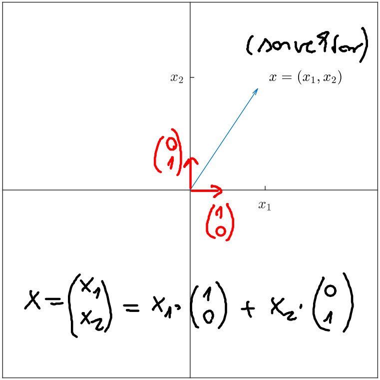
Lineáris algebra, vektorok

Középiskolában: a sík ($\mathbb{R}^2$) vektorai



$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ (oszlopvektor)

Két vektor összege:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}$$

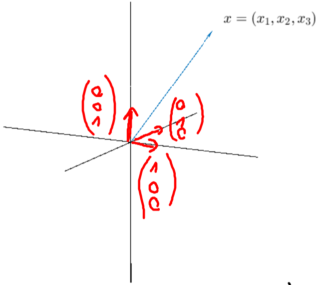
Vektor szorzása skalárral:

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

A nullvektor: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Lineáris algebra, vektorok

A tér ($\mathbb{R}^3$) vektorai



$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Két vektor összege:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix}$$

Vektor szorzása skalárral:

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \end{pmatrix} \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

A nullvektor: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Vektorok

Az n dimenziós valós vektorok ($\mathbb{R}^n$ vektorai)

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

ahol $x_i \in \mathbb{R}$

A nullvektor: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

Két vektor összege:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

Vektor szorzása skalárral:

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix} \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

Vektorok

A vektorok koordinátái akár komplex számok is lehetnek:

$$x \in \mathbb{C}^n, \quad \text{ha} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \text{ahol } x_i \in \mathbb{C}$$

Az összeadás és a skalárral való szorzás ugyanúgy definiálható, mint valós vektorok esetén (a skalárt most a komplex számok halmazából választhatjuk), a nullvektor ugyanúgy a csupa 0 koordinátából álló vektor.

Példa:

$$x = \begin{pmatrix} 1-2i \\ 2+3i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$$

Lineáris algebra, vektorterek

$\mathbb{K}$ jelölje $\mathbb{R}$-et vagy $\mathbb{C}$-t

Definíció

$\mathbb{K}$: a skalárok

Egy V nemüres halmazt $\mathbb{K}$ feletti vektortérnek és V elemeit vektoroknak hívjuk, ha értelmezve van két művelet:

- (vektor)összeadás: $V \times V \to V$, $(v, w) \mapsto v + w$,
- skalárral való szorzás: $\mathbb{K} \times V \to V$, $(\lambda, v) \mapsto \lambda v$, $\leftarrow$

amelyek az alábbi tulajdonságokkal rendelkeznek:

Vektorösszeadás:

- (a) kommutatív, azaz $\forall v, w \in V$: $v + w = w + v$;
- (b) asszociatív, azaz $\forall u, v, w \in V$: $(u + v) + w = u + (v + w)$;
- (c) létezik nullvektor, azaz egy $0 \in V$ vektor, amelyre $v + 0 = v$ $(\forall v \in V)$;
- (d) $\forall v \in V$ esetén létezik ún. ellentett vektor, azaz egy $-v$-vel jelölt vektor, hogy $v + (-v) = 0$.

Skalárral való szorzás:

- (a) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $v \in V$: $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$;
- (b) $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $v, w \in V$: $\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w$;
- (c) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $v \in V$: $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v$;
- (d) $\forall v \in V$: $1v = v$.

Példák vektorterekre

- $\mathbb{R}^n$ vektortér $\mathbb{R}$ felett
- $\mathbb{C}^n$ vektortér $\mathbb{C}$ felett

Vektortér nem csak középiskolai értelemben vett vektorokból állhat, pl:

- A legfeljebb n-edfokú valós együtthatós polinomok halmaza vektortér $\mathbb{R}$ felett

Definíció

A V vektortér egy nemüres W részhalmazát V alterének nevezzük, ha W maga is vektortér, azaz zárt a vektorösszeadásra és a skalárral való szorzásra.

Megjegyzés: $\{0\}$ és V mindig altér. Ezeket triviális altereknek nevezzük.

Példa:

$$W = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 0\}$$

altere $\mathbb{R}^3$-nak.

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix},\ x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$x, y \in W \overset{?}{\Longrightarrow} x + y \in W$$

$$x \in W,\ \lambda \in \mathbb{R} \overset{?}{\Longrightarrow} \lambda x \in W$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ 0 \end{pmatrix} \in W$$

zárt a vektorössze-
adásra

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \in W$$

zárt a skalár-
ral való szorzásra

$\Longrightarrow$ W altere $\mathbb{R}^3$-nak

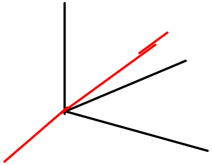
② $W = \{ x \in \mathbb{R}^3 : \quad x_2 = 0 \}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad \text{altere } \mathbb{R}^3\text{-nak}$$

③ $W = \{ x \in \mathbb{R}^3 \quad x_1 = x_2 = x_3 \}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

altere $\mathbb{R}^3$-nak



(4) $W = \{ x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 = 0 \}$

$x, y \in W$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix}$$

$x_1 + x_2 = 0$ $\qquad$ $y_1 + y_2 = 0$

$$(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) =$$

$$\underbrace{x_1 + x_2}_{0} + \underbrace{y_1 + y_2}_{0} = 0$$

W zárt a vektorösszeadásra

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$ zárt a skalárral való szorzásra

$x_1 + x_2 = 0$ $\qquad$ $\lambda x_1 + \lambda x_2 = \lambda(x_1 + x_2) = 0$

$\Longrightarrow$ altér

(5) $W = \{ x \in \mathbb{R}^3 \quad x_1 + x_2 = 1 \}$

$x, y \in W$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix}$$

$x_1 + x_2 = 1 \qquad y_1 + y_2 = 1 \qquad x_1 + y_1 + x_2 + y_2 = 2$

nem zárt az összeadásra

$\Longrightarrow$ nem altér

(6) $W = \{ x \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 1 \}$

$x, y \in W$

$$x + y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ 2 \end{pmatrix}$$ nem altér

---

Megjegyzés: a nullvektor mindig eleme az altérnek

Definíció

Egy V vektortér $v_1, v_2, \dots, v_n$ vektorainak lineáris kombinációi a

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n, \qquad (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}),$$

alakú (V-beli) vektorok.

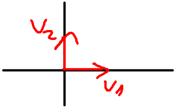
Megj.: A nullvektor mindig előáll ú.n. triviális lineáris kombinációként:

$$0 = 0 \cdot v_1 + \cdots + 0 \cdot v_n$$

Példák

1. $\mathbb{R}^2$-ben a $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ és $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ vektorok egy lineáris kombinációja:

$$2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

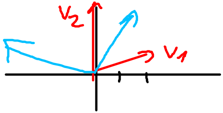


Mutassuk meg, hogy minden $\mathbb{R}^2$-beli vektor előállítható ezen két vektor lineáris kombinációjaként!

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Példák

2. $\mathbb{R}^2$-ben a $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ és $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ vektorok egy lineáris kombinációja:

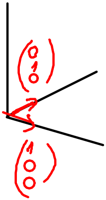


$$2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

   Mely $\mathbb{R}^2$-beli vektorok állíthatóak elő ezen két vektor lineáris kombinációjaként?

3. $\mathbb{R}^3$-ban mely vektorok állnak elő a

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



   vektorok lineáris kombinációjaként?

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(2) $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

Pl $x = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ van-e olyan $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, hogy $x = \lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2\lambda_1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}}_{\lambda_1 v_1} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 3\lambda_2 \end{pmatrix}}_{\lambda_2 v_2} = \underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}}_{x}$$

$\lambda_1 = 3$

$\lambda_2 = \frac{1}{3}$

Ha $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ akkor van-e olyan $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, hogy

$$x = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2\lambda_1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}}_{\lambda_1 v_1} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 3\lambda_2 \end{pmatrix}}_{\lambda_2 v_2} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = \frac{x_1}{2}$

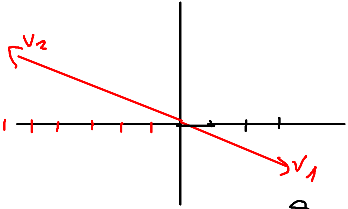
$\lambda_2 = \frac{1}{3}\left(x_2 - \overset{\lambda_1}{\frac{x_1}{2}}\right)$

③ $\mathbb{R}^2$-ben $\quad v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix}$

Pl legyen $\quad x = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$x = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\lambda_1 \\ -\lambda_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6\lambda_2 \\ 2\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\lambda_1 - 6\lambda_2 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} = 2 \\ = 4 \end{matrix}$$



$$-\lambda_1 + 2\lambda_2 = 4 \quad /\cdot(-3)$$

$$3\lambda_1 - 6\lambda_2 = -12$$

⚡

csak az egyenes
vektorai

Tétel és definíció

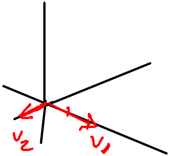
Legyenek $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vektorok V-ben. Ekkor a $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ vektorrendszer összes lineáris kombinációi alteret alkotnak V-ben, amelyet a vektorrendszer által generált altérnek, vagy a vektorok által kifeszített altérnek nevezünk. Jele: $\mathcal{L}(v_1, \ldots, v_n)$.

Példa. Adjuk meg, hogy milyen alteret generálnak $\mathbb{R}^3$-ban az alábbi vektorrendszerek.

(a)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{x_1}{2} v_1 - x_2 v_2$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



(b)

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{x_1}{2} v_1 - x_1 v_2 + \frac{x_3}{3} v_3$$

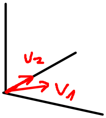
a teljes $\mathbb{R}^3$

(c)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (x_2 - x_1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

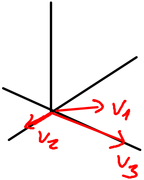
$$\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



(d)

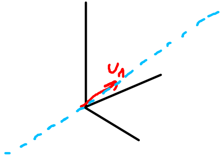
$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



(e)

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_1 \end{pmatrix} = x_1 \cdot v_1$$



(d) $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \cdot v_1 - v_2 = -4 v_2 + \frac{3}{2} v_3$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = -x_2 v_2 + \frac{x_1}{2} v_3$$

Definíció

A V vektortér egy $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ vektorrendszerét lineárisan függőnek nevezzük, ha léteznek olyan $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ **nem mind 0** skalárok, hogy

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n = 0.$$

(Azaz a nullvektor nemtriviálisan kikombinálható a vektorokból.) Ellenkező esetben a vektorrendszer lineárisan független.

Megjegyzés

A lineárisan független esetben tehát

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n = 0$$

azt vonja maga után, hogy $\lambda_i = 0$, $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$.

Példa: Döntsük el, hogy $\mathbb{R}^2$-ben lineárisan függetlenek-e az alábbi vektorrendszerek.

ha $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0$ akkor $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

(a)

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$3v_1 - 4v_2 - v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

lin. függőek

$$v_3 = 3v_1 - 4v_2$$

(b)

ha $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0$ $\quad \begin{pmatrix} 2\lambda_1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{matrix}$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

lin. függetlenek

(c)

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$2V_1 + V_2 = 0$

lin. függőek

(d)

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Köv. oldal

(e)

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$V_1 - V_2 + 2V_3 = 0$$

lin. függőek

d) $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ha $\quad \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0$

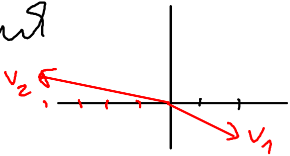
$$\begin{pmatrix} 2\lambda_1 \\ -\lambda_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4\lambda_2 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda_1 - 4\lambda_2 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$2\lambda_1 - 4\lambda_2 = 0$

$-\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \qquad\qquad -2\lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \lambda_1 = 0$

$\Rightarrow$ lin. unabhängig



Tétel

Egy V vektortér egy legalább kételemű vektorrendszere pontosan akkor lineárisan függő, ha a vektorrendszer valamely tagja előáll a többi tag lineáris kombinációjaként.

Következmények

1. Ha egy vektorrendszerben két vektor egyenlő, akkor a vektrorrendszer lineárisan függő.
2. Ha egy vektorrendszerben egy vektor egy másiknak skalárszorosa, akkor a vektrorrendszer lineárisan függő.
3. Ha a nullvektor benne van egy vektorrendszerben, akkor az függő, tehát lineárisan független vektorrendszer nem tartalmazhatja a nullvektort.
4. Ha egy vektorrendszer valamely részrendszere lineárisan függő, akkor maga a vektorrendszer is az. Lineárisan független vektorrendszer bármely részrendszere is lineárisan független.

Generátorrendszer, bázis

Definíció

Legyen $\mathcal{G}$ a V vektortér egy vektorrendszere. $\mathcal{G}$-t a V generátor-rendszerének nevezzük, ha a $\mathcal{G}$ által generált altér a teljes vektortér. Ekkor tehát V minden vektora előáll $\mathcal{G}$-beli vektorok lineáris kombinációjaként.

Példa: $V = \mathbb{R}^2$, $v = \binom{2}{1}$, $w = \binom{0}{3}$. Ekkor $\{v, w\}$ generátorrendszer. Legyen $u = \binom{1}{0}$. Ekkor $\{u, v, w\}$ is generátorrendszer, viszont lineárisan függő, hiszen $6u - 3v + w = 0$. $\Rightarrow$ Egy vektor többféleképpen is kikombinálható az u, v, w vektorokból, pl.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = v + w = 2u + \frac{4}{3}w.$$

Definíció

A V vektortér egy lineárisan független generátorrendszerét a V egy bázisának nevezzük.

Bázis: lineárisan független generátorrendszer.

- Ha a $\mathcal{B}$ vektorrendszer bázis, akkor V minden eleme **pontosan egyféleképpen** kombinálható ki lineárisan $\mathcal{B}$ elemeiből.
- V-nek több (végtelen sok) bázisa van.

Tétel és definíció

A V vektortér bármely két bázisa azonos számosságú. Ha ez a számosság véges, akkor ezt a közös számosságot a vektortér dimenziójának nevezzük. Jele: $\dim(V)$. Megjegyzés: ha $V = \{0\}$, akkor $\dim(V) = 0$.

Példa. Néhány bázis $\mathbb{R}^2$-ben:

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{B}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Megjegyzés. A $\mathcal{B}_1$ bázist $\mathbb{R}^2$ természetes bázisának nevezzük. Hasonlóan definiálható $\mathbb{R}^n$-ben a természetes bázis: a bázis i-edik vektorának i-edik koordinátája 1, a többi 0 ($i = 1, \ldots, n$).

Bázisra vonatkozó koordináták

Tétel

Ha egy n-dimenziós V vektortérben adott egy n elemű lineárisan független vektorrendszer, akkor az bázis.

Definíció

Legyen V vektortér, $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ egy bázisa V-nek. Ekkor a fentiek szerint $\forall v \in V$ egyértelműen kombinálható lineárisan $\mathcal{B}$ vektoraiból, azaz egyértelműen léteznek $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ skalárok, hogy

$$v = \lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_n b_n.$$

Ezeket a skalárokat a v vektor $\mathcal{B}$ bázisra vonatkozó koordinátáinak nevezzük. Ekkor v alakja a $\mathcal{B}$ bázisban:

$$v = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Pl. $\mathbb{R}^2$ – ben

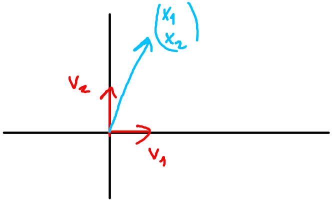
$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

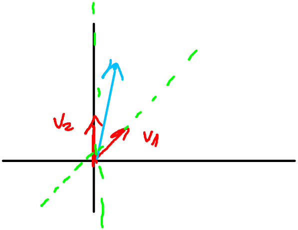
$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{báze}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \cdot v_1 + (x_2 - x_1)\, v_2$$

a v_1, v_2 bázinme vomelšená koordi-náte



x_1
x_2
v_2
v_1



v_2
v_1

Definíció

Legyen $\mathcal{A}$ a vektortér egy vektorrendszere. Az $\mathcal{A}$ vektorrendszer rangja az általa generált altér dimenziója:

$$\text{rang}(\mathcal{A}) = \dim(\mathcal{L}(\mathcal{A})).$$

Példa. Mennyi a

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

vektorrendszer rangja?

Tétel

Egy vektorrendszer rangja nem változik, ha bármely eleméhez hozzáadjuk a többi elem tetszőleges lineáris kombinációját.