Debreceni Egyetem

Természettudományi és Technológiai Kar

Kalkulus

Gselmann Eszter

Debrecen, 2021.

Tartalomjegyzék

Előszó

„A matematikában a gondolat, ami számít.”
(Szofja Vasziljevna Kovalevszkaja)

Ezt a jegyzetet a Debreceni Egyetem Informatikai Karán a programtervező informatikus, illetve mérnökinformatikus BSc képzésben résztvevő hallgatók számára készítettem. Az itt található anyag teljesen lefedi a számukra első évfolyamon kötelező *Kalkulus* tantárgy anyagát. A 2005/06-os tanév első félévében, még demonstrátorként kezdtem el Kalkulus 1, illetve 2 gyakorlatot tanítani a különböző képzésekben résztvevő informatikus hallgatók számára, majd 2011-től, már tanársegédként előadást is tartottam. Mind az előadásaimhoz, mind a gyakorlataimhoz már akkor elkezdtem különféle oktatási segédanyagokat készíteni. Az akkor még két féléves tantárgy mára egy féléves lett, ez a jegyzet pedig ennek a hosszú folyamatnak a során többször átalakult. Minden javítás, módosítás során a hallgatók szempontjait igyekeztem szem előtt tartani. Ennek megfelelően a jegyzetben ismertetett definíciókat és állításokat igyekeztem minden esetben példákon, módszereken és ábrákon keresztül szemléletessé tenni.

Köszönettel tartozom minden egykori hallgatómnak, a velük való közös munka remélem, hogy ezekben a segédanyagokban is tükröződik.

Debrecen, 2021. augusztus 31.

Gselmann Eszter

A tananyag elkészítését az EFOP-3.4.3-16-2016-00021 számú projekt támogatta. A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósult meg.

1. fejezet

Valós számsorozatok

1.0.1. Definíció. ***Valós számsorozat**on egy a természetes számok halmazán értelmezett $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ függvényt értünk.*

Legyen $n \in \mathbb{N}$ tetszőleges, ekkor $f(n)$ helyett általában az x_n jelölést használjuk, magára a sorozatra pedig az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jelölést alkalmazzuk. Továbbá, az x_n valós számot az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **sorozat n-edik elemé**nek mondjuk.

1.1. Valós számsorozatok konvergenciája

1.1.1. Definíció. *Legyen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy valós számsorozat. Azt mondjuk, hogy az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **sorozat határértéke (vagy limesze)** $x \in \mathbb{R}$, ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz található olyan $N > 0$ szám, hogy ha $n \in \mathbb{N}$ és $n > N$, akkor*

$$|x_n - x| < \varepsilon.$$

Erre a $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ jelölést használjuk.

1.1.2. Definíció. *Egy sorozatot **konvergens**nek nevezünk, ha van olyan $x \in \mathbb{R}$, ami a szóban forgó sorozat limesze. Ellenkező esetben **divergens** sorozatról beszélünk.*

1.1.1. Példa. *Legyen $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Ekkor az*

$$x_n = c \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat konvergens és

$$\lim_{n\to\infty} c = c.$$

1.1.2. Példa. *Az*

$$x_n = \frac{1}{n} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

valós számsorozat konvergens és

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

1.1.3. Példa. *Az*

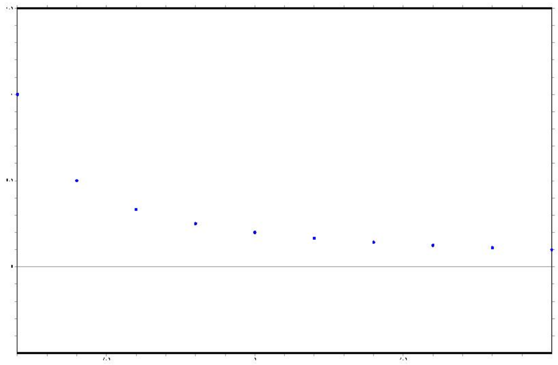
$$x_n = (-1)^n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

valós számsorozat divergens.

1.1.3. Definíció. *Legyen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy valós számsorozat. Azt mondjuk, hogy az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **$+\infty$-hez divergál**, ha bármely $K \in \mathbb{R}$ számhoz található olyan $N > 0$ szám, hogy ha $n \in \mathbb{N}$ és $n > N$, akkor*

$$x_n > K.$$

Erre a $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ jelölést alkalmazzuk.



1.1. ábra. Az $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat első néhány eleme

1.1.4. Definíció. *Legyen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy valós számsorozat. Azt mondjuk, hogy az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $-\infty$-**hez divergál**, ha bármely $k \in \mathbb{R}$ számhoz található olyan $N > 0$ szám, hogy ha $n \in \mathbb{N}$ és $n > N$, akkor*

$$x_n < k.$$

Erre a $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$ jelölést alkalmazzuk.

1.1.5. Definíció. *Az*

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

*halmazt a **bővített valós számok halmazá**nak nevezzük.*

1.1.6. Definíció. *Egy $x \in \overline{\mathbb{R}}$ bővített valós szám **környezetei**n a következő alakú intervallumokat értjük.*

$$\begin{array}{ll}]\, x-\varepsilon, x+\varepsilon\, [\,, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \\ ]\, \varepsilon, +\infty\,]\,, & \text{ha } x = +\infty \\ [\, -\infty, \varepsilon\, [\,, & \text{ha } x = -\infty \end{array} \qquad (\varepsilon \in \mathbb{R})\,.$$

1.1.1. Állítás. *Legyen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy valós számsorozat. Ebben az esetben $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ pontosan akkor teljesül, ha az x tetszőleges V környezete esetén $x_n \in V$ teljesül legfeljebb véges sok $n \in \mathbb{N}$ kivételével.*

1.1.1. Tétel (A határérték egyértelműsége). *Legyen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy olyan valós számsorozat, mely egyaránt tart az x és y bővített valós számokhoz. Ekkor $x = y$.*

1.2. Részsorozatok

1.2.1. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat **részsorozat**a, ha létezik egy olyan $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton függvény, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén*

$$y_n = x_{\varphi(n)}$$

teljesül.

1.2.1. Tétel. *Legyen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy olyan valós számsorozat, mely az $x \in \overline{\mathbb{R}}$ bővített valós számhoz tart. Ekkor az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat tetszőleges $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ részsorozata esetén*

$$\lim_{n\to\infty} y_n = x$$

teljesül.

1.3. Korlátosság

1.3.1. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *valós számsorozat* ***alulról korlátos****, ha van olyan* $k \in \mathbb{R}$ *szám, hogy*

$$k \leq x_n \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Azt mondjuk, hogy az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *valós számsorozat* ***felülről korlátos****, ha van olyan* $K \in \mathbb{R}$ *szám, hogy*

$$x_n \leq K \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *valós számsorozatot* ***korlátos****nak nevezzük, ha mind alulról, mind felülről korlátos.*

1.3.1. Tétel (Konvergencia $\Longrightarrow$ korlátosság). *Bármely konvergens valós számsorozat korlátos.*

1.3.1. Megjegyzés (Korlátosság $\not\Rightarrow$ konvergencia). *Az*

$$x_n = (-1)^n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

valós számsorozat korlátos és divergens, ami mutatja, hogy a korlátosságból általábannem következik a konvergencia.

1.4. Monotonitás

1.4.1. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *valós számsorozat* ***monoton növekedő****, ha tetszőleges* $n, m \in \mathbb{N}$*,* $n < m$ *esetén*

$$x_n \leq x_m$$

teljesül.
Azt mondjuk, hogy az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *valós számsorozat* ***monoton csökkenő****, ha tetszőleges* $n, m \in \mathbb{N}$*,* $n < m$ *esetén*

$$x_n \geq x_m$$

teljesül.

Ha a fenti egyenlőtlenségek minden $n, m \in \mathbb{N}$*,* $n < m$ *esetén szigorúak, úgy a szóban forgó sorozatot* ***szigorúan monoton növekedő****nek, illetve* ***szigorúan monoton csökkenő****nek hívjuk.*

1.4.1. Megjegyzés. *(i) Ha az* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *valós számsorozat monoton növekedő, akkor alulról korlátos.*

(ii) Ha az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *valós számsorozat monoton csökkenő, akkor felülről korlátos.*

1.4.1. Tétel. *(i) Ha az* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *valós számsorozat monoton növekedő, akkor*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}.$$

(ii) Ha az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *valós számsorozat monoton csökkenő, akkor*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}.$$

1.4.1. Következmény. *Egy monoton sorozat pontosan akkor konvergens, ha korlátos.*

1.4.2. Tétel. *Minden valós számsorozatnak létezik monoton részsorozata.*

1.4.2. Következmény (Bolzano–Weierstrass-féle kiválasztási tétel). *Minden korlátos valós számsorozatnak létezik konvergens részsorozata.*

1.5. Cauchy-sorozatok

1.5.1. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *valós számsorozat* ***Cauchy-sorozat****, ha tetszőleges* $\varepsilon > 0$ *szám esetén van olyan* $N(\varepsilon) > 0$ *szám, hogy ha* $n, m \in \mathbb{N}$, $n, m > N(\varepsilon)$*, akkor*

$$|x_n - x_m| < \varepsilon.$$

1.5.1. Tétel (Cauchy-féle konvergenciakritérium). *Egy valós számsorozat* ***akkor és csakis akkor*** *konvergens, ha Cauchy-sorozat.*

1.6. Konvergencia és műveletek

1.6.1. Tétel. *Legyenek* $x, y \in \mathbb{R}$ *és* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, illetve* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *olyan valós számsorozatok, hogy* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ *és* $\lim_{n\to\infty} y_n = y$*. Legyen továbbá* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tetszőleges. Ekkor*

(i) *az* $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat is konvergens és* $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = x + y$;

(ii) *a* $(\lambda x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat is konvergens és* $\lim_{n\to\infty}(\lambda x_n) = \lambda x$;

(iii) *az* $(x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat is konvergens és* $\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = xy$;

(iv) *ha minden* $n \in \mathbb{N}$ *esetén* $y_n \neq 0$ *és* $y \neq 0$*, akkor az* $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat is konvergens és* $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{x}{y}$.

1.6.1. Következmény. *Legyen* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *egy olyan valós számsorozat, hogy* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$*. Ekkor tetszőleges* $k \in \mathbb{N}$ *esetén az* $\left(x_n^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat is konvergens és*

$$\lim_{n\to\infty} x_n^k = x^k.$$

1.6.2. Következmény. *Legyen* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *egy olyan valós számsorozat, hogy* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ *és legyen* P *egy valós polinom. Ebben az esetben a* $(P(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat is konvergens és*

$$\lim_{n\to\infty} P(x_n) = P(x).$$

1.6.3. Következmény. *Legyen* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *egy korlátos,* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *pedig egy nullsorozat. Ekkor az* $(x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat konvergens és*

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = 0.$$

1.7. Konvergencia és rendezés

1.7.1. Tétel. *Legyenek* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *és* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *olyan valós számsorozatok, melyeknek létezik az* $x \in \overline{\mathbb{R}}$ *és* $y \in \overline{\mathbb{R}}$ *határértéke. Ha*

$$x_n \leq y_n$$

teljesül legfeljebb véges sok $n \in \mathbb{N}$ *kivételével, akkor*

$$x \leq y.$$

1.7.1. Következmény (A jeltartás tétele). *Legyen* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *egy olyan valós számsorozat, melynek létezik a bővített valós számok halmazában a határértéke. Tegyük fel, hogy* $\lim_{n\to\infty} x_n = x \neq 0$*, ekkor*

$$\mathrm{sign}(x_n) = \mathrm{sign}(x)$$

teljesül legfeljebb véges sok $n \in \mathbb{N}$ *kivételével.*

1.7.2. Tétel (Rendőr-elv). *Legyenek* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *és* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *olyan valós számsorozatok, hogy*

(i)

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n;$$

(ii) minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$x_n \le z_n \le y_n.$$

Ekkor a $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat is konvergens és

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} y_n$$

1.8. Nevezetes sorozatok és határértékeik

1.8.1. Állítás. *Legyen $r \in \mathbb{Q}, r > 0$ és*

$$x_n = \frac{1}{n^r} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens és

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^r} = 0.$$

1.8.2. Állítás. *Legyen $r \in \mathbb{Q}, r > 0$ és*

$$x_n = n^r \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat divergens és

$$\lim_{n\to\infty} n^r = +\infty.$$

1.8.1. Következmény. *Legyen $k \in \mathbb{N}$ és $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1} \in \mathbb{R}$ és $a_k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Tekintsük az*

$$x_n = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \ldots + a_1 n + a_0 \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozatot. Az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat divergens és

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \begin{cases} +\infty, & ha \quad a_k > 0 \\ -\infty, & ha \quad a_k < 0. \end{cases}$$

1.8.3. Állítás. *Legyen $a \in \mathbb{R}$ és tekintsük az*

$$x_n = \frac{a^n}{n!} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozatot. Az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat minden $a \in \mathbb{R}$ esetén konvergens és

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

1.8.4. Állítás. *Tekintsük az*

$$x_n = \sqrt[n]{n} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozatot. Az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens és

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

1.8.5. Állítás. *Legyen*

$$x_n = \sqrt[n]{n!} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat divergens és

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty.$$

1.8.6. Állítás. *Legyen* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *olyan sorozat, mely esetén léteznek olyan* $a, b > 0$ *és* $N > 0$ *számok, hogy minden* $n > N$ *esetén* $a < x_n < b$. *Tekintsük az*

$$y_n = \sqrt[n]{x_n} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozatot. Az $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat konvergens és*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = 1.$$

Speciálisan, tetszőleges $a > 0$ *esetén*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

1.8.1. Tétel. *Tekintsük az*

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozatot. Ez a sorozat konvergens és

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

1.8.2. Következmény. *Legyen* $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *egy olyan sorozat, mely vagy* $+\infty$*–hez, vagy* $-\infty$*–hez divergál, és tekintsük az*

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{p_n}\right)^{p_n} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Ekkor

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{p_n}\right)^{p_n} = e.$$

1.8.7. Állítás. *Tekintsük az*

$$x_n = \frac{n!}{n^n} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozatot. Ekkor $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergens és*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

1.8.8. Állítás. *Legyen* $k \in \mathbb{N}$ *és tekintsük az*

$$x_n = \frac{n^k}{n!} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat minden* $k \in \mathbb{N}$ *esetén konvergens és*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{n!} = 0.$$

1.8.9. Állítás. *Tekintsük az*

$$x_n = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozatot. Ekkor $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergens és*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n}} = e.$$

1.8.2. Tétel. *Tekintsük az* $x_n = q^n, n \in \mathbb{N}$ *úgynevezett* ***geometriai sorozat****ot.*

— *ha* $|q| < 1$, *akkor az* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat konvergens és* $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$;

— *ha* $q = 1$, *akkor az* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat konvergens és határértéke* 1;

— *ha* $q > 1$, *akkor az* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat* $+\infty$*–hez divergál;*

— *ha* $q = -1$*, akkor az* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat korlátos és divergens;*

— *ha* $q < -1$*, akkor az* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat nem korlátos és divergens.*

1.8.3. Tétel. *Legyen* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *olyan konvergens sorozat, melyre* $\lim_{n\to\infty} x_n \in]-1, 1[$ *és tekintsük az*

$$y_n = x_n^n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

módon megadott $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozatot. Ekkor az* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat konvergens és*

$$\lim_{n\to\infty} x_n^n = 0.$$

1.9. Sorozatok torlódási pontjai

1.9.1. Definíció. *Legyen* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *egy valós számsorozat. Azt mondjuk, hogy az* $x \in \overline{\mathbb{R}}$ *bővített valós szám az* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat* ***torlódási pont****ja, ha az* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozatnak van olyan* $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *részsorozata, melyre*

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x.$$

1.9.1. Tétel. *Az* $x \in \overline{\mathbb{R}}$ *bővített valós szám pontosan akkor torlódási pontja az* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozatnak, ha az* x *tetszőleges környezetében végtelen sok sorozatelem van.*

1.9.1. Példa. *Az*

$$x_n = (-1)^n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

módon megadott $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat torlódási pontjainak a halmaza* $\{-1, 1\}$.

1.9.1. Megjegyzés. — *Ha az* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat konvergens, akkor a sorozat határéterke torlódási pontja az* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozatnak.*

— *A bővített valós számok halmazában minden valós számsorozatnak van torlódási pontja.*

1.9.2. Definíció. *Az* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *valós számsorozat torlódási pontjai halmazának pontos alsó korlátját a sorozat* ***limesz inferior****ának hívjuk, és rá a* $\liminf_{n\to\infty} x_n$ *jelölést használjuk.*
Az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *valós számsorozat torlódási pontjai halmazának pontos felső korlátját a sorozat* ***limesz superior****ának hívjuk, és rá a* $\limsup_{n\to\infty} x_n$ *jelölést használjuk.*

1.9.2. Megjegyzés. *Tetszőleges* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *valós számsorozat esetén*

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \leq \limsup_{n\to\infty} x_n.$$

1.9.2. Tétel. *Az* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *valós számsorozat akkor és csakis akkor konvergens, ha*

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n$$

teljesül.

2. fejezet

Valós számsorok

2.1. Alapfogalmak és kapcsolatuk

2.1.1. Definíció. *Legyen* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *egy valós számsorozat, és*

$$\sigma_1 = x_1, \qquad \sigma_n = x_1 + \cdots + x_n \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 2)\,.$$

A $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozatot a* $\sum x_n$ ***sor részletösszeg-sorozatá****nak hívjuk. Ha a* $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozatnak létezik a határértéke, akkor a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \sigma_n$$

értéket a ***sor összegé****nek nevezzük, és ebben az esetben azt mondjuk, hogy a* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *sor* ***konvergens****.*

2.1.2. Definíció. *Legyen* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *egy valós sor. Ha a* $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ *sor konvergens, akkor azt mondjuk, hogy a* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ ***sor abszolút konvergens****. Ha a* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *sor konvergens, de nem abszolút konvergens, akkor a szóban forgó sort* ***feltételesen konvergens****nak hívjuk.*

2.1.1. Példa. *A*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

valós sor konvergens és a sor összege 1*. Ugyanis az* $x_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ $(n \in \mathbb{N})$ *jelöléssel* $x_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$ *és*

$$\sigma_n = x_1 + \cdots x_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 1,$$

így a fenti sor $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *részletösszeg-sorozat konvergens és a határértéke egy, ezért a fenti sor konvergens és*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

2.1.2. Példa. *A*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n$$

valós sor divergens. Ugyanis az $x_n = n\, (n \in \mathbb{N})$ *jelöléssel*

$$\sigma_n = x_1 + \cdots x_n = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \xrightarrow{n\to\infty} +\infty,$$

így a fenti sor $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *részletösszeg-sorozat divergens ezért*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n = +\infty.$$

2.1.1. Tétel (Cauchy-féle konvergenciakritérium sorokra). *A $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ valós sor akkor és csakis akkor konvergens, ha bármely $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $N(\varepsilon) > 0$ szám, hogy*

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} x_k \right| < \varepsilon$$

teljesül, amennyiben $n, m > N(\varepsilon)$.

2.1.2. Tétel (Abszolút konvergencia $\Longrightarrow$ konvergencia). *Ha egy valós számsor abszolút konvergens, akkor konvergens is.*

2.1.1. Következmény. *Ha a $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ sor konvergens, akkor $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.*

2.2. Műveletek sorokkal

2.2.1. Tétel. *Legyenek $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ és $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ konvergens sorok és $\lambda \in \mathbb{R}$. Ekkor a $\sum_{n=1}^{\infty} x_n + y_n$ és $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda x_n$ sorok is konvergensek és*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x_n + y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + \sum_{n=1}^{\infty} y_n,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda x_n = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} x_n,$$

valamint

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} x_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|.$$

2.2.1. Definíció. *Legyen $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ egy valós sor és $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy szigorúan monoton növekedő természetes számokból álló sorozat. Ekkor a*

$$\sum \left(\sum_{l=k_{n-1}+1}^{k_n} x_l \right)$$

*sort a $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ sor **csoportosított sorá**nak nevezzük.*

2.2.2. Tétel. *Egy konvergens sor bármely csoportosított sora konvergens, és a csoportosított sor összege megegyezik az eredeti sor összegével.*

2.2.2. Definíció. *Legyen $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ egy valós sor és $\varphi \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ egy bijektív leképezés. Ekkor a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_{\varphi(n)}$$

*sort a $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ sor **átrendezésé**nek hívjuk.*

2.2.3. Tétel. *Egy abszolút konvergens sor bármely átrendezése is abszolút konvergens, és az átrendezett sor összege megegyezik az eredeti sor összegével.*

2.2.4. Tétel (Riemann-féle átrendezési tétel). *Legyen $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ egy feltételesen konvergens valós számsor. Ekkor bármely két $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}}$, $\alpha \leq \beta$ bővített valós szám esetén létezik a $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ sornak olyan $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\varphi(n)}$ átrendezése, hogy*

$$\alpha = \liminf_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_{\varphi(k)} \quad \text{és} \quad \beta = \limsup_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_{\varphi(k)}.$$

2.3. Konvergenciakritériumok

2.3.1. Tétel (Összehasonlító kritérium). *Legyenek* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *és* $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ *olyan nemnegatív tagú sorok, hogy* $x_n \leq y_n$ *teljesül minden* $n \in \mathbb{N}$ *esetén. Ekkor,*

— *ha* $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ *konvergens, akkor* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *is konvergens;*

— *ha* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *divergens, akkor* $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ *is divergens.*

2.3.2. Tétel (Cauchy-féle gyökkritérium). *Legyen* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *egy valós sor.*

— *Ha* $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|} < 1$, *akkor a* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *sor abszolút konvergens.*

— *Ha* $\liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|} > 1$, *akkor a* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *sor divergens.*

2.3.1. Példa. *A*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3^n}$$

sor abszolút konvergens, hiszen, ha $x_n = \dfrac{2n}{3^n}$ $(n \in \mathbb{N})$, *akkor*

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{2n}{3^n}\right|} = \limsup_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{2}\cdot\sqrt[n]{n}}{3} = \frac{1}{3} < 1,$$

így a Cauchy-féle gyökkritérium miatt a fenti valós számsor valóban abszolút konvergens.

2.3.3. Tétel (D'Alembert-féle hányadoskritérium). *Legyen* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *egy olyan valós sor, melynek minden tagja nullától különböző.*

— *Ha* $\limsup_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} < 1$, *akkor a* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *sor abszolút konvergens.*

— *Ha* $\liminf_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} > 1$, *akkor a* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *sor divergens.*

2.3.2. Példa. *A*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^n}$$

valós számsor divergens, hiszen, ha $x_n = \dfrac{n!}{5^n}$ $(n \in \mathbb{N})$, *akkor*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = \limsup_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{5^{n+1}}}{\frac{n!}{5^n}} = \limsup_{n\to\infty} \frac{n+1}{5} = +\infty > 1,$$

így a D'Alembert-féle hányadoskritérium miatt a fenti sor valóban divergens.

2.3.4. Tétel (Cauchy-féle ritkítási kritérium). *Legyen* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *egy nemnegatív tagú, monoton csökkenő valós számsorozat. Ekkor a* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *valós sor pontosan akkor konvergens, ha a* $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x_{2^n}$ *sor konvergens.*

2.3.3. Példa. *A*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)}$$

valós számsor divergens, hiszen, ha $x_n = \dfrac{1}{\ln(n)}$ $(n \in \mathbb{N})$, *akkor*

$$2^n x_{2^n} = \frac{2^n}{n\ln(2)} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Azonban a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n\ln(2)}$ *sor divergens (ez például a Cauchy-féle gyökkritérium segítségével látható be), ezért a Cauchy-féle ritkítási kritérium felhasználásával adódik, hogy a fenti sor valóban divergens.*

2.3.5. Tétel (Leibniz-kritérium alternáló sorokra). *Legyen (x_n) egy monoton nullsorozat, ekkor a*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x_n$$

sor konvergens.

2.3.4. Példa. *A*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2}{3^n}$$

sor konvergens, hiszen az

$$x_n = \frac{2}{3^n} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

valós számsorozat egy monoton nullsorozat. Így az alternáló sorokra vonatkozó Leibniz kritérium miatt a fenti sor konvergens. Könnyű igazolni, hogy ez a sor nemcsak konvergens, hanem abszolút konvergens is.

Ezzel szemben a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n}$ *sor egy olyan valós számsorozat, ami konvergens, de nem abszolút konvergens, egyszóval feltételesen konvergens. Ennek igazolásához szintén az alternáló sorokra vonatkozó Leibniz kritérium használható, az pedig, hogy ez a sor nem abszolút konvergens, a harmonikus sorok konvergenciájára vonatkozó állítás azonnal következménye.*

2.3.6. Tétel. *Legyenek $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ és $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ olyan pozitív tagú sorok, melyekre létezik és pozitív a*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}$$

határérték. Ekkor a $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ és a $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ sorok egyszerre konvergensek, illetve egyszerre divergensek.

2.3.5. Példa. *A*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 - n^2 + 1}$$

valós sor konvergens, hiszen, ha

$$x_n = \frac{1}{n^3 - n^2 + 1} \quad \text{és} \quad y_n = \frac{1}{n^3} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{\frac{1}{n^3 - n^2 + 1}}{\frac{1}{n^3}} = \frac{n^3}{n^3 - n^2 + 1} \xrightarrow{n\to\infty} 1 > 0$$

Mivel létezik és pozitív a $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}$ *határérték és a* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ *sor konvergens, ezért a* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 - n^2 + 1}$ *sor is az.*

2.3.7. Tétel (A harmonikus sor). *Legyen $\alpha \in \mathbb{R}_{++}$, ekkor a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

sor

— *abszolút konvergens, ha $\alpha > 1$*

— *divergens, ha $\alpha \leq 1$.*

2.3.8. Tétel (A geometriai sor). *Legyen $q \in \mathbb{R}$ olyan, hogy $|q| < 1$, ekkor a $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ sor konvergens, és*

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1-q}.$$

3. fejezet

Topológiai alapfogalmak $\mathbb{R}$-ben

3.0.1. Definíció. *Legyen $x_0 \in \mathbb{R}$, $r > 0$, ekkor a*

$$G(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < r\},$$

illetve a

$$B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| \leq r\},$$

*halmazokat rendre az x_0 pont r sugarú **nyílt**, illetve **zárt környezet**einek nevezzük.*

3.0.1. Megjegyzés. *Ha $x_0 \in \mathbb{R}$ és $r > 0$, akkor*

$$G(x_0, r) =]x_0 - r, x_0 + r[\quad \text{és} \quad B(x_0, r) = [x_0 - r, x_0 + r].$$

3.0.2. Definíció. *Azt mondjuk, hogy a $D \subset \mathbb{R}$ halmaz **nyílt**, ha bármely $x_0 \in D$ esetén van olyan $r > 0$, hogy $G(x_0, r) \subset D$ teljesül.*

3.0.3. Definíció. *Legyen $x_0 \in \mathbb{R}$ és $D \subset \mathbb{R}$ egy nemüres halmaz. Azt mondjuk, hogy az x_0 pont **torlódási pont**ja a D halmaznak, ha bármely $r > 0$ esetén $G(x_0, r) \cap D \neq \emptyset$. A D halmaz torlódási pontjainak halmazára a továbbiakban a D' jelölést fogjuk alkalmazni.*

3.0.4. Definíció. *Legyen $D \subset \mathbb{R}$ nemüres halmaz, az $x_0 \in D$ pontot a D halmaz **izolált pont**jának hívjuk, ha van olyan $r > 0$, hogy $G(x_0, r) \cap D = \{x_0\}$.*

3.0.5. Definíció. *A $D \subset \mathbb{R}$ nemüres halmazt **zárt**nak nevezzük, ha $D = D \cup D'$ teljesül.*

3.0.1. Állítás. *Legyen $D \subset \mathbb{R}$ nemüres, ekkor az alábbi két állítás ekvivalens*

(i) *D nyílt halmaz;*

(ii) *$\mathbb{R} \setminus D$ zárt halmaz.*

3.0.1. Példa. *Legyenek $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, ekkor*

— $]a, b[$ *nyílt halmaz;*

— $[a, b]$ *zárt halmaz;*

— *minden véges halmaz zárt;*

— $[a, b[$ *se nem nyílt, se nem zárt.*

3.0.6. Definíció. *A $D \subset \mathbb{R}$ nemüres halmaz **nyílt lefedés**én nyílt halmazok egy olyan $\left(G_\gamma\right)_{\gamma \in \Gamma}$ rendszerét értjük, melyre*

$$D \subset \bigcup_{\gamma \in \Gamma} G_\gamma.$$

3.0.7. Definíció. *Azt mondjuk, hogy a $D \subset \mathbb{R}$ halmaz **kompakt**, ha a D halmaz minden nyílt lefedéséből kiválasztható véges lefedés.*

3.0.2. Példa. — *a $]0, 1[$ halmaz nem kompakt;*

— *a $[0, +\infty[$ halmaz nem kompakt;*

— *tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ esetén az $[a, b]$ halmaz kompakt;*

— *minden véges halmaz kompakt.*

3.0.1. Tétel (Heine–Borel). *A $D \subset \mathbb{R}$ halmaz pontosan akkor kompakt, ha korlátos és zárt.*

3.0.8. Definíció. *Azt mondjuk, hogy a $D \subset \mathbb{R}$ halmaz **összefüggő**, ha D nem állítható elő két nemüres diszjunkt nyílt halmaz uniójaként.*

3.0.3. Példa. — *a $[0, 1]$ halmaz összefüggő;*

— *a $]0, 1[\cup]1, 2[$ halmaz nem összefüggő.*

3.0.2. Tétel. *Legyen $D \subset \mathbb{R}$. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.*

(i) *D összefüggő halmaz;*

(ii) *ha $x, y \in D$ és $z \in \mathbb{R}$ olyanok, hogy $x < z < y$, akkor $z \in D$.*

4. fejezet

Valós függvények folytonossága

4.1. Alapfogalmak és kapcsolatuk

4.1.1. Definíció. *Legyen $D \subset \mathbb{R}$ nemüres halmaz, ekkor az $f\colon D \to \mathbb{R}$ függvényt **valós függvény**nek nevezzük.*

4.1.2. Definíció. *Legyen $D \subset \mathbb{R}$ nemüres halmaz, $f\colon D \to \mathbb{R}$ függvény. Azt mondjuk, hogy az f függvény **folytonos az** $x_0 \in D$ **pontban**, ha bármely $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha $x \in D$ olyan, hogy $|x - x_0| < \delta$, akkor*

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

*Ha az f függvény a D halmaz minden pontjában folytonos, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény **folytonos a** D **halmazon**.*

4.1.1. Példa. *A*

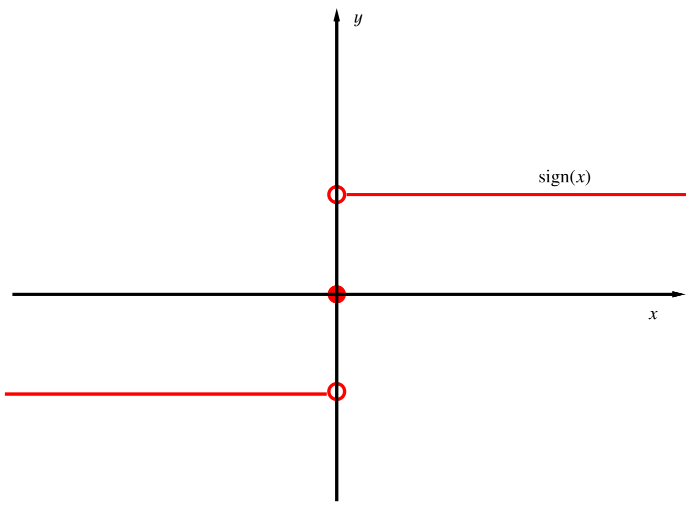
$$\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x > 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \\ -1, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

signum függvény nem folytonos az $x_0 = 0$ pontban.

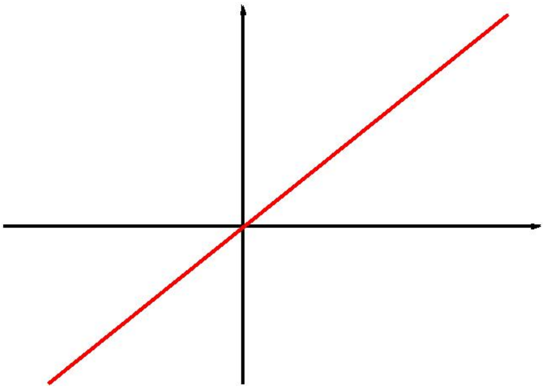
4.1.2. Példa. *Az*

$$f(x) = x \qquad (x \in \mathbb{R})$$

identikus függvény minden pontban folytonos.



4.1. ábra. A signum függvény



4.2. ábra. Az identikus függvény

4.1.3. Példa. *Az*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & ha\ x \in \mathbb{Q} \\ 0, & ha\ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

úgynevezett ***Dirichlet-függvény*** *egyetlen pontban sem folytonos.*

4.1.1. Tétel (Átviteli elv). *Legyen $D \subset \mathbb{R}$ nemüres halmaz, $f : D \to \mathbb{R}$. Az f függvény akkor és csakis akkor folytonos az $x_0 \in D$ pontban, ha tetszőleges $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ D halmazbeli elemekből álló, x_0-hoz konvergáló sorozat esetén az $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat $f(x_0)$-hoz konvergál.*

4.1.1. Megjegyzés. *Legyen $D \subset \mathbb{R}$ nemüres halmaz, $f : D \to \mathbb{R}$. Az f függvény akkor és csakis akkor nem folytonos az $x_0 \in D$ pontban, ha van olyan $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ D halmazbeli elemekből álló, x_0-hoz konvergáló sorozat, melyre az $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat nem $f(x_0)$-hoz konvergál.*

Folytonosság és műveletek

4.1.2. Tétel. *Legyen $D \subset \mathbb{R}$ nemüres halmaz. Ha az $f, g : D \to \mathbb{R}$ függvények folytonosak az $x_0 \in D$ pontban, akkor*

(i) az $f + g$ függvény is folytonos az x_0 pontban;

(ii) tetszőleges $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén a λf függvény is folytonos az x_0 pontban;

(iii) az $f \cdot g$ függvény is folytonos az x_0 pontban;

(iv) ha tetszőleges $x \in D$ esetén $g(x) \neq 0$, akkor az $\dfrac{f}{g}$ függvény is folytonos az x_0 pontban.

4.1.3. Tétel (Az összetett függvény folytonossága). *Legyen $D \subset \mathbb{R}$ nemüres halmaz és legyenek $f : D \to \mathbb{R}$ és $g : f(D) \to \mathbb{R}$ adott függvények. Ha az f függvény folytonos az $x_0 \in D$ pontban, a g pedig az $f(x_0) \in f(D)$ pontban, akkor a $g \circ f$ függvény folytonos az x_0 pontban.*

Folytonosság és topologikus fogalmak

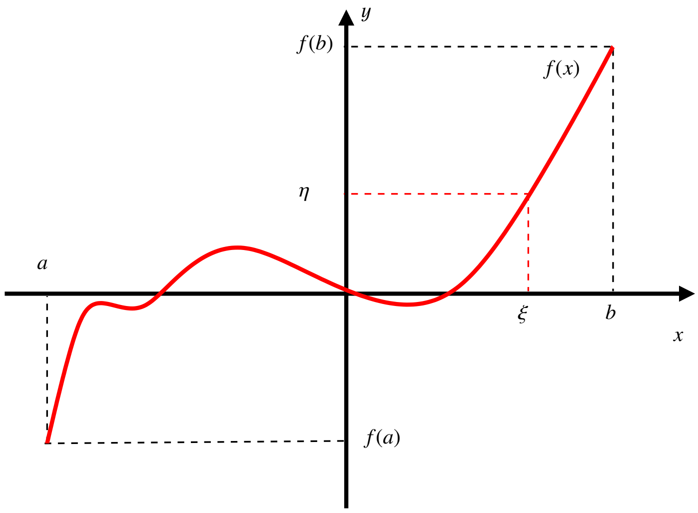
4.1.4. Tétel. *Legyen $D \subset \mathbb{R}$ nemüres halmaz, ekkor az $f : D \to \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor folytonos a D halmazon, ha tetszőleges $V \subset \mathbb{R}$ nyílt halmaz esetén az $f^{-1}(V) \subset \mathbb{R}$ halmaz nyílt.*

4.1.5. Tétel. *Legyen $D \subset \mathbb{R}$ kompakt halmaz, $f : D \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ekkor az $f(D) \subset \mathbb{R}$ halmaz kompakt.*

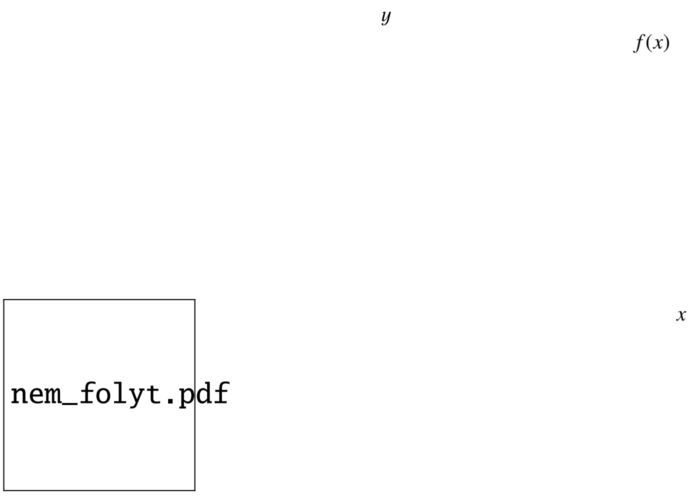
4.1.6. Tétel. *Legyen $D \subset \mathbb{R}$ kompakt halmaz, $f : D \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ekkor f korlátos függvény.*

4.1.7. Tétel. *Legyen $D \subset \mathbb{R}$ összefüggő halmaz, $f : D \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ekkor az $f(D) \subset \mathbb{R}$ halmaz is összefüggő.*

4.1.1. Következmény (Bolzano-féle középértéktétel). *Legyenek $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ha $f(a) < f(b)$ és $\eta \in \mathbb{R}$ olyan, hogy $f(a) < \eta < f(b)$, akkor van olyan $\xi \in]a, b[$, melyre $f(\xi) = \eta$ teljesül.*



4.3. ábra. A Bolzano-féle középértéktétel geometriai jelentése



4.4. ábra. Nem folytonos függvény

Egyenletes folytonosság

4.1.3. Definíció. *Legyen $D \subset \mathbb{R}$ nemüres halmaz, $f: D \to \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy az f függvény a D* ***halmazon egyenletesen folytonos****, ha bármely $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $\delta > 0$ úgy, hogy ha $x, y \in D$ olyanok, hogy $|x - y| < \delta$, akkor*

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

4.1.1. Állítás. *Legyen $D \subset \mathbb{R}$ nemüres halmaz, $f: D \to \mathbb{R}$. Ha az f függvény a D halmazon egyenletesen folytonos, akkor f a D halmaz minden pontjában folytonos.*

4.1.2. Állítás. *Legyen $D \subset \mathbb{R}$ kompakt halmaz, $f: D \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ekkor f egyenletesen folytonos a D halmazon.*

4.1.2. Megjegyzés. *Az*

$$f(x) = x^2 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

módon megadott függvény minden $x_0 \in \mathbb{R}$ pontban folytonos, azonban ez a függvény nem egyenletesen folytonos $\mathbb{R}$-en.

Folytonosság és monotonitás

4.1.4. Definíció. *Legyen $D \subset \mathbb{R}$ nemüres halmaz, $f: D \to \mathbb{R}$ függvény. Ha az f függvény az $x_0 \in D$ pontban nem folytonos, akkor azt mondjuk, hogy az $x_0 \in D$ pont az f függvénynek* ***szakadási hely****e.*

4.1.8. Tétel. *Legyen $D \subset \mathbb{R}$ nemüres halmaz, $f: D \to \mathbb{R}$ monoton függvény. Ekkor azoknak a pontoknak a halmaza, melyek az f függvénynek szakadási helyei, megszámlálható számosságú.*

5. fejezet

Függvények határértéke

5.1. Alapfogalmak

5.1.1. Definíció. *Legyen* $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D'$ *és* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Azt mondjuk, hogy az* f *függvénynek* ***az*** x_0 ***pontban a határértéke*** α, *ha tetszőleges* $\varepsilon > 0$ *esetén létezik olyan* $\delta > 0$, *hogy ha* $x \in D$ *és* $|x - x_0| < \delta$, *akkor* $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$. *Erre a* $\lim_{x \to x_0} f(x) = \alpha$ *jelölést alkalmazzuk.*

5.1.2. Definíció. *Legyen* $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D'$. *az* f *függvénynek* ***az*** x_0 ***pontban a határértéke*** $+\infty$, *ha tetszőleges* $K \in \mathbb{R}$ *esetén létezik olyan* $\delta > 0$, *hogy ha* $x \in D$ *és* $|x - x_0| < \delta$, *akkor* $f(x) > K$. *Erre a* $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ *jelölést alkalmazzuk.*

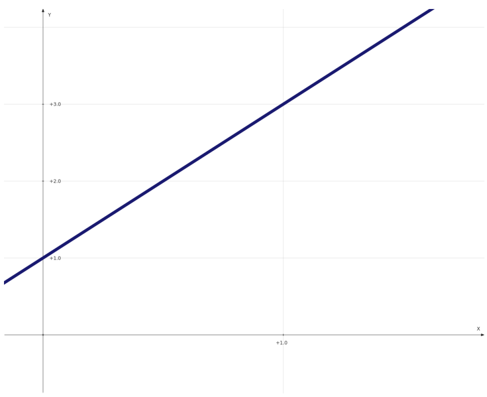
5.1.3. Definíció. *Legyen* $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D'$. *Azt mondjuk, hogy az* f *függvénynek* ***az*** x_0 ***pontban a határértéke*** $-\infty$, *ha tetszőleges* $k \in \mathbb{R}$ *esetén létezik olyan* $\delta > 0$, *hogy ha* $x \in D$ *és* $|x - x_0| < \delta$, *akkor* $f(x) < k$. *Erre a* $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ *jelölést alkalmazzuk.*

5.1.1. Példa. *Tekintsük az*

$$f(x) = 2x + 1 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

módon megadott $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *függvényt. Ekkor*

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 3$$

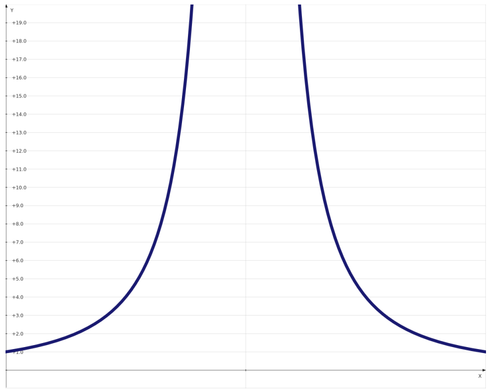


5.1.2. Példa. *Legyen*

$$f(x) = \frac{1}{(x-2)^2} \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

Ekkor

$$\lim_{x \to 2} f(x) = +\infty.$$



5.1.4. Definíció. *Legyen $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$ egy olyan halmaz, mely felülről nem korlátos, $f : D \to \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek **a $+\infty$–ben a határértéke** α, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $K \in \mathbb{R}$, hogy ha $x \in D$ és $x \geq K$, akkor $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$. Erre a $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \alpha$ jelölést alkalmazzuk.*

5.1.5. Definíció. *Legyen $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$ egy olyan halmaz, mely alulról nem korlátos, $f : D \to \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek **a $-\infty$–ben a határértéke** α, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $k \in \mathbb{R}$, hogy ha $x \in D$ és $x \leq k$, akkor $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$. Erre a $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \alpha$ jelölést alkalmazzuk.*

5.1.6. Definíció. *Legyen $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$ egy olyan halmaz, mely felülről nem korlátos, $f : D \to \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek **a $+\infty$–ben a határértéke** $+\infty$, ha tetszőleges $K \in \mathbb{R}$ esetén létezik olyan $K^* \in \mathbb{R}$, hogy ha $x \in D$ és $x \geq K^*$, akkor $f(x) \geq K$. Erre a $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ jelölést alkalmazzuk.*

5.1.7. Definíció. *Legyen $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$ egy olyan halmaz, mely felülről nem korlátos, $f : D \to \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek **a $+\infty$–ben a határértéke** $-\infty$, ha tetszőleges $k \in \mathbb{R}$ esetén létezik olyan $K^* \in \mathbb{R}$, hogy ha $x \in D$ és $x \geq K^*$, akkor $f(x) \leq k$. Erre a $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ jelölést alkalmazzuk.*

5.1.8. Definíció. *Legyen $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$ egy olyan halmaz, mely alulról nem korlátos, $f : D \to \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek **a $-\infty$–ben a határértéke** $+\infty$, ha tetszőleges $K \in \mathbb{R}$ esetén létezik olyan $k^* \in \mathbb{R}$, hogy ha $x \in D$ és $x \leq k^*$, akkor $f(x) \geq K$. Erre a $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ jelölést alkalmazzuk.*

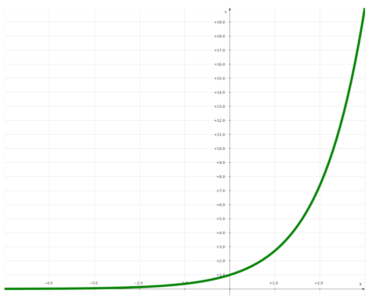
5.1.9. Definíció. *Legyen $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$ egy olyan halmaz, mely alulról nem korlátos, $f : D \to \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek **a $-\infty$–ben a határértéke** $-\infty$, ha tetszőleges $k \in \mathbb{R}$ esetén létezik olyan $k^* \in \mathbb{R}$, hogy ha $x \in D$ és $x \leq k^*$, akkor $f(x) \leq k$. Erre a $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ jelölést alkalmazzuk.*

5.1.3. Példa. *Legyen*

$$f(x) = e^x \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ekkor

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

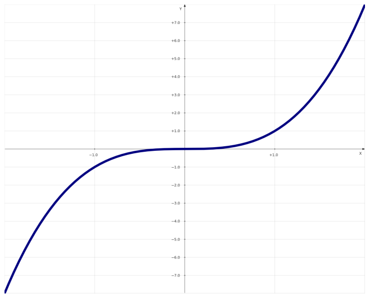


5.1.4. Példa. *Tekintsük az*

$$f(x) = x^3 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

módon megadott $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt. Ekkor

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad \textit{és} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$



5.1.1. Tétel (Átviteli elv). *Legyen $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$, illetve $x_0 \in D'$ és $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Ekkor $\lim_{x \to x_0} f(x) = \alpha$ pontosan akkor teljesül, ha tetszőleges $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ D–beli, x_0–hoz konvergáló sorozat esetén $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \alpha$ teljesül.*

5.2. Határértéke és folytonosság kapcsolata

5.2.1. Tétel. *Legyen $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ és $x_0 \in D$. Ekkor az f függvény pontosan akkor folytonos az x_0 pontban, ha létezik a $\lim_{x \to x_0} f(x)$ határérték, és*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

5.3. Határérték és műveletek

5.3.1. Tétel. *Legyen $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in D'$ $f, g : D \to \mathbb{R}$, illetve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Ha az f és g függvényeknek létezik a határértéke az x_0 pontban és*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \alpha \quad \text{és} \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = \beta,$$

akkor

(i) az $f + g$ függvénynek is létezik az x_0 pontban a határértéke

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \alpha + \beta;$$

(ii) tetszőleges $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén a $\lambda \cdot f$ függvénynek is létezik az x_0 pontban a határértéke és

$$\lim_{x \to x_0} \lambda \cdot f(x) = \lambda \cdot \alpha;$$

(iii) az $f \cdot g$ függvénynek is létezik az x_0 pontban a határértéke és

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = \alpha \cdot \beta$$

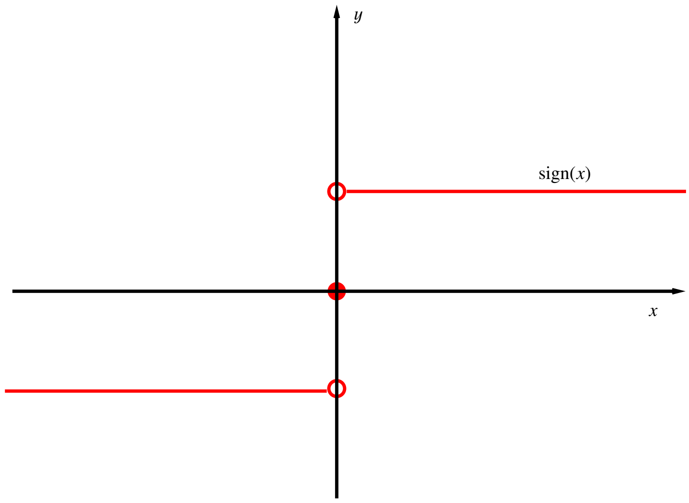
(iv) az $\dfrac{f}{g}$ függvénynek is létezik a határértéke az x_0 pontban és

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\alpha}{\beta},$$

feltéve, hogy $\beta \neq 0$ és $g(x) \neq 0$ teljesül minden $x \in D$ esetén.

5.3.1. Definíció. *Legyen $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in D'$ $f : D \to \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek az x_0 pontban létezik a **jobboldali határértéke**, ha van olyan $\alpha \in \mathbb{R}$, hogy bármely $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha $x \in D$ olyan, hogy $x_0 < x < x_0 + \delta$, akkor $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$ teljesül.*

Erre a $\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = \alpha$ jelölést fogjuk használni.



5.3.2. Definíció. *Legyen $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in D'$ $f : D \to \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek az x_0 pontban létezik a* ***baloldali határértéke****, ha van olyan $\alpha \in \mathbb{R}$, hogy bármely $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha $x \in D$ olyan, hogy $x_0 - \delta < x < x_0$, akkor $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$ teljesül.*

Erre a $\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \alpha$ jelölést fogjuk használni.

5.3.1. Példa. *Tekintsük a*

$$\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x > 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \\ -1, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

módon megadott $\operatorname{sign}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *függvényt. Ekkor*

$$\lim_{x \to 0+0} \operatorname{sign}(x) = 1 \qquad \lim_{x \to 0-0} \operatorname{sign}(x) = -1$$

5.3.1. Állítás. *Legyen $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in D'$ $f : D \to \mathbb{R}$. Ha az f függvénynek létezik az x_0 pontban a határértéke, akkor f-nek az x_0 pontban létezik a bal- és a jobboldali határértéke is és*

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x)$$

5.4. Szakadási helyek osztályozása

5.4.1. Definíció. *Legyen $D \subset \mathbb{R}$ nyílt halmaz, $x_0 \in D$, $f\colon D \to \mathbb{R}$. Ha az x_0 pont az f függvénynek szakadási helye és léteznek a $\lim_{x \to x_0 - 0} f(x)$ és $\lim_{x \to x_0 + 0} f(x)$ bal- és jobboldali határértékei az f függvénynek az x_0 pontban, akkor azt mondjuk, hogy az f függvénynek az x_0 pontban* ***elsőfajú szakadás*** *van.*

Ha még az is teljesül, hogy

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x),$$

akkor azt mondjuk, hogy az f függvénynek az x_0 pontban ***megszüntethető szakadás****a van.*

Ha az f függvénynek az x_0 pontban szakadása van és az nem elsőfajú, akkor azt mondjuk, hogy az f függvénynek az x_0 pontban ***másodfajú szakadás****a van.*

5.4.1. Példa. *Az*

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } x \neq 2 \\ 4, & \text{ha } x = 2 \end{cases}$$

módon megadott $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek az $x_0 = 2$ pontban megszüntethető szakadása van.

f

Megszuntetheto.pdf

$x = 2$

5.4.2. Példa. *Az*

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{ha } x < 1 \\ 0, & \text{ha } x = 1 \\ 2 - (x-1)^2, & \text{ha } x > 1 \end{cases}$$

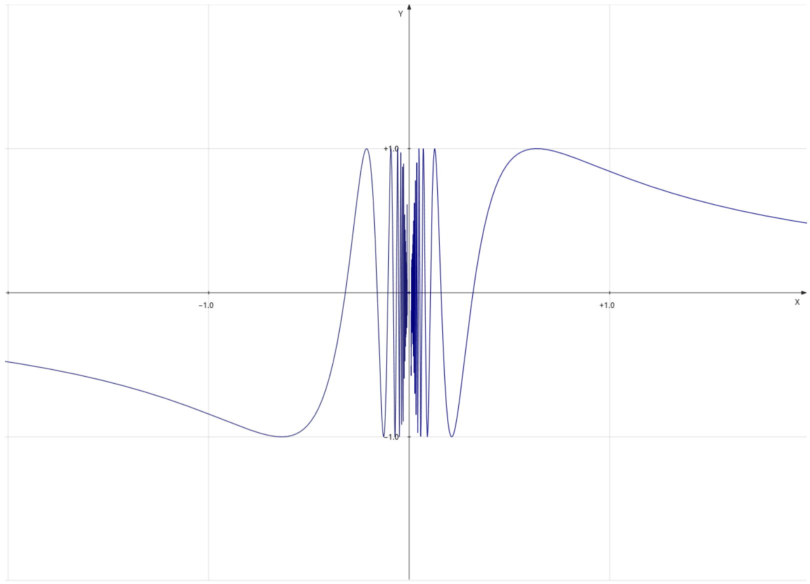
módon megadott $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *függvénynek az* $x_0 = 1$ *pontban elsőfajú, nem megszüntethető szakadása van.*

nem_megsz.png

5.4.3. Példa. *Az*

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

módon megadott $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *függvénynek az* $x_0 = 0$ *pontban másodfajú szakadása van.*


Y
+1.0
−1.0
X
−1.0
+1.0

6. fejezet

Függvénysorozatok és függvénysorok

6.1. Függvénysorozatok

6.1.1. Definíció. *Legyen $D \subset \mathbb{R}$ egy nemüres halmaz, $f_n \colon D \to \mathbb{R}$, $(n \in \mathbb{N})$ és $x \in D$. Ha az $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ valós számsorozat konvergens, akkor azt mondjuk, hogy* ***az*** $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***függvénysorozat az*** x ***pontban konvergens****.*

Ha ez a D halmaz minden pontjában teljesül, akkor azt mondjuk, hogy ***az*** $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***függvénysorozat a*** D ***halmazon pontonként konvergens****.*

A

$$\{x \in D \mid (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergens}\}$$

halmazt pedig az az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat ***konvergenciahalmaz****ának hívjuk.*

6.1.2. Definíció. *Ha az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat a D halmazon pontonként konvergens, akkor az*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \qquad (x \in D)$$

módon értelmezett $f \colon D \to \mathbb{R}$ függvényt az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat ***határfüggvény****ének nevezzük.*

6.1.1. Tétel (Cauchy-féle konvergenciakritérium függvénysorozatok pontonkénti konvergenciájára). *Legyen $D \subset \mathbb{R}$ egy nemüres halmaz, $f_n \colon D \to \mathbb{R}$, $(n \in \mathbb{N})$ és $x \in D$. Az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat pontosan akkor konvergens az x pontban, ha bármely $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $N > 0$, hogy ha $n, m \in \mathbb{N}$, $n, m > N$, akkor*

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

teljesül.

6.1.3. Definíció. *Legyen $D \subset \mathbb{R}$ egy nemüres halmaz, $f_n \colon D \to \mathbb{R}$, $(n \in \mathbb{N})$. Tegyük fel, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat a D halmazon pontonként konvergens, és jelölje a határfüggvényét f. Akkor mondjuk, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat a D halmazon* ***egyenletesen konvergens****, ha bármely $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $N > 0$, hogy ha $n \in \mathbb{N}$, $n > N$, akkor*

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

teljesül ***minden*** *$x \in D$ esetén.*

6.1.1. Megjegyzés. *Egyenletes konvergencia $\Longrightarrow$ pontonkénti konvergencia*

6.1.2. Tétel (Cauchy-féle konvergenciakritérium függvénysorozatok egyenletes konvergenciájára). *Legyen $D \subset \mathbb{R}$ egy nemüres halmaz, $f_n \colon D \to \mathbb{R}$, $(n \in \mathbb{N})$. Az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat pontosan akkor egyenletesen konvergens a D halmazon, ha bármely $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $N > 0$, hogy ha $n, m \in \mathbb{N}$, $n, m > N$, akkor*

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

teljesül.

6.1.3. Tétel. *Legyen $D \subset \mathbb{R}$ egy nemüres halmaz, $f_n\colon D \to \mathbb{R}$, $(n \in \mathbb{N})$ és*

$$M_n = \sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)|\,.$$

Ekkor az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat pontosan akkor konvergál egyenletesen az f függvényhez, ha

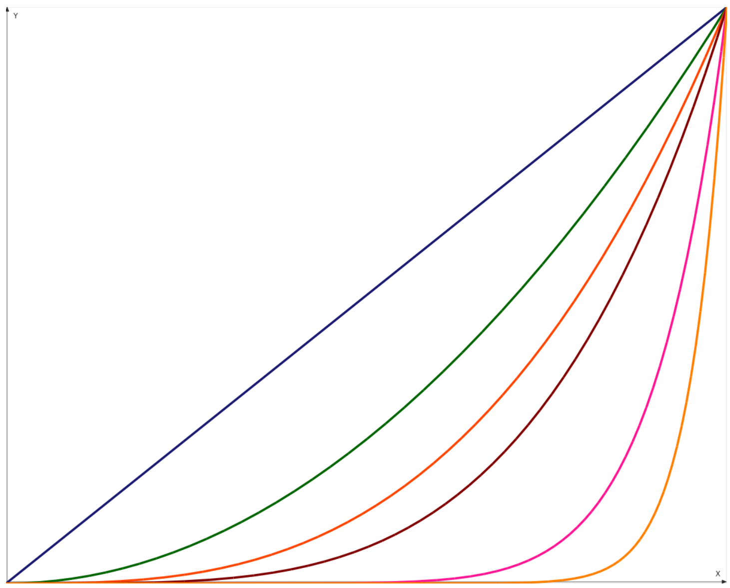
$$\lim_{n\to\infty} M_n = 0.$$

6.1.1. Példa. *Legyen*

$$f_n(x) = x^n \qquad (x \in [0, 1],\ n \in \mathbb{N})\,.$$

Ekkor az $(f_n)_n$ függvénysorozat a $[0, 1]$ halmazon pontonként konvergens, de egyenletesen nem. A függvénysorozat határfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x = 1 \\ 0, & \text{ha } x \in [0, 1[\end{cases}$$



6.1.2. Példa. *Legyen*

$$f_m(x) = \lim_{n\to\infty} (\cos(m!x\pi))^{2n} = \begin{cases} 1, & \text{ha } m!x \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases} \qquad (x \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{N})$$

Ekkor az $(f_m)_m$ függvénysorozat pontonként konvergens a valós számok halmazán, de egyenletesen nem. A függvénysorozat határfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

6.2. Függvénysorok

6.2.1. Definíció. *Legyen $D \subset \mathbb{R}$ egy nemüres halmaz, $f_n\colon D \to \mathbb{R}$, $(n \in \mathbb{N})$ és $x \in D$. A*

$$\sigma_n(x) = f_1(x) + \cdots + f_n(x) \qquad (x \in D,\ n \in \mathbb{N})$$

*módon értelmezett $(\sigma_n)_n$ függvénysorozatot az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat **részletösszeg-sorozat**ának hívjuk.*

*Azt mondjuk, hogy **a $\sum f_n$ függvénysor az $x \in D$ pontban konvergens**, ha a $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysor az $x \in D$ pontban konvergens. Ekkor a $\lim_{n\to\infty} \sigma_n(x)$ valós számot a $\sum f_n$ függvénysor x **pontbeli összegé**nek hívjuk, és a*

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *módon jelöljük.*

Akkor mondjuk, hogy a $\sum f_n$ *függvénysor az* $x \in D$ *pontban* ***abszolút konvergens****, ha a* $\sum |f_n|$ *függvénysor az* x *pontban konvergens.*

Ha a $\sum f_n$ *függvénysor a* D *halmaz minden pontjában konvergens, akkor azt mondjuk, hogy ez a függvénysor a* D *halmazon* ***pontonként konvergens****.*

Ha a $\sum f_n$ *függvénysor a* D *halmazon pontonként konvergens, akkor az*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \qquad (x \in D)$$

módon értelmezett $f : D \to \mathbb{R}$ *függvényt a* $\sum f_n$ *függvénysor* ***határfüggvényé****nek nevezzük.*

6.2.1. Tétel (Cauchy-féle konvergenciakritérium függvénysorok pontonkénti konvergenciájára). *Legyen* $D \subset \mathbb{R}$ *egy nemüres halmaz,* $f_n : D \to \mathbb{R}$, $(n \in \mathbb{N})$ *és* $x \in D$*. Az* $\sum f_n$ *függvénysor pontosan akkor konvergens az* x *pontban, ha bármely* $\varepsilon > 0$ *esetén van olyan* $N > 0$*, hogy ha* $n, m \in \mathbb{N}$*,* $n, m > N$*, akkor*

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} f_k(x) \right| < \varepsilon$$

teljesül.

6.2.2. Tétel (Cauchy-féle konvergenciakritérium függvénysorok egyenletes konvergenciájára). *Legyen* $D \subset \mathbb{R}$ *egy nemüres halmaz,* $f_n : D \to \mathbb{R}$, $(n \in \mathbb{N})$*. Az* $\sum f_n$ *függvénysor pontosan akkor egyenletesen konvergens a* D *halmazon, ha bármely* $\varepsilon > 0$ *esetén van olyan* $N > 0$*, hogy ha* $n, m \in \mathbb{N}$*,* $n, m > N$*, akkor*

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} f_k(x) \right| < \varepsilon$$

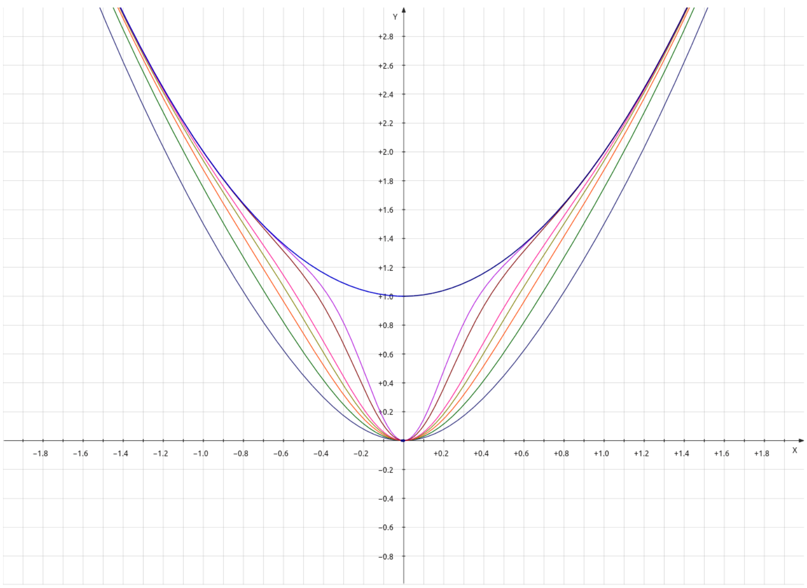
teljesül ***minden*** $x \in D$ *esetén.*

6.2.1. Példa. *Legyen*

$$f_n(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^n} \qquad (x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor a $\sum f_n$ *függvénysor minden* $x \in \mathbb{R}$ *pontban konvergens és*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} = \begin{cases} 0, & ha\ x = 0 \\ 1 + x^2, & ha\ x \neq 0 \end{cases}$$



6.3. Egyenletes konvergencia és folytonosság

6.3.1. Tétel. *Legyen $D \subset \mathbb{R}$ egy nemüres halmaz, $f_n : D \to \mathbb{R}$, $(n \in \mathbb{N})$. Tegyük fel, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat a D halmazon egyenletesen konvergens, és jelölje a határfüggvényét f. Ekkor az $f : D \to \mathbb{R}$ határfüggvény folytonos a D halmazon.*

6.3.2. Tétel. *Legyen $D \subset \mathbb{R}$ egy nemüres halmaz, $f_n : D \to \mathbb{R}$, $(n \in \mathbb{N})$. Ha a $\sum f_n$ függvénysor a D halmazon egyenletesen konvergens, akkor a függvénysor összegfüggvénye folytonos függvény.*

6.3.3. Tétel (Weierstrass-kritérium függvénysorok egyenletes konvergenciájára). *Legyen $D \subset \mathbb{R}$ egy nemüres halmaz, $f_n : D \to \mathbb{R}$, $(n \in \mathbb{N})$. Tegyük fel, hogy létezik egy olyan $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valós számsorozat, hogy*

$$|f_n(x)| \leq M_n \qquad (x \in D,\ n \in \mathbb{N})\,.$$

Ha a $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ valós számsor konvergens, akkor a $\sum f_n$ függvénysor az egész D halmazon egyenletesen konvergens.

6.3.4. Tétel (Weierstrass approximációs tétele). *Legyen $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény és $\varepsilon > 0$. Ekkor létezik egy olyan P valós polinom, melyre*

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon$$

teljesül minden $x \in [a, b]$ esetén

6.3.1. Következmény. *Legyen $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ekkor létezik egy olyan polinomokból álló $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat, mely az $[a, b]$ intervallumon egyenletesen konvergál az f függvényhez.*

6.4. Hatványsorok

6.4.1. Definíció. *Legyen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy valós számsorozat, $x_0 \in \mathbb{R}$ és*

$$f_n(x) = \begin{cases} a_0, & \text{ha } n = 0 \\ a_n(x - x_0)^n, & \text{ha } n \neq 0. \end{cases}$$

*Ekkor az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ függvénysorozathoz tartozó függvénysort **hatványsor**nak nevezzük. Az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ sorozat tagjai a hatványsor **együtthatói**, x_0 pedig a hatványsor **középpont**ja. A hatványsort a*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$

szimbólummal is szokás jelölni.

6.4.1. Tétel (Cauchy–Hadamard). *Legyen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ egy hatványsor és*

$$\alpha = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Ekkor

(i) Ha $\alpha = 0$, akkor a hatványsor minden $x \in \mathbb{R}$ esetén konvergens;

(ii) Ha $0 < \alpha < +\infty$, akkor a hatványsor minden olyan $x \in \mathbb{R}$ pontban konvergens, melyre

$$\alpha\,|x - x_0| < 1$$

és minden olyan $x \in \mathbb{R}$ pontban divergens, melyre $\alpha\,|x - x_0| > 1$;

(iii) Ha $\alpha = +\infty$, akkor a hatványsor csak az x_0 pontban konvergens.

6.4.2. Definíció. *Az fenti jelölések megtartása mellett legyen*

$$\rho = \begin{cases} +\infty, & ha\ \alpha = 0 \\ \dfrac{1}{\alpha}, & ha\ 0 < \alpha < +\infty \\ 0, & ha\ \alpha = +\infty. \end{cases}$$

*A ρ bővített valós számot a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ hatványsor **konvergenciasugar**ának hívjuk.*

Ha $\rho > 0$, akkor az

$$\{x \in \mathbb{R} \,|\, |x - x_0| < \rho\}$$

*halmazt a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ hatványsor **konvergenciatartomány**ának nevezzük.*

6.4.1. Példa. *Tekintsük a*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{2^{n+1}}$$

hatványsort. Ekkor a fenti jelölésekkel

$$x_0 = -3 \quad \text{és} \quad a_n = \frac{1}{2^{n+1}}\ (n \in \mathbb{N}).$$

Így

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^{n+1}}} = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{2\sqrt[n]{2}} = \frac{1}{2},$$

ezért a hatványsor konvergenciasugara 2. Így a fenti hatványsor konvergenciatartománya a $]-5,-1[$ intervallum. Ha $x = -5$, akkor a fenti hatványsor $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2}$, ami divergens. Hasonlóan, ha $x = -1$, akkor a fenti hatványsor $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}$, ami szintén divergens. Ezért a fenti hatványsor konvergenciahalmaza a $]-5,-1[$ intervallum.

6.4.2. Tétel. *A $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ hatványsor a konvergenciatartomány minden kompakt részhalmazán egyenletesen konvergens.*

6.4.3. Tétel. *Ha a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ hatványsor konvergenciasugara nem nulla, akkor a hatványsor összegfüggvénye egy a konvergenciatartományon folytonos függvény.*

7. fejezet

Elemi függvények

7.1. Az exponenciális függvény

7.1.1. Definíció. *Az*

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

módon megadott $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *függvényt* ***exponenciális függvény****nek hívjuk.*

7.1.1. Tétel. *Az exponenciális függvény rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal*

(i)

$$\exp(0) = 1;$$

(ii)

$$\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y) \qquad (x, y \in \mathbb{R});$$

(iii)

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

7.1.2. Tétel. *Az exponenciális függvény*

(i) folytonos;

(ii) szigorúan monoton növekedő;

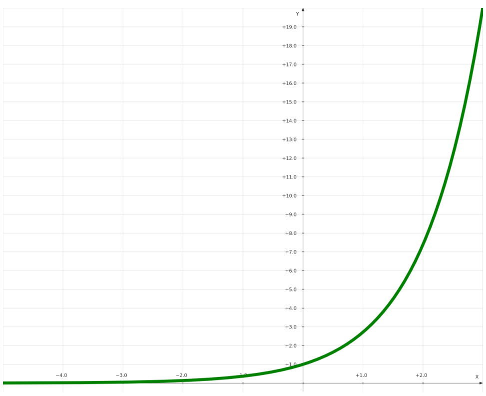
(iii) értékkészlete a pozitív valós számok halmaza;

(iv)

$$\lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty \quad \textit{és} \quad \lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$$

7.1.3. Tétel.

$$\exp(1) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n .$$



7.2. A logaritmus függvény

7.2.1. Definíció. *Az exponenciális függvény szigorúan monoton növekedő, így invertálható. Az inverzét* ***logaritmus függvény****nek nevezzük, és rá az* ln *jelölést használjuk.*

Tehát a logaritmus függvény az az $\ln\colon\,]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ függvény, melyre

$$\exp\left(\ln(x)\right) = x \qquad (x \in]0,+\infty[)\,.$$

7.2.1. Tétel. *Az* $\ln\colon\,]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ *függvény rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal*

(i)

$$\ln(1) = 0;$$

(ii)

$$\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y) \qquad (x, y \in]0,+\infty[)\,;$$

(iii)

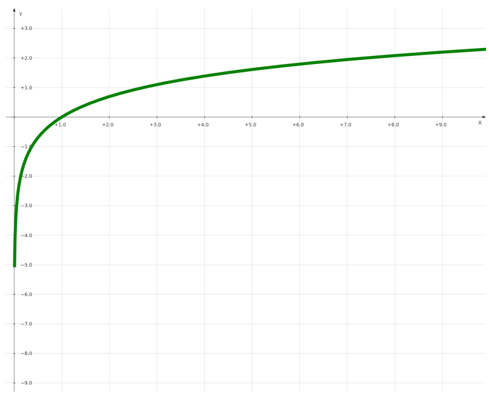
$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x) \qquad (x \in]0,+\infty[)\,;$$

(iv) folytonos;

(v) szigorúan monoton növekedő;

(vi)

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty \quad \textit{és} \quad \lim_{x\to 0+} \ln(x) = -\infty.$$



7.3. A hiperbolikus függvények

7.3.1. Definíció. *A*

$$\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad (x \in \mathbb{R})\,,$$

illetve a

$$\sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

módon megadott függvényeket rendre ***cosinus hiperbolicus****, illetve* ***sinus hiperbolicus*** *függvényeknek nevezzük.*

7.3.1. Tétel. *Tetszőleges* $x \in \mathbb{R}$ *esetén*

$$\cosh(x) = \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2} \qquad \sinh(x) = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2}.$$

7.3.2. Tétel. *A cosinus hiperbolicus, illetve a sinus hiperbolicus függvények rendelkeznek az alábbi tulajdonságokkal*

(i) mindkét függvény folytonos

(ii)

$$\cosh(0) = 1 \quad \textit{és} \quad \sinh(0) = 0$$

(iii)

$$\cosh(x + y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y) \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

(iv)

$$\sinh(x + y) = \sinh(x)\cosh(y) + \sinh(y)\cosh(x) \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

(v)

$$\cosh(-x) = \cosh(x) \quad \textit{és} \quad \sinh(-x) = -\sinh(x) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

(vi)

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

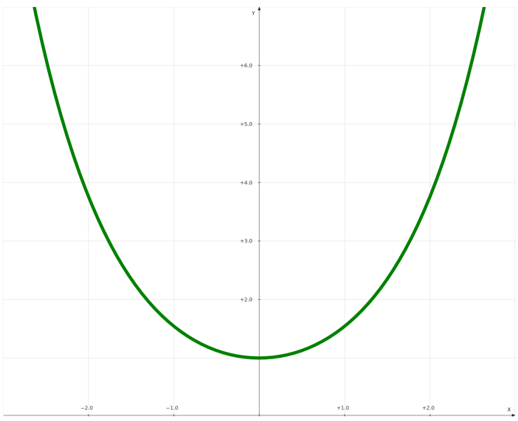
7.3.2. Definíció. *A*

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cos(x)} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

illetve a

$$\coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

módon megadott függvényeket ***tangens hiperbolicus****, illetve* ***cotangens hiperbolicus*** *függvényeknek hívjuk.*



7.1. ábra. A cosinus hiperbolicus függvény

7.4. A trigonometrikus függvények

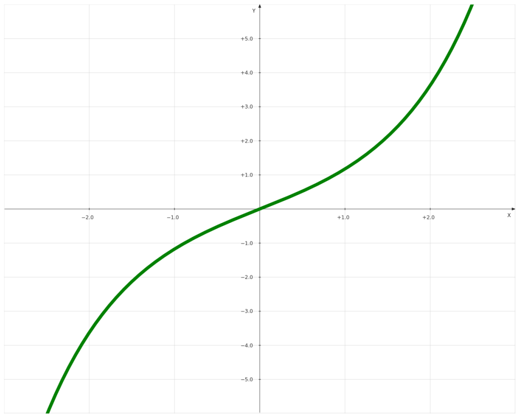
7.4.1. Definíció. *A*

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

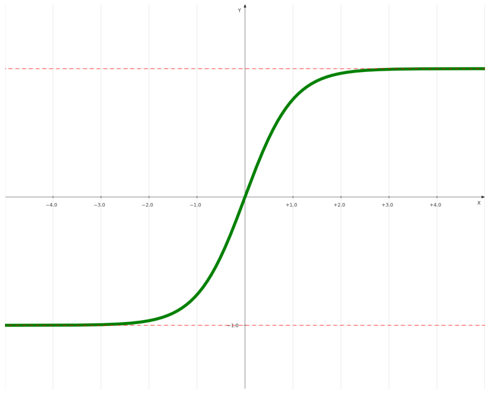
illetve a

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

módon értelmezett függvényeket rendre ***cosinus****, illetve* ***sinus*** *függvényeknek nevezzük.*



7.2. ábra. A sinus hiperbolicus függvény



7.3. ábra. A tangens hiperbolicus függvény

7.4.1. Tétel. *(i)*

$$\cos(0) = 1 \quad \textit{és} \quad \sin(0) = 0;$$

(ii)

$$\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

(iii)

$$\sin(x + y) = \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x) \qquad (x, y \in \mathbb{R})\,;$$

(iv)

$$\cos(-x) = \cos(x) \quad \textit{és} \quad \sin(-x) = -\sin(x) \qquad (x \in \mathbb{R})\,;$$

(v)

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \qquad (x \in \mathbb{R})\,.$$

7.4.1. Állítás. *Létezik olyan α valós szám, melyre $0 < \alpha < 2$ és $\cos(\alpha) = 0$.*

7.4.2. Állítás. *A cosinus függvény pozitív zérushelyei között van legkisebb.*

7.4.2. Definíció. *A cosinus függvény legkisebb pozitív zérushelyének kétszeresét π-vel jelöljük.*

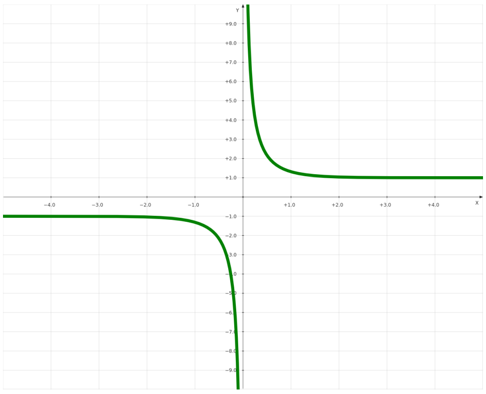
7.4.2. Tétel. *(i) a cosinus és a sinus függvény értékkészlete $[-1, 1]$;*

(ii)

$$\sin(0) = \sin(\pi) = 0$$

(iii)

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$$



7.4. ábra. A cotangens hiperbolicus függvény

7.4.3. Definíció. *Legyen $D \subset \mathbb{R}$ nemüres halmaz, $p \in \mathbb{R}$ olyan, hogy $x \in D$ esetén $x + p \in D$ is teljesül. Azt mondjuk, hogy az $f : D \to \mathbb{R}$ függvény* p ***szerint periodikus****, ha minden $x \in D$ esetén*

$$f(x + p) = f(x)$$

teljesül.

7.4.3. Tétel. *A cosinus és a sinus függvények 2π szerint periodikusak.*

7.4.4. Tétel. *A cosinus függvény zérushelyei a $\frac{\pi}{2}$ páratlan egész számú többszörösei. A sinus függvény zérushelyei a π egész számú többszörösei.*

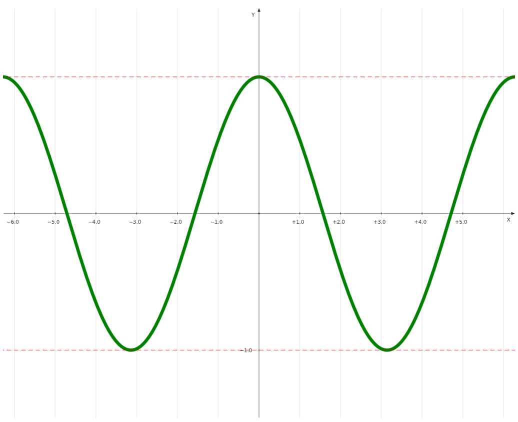
7.4.4. Definíció. *A*

$$\operatorname{tg}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \qquad \left(x \in \mathbb{R}, x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}\right),$$

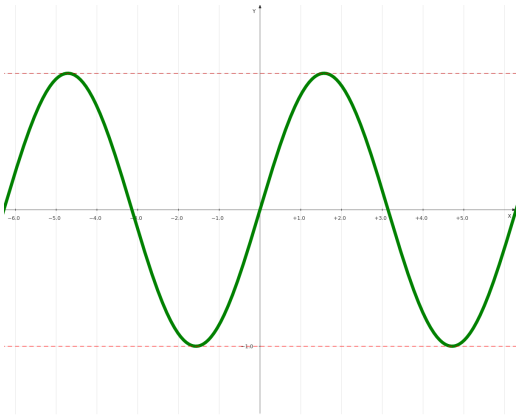
illetve a

$$\operatorname{ctg}(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \qquad (x \in \mathbb{R}, x \neq k\pi)$$

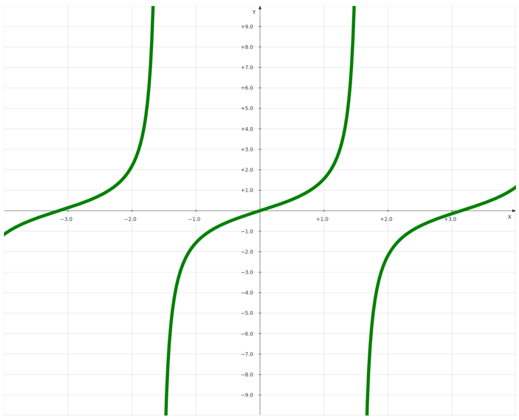
módon megadott függvényeket rendre ***tangens****, illetve* ***cotangens*** *függvényeknek hívjuk.*



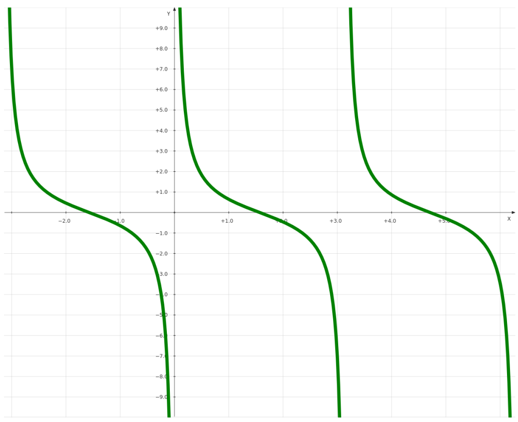
7.5. ábra. A cosinus függvény



7.6. ábra. A sinus függvény



7.7. ábra. A tangens függvény



7.8. ábra. A cotanges függvény

8. fejezet

Valós függvények differenciálhatósága

8.1. Alapfogalmak és kapcsolatuk

8.1.1. Definíció. *Legyen $D \subset \mathbb{R}$ nemüres, nyílt halmaz, $f\colon D \to \mathbb{R}$ függvény. Ekkor a*

$$\varphi(x, x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad (x, x_0 \in D,\ x \neq x_0)$$

mennyiséget az f függvény x és x_0 pontokhoz tartozó ***differenciahányados függvény****ének nevezzük.*

8.1.2. Definíció. *Legyen $D \subset \mathbb{R}$ nemüres, nyílt halmaz és $x_0 \in D$. Azt mondjuk, hogy az $f\colon D \to \mathbb{R}$ függvény* ***differenciálható az*** *$x_0 \in D$* ***pontban****, ha létezik és véges a*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

határérték. Erre a továbbiakban az $f'(x_0)$ jelölést használjuk és az f függvény x_0 ***pontbeli differenciálhányadosá****nak nevezzük.*

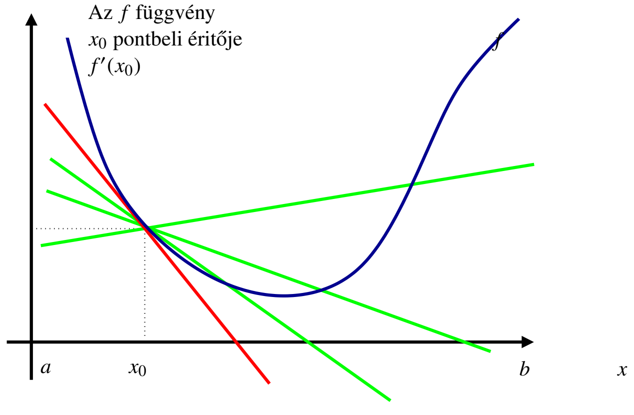
8.1.3. Definíció. *Az előző definíció jelölései mellett azt mondjuk, hogy az $f\colon D \to \mathbb{R}$ függvény* ***balról differenciálható az*** *$x_0 \in D$* ***pontban****, ha létezik és véges a*

$$\lim_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

határérték. Azt mondjuk továbbá, hogy az $f\colon D \to \mathbb{R}$ függvény ***jobbról differenciálható az*** *$x_0 \in D$* ***pontban****, ha létezik és véges a*

$$\lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

határérték.



8.1.1. Példa. *Legyen $c \in \mathbb{R}$, ekkor az*
$$f(x) = c \qquad (x \in \mathbb{R})$$
módon megadott $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény minden $x_0 \in \mathbb{R}$ pontban differenciálható.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{c - c}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} 0 = 0,$$

azaz, tetszőleges $x_0 \in \mathbb{R}$ esetén
$$f'(x_0) = 0.$$

8.1.2. Példa. *Tekintsük az*
$$f(x) = x^2 \qquad (x \in \mathbb{R})$$
módon megadott $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt. Ekkor

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} (x + x_0) = 2x_0,$$

azaz, a fenti f függvény minden pontban differenciálható és

$$f'(x_0) = 2x_0 \qquad (x_0 \in \mathbb{R}).$$

8.1.4. Definíció. *Legyen $D \subset \mathbb{R}$ nemüres, nyílt halmaz és $x_0 \in D$. Azt mondjuk, hogy az $f : D \to \mathbb{R}$ függvény* ***lineárisan approximálható az $x_0 \in D$ pontban****, ha létezik egy olyan $A \in \mathbb{R}$ és egy olyan $\omega : D \to \mathbb{R}$, hogy*

$$\lim_{x \to x_0} \omega(x) = 0$$

és
$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + \omega(x)(x - x_0) \qquad (x \in D)$$
teljesül.

8.1.1. Tétel. *Legyen $D \subset \mathbb{R}$ nemüres, nyílt halmaz, $f : D \to \mathbb{R}$ és $x_0 \in D$. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.*

— *az f függvény differenciálható az x_0 pontban;*

— *az f függvény lineárisan approximálható az x_0 pontban.*

8.1.2. Tétel. *Legyen $D \subset \mathbb{R}$ nemüres, nyílt halmaz, $f : D \to \mathbb{R}$ és $x_0 \in D$. Ha az f függvény differenciálható az x_0 pontban, akkor az f ebben a pontban folytonos is.*

8.1.1. Megjegyzés. *Az előző tétel* ***megfordítása nem igaz****, ugyanis az*

$$f(x) = |x| \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény minden pontban folytonos, azonban az $x_0 = 0$ pontban nem differenciálható.

8.2. Differenciálhatóság és műveletek

8.2.1. Tétel. *Legyen $D \subset \mathbb{R}$ nemüres, nyílt halmaz, $x_0 \in D$ és $f, g : D \to \mathbb{R}$ olyan függvények, melyek differenciálhatóak az x_0 pontban. Ekkor*

(i) az $f + g$ függvény is differenciálható az x_0 pontban és

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

(ii) *tetszőleges $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén a $\lambda \cdot f$ függvény is differenciálható az x_0 pontban és*

$$(\lambda \cdot f)'(x_0) = \lambda \cdot f'(x_0).$$

(iii) *az $f \cdot g$ függvény is differenciálható az x_0 pontban és*

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0).$$

(iv) *az $\frac{f}{g}$ függvény is differenciálható az x_0 pontban és*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)},$$

feltéve, hogy az x_0 pontnak van olyan környezete, melyben $g(x) \neq 0$.

8.2.2. Tétel (Az összetett függvény differenciálási szabálya). *Legyen $D \subset \mathbb{R}$ nemüres, nyílt halmaz, $x_0 \in D$ és $g\colon D \to \mathbb{R}$ és $f\colon g(D) \to \mathbb{R}$ olyan függvények, hogy g differenciálható az x_0 pontban, f pedig differenciálható a $g(x_0)$ pontban. Ekkor az $f \circ g$ függvény differenciálható az x_0 pontban, továbbá*

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

8.2.3. Tétel (Az inverz függvény differenciálási szabálya). *Legyen $]a, b[\subset \mathbb{R}$ nemüres, nyílt intervallum, $f\colon]a, b[\to \mathbb{R}$ folytonos, szigorúan monoton függvény. Ha az f függvény differenciálható az $x_0 \in]a, b[$ pontban és $f'(x_0) \neq 0$, akkor az f^{-1} függvény differenciálható az $f(x_0) \in f(]a, b[)$ pontban és*

$$\left(f^{-1}\right)'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

8.2.4. Tétel (Hatványsorok differenciálhatósága). *Legyen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ egy valós számsorozat, $x_0 \in \mathbb{R}$ és tegyük fel, hogy a*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$

hatványsor konvergenciasugara nem nulla. Ekkor ha f jelöli a hatványsor összegfüggvényét, akkor az f függvény a konvergenciatartomány minden pontjában differenciálható és

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n + 1)a_{n+1}(x - x_0)^n.$$

Néhány elemi függvény differenciálhányados függvénye

— ha $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ és $f(x) = x^n$, akkor $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$;

— ha $f(x) = \exp(x)$, akkor $f'(x) = \exp(x)$;

— ha $f(x) = a^x$, akkor $f'(x) = a^x \cdot \ln(a)$;

— ha $f(x) = \ln(x)$, akkor $f'(x) = \frac{1}{x}$;

— ha $f(x) = \cos(x)$, akkor $f'(x) = -\sin(x)$;

— ha $f(x) = \sin(x)$, akkor $f'(x) = \cos(x)$;

— ha $f(x) = \mathrm{tg}(x)$, akkor $f'(x) = \frac{1}{\cos^2}(x)$;

— ha $f(x) = \operatorname{ctg}(x)$, akkor $f'(x) = -\dfrac{1}{\sin^2(x)}$;

— ha $f(x) = \cosh(x)$, akkor $f'(x) = \sinh(x)$;

— ha $f(x) = \sinh(x)$, akkor $f'(x) = \cosh(x)$;

— ha $f(x) = \tanh(x)$, akkor $f'(x) = \dfrac{1}{\cosh^2(x)}$;

— ha $f(x) = \coth(x)$, akkor $f'(x) = -\dfrac{1}{\sinh^2(x)}$.

8.3. Középértéktételek

8.3.1. Definíció. *Legyen $D \subset \mathbb{R}$ nemüres halmaz, $f\colon D \to \mathbb{R}$ függvény. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek az $x_0 \in D$* ***pontban lokális minimuma*** *van, ha az x_0 pontnak van olyan $B \subset D$ környezete, hogy*

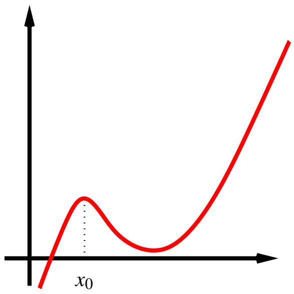
$$f(x_0) \leq f(x)$$

teljesül minden $x \in B$ esetén.

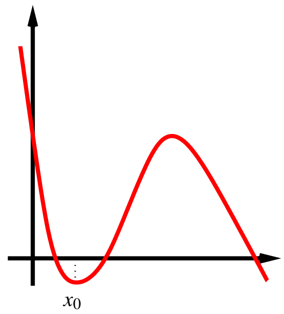
8.3.2. Definíció. *Legyen $D \subset \mathbb{R}$ nemüres halmaz, $f\colon D \to \mathbb{R}$ függvény. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek az $x_0 \in D$* ***pontban lokális maximuma*** *van, ha az x_0 pontnak van olyan $B \subset D$ környezete, hogy*

$$f(x_0) \geq f(x)$$

teljesül minden $x \in B$ esetén.



lokális maximumhely



lokális minimumhely

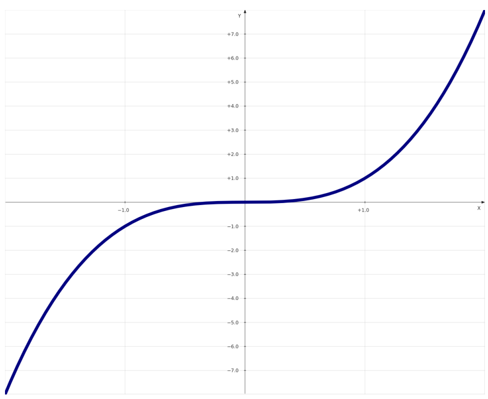
8.3.1. Tétel. *Legyen $D \subset \mathbb{R}$ nemüres, nyílt halmaz, $f\colon D \to \mathbb{R}$ függvény. Ha az f függvénynek az $x_0 \in D$ pontban lokális szélsőértéke van és az f függvény differenciálható ebben a pontban, akkor*

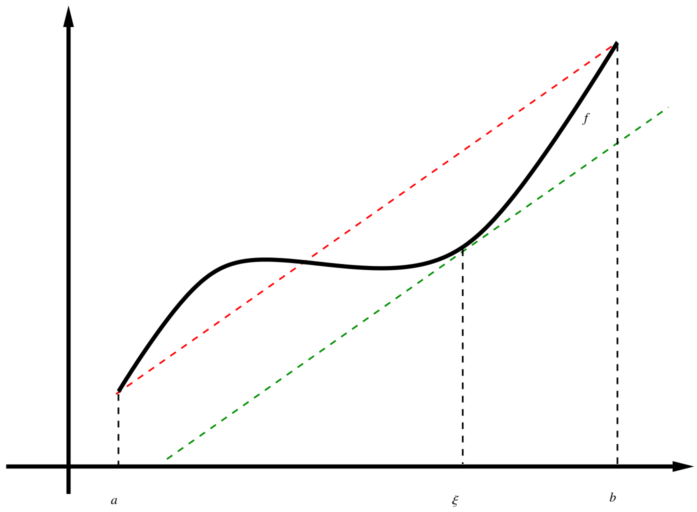
$$f'(x_0) = 0.$$

8.3.1. Megjegyzés. *Az előző tétel* ***megfordítása nem igaz****, legyen ugyanis*

$$f(x) = x^3 \qquad (x \in \mathbb{R})\,.$$

Ekkor az f függvény differenciálható az $x_0 = 0$ pontban és $f'(0) = 0$, azonban az f függvénynek az $x_0 = 0$ pont ***nem lokális szélsőértékhelye****.*





8.1. ábra. A Lagrange-féle középértéktétel geometriai jelentése

8.3.2. Tétel (Darboux). *Legyen $f\colon\ ]a,b[\to\mathbb{R}$ differenciálható függvény és legyenek $c,d\in]a,b[$, $c<d$. Ekkor az f függvény differenciálhányados függvénye minden $f'(c)$ és $f'(d)$ közé eső értéket felvesz a $]c,d[$ intervallumban.*

8.3.3. Tétel (Cauchy). *Legyenek $f,g\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ olyan folytonos függvények melyek differenciálhatóak az $]a,b[$ intervallumon. Ekkor van olyan $\xi\in]a,b[$ pont, hogy*

$$(f(b)-f(a))\,g'(\xi)=(g(b)-g(a))\,f'(\xi)$$

teljesül.

8.3.4. Tétel (Lagrange). *Legyen $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ olyan folytonos függvény, mely differenciálható a $]a,b[$ intervallumon. Ekkor van olyan $\xi\in]a,b[$, melyre*

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(\xi)$$

teljesül.

8.3.5. Tétel (Rolle). *Legyen $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ olyan folytonos függvény, mely differenciálható az $]a,b[$ intervallumon és tegyük fel, hogy $f(a)=f(b)$. Ekkor van olyan $\xi\in]a,b[$, melyre*

$$f'(\xi)=0$$

teljesül.

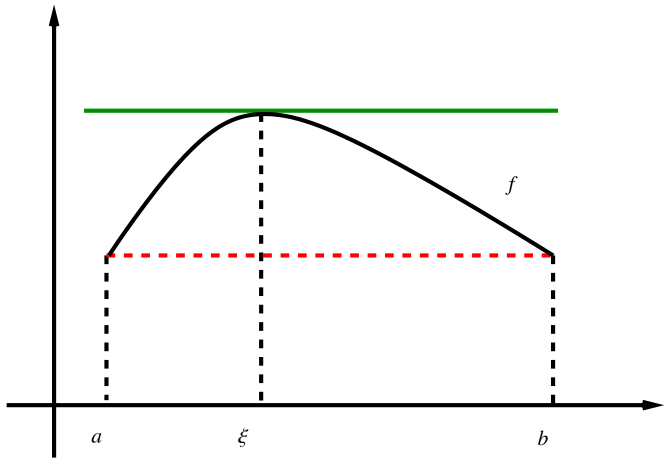
8.3.6. Tétel (Az integrálszámítás alaptétele). *Legyen $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ olyan folytonos függvény, mely differenciálható az $]a,b[$ intervallumon. Ha*

$$f'(x)=0 \qquad (x\in]a,b[)\,,$$

akkor van olyan $c\in\mathbb{R}$, hogy

$$f(x)=c$$

teljesül minden $x\in[a,b]$ esetén.



8.2. ábra. A Rolle-féle középértéktétel geometriai jelentése

8.4. Magasabb rendű deriváltak

8.4.1. Definíció. *Legyen $D \subset \mathbb{R}$ nemüres, nyílt halmaz, $f\colon D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$. Ha az f függvény differenciálható az x_0 pont egy környezetében, és az f függvény deriváltja differenciálható az x_0 pontban, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény az $x_0 \in D$ pontban* ***kétszer differenciálható****, és $(f')'(x_0)$-t az f függvény x_0 pontbeli* ***második differenciálhányados****ának nevezzük és $f''(x_0)$-lal jelöljük.*

Ha az f függvény a D halmaz minden pontjában kétszer differenciálható, akkor az

$$x \longmapsto f''(x) \qquad (x \in D)$$

függvényt az f függvény ***második deriváltj****ának hívjuk.*

8.4.2. Definíció. *Legyen $n \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R}$ nemüres, nyílt halmaz, $f\colon D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$. Ha az f függvény n-szer differenciálható az x_0 pont egy környezetében, és az f függvény n-edik deriváltja differenciálható az x_0 pontban, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény az $x_0 \in D$ pontban* ***$(n+1)$-szer differenciálható****, és $(f^{(n)})'(x_0)$-t az f függvény x_0 pontbeli* ***$(n+1)$-edik differenciálhányados****ának nevezzük és $f^{(n+1)}(x_0)$-lal jelöljük.*

Ha az f függvény a D halmaz minden pontjában $(n+1)$-szer differenciálható, akkor az

$$x \longmapsto f^{(n+1)}(x) \qquad (x \in D)$$

függvényt az f függvény ***$(n+1)$-edik deriváltj****ának hívjuk.*

8.4.3. Definíció. *Ha az $f\colon\,]a,b[\to \mathbb{R}$ függvény az $]a,b[$ intervallum valamely x_0 pontjában minden $n \in \mathbb{N}$ esetén n-szer differenciálható, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény* ***akárhányszor differenciálható az x_0 pontban****.*

8.4.4. Definíció. *Ha az $f\colon\,]a,b[\to \mathbb{R}$ függvény differenciálható az $]a,b[$ intervallumon és az*

$$x \longmapsto f'(x) \qquad (x \in]a,b[)$$

függvény folytonos, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény ***folytonosan differenciálható az $]a,b[$ intervallumon****.*

8.5. A Taylor-tétel

8.5.1. Tétel (Taylor). *Legyen $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $f\colon\,]a,b[\to \mathbb{R}$ és $x_0 \in]a,b[$. Ha az f függvény $(n+1)$-szer differenciálható, akkor minden $x \in]a,b[$, $x \neq x_0$ esetén van olyan ξ pont x és x_0 között, hogy*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

teljesül.

Az előző tételben szereplő

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

polinomot az f függvény x_0 ponthoz tartozó **n-edik Taylor-polinom**jának nevezzük.

Az előző tétel alapján felírható

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

formulát pedig **Taylor-formulá**nak mondjuk, míg az

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

tagot a Taylor-formula **maradéktagjá**nak hívjuk.

8.5.1. Példa. *Az* $\ln\colon]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ *függvény akárhányszor differenciálható a* $]0, +\infty[$ *intervallumon és tetszőleges* $n \in \mathbb{N}$ *esetén ennek a függvénynek az n-edrendű Taylor-polinomja*

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n+1} \frac{(x-1)^k}{k} \qquad (x \in]0, +\infty[)\,.$$

8.5.2. Példa. *Az*

$$f(x) = x^6 - 5x^5 + 2x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 6$$

függvény akárhányszor differenciálható $\mathbb{R}$*-en. tetszőleges* $n \in \mathbb{N}$ *esetén ennek a függvénynek az n-edrendű Taylor-polinomja. Ennek a függvénynek az* $x_0 = 2$ *pont körüli hatodrendű Taylor-polinomja*

$$P_6(x) = -74 - 172\ (x-2) - 128\ (x-2)^2 - 27\ (x-2)^3 + 12\ (x-2)^4 + 7\ (x-2)^5 + (x-2)^6\,.$$

8.6. A l'Hospital-szabály

8.6.1. Tétel. *Legyenek* $f, g\colon]a, b] \to \mathbb{R}$ *olyan folytonos függvények, melyek differenciálhatóak az* $]a, b[$ *intervallumon és tegyük fel, hogy*

$$\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a+} g(x) = 0.$$

Ha $g'(x) \neq 0$ *minden* $x \in]a, b[$ *esetén és létezik a*

$$\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(véges vagy végtelen) határérték, akkor $g(x) \neq 0$ *minden* $x \in]a, b[$ *esetén és létezik a*

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)}$$

határérték is és

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

8.6.2. Tétel. *Legyenek* $f, g\colon [a, b[\to \mathbb{R}$ *olyan folytonos függvények, melyek differenciálhatóak az* $]a, b[$ *intervallumon és tegyük fel, hogy*

$$\lim_{x\to b-} f(x) = \lim_{x\to b-} g(x) = 0.$$

Ha $g'(x) \neq 0$ *minden* $x \in]a, b[$ *esetén és létezik a*

$$\lim_{x\to b-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(véges vagy végtelen) határérték, akkor $g(x) \neq 0$ *minden* $x \in]a, b[$ *esetén és létezik a*

$$\lim_{x \to b-} \frac{f(x)}{g(x)}$$

határérték is és

$$\lim_{x \to b-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to b-} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

8.6.3. Tétel. *Legyenek* $f, g\colon [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ *olyan folytonos függvények, melyek differenciálhatóak az* $]a, +\infty[$ *intervallumon és tegyük fel, hogy*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} g(x) = 0.$$

Ha $g'(x) \neq 0$ *minden* $x \in]a, +\infty[$ *esetén és létezik a*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(véges vagy végtelen) határérték, akkor $g(x) \neq 0$ *minden* $x \in]a, +\infty[$ *esetén és létezik a*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

határérték is és

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

8.6.4. Tétel. *Legyenek* $f, g\colon]-\infty, b] \to \mathbb{R}$ *olyan folytonos függvények, melyek differenciálhatóak a* $]-\infty, b[$ *intervallumon és tegyük fel, hogy*

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} g(x) = 0.$$

Ha $g'(x) \neq 0$ *minden* $x \in]-\infty, b[$ *esetén és létezik a*

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(véges vagy végtelen) határérték, akkor $g(x) \neq 0$ *minden* $x \in]-\infty, b[$ *esetén és létezik a*

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

határérték is és

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

8.6.5. Tétel. *Legyenek* $f, g\colon]a, b] \to \mathbb{R}$ *olyan folytonos függvények, melyek differenciálhatóak az* $]a, b[$ *intervallumon és tegyük fel, hogy*

$$\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a+} g(x) = +\infty.$$

Ha $g'(x) \neq 0$ *minden* $x \in]a, b[$ *esetén és létezik a*

$$\lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(véges vagy végtelen) határérték, akkor $g(x) \neq 0$ *minden* $x \in]a, b[$ *esetén és létezik a*

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)}$$

határérték is és

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

8.6.1. Megjegyzés. *Hasonlóan fogalmazhatóak meg a további*

—
$$\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a+} g(x) = -\infty.$$

— $a = -\infty$

— $b = +\infty$

esetek is.

8.6.1. Példa.
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Ugyanis a l'Hospital-szabályt alkalmazva,

$$\lim_{x\to 0} \frac{[\sin(x)]'}{[x]'} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = \cos(0) = 1.$$

8.6.2. Példa.
$$\lim_{x\to 0+} x\ln(x) = 0.$$

Ugyanis a l'Hospital-szabályt alkalmazva,

$$\lim_{x\to 0+} x\ln(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0+} \frac{[\ln(x)]'}{\left[\frac{1}{x}\right]'} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+} -x = 0$$

8.6.3. Példa.
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0.$$

Alkalmazzuk a l'Hospital-szabályt,

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\left[x^2\right]'}{[e^x]'} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2x}{e^x}$$

Alkalmazzuk még egyszer a l'Hospital-szabályt,

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{[2x]'}{[e^x]'} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2}{e^x} = 0.$$

8.6.4. Példa.
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = 1$$

Alkalmazzuk a l'Hospital-szabályt,

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\left[\sqrt{1+x^2}\right]'}{[x]'} = \lim_{x\to +\infty} \frac{-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot 2x}{1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

A l'Hospital-szabály ***nem vezet eredményre*** *ebben az esetben. Azonban*

$$\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \sqrt{\frac{1}{x^2}+1} \xrightarrow{x\to +\infty} 1.$$

8.7. Függvényvizsgálat

8.7.1. Monotonitás

8.7.1. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az $f\colon\ ]a,b[\to \mathbb{R}$ függvény az $]a,b[$ intervallumon* ***monoton növekedő****, ha minden $x, y \in]a,b[$, $x \leq y$ esetén*

$$f(x) \leq f(y)$$

teljesül.

8.7.2. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az $f\colon\ ]a,b[\to \mathbb{R}$ függvény az $]a,b[$ intervallumon* ***monoton csökkenő****, ha minden $x, y \in]a,b[$, $x \leq y$ esetén*

$$f(x) \geq f(y)$$

teljesül.

8.7.3. Definíció. *Ha a fenti egyenlőtlenségek minden $x \neq y$ esetén szigorúak, akkor azt mondjuk, hogy a szóban fogó függvény* ***szigorúan monoton növekedő****, illetve* ***szigorúan monoton csökkenő****.*

8.7.1. Tétel. *Legyen $f\colon\ ]a,b[\to \mathbb{R}$ egy olyan függvény, amely differenciálható az $]a,b[$ intervallumon. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.*

— *az f függvény monoton növekedő az $]a,b[$ intervallumon;*

— *tetszőleges $x \in]a,b[$ esetén $f'(x) \geq 0$.*

8.7.2. Tétel. *Legyen $f\colon\ ]a,b[\to \mathbb{R}$ egy olyan függvény, amely differenciálható az $]a,b[$ intervallumon. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.*

— *az f függvény monoton csökkenő az $]a,b[$ intervallumon;*

— *tetszőleges $x \in]a,b[$ esetén $f'(x) \leq 0$.*

8.7.3. Tétel. *Legyen $f\colon\ ]a,b[\to \mathbb{R}$ egy olyan függvény, amely differenciálható az $]a,b[$ intervallumon. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.*

— *az f függvény szigorúan monoton növekedő (szigorúan monoton csökkenő) az $]a,b[$ intervallumon;*

— *tetszőleges $x \in]a,b[$ esetén $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$), és az $]a,b[$ intervallumnak nem létezik olyan $]c,d[$ részintervalluma, hogy $f'(x) = 0$ teljesül, ha $x \in]c,d[$.*

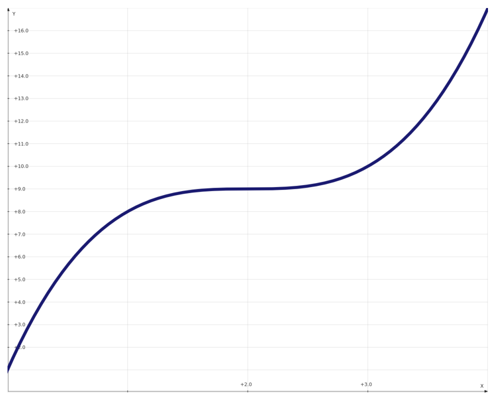
8.7.1. Példa. *Tekintsük az*

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x + 1 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

módon megadott $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt. Ekkor f differenciálható $\mathbb{R}$-en és

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 12 = 3(x-2)^2 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

Mivel tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén $f'(x) \geq 0$, ezért az f függvény szigorúan monoton növekedő $\mathbb{R}$-en.



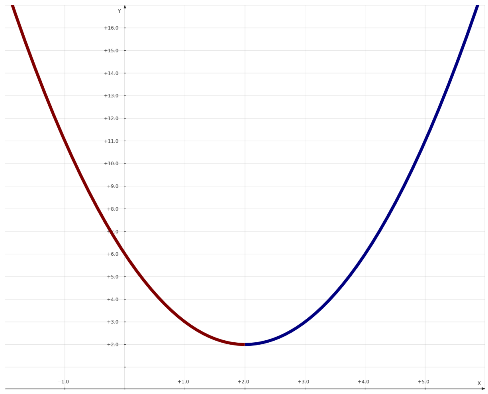
8.7.2. Példa. *Legyen*

$$f(x) = x^2 - 4x + 6 \qquad (x \in \mathbb{R})\,.$$

Ekkor f differenciálható $\mathbb{R}$-en és

$$f'(x) = 2x - 4 \qquad (x \in \mathbb{R})\,.$$

Ha $x \in [2, +\infty[$, akkor $f'(x) \geq 0$, ha pedig $x \in]-\infty, 2]$, akkor $f'(x) \leq 0$. Így, az f függvény a $[2, +\infty[$ intervallumon monoton növekedő, a $]-\infty, 2]$ intervallumon pedig monoton csökkenő.



8.7.3. Példa. *Tekintsük az*

$$f(x) = \sqrt[3]{x(1-x^2)} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

módon megadott $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt. Ekkor

$$f'(x) = -\frac{3x^2 - 1}{3\sqrt[3]{x^2(1-x^2)^2}} \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\})\,.$$

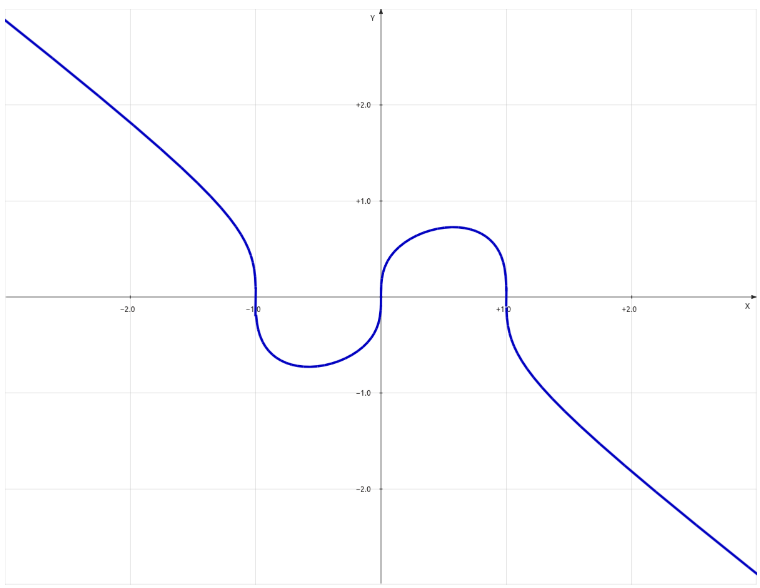
Ebben az esetben $f'(x) \geq 0$ pontosan akkor teljesül, ha

$$-\frac{3x^2 - 1}{3\sqrt[3]{x^2(1-x^2)^2}} \geq 0,$$

azaz,

$$-3x^2 + 1 \geq 0,$$

ami pontosan akkor teljesül, ha $|x| \leq \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Így, az f függvény monoton csökkenő a $]-\infty, -\sqrt{3}/3]$ intervallumon, a $]-\sqrt{3}/3, \sqrt{3}, 3[$ intervallumon monoton növekedő, míg a $[\sqrt{3}/3, +\infty[$ intervallumon monoton csökkenő.



8.7.2. Szélsőérték

8.7.4. Tétel (Szélsőértékre vonatkozó szükséges feltétel). *Legyen $D \subset \mathbb{R}$ nemüres, nyílt halmaz, $f\colon D \to \mathbb{R}$ függvény. Ha az f függvénynek az $x_0 \in D$ pontban szélsőértéke van és az f függvény differenciálható ebben a pontban, akkor $f'(x_0) = 0$.*

8.7.5. Tétel (Szélsőértékre vonatkozó elégséges feltétel). *Legyen $f\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ differenciálható függvény, $x_0 \in]a,b[$. Ha van olyan $\varepsilon > 0$, hogy $]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[\subset]a,b[$, és*

— *ha $x \in]x_0-\varepsilon, x_0[$ esetén $f'(x) \geq 0$, ha pedig $x \in]x_0, x_0+\varepsilon[$, akkor $f'(x) \leq 0$ teljesül, akkor az x_0 pont az f függvénynek lokális maximumhelye;*

— *ha $x \in]x_0-\varepsilon, x_0[$ esetén $f'(x) \leq 0$, ha pedig $x \in]x_0, x_0+\varepsilon[$, akkor $f'(x) \geq 0$ teljesül, akkor az x_0 pont az f függvénynek lokális minimumhelye.*

8.7.6. Tétel (Szélsőértékre vonatkozó elégséges feltétel). *Legyen $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $f\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ egy olyan függvény, mely az $x_0 \in]a,b[$ pontban n-szer differenciálható. Tegyük fel, hogy*

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad \text{és} \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Ekkor, ha

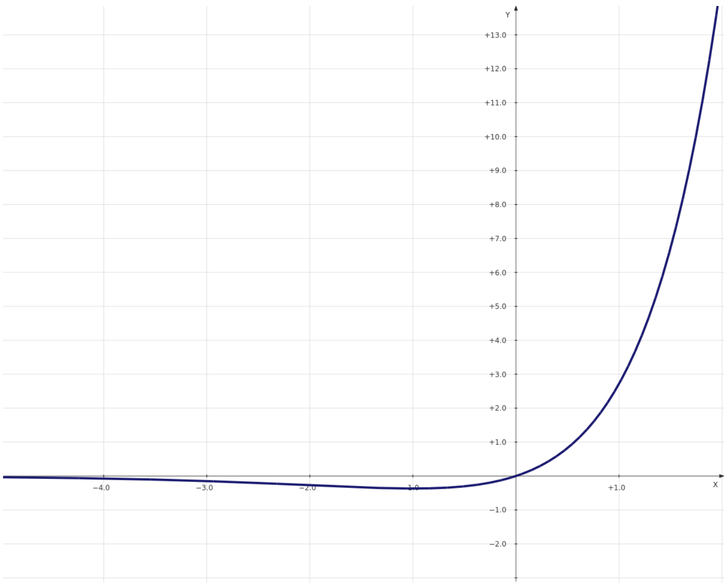
— *n páratlan, akkor az x_0 pont nem lokális szélsőértékhelye az f függvénynek*

— *n páros és*

- *$f^{(n)}(x_0) > 0$, akkor az x_0 pont az f függvénynek lokális minimumhelye;*
- *$f^{(n)}(x_0) < 0$, akkor az x_0 pont az f függvénynek lokális maximumhelye.*

8.7.4. Példa. *Legyen*

$$f(x) = xe^x \qquad (x \in \mathbb{R}).$$



Ekkor

$$f'(x) = (x+1)e^x \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Mivel $f'(x) = 0$ pontosan akkor teljesül, ha $x = -1$, ezért ha az f függvénynek van szélsőértékhelye, akkor az csak az $x = -1$ pont lehet. Mivel

$$f''(x) = (x+2)e^x \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

így $f''(-1) = \dfrac{1}{e} > 0$, vagyis az $x = -1$ pont az f függvénynek lokális minimumhelye.

8.7.5. Példa. *Tekintsük az*

$$f(x) = e^x \sin(x) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

módon megadott $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *függvényt. Ekkor*

$$f'(x) = e^x(\sin(x) + \cos(x)).$$

Így $f'(x) = 0$ *pontosan akkor teljesül, ha*

$$e^x(\sin(x) + \cos(x)) = 0,$$

azaz, ha

$$\sin(x) + \cos(x) = 0.$$

Ez azt jelenti, hogy

$$x_n = -\frac{\pi}{4} + k\pi \qquad (k \in \mathbb{N})\,.$$

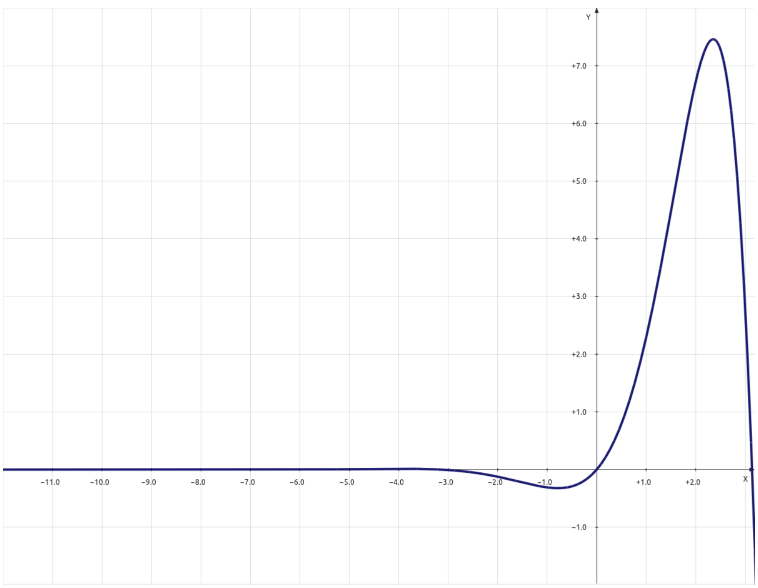
Ezért, ha az f függvénynek van szélsőértékhelye, akkor az csak $-\frac{\pi}{4} + k\pi$ *alakú pontokban lehetséges. Mivel*

$$f''(x) = 2e^x \cos(x),$$

így

$$f''\left(-\frac{\pi}{4} + k\pi\right) = \begin{cases} e^{x_n}\dfrac{\sqrt{2}}{2}, & \text{ha } k \text{ páros} \\ -e^{x_n}\dfrac{\sqrt{2}}{2}, & \text{ha } k \text{ páratlan,} \end{cases}$$

ezért az $-\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ *alakú pontok* f*-nek lokális minimumhelyei, míg a* $-\frac{\pi}{4} + (2k+1)\pi$ *alakú pontok* f*-nek lokális maximumhelyei.*



8.7.3. Konvexitás

8.7.4. Definíció. *Legyen* $I \subset \mathbb{R}$ *nemüres intervallum. Azt mondjuk, hogy az* $f\colon I \to \mathbb{R}$ *függvény* ***konvex****, ha minden* $x, y \in I$ *és minden* $\lambda \in [0, 1]$ *esetén*

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

teljesül.

8.7.5. Definíció. *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nemüres intervallum. Azt mondjuk, hogy az $f: I \to \mathbb{R}$ függvény* ***konkáv****, ha minden $x, y \in I$ és minden $\lambda \in [0,1]$ esetén*

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

teljesül.

8.7.1. Állítás. *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nemüres intervallum, $f: I \to \mathbb{R}$ függvény. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.*

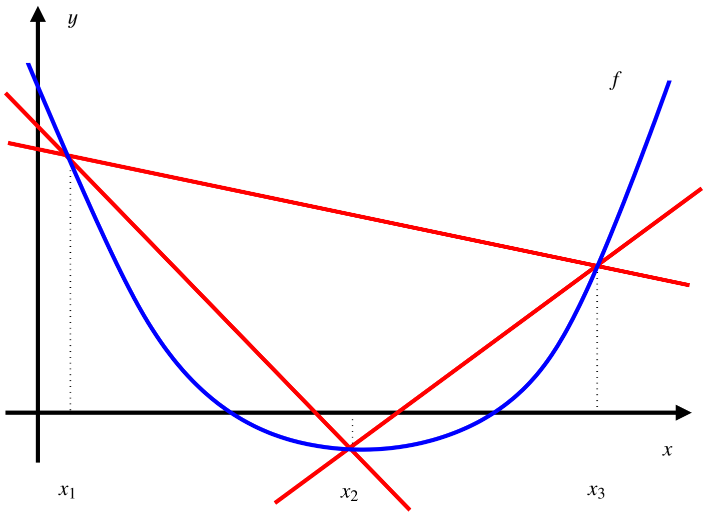
— *az f függvény konvex;*

— *a $-f$ függvény konkáv.*

8.7.7. Tétel. *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nemüres intervallum, $f: I \to \mathbb{R}$ függvény. Ekkor az f függvény pontosan akkor konvex, ha tetszőleges $x_1, x_2, x_3 \in I$, $x_1 < x_2 < x_3$ esetén*

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

teljesül.



8.7.8. Tétel. *Legyen $]a, b[\to \mathbb{R}$ konvex függvény. Ekkor*

— *f folytonos az $]a, b[$ intervallumon;*

— *az f függvénynek minden pontban létezik a bal- és a jobboldali deriváltja.*

8.7.9. Tétel. *Legyen $f:]a, b[\to \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Ekkor*

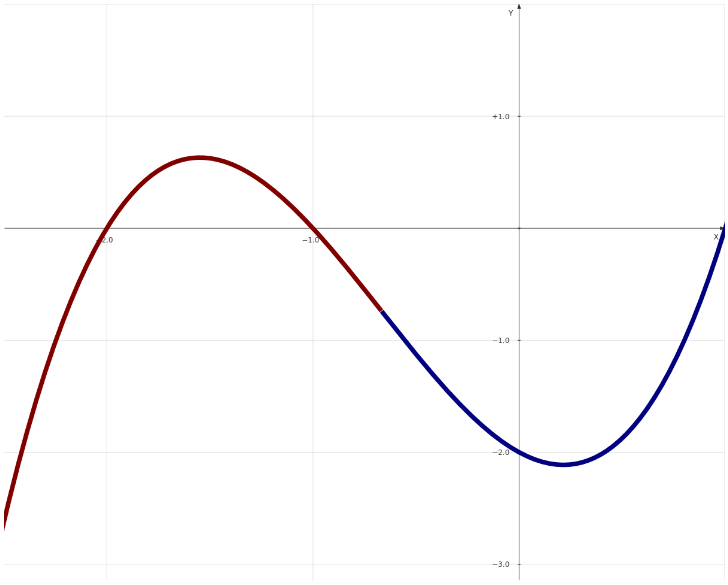
— *f pontosan akkor konvex, ha f' monoton növekedő az $]a, b[$ intervallumon;*

— *f pontosan akkor konkáv, ha f' monoton csökkenő az $]a, b[$ intervallumon.*

8.7.10. Tétel. *Legyen $f:]a, b[\to \mathbb{R}$ egy kétszer differenciálható függvény. Ekkor*

— *f pontosan akkor konvex, ha $f''(x) \geq 0$ teljesül minden $x \in]a, b[$ esetén;*

— *f pontosan akkor konkáv, ha $f''(x) \leq 0$ teljesül minden $x \in]a, b[$ esetén.*



8.7.4. Inflexió

8.7.6. Definíció. *Legyen $D \subset \mathbb{R}$ nemüres, nyílt halmaz, $x_0 \in D$, $f: D \to \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy az x_0 pont az f függvénynek* ***inflexiós pont****ja, ha van olyan $\varepsilon > 0$, hogy az f függvény az $]x_0 - \varepsilon, x_0[$ intervallumon konvex, az $]x_0, x_0 + \varepsilon[$ intervallumon konkáv, vagy megfordítva.*

8.7.11. Tétel (Inflexiós helyre vonatkozó szükséges feltétel). *Legyen $D \subset \mathbb{R}$ nemüres, nyílt halmaz, $x_0 \in D$, $f: D \to \mathbb{R}$ olyan függvény, mely differenciálható az x_0 pontban. Ha az x_0 pont inflexiós pontja az f függvénynek, akkor az x_0 pont lokális szélsőértékhelye az f' függvénynek.*

8.7.12. Tétel (Inflexiós helyre vonatkozó elégséges feltétel). *Legyen $D \subset \mathbb{R}$ nemüres, nyílt halmaz, $x_0 \in D$, $f: D \to \mathbb{R}$ háromszor differenciálható függvény. Ha*

$$f''(x_0) = 0$$

és

$$f'''(x_0) \neq 0,$$

továbbá, f''' folytonos az x_0 pontban, akkor x_0 inflexiós pontja az f függvénynek.

8.7.6. Példa. *Tekintsük az*

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

módon megadott $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt.

Ekkor

$$f'(x) = 3x^2 + 4x - 1 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

és

$$f''(x) = 6x + 4 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Ezért

$$f''(x) \geq 0 \iff x \in [-2/3\,, +\infty[\quad \textit{és} \quad f''(x) \leq 0 \iff x \in]-\infty, -2/3]$$

Így, f konvex a $[-2/3, +\infty[$ intervallumon és konkáv a $]-\infty, -2/3]$ intervallumon.

Továbbá,

$$f''\left(-\frac{2}{3}\right) = 6\left(-\frac{2}{3}\right) + 4 = 0$$

és

$$f'''(x) = 6 \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ezért

$$f'''\left(-\frac{2}{3}\right) = 6 \neq 0,$$

vagyis az $x_0 = -\dfrac{2}{3}$ *pont az* f *függvénynek inflexiós pontja.*

8.7.7. Példa. *Legyen*

$$f(x) = \ln(1 + x^2) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Ekkor

$$f''(x) = -\frac{2x^2 - 2}{(x^2 + 1)^2} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Ebben az esetben $f''(x) \geq 0$ *pontosan akkor teljesül, ha*

$$-\frac{2x^2 - 2}{(x^2 + 1)^2} \geq 0,$$

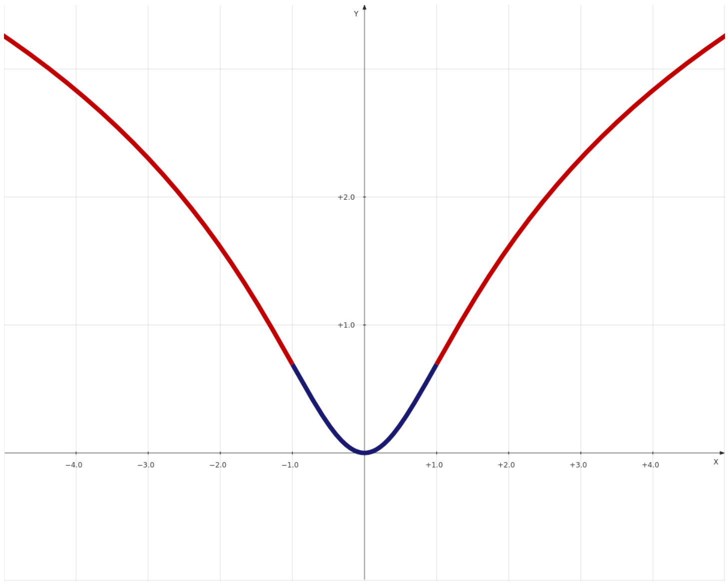
azaz, ha

$$-2x^2 + 2 \geq 0,$$

ami pontosan akkor áll fenn, ha $|x| \leq 1$. *Továbbá,*

$$f''(\pm 1) = 0 \quad \text{és} \quad f'''(1) = -1 \neq 0 \quad f'''(-1) = -\frac{8}{125} \neq 0,$$

ezért az $x = -1$ *és* $x = 1$ *pontok az* f *függvénynek inflexiós pontjai, valamint az* f *függvény konkáv a* $]-\infty, -1]$ *intervallumon, a* $]-1, 1[$ *intervallumon konvex, az* $[1, +\infty[$ *intervallumon pedig konkáv.*



Egy f függvény **teljes függvényvizsgálat**ánál az alábbiakat határozzuk meg

— f értelmezési tartományát ($\mathscr{D}_f$);

— f értékkészletét ($\mathscr{R}_f$);

— f páros, páratlan, periodikus függvény-e;

— f zérushelyeit;

— $\mathscr{D}_f$ azon részhalmazait, ahol f előjele állandó;

— f határértékeit $\mathscr{D}_f$ határpontjaiban;

— $\mathscr{D}_f$ azon részhalmazait, ahol f monoton növekedő/csökkenő;

— f szakadási helyeit;

— f differenciálhányados függvényeit;

— f szélsőértékhelyeit és szélsőértékeit;

— $\mathscr{D}_f$ azon részhalmazait, ahol f konvex/konkáv;

— f aszimptotáit.

8.7.8. Példa. *Tekintsük az*

$$f(x) = x + \frac{1}{x}$$

*függvényt. Ekkor f **értelmezési tartománya**: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.*

*A **zérushelyek** meghatározásához meg kell oldani az $f(x) = 0$ egyenletet.*

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 0.$$

Mivel az $f(x) = 0$ egyenletnek $\mathscr{D}_f$-en nincsen gyöke, így az f függvénynek nincsen zérushelye.

*Az f függvény **differenciálhányados függvényei***

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \frac{1}{x^2} \\ f''(x) &= \frac{2}{x^3} \\ f^{(n)}(x) &= (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}} \qquad (n \in \mathbb{N}, n \geq 3)\,. \end{aligned}$$

*Az f függvénynek csak olyan pontokban lehet **szélsőérték**e, ahol a deriváltja eltűnik. Azonban,*

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Így, ha az f függvénynek van szélsőértékhelye, akkor az csak a ± 1 pontok valamelyikében lehet. Mivel

$$f''(1) = 2 \quad \text{és} \quad f''(-1) = -2,$$

ezért az $x = -1$ pont az f függvénynek lokális maximumhelye, míg az $x = 1$ pont az f függvénynek lokális minimumhelye. A megfelelő szélsőértékek pedig

$$f(1) = 2 \quad \text{és} \quad f(-1) = -2.$$

*A **monotonitás**hoz az $f'(x) \geq 0$ egyenlőtlenséget kell megoldanunk.*

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x^2} \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[,$$

ezért az f függvény monoton növekedő a $]-\infty, -1[$ és az $]1, +\infty[$ intervallumokon, míg a $[-1, 0[$ és a $]0, 1]$ intervallumokon monoton csökkenő.

Tetszőleges $x \in \mathscr{D}_f$ esetén

$$f(x) = x + \frac{1}{x} = -\left(-x + \frac{1}{-x}\right) = -f(-x)$$

*teljesül, ami azt mutatja, hogy az f függvény **páratlan**. Továbbá, az f függvény **nem páros** és nem is **periodikus**.*

*A **konvexitás** vizsgálatához meg kell oldanunk az $f''(x) \geq 0$ egyenlőtlenségek.*

$$f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2}{x^3} \geq 0 \Leftrightarrow x > 0.$$

Ezért az f függvény a $]-\infty, 0[$ intervallumon konkáv, míg a $]0, +\infty[$ intervallumon konvex.

Az f függvénynek az értelmezési tartománya határpontjaiban vett határértékei pedig

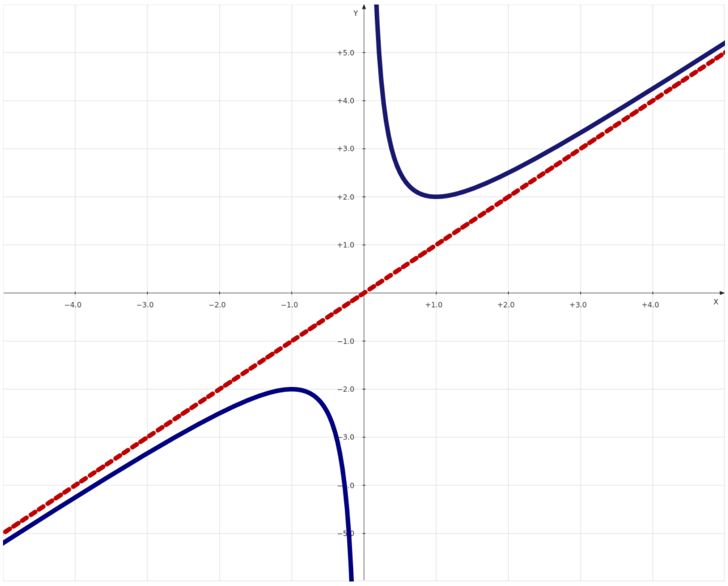
$$\lim_{x \to 0+} x + \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{és} \quad \lim_{x \to 0-} x + \frac{1}{x} = -\infty,$$

illetve,

$$\lim_{x\to+\infty} x + \frac{1}{x} = +\infty \quad \textit{és} \quad \lim_{x\to-\infty} x + \frac{1}{x} = -\infty.$$

Ezeket a határértéktulajdonságokat a szélsőértéknél kapottakkal egybevetve, a Bolzano-féle középértéktétel miatt az f függvény minden -2-nél kisebb vagy egyenlő és minden 2-nél nagyobb vagy egyenlő valós számot felvesz értékül, azaz,

$$\mathscr{R}_f = \mathbb{R}\backslash\,]-2, 2[.$$



9. fejezet

Határozatlan integrál

9.1. Alapfogalmak

9.1.1. Definíció. *Legyen* $]a, b[\subset \mathbb{R}$ *nemüres, nyílt intervallum,* $f\ :]a, b[\to \mathbb{R}$ *függvény. Az* $F\ :]a, b[\to \mathbb{R}$ *függvényt az* f *függvény* ***primitív függvény****ének vagy* ***határozatlan integrál****jának nevezzük, ha az* F *függvény differenciálható az* $]a, b[$ *intervallumon és*

$$F'(x) = f(x)$$

teljesül minden $x \in]a, b[$ *esetén. Az* F *függvényre a továbbiakban az* $\int f$ *vagy az* $\int f(x)dx$ *jelölést használjuk.*

9.1.1. Tétel. *Ha* $f, F\ :]a, b[\to \mathbb{R}$ *és* $F' = f$*, akkor* $G\ :]a, b[\to \mathbb{R}$ ***pontosan akkor*** *primitív függvénye* f*-nek, ha létezik olyan* $C \in \mathbb{R}$*, hogy*

$$F(x) = G(x) + C \qquad (x \in]a, b[)$$

9.2. Alapintegrálok

1.
$$\int e^x\,dx = e^x$$

2.
$$\int a^x\,dx = \frac{1}{\ln a}a^x$$

3.
$$\int \ln(x)\,dx = x\ln(x) - x$$

4.
$$\int \log_a(x)\,dx = \frac{1}{\ln a}(x\ln(x) - x)$$

5.
$$\int x^\alpha\,dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} & \text{ha } \alpha \neq -1, \\ \ln|x| & \text{ha } \alpha = -1\,, \end{cases}$$

6.
$$\int \cos(x)\,dx = \sin(x)$$

7.
$$\int \sin(x)\,dx = -\cos(x)$$

8.
$$\int \mathrm{tg}(x)\,dx = -\ln|\cos(x)|$$

9.
$$\int \mathrm{ctg}(x)\,dx = \ln|\sin(x)|$$

10.
$$\int \arccos(x)\,dx = x\arccos(x) - \sqrt{1-x^2}$$

11.
$$\int \arcsin(x)\,dx = x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}$$

12.
$$\int \mathrm{arctg}(x)\,dx = x\,\mathrm{arctg}(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$$

13.
$$\int \mathrm{arcctg}(x)\,dx = x\,\mathrm{arcctg}(x) + \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$$

14.
$$\int \cosh(x)\,dx = \sinh(x)$$

15.
$$\int \sinh(x)\,dx = \cosh(x)$$

16.
$$\int \tanh(x)\,dx = \ln|\cosh(x)|$$

17.
$$\int \coth(x)\,dx = \ln|\sinh(x)|$$

18.
$$\int \operatorname{arcosh}(x)\,dx = x\operatorname{arcosh}(x) - \sqrt{x^2+1}$$

19.
$$\int \operatorname{arsinh}(x)\,dx = x\operatorname{arsinh}(x) - \sqrt{x^2+1}$$

20.
$$\int \operatorname{artanh}(x)\,dx = x\operatorname{artanh}(\mathrm{x}) + \frac{1}{2}\ln|1-x^2|$$

21.
$$\int \operatorname{arcoth}(x)\,dx = x\operatorname{arcoth}(x) + \frac{1}{2}\ln|x^2-1|$$

22.
$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}(x)$$

23.
$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg}(x)$$

24.
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin(x)$$

25.
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\arccos(x)$$

26.
$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg}(x)$$

27.
$$\int \frac{dx}{1+x^2} = -\operatorname{arcctg}(x)$$

28.
$$\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh(x)$$

29.
$$\int \frac{dx}{\sinh^2 x} = -\coth(x)$$

30.
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{arsinh}(x)$$

31.
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arcosh}(x)$$

32.
$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{artanh}(x)$$

33.
$$\int \frac{dx}{x^2-1} = -\operatorname{arcoth}(x)$$

9.3. Integrálási szabályok

9.3.1. Tétel (A határozatlan integrál linearitása). *Legyenek $f, g\ :]a,b[\to \mathbb{R}$ olyan függvények, melyekre létezik $\int f$ és $\int g$, legyenek továbbá $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstansok. Ekkor létezik $\int \alpha\cdot f + \beta\cdot g$ is, és létezik olyan $C \in \mathbb{R}$, hogy*
$$\int \alpha\cdot f(x) + \beta\cdot g(x)dx = \alpha\int f(x)dx + \beta\int g(x)dx + C.$$

9.3.1. Példa.
$$\begin{aligned}\int 3x + 4x^2 + 5x^3 + 2\sinh(x)dx \\ &= 3\int xdx + 4\int x^2dx + 5\int x^3dx + 2\int \sinh(x)dx \\ &= 3\frac{x^2}{2} + 4\frac{x^3}{3} + 5\frac{x^4}{4} + 2\cosh(x) + C\end{aligned}$$

9.3.2. Tétel (A parciális integrálás tétele). *Ha az $f, g\ :]a,b[\to \mathbb{R}$ függvények differenciálhatóak $]a,b[$-n, és létezik $\int f'\cdot g$, akkor létezik $\int f\cdot g'$ is, és létezik olyan $C \in \mathbb{R}$ konstans, hogy*
$$\int f(x)\cdot g'(x)dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)dx + C. \quad (x \in]a,b[)$$

9.3.2. Példa.

$$\int xe^x dx = ?$$

Legyen

$$f(x) = x \quad \textit{és} \quad g'(x) = e^x.$$

Ekkor

$$f'(x) = 1 \quad \textit{és} \quad g(x) = e^x.$$

Így, a parciális integrálás tétele miatt

$$\int xe^x dx = xe^x - \int 1 \cdot e^x dx = xe^x - e^x + C.$$

9.3.3. Példa.

$$\int \ln(x) dx = ?$$

Legyen

$$f(x) = \ln(x) \quad \textit{és} \quad g'(x) = 1.$$

Ekkor

$$f'(x) = \frac{1}{x} \quad \textit{és} \quad g(x) = x.$$

Így, a parciális integrálás tétele miatt

$$\int 1 \cdot \ln(x) dx = x \ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln(x) - \int 1 dx = x \ln(x) - x + C.$$

9.3.4. Példa.

$$\int x^2 \sinh(x) dx = ?$$

Alkamazzuk a parciális integrálás tételét az

$$f(x) = x^2 \quad \textit{és} \quad g'(x) = \sinh(x).$$

választással. Ekkor

$$f'(x) = 2x \quad \textit{és} \quad g(x) = \cosh(x),$$

így

$$\begin{aligned}\int x^2 \sinh(x) dx &= x^2 \cosh(x) - \int 2x \cdot \cosh(x) dx \\ &= x^2 \cosh(x) - \left[2x \sinh(x) - \int 2 \cdot \sinh(x) dx \right] \\ &= x^2 \cosh(x) - 2x \sinh(x) + 2\cosh(x) + C.\end{aligned}$$

9.3.3. Tétel (A helyettesítéses integrálás tétele). *Ha $f :]a, b[\to \mathbb{R}$, $g :]c, d[\to]a, b[$ olyan függvények, melyek esetén létezik $g' :]c, d[\to \mathbb{R}$ és létezik $\int f$ is, akkor létezik $\int (f \circ g) \cdot g'$ is, és van olyan $C \in \mathbb{R}$, hogy*

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \left(\left(\int f \right) \circ g \right)(x) + C = \int f(t) dt \Big|_{t=g(x)} + C. \quad (x \in]c, d[)$$

9.3.5. Példa.

$$\int \sinh(2 - 7x) dx = ?$$

Legyen $t = 2 - 7x$, *azaz,* $x = \dfrac{-t-2}{7}$,

$$g(t) = \frac{-t-2}{7} \quad \textit{és} \quad g'(t) = -\frac{1}{7}.$$

Ekkor

$$\int \sinh(2-7x)dx = \left.\int \underbrace{\sinh(t)}_{=f(g(t))} \cdot \underbrace{\left(-\frac{1}{7}\right)}_{=g'(t)} dt\right|_{t=2-7x}$$
$$= -\frac{1}{7}\int \sinh(t)dt\Big|_{t=2-7x} = \frac{-\cosh(t)}{7} + C\Big|_{t-2-7x} = \frac{-\cosh(2-7x)}{7} + C$$

9.3.4. Tétel. *Legyen* $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ *differenciálható* $]a,b[$*-n,* $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$*, ekkor* $f^{\alpha} \cdot f'$ *függvénynek létezik a primitív függvénye* $]a,b[$*-n és*

$$\int f^{\alpha}(x) \cdot f'(x)dx = \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + C,$$

teljesül valamely $C \in \mathbb{R}$ *konstanssal.*

9.3.6. Példa.

$$\int (\mathrm{tg}(x) + \mathrm{ctg}(x))^3 \left(\frac{1}{\cos^2(x)} - \frac{1}{\sin^2(x)}\right) dx = ?$$

A fenti tétel jelöléseivel,

$$f(x) = \mathrm{tg}(x) + \mathrm{ctg}(x),\ f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} - \frac{1}{\sin^2(x)},\ \alpha = 3,$$

így,

$$\int (\mathrm{tg}(x) + \mathrm{ctg}(x))^3 \left(\frac{1}{\cos^2(x)} - \frac{1}{\sin^2(x)}\right) dx = \frac{(\mathrm{tg}(x) + \mathrm{ctg}(x))^4}{4} + C.$$

9.3.5. Tétel. *Ha* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *folytonos* $[a,b]$*-n,* $f(x) \neq 0$ $(x \in [a,b])$*,* f *differenciálható* $]a,b[$*-n, akkor az* $\dfrac{f'}{f}$ *függvénynek létezik a primitív függvénye, és létezik olyan* $C \in \mathbb{R}$*, hogy*

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln(|f(x)|) + C.$$

9.3.7. Példa.

$$\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3} dx = ?$$

A fenti tétel jelöléseivel

$$f(x) = e^{2x} + 3 \quad \textit{és} \quad f'(x) = 2e^{2x},$$

így

$$\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3} dx = \frac{1}{2}\int \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+3} dx = \frac{1}{2}\ln\left(\left|e^{2x}+3\right|\right) + C.$$

9.3.6. Tétel. *Legyen* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *függvény,* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*,* $\alpha \neq 0$ *tetszőlegesek. Ha létezik* $\int f$*, akkor létezik* $\int f(\alpha x + \beta)\, dx$ *is, és létezik olyan* $C \in \mathbb{R}$ *konstans, hogy*

$$\int f(\alpha x + \beta)\, dx = \frac{F(\alpha x + \beta)}{\alpha} + C, \quad (x \in \mathbb{R})$$

ahol F *jelöli az* f *függvény primitív függvényét.*

9.4. Integrálási módszerek

9.4.1. Racionális törtfüggvények integrálása

Egyszerűbb speciális típusok

9.4.1. Állítás. *Legyenek $A, a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ tetszőlegesek, ekkor*

$$\int \frac{A}{ax+b}dx = \frac{A}{a}\ln(|ax+b|) + C.$$

9.4.2. Állítás. *Legyenek $A, a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ és $n \in \mathbb{N}, n \neq 1$ tetszőlegesek, ekkor*

$$\int \frac{A}{(ax+b)^n}dx = \frac{A}{a(1-n)}\frac{1}{(ax+b)^{n-1}} + C.$$

9.4.3. Állítás. *Legyenek $A, a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ és $n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$ tetszőlegesek, ekkor*

$$\int \frac{Ax}{(ax+b)^n}dx = \frac{A}{a^2}\frac{(ax+b)^{2-n}}{2-n} - \frac{Ab}{a^2}\frac{(ax+b)^{1-n}}{1-n} + C.$$

9.4.4. Állítás. *Legyenek $A, a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ tetszőlegesek és $D = b^2 - 4ac$. Ekkor, ha*

— *$D < 0$, akkor*

$$\int \frac{A}{ax^2+bx+c}dx = \frac{A}{ab}\text{arctg}\left(\frac{x+\frac{b}{2a}}{b}\right) + C;$$

— *$D = 0$, akkor*

$$\int \frac{A}{ax^2+bx+c}dx = -\frac{A}{a}\frac{1}{x+\frac{b}{a}} + C;$$

— *$D > 0$, akkor*

$$\int \frac{A}{ax^2+bx+c}dx = \frac{\sqrt{D^3}}{8a^2}\text{artanh}\left(\frac{2a\left(x+\frac{b}{2a}\right)}{\sqrt{D}}\right) + C.$$

9.4.5. Állítás. *Legyen $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tetszőleges, és*

$$I_n(x) = \int \frac{1}{(x^2+a^2)^n} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor,

$$I_1 = \frac{1}{a}\text{arctg}\left(\frac{x}{a}\right)$$

és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$I_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2n}I_n$$

teljesül.

A parciális törtekre bontás módszere

9.4.1. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az f valós függvény **racionális törtfüggvény**, ha léteznek olyan P és Q valós polinomok, hogy*

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \qquad (x \in \mathbb{R}, Q(x) \neq 0)$$

teljesül.

9.4.1. Megjegyzés. *A továbbiakban az általánosság csorbítása nélkül feltehető, hogy f úgynevezett* ***valódi racionális törtfüggvény****, azaz, ha*

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

akkor $\deg(P) < \deg(Q)$ *teljesül. Ellenkező esetben ugyanis (az osztás elvégzése után) f felírható egy polinom és egy valódi racionális törtfüggvény összegeként. Feltehető továbbá az is, hogy a nevezőben szereplő Q polinom egy főegyütthatójú.*

9.4.1. Tétel. *Legyen f egy racionális törtfüggvény. Ekkor az f függvénynek létezik F primitív függvény, továbbá ez az F függvény elemi függvény.*

A továbbiakban a Q polinom gyökeitől függően három különböző esetet kell megkölönböztetnünk.
I. eset Ha a Q polinomnak csak **egyszeres** multiplicitású, **valós** gyökei vannak, azaz

$$Q(x) = (x - x_1) \cdots (x - x_n),$$

akkor

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x - x_1) \cdots (x - x_n)} = \frac{A_1}{(x - x_1)} + \cdots + \frac{A_n}{x - x_n},$$

ahol az $A_1, \ldots, A_n$ együtthatók egyértelműen meg vannak határozva. Ezeket a konkrét feladatokban az együtthatók egyeztetésével lehet meghatározni.

9.4.1. Példa. *Tekintsük az*

$$\int \frac{1}{(x-2)(x+4)} dx$$

határozatlan integrált. Az előzőek szerint, keresendőek azok A és B valós számok, melyekre

$$\frac{1}{(x-2)(x+4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+4}$$

teljesül. Közös nevezőre hozva,

$$\frac{1}{(x-2)(x+4)} = \frac{A(x+4) + B(x-2)}{(x-2)(x+4)},$$

azaz,

$$1 = A(x+4) + B(x-2)$$

kell, hogy teljesüljön, minden $x \in \mathbb{R} \setminus \{2, -4\}$ esetén. Ez csak úgy lehetséges, ha A és B megoldása az alábbi egyenletrendszernek,

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ 4A - 2B = 0 \end{cases}$$

Ennek az egyenlet megoldása $A = \dfrac{1}{6}$ és $B = -\dfrac{1}{6}$, ezért

$$\frac{1}{(x-2)(x+4)} = \frac{1}{6}\frac{1}{x-2} - \frac{1}{2}\frac{1}{x+4}.$$

Mindebből,

$$\int \frac{1}{(x-2)(x+4)} dx = \int \frac{1}{6}\frac{1}{x-2} - \frac{1}{6}\frac{1}{x+4} dx = \frac{1}{6}\ln(|x-2|) - \frac{1}{6}\ln(|x+4|) + C$$

adódik.

II. eset Ha a Q polinomnak csak **valós** gyökei vannak, de a gyökök között vannak **többszörös multiplicitás**úak is, azaz, a Q polinom

$$Q(x) = (x - x_1)^{\alpha_1}(x - x_2)^{\alpha_2} \cdots (x - x_k)^{\alpha_k},$$

alakú, ahol $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = n$. Ebben az esetben

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{P(x)}{(x-x_1)^{\alpha_1}(x-x_2)^{\alpha_2}\cdots(x-x_k)^{\alpha_k}} \\ &= \frac{A_{11}}{(x-x_1)} + \frac{A_{12}}{(x-x_1)^2} + \cdots + \frac{A_{1\alpha_1}}{(x-x_1)^{\alpha_1}} \\ &+ \frac{A_{21}}{(x-x_2)} + \frac{A_{22}}{(x-x_2)^2} + \cdots + \frac{A_{2\alpha_2}}{(x-x_2)^{\alpha_2}} \\ &+ \cdots + \frac{A_{k1}}{(x-x_k)} + \frac{A_{k2}}{(x-x_k)^2} + \cdots + \frac{A_{k\alpha_k}}{(x-x_k)^{\alpha_k}}. \end{aligned}$$

Az előállításban szerepl $A_{i\alpha_i}$, $i = 1, \ldots, k$ valós számokat ebben az esetben is az együtthatók egyeztetésével tudjuk meghatározni.

9.4.2. Példa. *Tekintsük az*

$$\int \frac{3x^2 + 4x - 6}{(x+2)^3} dx$$

határozatlan integrált. A fentiek szerint

$$\frac{3x^2 + 4x - 6}{(x+2)^3} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{C}{(x+2)^2},$$

az együtthatók egyeztetése után az A, B és C számokra az alábbi egyenletrendszert kapjuk,

$$\begin{cases} A &= 3 \\ 4A + B &= 4 \\ 4A + 2B + C &= -6 \end{cases}$$

Vagyis, $A = 3$, $B = -8$ és $C = -2$. Midezekből,

$$\int \frac{3x^2 + 4x - 6}{(x+2)^3} dx = \int \frac{3}{x+2} - \frac{8}{(x+2)^2} - \frac{2}{(x+2)^3} dx = 3\ln(|x+2|) + \frac{8}{x+2} + \frac{1}{x+2} + C.$$

III. eset Ha a Q polinomnak van **komplex gyök**e is. Ekkor, ha például $z \in \mathbb{C}$ gyke a Q polinomnak, akkor $\overline{z}$ is gyöke Q-nak, vagyis a komplex gyökök a konjugáltjaikkal együtt lépnek fel. Ezen az eseten belül még további két esetet kell megkülönböztetnünk.

III. a) eset Ha a Q polinomnak **többszörös valós** és **egyszeres komplex** gyöktényezői vannak, azaz,

$$Q(x) = (x - x_1)^{\alpha_1}(x - x_2)^{\alpha_2} \cdots (x - x_k)^{\alpha_k}(x^2 + b_1 x + c_1) \cdots (x^2 + b_s x + c_s),$$

akkor

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{\alpha_1} \frac{A_{1\alpha_1}}{(x-x_1)^i} + \cdots + \sum_{j=1}^{\alpha_r} \frac{A_{rj}}{(x-x_r)^j} + \sum_{k=1}^{s} \frac{B_k x + C_k}{x^2 + b_k x + c_k}.$$

III. b) eset Ha a Q polinomnak **többszörös valós** és **többszörös komplex** gyöktényezői vannak, azaz,

$$Q(x) = (x - x_1)^{\alpha_1}(x - x_2)^{\alpha_2} \cdots (x - x_k)^{\alpha_k}(x^2 + b_1 x + c_1)^{\beta_1} \cdots (x^2 + b_s x + c_s)^{\beta_s},$$

akkor

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{\alpha_1} \frac{A_{1\alpha_1}}{(x-x_1)^i} + \cdots + \sum_{j=1}^{\alpha_r} \frac{A_{rj}}{(x-x_r)^j} + \sum_{k=1}^{\beta_1} \frac{B_{1k} x + C_{1k}}{(x^2 + b_1 x + c_1)^k} + \cdots + \sum_{l=1}^{\beta_s} \frac{B_{sl} x + C_{sl}}{(x^2 + b_s x + c_s)^l}$$

9.4.2. Trigonometrikus függvények racionális kifejezéseinek integrálása

Egyszerűbb speciális típusok

Az $\int \sin^{2n+1}(x)\cos^k(x)dx$ alakú integrálok
Mivel

$$\sin^{2n+1}(x) = \sin(x)\sin^{2n}(x) = \sin(x)\left(1-\cos^2(x)\right)^n,$$

ezért az integrandus alakja

$$\int \sin^{2n+1}(x)\cos^k(x)dx = \int \sin(x)\left(1-\cos^2(x)\right)^n \cos^k(x).$$

ami szorzások és az n-edik hatványra emelés után olyan összegre vezet, melynek (legfeljebb egy kivétellel) mindegyik tagja $f^n(x)f'(x)$ alakú.

9.4.3. Példa.

$$\int \sin^3(x)dx = \int \sin(x)\sin^2(x)dx = \int \sin(x)(1-\cos^2(x))dx$$
$$= \int \sin(x) - \sin(x)\cos^2(x)dx = -\cos(x) + \frac{\cos^3(x)}{x} + C$$

Az $\int \cos^{2n+1}(x)\sin^k(x)dx$ alakú integrálok
Hasonlóan az elősző esethez,

$$\cos^{2n+1}(x)\sin^k(x) = \cos(x)\cos^{2n}(x)\sin^k(x) = \cos(x)(1-\sin^2(x))^n\sin^k(x),$$

ami szorzások és az n-edik hatványra emelés után olyan összegre vezet, melynek (legfeljebb egy kivétellel) mindegyik tagja $f^n(x)f'(x)$ alakú.
Az $\int \cos^{2n+1}(x)\sin^{2k+1}(x)dx$ alakú integrálok
Ha az integrandus mind a sinus, mind a cosinus függvény páratlan hatványon tartalmazza, akkor teljesen mindegy, hogy melyiket alakítjuk át, de a fent ismeretett átalakítások valamelyikét célszerű alkalmazni.
Az $\int \cos^{2n}(x)\sin^{2k}(x)dx$ alakú integrálok
Ebben az esetben a

$$\begin{aligned}\sin(x)\cos(x) &= \frac{1}{2}\sin(2x)\\ \sin^2(x) &= \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2x)\\ \cos^2(x) &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2x)\end{aligned}$$

trigonometrikus azonosságok közül a megfelelőt használva az integrandus már olyan alakú lesz, melyet a korábban ismeretett módszerek valamelyikével kezelni tudunk.

9.4.4. Példa.

$$\int \sin^2(x)dx = \int \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2x)dx = \frac{x}{2}-\frac{\sin(2x)}{4}+C.$$

9.4.3. Az $\int R(\sin(x),\cos(x))dx$ alakú integrálok

A sinus és cosinus függvények tetszőleges $R(\sin(x),\cos(x))$ racionális kifejezése esetén a

$$t = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$$

helyettesítés mindig célravezető. Ezen helyettesítés elvégzése után ugyanis,

$$dx = \frac{2}{1+t^2}dt \qquad \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \text{és} \qquad \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

amiből azt látjuk, hogy ezzel a helyettesítéssel az integrandus egy racionális törtfüggvénybe megy át.

9.4.5. Példa.

$$\int \frac{1}{1+\cos(x)}dx \underset{t=\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{=} \int \frac{1}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}dt = \int 1dt = t + C = \mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right) + C.$$

9.4.4. Az $\int R(e^x)dx$ alakú integrálok

Abban az esetben, ha az integrandus az exponenciális függvény egy racionális törtfüggvény, a

$$t = e^x \qquad dx = \frac{1}{t}dt$$

helyettesítéssel az integrandus t-nek racionális törtfüggvényébe megy át.

9.4.6. Példa.

$$\int \frac{3}{e^x + e^{-x}}dx \underset{t=e^x}{=} \int \frac{3}{t+\frac{1}{t}} \cdot \frac{1}{t}dt = \int \frac{3}{1+t^2}dt = 3\mathrm{arctg}(t) + C = 3\mathrm{arctg}(e^x) + C.$$

9.4.5. Az $\int R(x, \sqrt[n]{ax+b})dx$ alakú integrálok

Ha az integrandus x-nek és $\sqrt[n]{ax+b}$-nek racionális törtfüggvénye, akkor az

$$x = \frac{t^n - b}{a} \qquad \text{és} \qquad dx = \frac{n}{a}t^{n-1}dt$$

helyettesítéssel az integrandus racionális törtfüggvénnyé alakítható.

9.4.7. Példa. *Az $\int x\sqrt{5x+3}dx$ integrál kiszámításához végezzük el az*

$$x = \frac{t^2-3}{5} \qquad \textit{és} \qquad dx = \frac{2t}{5}dt$$

helyettesítéseket. Ekkor

$$\int x\sqrt{5x+3}dx = \int \frac{t^2-3}{5} \cdot t \cdot \frac{2t}{5}dt = \frac{2}{25}\int t^4 - 3t^2dt = \frac{2}{125}t^5 - \frac{2}{25}t^3 + C$$
$$= \frac{2}{125}\left(\sqrt{5x+3}\right)^5 - \frac{2}{25}\left(\sqrt{5x+3}\right)^3 + C$$

10. fejezet

Riemann-integrál

10.1. A Riemann-integrálhatóság fogalma

A továbbiakban legyen $[a, b] \subset \mathbb{R}$ egy zárt intervallum és $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ egy korlátos függvény.

10.1.1. Definíció. *Legyen $n \in \mathbb{N}$. A*

$$P = \{x_i \,|\, a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < \ldots < x_n = b\}$$

*halmazt az $[a, b]$ **intervallum egy felosztásá**nak nevezzük.*

*Az x_i pontokat a P felosztás **osztópontjai**nak hívjuk, míg az $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$ intervallumokat a **felosztás részintervallumai**nak mondjuk.*

Továbbá, a

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

jelölés bevezetése mellett a

$$\|P\| = \sup\{\Delta x_i \,|\, i = 1, \ldots, n\}$$

*számot a **felosztás finomságá**nak nevezzük.*

10.1.2. Definíció. *Felosztások egy $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sorozatát **normális felosztássorozat**nak mondjuk, hogy*

$$\lim_{k \to \infty} \|P_k\| = 0.$$

10.1.3. Definíció. *Legyen P_1, illetve P_2 az $[a, b]$ intervallum felosztásai. Abban az esetben, ha*

$$P_1 \subset P_2$$

*teljesül, azt mondjuk, hogy a P_2 felosztás **finomításá**a a P_1 felosztásnak.*

10.1.4. Definíció. *Legyen P az $[a, b]$ intervallum egy felosztása és*

$$M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \qquad \text{és} \qquad m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \qquad (i = 1, \ldots, n)\,.$$

10.1.1. Megjegyzés. *Az f függvény korlátossága miatt minden $i = 1, \ldots, n$ esetén léteznek és végesek.*

10.1.5. Definíció. *A fenti jelölések megtartása mellett legyenek*

$$\sigma(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta_i$$

$$\Sigma(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta_i$$

és

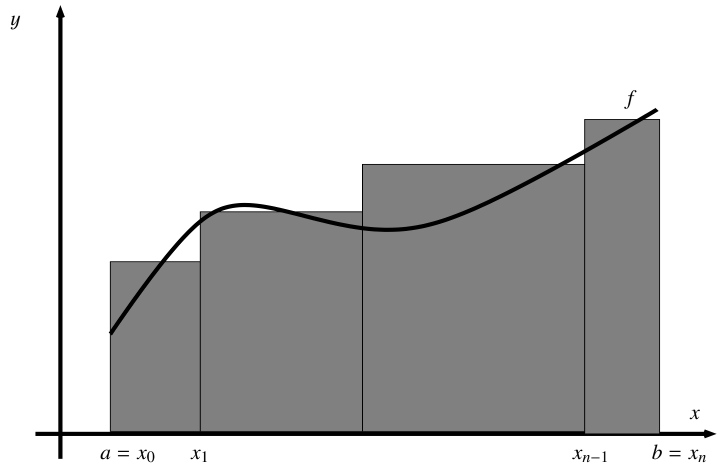
$$\mathscr{O}(f,P) = \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)\Delta_i.$$

*Ezeket a mennyiségeket rendre az f függvény P felosztásához tartozó **alsó, felső**, illetve **oszcillációs összeg**ének nevezzük.*

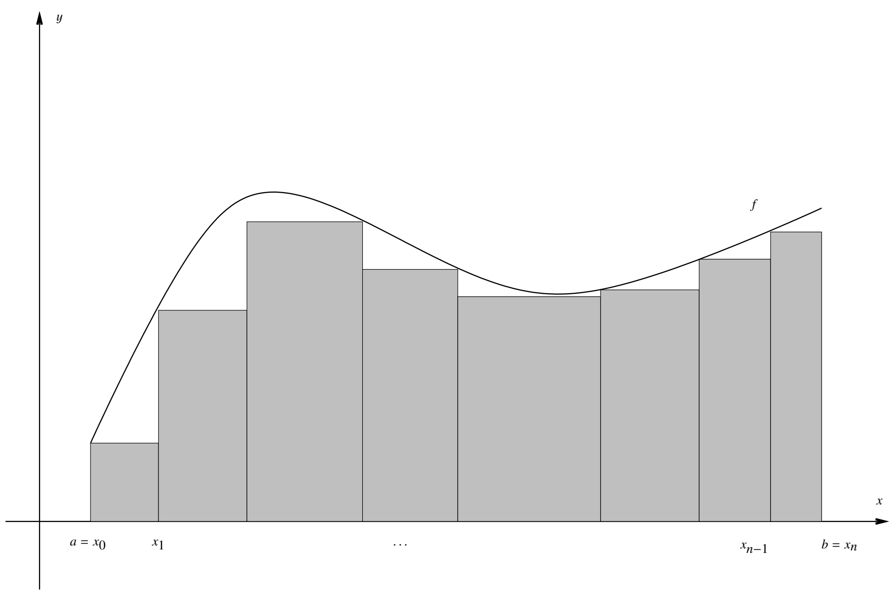
10.1.6. Definíció. *Továbbá, ha minden $i = 1,\dots,n$ esetén $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, akkor az*

$$\mathscr{I}(f,P) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

*számot az f függvény P felosztásához és a $\xi_1,\dots,\xi_n$ pontokhoz tartozó **integrálközelítő összegé**nek mondjuk.*



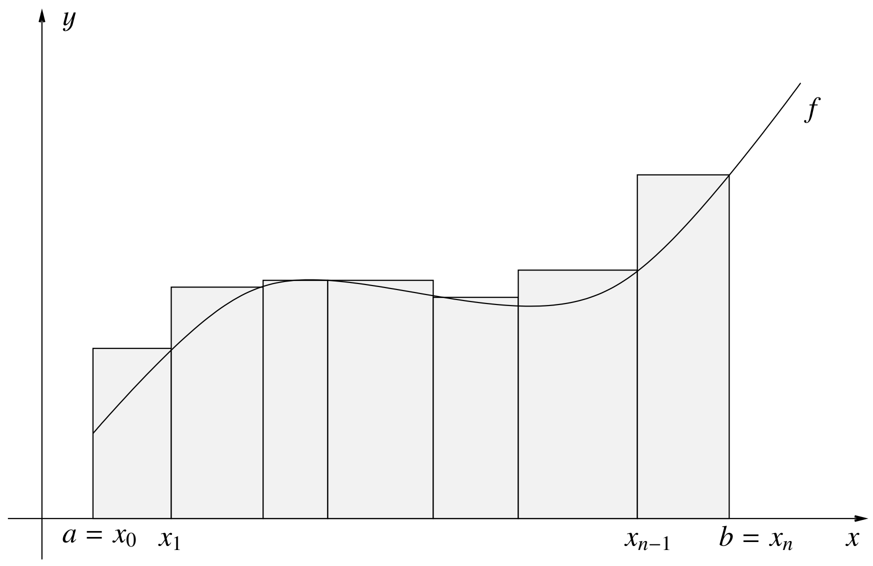
10.1. ábra. Integrálközelítő összeg



10.2. ábra. Alsó integrálközelítő összeg

10.1.1. Állítás. — *Az $[a,b]$ intervallum tetszőleges P felosztása és tetszőleges $\xi_1,\dots,\xi_n \in [a,b]$ pontok esetén*

$$\sigma(f,P) \leq \mathscr{I}(f,P) \leq \Sigma(f,P).$$



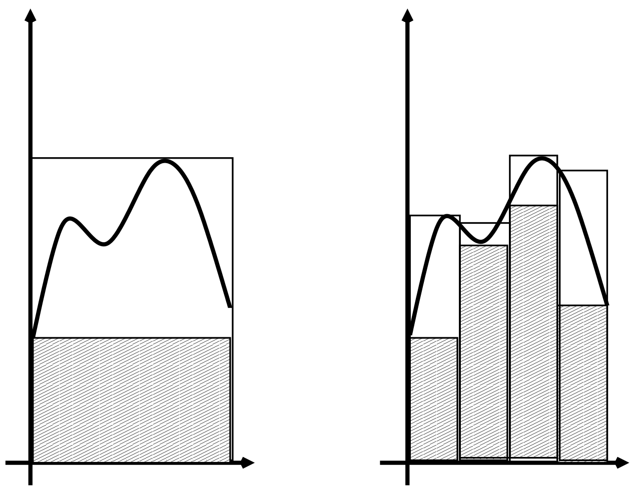
10.3. ábra. Felső integrálközelítő összeg

— *Ha P_1 és P_2 olyan felosztásai az $[a,b]$ intervallumnak, hogy $P_1 \subset P_2$, akkor*

$$\sigma(f,P_1) \le \sigma(f,P_2) \quad \textit{és} \quad \Sigma(f,P_2) \le \Sigma(f,P_1).$$

— *Az $[a,b]$ intervallum tetszőleges P_1 és P_2 felosztásai esetén*

$$\sigma(f,P_1) \le \Sigma(f,P_2).$$



10.1.7. Definíció. *Legyen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ egy korlátos függvény. Ekkor az*

$$\underline{\mathscr{I}}(f) = \sup\{\sigma(f,P) \mid P \textit{ az } [a,b] \textit{ felosztása}\},$$

illetve az

$$\overline{\mathscr{I}}(f) = \inf\{\Sigma(f,P) \mid P \textit{ az } [a,b] \textit{ felosztása}\},$$

számokat az f függvény $[a,b]$ intervallum feletti ***alsó****, illetve* ***felső Darboux-integrál****jának nevezzük.*

10.1.2. Állítás. *Tetszőleges $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ esetén az $\underline{\mathscr{I}}(f)$, illetve az $\overline{\mathscr{I}}(f)$ Darboux-integrálok léteznek és végesek, valamint*

$$\underline{\mathscr{I}}(f) \le \overline{\mathscr{I}}(f)$$

teljesül.

10.1.1. Következmény. *Tetszőleges $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény és az $[a,b]$ intervallum tetszőleges P felosztása esetén*

$$\sigma(f,P) \le \underline{\mathscr{I}}(f) \le \overline{\mathscr{I}}(f) \le \Sigma(f,P),$$

így,

$$0 \le \overline{\mathscr{I}}(f) - \underline{\mathscr{I}}(f) \le \mathscr{O}(f,P)$$

teljesül.

10.1.8. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény **Riemann-integrálható**, ha*

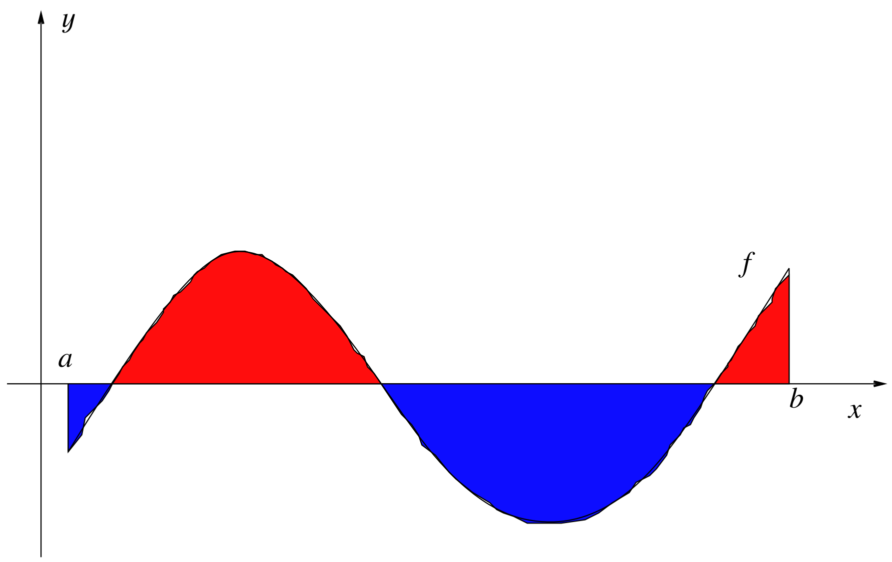
$$\underline{\mathscr{I}}(f) = \overline{\mathscr{I}}(f)$$

*teljesül. Ezt a közös értéket az f függvény $[a,b]$ intervallum feletti **Riemann-integrál**jának mondjuk és rá az*

$$\int_a^b f(x)dx$$

jelölést használjuk.

10.1.2. Megjegyzés (A Riemann-integrál geometriai jelentése). *Az $\int_a^b f(x)dx$ Riemann-integrál annak a tartománynak az **előjeles területe** , melyet az $y = f(x)$ görbe, az x-tengely, valamint az $x = a$ és $y = b$ egyenletű egyenes határol.*



10.4. ábra. A Riemann-integrál geometriai jelentése

10.1.1. Tétel (Darboux). *Legyen $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény. Ekkor bármely $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $\delta > 0$ úgy, hogy ha P olyan felosztása az $[a,b]$ intervallumnak, melyre $\|P\| < \delta$, akkor*

$$\left|\Sigma(f,P) - \overline{\mathscr{I}}(f)\right| < \varepsilon \quad \textit{és} \quad \left|\sigma(f,P) - \underline{\mathscr{I}}(f)\right| < \varepsilon$$

teljesül.

10.1.2. Következmény. *Legyen $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény. Ekkor az $[a,b]$ intervallum tetszőleges $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ normális felosztássorozata esetén*

$$\lim_{k\to\infty} \sigma(f,P_k) = \underline{\mathscr{I}}(f),\ \lim_{k\to\infty} \Sigma(f,P_k) = \overline{\mathscr{I}}(f) \textit{ és } \lim_{k\to\infty} \mathscr{O}(f,P_k) = \overline{\mathscr{I}}(f) - \underline{\mathscr{I}}(f)$$

teljesül.

10.1.1. Példa. *Az*
$$f(x) = x^2 \qquad (x \in [0,1])$$
függvény Riemann-integrálható a $[0,1]$ *intervallumon.*

Az előző következmény szerint az alsó és a felső Darboux-integrálok kiszámításához elegendő az alsó- és a felső-integrálközelítő összegeket normális felosztássorozatra meghatározni. Legyen $n \in \mathbb{N}$ *és tekintsük a*
$$P_n = \left\{ \frac{i}{n} \mid i = 0, 1, \ldots, n \right\}$$
felosztásokat. Ekkor
$$\|P_n\| = \frac{1}{n}$$
teljesül minden $n \in \mathbb{N}$ *esetén, vagyis a* $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *felosztássorozat normális. Továbbá, ha* $n \in \mathbb{N}$ *rögzített, akkor*
$$M_i = \sup_{x\in\left[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}\right]} x^2 = \frac{i^2}{n^2} \quad \text{és} \quad m_i = \inf_{x\in\left[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}\right]} x^2 = \frac{(i-1)^2}{n^2} \qquad (i = 1, \ldots, n).$$
Ezért
$$\Sigma(f, P_n) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad (n \in \mathbb{N})$$
és
$$\sigma(f, P_n) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{(i-1)^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} (i-1)^2 = \frac{1}{n^3} \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \qquad (n \in \mathbb{N})$$
Mindezekből
$$\overline{\mathscr{I}}(f) = \lim_{n\to\infty} \Sigma(f, P_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{1}{3}$$
és
$$\underline{\mathscr{I}}(f) = \lim_{n\to\infty} \sigma(f, P_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} = \frac{1}{3}$$
adódik, vagyis
$$\overline{\mathscr{I}}(f) = \underline{\mathscr{I}}(f) = \frac{1}{3},$$
ami azt jelenti, hogy az f függvény Riemann-integrálható a $[0,1]$ *intervallumon és*
$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}.$$

10.1.2. Példa. *Az*
$$f(x) = \chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$
függvény nem Riemann-integrálható a $[0,1]$ *intervallumon.*

Az előző következmény szerint az alsó és a felső Darboux-integrálok kiszámításához elegendő az alsó- és a felső-integrálközelítő összegeket normális felosztássorozatra meghatározni. Legyen $n \in \mathbb{N}$ *és tekintsük a*
$$P_n = \left\{ \frac{i}{n} \mid i = 0, 1, \ldots, n \right\}$$
felosztásokat. Ekkor
$$\|P_n\| = \frac{1}{n}$$
teljesül minden $n \in \mathbb{N}$ *esetén, vagyis a* $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *felosztássorozat normális. Továbbá, ha* $n \in \mathbb{N}$ *rögzített, akkor*
$$M_i = \sup_{x\in\left[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}\right]} \chi_{\mathbb{Q}}(x) = 1 \quad \text{és} \quad m_i = \inf_{x\in\left[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}\right]} \chi_{\mathbb{Q}}(x) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Ezért
$$\Sigma(f,P_n)=\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n} 1\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\cdot n=1\quad (n\in\mathbb{N})$$
és
$$\sigma(f,P_n)=\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n} 0\cdot\frac{1}{n}=0\quad (n\in\mathbb{N})$$
Mindezekből
$$\overline{\mathscr{I}}(f)=\lim_{n\to\infty}\Sigma(f,P_n)=\lim_{n\to\infty}1=1$$
és
$$\underline{\mathscr{I}}(f)=\lim_{n\to\infty}\sigma(f,P_n)=\lim_{n\to\infty}0=0$$
adódik, vagyis
$$\overline{\mathscr{I}}(f)=1\neq 0=\underline{\mathscr{I}}(f)$$
ami azt jelenti, hogy az f függvény nem Riemann-integrálható a $[0,1]$ *intervallumon.*

10.2. A Riemann-integrálhatóság kritériumai és elegendő feltételei

10.2.1. Tétel (Oszcillációs kritérium). *Legyen $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ korlátos függvény. Az f függvény **akkor, és csakis akkor** Riemann-integrálható, ha bármely $\varepsilon>0$ esetén van olyan P felosztása az $[a,b]$ intervallumnak, melyre*
$$\mathscr{O}(f,P)<\varepsilon$$
teljesül.

10.2.2. Tétel. *Legyen $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ korlátos függvény. Az f függvény **akkor, és csakis akkor** Riemann-integrálható, ha van olyan I valós szám, hogy bármely $\varepsilon>0$ esetén van olyan P felosztása az $[a,b]$ intervallumnak, melyhez tartozó $\mathscr{I}(f,P)$ integrálközelítő összegre*
$$|\mathscr{I}(f,P)-I|<\varepsilon$$
teljesül. Továbbá, ebben az esetben
$$I=\int_a^b f(x)dx.$$

10.2.3. Tétel. *Legyen $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ folytonos függvény. Ekkor f Riemann-integrálható.*

10.2.4. Tétel. *Legyen $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ monoton függvény. Ekkor f Riemann-integrálható.*

10.2.5. Tétel. *Legyen $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ olyan függvény, mely legfeljebb megszámlálhatóan végtelen sok $[a,b]$-beli pontban nem folytonos. Ekkor f Riemann-integrálható.*

10.3. A Riemann-integrál tulajdonságai

10.3.1. Tétel (Riemann-integrál és műveletek). *Legyenek $f,g\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ Riemann-integrálható függvények, $\lambda\in\mathbb{R}$. Ekkor*

— *az $f+g$ függvény is Riemann-integrálható és*
$$\int_a^b (f+g)(x)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx;$$

— *a $\lambda \cdot f$ függvény is Riemann-integrálható és*

$$\int_a^b (\lambda \cdot f)(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx;$$

— *ha minden $x \in [a, b]$ esetén $f(x) \leq g(x)$ teljesül, akkor*

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx;$$

— *ha $[c, d] \subset [a, b]$, akkor az f függvény Riemann-integrálható a $[c, d]$ intervallumon is;*

— *ha $c \in]a, b[$, akkor*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx;$$

— *ha $K \geq 0$ olyan, hogy*

$$|f(x)| \leq K \qquad (x \in [a, b]),$$

akkor

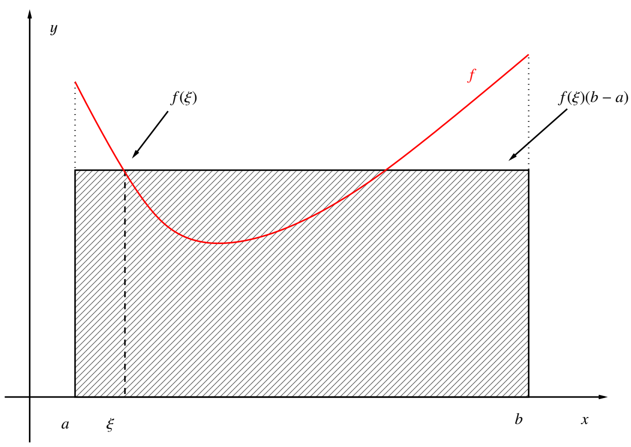
$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq K(b - a).$$

10.3.1. Megjegyzés. *Az előző tételben szereplő első és második állítást együttesen a Riemann-integrál **linearitásá**nak, a harmadikat a Riemann-integrál **monotonitásá**nak, míg az ötödiket a Riemann-integrál **intervallum-additivitásá**nak mondjuk.*

10.3.2. Tétel (Középértéktétel). *Legyenek $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható függvények. Tegyük fel továbbá, hogy az f függvény folytonos, a g függvény pedig nemnegatív. Ekkor van olyan $\xi \in]a, b[$, melyre*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx$$

teljesül.



10.5. ábra. A Középértéktétel geometriai jelentése

10.3.1. Következmény (Középértéktétel II.). *Legyen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos, Riemann-integrálható függvény. Ekkor van olyan $\xi \in]a,b[$, melyre*

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int\limits_a^b f(x)dx$$

teljesül.

10.3.3. Tétel. *Legyen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ egy Riemann-integrálható függvény. Ekkor az $|f|$ függvény is Riemann-integrálható és*

$$\left| \int\limits_a^b f(x)dx \right| \leq \int\limits_a^b |f(x)|\, dx$$

teljesül.

10.4. A Newton–Leibniz-formula

10.4.1. Definíció. *Legyen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ egy Riemann-integrálható függvény. Ekkor az*

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt \qquad (x \in [a,b])$$

módon megadott $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ függvényt az f függvény ***felsőhatárfüggvény****ének vagy* ***integrálfüggvény****ének hívjuk.*

10.4.1. Tétel. *Legyen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ egy Riemann-integrálható függvény. Ekkor az f függvény felsőhatárfüggvénye folytonos az $[a,b]$ intervallumon.*

10.4.2. Tétel. *Legyen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ egy Riemann-integrálható függvény. Ha az f függvény folytonos az $]a,b[$ intervallum valamely x^* pontjában, akkor ebben a pontban az f függvény F felsőhatárfüggvénye differenciálható és*

$$F'(x^*) = f(x^*).$$

10.4.3. Tétel (Newton–Leibniz). *Legyen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ egy folytonos függvény és jelölje $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ az f függvény egy primitív függvényét. Ekkor*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

10.4.1. Példa. *Számítsuk ki az*

$$\int_e^{e^2} \frac{2}{x} dx$$

integrált.

A Newton–Leibniz formula jelöléseivel

$$f(x) = \frac{2}{x}, \quad F(x) = 2\ln|x| \quad \text{és} \quad a = e, \quad b = e^2,$$

így

$$\int_e^{e^2} \frac{1}{x} dx = [2\ln|x|]_e^{e^2} = \ln|e^2| - \ln|e| = 4 - 2 = 2.$$

10.4.4. Tétel (Parciális integrálás tétele). *Legyenek $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ olyan differenciálható függvények, melyek deriváltjai Riemann-integrálhatóak. Ekkor*

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

10.4.2. Példa.

$$\int_0^2 xe^x = ?$$

Az integrál kiszámításához alkalmazzuk az előző tételt az

$$f(x) = x \quad \text{és} \quad g'(x) = e^x$$

választással, ekkor

$$f'(x) = 1 \quad \text{és} \quad g(x) = e^x,$$

így

$$\int_0^2 xe^x dx = [xe^x]_0^2 - \int_0^2 1 \cdot e^x dx = [xe^x]_0^2 - [e^x]_0^2 = \left(2e^2 - 0\right) - \left(e^2 - 1\right) = e^2 + 1.$$

10.4.5. Tétel (Helyettesítéses integrálás tétele). *Legyen $\varphi\colon [a,b] \to [A,B]$ egy olyan szigorúan monoton növekedő, folytonosan differenciálható függvény, melyre $\varphi(a) = A$ és $\varphi(b) = B$. Ha az $f\colon [\varphi(a), \varphi(b)] \to \mathbb{R}$ függvény folytonos, akkor*

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)dt.$$

10.4.3. Példa.

$$\int_1^2 (3x+4)^3 dx = ?$$

Alkalmazzuk az előző tételt a

$$\varphi(t) = \frac{t-4}{3}$$

választással, ekkor

$$\varphi'(t) = \frac{1}{3}, \quad \text{és} \quad \varphi^{-1}(t) = 3t + 4,$$

továbbá

$$\varphi(a) = 1 \quad \text{és} \quad \varphi(b) = 2,$$

ezért $a = 7$ és $b = 10$, így

$$\int_1^2 (3x+4)^3 dx = \int_7^{10} t^3 \cdot \frac{1}{3} dt = \left[\frac{t^4}{12}\right] = \frac{10^4 - 7^4}{12}.$$

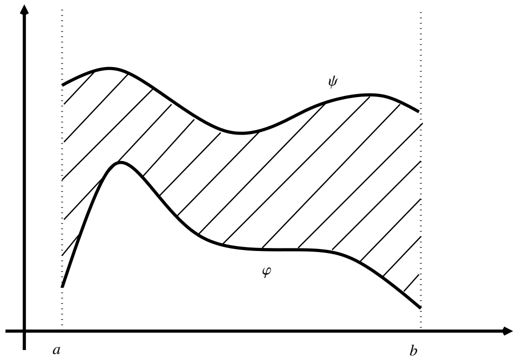
A Riemann-integrál néhány alkalmazása

Területszámítás

Legyenek $\varphi, \psi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ olyan folytonos függvények, melyekre

$$\varphi(x) \le \psi(x) \qquad (x \in [a,b])$$

teljesül és jelölje S annak a síkidomnak a területét, melyet az $y = \varphi(x)$, $y = \psi(x)$ görbék valamint az $x = a$ és $x = b$ egyenesek határolnak.



Ekkor az S síkidom területe

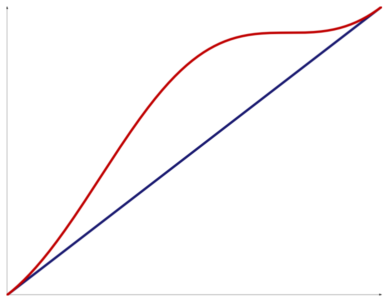
$$A(S) = \int_a^b \psi(x) - \varphi(x)dx.$$

10.4.4. Példa. *Legyenek*

$$\varphi(x) = x \qquad \text{és} \qquad \psi(x) = x + \sin^2(x) \qquad (x \in [0, \pi])\,.$$

Ekkor $\varphi(x) \leq \psi(x)$ *teljesül minden* $x \in [0, \pi]$ *esetén, így a* φ, ψ *görbék, illetve az* $x = 0$ *és* $x = \pi$ *egyenesek által meghatározott tartomány területe*

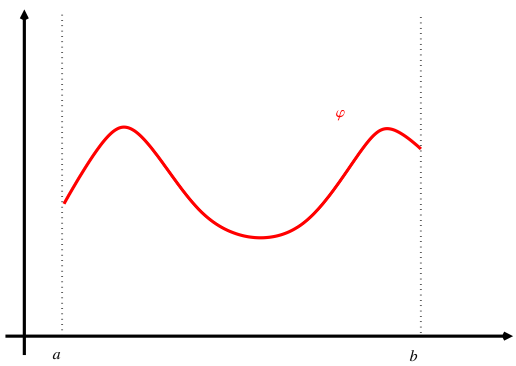
$$T(S) = \int_0^\pi (x + \sin^2(x)) - xdx = \int_0^\pi \sin^2(x)dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4}\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}.$$



Görbék ívhossza

Legyen $\varphi\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ egy folytonosan differenciálható függvény, ekkor a φ függvény által meghatározott görbedarab ívhossza,

$$L(\varphi) = \int_a^b \sqrt{1 + (\varphi'(x))^2}dx.$$

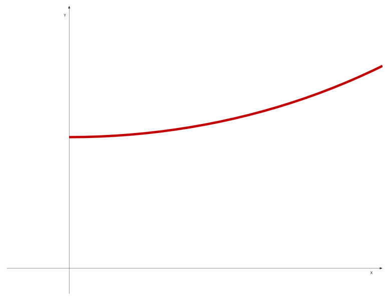


10.4.5. Példa. *Legyen* $\alpha > 0$ *rögzített és*

$$\varphi(x) = \alpha \cosh\left(\frac{x}{\alpha}\right) \qquad (x \in [0, \alpha])\,.$$

Ekkor a $\varphi\colon [0, \alpha] \to \mathbb{R}$ *folytonosan differenciálható függvény által meghatározott görbedarab hossza,*

$$L(\varphi) = \int_0^\alpha \sqrt{1 + (\varphi'(x)^2)}dx = \int_0^\alpha \sqrt{1 + \left(\sinh^2\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right)}dx = \int_0^\alpha \cosh\left(\frac{x}{\alpha}\right)dx = \left[\alpha \sinh\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right]_0^\alpha = \alpha \cdot \sinh(1).$$



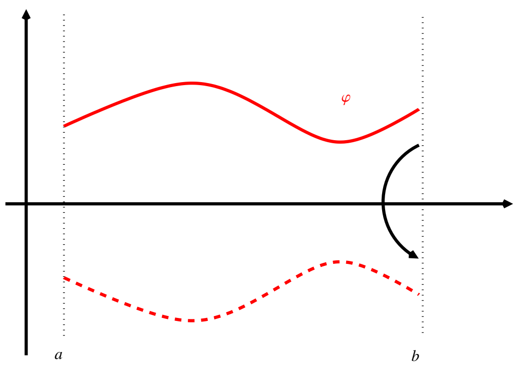
Forgástestek térfogata

Legyen $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ egy folytonos függvény és forgassuk meg az x tengely körül az

$$a \le x \le b \qquad 0 \le y \le \varphi(x)$$

tartományt. A forgás során súrolt pontok egy S forgástestet alkotnak, melynek térfogata

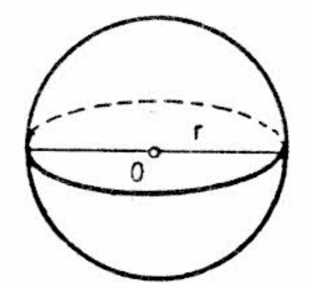
$$V(S) = \pi \int_a^b \varphi^2(x)dx.$$



10.4.6. Példa. *Legyen $r > 0$ adott és*

$$\varphi(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \qquad (x \in [-r, r])\,.$$

Ekkor a φ függvény x tengely körüli megforgatásával nyert forgástest éppen az origó középpontú r sugarú gömb.



A fentiek szerint ennek a forgástestnek a térfogata

$$V(S) = \pi \int_{-r}^{r} \varphi^2(x)dx = \pi \int_{-r}^{r} \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx = \pi \int_{-r}^{r} r^2 - x^2 dx = \pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_{-r}^{r} = \frac{4r^3\pi}{3}.$$

10.5. Improprius integrálok

10.5.1. Definíció. *Legyen a valós, b pedig bővített valós szám, úgy, hogy $a < b$ teljesül. Legyen továbbá $f\colon [a,b[\to \mathbb{R}$ egy olyan függvény, mely minden $x \in [a,b[$ esetén Riemann-integrálható az $[a,x]$ intervallumon. Értelmezzük az $F\colon [a,b[\to \mathbb{R}$ függvényt az*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \qquad (x \in [a,b[)$$

formulával. Ha az F függvénynek a b pontban létezik és véges a baloldali határértéke, akkor azt mondjuk, hogy az $\int_a^b f(x)dx$ ***improprius integrál konvergens*** *és ebben az esetben*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{x\to b-} F(x).$$

10.5.2. Definíció. *Legyen a bővített valós, b pedig valós szám, úgy, hogy $a < b$ teljesül. Legyen továbbá $f\colon\ ]a,b] \to \mathbb{R}$ egy olyan függvény, mely minden $x \in]a,b]$ esetén Riemann-integrálható az $[x,b]$ intervallumon. Értelmezzük az $F\colon\ ]a,b] \to \mathbb{R}$ függvényt az*

$$F(x) = \int_x^b f(t)dt \qquad (x \in]a,b])$$

formulával. Ha az F függvénynek az a pontban létezik és véges a jobboldali határértéke, akkor azt mondjuk, hogy az $\int_a^b f(x)dx$ ***improprius integrál konvergens*** *és ebben az esetben*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{x\to a+} F(x).$$

10.5.3. Definíció. *Legyenek a,b bővített valós számok úgy, hogy $a < b$. Legyen továbbá $f\colon\ ]a,b[\to \mathbb{R}$ egy olyan függvény, mely az $]a,b[$ intervallum minden zárt részintervallumán Riemann-integrálható. Tegyük fel, hogy van olyan $c \in]a,b[$, mely esetén az*

$$\int_a^c f(x)dx \qquad \text{és az} \qquad \int_c^b f(x)dx$$

improprius integrálok konvergensek. Ebben az esetben azt mondjuk, hogy az $\int_a^b f(x)dx$ improprius integrál is konvergens és

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

10.5.1. Tétel (Összehasonlító kritérium I.). *Legyen $a \in \mathbb{R}$ és $\varphi, \Phi\colon [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ olyan függvények, melyek az $[a,+\infty[$ intervallum minden zárt részintervallumán Riemann-integrálhatóak. Tegyük fel továbbá, hogy*

$$|\varphi(x)| \le \Phi(x) \qquad (x \in [a,+\infty[)\,.$$

Ekkor, ha az $\int_a^{+\infty} \Phi(x)dx$ improprius integrál konvergens, akkor az $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ improprius integrál abszolút konvergens.

10.5.2. Tétel (Összehasonlító kritérium II.). *Legyen $a \in \mathbb{R}$ és $\varphi, \psi\colon [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ olyan függvények, melyek az $[a,+\infty[$ intervallum minden zárt részintervallumán Riemann-integrálhatóak. Tegyük fel továbbá, hogy $\psi(x) > 0$ teljesül minden $x \in [a,+\infty[$ esetén és létezik és nullától különböző a*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

határérték. Ebben az esetben az $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ és az $\int_a^{+\infty} \psi(x)dx$ improprius integrálok egyszerre konvergensek, illetve divergensek.

10.5.3. Tétel. *Legyenek $a, p \in \mathbb{R}$ és $\varphi\colon [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ olyan függvény, mely az $[a, +\infty[$ intervallum minden zárt részintervallumán Riemann-integrálható. Tegyük fel továbbá, hogy létezik és nullától különböző a*

$$\lim_{x\to+\infty} x^p\varphi(x)$$

határérték. Ekkor

— *$p > 1$ esetén az $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ improprius integrál konvergens;*

— *$p \leq 1$ esetén az $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ improprius integrál divergens.*

10.5.4. Tétel. *Legyenek $f, \varphi\colon [a, +\infty[\to \mathbb{R}$, melyekre*

(i) *$x \to +\infty$ esetén a φ függvény monoton csökkenően nullához konvergál;*

(ii) *az*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \qquad (x \in [a, +\infty[)$$

módon megadott $F\colon [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ függvény korlátos.

Ekkor az

$$\int_a^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx$$

improprius integrál konvergens, azonban abszolút konvergencia általában nem teljesül.

10.5.1. Következmény. *Legyenek $a, \alpha \in]0, +\infty[$ tetszőlegesek. Ekkor az*

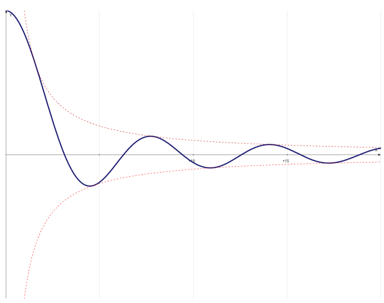
$$\int_a^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^\alpha}dx \quad \text{és az} \quad \int_a^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^\alpha}dx$$

integrálok konvergensek.

10.5.1. Példa. *Az előző következmény alkalmazásával azonnal adódik, hogy az*

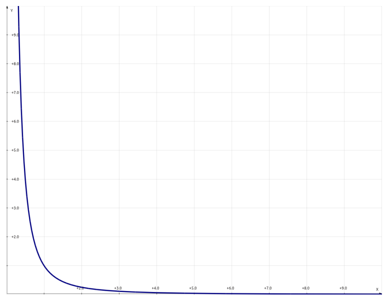
$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx$$

improprius integrál konvergens.



10.5.2. Példa.

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx = 1,$$



ugyanis tetszőleges $x \in [1, +\infty[$ esetén az

$$f(t) = \frac{1}{t^2} \qquad (t \in [1, x])$$

függvény Riemann-integrálható az $[1, x]$ intervallumon. Továbbá,

$$F(x) = \int_1^x f(t)dt = \int_1^x \frac{1}{t^2}dt = \left[\frac{1}{t^2}\right]_1^x = -\frac{1}{x} + 1 = 1 - \frac{1}{x},$$

ezért

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x\to\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1,$$

vagyis az $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ improprius integrál konvergens és

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} = 1.$$

10.5.3. Példa.

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}dx = +\infty,$$

ugyanis tetszőleges $x \in [1, +\infty[$ esetén az

$$f(t) = \frac{1}{t} \qquad (t \in [1, x])$$

függvény Riemann-integrálható az $[1, x]$ intervallumon. Továbbá,

$$F(x) = \int_1^x f(t)dt = \int_1^x \frac{1}{t}dt = [\ln|x|]_1^x = \ln|x| - \ln|1| = \ln|x|,$$

ezért

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x\to\infty} \ln|x| = +\infty,$$

vagyis az $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}dx$ improprius integrál divergens.

10.5.4. Példa.

$$\int_0^1 \frac{1}{x}dx = +\infty,$$

ugyanis tetszőleges $x \in [0,1[$ *esetén az*

$$f(t) = \frac{1}{t} \qquad (t \in [x,1])$$

függvény Riemann-integrálható az $[x,1]$ *intervallumon. Továbbá,*

$$F(x) = \int_x^1 f(t)dt = \int_x^1 \frac{1}{t}dt = [\ln|t|]_x^1 = \ln|1| - \ln|x| = -\ln|x|$$

ezért

$$\lim_{x\to 0+} F(x) = \lim_{x\to 0+} (-\ln|x|) = +\infty,$$

vagyis az $\int_0^1 \frac{1}{x}dx$ *improprius integrál divergens.*

10.5.5. Példa.

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2,$$

ugyanis tetszőleges $x \in [0,1[$ *esetén az*

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \qquad (t \in [x,1])$$

függvény Riemann-integrálható az $[x,1]$ *intervallumon. Továbbá,*

$$F(x) = \int_x^1 f(t)dt = \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{t}}dt = \left[2\sqrt{t}\right]_x^1 = 2 - 2\sqrt{x}$$

ezért

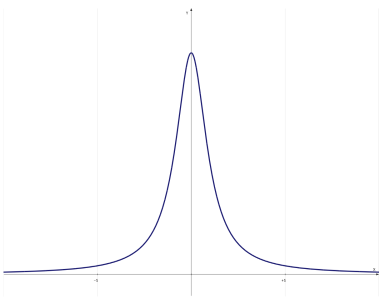
$$\lim_{x\to 0+} F(x) = \lim_{x\to 0+} \left(2 - 2\sqrt{x}\right) = 2,$$

vagyis az $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ *improprius integrál konvergens és*

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2.$$

10.5.6. Példa.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \pi,$$



ugyanis tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ esetén az

$$f(t) = \frac{1}{1+t^2} \qquad (t \in [a, b])$$

függvény Riemann-integrálható az $[a, b]$ intervallumon és

$$\int_a^b \frac{1}{1+t^2}dt = [\operatorname{arctg}(t)]_a^b = \operatorname{arctg}(b) - \operatorname{arctg}(a),$$

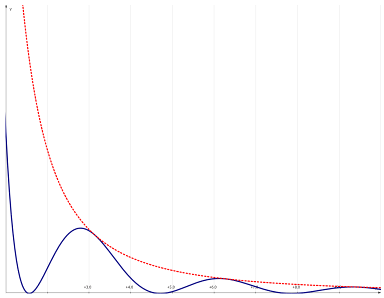
így

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to +\infty}} \int_a^b \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to +\infty}} (\operatorname{arctg}(b) - \operatorname{arctg}(a)) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

10.5.7. Példa. *Az*

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos^2(x)}{x^2}dx$$

improprius integrál abszolút konvergens.



Ugyanis tetszőleges $x \in]0, +\infty[$ esetén

$$\left|\frac{\cos^2(x)}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$$

teljesül, valamint a 10.5.2. Példa szerint

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx = 1.$$

10.5.8. Példa. *Az*

$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{x - e^{-x}}dx$$

improprius integrál divergens, hiszen minden $x \in [3, +\infty[$ esetén

$$\frac{1}{x - e^{-x}} > \frac{1}{x}$$

teljesül. Továbbá,

$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{x} = +\infty,$$

amiből az Összehasonlító kritérium felhasználásával adódik a fenti improprius integrál divergenciája.

10.5.9. Példa. *Az*

$$\int_1^{+\infty} e^{-x^2}dx$$

improprius integrál konvergens, hiszen, ha $x \in]1, +\infty[$, akkor

$$e^{-x^2} < e^{-x}.$$

Továbbá, az

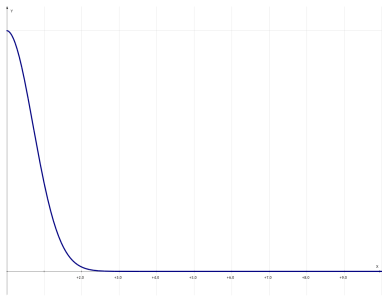
$$\int_1^{+\infty} e^{-x} dx$$

improprius integrál konvergens.

10.5.10. Példa. *Az*

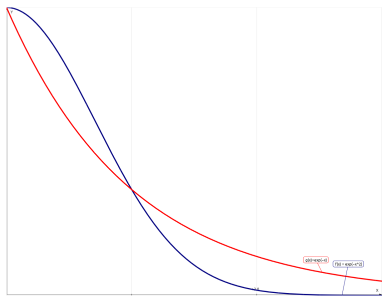
$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

improprius integrál konvergens.



Ebben az esetben azonban nem használható az előző gondolatmenet, hiszen, ha $x \in [0, 1]$*, akkor*

$$e^{-x^2} > e^{-x}.$$



Használjuk azt, hogy

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^1 e^{-x^2} dx + \int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

Az előző példa alapján az

$$\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

improprius integrál konvergens. Továbbá, minden $x \in [0, 1]$ *esetén*

$$e^{-x^2} \leq 1,$$

így

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \leq \int_0^1 1 dx = 1,$$

amiből

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx < +\infty$$

adódik.

11. fejezet

Vektorterek, euklideszi terek

11.1. Vektorterek, euklideszi terek

11.1.1. Definíció. *Legyen X egy nemüres halmaz, melyen értelmezve van egy $+ \subset X \times X$ és egy $\cdot \subset X \times \mathbb{R}$, melyeket rendre összeadásnak, illetve skalárral való szorzásnak nevezünk, úgy, hogy teljesülnek az alábbiak*

(i) minden $x, y \in X$ esetén $x + y = y + x$ (kommutativitás);

(ii) minden $x, y, z \in X$ esetén $(x + y) + z = x + (y + z)$ (asszociativitás);

(iii) létezik egy olyan 0-val jelölt elem X-ben, melyre minden $x \in X$ esetén $x + 0 = x$ teljesül (zéruselem létezése);

(iv) minden $x \in X$ esetén létezik olyan $-x$-szel jelölt X-beli elem, hogy $x + (-x) = 0$ (inverzelem létezése);

(v) minden $x \in X$ esetén $1 \cdot x = x$;

(vi) tetszőleges $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ konstansok és $x \in X$ esetén $\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda\mu) \cdot x$;

(vii) tetszőleges $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ és $x, y \in X$ esetén $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$ és $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ teljesül.

*Ebben az esetben azt mondjuk, hogy $(X, +, \cdot)$ **vektortér** vagy azt, hogy **lineáris tér** $\mathbb{R}$ felett. Az X halmaz elemeire a továbbiakban a **vektorok**, míg $\mathbb{R}$ elemeire a **skalárok** elnevezést fogjuk használni.*

11.1.2. Definíció. *Legyen X egy vektortér. Azt mondjuk, hogy a $\langle \cdot, \cdot \rangle \colon X \times X \to \mathbb{R}$ függvény **belsőszorzat** vagy **skaláris szorzat** X-en, ha teljesülnek a következők.*

(i) tetszőleges $x, y \in X$ esetén $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$;

(ii) minden $x, y, z \in X$ esetén $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$;

(iii) minden $x, y \in X$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$;

(iv) tetszőleges $x \in X$ esetén $\langle x, x \rangle \geq 0$ és $\langle x, x \rangle = 0$ pontosan akkor teljesül, ha $x = 0$.

*Azt mondjuk továbbá, hogy az X vektortér **belsőszorzattér** vagy **euklideszi tér**, ha X-en adva van egy belsőszorzat.*

11.1.1. Példa. *Az $X = \mathscr{C}([a, b])$ téren az*

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

formula belsőszorzat definiál.

11.1.2. Példa. *Legyen $n \in \mathbb{N}$, ekkor az $X = \mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ lineáris téren az*

$$\langle A, B \rangle = \mathrm{tr}(A \cdot B) \qquad (A, B \in \mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{R}))$$

formula belsőszorzatot ad meg.

11.1.3. Definíció. *Legyen X egy belsőszorzattér, ekkor az $x \in X$ elem* ***normá****ján az*

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

számot értjük.

11.1.1. Állítás (A norma tulajdonságai). *Legyen X egy belsőszorzattér és X elemeinek a normáját értelmezzük az előző definíció szerint. Ekkor*

(i) tetszőleges $x \in X$ esetén $\|x\| \geq 0$ és $\|x\| = 0$ pontosan akkor teljesül, ha $x = 0$;

(ii) minden $x \in X$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$;

(iii) bármely $x, y \in X$ esetén $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

11.2. Az $\mathbb{R}^n$ tér

11.2.1. Definíció. *Legyen $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ és ha $n \in \mathbb{N}$, akkor legyen*

$$\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}.$$

Az $\mathbb{R}^n$ tér elemeit ***rendezett szám*** *n**-esek**nek nevezzük. Ha $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, akkor az x_i valós számot az x vektor i**-edik koordinátájá**nak mondjuk, $i = 1, \ldots, n$.*

11.2.1. Állítás. *Az $\mathbb{R}^n$ térben értelmezzük a következő két műveletet,*

$$x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n),$$

ha $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ és

$$\lambda \cdot x = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n),$$

ha $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ és $\lambda \in \mathbb{R}$. Ekkor $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ lineáris tér.

11.2.2. Állítás. *Ha $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, akkor legyen*

$$\langle x, y\rangle = x_1 y_1 + \cdots x_n y_n.$$

Ekkor $\langle \cdot, \cdot \rangle$ belsőszorzat a $\mathbb{R}^n$ téren.

11.2.2. Definíció. *Legyenek $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, ekkor az*

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

számot az $x \in \mathbb{R}^n$ vektor ***normá****jának hívjuk, hogy a*

$$\|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

mennyiséget az x és az y vektorok ***távolság****ának mondjuk.*

11.2.3. Definíció. *Legyen $x_0 \in \mathbb{R}^n$ és $r > 0$, ekkor a*

$$G(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| < r\},$$

illetve a

$$B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| \leq r\},$$

halmazokat rendre az x_0 pont r sugarú ***nyílt****, illetve* ***zárt környezet****einek nevezzük.*

11.2.4. Definíció. *Legyen $D \subset \mathbb{R}^n$ egy nemüres halmaz. Azt mondjuk, hogy az $x_0 \in D$ pont **belső pont**ja D-nek, ha van olyan $r > 0$, hogy $G(x_0, r) \subset D$ teljesül. A D halmaz belső pontjainak a halmazára a továbbiakban a D° jelölést fogjuk használni.*

11.2.5. Definíció. *Legyen $D \subset \mathbb{R}^n$ egy nemüres halmaz. Azt mondjuk, hogy az $x_0 \in \mathbb{R}^n$ pont **külső pont**ja D-nek, ha x_0 belső pontja $\mathbb{R}^n \setminus D$-nek.*

11.2.6. Definíció. *Legyen $D \subset \mathbb{R}^n$ egy nemüres halmaz. Azt mondjuk, hogy az $x_0 \in D$ pont **határpont**ja D-nek, ha tetszőleges $r > 0$ esetén $G(x_0, r) \cap D \neq \emptyset$ és $G(x_0, r) \cap (\mathbb{R}^n \setminus D) \neq \emptyset$ teljesül. A D halmaz belső pontjainak a halmazára a továbbiakban a ∂D jelölést fogjuk használni.*

11.2.7. Definíció. *Legyen $D \subset \mathbb{R}^n$ egy nemüres halmaz. Azt mondjuk, hogy az $x_0 \in \mathbb{R}^n$ pont **érintkezési pont**ja D-nek, ha tetszőleges $r > 0$ esetén $G(x_0, r) \cap D \neq \emptyset$.*

*Azt mondjuk, hogy az $x_0 \in \mathbb{R}^n$ pont a D halmaznak **torlódási pont**ja, ha minden $r > 0$ esetén $G(x_0, r) \cap (D \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset$ teljesül. A D halmaz torlódási pontjai halmazára a továbbiakban a D' jelölést fogjuk használni.*

*Azt mondjuk, hogy az $x_0 \in D$ pont a D halmaznak **izolált pont**ja, ha van olyan $r > 0$, hogy $G(x_0, r) \cap D = \{x_0\}$ teljesül.*

11.2.8. Definíció. *Azt mondjuk, hogy a $D \subset \mathbb{R}^n$ halmaz **nyílt**, ha a D halmaz minden pontja belső pont. Azt mondjuk, hogy a $H \subset \mathbb{R}^n$ halmaz **zárt**, ha H tartalmazza az összes torlódási pontját.*

11.2.1. Tétel. *Legyen $D \subseteq \mathbb{R}^n$ egy halmaz. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.*

(i) A D halmaz nyílt.

(ii) Az $\mathbb{R}^n \setminus D$ halmaz zárt.

11.2.9. Definíció. *Azt mondjuk, hogy a $K \subset \mathbb{R}^n$ halmaz **korlátos**, ha van olyan $r > 0$ és olyan $x_0 \in \mathbb{R}^n$, hogy $K \subset G(x_0, r)$ teljesül.*

11.2.2. Tétel (Bolzano–Weierstrass). *Az $\mathbb{R}^n$ tér minden korlátos, végtelen halmazának van torlódási pontja.*

11.2.10. Definíció. *Azt mondjuk, hogy a $D \subset \mathbb{R}^n$ halmaz **kompakt**, ha a D halmaz minden, nyílt halmazokból álló lefedéséből kiválasztható véges lefedés.*

11.2.3. Tétel (Heine–Borel). *A $D \subset \mathbb{R}^n$ halmaz pontosan akkor kompakt, ha korlátos és zárt.*

11.3. Sorozatok az $\mathbb{R}^n$ térben

11.3.1. Definíció. *Legyen $k \in \mathbb{N}$, **$\mathbb{R}^k$-beli sorozat**on egy a természetes számok halmazán értelmezett $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^k$ függvényt értünk.*

Legyen $n \in \mathbb{N}$ tetszőleges, ekkor $f(n)$ helyett általában az x_n jelölést használjuk, magára a sorozatra pedig az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jelölést alkalmazzuk. Továbbá, az x_n $\mathbb{R}^k$-beli vektort az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **sorozat n-edik elem**ének mondjuk.

11.3.2. Definíció. *Legyen $k \in \mathbb{N}$ és $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy sorozat $\mathbb{R}^k$-ban. Azt mondjuk, hogy az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **sorozat határértéke (vagy limesze)** $x \in \mathbb{R}^k$, ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz található olyan $N > 0$ szám, hogy ha $n \in \mathbb{N}$ és $n > N$, akkor*

$$\|x_n - x\| < \varepsilon.$$

Erre a $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ jelölést használjuk.

11.3.3. Definíció. *Egy sorozatot **konvergens**nek nevezünk, ha van olyan $x \in \mathbb{R}$, ami a szóban forgó sorozat limesze. Ellenkező esetben **divergens** sorozatról beszélünk.*

11.3.1. Tétel (A határérték egyértelműsége). *Legyen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy olyan sorozat az $\mathbb{R}^k$ térben, mely egyaránt tart az x és y $\mathbb{R}^k$-beli elemekhez. Ekkor $x = y$.*

11.3.4. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat* ***részsorozata****, ha létezik egy olyan $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton függvény, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén*

$$y_n = x_{\varphi(n)}$$

teljesül.

11.3.2. Tétel. *Legyen $x \in \mathbb{R}^k$ és $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy olyan sorozat $\mathbb{R}^k$-ban, melyre $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Ekkor az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat tetszőleges $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ részsorozata esetén*

$$\lim_{n\to\infty} y_n = x$$

teljesül.

11.3.5. Definíció. *Legyen $k \in \mathbb{N}$, az $\mathbb{R}^k$-beli $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot* ***korlátos****nak nevezzük, ha az*

$$\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}^k$$

halmaz korlátos.

11.3.3. Tétel (Konvergencia $\Longrightarrow$ korlátosság). *Bármely konvergens $\mathbb{R}^k$-beli sorozat korlátos.*

11.3.4. Tétel (Bolzano–Weierstrass-féle kiválasztási tétel). *Legyen $k \in \mathbb{N}$. Az $\mathbb{R}^k$ tér minden korlátos sorozatának létezik konvergens részsorozata.*

11.3.6. Definíció. *Legyen $k \in \mathbb{N}$. Azt mondjuk, hogy az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathbb{R}^k$-beli sorozat* ***Cauchy-sorozat****, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ szám esetén van olyan $N > 0$ szám, hogy ha $n, m \in \mathbb{N}$, $n, m > N$, akkor*

$$\|x_n - x_m\| < \varepsilon.$$

11.3.5. Tétel (Cauchy-féle konvergenciakritérium). *Egy $\mathbb{R}^k$-beli sorozat* ***akkor és csakis akkor*** *konvergens, ha Cauchy-sorozat.*

11.3.6. Tétel. *Legyen $k \in \mathbb{N}$. Az alábbi állítások ekvivalensek.*

— *az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens és határértéke x;*

— *minden $i = 1, \ldots, k$ esetén az $(x_n^{(i)})_{n\in\mathbb{N}}$ úgynevezett i-edik koordinátasorozat konvergens és határértéke $x^{(i)}$,*

ahol $x = (x^{(1)}, \ldots, x^{(k)})$ és $x_n = (x_n^{(1)}, \ldots, x_n^{(k)})$, $(n \in \mathbb{N})$.

12. fejezet

Többváltozós és vektorértékű függvények folytonossága

12.1. Alapfogalmak

12.1.1. Definíció. *Legyenek $k, m \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R}^k$ nemüres halmaz, $f\colon D \to \mathbb{R}^m$ függvény. Azt mondjuk, hogy az f függvény **folytonos az** $x_0 \in D$ **pontban**, ha bármely $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha $x \in D$ olyan, hogy $\|x - x_0\|_{\mathbb{R}^k} < \delta$, akkor*

$$\|f(x) - f(x_0)\|_{\mathbb{R}^m} < \varepsilon.$$

*Ha az f függvény a D halmaz minden pontjában folytonos, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény **folytonos a** D **halmazon**.*

12.1.1. Tétel (Átviteli elv). *Legyenek $k, m \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R}^k$ nemüres halmaz, $f\colon D \to \mathbb{R}^m$. Az f függvény akkor és csakis akkor folytonos az $x_0 \in D$ pontban, ha tetszőleges $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ D halmazbeli elemekből álló, x_0-hoz konvergáló sorozat esetén az $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat $f(x_0)$-hoz konvergál.*

12.1.1. Megjegyzés. *A fenti definíció jelölései és feltételei mellett, az f függvény akkor és csakis akkor nem folytonos az $x_0 \in D$ pontban, ha van olyan $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ D halmazbeli elemekből álló, x_0-hoz konvergáló sorozat, melyre az $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat nem $f(x_0)$-hoz konvergál.*

12.1.1. Példa. *Az*

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \qquad \left((x, y) \in \mathbb{R}^2\right)$$

módon megadott $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény az $\mathbb{R}^2$ halmaz minden pontjában folytonos.

Legyen ugyanis $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tetszőleges és $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ egy tetszőleges, olyan $\mathbb{R}^2$-beli sorozat, mely az (x_0, y_0) ponthoz konvergál. Ebben az esetben

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \quad \textit{és} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = y_0$$

teljesül, ezért

$$f(x_n, y_n) = x_n^2 + y_n^2 \xrightarrow{n\to\infty} x_0^2 + y_0^2 = f(x_0, y_0).$$

Így, az Átviteli elv miatt az f függvény folytonos az (x_0, y_0) pontban. Mivel az $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ pont tetszőleges volt, ezért az f függvény az $\mathbb{R}^2$ halmaz minden pontjában folytonos.

12.1.2. Példa. *Tekintsük az*

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

módon megadott $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvényt. Ekkor f nem folytonos a $(0, 0)$ pontban, azonban az $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ halmaz minden pontjában folytonos.

Tekintsük ugyanis az

$$(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozatot. Ekkor $\lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (0,0)$*, továbbá,*

$$f(x_n, y_n) = f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2} \neq 0 = f(0,0).$$

Ez pedig az Átviteli elv értelmében azt jelenti, hogy az f függvény nem folytonos a $(0,0)$ *pontban.*

Legyen most $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ *tetszőleges és* $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *egy tetszőleges, olyan $\mathbb{R}^2$-beli sorozat, mely az* (x_0, y_0) *ponthoz konvergál. Ebben az esetben*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \quad \text{és} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = y_0$$

teljesül továbbá $(x_n, y_n) \neq (0,0)$ *legfeljebb véges sok $n \in \mathbb{N}$ kivételével, ezért*

$$f(x_n, y_n) = \frac{x_n y_n}{x_n^2 + y_n^2} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{x_0 y_0}{x_0^2 + y_0^2} = f(x_0, y_0).$$

Így, az Átviteli elv miatt az f függvény folytonos az (x_0, y_0) *pontban. Mivel az* $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ *pont tetszőleges volt, ezért az f függvény* $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ *halmaz minden pontjában folytonos.*

12.2. Folytonosság és műveletek

12.2.1. Tétel. *Legyenek $k, m \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R}^k$ nemüres halmaz. Ha az $f, g : D \to \mathbb{R}^m$ függvények folytonosak az $x_0 \in D$ pontban, akkor*

(i) az $f + g$ függvény is folytonos az x_0 pontban;

(ii) tetszőleges $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén a λf függvény is folytonos az x_0 pontban;

12.2.2. Tétel (Az összetett függvény folytonossága). *Legyenek $n, m, k \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ nemüres halmaz és legyenek $f : D \to \mathbb{R}^m$ és $g : f(D) \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ adott függvények. Ha az f függvény folytonos az $x_0 \in D$ pontban, a g pedig az $f(x_0) \in f(D)$ pontban, akkor a $g \circ f : D \to \mathbb{R}^k$ függvény folytonos az x_0 pontban.*

12.3. Folytonosság és topologikus fogalmak

12.3.1. Tétel. *Legyen $D \subset \mathbb{R}^k$ nemüres halmaz, ekkor az $f : D \to \mathbb{R}^m$ függvény pontosan akkor folytonos a D halmazon, ha tetszőleges $V \subset \mathbb{R}^m$ nyílt halmaz esetén az $f^{-1}(V) \subset \mathbb{R}^k$ halmaz nyílt.*

12.3.2. Tétel. *Legyen $D \subset \mathbb{R}^k$ kompakt halmaz, $f : D \to \mathbb{R}^m$ folytonos függvény. Ekkor az $f(D) \subset \mathbb{R}^m$ halmaz kompakt.*

12.3.1. Definíció. *Legyen $D \subset \mathbb{R}^k$ nemüres halmaz, $f : D \to \mathbb{R}^m$. Azt mondjuk, hogy az f függvény a D* ***halmazon egyenletesen folytonos****, ha bármely $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $\delta > 0$ úgy, hogy ha $x, y \in D$ olyanok, hogy $\|x - y\|_{\mathbb{R}^k} < \delta$, akkor*

$$\|f(x) - f(y)\|_{\mathbb{R}^m} < \varepsilon.$$

12.3.1. Állítás (Egyenletes folytonosság $\Longrightarrow$ folytonosság). *Legyen $D \subset \mathbb{R}^k$ nemüres halmaz, $f : D \to \mathbb{R}^m$. Ha az f függvény a D halmazon egyenletesen folytonos, akkor f a D halmaz minden pontjában folytonos.*

12.3.3. Tétel. *Legyen $D \subset \mathbb{R}^k$ kompakt halmaz, $f : D \to \mathbb{R}^m$ folytonos függvény. Ekkor az f függvény egyenletesen folytonos a D halmazon.*

13. fejezet

Többváltozós és vektorértékű függvények határértéke

13.1. Alapfogalmak

13.1.1. Definíció. *Legyenek $n, m \in \mathbb{N}$, $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}^m$, $x_0 \in D'$ és $\alpha \in \mathbb{R}^m$. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek* ***az x_0 pontban a határértéke*** *α, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha $x \in D$ és $\|x - x_0\|_{\mathbb{R}^n} < \delta$, akkor $\|f(x) - \alpha\|_{\mathbb{R}^m} < \varepsilon$. Erre a $\lim_{x \to x_0} f(x) = \alpha$ jelölést alkalmazzuk.*

13.1.1. Tétel (Átviteli elv). *Legyenek $n, m \in \mathbb{N}$, $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}^m$, illetve $x_0 \in D'$ és $\alpha \in \mathbb{R}^m$. Ekkor $\lim_{x \to x_0} f(x) = \alpha$ pontosan akkor teljesül, ha tetszőleges $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ D–beli, x_0–hoz konvergáló sorozat esetén $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \alpha$ teljesül.*

13.2. Határérték és műveletek

13.2.1. Tétel (Határérték és műveletek). *Legyenek $n, m \in \mathbb{N}$, $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^n$, $x_0 \in D'$ $f, g : D \to \mathbb{R}^m$, illetve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^m$. Ha az f és g függvényeknek létezik a határértéke az x_0 pontban és*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \alpha \quad \text{és} \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = \beta,$$

akkor

(i) az $f + g$ függvénynek is létezik az x_0 pontban a határértéke

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \alpha + \beta;$$

(ii) tetszőleges $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén a $\lambda \cdot f$ függvénynek is létezik az x_0 pontban a határértéke és

$$\lim_{x \to x_0} \lambda \cdot f(x) = \lambda \cdot \alpha.$$

13.2.2. Tétel (Határérték és folytonosság). *Legyenek $n, m \in \mathbb{N}$, $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}^m$ és $x_0 \in D$. Ekkor az f függvény pontosan akkor folytonos az x_0 pontban, ha létezik a $\lim_{x \to x_0} f(x)$ határérték, és*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

13.2.1. Példa.

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2} = 0.$$

A határérték kiszámításához az Átviteli elvet fogjuk használni, ezért legyen $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ egy tetszőleges $\mathbb{R}^2$-beli, a $(0, 0)$ ponthoz konvergáló sorozat. Ekkor

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x_n^4 - y_n^4}{x_n^2 + y_n^2} = \lim_{n \to \infty} \frac{(x_n^2 + y_n^2) \cdot (x_n^2 - y_n^2)}{x_n^2 + y_n^2} = \lim_{n \to \infty} \left(x_n^2 - y_n^2\right) = 0.$$

13.2.2. Példa. *Az*

$$f(x,y) = \sin\left(\frac{1}{xy}\right) \qquad \left((x,y) \in \mathbb{R}^2,\ xy \neq 0\right)$$

függvénynek nem létezik a $(0,0)$ *pontban a határértéke.*

Ehhez tekintsük ugyanis az

$$(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

módon megadott $\mathbb{R}^2$*-beli, a* $(0,0)$ *ponthoz konvergáló sorozatot. Ekkor*

$$f(x_n, y_n) = f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \sin\left(\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}}\right) = \sin(n) \qquad (n \in \mathbb{N})\,.$$

Mivel a $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat divergens, ezért azt kaptuk, hogy van olyan* $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$*,* $\mathbb{R}^2$*-beli, a* $(0,0)$ *ponthoz konvergáló sorozat, melyre a függvényértékekből álló* $(f(x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat divergens. Így, az Átviteli elv értelmében a fent megadott függvénynek nem létezik a határértéke a* $(0,0)$ *pontban.*

13.2.3. Példa.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x\sin\left(\frac{1}{y}\right) + y\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

Legyen $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *egy tetszőleges* $\mathbb{R}^2$*-beli, a* $(0,0)$ *ponthoz konvergáló sorozat. Ekkor*

$$f(x_n, y_n) = x_n\sin\left(\frac{1}{y_n}\right) + y_n\sin\left(\frac{1}{x_n}\right) \qquad (n \in \mathbb{N})\,.$$

Mivel minden $z \in \mathbb{R}$ *esetén* $-1 \leq \sin(z) \leq 1$*, ezért*

$$\left|x_n\sin\left(\frac{1}{y_n}\right) + y_n\sin\left(\frac{1}{x_n}\right)\right| \leq |x_n| + |y_n| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

így,

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = 0.$$

13.2.1. Definíció. *Legyenek* $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}$*,* $x_0 \in D_1'$*,* $y_0 \in D_2'$ *és* $f\colon D_1 \times D_2 \to \mathbb{R}$*. Rögzített* $y \in D_2$ *esetén tekintsük az*

$$D_1 \ni x \longmapsto f(x,y)$$

függvényt. Tegyük fel, hogy ennek a függvénynek létezik az x_0 *pontban a határértéke. Ekkor a* $\lim_{x\to x_0} f(x,y)$ *érték függ* y*-tól. Tekintsük most az*

$$D_2 \ni y \longmapsto \lim_{x\to x_0} f(x,y)$$

függvényt. Ha ennek a függvénynek létezik az y_0 *pontban a határértéke, akkor azt mondjuk, hogy létezik a* $\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0}$ ***iterált határérték****. A* $\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)$ *iterált határérték analóg módon értelmezhető.*

13.2.3. Tétel. *Legyenek* $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}$*,* $x_0 \in D_1'$*,* $y_0 \in D_2'$ *és* $f\colon D_1 \times D_2 \to \mathbb{R}$*. Tegyük fel, hogy az* f *függvénynek az* (x_0, y_0) *pontban létezik a határértéke.*

(i) Ha minden rögzített $x \in D_1$ *esetén az* $f(x,\cdot)\colon D_2 \to \mathbb{R}$ *függvénynek létezik az* y_0 *pontban a határértéke, akkor létezik a* $\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)$ *határérték is és*

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y) = \lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y).$$

(ii) Ha minden rögzített $y \in D_2$ *esetén az* $f(\cdot,y)\colon D_1 \to \mathbb{R}$ *függvénynek létezik az* x_0 *pontban a határértéke, akkor létezik a* $\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)$ *határérték is és*

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y) = \lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y).$$

13.2.4. Példa. *Tekintsük az*

$$f(x,y) = \frac{x-y}{x+y} \qquad \Big((x,y) \in \mathbb{R}^2, x+y \neq 0\Big)$$

függvényt. Ekkor

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{x-y}{x+y}\right) = \lim_{x\to 0} 1 = 1$$

és

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{x-y}{x+y}\right) = \lim_{y\to 0} -1 = -1.$$

13.2.5. Példa. *Legyen*

$$f(x,y) = \frac{y}{x+y} \sin\left(\frac{1+xy}{y}\right) \qquad \Big((x,y) \in \mathbb{R}^2, x+y \neq 0, y \neq 0\Big).$$

Ekkor

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{y}{x+y} \sin\left(\frac{1+xy}{y}\right)\right) = \lim_{y\to 0} \sin\left(\frac{1}{y}\right),$$

ami nem létezik, így nem létezik a $\lim_{y\to 0} \lim_{x\to 0} f(x,y)$ *határérték. Azonban,*

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{y}{x+y} \sin\left(\frac{1+xy}{y}\right)\right) = \lim_{x\to 0} 0 = 0.$$

Vagyis, az egyik iterált határérték létezik, míg a másik nem.

13.2.6. Példa. *Legyen*

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \qquad \Big((x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\Big).$$

Ekkor

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) = 0,$$

azonban a

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

határérték nem létezik.

14. fejezet

Többváltozós és vektorértékű függvények differenciálhatósága

14.1. Fréchet-differenciálhatóság

14.1.1. Definíció. *Legyenek $n, m \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ nemüres, nyílt halmaz, $f\colon D \to \mathbb{R}^m$ függvény. Azt mondjuk, hogy az f függvény **Fréchet-differenciálható** az $x_0 \in D$ pontban, ha létezik egy olyan $A \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ lineáris leképezés, hogy*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)\|_{\mathbb{R}^m}}{\|x - x_0\|_{\mathbb{R}^n}} = 0$$

teljesül. Ebben az esetben az A lineáris leképezést az f függvény x_0 pontbeli differeciálhányadosának nevezzük és rá a továbbiakban az $f'(x_0)$ jelölést használjuk.

14.1.1. Megjegyzés. *A Fréchet-differenciálhatóság helyett a totális differenciálhatóság elnevezés is használatos.*

14.1.2. Definíció. *Legyenek $n, m \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ nemüres, nyílt halmaz, $f\colon D \to \mathbb{R}^m$ függvény. Azt mondjuk, hogy az f függvény **lineárisan approximálható** az $x_0 \in D$ pontban, ha létezik egy olyan $A \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ lineáris leképezés és egy olyan $\omega\colon D \to \mathbb{R}^m$ leképezés, melyre $\lim_{x \to x_0} \omega(x) = 0$ teljesül, úgy, hogy*

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + \omega(x)\,\|x - x_0\|_{\mathbb{R}^n} \qquad (x \in D)\,.$$

14.1.1. Tétel (Fréchet-differenciálhatóság $\Longleftrightarrow$ lineáris approximálhatóság). *Legyenek $n, m \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ nemüres, nyílt halmaz, $f\colon D \to \mathbb{R}^m$ függvény. Ekkor az f függvény pontosan akkor Fréchet-differenciálható az $x_0 \in D$ pontban, ha f lineárisan approximálható ebben a pontban.*

14.1.1. Állítás (A differenciálhányados egyértelműsége). *Legyenek $n, m \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ nemüres, nyílt halmaz, $f\colon D \to \mathbb{R}^m$ függvény. Ha $A_1, A_2 \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ olyan lineáris leképezések, hogy $f'(x_0) = A_1$ és $f'(x_0) = A_2$ is teljesül, akkor $A_1 = A_2$.*

14.1.2. Tétel (Differenciálhatóság $\Longrightarrow$ folytonosság). *Legyenek $n, m \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ nemüres, nyílt halmaz, $f\colon D \to \mathbb{R}^m$ függvény. Ha az f függvény Fréchet-differenciálható az $x_0 \in D$ pontban, akkor f folytonos az $x_0 \in D$ pontban.*

14.1.2. Megjegyzés (Folytonosság $\not\Rightarrow$ Fréchet-differenciálhatóság). *Az előző tétel megfordítása **nem** igaz, hiszen az*

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{ha } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

módon megadott $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény folytonos a $(0, 0)$ pontban, azonban ebben a pontban nem differenciálható.

14.2. Iránymenti és parciális differenciálhatóság

14.2.1. Definíció. *Legyenek $n, m \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ nemüres, nyílt halmaz, $x_0 \in D$ $f\colon D \to \mathbb{R}^m$ függvény és $v \in \mathbb{R}^n$. Ha létezik a*

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}$$

határérték, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény az x_0 pontban a v ***irány mentén differenciálható****. Ebben az esetben a fenti határértékre a $D_v f(x_0)$ jelölést alkalmazzuk.*

14.2.1. Tétel (Fréchet-differenciálhatóság $\Longrightarrow$ iránymenti differenciálhatóság). *Legyenek $n, m \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ nemüres, nyílt halmaz, $f\colon D \to \mathbb{R}^m$ függvény. Ha az f függvény az x_0 pontban Fréchet-differenciálható, akkor ebben a pontban tetszőleges $v \in \mathbb{R}^n$ irány mentén is differenciálható és*

$$D_v f(x_0) = f'(x_0) \cdot v$$

teljesül.

14.2.1. Megjegyzés (Iránymenti differenciálhatóság $\not\Rightarrow$ Fréchet-differenciálhatóság). *Az előző tétel megfordítása* ***nem*** *igaz, mert például az*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

módon megadott $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény minden $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ irány mentén differenciálható a $(0,0)$ pontban és

$$D_v f(0,0) = \frac{v_1^3}{v_1^2 + v_2^2},$$

azonban az f függvény nem Fréchet-differenciálható a $(0,0)$ pontban.

14.2.2. Definíció. *Legyenek $n, m \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ nemüres, nyílt halmaz, $f\colon D \to \mathbb{R}^m$ függvény. Legyen továbbá minden $i = 1, \dots, n$ esetén*

$$e_i = (0, \dots, 0, \overset{i}{1}, 0, \dots, 0).$$

Ha létezik a $D_{e_i} f(x_0)$ iránymenti derivált, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény az x_0 pontban az i-edik változója szerint ***parciálisan differenciálható*** *az $x_0 \in D$ pontban. Ebben az esetben a $D_{e_i} f(x_0)$ jelölés helyett általában a $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$ jelölést fogjuk használni.*

14.2.2. Tétel (Fréchet-differenciálhatóság $\Longrightarrow$ parciális differenciálhatóság). *Legyenek $n, m \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ nemüres, nyílt halmaz, $f\colon D \to \mathbb{R}^m$ függvény. Ha az f függvény az $x_0 \in D$ pontban Fréchet-differenciálható, akkor az f függvény ebben a pontban mindegyik változója szerint parciálisan is differenciálható és*

$$f'(x_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}.$$

14.2.2. Megjegyzés (Parciális differenciálhatóság $\not\Rightarrow$ folytonosság). *A parciális differenciálhatóságból* ***nem*** *feltétlenül következik folytonosság, ugyanis az*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

módon megadott függvény esetében

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \quad \textit{és} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0,$$

azonban az f függvény nem folytonos a $(0,0)$ pontban.

14.2.3. Megjegyzés (Parciális differenciálhatóság $\not\Rightarrow$ iránymenti differenciálhatóság). *A parciális differenciálhatóságból nem következik az iránymenti differenciálhatóság, ugyanis például az*

$$f(x,y) = \sqrt{|xy|} \qquad \left((x,y) \in \mathbb{R}^2\right)$$

módon megadott függvény esetében

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \quad \textit{és} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

ha azonban $v \in \mathbb{R}^2$ olyan, mely nem párhuzamos az e_1 és e_2 irányok egyikével sem, akkor nem létezik a $D_v f(0,0)$ iránymenti derivált.

14.2.4. Megjegyzés (Iránymenti differenciálhatóság $\not\Rightarrow$ parciális differenciálhatóság). *Az iránymenti differenciálhatóságból nem következik a parciális differenciálhatóság. Ehhez legyenek $u = (u_1, u_2), v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ olyan vektorok melyekre $\{u, v\} \neq \{e_1, e_2\}$ és tekintsük az*

$$f(x,y) = \sqrt{|(u_1x + v_1y)(u_2x + v_2y)|} \qquad \left((x,y) \in \mathbb{R}^2\right)$$

módon megadott $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvényt. Ekkor a $D_u f(0,0)$ és $D_v f(0,0)$ iránymenti deriváltak léteznek, azonban az f függvény egyik változója szerint sem differenciálható parciálisan a $(0,0)$ pontban.

14.2.3. Tétel (Folytonos parciális differenciálhatóság $\Longrightarrow$ Fréchet-differenciálhatóság). *Legyenek $n, m \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ nemüres, nyílt halmaz, $f\colon D \to \mathbb{R}^m$ függvény. Ha az f függvény az $x_0 \in D$ pont egy környezetében mindegyik változója szerint parciálisan differenciálható és ezek a parciális deriváltak folytonosak az $x_0 \in D$ pontban, akkor az f függvény az $x_0 \in D$ pontban differenciálható.*

14.2.4. Tétel (Differenciálhatóság és műveletek). *Legyenek $n, m \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ nemüres, nyílt halmaz, $x_0 \in D$. Ha az $f, g\colon D \to \mathbb{R}^m$ függvények differenciálhatóak az $x_0 \in D$ pontban, akkor*

— *az $f + g$ függvény is differenciálható az x_0 pontban és*

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0);$$

— *a $\lambda \cdot f$ függvény is differenciálható az x_0 pontban és*

$$(\lambda \cdot f)'(x_0) = \lambda \cdot f'(x_0).$$

14.2.5. Tétel (Az összetett függvény differenciálási szabálya). *Legyenek $n, m, k \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ nemüres, nyílt halmaz, $x_0 \in D$, $f\colon D \to \mathbb{R}^m$ és $g\colon f(D) \to \mathbb{R}^k$ függvények. Ha az f függvény differenciálható az $x_0 \in D$ pontban, a g függvény pedig az $f(x_0) \in f(D)$ pontban, akkor a $g \circ f$ függvény differenciálható az x_0 pontban és*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'\left(f(x_0)\right) \cdot f'(x_0).$$

14.3. Magasabbrendű deriváltak

14.3.1. Definíció. *Legyen $n \in \mathbb{N}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ egy nyílt halmaz, $x_0 \in D$, $f : D \to \mathbb{R}$ pedig egy függvény. Ha f az x_0 pont egy környezetében parciálisan differenciálható, és valamely $1 \leq i \leq n$ és $1 \leq j \leq n$ esetén $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$-nek az x_0 pontban létezik a j-edik változó szerinti parciális deriváltja, tehát $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0)$, akkor azt mondjuk, hogy f az x_0 pontban a **j-edik változó szerint kétszer parciálisan differenciálható**. Ha ez minden $1 \leq j \leq n$ esetén teljesül, akkor azt mondjuk, hogy f az x_0 pontban **kétszer parciálisan differenciálható**. Ha a $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ függvények minden $1 \leq i \leq n$ esetén az x_0 pontban differenciálhatók, akkor azt mondjuk, hogy f **az x_0 pontban kétszer differenciálható**.*

14.3.1. Megjegyzés. *A korábbiakból világos, hogy ha az f egy pontban kétszer differenciálható, akkor ott kétszer parciálisan differenciálható, de ez fordítva nem igaz.*

14.3.2. Definíció. *Ha $D \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz és f a D minden pontjában kétszer differenciálható, akkor azt mondjuk, hogy f **kétszer differenciálható**. A $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0)$ számokat az f függvény x_0-beli **másodrendű parciális deriváltjainak** nevezzük.*

*Ha $D \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, és ezek a D minden pontjában léteznek, akkor értelemszerűen definiáljuk az f másodrendű parciális deriváltjait, mint a $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} : D \to \mathbb{R}$ függvényeket. Ezek száma általában n^2, és előfordulhat, hogy valamely pontban $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$. Ha a D halmaz nyílt, az f kétszer parciálisan differenciálható D-n, és az összes másodrendű parciális deriváltjai folytonosak D-n, akkor azt mondjuk, hogy f **kétszer folytonosan parciálisan differenciálható D-n**. Egy korábbi tétel alapján az is világos, hogy ha f kétszer folytonosan parciálisan differenciálható, akkor kétszer folytonosan differenciálható.*

Könnyű látni, hogy ezzel a módszerrel rekurzív módon értelmezhetjük egy $f : D \to \mathbb{R}$ függvénynek a D halmaz x_0 belső pontjában az l-szeri parciális differenciálhatóságát, az l-szeri differenciálhatóságát és az l-szeri folytonos differenciálhatóságát. A magasabbrendű parciális deriváltak jelölésére azt a módszert használjuk, hogy ha $l \geq 2$ pozitív egész, és $1 \leq i_1, i_2, \ldots, i_l \leq k$, akkor $\frac{\partial^l f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_l}}(x_0)$ jelenti a $\frac{\partial^l f}{\partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_l}}(x_0)$ függvénynek (amely szükségképpen értelmezve van x_0 egy környezetében) az x_{i_1}-edik változó szerinti parciális deriváltját.

*Ha $k, l \in \mathbb{N}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz és az $f : D \to \mathbb{R}$ függvény l-szer folytonosan differenciálható, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény **$\mathscr{C}^l$-osztályú**. A $\mathscr{C}^0$-osztályú függvények alatt a folytonos függvényeket értjük.*

*Ha $f : D \to \mathbb{R}^m$ vektor-vektor függvény, akkor f-et $\mathscr{C}^l$-osztályúnak mondjuk, ha minden komponense $\mathscr{C}^l$-osztályú. Az összes $f : D \to \mathbb{R}^m$ típusú $\mathscr{C}^l$-osztályú függvények halmazát $\mathscr{C}^l(D, \mathbb{R}^m)$ jelöli, melyet $m = 1$ esetén egyszerűen $\mathscr{C}^l(D)$ módon rövidítünk. Ha f minden l pozitív egész esetén $\mathscr{C}^l$-osztályú, akkor azt mondjuk, hogy **$\mathscr{C}^\infty$-osztályú**, vagy **akárhányszor differenciálható**. Az ilyen függvények halmazát $\mathscr{C}^\infty(D, \mathbb{R}^m)$, illetve az $m = 1$ esetben $\mathscr{C}^\infty(D)$ jelöli.*

14.3.1. Tétel (Schwarz–Young). *Legyen $D \subseteq \mathbb{R}^2$ nyílt halmaz, $f : D \to \mathbb{R}$ pedig egy függvény, melyre a D minden pontjában léteznek a $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ és $\frac{\partial f}{\partial y}$ parciális deriváltak. Ha $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ a D halmaz x_0 pontjában folytonos, akkor létezik $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0)$, és*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0).$$

14.3.2. Megjegyzés. *A tétel szerint tehát, ha l pozitív egész, és f egy nyílt halmazon l-szer folytonosan differenciálható, akkor a legfeljebb l-edrendű vegyes parciális deriváltjaiban a parciális differenciálások sorrendje tetszőlegesen felcserélhető. Ez a következő jelölés használatát teszi lehetővé: legyenek $l, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l$ pozitív egészek, $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_l \leq k$ egészek. Ekkor*

$$\frac{\partial^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_l} f}{\partial x_{i_1}^{\alpha_1} \partial x_{i_2}^{\alpha_2} \ldots \partial x_{i_l}^{\alpha_l}}$$

az f függvénynek azt az $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_l$-edrendű parciális deriváltját jelenti, amelynél az i_1-edik változó szerint α_1-szer, az i_2-edik változó szerint α_2-ször, stb., differenciáltunk, tetszőleges sorrendben.

14.3.3. Megjegyzés. *Legyen*

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Ekkor

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 1 \neq -1 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Ez azt jelenti, hogy a Schwarz–Young-tételben szereplő feltételek egyike sem gyengíthető.

14.3.3. Definíció. *Legyen $n, k \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ nemüres, nyílt halmaz, $f \colon D \to \mathbb{R}$ egy k-szor folytonosan differenciálható függvény. Ekkor az f függvény k-**edik differenciál**ját a*

$$d_x^k f(h) = \sum_{0 \le j_1, \dots, j_n \le k, j_1 + \dots + j_n = k} \frac{k!}{j_1! \dots j_n!} \frac{\partial^k f(x)}{\partial x_1^{j_1} \dots \partial x_n^{j_n}} h_1^{j_1} \dots h_n^{j_n}.$$

módon értelmezzük.

14.3.2. Tétel (Taylor). *Legyenek $n, k \in \mathbb{N}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex, nyílt halmaz, $x_0, x_0 + h$ a D pontjai, $f : D \to \mathbb{R}$ pedig $\mathscr{C}^{k+1}$-osztályú függvény. Ekkor létezik olyan $0 \le \theta \le 1$ szám, hogy*

$$f(x_0 + h) = \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!} d^i f(x_0)(h) + \frac{1}{(k+1)!} d^{k+1} f(x_0 + \theta h)(h).$$

14.3.4. Megjegyzés. *A fenti tételben szereplő egyenlőséget **Taylor-formulá**nak, míg a formula jobb oldalán álló*

$$P(x) = \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!} d^i f(x_0)(h)$$

*függvényt az f függvény x_0 pontbeli k-**adrendű Taylor-polinomjá**nak hívjuk. Ha $x_0 = 0$, akkor a **Maclaurin-formula, Maclaurin-polinom** elnevezéseket szoktuk használni.*

14.4. Lokális szélsőértékszámítás

14.4.1. Definíció. *Legyen $D \subseteq \mathbb{R}^n$ egy halmaz, x_0 a D halmaz egy pontja, $f : D \to \mathbb{R}$ pedig egy függvény. Akkor mondjuk, hogy az f függvénynek az x_0 pontban **lokális minimuma (maximuma) van**, ha van az x_0-nak olyan környezete, melynek D-beli x pontjaiban $f(x) \ge f(x_0)$ ($f(x) \le f(x_0)$) teljesül. Más szóval, létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha x a D halmaz olyan pontja, melyre fennáll az $\|x - x_0\| < \delta$ egyenlőtlenség, akkor*

$$f(x) \ge f(x_0), \quad \text{illetve} \quad f(x) \le f(x_0)$$

*teljesül. Ha itt $x \ne x_0$ esetén szigorú egyenlőtlenség teljesül, akkor **szigorú minimum**ról, illetve **szigorú maximum**ról beszélünk. A „lokális" jelzőt „globális" váltja fel, ha ezek a feltételek bármely $\delta > 0$ esetén, azaz, a D halmaz minden x pontjában teljesülnek. A lokális (globális) minimumhelyet és maximumhelyet közösen **szélsőértékhely**nek nevezzük, magát az $f(x_0)$ függvényértéket pedig a megfelelő szélsőérték értékének mondjuk.*

14.4.1. Tétel. *Legyen $D \subseteq \mathbb{R}^n$ egy halmaz, x_0 a D halmaz egy belső pontja, $f : D \to \mathbb{R}$ pedig egy x_0-ban parciálisan differenciálható függvény. Ha az f függvénynek az x_0 pontban lokális szélsőértéke van, akkor $f'(x_0) = 0$.*

14.4.2. Definíció. *Legyen $D \subseteq \mathbb{R}^n$ egy halmaz, x_0 a D halmaz egy belső pontja, $f : D \to \mathbb{R}$ pedig egy x_0-ban parciálisan differenciálható függvény. Ha az x_0 pontban az f függvény összes parciális deriváltja nulla, akkor az x_0 pontot az f függvény **stacionárius pontj**ának nevezzük.*

14.4.1. Megjegyzés. *A fenti tétel feltételei mellett tehát az f függvénynek csak stacionárius pontokban lehet lokális szélsőértéke.*

14.4.2. Tétel. *Legyen $D \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, $f : D \to \mathbb{R}$ egy $\mathscr{C}^2(D)$-osztályú függvény, s a D-beli x_0 pont legyen az f stacionárius pontja. Ha az*

$$f''(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

mátrix

— *pozitív definit, akkor az f függvénynek az x_0 pontban lokális minimuma van;*

— *negatív definit, akkor az f függvénynek az x_0 pontban lokális maximuma van;*

— *indefinit, akkor az f függvénynek az x_0 pontban nincs lokális szélsőértéke.*

14.4.1. Példa. *Legyen*

$$f(x,y) = x^2 + 12y^2 - 3x + 10y + 100 \qquad \left((x,y) \in \mathbb{R}^2\right).$$

Ekkor

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 2x - 3 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 24y + 10 \end{aligned} \qquad \left((x,y) \in \mathbb{R}^2\right)$$

A fentiek alapján az $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ *pont pontosan akkor stacionárius pontja az f függvénynek, ha* $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$. *Így, ebben az esetben*

$$\begin{cases} 2x - 3 &= 0 \\ 24y + 10 &= 0 \end{cases}$$

Ebből az adódik, hogy az $(x_0, y_0) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{10}\right)$ *pont stacionárius pontja f-nak. Továbbá,*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(x,y) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 24$$

Így,

$$f''(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 24 \end{pmatrix}.$$

Mivel az $f''(x_0, y_0)$ *mátrix pozitív definit, ezért az* (x_0, y_0) *pont az f függvénynek lokális minimumhelye.*

14.4.2. Példa. *Legyen*

$$f(x,y) = x^2 - y^2 \qquad \left((x,y) \in \mathbb{R}^2\right).$$

Ekkor

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 2x \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= -2y \end{aligned} \qquad \left((x,y) \in \mathbb{R}^2\right)$$

A fentiek alapján az $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ *pont pontosan akkor stacionárius pontja az f függvénynek, ha* $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$. *Így, ebben az esetben*

$$\begin{cases} 2x &= 0 \\ -2y &= 0 \end{cases}$$

Ebből az adódik, hogy az $(x_0, y_0) = (0, 0)$ *pont stacionárius pontja f-nak. Továbbá,*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(x,y) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -2$$

Így,

$$f''(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Mivel az $f''(x_0, y_0)$ *mátrix indefinit, ezért az* (x_0, y_0) *pont az f függvénynek nem lokális szélsőértékhelye. Így, az* (x_0, y_0) *pont az f függvénynek nyeregpontja.*

14.5. Feltételes szélsőértékszámítás

Az alkalmazások során gyakran találkozunk olyan problémával, melynél egy adott függvény szélsőértékeit kell meghatározni, de nem az egész értelmezési tartományán, hanem annak csak egy bizonyos feltételt teljesítő pontjaiból álló részhalmazán. Ez a feltétel gyakran bizonyos egyenletek, illetve egyenlőtlenségek formájában van megadva. Most pontosan megfogalmazzuk a problémát az egyenlőségekkel adott feltételek esetére, s egy megoldási módszert is adunk.

14.5.1. Definíció. *Legyen $D \subseteq \mathbb{R}^n$ egy halmaz, $x_0 \in D$, $f : D \to \mathbb{R}$ és $g : D \to \mathbb{R}^m$ pedig adott függvények. Akkor mondjuk, hogy* ***az f függvénynek az x_0 pontban a $g = 0$ feltétel mellett feltételes minimuma (maximuma) van****, ha $g(x_0) = 0$, és van az x_0 pontnak olyan környezete, melynek minden D-be eső olyan x pontjában, melyre $g(x) = 0$ teljesül, ugyancsak fennáll $f(x) \geq f(x_0)$ ($f(x) \leq f(x_0)$). A feltételes minimumot és maximumot közösen* ***feltételes extrémumnak****, vagy* ***feltételes szélsőértéknek*** *nevezzük.*

14.5.2. Definíció. *Legyen $D \subseteq \mathbb{R}^n$ egy halmaz, $f : D \to \mathbb{R}$ és $g : D \to \mathbb{R}^m$ pedig adott függvények. Legyen minden D-beli x és minden $\mathbb{R}^m$-beli λ esetén*

$$F(x, \lambda) = f(x) + \langle \lambda, g(x) \rangle .$$

Az F függvényt az f, g függvényekhez tartozó ***Lagrange-függvénynek****, λ koordinátáit pedig* ***Lagrange-féle multiplikátoroknak*** *nevezzük.*

14.5.1. Tétel (Lagrange-féle multiplikátor elv). *Legyen $D \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ nyílt halmaz, $(x_0, y_0) \in D$, $f : D \to \mathbb{R}$ és $g : D \to \mathbb{R}^m$ pedig $\mathscr{C}^1$-osztályú függvények. Ha az f függvénynek az (x_0, y_0) pontban a $g = 0$ feltétel mellett feltételes szélsőértéke van, és az $A = g'(x_0, y_0)$ jelöléssel az $A(0, y)$ mátrix invertálható, akkor létezik $\mathbb{R}^m$-ben olyan λ, hogy (x_0, y_0, λ) az f, g függvényekhez tartozó Lagrange-függvénynek stacionárius pontja.*

14.5.1. Megjegyzés. *A tétel alapján módszert kapunk a lehetséges feltételes szélsőértékhelyek meghatározására. Ehhez ugyanis az*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x_1}(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) &= 0 \\
&\vdots \\
\frac{\partial F}{\partial x_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) &= 0 \\
\frac{\partial F}{\partial \lambda_1}(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) &= 0 \\
&\vdots \\
\frac{\partial F}{\partial \lambda_m}(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) &= 0
\end{aligned}$$

egyenletrendszert kell megoldani, mely $n + m$ egyenletből áll, és $n + m$ ismeretlent tartalmaz. Ennek az egyenletrendszernek az utolsó m egyenlete éppen a feltételi egyenletek teljesülését jelenti. A feltételes szélsőértékprobléma megoldásai ezen egyenletrendszer $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ megoldásai közül kerülnek ki. Az egyenletrendszer megoldása során tehát elsősorban az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ismeretlenek meghatározására kell törekednünk, a $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ ismeretlenek értékei a probléma szempontjából érdektelenek.

14.5.1. Példa. *Tekintsük az*

$$\begin{cases} f(x, y) &= x^2 - y^2 \\ g(x, y) &= x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

feltételes szélsőérték problémát. Ekkor az f és g függvények Lagrange-függvénye

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y) = (\lambda + 1)x^2 + (\lambda - 1)y^2 - \lambda \qquad \big((x, y, \lambda) \in \mathbb{R}^3\big).$$

Ebben az esetben

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, \lambda) = 2(\lambda + 1)x, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, \lambda) = 2(\lambda - 1)y, \quad \frac{\partial F}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - 1.$$

A

$$\begin{cases} 2(\lambda+1)x &= 0 \\ 2(\lambda-1)y &= 0 \\ x^2+y^2-1 &= 0 \end{cases}$$

egyenletrendszer megoldásai

$$(1,0,-1),\ (-1,0,-1),\ (0,-1,1),\ (0,1,1).$$

Könnyen látható, hogy a fenti f függvények a $g(x,y)=0$ feltételre vonatkozóan az $(1,0)$ és a $(-1,0)$ pontokban lokális maximuma, míg a $(0,-1)$ és a $(0,1)$ pontokban lokális minimuma van.

14.5.2. Példa. *Egy $4\,\mathrm{m}^3$ űrtartalmú, felül nyitott téglatest alaú tartályt szeretnénk készíteni. Hogyan válasszuk meg a tartály méreteit, hogy a tartály elkészítése során felhasznált anyag a lehető legkevesebb legyen?*

A tartály oldalhosszait jelöljék a,b,c. Mivel $4\mathrm{m}^3$ űrtartalmú tartályt szeretnénk készíteni, így

$$abc=4.$$

Ehhez

$$f(a,b,c)=2ab+2bc+ac$$

mennyiségű anyagra van szükségünk. Így a feladat az

$$\begin{cases} f(a,b,c) &= 2ab+2bc+ac \\ g(a,b,c) &= abc-4 \end{cases}$$

feltételes szélsőérték problémára vezethető vissza. Az f és g függvények Lagrange-függvénye

$$F(a,b,c,\lambda)=f(a,b,c)+\lambda g(a,b,c)=2ab+2bc+ac-\lambda abc-4\lambda.$$

Ekkor,

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial a}(a,b,c,\lambda) &= 2b+c+\lambda bc \\ \frac{\partial F}{\partial b}(a,b,c,\lambda) &= 2a+2c+\lambda ac \\ \frac{\partial F}{\partial c}(a,b,c,\lambda) &= 2b+a+\lambda ab \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda}(a,b,c,\lambda) &= abc-4 \end{aligned}$$

Az

$$\begin{cases} 2b+c+\lambda bc &= 0 \\ 2a+2c+\lambda ac &= 0 \\ 2b+a+\lambda ab &= 0 \\ abc-4 &= 0 \end{cases}$$

egyenletrendszer egyetlen megoldása

$$a=2,\ b=1,\ c=2,\ \lambda=-2$$

azaz, akkor használjuk fel a legkevesebb anyagot, ha a tartály oldalhosszait rendre 2, 1 és 2 méternek választjuk.

Tárgymutató

Irodalomjegyzék

[1] T. M. Apostol, *Calculus. Vol. I: One-variable calculus, with an introduction to linear algebra*, Second edition Blaisdell Publishing Co. Ginn and Co., Waltham, Mass.-Toronto, Ont.-London 1967.

[2] T. M. Apostol, *Calculus. Vol. II: Multi-variable calculus and linear algebra, with applications to differential equations and probability.* Second edition Blaisdell Publishing Co. Ginn and Co., Waltham, Mass.-Toronto, Ont.-London 1969

[3] Bárczy Barnabás, *Integrálszámítás*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1997.

[4] Fekete Zoltán, Zalay Miklós, *Többváltozós függvények analízise*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 2007.

[5] B. P. Gyemidovics, *Matematikai analízis feladatgyűjtemény*, Tankönyvkiadó, 1974.

[6] Lajkó Károly, *Kalkulus I. (egyetemi jegyzet)*, DE Matematikai és Informatikai Intézet, Debrecen, 2002.

[7] Lajkó Károly, *Kalkulus I. példatár (1.-2. kötet)*, DE Matematikai és Informatikai Intézet, Debrecen, 2002.

[8] E. Mendleson, *3000 Solved Problems in Calculus*, McGraw Hill Professional, 1988.

[9] Rimán János, *Matematikai analízis I.*, EKTF, Líceum Kiadó, Eger, 1998.

[10] Rimán János, *Matematikai analízis feladatgyűjtemény I.-II.*, EKTF, Líceum Kiadó, Eger, 1998.

[11] W. Rudin, *A matematikai analízis alapjai*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1978.

[12] Szabó Tamás, *Kalkulus példák és feladatsorok*, Polygon jegyzettár, Szeged, 2000.