált értékét is.

Ekkor az $[x_{i-1}, x_i]$ intervallumon az

x_{i-1}	x_i
$f(x_{i-1})$	$f(x_i)$
$f'(x_{i-1})$	$f'(x_i)$

adatok ismertek. 4 illeszkedési feltétel $\rightarrow$ legfeljebb harmadfokú polinom

Példa

Határozzuk meg azt a folytonosan differenciálható, szakaszonként harmadfokú

$$H(x) = \begin{cases} H_1(x), & \text{ha} \quad x \in [-1, 1] \\ H_2(x), & \text{ha} \quad x \in (1, 3] \end{cases}$$

polinomot, melyre $H(-1) = 4$, $H(1) = 6$, $H(3) = 12$, $H'(-1) = -3$, $H'(1) = 13$, $H'(3) = 9$ teljesül!

x_i	-1	1	3
$H(x)$	4	6	12
$H'(x)$	-3	13	9

$$
\begin{array}{r|llll}
-1 & 4 & & & \\
 & & -3 & & \\
-1 & 4 & & 2 & \\
 & & 1 & & 2 \\
1 & 6 & & 6 & \\
 & & 13 & & \\
1 & 6 & & &
\end{array}
$$

x_i	-1	1	3
$H(x)$	4	6	12
$H'(x)$	-3	13	9

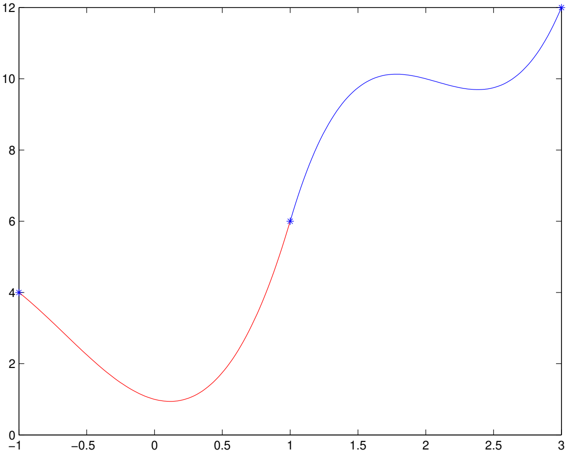
$$H_1(x) = 6 + 13(x-1) + 6(x-1)^2 + 2(x-1)^2(x+1)$$

$$
\begin{array}{r|llll}
1 & 6 & & & \\
 & & 13 & & \\
1 & 6 & & -5 & \\
 & & 3 & & 4 \\
3 & 12 & & 3 & \\
 & & 9 & & \\
3 & 12 & & &
\end{array}
$$

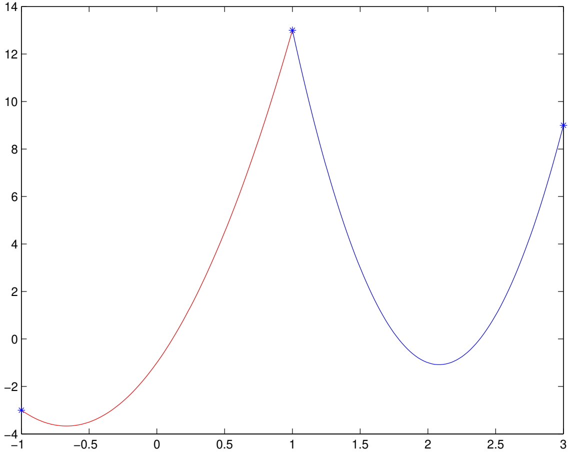
x_i	-1	1	3
$H(x)$	4	6	12
$H'(x)$	-3	13	9

$$H_2(x) = 6 + 13(x-1) - 5(x-1)^2 + 4(x-1)^2(x-3)$$

A H_1 és H_2 polinomok:



A H_1 és H_2 első deriváltja:



Harmadfokú spline-interpoláció

Ha a részintervallumok találkozásánál megköveteljük az 1. derivált folytonosságát, de nem írjuk elő a derivált értékét, akkor marad 1 szabad paraméterünk:

x_i	-1	1	3
$H(x)$	4	6	12
$H'(x)$	-3	α	9

$$
\begin{array}{r|lllll}
-1 & 4 & & & \\
 & & -3 & & \\
-1 & 4 & & 2 & \\
 & & 1 & & \frac{\alpha-5}{4} \\
1 & 6 & & \frac{\alpha-1}{2} & \\
 & & \alpha & & \\
1 & 6 & & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|lllll}
1 & 6 & & & \\
 & & \alpha & & \\
1 & 6 & & \frac{3-\alpha}{2} & \\
 & & 3 & & \frac{3+\alpha}{4} \\
3 & 12 & & 3 & \\
 & & 9 & & \\
3 & 12 & & &
\end{array}
$$

$$H_1(x) = 6 + \alpha(x-1) + \frac{\alpha-1}{2}(x-1)^2 + \frac{\alpha-5}{4}(x-1)^2(x+1)$$
$$H_2(x) = 6 + \alpha(x-1) + \frac{3-\alpha}{2}(x-1)^2 + \frac{3+\alpha}{4}(x-1)^2(x-3)$$

A szabad paraméter lehetőséget ad még egy feltétel állítására: követeljük meg a 2. derivált folytonosságát is!

$$H_1''(1) = 2\alpha - 6$$
$$H_2''(1) = -2\alpha$$

Ekkor $H_1''(1) = H_2''(1)$-ből

$$2\alpha - 6 = -2\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{3}{2}$$

Harmadfokú spline-interpoláció alapötlete

Adottak

x_0	x_1	x_2	$\ldots$	x_{n-1}	x_n
$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$\ldots$	$f(x_{n-1})$	$f(x_n)$
$f'(x_0)$					$f'(x_n)$

Olyan $S(x)$ függényt keresünk, melyre

- $S(x_i) = f(x_i)$
- $S'(x_0) = f'(x_0)$ és $S'(x_n) = f'(x_n)$
- $S|_{[x_{i-1},x_i]} = S_i$ harmadfokú polinom, $i = 1, \ldots, n$
- S kétszer folytonosan differenciálható

1. Bevezetjük az $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ ismeretleneket:

x_0	x_1	x_2	$\dots$	x_{n-1}	x_n
$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$\dots$	$f(x_{n-1})$	$f(x_n)$
$f'(x_0)$	α_1	α_2	$\dots$	α_{n-1}	$f'(x_n)$

2. Felírjuk az $[x_{i-1}, x_i]$ részintervallumok fölött az $S_i(x)$ harmadfokú Hermite-polinomokat.

3. Felírjuk az $S_i''(x_i) = S_{i+1}''(x_i)$ egyenleteket $(i = 1, \dots, n-1)$. Ezek az α_i ismeretlenekre egy lineáris egyenletrendszert adnak.

4. Megoldjuk az egyenletrendszert. (Az egyenletrendszer mátrixa tridiagonális.)