Alkalmazott matematika

Baran Ágnes

Sajátérték feladatok

1. példa (Leslie-modell)

Tegyük fel, hogy nyulak egy zárt populációjáról a következőket tudjuk: a nőstény nyulak nem élnek 3 évnél tovább, az első évben nem születik utóduk, a második és harmadik évben átlagosan 1-1 nőstény utódot hoznak világra. A nyulak 80%-a éli meg a második évet, míg a kétéves egyedek 25%-a a harmadik évet. Keressünk olyan kiinduló koreloszlást, melyre igaz, hogy az évek során állandó marad.

Jelölje x_i az i éves nyulak számát $(i = 1, 2, 3)$ kiinduláskor.
A következő évben a nyulak száma:

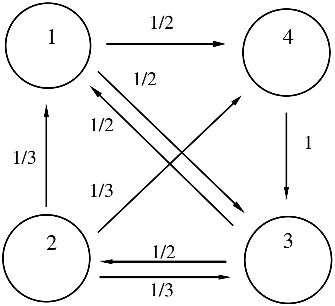
$$Ax := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

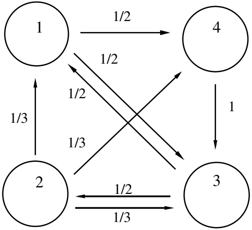
Olyan x vektort keresünk, melyre valamely $\lambda > 0$ szám esetén teljesül, hogy

$$Ax = \lambda x$$

2. példa (PageRank)

Tekintsük az alábbi egyszerű internet modellt, ami összesen 4 weboldalt tartalmaz. Az oldalak a nyilaknak megfelelően hivatkoznak egymásra. Tegyük fel, hogy kezdetben minden oldalnak egyforma súlya van. Később minden lépésben egyforma arányban osztják szét a súlyukat általuk hivatkozott oldalak között. Írjuk fel azt az átviteli mátrixot, mely megadja, hogy 1-1 lépés után hogy változik az egyes oldalak súlya. Keressünk egy olyan kiinduló súlyozást, ami nem változik az egyes lépések során.





Ha egy adott pillanatban az oldalak súlyait az $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ vektor írja le, akkor a következő lépésben a súlyokat az Ax szorzat adja, ahol

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Olyan x vektort keresünk, melyre valamely $\lambda > 0$ szám esetén

$$Ax = \lambda x$$

teljesül.

Emlékeztető

Sajátérték, sajátvektor

Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixnak a $\lambda \in \mathbb{C}$ szám sajátértéke, $x \neq 0$ pedig a λ-hoz tartozó sajátvektor ha:

$$Ax = \lambda x$$

Átrendezve: $(A - \lambda E)x = 0$,
ez adott λ esetén x-re homogén lineáris egyenletrendszer
$\Longrightarrow$ olyan λ esetén van $x \neq 0$ megoldás, melyre

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

Karakterisztikus egyenlet

Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix sajátértékeit a

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

karakterisztikus egyenlet megoldásával határozhatjuk meg.

Példa

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 3 \\ -4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda)(5-\lambda) + 12$$

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda_1 = 2, \qquad \lambda_2 = 1$$

Két különböző valós gyök.

Példa

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(1-\lambda) + 1$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 2$$

Egy valós gyök kétszeres multiplicitással.

Példa

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & -5 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(3-\lambda) + 5$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda_1 = 1 + i, \qquad \lambda_2 = 1 - i$$

Két komplex gyök (egymás konjugáltjai).

Megjegyzés

- Egy $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixnak a komplex számok körében multiplicitással számolva n darab sajátértéke van.
- Ha egy komplex szám sajátértéke az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixnak, akkor a konjugáltja is sajátérték lesz.
- Ha x az A mátrix λ-hoz tartozó sajátvektora, akkor $c \cdot x$ (ahol $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$) is λ-hoz tartozó sajátvektor.
- Egy mátrix pontosan akkor invertálható, ha a 0 nem szerepel a sajátértékei között.

Az 1. példában szereplő mátrix sajátértékeit, sajátvektorait meghatározva láthatjuk, hogy egyetlen pozitív sajátérték van, a $\lambda = 1$, az ehhez tartozó koreloszlás: $x = (0.5, 0.4, 0.1)^T$.

Így megadhatunk egy olyan kiinduló egyedszámot, mely eleget tesz a feltételeknek (sőt, mivel $\lambda = 1$ ezért nem csak az igaz, hogy a koreloszlás változatlan marad az évek során, hanem az is, hogy az egyedszám nem változik).
Egy ilyen kiinduló egyedszám pl.: $x = (100, 80, 20)^T$.

Ellenőrizhetjük, hogy

$$Ax = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 \\ 80 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 80 \\ 20 \end{bmatrix} = x$$

3. példa

Halak egy zárt populációjára a következő teljesül: a halak nem élnek 3 évnél tovább, az első évben nem keletkezik utóduk, a második évben átlagosan 6, a harmadik évben átlagosan 8 utóduk lesz. Az 1 és 2 éves halak $50 - 50\%$-a éli meg a következő évet. Írja fel a megfelelő Leslie-mátrixot és határozzon meg egy stabil koreloszlást.

Megjegyzés:

Itt az egyetlen pozitív sajátérték a $\lambda = 2$ lesz, ami azt jelenti, hogy megfelelő koreloszlásból indulva a koreloszlás ugyan állandó, de az egyedek száma évről-évre nő.

1. példa folytatása

Tegyük fel, hogy egy adott évben a nyulak korcsoportonkénti számát az $x = (74, 80, 46)$ vektor írja le. Vizsgáljuk meg hogyan alakul a korcsoportok egyedszáma az évek múlásával.

Jelölje $x^{(k)}$ azt a vektort, mely a korcsoportok egyedszámát írja le k év elteltével.

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 74 \\ 80 \\ 46 \end{bmatrix}, \quad x^{(1)} = Ax^{(0)}, \quad x^{(2)} = Ax^{(1)}, \quad \dots$$

Általánosan:

$$x^{(k+1)} = Ax^{(k)} = A^k x^{(0)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Matlab-bal kiszámolva:

$$x^{(5)} = \begin{bmatrix} 108.320 \\ 70.848 \\ 23.120 \end{bmatrix}, \quad x^{(10)} = \begin{bmatrix} 98.344 \\ 81.830 \\ 19.368 \end{bmatrix},$$

$$x^{(20)} = \begin{bmatrix} 99.935 \\ 80.072 \\ 19.975 \end{bmatrix}, \quad x^{(40)} = \begin{bmatrix} 100 \\ 80 \\ 20 \end{bmatrix}.$$

Azt tapasztaljuk, hogy $x^{(k)}$ tart egy olyan vektorhoz, melyben a koreloszlás megegyezik a stabil koreloszlással.

Mi történik, ha egy másik kezdővektorból indulunk? Pl.:

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 50 \\ 50 \\ 50 \end{bmatrix}, \quad x^{(5)} = \begin{bmatrix} 82.500 \\ 49.600 \\ 18.000 \end{bmatrix}, \quad x^{(10)} = \begin{bmatrix} 72.144 \\ 60.992 \\ 14.116 \end{bmatrix},$$

$$x^{(20)} = \begin{bmatrix} 73.796 \\ 59.166 \\ 14.747 \end{bmatrix}, \quad x^{(40)} = \begin{bmatrix} 73.864 \\ 59.091 \\ 14.773 \end{bmatrix}, \quad x^{(50)} = \begin{bmatrix} 73.864 \\ 59.091 \\ 14.773 \end{bmatrix}.$$

Azt tapasztaljuk, hogy $x^{(k)}$ ismét konvergál, és a határérék ismét egy olyan vektor, mely a stabil koreloszlás (és így a $\lambda = 1$ sajátértékhez tartozó sajátvektor) konstansszorosa.

1. feladat folytatása

Tegyük fel, hogy egy adott évben a halak korcsoportonkénti számát az $x = (50, 50, 50)$ vektor írja le. Vizsgáljuk meg hogyan alakul a korcsoportok egyedszáma az évek múlásával.

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 50 \\ 50 \\ 50 \end{bmatrix}, \quad x^{(1)} = \begin{bmatrix} 700 \\ 25 \\ 25 \end{bmatrix}, \quad x^{(5)} = \begin{bmatrix} 7300 \\ 1225 \\ 550 \end{bmatrix},$$

$$x^{(10)} = \begin{bmatrix} 203150 \\ 51950 \\ 12462 \end{bmatrix}, \quad x^{(15)} = \begin{bmatrix} 6556000 \\ 1637275 \\ 410125 \end{bmatrix}.$$

Azt tapasztaljuk, hogy a korcsoportonkénti egyedszám folyamatosan nő. Vizsgáljuk meg mi történik, ha az $x^{(k)}$ vektorokat normáljuk.

$$\frac{x^{(0)}}{\|x^{(0)}\|} = \begin{bmatrix} 0.57735 \\ 0.57735 \\ 0.57735 \end{bmatrix}, \quad \frac{x^{(1)}}{\|x^{(1)}\|} = \begin{bmatrix} 0.998727 \\ 0.035669 \\ 0.035669 \end{bmatrix},$$

$$\frac{x^{(5)}}{\|x^{(5)}\|} = \begin{bmatrix} 0.983500 \\ 0.165039 \\ 0.074099 \end{bmatrix}, \quad \frac{x^{(10)}}{\|x^{(10)}\|} = \begin{bmatrix} 0.967117 \\ 0.247314 \\ 0.059329 \end{bmatrix},$$

$$\frac{x^{(15)}}{\|x^{(15)}\|} = \begin{bmatrix} 0.968421 \\ 0.241850 \\ 0.060582 \end{bmatrix}.$$

Az így kapott sorozat tart a $\lambda = 2$-höz tartozó sajátvektorhoz.

A hatványmódszer.

Legyen adott az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix és az $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, $x^{(0)} \neq 0$ kezdővektor. Definiáljuk a következő vektorsorozatot:

$$x^{(k+1)} := Ax^{(k)}, \quad k = 0, 1, \dots,$$

vagy a túlcsordulás elkerülése érdekében:

$$y := Ax^{(k)}, \quad x^{(k+1)} = \frac{y}{\|y\|}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Megfelelő feltételek teljesülése esetén a vektorsorozat tart az abszolútértékben legnagyobb sajátértékhez tartozó sajátvektorhoz.

A hatványmódszer konvergenciája

Ha

1. A diagonalizálható
2. az A sajátértékeire teljesül

$$|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \cdots \leq |\lambda_{n-1}| < |\lambda_n|$$

3. $(x^{(0)}, v_n) \neq 0$, ahol v_n a λ_n-hez tartozó sajátvektor,

akkor az előbb definiált $x^{(k)}$ sorozat $k \to \infty$ esetén tart a λ_n-hez (az abszolútértékben legnagyobb sajátértékhez) tartozó sajátvektorhoz.

A konvergencia sebessége $\left|\frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}}\right|$ nagyságától függ.

A sajátérték közelítése.

Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$.
Olyan $\lambda \in \mathbb{R}$-t keresünk, melyre

$$J(\lambda) = \|Av - \lambda v\|_2^2$$

minimális.

Rayleigh-hányados

Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$. A fenti $J(\lambda)$ függvény a minimumát a

$$\lambda = \frac{(Av, v)}{(v, v)}$$

helyen veszi fel.

Hatványmódszer esetén a sajátérték közelítése.

Minden $x^{(k)}$ esetén előállítjuk az $x^{(k)}$-hoz tartozó Rayleigh-hányadost:

$$\lambda^{(k)} := \frac{(Ax^{(k)}, x^{(k)})}{(x^{(k)}, x^{(k)})}$$

Ha a konvergenciatétel feltételei teljesülnek, akkor $\lambda^{(k)} \to \lambda_n$, ha $k \to \infty$.

Ha az $x^{(k)}$ normált, azaz $\|x^{(k)}\|_2 = 1$, akkor

$$\lambda^{(k)} := (Ax^{(k)}, x^{(k)}).$$

1. feladat folytatása

Nézzük meg a Rayleigh-hányadossal milyen közelítést kapunk az abszolúlértékben legnagyobb sajátérték közelítésére.

Itt

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 8 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix},$$

és vegyük az előbb kiszámolt (normált)

$$x = \frac{x^{(15)}}{\|x^{(15)}\|} = \begin{bmatrix} 0.968421 \\ 0.241850 \\ 0.060582 \end{bmatrix}.$$

vektort. Ezzel felírva a Rayleigh-hányadost:

$$\lambda^{(k)} := (Ax, x) = 1.9991 \approx 2.$$

Mikor fejezzük be az iterációt?

Ha

$$|\lambda^{(k)} - \lambda^{(k-1)}| \leq \varepsilon(1 + |\lambda^{(0)}|),$$

ahol ε adott.

Valóban sajátérték, sajátvektor pár környékén sikerült megállni?
Ha

$$\|Ax^{(k)} - \lambda^{(k)}x^{(k)}\|_2^2 \leq \varepsilon,$$

ahol $x^{(k)}$ normált, akkor az iteráció sikeres volt.

Példa.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \quad x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x^{(1)} = Ax^{(0)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda^{(0)} = \frac{(Ax^{(0)}, x^{(0)})}{(x^{(0)}, x^{(0)})} = \frac{(x^{(1)}, x^{(0)})}{(x^{(0)}, x^{(0)})} = 2,$$

$$x^{(2)} = Ax^{(1)} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \lambda^{(1)} = \frac{(x^{(2)}, x^{(1)})}{(x^{(1)}, x^{(1)})} = 3,$$

k	$x^{(k)} = Ax^{(k-1)}$	$x^{(k)} := x^{(k)}/\|x^{(k)}\|_2$	$\lambda^{(k)}$
1	$(2, 1, 1)^T$	$(0.8165, 0.4082, 0.4082)^T$	3
2	$(5, 4, 4)^T$	$(0.6623, 0.5298, 0.5298)^T$	3.0526
3	$(14, 13, 13)^T$	$(0.6058, 0.5626, 0.5626)^T$	3.0225
4	$(41, 40, 40)^T$	$(0.5869, 0.5725, 0.5725)^T$	3.0080
5	$(122, 121, 121)^T$	$(0.5805, 0.5758, 0.5758)^T$	3.0027
6	$(365, 364, 364)^T$	$(0.5784, 0.5768, 0.5768)^T$	3.0009

$$\|Ax^{(6)} - \lambda^{(6)}x^{(6)}\|_2^2 = 6.7026 \cdot 10^{-6}.$$

(A mátrix sajátértékei: $-2, 1, 3$, a 3-hoz tartozó sajátvektor: $(0.5774, 0.5774, 0.5774)^T$.)

Példa.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x^{(1)} = Ax^{(0)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda^{(0)} = \frac{(Ax^{(0)}, x^{(0)})}{(x^{(0)}, x^{(0)})} = \frac{(x^{(1)}, x^{(0)})}{(x^{(0)}, x^{(0)})} = 2,$$

$$x^{(2)} = Ax^{(1)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \lambda^{(1)} = \frac{(x^{(2)}, x^{(1)})}{(x^{(1)}, x^{(1)})} = \frac{3 \cdot 2 + 4 \cdot 1}{2^2 + 1^2} = 2.$$

Az algoritmus leáll, mert $|\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}| = 0$, de a 2 nem sajátértéke A-nak. (A sajátértékei: $2 \pm i$.)

Legyen $x^{(1)} := x^{(1)}/\|x^{(1)}\|_2$, ekkor

$$\|Ax^{(1)} - \lambda^{(1)}x^{(1)}\|_2 = 1.$$

Megjegyzés

Az algoritmus alaplépése egy mátrix-vektor szorzás, ezért jól alkalmazható nagyméretű ritka mátrixok esetén.

Eltolás

Ha az A mátrix sajátértékei $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, akkor az $A - cE$ ($c \in \mathbb{C}$) mátrix sajátértékei $\lambda_1 - c, \ldots, \lambda_n - c$. A sajátvektorok nem változnak.

Hatvány-módszerrel az abszolút értékben legnagyobb sajátértéket közelíthetjük.
A hatvány-módszert az $A - cE$ mátrixra alkalmazva lehetőségünk lehet egy másik sajátérték meghatározására.

Inverz-iteráció.

A hatvány-módszert az A^{-1} mátrixra alkalmazzuk.

$x^{(0)} \neq 0$ kezdővektor,

$$x^{(k+1)} = A^{-1}x^{(k)}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Inverz mátrix sajátértékei

Ha az invertálható A mátrix sajátértékei $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, akkor az A^{-1} mátrix sajátértékei: $\frac{1}{\lambda_1}, \ldots, \frac{1}{\lambda_n}$. A sajátvektorok nem változnak.

Következmény

Az A^{-1} mátrix absz. értékben legnagyobb sajátértéke az A mátrix absz. értékben legkisebb sajátértékének reciproka. A két sajátértékhez ugyanaz a sajátvektor tartozik.
Inverz-iterációval az A mátrix absz.értékben legkisebb sajátértékéhez tartozó sajátvektorát közelíthetjük.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
A: & |\lambda_1| & < & |\lambda_2| & \leq & \ldots & \leq & |\lambda_n| \\
 & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\
 & \color{red}{v_1} & & v_2 & & & & v_n \\
 & \uparrow & & \uparrow & & & & \uparrow \\
A^{-1}: & \frac{1}{|\lambda_1|} & > & \frac{1}{|\lambda_2|} & \geq & \ldots & \geq & \frac{1}{|\lambda_n|}
\end{array}
$$

inverz-iteráció $\rightarrow$ v_1 közelítése

Rayleight-hányados a v_1-re kapott közelítéssel és A-val $\rightarrow$ λ_1 közelítése

Megjegyzés

A gyakorlatban nem az $x^{(k+1)} = A^{-1}x^{(k)}$ iterációt alkalmazzuk (a mátrixinvertálás költséges).
Helyette minden k-ra az

$$Ax^{(k+1)} = x^{(k)}$$

lineáris egyenletrendszert oldjuk meg.

Mivel az egyenletrendszerek mátrixa minden k-ra ugyanaz, ezért az A mátrix LU-felbontását egyetlen egyszer, az algoritmus elején kell elvégezni.

Inverz-iteráció

$x^{(0)} \neq 0$ kezdővektor,
elkészítjük az A mátrix LU-felbontását: $A = LU$,

az algoritmus k-adik lépésében:
1. $Lz = x^{(k-1)} \implies$ meghatározzuk z-t,
2. $Ux^{(k)} = z \implies$ meghatározzuk $x^{(k)}$-t,

a sajátérték közelítése:

$$\lambda^{(k)} := \frac{(Ax^{(k)}, x^{(k)})}{(x^{(k)}, x^{(k)})}$$

A túlcsordulás elkerülése miatt itt is érdemes az $x^{(k)}$-t normálni.

Példa.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \quad y^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

k	$y^{(k)}$ (normált)	$\lambda^{(k)}$
1	$(0.6667, -0.3333, -0.3333)^T$	1
2	$(0.5556, -0.4444, -0.4444)^T$	0.9474
5	$(0.5062, -0.4938, -0.4938)^T$	0.9920
8	$(0.5002, -0.4998, -0.4998)^T$	0.9997
10	$(0.5000, -0.5000, -0.5000)^T$	1.0000

Inverz-iteráció + eltolás.

Az inverz-iterációt A helyett az $A - cE$ mátrixra alkalmazva esélyünk lehet az összes sajátérték közelítésére.

Ekkor az iteráció előtt az $A - cE$ mátrix LU-felbontását készítjük el.

Mivel az A és az $A - cE$ mátrix sajátvektorai megegyeznek, ezért a Rayleigh-hányadosban az A mátrixszal érdemes számolni.

A konvergenciafeltételek teljesülése esetén az algoritmus a c-hez legközelebbi sajátértékét találja meg A-nak.