Példa

Oldja meg az $Ax = b$ lineáris egyenletrendszert, ha

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 0 \\ 4 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix}$$

4 egyenlet
2 ismeretlen

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & -8 \\ 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[\overline{IV}-\frac{1}{2}\overline{I}]{\overline{II}+\overline{I},\ \overline{III}-2\overline{I}} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & -8 & -16 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\text{rang}(A) = 2$

$\text{rang}(A|b) = 2$

$\Downarrow$

az egyenletrendszer megoldható!

Mivel rang(A) = az ismeretlenek (vagyis A oszlopainak) számával ezért 1 megoldás

$$\left(\begin{array}{cc|c} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$*$ = nenulle elem

$$x_2 = 2$$

$$2x_1 + 3x_2 = 4 \Rightarrow x_1 = -1$$

$$x = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Példa

Oldja meg az $Ax = b$ lineáris egyenletrendszert, ha

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 0 \\ 4 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -10 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4 egyenlet, 2 ismeretlen

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 4 \\ 4 & -2 & -10 \\ 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{III-2I \\ IV-\frac{1}{2}I}]{II+I} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & -8 & -8 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 2$ ↯

$$\text{rang}(A) = 2 \neq \text{rang}(A|b) = 3$$

↑ ellentmondásos a rendszer

$$\left(\begin{array}{ccc|c} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{array}\right)$$

$\left.\begin{array}{l} \text{rang}(A) = \text{rang}(A|b) \\ \text{rang}(A) = 3 \end{array}\right\}$ 1 megoldás

$$\left(\begin{array}{ccc|c} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\left.\begin{array}{l} \text{rang}(A) = \text{rang}(A|b) \\ \text{rang}(A) = 3 \end{array}\right\}$ 1 mo.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \end{array}\right)$$

$\text{rang}(A) = 3 = \text{rang}(A|b)$

megoldható a rendszer

Lin. független, ha abból, hogy

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} * \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} * \\ * \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} * \\ * \\ * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

Mivel rang(A) < 4 ezért az A oszlopvektorai lin függők ⇒ végtelen sok mo.

$Ax = b$

rang(A) = rang(A|b) ?

igen ↙ nem ↘

megoldható — 0 megoldás

rang(A) = n

↑ ismeretlenek vagy A oszlopainak a száma

igen ↙ nem ↘

egyértelmű mo — ∞ sok mo

Példa

Határozza meg $\det(A)$ értékét, ha

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ 6 & 0 & -2 & -2 \\ -4 & -4 & 3 & 2 \\ 6 & -6 & 4 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ 6 & 0 & -2 & -2 \\ -4 & -4 & 3 & 2 \\ 6 & -6 & 4 & -10 \end{pmatrix} \xrightarrow[\overline{IV}-3\overline{I}]{\overline{II}-3\overline{I},\ \overline{III}+2\overline{I}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -6 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\overline{IV}+\overline{II}]{\overline{III}+2\overline{II}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\overline{IV}+2\overline{III}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \det(A) = 2 \cdot 3 \cdot (-1) \cdot (-2) = +12$$

Példa

Döntse el, hogy a következő vektorok lineárisan függetlenek-e.

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -5 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III}+\text{I}]{\text{II}+2\text{I}} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III}+\text{II}} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\operatorname{rang}(A) = 3 \Rightarrow$ a vektorok lin. függet-lenek.

Lineáris leképezések

$$\underset{m\times 1}{y} = \underset{m\times n}{A}\,\underset{n\times 1}{x}$$

Ha $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, akkor A minden n elemű oszlopvektorhoz hozzárendel egy m elemű oszlopvektort.

Példa:

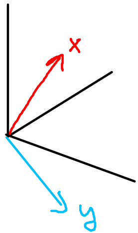
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$$

$$\underset{2\times 3}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}} \underset{3\times 1}{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}} = \underset{2\times 1}{\begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_3 \\ x_2 - x_3 \end{pmatrix}$$

Példa:



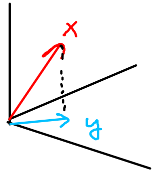
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Lineáris leképezések

A mátrixműveletek tulajdonságaiból:

- $\forall u, v \in \mathbb{R}^n$ esetén $A(u+v) = Au + Av$,
- $\forall v \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén $A(\lambda u) = \lambda(Au)$

Definíció $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ vagy $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Legyenek V és W vektorterek $\mathbb{R}$ felett. $\varphi \colon V \to W$ lineáris leképezés, ha

- additív, azaz $\forall u, v \in V$: $\varphi(u+v) = \varphi(u) + \varphi(v)$;
- homogén, azaz $\forall v \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$: $\varphi(\lambda v) = \lambda\varphi(v)$.

Ha $V = W$, akkor a lineáris leképezést lineáris transzformációnak hívjuk.

Így $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ esetén $\varphi(u) = Au$ lineáris leképezés $\mathbb{R}^n$-ből $\mathbb{R}^m$-be.
Ha $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, akkor $\varphi(u) = Au$ lineáris transzformáció.
Megjegyzés: lineáris leképezések esetén nullvektor képe nullvektor.

Ha $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ bázisa $\mathbb{R}^n$-nek, akkor minden $v \in \mathbb{R}^n$ felírható ebben a bázisban:

$$v = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \cdots + \lambda_n b_n$$

Ekkor

$$Av = \lambda_1 Ab_1 + \lambda_2 Ab_2 + \cdots + \lambda_n Ab_n,$$

azaz minden vektornak a képe felírható a bázisvektorok képéből.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \qquad y = Ax$$

$x = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\qquad \mathbb{R}^2$-ben a term. bázis $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$x = 4 \cdot e_1 + 2 \cdot e_2$$

$$Ax = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 14 \end{pmatrix} = 4 \cdot \underbrace{Ae_1}_{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}} + 2 \cdot \underbrace{Ae_2}_{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Egy lineáris transzformációt egyértelműen meghatároz egy bázison való hatása. Ha $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ bázisa V-nek, és $\varphi(b_i) = w_i$, akkor ha $v = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \cdots + \lambda_n b_n$, akkor ennek φ általi képe:

$$\varphi(v) = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \cdots + \lambda_n w_n.$$

Definíció

Legyen V egy n-dimenziós valós vektortér, $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ bázisa V-nek, tekintsünk továbbá egy $\varphi\colon V \to V$ lineáris transzformációt. Ekkor *φ-nek a $\mathcal{B}$ bázisra vonatkozó mátrixa* az az $n \times n$-es mátrix, amelynek i-edik oszlopában $\varphi(b_i)$-nek a $\mathcal{B}$ bázisra vonatkozó koordinátái állnak.

$\Longrightarrow$ minden φ lineáris transzformáció felírható $\varphi(v) = Av$ alakban.

$\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ -x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

lin. leképezés

$$\varphi\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot x$$

$\varphi(e_1)$ $\varphi(e_2)$

Sajátérték, sajátvektor

Példa

Élőlények egy zárt populációjában az egyedek legfeljebb 3 évig élnek. Az egyedeknek az első évben nem keletkezik utódja, a másodéves egyedek esetén az átlagos reprodukciósszám 6, a harmadik éves egyedeknél 8. Az 1 és 2 éves egyedek $50-50\%$-a éli meg a következő évet. Adjunk egy olyan kiinduló korcsoportonkénti egyedszámot, melynek koreloszlása nem változik az évek során.

$x=(x_1,x_2,x_3)^T$ a kiinduló egyedszámok. Van-e olyan x, melyre valamely $\lambda>0$ valós számmal

jövőre:

$$\begin{pmatrix} 6x_2+8x_3 \\ \frac{1}{2}x_1 \\ \frac{1}{2}x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 8 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

teljesül?

$$A \cdot x = \lambda \cdot x$$

Definíció

(vagy az A mátrixszal adott lin. transzformáció sajátvektora)

Legyen A egy $\boxed{n \times n}$-es mátrix. Egy nemnulla x vektor az A **sajátvektora**, ha létezik olyan λ skalár, hogy

$$\boxed{Ax = \lambda x.}$$

Ekkor λ az A mátrix x sajátvektorához tartozó **sajátértéke**.

$$Ax - \lambda x = 0$$

$$Ax = \lambda x \iff (A - \lambda E)x = 0,$$

nullvektor

azaz adott λ sajátérték esetén egy homogén lineáris egyenletrendszer nemtriviális megoldásai adják a sajátvektorokat. Pontosan akkor létezik nemtriviális megoldása, ha

$$\det(A - \lambda E) = 0.$$

karakterisztikus egyenlet

Az $n \times n$-es A mátrix **karakterisztikus polinom**ja az n-edfokú $\det(A - \lambda E_n)$ polinom. A karakterisztikus polinom gyökei éppen az A sajátértékei.

Példa

$\lambda E = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

Határozzuk meg az

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -8 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$$

mátrix sajátértékeit.

A karakterisztikus egyenlet: $\det(A - \lambda E) = 0$:

$$\begin{vmatrix} -5-\lambda & -8 \\ 4 & 7-\lambda \end{vmatrix} = (-5-\lambda)(7-\lambda) + 32 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$$

$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2}$ $\nearrow 3$ $\searrow -1$

A gyökök: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$. (**Két különböző valós sajátérték**)

Ha $\lambda_1 = -1$, akkor a sajátvektorok:

$A - \lambda E$

$A + 1 \cdot E = \begin{pmatrix} -4 & -8 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -4 & -8 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$(A - \lambda E)x = 0$

$-4x_1 - 8x_2 = 0 \qquad x_1 = -2x_2 \qquad x_2 = t \in \mathbb{R}$

$x_1 = -2t$

$$x = t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad t \in \mathbb{R}$$

$$\underbrace{A \cdot x} = \begin{pmatrix} -5 & -8 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \underbrace{-1 \cdot x}$$

Ha $\lambda_2 = 3$

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} -8 & -8 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(A - \lambda E)\, x = 0 \qquad \begin{pmatrix} -8 & -8 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-8x_1 - 8x_2 = 0$$

$$x_1 + x_2 = 0 \qquad x_1 = -x_2 \qquad x_2 = t \in \mathbb{R}$$

$$x_1 = -t$$

$$x = t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{Ax} = \begin{pmatrix} -5 & -8 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{3x}$$

Példa

Határozzuk meg az

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

mátrix sajátértékeit.

A karakterisztikus egyenlet: $\det(A - \lambda E) = 0$:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(-1-\lambda) + 4 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

A gyökök: $\lambda_{1,2} = 1$. (**Egy valós sajátérték, kétszeres multiplicitással**)

Ha $\lambda = 1$, akkor a sajátvektor

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$2x_1 - 2x_2 = 0$

$x_1 = x_2$

$x_2 = t \in \mathbb{R}$

$x_1 = t$

$x = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R}$

Példa

Határozzuk meg az

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

mátrix sajátértékeit.

A karakterisztikus egyenlet: $\det(A - \lambda E) = 0$:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(1-\lambda) + 2 = \lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$$

$\lambda_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-20}}{2} = 2 \pm i$

A gyökök: $\lambda_{1,2} = 2 \pm i$. (**Két komplex sajátérték, egymás konjugáltjai.**)

Megjegyzés

- Egy $n \times n$-es mátrix sajátértékeinek meghatározásához egy n-edfokú polinom gyökeit kell megkeresnünk.
- Egy $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix karakterisztikus polinomja egy valós együtthatós n-edfokú polinom $\implies$ egy $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixnak a komplex számok körében multiplicitással számolva n darab sajátértéke van.
- Ha egy komplex szám sajátértéke az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixnak, akkor a konjugáltja is sajátérték lesz.
- Ha x az A mátrix λ sajátértékéhez tartozó sajátvektora, akkor $c \cdot x$ (ahol $c \neq 0$) is a λ sajátértékhez tartozó sajátvektor.
- Diagonális mátrix sajátértékei a főátlóban álló számok.
- Háromszögmátrix sajátértékei a főátlóban álló számok.
- Egy mátrix pontosan akkor invertálható, ha a 0 nem szerepel a sajátértékei között.
- Ha $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ egy szimmetrikus mátrix, akkor minden sajátértéke valós.

$A\underline{x} = \lambda x \qquad A(t \cdot x) = t \cdot (Ax) = t \cdot \lambda x = \lambda \cdot (tx)$

Populációs példa, folytatás

Keressük az

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 8 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

mátrix egy olyan sajátvektorát, mely egy $\lambda > 0$ valós sajátértékhez tartozik.

A karakterisztikus egyenlet: $\det(A - \lambda E) = 0$.

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 6 & 8 \\ \frac{1}{2} & -\lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 2 + 3\lambda = 0$$

Ennek gyökei: $\lambda_{1,2} = -1$, $\boxed{\lambda_3 = 2.}$

Meg kell határoznunk a $\lambda = 2$-höz tartozó sajátalteret.

$(A-\lambda E)x=0 \quad \lambda=2$

Oldjuk meg a $\underbrace{(A-2E)}x=0$ homogén lineáris egyenletrendszert.

$$\begin{pmatrix} -2 & 6 & 8 \\ \frac{1}{2} & -2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 6 & 8 \\ \frac{1}{2} & -2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ennek megoldása:

$$\boxed{x = t \begin{pmatrix} 16 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix},} \quad t \in \mathbb{R}$$

$-\frac{1}{2}x_2+2x_3=0$

$x_3=t \in \mathbb{R}$

$x_2=4x_3=4t$

$-x_1+3\underset{4t}{x_2}+4\underset{t}{x_3}=0$

$x_1=16t$

Ha pl. $t=1$, akkor az $x := \begin{pmatrix} 16 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

koordinátánkénti egyenlőtlenségekből indulva járvány:

$$Ax = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 8 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 16 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$