11. Lineáris transzformációk

11.1. Vizsgálja meg az alábbi mátrixokkal adott lineáris transzformációk hatását egy tetszőleges $x = \binom{x_1}{x_2} \in \mathbb{R}^2$ vektorra.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

11.2. Vizsgálja meg az alábbi mátrixokkal adott lineáris transzformációk hatását egy tetszőleges $x =\in \mathbb{R}^3$ vektorra.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

11.3. Írja fel annak a lineáris transzformációnak a mártixát, ami az $\binom{1}{0}$ vektort a $\binom{2}{5}$ vektorba, a $\binom{0}{1}$ vektort a $\binom{3}{1}$ vektorba képezi le. Mi lesz a $\binom{2}{2}$ vektor képe?

11.4. Írja fel annak a lineáris transzformációnak a mártixát, ami a $\binom{2}{5}$ vektort az $\binom{1}{0}$ vektorba, a $\binom{3}{1}$ vektort a $\binom{0}{1}$ vektorba képezi le.

11.5. Létezik-e olyan $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris leképezés, melyre

$$\varphi\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \varphi\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \varphi\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

teljesül?

11.6. Határozza meg az alábbi mátrixokkal adott lineáris transzformációk sajátértékeit, sajátvektorait!

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 6 & -3 & 2 \\ 8 & -6 & 5 \end{pmatrix}.$$

11.7. Egy gazdának három állattartó telepe (A, B és C) van, mindegyiken ugyanazt az egyféle állatot tenyészti. Hogy a tenyészetek ne váljanak belterjessé, az állatok egy részét a másik két telep valamelyikére telepítik át. Az A-ban lévő állatok 60 százaléka marad ugyanitt, 10 százalékukat a B-beli, 30 százalékukat a C-beli telepre viszik át. A B-beli állatok 60 százaléka marad ugyanott, 30, illetve 10 százalékát viszont áthelyezik a A-ba, illetve C-be. A C-ben lévő állatok 50 százaléka marad a helyén, 40 százalékát A-ba, 10 százalékát B-be viszik át. Ilyen átrendezési terv mellett az állatok száma a három telepen nem változik. Írja fel azt a mátrix-vektor egyenletet, mely megadja, hogy az átrendezés előtt az állatok mekkora hányada található A-ban, B-ben és C-ben.