Mátrixok

Definíció

Egy m sorral és n oszloppal rendelkező számtáblázatot $m \times n$-es mátrixnak nevezünk.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- A elemei: a_{ij}, $\qquad A = (a_{ij})$
- m: sorok száma, n: oszlopok száma
- Az összes $m \times n$-es valós mátrix halmazát $\mathbb{R}^{m\times n}$-nel jelöljük, az összes $m \times n$-es komplex mátrix halmazát pedig $\mathbb{C}^{m\times n}$-nel.

Példa.

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}, \quad \begin{pmatrix} 2-i \\ 3+2i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 1}$$

Mátrixok

Definíció

- Ha $n = m$, akkor a mátrix négyzetes vagy kvadratikus.
- Egy mátrix főátlója alatt az $(a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, , a_{kk})$ szám k-ast értjük $(k = \min\{m, n\})$.
- Két mátrix egyenlő, ha azonos típusúak (azaz ugyanannyi soruk és oszlopuk van), és a megfelelő elemeik megegyeznek.
- Azon $n \times n$-es mátrixot, melynek főátlójában csupa 1-es áll, minden más eleme 0, n-edrendű vagy n-dimenziós egységmátrixnak nevezzük. Jele: E_n vagy I_n.

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 4 \\ 5 & 3 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

főátló

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$$

Mátrixműveletek

1. Mátrixok összeadása

Csak azonos típusú mátrixokat tudunk összeadni.
Legyenek $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij})$ $m \times n$-es mátrixok.
Ekkor $C = A + B$, ha $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$; $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$.

2. Mátrixok skalárral való szorzása

Elemenként végezzük, azaz ha λ skalár, $A = (a_{ij})$ egy $m \times n$-es mátrix, akkor $\lambda A = (\lambda a_{ij})$ (ami szintén egy $m \times n$-es mátrix).

Speciálisan: ha A és B sor-, vagy oszlopvektorok, akkor a fenti 2 művelet éppen a vektorok szokásos összeadása és skalárral való szorzása.
Példa.

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 0 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}, \quad 2\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 0 & 4 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$$

Mátrixműveletek

3. Mátrixszorzás

Legyen $A = (a_{ij})$ egy $\underline{m} \times \underline{k}$, $B = (b_{ij})$ egy $\underline{k} \times \underline{n}$ típusú mátrix. Ekkor A és B szorzata az a $C = (c_{ij})$ $\underline{m} \times \underline{n}$ típusú mátrix, amelyre

$$c_{ij} = \sum_{r=1}^{k} a_{ir} b_{rj}.$$

$a_{i1}\ a_{i2}\ \cdots\ a_{ik}$

$$\begin{matrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{kj} \end{matrix}$$

Példa.

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}}_{2\times 2}, \quad B = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}}_{2\times 3}, \quad u = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}}_{2\times 1}$$

Számítsuk ki, amennyiben lehetséges, az alábbi kifejezések értékét!

$$\underbrace{AB}_{2\times 2\ \ 2\times 3}, \quad \underbrace{\cancel{BA}}_{2\times 3\ \ 2\times 2}, \quad \overbrace{Au}^{2\times 2\ \ 2\times 1}, \quad \underbrace{\cancel{Bu}}_{2\times 3\ \ 2\times 1}, \quad \overbrace{\cancel{uA}}^{2\times 1\ \ 2\times 2}, \quad \overbrace{\cancel{uB}}^{2\times 1\ \ 2\times 3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 & -7 \\ 9 & -9 & 9 \end{pmatrix}$$

2×2 $\quad$ 2×3 $\quad$ 2×3

$$C_{11} = 1 \cdot 3 + (-4) \cdot 0 = 3$$

$$C_{12} = 1 \cdot (-1) + (-4) \cdot (-2) = 7$$

$$C_{13} = 1 \cdot 1 + (-4) \cdot 2 = -7$$

$$C_{21} = 3 \cdot 3 + 3 \cdot 0 = 9$$

$$C_{22} = 3 \cdot (-1) + 3 \cdot (-2) = -9$$

$$C_{23} = 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 9$$

$$Au = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 21 \end{pmatrix}$$

2×2 $\quad$ 2×1

A mátrixszorzás tulajdonságai

- Ha A $m \times n$ típusú, akkor $E_m \cdot A = A$ és $A \cdot E_n = A$.
- Legyenek A, B mátrixok és tegyük fel, hogy létezik AB. Ha λ tetszőleges skalár, akkor $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$.
- Ha A, B, C olyan mátrixok, hogy AB és BC létezik, akkor $(AB)C = A(BC)$. (asszociatívitás)
- Ha A és B azonos típusú mátrixok és létezik AC, akkor BC is létezik és $(A + B)C = AC + BC$. (disztributivitás)
- A mátrixszorzás nem kommutatív, azaz általában $AB \neq BA$.

Definíció

Legyen A egy $m \times n$-es mátrix. Azt az A^T-vel jelölt $n \times m$-es mátrixot, amelynek sorai az A oszlopai az A transzponáltjának nevezzük.

A transzponálás tulajdonságai

- $(A^T)^T = A$
- $(AB)^T = B^T \cdot A^T$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\underset{2\times 2}{E}\ \underset{2\times 3}{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\underset{2\times 3}{A} \cdot \underset{3\times 3}{E} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \underset{3\times 2}{A^T} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

2×3

Definíció $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$ $A^T=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$

Az A mátrixot szimmetrikusnak nevezzük, ha $A^T = A$.

Példa.

$$A = \underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}}, \quad B = \underset{2\times 3}{\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}}, \quad u = \underset{2\times 1}{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}}, \quad v = \underset{3\times 1}{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

Számítsa ki, amennyiben lehetséges, az alábbi kifejezések értékét!

$$A^T, \quad ,B^T \quad u^T, \quad v^T, \quad \underset{2\times2\ 2\times3}{AB}, \quad \underset{2\times2\ 3\times2}{\cancel{AB^T}}, \quad \underset{3\times2\ 2\times2}{B^TA}, \quad \overset{2\times2\ 2\times1}{Au}, \quad \underset{2\times2\ 1\times2}{\cancel{Au^T}}, \quad \underset{1\times2\ 2\times2}{u^TA},$$

$$\cancel{Bu}, \quad ,Bv ✓, \quad ,u^Tu ✓, \quad uu^T ✓, \quad v^Tv ✓, \quad vv^T ✓,$$

$A^T=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 5 & 3\end{pmatrix}$ $B^T=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ $u^T=\underset{1\times2}{\begin{pmatrix}3 & 4\end{pmatrix}}$ $v^T=\underset{1\times3}{\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\end{pmatrix}}$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & -7 & 11 \\ 16 & -7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$B^T A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 22 \\ -4 & -13 \\ 5 & 11 \end{pmatrix}$$

$$u^T A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 27 \end{pmatrix}$$

$$\underset{1\times 2}{u^T} \, \underset{2\times 1}{u} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 25$$

$$\underset{2\times 1}{u} \cdot \underset{1\times 2}{u^T} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{pmatrix}$$

Példa. Legyen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

az A első sora

Számítsuk ki az alábbi kifejezések értékét!

$$Ae_1, \quad Ae_2, \quad Au, \quad Ax, \quad \underset{1\times 3}{e_1^T}\,\underset{3\times 3}{A}, \quad u^T A,$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$$

az A első oszlopa

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{23} \end{pmatrix} \leftarrow$$

az A
2. oszlopa

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + a_{12} + a_{13} \\ a_{21} + a_{22} + a_{23} \\ a_{31} + a_{32} + a_{33} \end{pmatrix} \leftarrow$$

az A
oszlopvekto-
rainak összege

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 \\ a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} \cdot x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} \cdot x_2 + \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} \cdot x_3$$

Az A oszlopvektorainak x_1, x_2, x_3 együtthatókkal vett lineáris kombinációja

Példa

Egy faipari kisvállalkozás kétféle játékot gyárt: kisautókat és vonatokat. Egy kisautó, illetve egy kisvonat legyártásához szükséges faanyag és festék mennyiségét az alábbi táblázat tartalmazza.

	kisautó	kisvonat
faanyag	2	3
festék	5	4

Ha x_1, illetve x_2 jelenti egy adott napon a legyártott kisautók és vonatok számát, és

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

akkor mit jelentenek az $y = Ax$ vektor koordinátái?

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot x_1 + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot x_2 = \begin{pmatrix} \bullet \\ \bullet \end{pmatrix}$$

az adott napon ennyi fa kell

ennyi festék

Mátrixok inverze

Definíció

Az A n-edrendű négyzetes mátrix invertálható, vagy létezik az inverze, ha létezik olyan B n-edrendű kvadratikus mátrix, hogy

$$AB = BA = E_n.$$

Tétel

Ha A invertálható, akkor az inverze egyértelmű. Jele: A^{-1}.

Példa:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}$$

A mátrixinvertálás tulajdonságai

- Ha A invertálható, akkor A^{-1} is az és $(A^{-1})^{-1} = A$.
- Ha A és B invertálható és létezik AB, akkor ez is invertálható és $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = AEA^{-1} = AA^{-1} = E$
- Ha A invertálható, akkor A^T is az és $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 7 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Determinánsok

Definíció

Legyen $n \in \mathbb{N}$ és jelölje σ az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz egy permutációját, azaz legyen

$$\sigma\colon \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\},\ i \mapsto \sigma(i)$$

bijektív függvény. (Itt $\sigma(i)$ jelöli a permutációban az i. helyen álló elemet.) Azt mondjuk, hogy a σ permutációnál az i és j elem inverzióban áll, ha $i < j$ és $\sigma(i) > \sigma(j)$. Egy σ permutáció páros, ha benne az inverzióban álló párok száma páros, és páratlan, ha ez a szám páratlan.

Példa: $J_4 = \{1, 2, 3, 4\}$,

$\sigma_1 = (1, 3, 4, 2)$	Inverziók száma: 2	(3,2) (4,2)
$\sigma_2 = (1, 2, 3, 4)$	Inverziók száma: 0	
$\sigma_3 = (4, 3, 2, 1)$	Inverziók száma: 6	
$\sigma_4 = (2, 3, 4, 1)$	Inverziók száma: 3	(2,1) (3 1) (4 1)

Determinánsok

Definíció

Legyen $A = (a_{ij})$ egy $n \times n$-es kvadratikus mátrix. Az A n^2 eleméből válasszunk ki úgy n elemet, hogy minden sorból és oszlopból pontosan egyet választunk. A kiválasztott elemek alakja:

$$a_{1\sigma(1)}, a_{2\sigma(2)}, \ldots, a_{n\sigma(n)}.$$

Az A mátrix determinánsa:

$$\det(A) = |A| = \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots a_{n\sigma(n)}.$$

Ez az összeg $n!$ tagú. Itt: $\varepsilon(\sigma) = \begin{cases} 1, & \text{ha } \sigma \text{ páros,} \\ -1, & \text{ha } \sigma \text{ páratlan.} \end{cases}$

Példa:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

1. $n = 2$: $\det(A) = |A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.
2. $n = 3$: $\det(A) =$

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Determinánsok szorzástétele

Ha A és B azonos rendű négyzetes mátrixok, akkor

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B).$$

Megjegyzés

- Egységmátrix determinánsa 1. ($\det E_n = 1$)
- Diagonális mátrix determinánsa a főátlóban álló elemek szorzata.
- Háromszögmátrix determinánsa a főátlóban álló elemek szorzata.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

diagonális mátrix

felső Δ mátrix

A determináns tulajdonságai

- $\det(A) = \det(A^T)$
- Ha A valamely sora csupa 0 elemből áll, akkor $\det(A) = 0$.
- Ha A két sorát felcseréljük, a determináns -1-szeresére változik.
- Ha A két sora egyenlő, akkor $\det(A) = 0$.
- Ha A valamely sorát megszorozzuk egy λ skalárral, akkor az így kapott mátrix determinánsa $\lambda \cdot \det(A)$.
- Ha A minden sorát megszorozzuk egy λ skalárral és A n-edrendű, akkor a kapott mátrix determinánsa $\lambda^n \cdot \det(A)$.
- Ha A két sora egymás skalárszorosa, akkor $\det(A) = 0$.
- Egy mátrix determinánsa nem változik, ha valamely sorához hozzáadjuk egy másik sor λ-szorosát.
- Ha A valamely sora előállítható a többi sor lináris kombinációjaként, akkor $\det(A) = 0$.
- A fentiek igazak sorok helyett oszlopokra is.

Következmény

Ha $\det(A) \neq 0$, akkor A sorai (vagy oszlopai) lineárisan független vektorok. Ekkor ha A $n \times n$-es: sorai $\mathbb{R}^n$ egy bázisát alkotják.

A determináns kiszámítási módjai

1. Sarrus-szabály: $\boxed{2 \times 2\text{-es és } 3 \times 3\text{-as}}$ mátrixok determinánsára

2×2-es mátrix:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \implies \det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

3×3-as mátrix:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$\det(A) =$

$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$

Példa.

Határozzuk meg az alábbi mátrixok determinánsát Sarrus-szabállyal.

$$A=\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} -4 & -1 & -5 \\ 2 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{matrix} -4 & -1 \\ 2 & 2 \\ -2 & 4 \end{matrix}$$

$$\det(A) = (-3)\cdot 4 - 2\cdot 1 = -14$$

$$\det(B) = \underbrace{(-4)\cdot 2\cdot 0}_{0} + \underbrace{(-1)\cdot 3\cdot(-2)}_{6} + \underbrace{(-5)\cdot 2\cdot 4}_{-40} - \underbrace{(-2)\cdot 2\,(-5)}_{-20}$$

$$- \underbrace{(4)\cdot 3\cdot(-4)}_{+18} - \underbrace{0\cdot 2\cdot(-1)}_{0} = -6$$

A determináns kiszámítási módjai

2. Gauss-elimináció: az alábbi két típusú átalakítás alkalmazásával a mátrixot felső háromszög alakra hozzuk.
   - sorcsere (ekkor a determináns előjelet vált);
   - egy sor λ-szorosának hozzáadása egy másik sorhoz (a determináns nem változik)

   A mátrix determinánsa az eredményül kapott háromszögmátrix főátlóbeli elemeinek szorzata, szorozva $(-1)^k$-nal, ahol k az elvégzett sorcserék száma.

Példa. Határozzuk meg $\det(A)$-t Gauss-eliminációval.

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -1 & -5 \\ 2 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -4 & -1 & -5 \\ 2 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{I} \leftrightarrow \mathrm{II}} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -4 & -1 & -5 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathrm{III}+\mathrm{I}]{\mathrm{II}+2\cdot\mathrm{I}} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\mathrm{III}-2\mathrm{II}} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a determinánsa $= 2 \cdot 3 \cdot 1 = 6$

a sorcserék száma

1 sorcsere volt $\Rightarrow$ $\det(A) = (-1)^1 \cdot 6 = -6$

A determináns kiszámítási módjai

3. Kifejtési tétel: Legyen A egy n-edrendű mátrix.
   - Kiválasztjuk A egy tetszőleges sorát (vagy oszlopát),
   - ennek minden elemét megszorozzuk az elemhez tartozó algebrai aldeterminánssal,
   - majd a kapott szorzatokat összeadjuk.

Definíció

Az a_{ij} elemhez tartozó algebrai aldetermináns $(-1)^{i+j}A_{ij}$, ahol A_{ij} annak az $(n-1)$-edrendű determinánsnak az értéke, amelyet A-ból az i. sor és j. oszlop kihúzásával kapunk.

Példa. Határozzuk meg $\det(A)$-t kifejtési tétellel.

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -1 & -5 \\ 2 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

A 3. sor szerint kifejtve:

$$\det(A) = \underset{a_{31}}{(-2)} \cdot \underset{(-1)^{i+j}}{(-1)^{3+1}} \cdot \overset{7}{\begin{vmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} + \underset{a_{32}}{4} \cdot (-1)^{3+2} \cdot \overset{-2}{\begin{vmatrix} -4 & -5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}$$

$$+ \underset{a_{33}}{0} \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -14 + 8 = -6$$

A determináns kapcsolata az invertálással

Definíció

Azt mondjuk, hogy az A négyzetes mátrix szinguláris, ha determinánsa 0. Ellenkező esetben (azaz ha $\det(A) \neq 0$) A reguláris.

Tétel

Egy négyzetes mátrix pontosan akkor invertálható, ha reguláris.

Megjegyzés: Legyen A egy reguláris mátrix. Mivel $A \cdot A^{-1} = E$, ahol E az A-val azonos méretű egységmétrix, ezért a determinánsok szorzástétele alapján

$$\det(A) \cdot \det(A^{-1}) = \det(E) = 1.$$

Azaz A és A^{-1} determinánsa egymás reciproka:

$$\det(A)^{-1} = \det(A^{-1}).$$

Ha az

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

2×2-es mátrix invertálható, akkor

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \qquad \det(A) = 4 \cdot 5 - 3 \cdot 7 = -1$$

$$A^{-1} = -1 \cdot \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -7 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}$$