Az informatika logikai alapjai
5. feladatsor

Szekvent kalkulus – Mi az, hogy szekvent

Szintaxis: Ha Γ és Δ két (esetleg üres) formulahalmaz, akkor a $\Gamma \vdash \Delta$ egy **szekvent**.

Szemantika: Az $\{A_1, \ldots, A_n\} \vdash \{B_1, \ldots, B_m\}$ szekvent **érvényes**, ha minden olyan ϱ interpretáció esetén, ahol $|A_1|_\varrho = \ldots = |A_n|_\varrho = 1$ van olyan i, hogy $|B_i|_\varrho = 1$.

Vagyis: Ha egy szekvent **nem érvényes – azaz cáfolható** –, akkor van olyan ϱ interpretáció, melyre $|A_1|_\varrho = \ldots = |A_n|_\varrho = 1$, míg $|B_1|_\varrho = \ldots = |B_m|_\varrho = 0$.

Az érvényesség még egyszer

A szekvent érvényes, ha **minden baloldali** formula teljesülése szükségszerűen maga után vonja, hogy **valamelyik jobboldali** formula teljesül.

A szekvent érvényes, ha **nincs olyan** eset (interpretáció), hogy **egyik jobboldali formula sem** teljesül, miközben az **összes baloldali** teljesül.

Azaz:

$A_1, \ldots, A_n \vdash B_1, \ldots, B_m$ érvényes szekvent

akkor és csak akkor, ha

$A_1, \ldots, A_n \vDash B_1 \vee \ldots \vee B_m$ fennáll

Vegyük észre, hogy a

$$A_1, A_2, \ldots, A_n \vdash B_1, B_2, \ldots, B_m$$

szekvent akkor és csak akkor érvényes, ha a

$$\top \wedge A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \supset B_1 \vee B_2 \vee \ldots \vee B_m \vee \bot$$

formula érvényes (azaz logikai törvény).

($\top$ és $\bot$ az azonosan igaz és hamis érték jele, lehetne akár 1 és 0 is)

Az érvényesség még egyszer

A szekvent érvényes, ha **minden baloldali** formula teljesülése szükségszerűen maga után vonja, hogy **valamelyik jobboldali** formula teljesül.

A szekvent érvényes, ha **nincs olyan** eset (interpretáció), hogy **egyik jobboldali formula sem** teljesül, miközben az **összes baloldali** teljesül.

Érvényes szekvent:

$A, B, C \vdash \neg A, B \wedge C$

Nem érvényes szekvent!

$A, B, C \vdash \neg A, \neg B$

(Elhagyjuk a halmazt jelölő „{ }"-ket)

11.I.1. Adjuk meg az alábbi szekventeknek megfelelő formulákat! Egyszerűsítsünk, ahol ez lehetséges!

(a) $\vdash (X \supset Y)$

(b) $X \vdash Y$

(c) $X \wedge Y \vdash Y \wedge Z$

(d) $(X \supset Y) \vdash$

(e) $X \vee Y \vdash Y \vee Z$

(f) $X, Y \vdash Y, Z$

Szekvent kalkulus – Axiómák és levezetési szabályok

- A szekvent kalkulus **axiómái** a következő alakúak (axiómaséma):

  $$\Gamma, A \vdash \Delta, A$$

  ahol A egy atomi formula, Γ és Δ pedig formulahalmazok.
- A szekvent kalkulus **levezetési szabályai**:

konjunkció:
$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \wedge B} \qquad \frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}$$

diszjunkció:
$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}$$

implikáció:
$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \supset B} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \supset B \vdash \Delta}$$

negáció:
$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}$$

(premissza és konklúzió) Vegyük észre: Ezek mind „szintaktikai fogalmak”

A szekvent kalkulus mechanikus (szintaktikai szabályokon alapuló) eljárás bizonyítások konstruálására

- Egy levezetési fa **bizonyítás**, ha minden levele axióma.

Például:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{X \vdash X, Y \qquad X, Y \vdash Y}{X, X \to Y \vdash Y}(\to l)}{X, X \to Y, \neg Y \vdash}(\neg l)}{X \to Y, \neg Y \vdash \neg X}(\neg r)$$

$$\dfrac{A \vdash A \qquad \dfrac{A \vdash A, B}{A \vdash A \vee B}(\vee r)}{A \vdash A \wedge (A \vee B)}(\wedge r)$$

Vegyük észre, hogy itt a „bizonyítás” szintaktikai fogalom:
A gyökér egy szekvent, a fa a szintaktikai szabályoknak megfelelően épül fel, a levelek axiómák.

A szekvent kalkulus mechanikus (szintaktikai szabályokon alapuló) eljárás bizonyítások konstruálására

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \wedge B} \qquad \frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \supset B} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \supset B \vdash \Delta}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}$$

- Egy levezetési fa **bizo**

  axióma.

Például:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{X \vdash X, Y \qquad X, Y \vdash Y}{X, X \rightarrow Y \vdash Y}(\rightarrow l)}{X, X \rightarrow Y, \neg Y \vdash}(\neg l)}{X \rightarrow Y, \neg Y \vdash \neg X}(\neg r)$$

$$\dfrac{A \vdash A \qquad \dfrac{A \vdash A, B}{A \vdash A \vee B}(\vee r)}{A \vdash A \wedge (A \vee B)}(\wedge r)$$

Vegyük észre, hogy itt a „bizonyítás” szintaktikai fogalom:

A gyökér egy szekvent, a fa a szintaktikai szabályoknak megfelelően épül fel, a levelek axiómák.

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \wedge B} \qquad\qquad \frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B} \qquad\qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \supset B} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \supset B \vdash \Delta}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}$$

11.I.9. Bizonyítsuk be szekventkalkulus segítségével, hogy a

$$(X \vee Z) \wedge (Y \vee Z) \supset (X \wedge Y) \vee Z$$

formula logikai törvény!

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \wedge B} \qquad \frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \supset B} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \supset B \vdash \Delta}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}$$

11.I.14. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi formulák ellentmondásosak!

(a) $X \wedge \neg Y \wedge (\neg Y \supset \neg X)$

(b) $X \wedge \neg(Y \supset (X \wedge Y))$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \wedge B} \qquad \frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \supset B} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \supset B \vdash \Delta}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}$$

11.I.15. Döntsük el, hogy az alábbi formulák közül melyik törvény, melyik ellentmondás, és melyik kielégíthető, de nem törvény!

(a) $X \supset \neg(\neg Y \wedge (\neg Y \supset \neg X))$

(c) $(X \supset Y) \wedge X \wedge \neg Y$

(d) $(X \vee Y) \wedge (X \supset Y) \wedge \; Y \supset Z$

7.I.23. Ellenőrizzük, hogy az alábbi következtetések helyesek-e!

(b) Premisszák:

Ha a 2 prímszám, akkor a 2 a legkisebb prímszám. Ha a 2 a legkisebb prímszám, akkor az 1 nem prímszám. Az 1 nem prímszám.

Konklúzió:

Tehát a 2 prímszám.

7.I.21. Döntsük el, hogy az alábbi következményrelációk fennállnak-e!

(a) $X \supset \neg Y \vDash X \supset (Y \supset Z)$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \wedge B} \qquad \frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \supset B} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \supset B \vdash \Delta}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}$$

11.I.17. Készítsük el a szekventkalkulus ekvivalenciajelre vonatkozó levezetési szabályait!

Ez lesz az eredmény. Hogy jött ki?

$$(\vdash\equiv) \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta, B;\ \Gamma, B \vdash \Delta, A}{\Gamma \vdash \Delta, A \equiv B}$$

$$(\equiv\vdash) \qquad \frac{A, B, \Gamma \vdash \Delta;\ \Gamma \vdash \Delta, A, B}{A \equiv B, \Gamma \vdash \Delta}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \wedge B} \qquad \frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \supset B} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \supset B \vdash \Delta}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}$$

11.I.12. Bizonyítsuk be a szekventkalkulusban az alábbi ekvivalenciákat!

(d) $X \supset Y \ \sim\ \neg X \vee Y$

(e) $(X \vee Y) \wedge (X \vee \neg Y) \ \sim\ X$

(f) $X \vee (\neg X \wedge Y) \ \sim\ X \vee Y$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \wedge B} \qquad\qquad \frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B} \qquad\qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \supset B} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \supset B \vdash \Delta}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}$$

Ha marad idő, vehetünk múlt órai feladatokat, ahol következtetés helyességét kellett igazolni, és megoldhatjuk ezeket a mai óra módszerével.

Például:

7.I.21. Döntsük el, hogy az alábbi következményrelációk fennállnak-e!

(a) $X \supset \neg Y \vDash X \supset (Y \supset Z)$

(b) $\neg X \vee Y, Z \supset \neg Y \vDash X \supset \neg Z$

(c) $(X \vee Y) \supset (Z \wedge U), (U \vee V) \supset W \vDash X \supset W$

(d) $X \supset Y, \neg Z \supset \neg Y, \neg Z \vee \neg U \vDash U \supset \neg X$

(Az (*a*)-t az előbb már megcsináltuk.)

7.I.23. Ellenőrizzük, hogy az alábbi következtetések helyesek-e!

(a) Premisszák:

Ha reggel uszodába megyek, korán kelek. Ha viszont sok dolgozatot kell kijavítanom éjszaka, nem tudok reggel korán kelni. Ma reggel uszodában voltam.

Konklúzió:

Tegnap éjszaka nem kellett sok dolgozatot kijavítanom.

a) RU: Reggel uszodába megyek

SDJ: Sok dolgozatot kell javítanom

KK: Korán kelek

$RU \supset KK$, $SDJ \supset \neg KK$, $RU \models \neg SDJ$