# Alkalmazott matematika

Baran Ágnes

Interpoláció 2.

# Hermite-interpoláció

## 1. feladat

Határozza meg az alábbi adatokra illeszkedő minimális fokszámú polinomot!

(a)

| $x_i$ | $-1$ | $1$ |
|---|---|---|
| $f(x_i)$ | $7$ | $3$ |
| $f'(x_i)$ | $-8$ | $-4$ |

(b)

| $x_i$ | $-1$ | $1$ |
|---|---|---|
| $f(x_i)$ | $3$ | $1$ |
| $f'(x_i)$ | $9$ | $-7$ |
| $f''(x_i)$ | | $-18$ |

(c)

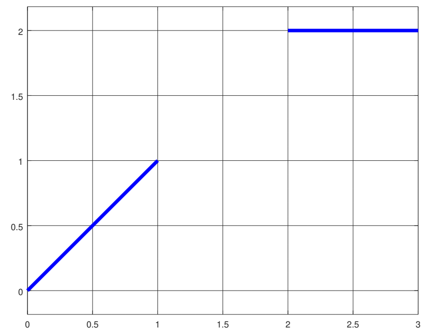
| $x_i$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|
| $f(x_i)$ | $6$ | $94$ |
| $f'(x_i)$ | $17$ | $213$ |

(d)

| $x_i$ | $-2$ | $-1$ |
|---|---|---|
| $f(x_i)$ | $13$ | $3$ |
| $f'(x_i)$ | | $14$ |

## 2. feladat

Az ábrán kékkel jelölt két útszakaszt szeretnénk összekötni úgy, hogy a végeredményként kapott út vonalában ne legyen törés. Adja meg az összekötő útszakaszt leíró függvényt.

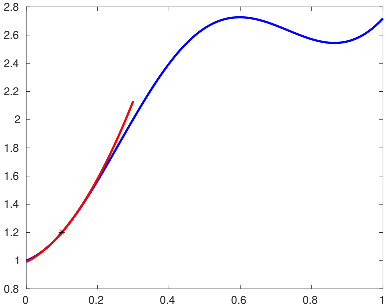


## 3. feladat

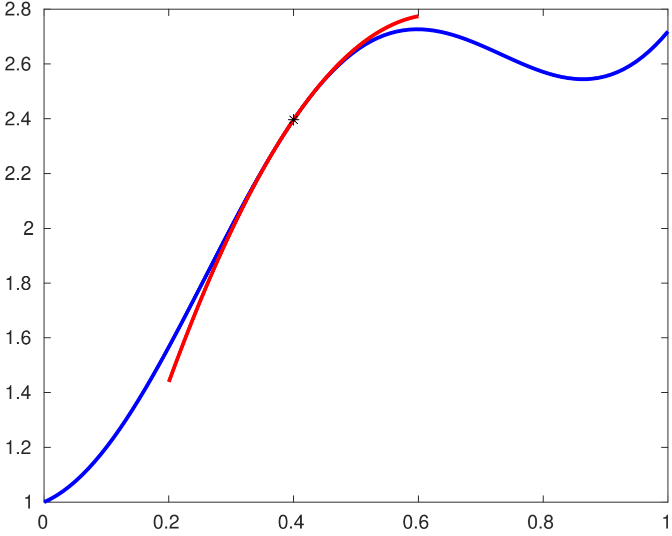
Írjon egy Matlab függvényt, mely adott $x_0$ esetén ábrázolja az

$$f(x) = \sin^2(\pi x) + e^x$$

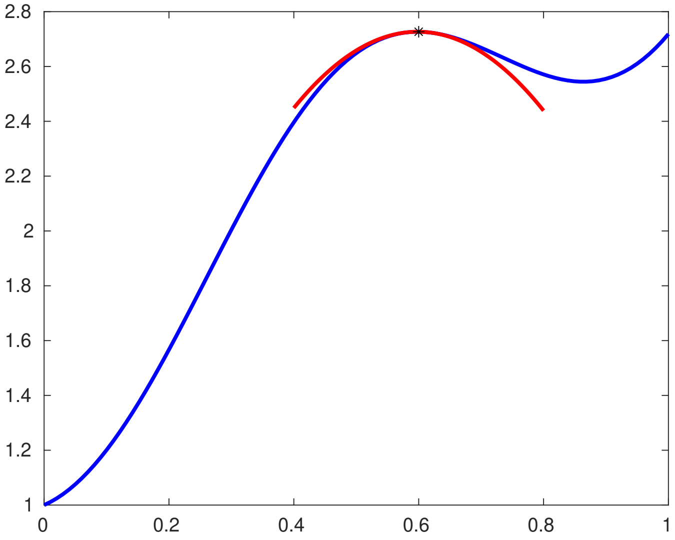
függvényt a $[0, 1]$ intervallumon és az $f$ $x_0$ körüli másodfokú Taylor-polinomját az $x_0$ egy kis környezetében. Ne használja a Matlab beépített `taylor` függvényét.



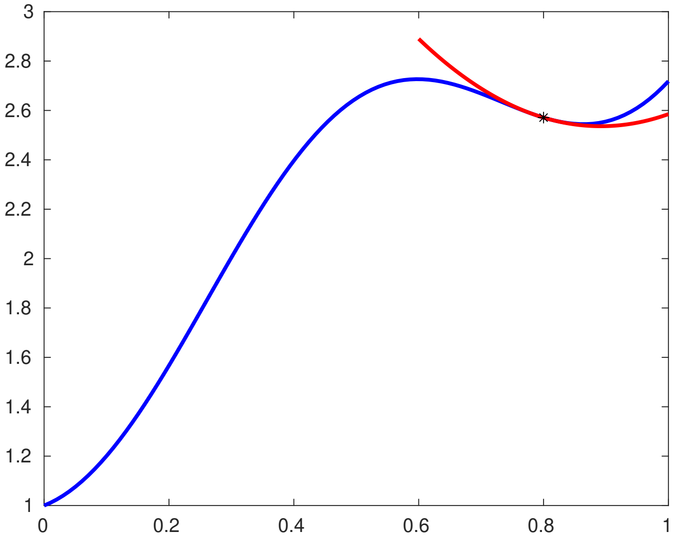

Az $f$ függvény és az $x_0 = 0.1$ pont körüli Taylor-polinom.



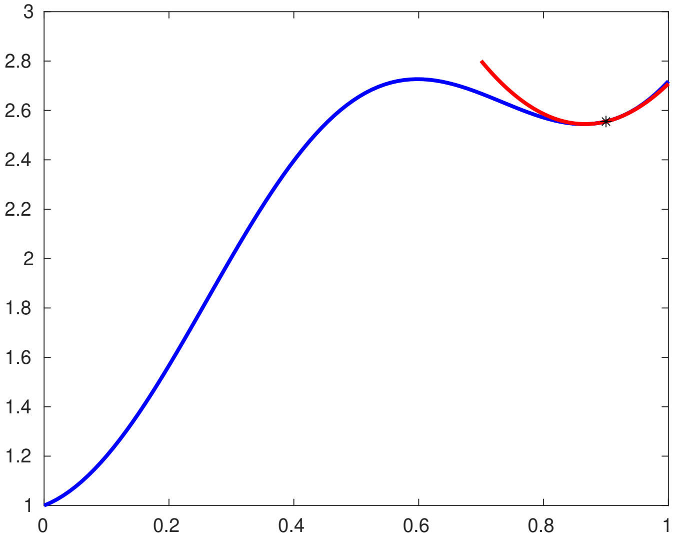

Az $f$ függvény és az $x_0 = 0.4$ pont körüli másodfokú Taylor-polinom.




Az $f$ függvény és az $x_0 = 0.6$ pont körüli másodfokú Taylor-polinom.




Az $f$ függvény és az $x_0 = 0.8$ pont körüli másodfokú Taylor-polinom.




Az $f$ függvény és az $x_0 = 0.9$ pont körüli másodfokú Taylor-polinom.

# Spline interpoláció Octave/Matlab-bal

## Példa

Határozzuk meg az alábbi adatokhoz tartozó harmadfokú spline-t!

| $x_i$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $S$ | 4 | 1 | 7 | 4 | 12 | 9 |
| $S'$ | 15 | | | | | 8 |

**Megoldás.** Használjuk a `spline` függvényt!

```
p=spline(x,y)
```

Előállítja a szakaszonként harmadfokú spline együtthatóit. Itt `x` az alappontok vektora, az `y` vektor első és utolsó koordinátája a két végpontban adott deriváltérték, a többi koordináta a függvényértékek.

```
>>x=-2:3; y=[15 4 1 7 4 12 9 8]; p=spline(x,y)
p =
      form: 'pp'
    breaks: [-2 -1 0 1 2 3]
     coefs: [5x4 double]
    pieces: 5
     order: 4
       dim: 1
```

A spline együtthatói:

```
>> p.coefs


ans =
   19.0000  -37.0000   15.0000    4.0000
  -12.0000   20.0000   -2.0000    1.0000
   11.0000  -16.0000    2.0000    7.0000
  -12.0000   17.0000    3.0000    4.0000
   15.0000  -19.0000    1.0000   12.0000
```

Figyeljünk arra, hogy a polinomok együtthatóit a részintervallumok kezdőpontjaihoz viszonyítva kapjuk!

Az 5 illesztett polinom:

$$
\begin{aligned}
p_1(x) &= 19(x+2)^3 - 37(x+2)^2 + 15(x+2) + 4 \\
p_2(x) &= -12(x+1)^3 + 20(x+1)^2 - 2(x+1) + 1 \\
p_3(x) &= 11x^3 - 16x^2 + 2x + 7 \\
p_4(x) &= -12(x-1)^3 + 17(x-1)^2 + 3(x-1) + 4 \\
p_5(x) &= 15(x-2)^3 - 19(x-2)^2 + (x-2) + 12
\end{aligned}
$$

Ellenőrizzük az illeszkedési feltételeket!

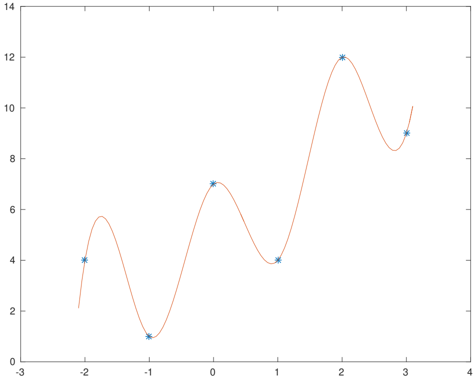
Ha nem az együtthatókat szeretnénk tudni, hanem a spline értékét valamely pont(ok)ban, akkor

```
yy=spline(x,y,xx)
```

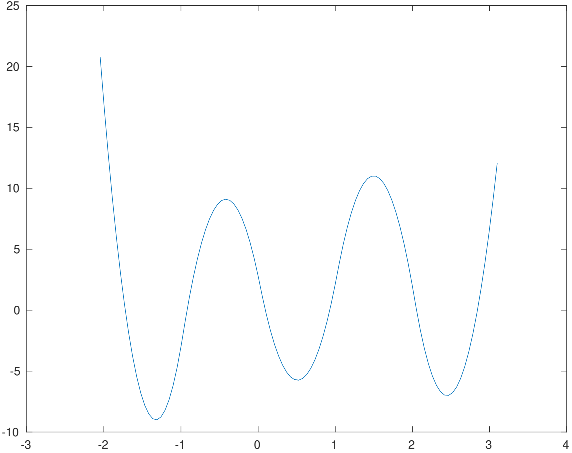
ahol `x` és `y` az előbbi vektorok, `xx` azon pontok vektora, ahol a helyettesítési értéket keressük. Ekkor `yy`-ba kerülnek a kiszámolt függvényértékek.

```
>> x=-2:3;
>> y=[15 4 1 7 4 12 9 8];
>> xx=linspace(-2.1,3.1);
>> yy=spline(x,y,xx);
>> plot(x,y(2:end-1),'*',xx,yy)
```

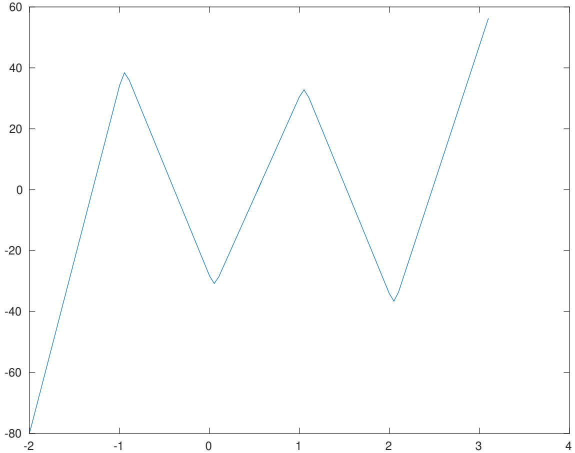
```
x=-2:3;
y=[15 4 1 7 4 12 9 8];
xx=linspace(-2.1,3.1);
yy=spline(x,y,xx);
plot(x,y(2:end-1),'*',xx,yy)
```



Az előbb ábrázolt spline 1. deriváltja:



A 2. derivált:




Ez még mindig folytonos, de a részintervallumok határainál töréspontja van.

# Megj.

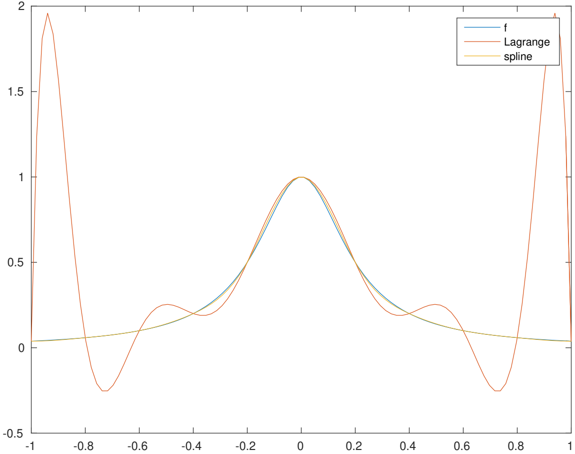
Ha a `spline` függvényt olyan `x` és `y` vektorokkal hívjuk, amelyek ugyanannyi koordinátát tartalmaznak, akkor a hiányzó két feltételt a Matlab azzal helyettesíti, hogy az első és utolsó két részintervallum találkozásánál a harmadik deriváltat is folytonosnak tekinti.

```
x=-2:3;
y=[4 1 7 4 12 9];
xx=linspace(-2.1,3.1);
yy=spline(x,y,xx);
plot(x,y,'*',xx,yy)
```

## 4. feladat

Rajzoltassuk ki közös ábrán az alábbi 3 függvényt:

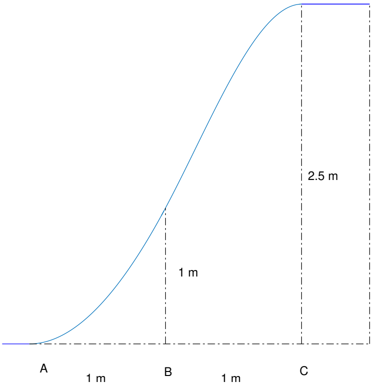
- az
$$f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$$
függvényt a $[-1, 1]$ intervallumon
- az $f$ függvény
$$-1, -0.8, -0.6, ..., 0.6, 0.8, 1$$
egyenlő lépésközű (ekvidisztáns) alappontokhoz tartozó Lagrange-polinomját
- az $f$ függvény
$$-1, -0.8, -0.6, ..., 0.6, 0.8, 1$$
alappontokhoz tartozó harmadfokú spline polinomját. (A végpontokban a deriváltértékeket tekintsük 0-nak.)



2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
f
Lagrange
spline

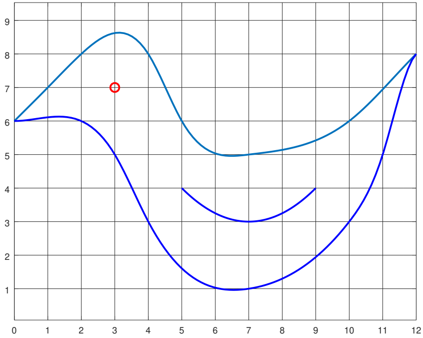
## 5. feladat (szorgalmi)

Az ábrán látható csúszda csúszófelületét szeretnénk elkészíteni két darabból úgy, hogy az $A$ és $C$ helyeken simán csatlakozzon a vízszintes felületekhez, illetve a két lemez is minél simábban csatlakozzon egymáshoz $B$-ben. Írja fel azt a függvényt, ami a csúszófelület lefutását modellezi!

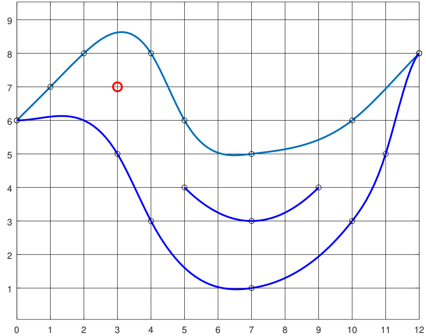


## 6. feladat (szorgalmi)

Készítse el Matlabbal az ábrán látható rajzot.



**Útmutatás:** használja a bejelölt (egész koordinátájú) pontokat és a `spline` függvényt.



# Paraméteres görbék

**Körvonal**

Miközben $t$ befutja a $[0, 2\pi]$ intervallumot, az $(r\cos t, r\sin t)$ koordinátájú pontok az origó középpontú $r$ sugarú körön futnak végig.

Futassuk le az alábbi kódot, mely az egységkör pontjait rajzolja ki.

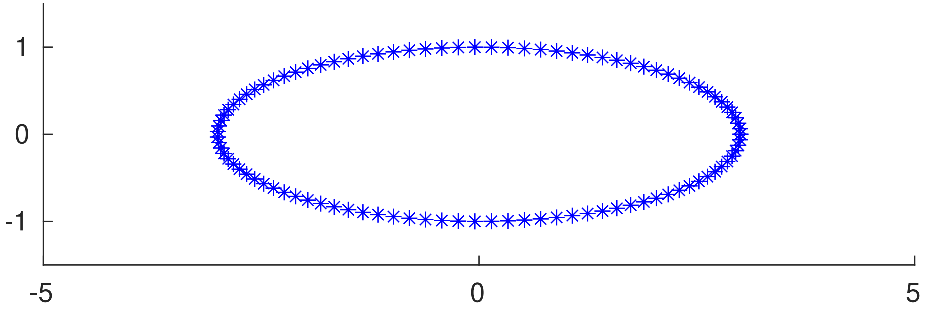
```
t=linspace(0,2*pi);
figure;
hold on;
axis equal;
axis([-1.5,1.5,-1.5,1.5]);
for ti=t
  plot(cos(ti),sin(ti),'*b')
  pause(0.05)
end
```

## 7. feladat

Módosítsuk az előző leképezést a következőképpen:

$$t \mapsto (3\cos t, \sin t)$$

Az előző kódot megfelelően módosítva rajzoljuk ki a görbét!



## 8. feladat (Szorgalmi)

„Felejtsük el" az előző görbét, tegyük fel, hogy csak 10 ($t$-ben ekvidisztáns) pontját ismerjük, majd spline interpoláció segítségével illesszünk erre a 10 pontra egy görbét!

Útmutatás:

Tartalmazzon a `ti` vektor 10 ekvidisztáns pontot 0 és $2\pi$ között.

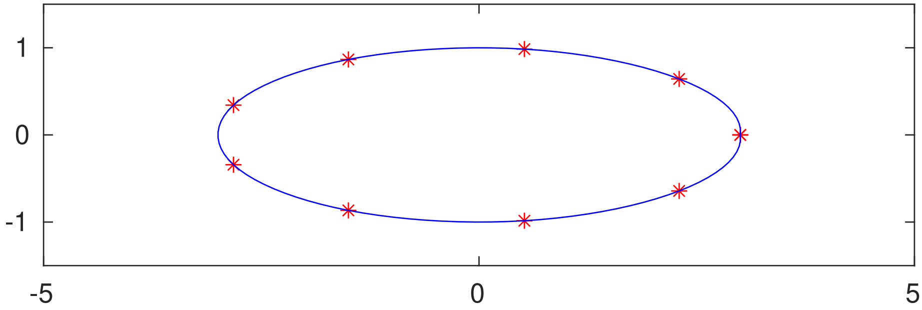
Határozzuk meg az ehhez tartozó x,y-koordinátákat (tároljuk `xi`-ben és `yi`-ben), ábrázoljuk ezeket.

Határozzuk meg a `ti` és `[xi;yi]` adatokra illeszkedő spline értékét a `t=linspace(0,2*pi)` pontokban:

```
Z=spline(ti,[xi;yi],t)
```

Ekkor `Z` egy 2x100-as mátrix lesz, első sorában a görbe pontjainak első koordinátáira, második sorában a második koordinátáira tartalmaz közelítést.

Ábrázoljuk az illesztett görbét!


1
0
-1
-5
0
5

## 9. feladat (Szorgalmi)

Egy pont egyenletes sebességgel mozog a síkon (egy ,,sima" pályán). A pont koordinátáit feljegyeztük a $t_i = \frac{k \cdot 2\pi}{10}$ időpillanatokban, ahol $i = 0, \ldots, 10$, az alábbi értékeket kaptuk (`x` az x-koordináták vektora, `y` az y-koordinátáké):

```
x=[1,0.809,0.309,-0.309,-0.809,-1,-0.809,-0.309,...
  0.309,0.809,1]
y=[0, 1.9021, 1.1756, -1.1756, -1.9021, 0, 1.9021,...
  1.1756, -1.1756, -1.9021, 0]
```

A Matlab `spline` függvénye segítségével becsülje meg a pont pályáját, és rajzolja ki (,,mozgásban", hasonlóan a körvonal kirajzolásához). Rajzolja ki külön-külön a koordinátákra kapott becsléseket az idő függvényében. Ezek alapján milyen

$$t \mapsto (f(t), g(t))$$

függvényt javasolna a pálya leírására? Rajzoltassa ki ezt a pályát is.