Határozatlan integrál
Előadásjegyzet

Alapfogalmak

1. Definíció. *Legyen* $]a,b[\subset \mathbb{R}$ *nemüres, nyílt intervallum,* $f\ :]a,b[\to \mathbb{R}$ *függvény. Az* $F\ :]a,b[\to \mathbb{R}$ *függvényt az* f *függvény* ***primitív függvény****ének vagy* ***határozatlan integrál****jának nevezzük, ha az* F *függvény differenciálható az* $]a,b[$ *intervallumon és*

$$F'(x) = f(x)$$

teljesül minden $x \in]a,b[$ *esetén. Az* F *függvényre a továbbiakban az* $\int f$ *vagy az* $\int f(x)dx$ *jelölést használjuk.*

1. Tétel. *Ha* $f, F\ :]a,b[\to \mathbb{R}$ *és* $F' = f$*, akkor* $G\ :]a,b[\to \mathbb{R}$ ***pontosan akkor*** *primitív függvénye* f*-nek, ha létezik olyan* $C \in \mathbb{R}$*, hogy*

$$F(x) = G(x) + C \qquad (x \in]a,b[)$$

Alapintegrálok

1.
$$\int e^x\,dx = e^x$$

2.
$$\int a^x\,dx = \frac{1}{\ln a}a^x$$

3.
$$\int \ln(x)\,dx = x\ln(x) - x$$

4.
$$\int \log_a(x)\,dx = \frac{1}{\ln a}(x\ln(x) - x)$$

5.
$$\int x^\alpha\,dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} & \text{ha } \alpha \neq -1, \\ \ln|x| & \text{ha } \alpha = -1\,, \end{cases}$$

6.
$$\int \cos(x)\,dx = \sin(x)$$

7.
$$\int \sin(x)\,dx = -\cos(x)$$

8.
$$\int \mathrm{tg}(x)\,dx = -\ln|\cos(x)|$$

9.
$$\int \mathrm{ctg}(x)\,dx = \ln|\sin(x)|$$

10.
$$\int \arccos(x)\,dx = x\arccos(x) - \sqrt{1-x^2}$$

11.
$$\int \arcsin(x)\,dx = x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}$$

12.
$$\int \mathrm{arctg}(x)\,dx = x\,\mathrm{arctg}(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$$

13.
$$\int \mathrm{arcctg}(x)\,dx = x\,\mathrm{arcctg}(x) + \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$$

14.
$$\int \cosh(x)\,dx = \sinh(x)$$

15.
$$\int \sinh(x)\,dx = \cosh(x)$$

16.
$$\int \tanh(x)\,dx = \ln|\cosh(x)|$$

17.
$$\int \coth(x)\,dx = \ln|\sinh(x)|$$

18.
$$\int \mathrm{arcosh}(x)\,dx = x\,\mathrm{arcosh}(x) - \sqrt{x^2+1}$$

19.

$$\int \operatorname{arsinh}(x)\,dx = x\operatorname{arsinh}(x) - \sqrt{x^2+1}$$

20.

$$\int \operatorname{artanh}(x)\,dx = x\operatorname{artanh}(\mathrm{x}) + \frac{1}{2}\ln|1-x^2|$$

21.

$$\int \operatorname{arcoth}(x)\,dx = x\operatorname{arcoth}(x) + \frac{1}{2}\ln|x^2-1|$$

22.

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}(x)$$

23.

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg}(x)$$

24.

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin(x)$$

25.

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\arccos(x)$$

26.

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg}(x)$$

27.

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = -\operatorname{arcctg}(x)$$

28.

$$\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh(x)$$

29.

$$\int \frac{dx}{\sinh^2 x} = -\coth(x)$$

30.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{arsinh}(x)$$

31.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arcosh}(x)$$

32.

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{artanh}(x)$$

33.

$$\int \frac{dx}{x^2-1} = -\operatorname{arcoth}(x)$$

Integrálási szabályok

2. Tétel (A határozatlan integrál linearitása). *Legyenek $f, g :]a,b[\to \mathbb{R}$ olyan függvények, melyekre létezik $\int f$ és $\int g$, legyenek továbbá $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstansok. Ekkor létezik $\int \alpha \cdot f + \beta \cdot g$ is, és létezik olyan $C \in \mathbb{R}$, hogy*

$$\int \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx + C.$$

1. Példa.

$$\begin{aligned}
&\int 3x + 4x^2 + 5x^3 + 2\sinh(x)dx \\
&= 3\int xdx + 4\int x^2dx + 5\int x^3dx + 2\int \sinh(x)dx \\
&= 3\frac{x^2}{2} + 4\frac{x^3}{3} + 5\frac{x^4}{4} + 2\cosh(x) + C
\end{aligned}$$

3. Tétel (A parciális integrálás tétele). *Ha az $f, g :]a,b[\to \mathbb{R}$ függvények differenciálhatóak $]a,b[$-n, és létezik $\int f' \cdot g$, akkor létezik $\int f \cdot g'$ is, és létezik olyan $C \in \mathbb{R}$ konstans, hogy*

$$\int f(x) \cdot g'(x)dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)dx + C. \quad (x \in]a,b[)$$

2. Példa.

$$\int xe^x dx = ?$$

Legyen
$$f(x) = x \quad \textit{és} \quad g'(x) = e^x.$$
Ekkor
$$f'(x) = 1 \quad \textit{és} \quad g(x) = e^x.$$
Így, a parciális integrálás tétele miatt
$$\int xe^x dx = xe^x - \int 1 \cdot e^x dx = xe^x - e^x + C.$$

3. Példa.
$$\int \ln(x) dx = ?$$
Legyen
$$f(x) = \ln(x) \quad \textit{és} \quad g'(x) = 1.$$
Ekkor
$$f'(x) = \frac{1}{x} \quad \textit{és} \quad g(x) = x.$$
Így, a parciális integrálás tétele miatt
$$\int 1 \cdot \ln(x) dx = x \ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln(x) - \int 1 dx = x \ln(x) - x + C.$$

4. Példa.
$$\int x^2 \sinh(x) dx = ?$$
Alkamazzuk a parciális integrálás tételét az
$$f(x) = x^2 \quad \textit{és} \quad g'(x) = \sinh(x).$$
választással. Ekkor
$$f'(x) = 2x \quad \textit{és} \quad g(x) = \cosh(x),$$
így
$$\begin{aligned}\int x^2 \sinh(x) dx &= x^2 \cosh(x) - \int 2x \cdot \cosh(x) dx \\ &= x^2 \cosh(x) - \left[2x \sinh(x) - \int 2 \cdot \sinh(x) dx\right] \\ &= x^2 \cosh(x) - 2x \sinh(x) + 2\cosh(x) + C.\end{aligned}$$

4. Tétel (A helyettesítéses integrálás tétele). *Ha* $f\ :]a,b[\to \mathbb{R}$, $g\ :]c,d[\to]a,b[$ *olyan függvények, melyek esetén létezik* $g'\ :]c,d[\to \mathbb{R}$ *és létezik* $\int f$ *is, akkor létezik* $\int (f \circ g) \cdot g'$ *is, és van olyan* $C \in \mathbb{R}$*, hogy*
$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \left(\left(\int f\right) \circ g\right)(x) + C = \int f(t) dt \bigg|_{t=g(x)} + C. \quad (x \in]c,d[)$$

5. Példa.
$$\int \sinh(2 - 7x) dx = ?$$
Legyen $t = 2 - 7x$*, azaz,* $x = \dfrac{-t-2}{7}$*,*
$$g(t) = \frac{-t-2}{7} \quad \textit{és} \quad g'(t) = -\frac{1}{7}.$$

Ekkor

$$\int \sinh(2-7x)dx = \int \underbrace{\sinh(t)}_{=f(g(t))} \cdot \underbrace{\left(-\frac{1}{7}\right)}_{=g'(t)} dt \Bigg|_{t=2-7x}$$

$$= -\frac{1}{7}\int \sinh(t)dt\Bigg|_{t=2-7x} = \frac{-\cosh(t)}{7} + C\Bigg|_{t-2-7x} = \frac{-\cosh(2-7x)}{7} + C$$

5. Tétel. *Legyen $f\ :]a,b[\to \mathbb{R}$ differenciálható $]a,b[$-n, $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$, ekkor $f^{\alpha}\cdot f'$ függvénynek létezik a primitív függvénye $]a,b[$-n és*

$$\int f^{\alpha}(x)\cdot f'(x)dx = \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + C,$$

teljesül valamely $C \in \mathbb{R}$ konstanssal.

6. Példa.

$$\int (\mathrm{tg}(x)+\mathrm{ctg}(x))^3\left(\frac{1}{\cos^2(x)} - \frac{1}{\sin^2(x)}\right)dx = ?$$

A fenti tétel jelöléseivel,

$$f(x) = \mathrm{tg}(x)+\mathrm{ctg}(x),\ f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} - \frac{1}{\sin^2(x)},\ \alpha = 3,$$

így,

$$\int (\mathrm{tg}(x)+\mathrm{ctg}(x))^3\left(\frac{1}{\cos^2(x)} - \frac{1}{\sin^2(x)}\right)dx = \frac{(\mathrm{tg}(x)+\mathrm{ctg}(x))^4}{4} + C.$$

6. Tétel. *Ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos $[a,b]$-n, $f(x) \neq 0$ $(x \in [a,b])$, f differenciálható $]a,b[$-n, akkor az $\frac{f'}{f}$ függvénynek létezik a primitív függvénye, és létezik olyan $C \in \mathbb{R}$, hogy*

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln\left(|f(x)|\right) + C.$$

7. Példa.

$$\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3}dx = ?$$

A fenti tétel jelöléseivel

$$f(x) = e^{2x}+3 \quad \textit{és} \quad f'(x) = 2e^{2x},$$

így

$$\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+3}dx = \frac{1}{2}\ln\left(\left|e^{2x}+3\right|\right) + C.$$

7. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ tetszőlegesek. Ha létezik $\int f$, akkor létezik $\int f(\alpha x+\beta)\,dx$ is, és létezik olyan $C \in \mathbb{R}$ konstans, hogy*

$$\int f(\alpha x+\beta)\,dx = \frac{F(\alpha x+\beta)}{\alpha} + C, \quad (x \in \mathbb{R})$$

ahol F jelöli az f függvény primitív függvényét.

Integrálási módszerek

Racionális törtfüggvények integrálása

Egyszerűbb speciális típusok

1. Állítás. *Legyenek $A, a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ tetszőlegesek, ekkor*

$$\int \frac{A}{ax+b}dx = \frac{A}{a}\ln\left(|ax+b|\right) + C.$$

2. Állítás. *Legyenek $A, a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ és $n \in \mathbb{N}, n \neq 1$ tetszőlegesek, ekkor*

$$\int \frac{A}{(ax+b)^n}dx = \frac{A}{a(1-n)}\frac{1}{(ax+b)^{n-1}} + C.$$

3. Állítás. *Legyenek $A, a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ és $n \in \mathbb{N}\setminus\{1,2\}$ tetszőlegesek, ekkor*

$$\int \frac{Ax}{(ax+b)^n}dx = \frac{A}{a^2}\frac{(ax+b)^{2-n}}{2-n} - \frac{Ab}{a^2}\frac{(ax+b)^{1-n}}{1-n} + C.$$

4. Állítás. *Legyenek $A, a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ tetszőlegesek és $D = b^2 - 4ac$. Ekkor, ha*

- *$D < 0$, akkor*

$$\int \frac{A}{ax^2+bx+c}dx = \frac{A}{ab}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+\frac{b}{2a}}{b}\right) + C;$$

- *$D = 0$, akkor*

$$\int \frac{A}{ax^2+bx+c}dx = -\frac{A}{a}\frac{1}{x+\frac{b}{a}} + C;$$

- *$D > 0$, akkor*

$$\int \frac{A}{ax^2+bx+c}dx = \frac{\sqrt{D^3}}{8a^2}\operatorname{artanh}\left(\frac{2a\left(x+\frac{b}{2a}\right)}{\sqrt{D}}\right) + C.$$

5. Állítás. *Legyen $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ tetszőleges, és*

$$I_n(x) = \int \frac{1}{(x^2+a^2)^n} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor,

$$I_1 = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right)$$

és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$I_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2n}I_n$$

teljesül.

A parciális törtekre bontás módszere

2. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az f valós függvény **racionális törtfüggvény**, ha léteznek olyan P és Q valós polinomok, hogy*

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \qquad (x \in \mathbb{R}, Q(x) \neq 0)$$

teljesül.

1. Megjegyzés. *A továbbiakban az általánosság csorbítása nélkül feltehető, hogy f úgynevezett **valódi racionális törtfüggvény**, azaz, ha*

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

akkor $\deg(P) < \deg(Q)$ *teljesül. Ellenkező esetben ugyanis (az osztás elvégzése után) f felírható egy polinom és egy valódi racionális törtfüggvény összegeként. Feltehető továbbá az is, hogy a nevezőben szereplő Q polinom egy főegyütthatójú.*

8. Tétel. *Legyen f egy racionális törtfüggvény. Ekkor az f függvénynek létezik F primitív függvény, továbbá ez az F függvény elemi függvény.*

A továbbiakban a Q polinom gyökeitől függően három különböző esetet kell megkölönböztetnünk.
I. eset Ha a Q polinomnak csak **egyszeres** multiplicitású, **valós** gyökei vannak, azaz

$$Q(x) = (x - x_1) \cdots (x - x_n),$$

akkor

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x - x_1) \cdots (x - x_n)} = \frac{A_1}{(x - x_1)} + \cdots + \frac{A_n}{x - x_n},$$

ahol az $A_1, \ldots, A_n$ együtthatók egyértelműen meg vannak határozva. Ezeket a konkrét feladatokban az együtthatók egyeztetésével lehet meghatározni.

8. Példa. *Tekintsük az*

$$\int \frac{1}{(x-2)(x+4)} dx$$

határozatlan integrált. Az előzőek szerint, keresendőek azok A és B valós számok, melyekre

$$\frac{1}{(x-2)(x+4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+4}$$

teljesül. Közös nevezőre hozva,

$$\frac{1}{(x-2)(x+4)} = \frac{A(x+4) + B(x-2)}{(x-2)(x+4)},$$

azaz,

$$1 = A(x+4) + B(x-2)$$

kell, hogy teljesüljön, minden $x \in \mathbb{R} \setminus \{2, -4\}$ esetén. Ez csak úgy lehetséges, ha A és B megoldása az alábbi egyenletrendszernek,

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ 4A - 2B = 0 \end{cases}$$

Ennek az egyenlet megoldása $A = \dfrac{1}{6}$ és $B = -\dfrac{1}{6}$, ezért

$$\frac{1}{(x-2)(x+4)} = \frac{1}{6}\frac{1}{x-2} - \frac{1}{2}\frac{1}{x+4}.$$

Mindebből,

$$\int \frac{1}{(x-2)(x+4)}dx = \int \frac{1}{6}\frac{1}{x-2} - \frac{1}{6}\frac{1}{x+4}dx = \frac{1}{6}\ln(|x-2|) - \frac{1}{6}\ln(|x+4|) + C$$

adódik.

II. eset Ha a Q polinomnak csak **valós** gyökei vannak, de a gyökök között vannak **többszörös multiplicitás**úak is, azaz, a Q polinom

$$Q(x) = (x-x_1)^{\alpha_1}(x-x_2)^{\alpha_2}\cdots(x-x_k)^{\alpha_k},$$

alakú, ahol $\sum_{i=1}^{k}\alpha_i = n$. Ebben az esetben

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{P(x)}{(x-x_1)^{\alpha_1}(x-x_2)^{\alpha_2}\cdots(x-x_k)^{\alpha_k}} \\ &= \frac{A_{11}}{(x-x_1)} + \frac{A_{12}}{(x-x_1)^2} + \cdots + \frac{A_{1\alpha_1}}{(x-x_1)^{\alpha_1}} \\ &+ \frac{A_{21}}{(x-x_2)} + \frac{A_{22}}{(x-x_2)^2} + \cdots + \frac{A_{2\alpha_2}}{(x-x_2)^{\alpha_2}} \\ &+ \cdots + \frac{A_{k1}}{(x-x_k)} + \frac{A_{k2}}{(x-x_k)^2} + \cdots + \frac{A_{k\alpha_k}}{(x-x_k)^{\alpha_k}}. \end{aligned}$$

Az előállításban szerepl $A_{i\alpha_i}$, $i = 1,\ldots,k$ valós számokat ebben az esetben is az együtthatók egyeztetésével tudjuk meghatározni.

9. Példa. *Tekintsük az*

$$\int \frac{3x^2+4x-6}{(x+2)^3}dx$$

határozatlan integrált. A fentiek szerint

$$\frac{3x^2+4x-6}{(x+2)^3} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{C}{(x+2)^2},$$

az együtthatók egyeztetése után az A, B és C számokra az alábbi egyenletrendszert kapjuk,

$$\begin{cases} A &= 3 \\ 4A+B &= 4 \\ 4A+2B+C &= -6 \end{cases}$$

Vagyis, $A = 3$, $B = -8$ és $C = -2$. Midezekből,

$$\int \frac{3x^2+4x-6}{(x+2)^3}dx = \int \frac{3}{x+2} - \frac{8}{(x+2)^2} - \frac{2}{(x+2)^3}dx = 3\ln(|x+2|) + \frac{8}{x+2} + \frac{1}{x+2} + C.$$

III. eset Ha a Q polinomnak van **komplex gyök**e is. Ekkor, ha például $z \in \mathbb{C}$ gyke a Q polinomnak, akkor $\bar{z}$ is gyöke Q-nak, vagyis a komplex gyökök a konjugáltjaikkal együtt lépnek fel. Ezen az eseten belül még további két esetet kell megkülönböztetnünk.

III. a) eset Ha a Q polinomnak **többszörös valós** és **egyszeres komplex** gyöktényezői vannak, azaz,

$$Q(x) = (x-x_1)^{\alpha_1}(x-x_2)^{\alpha_2}\cdots(x-x_k)^{\alpha_k}(x^2+b_1x+c_1)\cdots(x^2+b_sx+c_s),$$

akkor

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{\alpha_1}\frac{A_{1\alpha_1}}{(x-x_1)^i} + \cdots + \sum_{j=1}^{\alpha_r}\frac{A_{rj}}{(x-x_r)^j} + \sum_{k=1}^{s}\frac{B_kx+C_k}{x^2+b_kx+c_k}.$$

III. b) eset Ha a Q polinomnak **többszörös valós** és **többszörös komplex** gyöktényezői vannak, azaz,

$$Q(x) = (x-x_1)^{\alpha_1}(x-x_2)^{\alpha_2}\cdots(x-x_k)^{\alpha_k}(x^2+b_1x+c_1)^{\beta_1}\cdots(x^2+b_sx+c_s)^{\beta_s},$$

akkor

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{\alpha_1}\frac{A_{1\alpha_1}}{(x-x_1)^i} + \cdots + \sum_{j=1}^{\alpha_r}\frac{A_{rj}}{(x-x_r)^j} + \sum_{k=1}^{\beta_1}\frac{B_{1k}x+C_{1k}}{(x^2+b_1x+c_1)^k} + \cdots + \sum_{l=1}^{\beta_s}\frac{B_{sl}x+C_{sl}}{(x^2+b_sx+c_s)^l}$$

Trigonometrikus függvények racionális kifejezéseinek integrálása

Egyszerűbb speciális típusok

Az $\int \sin^{2n+1}(x)\cos^k(x)dx$ alakú integrálok
Mivel
$$\sin^{2n+1}(x) = \sin(x)\sin^{2n}(x) = \sin(x)\left(1-\cos^2(x)\right)^n,$$
ezért az integrandus alakja
$$\int \sin^{2n+1}(x)\cos^k(x)dx = \int \sin(x)\left(1-\cos^2(x)\right)^n\cos^k(x).$$
ami szorzások és az n-edik hatványra emelés után olyan összegre vezet, melynek (legfeljebb egy kivétellel) mindegyik tagja $f^n(x)f'(x)$ alakú.

10. Példa.
$$\int \sin^3(x)dx = \int \sin(x)\sin^2(x)dx = \int \sin(x)(1-\cos^2(x))dx$$
$$= \int \sin(x) - \sin(x)\cos^2(x)dx = -\cos(x) + \frac{\cos^3(x)}{x} + C$$

Az $\int \cos^{2n+1}(x)\sin^k(x)dx$ alakú integrálok
Hasonlóan az elősző esethez,
$$\cos^{2n+1}(x)\sin^k(x) = \cos(x)\cos^{2n}(x)\sin^k(x) = \cos(x)(1-\sin^2(x))^n\sin^k(x),$$
ami szorzások és az n-edik hatványra emelés után olyan összegre vezet, melynek (legfeljebb egy kivétellel) mindegyik tagja $f^n(x)f'(x)$ alakú.
Az $\int \cos^{2n+1}(x)\sin^{2k+1}(x)dx$ alakú integrálok
Ha az integrandus mind a sinus, mind a cosinus függvény páratlan hatványon tartalmazza, akkor teljesen mindegy, hogy melyiket alakítjuk át, de a fent ismeretett átalakítások valamelyikét célszerű alkalmazni.
Az $\int \cos^{2n}(x)\sin^{2k}(x)dx$ alakú integrálok
Ebben az esetben a
$$\begin{aligned}\sin(x)\cos(x) &= \frac{1}{2}\sin(2x)\\ \sin^2(x) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)\\ \cos^2(x) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)\end{aligned}$$
trigonometrikus azonosságok közül a megfelelőt használva az integrandus már olyan alakú lesz, melyet a korábban ismeretett módszerek valamelyikével kezelni tudunk.

11. Példa.
$$\int \sin^2(x)dx = \int \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} + C.$$

Az $\int R(\sin(x), \cos(x))dx$ alakú integrálok

A sinus és cosinus függvények tetszőleges $R(\sin(x), \cos(x))$ racionális kifejezése esetén a

$$t = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$$

helyettesítés mindig célravezető. Ezen helyettesítés elvégzése után ugyanis,

$$dx = \frac{2}{1+t^2}dt \qquad \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \text{és} \qquad \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

amiből azt látjuk, hogy ezzel a helyettesítéssel az integrandus egy racionális törtfüggvénybe megy át.

12. Példa.

$$\int \frac{1}{1+\cos(x)}dx \underset{t=\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{=} \int \frac{1}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}dt = \int 1dt = t + C = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) + C.$$

Az $\int R(e^x)dx$ alakú integrálok

Abban az esetben, ha az integrandus az exponenciális függvény egy racionális törtfüggvény, a

$$t = e^x \qquad dx = \frac{1}{t}dt$$

helyettesítéssel az integrandus t-nek racionális törtfüggvényébe megy át.

13. Példa.

$$\int \frac{3}{e^x + e^{-x}}dx \underset{t=e^x}{=} \int \frac{3}{t+\frac{1}{t}} \cdot \frac{1}{t}dt = \int \frac{3}{1+t^2}dt = 3\operatorname{arctg}(t) + C = 3\operatorname{arctg}(e^x) + C.$$

Az $\int R(x, \sqrt[n]{ax+b})dx$ alakú integrálok

Ha az integrandus x-nek és $\sqrt[n]{ax+b}$-nek racionális törtfüggvénye, akkor az

$$x = \frac{t^n - b}{a} \qquad \text{és} \qquad dx = \frac{n}{a}t^{n-1}dt$$

helyettesítéssel az integrandus racionális törtfüggvénnyé alakítható.

14. Példa. *Az $\int x\sqrt{5x+3}dx$ integrál kiszámításához végezzük el az*

$$x = \frac{t^2-3}{5} \qquad \textit{és} \qquad dx = \frac{2t}{5}dt$$

helyettesítéseket. Ekkor

$$\int x\sqrt{5x+3}dx = \int \frac{t^2-3}{5} \cdot t \cdot \frac{2t}{5}dt = \frac{2}{25}\int t^4 - 3t^2dt = \frac{2}{125}t^5 - \frac{2}{25}t^3 + C$$
$$= \frac{2}{125}\left(\sqrt{5x+3}\right)^5 - \frac{2}{25}\left(\sqrt{5x+3}\right)^3 + C$$