Riemann-integrál

Előadásjegyzet

A Riemann-integrálhatóság fogalma

A továbbiakban legyen $[a,b] \subset \mathbb{R}$ egy zárt intervallum és $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ egy korlátos függvény.

1. Definíció. *Legyen $n \in \mathbb{N}$. A*

$$P = \{x_i \mid a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < \ldots < x_n = b\}$$

*halmazt az $[a,b]$ **intervallum egy felosztásá**nak nevezzük.*

*Az x_i pontokat a P felosztás **osztópontjai**nak hívjuk, míg az $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$ intervallumokat a **felosztás részintervallumai**nak mondjuk.*

Továbbá, a

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

jelölés bevezetése mellett a

$$\|P\| = \max\{\Delta x_i \mid i = 1, \ldots, n\}$$

*számot a **felosztás finomságá**nak nevezzük.*

2. Definíció. *Felosztások egy $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozatát **normális felosztássorozat**nak mondjuk, hogy*

$$\lim_{k\to\infty} \|P_k\| = 0.$$

3. Definíció. *Legyen P_1, illetve P_2 az $[a,b]$ intervallum felosztásai. Abban az esetben, ha*

$$P_1 \subset P_2$$

*teljesül, azt mondjuk, hogy a P_2 felosztás **finomítás**a a P_1 felosztásnak.*

4. Definíció. *Legyen P az $[a,b]$ intervallum egy felosztása és*

$$M_i = \max_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) \qquad \textit{és} \qquad m_i = \min_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

5. Definíció. *A fenti jelölések megtartása mellett legyenek*

$$\sigma(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta_i$$

$$\Sigma(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta_i$$

és

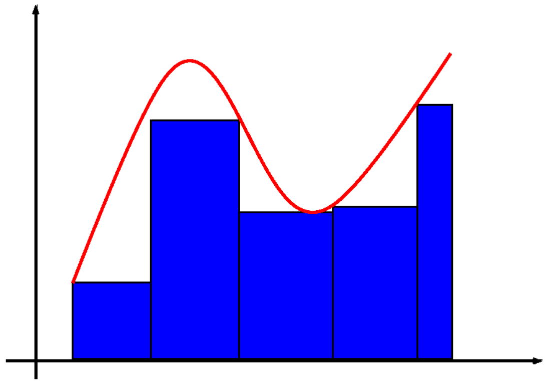
$$\mathscr{O}(f,P) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta_i.$$

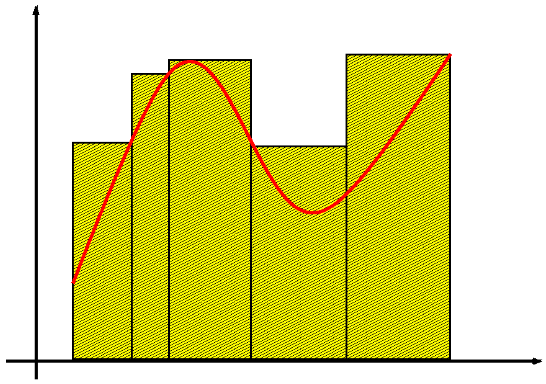
*Ezeket a mennyiségeket rendre az f függvény P felosztásához tartozó **alsó, felső**, illetve **oszcillációs összeg**ének nevezzük.*

6. Definíció. *Továbbá, ha minden $i = 1, \dots, n$ esetén $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, akkor az*

$$\mathscr{I}(f, P) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

számot az f függvény P felosztásához és a $\xi_1, \dots, \xi_n$ pontokhoz tartozó ***integrálközelítő összegé****nek mondjuk.*





1. Állítás.

- *Az $[a, b]$ intervallum tetszőleges P felosztása és tetszőleges $\xi_1, \dots, \xi_n \in [a, b]$ pontok esetén*

$$\sigma(f, P) \leqslant \mathscr{I}(f, P) \leqslant \Sigma(f, P).$$

- *Ha P_1 és P_2 olyan felosztásai az $[a, b]$ intervallumnak, hogy $P_1 \subset P_2$, akkor*

$$\sigma(f, P_1) \leqslant \sigma(f, P_2) \quad \text{és} \quad \Sigma(f, P_2) \leqslant \Sigma(f, P_1).$$

- *Az $[a, b]$ intervallum tetszőleges P_1 és P_2 felosztásai esetén*

$$\sigma(f, P_1) \leqslant \Sigma(f, P_2).$$

1. Tétel. *Legyen $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény. Ekkor az $[a, b]$ intervallum tetszőleges $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ normális felosztássorozata esetén*

$$\lim_{k\to\infty} \sigma(f, P_k) = \underline{\mathscr{I}}(f), \ \lim_{k\to\infty} \Sigma(f, P_k) = \overline{\mathscr{I}}(f) \text{ és } \lim_{k\to\infty} \mathscr{O}(f, P_k) = \overline{\mathscr{I}}(f) - \underline{\mathscr{I}}(f)$$

teljesül. Az $\underline{\mathscr{I}}(f)$, illetve az $\overline{\mathscr{I}}(f)$ számokat az f függvény $[a, b]$ intervallum feletti ***alsó****, illetve* ***felső Darboux-integrál****jának nevezzük.*

2. Állítás. *Tetszőleges $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény esetén az $\underline{\mathscr{I}}(f)$, illetve az $\overline{\mathscr{I}}(f)$ Darboux-integrálok léteznek és végesek, valamint*

$$\underline{\mathscr{I}}(f) \leqslant \overline{\mathscr{I}}(f)$$

teljesül.

1. Következmény. *Tetszőleges $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény és az $[a,b]$ intervallum tetszőleges P felosztása esetén*

$$\sigma(f,P) \leqslant \underline{\mathscr{I}}(f) \leqslant \overline{\mathscr{I}}(f) \leqslant \Sigma(f,P),$$

így,

$$0 \leqslant \overline{\mathscr{I}}(f) - \underline{\mathscr{I}}(f) \leqslant \mathscr{O}(f,P)$$

teljesül.

7. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény **Riemann-integrálható**, ha*

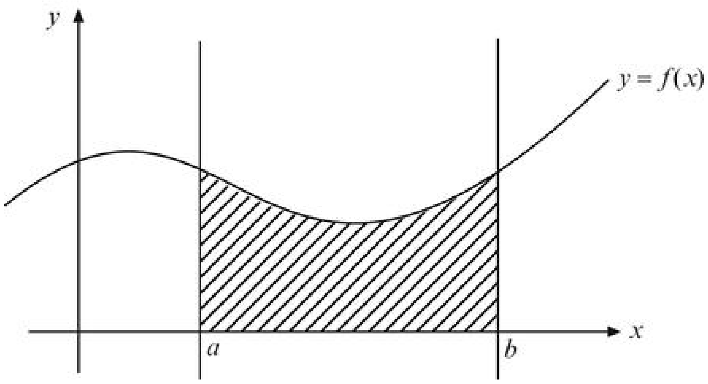
$$\underline{\mathscr{I}}(f) = \overline{\mathscr{I}}(f)$$

*teljesül. Ezt a közös értéket az f függvény $[a,b]$ intervallum feletti **Riemann-integrál**jának mondjuk és rá az*

$$\int\limits_a^b f(x)dx$$

jelölést használjuk.

1. Megjegyzés (A Riemann-integrál geometriai jelentése). *Az $\int\limits_a^b f(x)dx$ Riemann-integrál annak a tartománynak az **előjeles területe** , melyet az $y = f(x)$ görbe, az x-tengely, valamint az $x = a$ és $y = b$ egyenletű egyenes határol.*



1. Példa. *Az*

$$f(x) = x^2 \qquad (x \in [0,1])$$

függvény Riemann-integrálható a $[0,1]$ intervallumon.

Legyen $n \in \mathbb{N}$ és tekintsük a

$$P_n = \left\{ \frac{i}{n} \mid i = 0, 1, \ldots, n \right\}$$

felosztásokat. Ekkor

$$\|P_n\| = \frac{1}{n}$$

teljesül minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, vagyis a $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ felosztássorozat normális. Továbbá, ha $n \in \mathbb{N}$ rögzített, akkor

$$M_i = \max_{x\in\left[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}\right]} x^2 = \frac{i^2}{n^2} \quad \text{és} \quad m_i = \min_{x\in\left[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}\right]} x^2 = \frac{(i-1)^2}{n^2} \qquad (i = 1, \ldots, n)\,.$$

Ezért

$$\Sigma(f,P_n) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

és

$$\sigma(f,P_n)=\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{(i-1)^2}{n^2}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2=\frac{1}{n^3}\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\qquad (n\in\mathbb{N})$$

Mindezekből

$$\overline{\mathscr{I}}(f)=\lim_{n\to\infty}\Sigma(f,P_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}=\frac{1}{3}$$

és

$$\underline{\mathscr{I}}(f)=\lim_{n\to\infty}\sigma(f,P_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}=\frac{1}{3}$$

adódik, vagyis

$$\overline{\mathscr{I}}(f)=\underline{\mathscr{I}}(f)=\frac{1}{3},$$

ami azt jelenti, hogy az f függvény Riemann-integrálható a $[0,1]$ intervallumon és

$$\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}.$$

2. Példa. *Az*

$$f(x)=\chi_{\mathbb{Q}}(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\\ 0, & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

függvény nem Riemann-integrálható a $[0,1]$ intervallumon.

Legyen $n\in\mathbb{N}$ és tekintsük a

$$P_n=\left\{\frac{i}{n}\mid i=0,1,\dots,n\right\}$$

felosztásokat. Ekkor

$$\|P_n\|=\frac{1}{n}$$

teljesül minden $n\in\mathbb{N}$ esetén, vagyis a $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ felosztássorozat normális. Továbbá, ha $n\in\mathbb{N}$ rögzített, akkor

$$M_i=\max_{x\in\left[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}\right]}\chi_{\mathbb{Q}}(x)=1\quad \text{és}\quad m_i=\min_{x\in\left[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}\right]}\chi_{\mathbb{Q}}(x)=0\qquad (i=1,\dots,n)\,.$$

Ezért

$$\Sigma(f,P_n)=\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}1\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\cdot n=1\quad (n\in\mathbb{N})$$

és

$$\sigma(f,P_n)=\sum_{i=1}^{n}m_i\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}0\cdot\frac{1}{n}=0\quad (n\in\mathbb{N})$$

Mindezekből

$$\overline{\mathscr{I}}(f)=\lim_{n\to\infty}\Sigma(f,P_n)=\lim_{n\to\infty}1=1$$

és

$$\underline{\mathscr{I}}(f)=\lim_{n\to\infty}\sigma(f,P_n)=\lim_{n\to\infty}0=0$$

adódik, vagyis

$$\overline{\mathscr{I}}(f)=1\neq 0=\underline{\mathscr{I}}(f)$$

ami azt jelenti, hogy az f függvény nem Riemann-integrálható a $[0,1]$ intervallumon.

A Riemann-integrálhatóság kritériumai és elegendő feltételei

2. Tétel (Oszcillációs kritérium). *Legyen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény. Az f függvény* ***akkor, és csakis akkor*** *Riemann-integrálható, ha bármely $\varepsilon > 0$ esetén van olyan P felosztása az $[a,b]$ intervallumnak, melyre*

$$\mathscr{O}(f,P) < \varepsilon$$

teljesül.

3. Tétel. *Legyen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény. Az f függvény* ***akkor, és csakis akkor*** *Riemann-integrálható, ha van olyan I valós szám, hogy bármely $\varepsilon > 0$ esetén van olyan P felosztása az $[a,b]$ intervallumnak, melyhez tartozó $\mathscr{I}(f,P)$ integrálközelítő összegre*

$$|\mathscr{I}(f,P) - I| < \varepsilon$$

teljesül. Továbbá, ebben az esetben

$$I = \int\limits_a^b f(x)dx.$$

4. Tétel. *Legyen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ekkor f Riemann-integrálható.*

5. Tétel. *Legyen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton függvény. Ekkor f Riemann-integrálható.*

6. Tétel. *Legyen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ olyan függvény, mely legfeljebb megszámlálhatóan végtelen sok $[a,b]$-beli pontban nem folytonos. Ekkor f Riemann-integrálható.*

A Riemann-integrál tulajdonságai

7. Tétel (Riemann-integrál és műveletek). *Legyenek $f,g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható függvények, $\lambda \in \mathbb{R}$. Ekkor*

- *az $f+g$ függvény is Riemann-integrálható és*

$$\int\limits_a^b (f+g)(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_a^b g(x)dx;$$

- *a $\lambda \cdot f$ függvény is Riemann-integrálható és*

$$\int\limits_a^b (\lambda \cdot f)(x)dx = \lambda \int\limits_a^b f(x)dx;$$

- *ha minden $x \in [a,b]$ esetén $f(x) \leqslant g(x)$ teljesül, akkor*

$$\int\limits_a^b f(x)dx \leqslant \int\limits_a^b g(x)dx;$$

- *ha $[c,d] \subset [a,b]$, akkor az f függvény Riemann-integrálható a $[c,d]$ intervallumon is;*

- *ha $c \in]a,b[$, akkor*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx;$$

- *ha $K \geqslant 0$ olyan, hogy*

$$|f(x)| \leqslant K \qquad (x \in [a,b]),$$

akkor

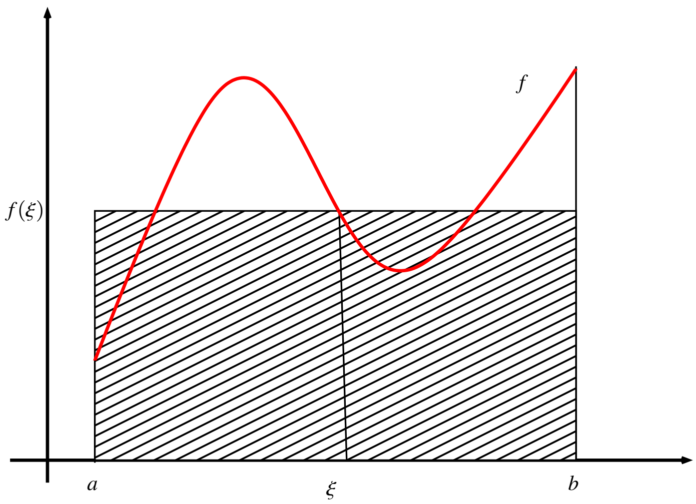
$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant K(b-a).$$

2. Megjegyzés. *Az előző tételben szereplő első és második állítást együttesen a Riemann-integrál **linearitásának**, a harmadikat a Riemann-integrál **monotonitásának**, míg az ötödiket a Riemann-integrál **intervallum-additivitásának** mondjuk.*

8. Tétel (Középértéktétel). *Legyenek $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható függvények. Tegyük fel továbbá, hogy az f függvény folytonos, a g függvény pedig nemnegatív. Ekkor van olyan $\xi \in]a,b[$, melyre*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$$

teljesül.



1. ábra. A Középértéktétel geometriai jelentése

2. Következmény (Középértéktétel II.). *Legyen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos, Riemann-integrálható függvény. Ekkor van olyan $\xi \in]a,b[$, melyre*

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

teljesül.

9. Tétel. *Legyen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ egy Riemann-integrálható függvény. Ekkor az $|f|$ függvény is Riemann-integrálható és*

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx$$

teljesül.

A Newton–Leibniz-formula

8. Definíció. *Legyen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ egy Riemann-integrálható függvény. Ekkor az*

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt \qquad (x \in [a,b])$$

*módon megadott $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ függvényt az f függvény **felsőhatárfüggvény**ének vagy **integrálfüggvény**ének hívjuk.*

10. Tétel. *Legyen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ egy Riemann-integrálható függvény. Ekkor az f függvény felsőhatárfüggvénye folytonos az $[a,b]$ intervallumon.*

11. Tétel. *Legyen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ egy Riemann-integrálható függvény. Ha az f függvény folytonos az $]a,b[$ intervallum valamely x^* pontjában, akkor ebben a pontban az f függvény F felsőhatárfüggvénye differenciálható és*

$$F'(x^*) = f(x^*).$$

12. Tétel (Newton–Leibniz). *Legyen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ egy folytonos függvény és jelölje $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ az f függvény egy primitív függvényét. Ekkor*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

3. Példa. *Számítsuk ki az*

$$\int_e^{e^2} \frac{2}{x}dx$$

integrált.

A Newton–Leibniz formula jelöléseivel

$$f(x) = \frac{2}{x}, \quad F(x) = 2\ln|x| \quad \text{és} \quad a = e, \quad b = e^2,$$

így

$$\int_e^{e^2} \frac{1}{x}dx = [2\ln|x|]_e^{e^2} = \ln|e^2| - \ln|e| = 4 - 2 = 2.$$

13. Tétel (Parciális integrálás tétele). *Legyenek $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ olyan differenciálható függvények, melyek deriváltjai Riemann-integrálhatóak. Ekkor*

$$\int\limits_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int\limits_a^b f'(x)g(x)dx.$$

4. Példa.

$$\int_0^2 xe^x = ?$$

Az integrál kiszámításához alkalmazzuk az előző tételt az

$$f(x) = x \quad \text{és} \quad g'(x) = e^x$$

választással, ekkor

$$f'(x) = 1 \quad \text{és} \quad g(x) = e^x,$$

így

$$\int_0^2 xe^x dx = [xe^x]_0^2 - \int_0^2 1 \cdot e^x dx = [xe^x]_0^2 - [e^x]_0^2 = \left(2e^2 - 0\right) - \left(e^2 - 1\right) = e^2 + 1.$$

14. Tétel (Helyettesítéses integrálás tétele). *Legyen $\varphi\colon [a,b] \to [A,B]$ egy olyan szigorúan monoton növekedő, folytonosan differenciálható függvény, melyre $\varphi(a) = A$ és $\varphi(b) = B$. Ha az $f\colon [\varphi(a), \varphi(b)] \to \mathbb{R}$ függvény folytonos, akkor*

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)dt.$$

5. Példa.

$$\int_1^2 (3x+4)^3 dx = ?$$

Alkalmazzuk az előző tételt a

$$\varphi(t) = \frac{t-4}{3}$$

választással, ekkor

$$\varphi'(t) = \frac{1}{3}, \quad \text{és} \quad \varphi^{-1}(t) = 3t+4,$$

továbbá

$$\varphi(a) = 1 \quad \text{és} \quad \varphi(b) = 2,$$

ezért $a = 7$ és $b = 10$, így

$$\int_1^2 (3x+4)^3 dx = \int_7^{10} t^3 \cdot \frac{1}{3} dt = \left[\frac{t^4}{12}\right] = \frac{10^4 - 7^4}{12}.$$

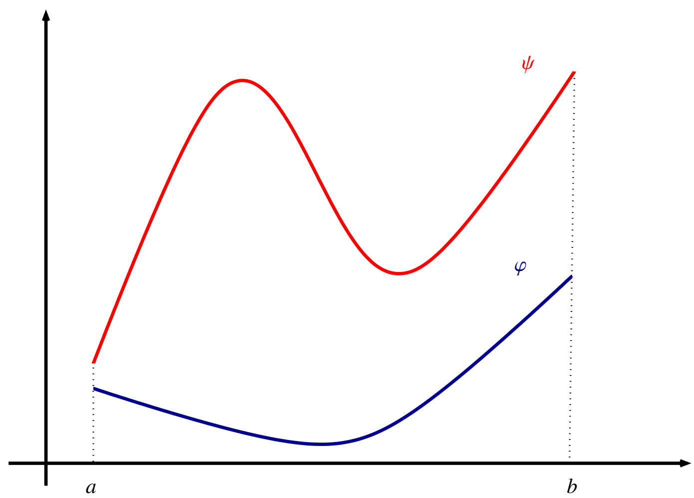
A Riemann-integrál néhány alkalmazása

Területszámítás

Legyenek $\varphi, \psi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ olyan folytonos függvények, melyekre

$$\varphi(x) \leqslant \psi(x) \qquad (x \in [a,b])$$

teljesül és jelölje S annak a síkidomnak a területét, melyet az $y = \varphi(x)$, $y = \psi(x)$ görbék valamint az $x = a$ és $x = b$ egyenesek határolnak.



Ekkor az S síkidom területe

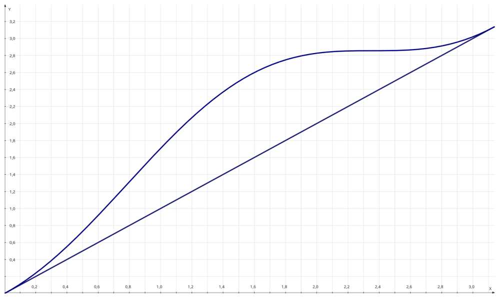
$$A(S) = \int_a^b \psi(x) - \varphi(x) dx.$$

6. Példa. *Legyenek*

$$\varphi(x) = x \qquad \text{és} \qquad \psi(x) = x + \sin^2(x) \qquad (x \in [0, \pi]) .$$

Ekkor $\varphi(x) \leqslant \psi(x)$ *teljesül minden* $x \in [0, \pi]$ *esetén, így a* φ, ψ *görbék, illetve az* $x = 0$ *és* $x = \pi$ *egyenesek által meghatározott tartomány területe*

$$T(S) = \int_0^\pi (x + \sin^2(x)) - x dx = \int_0^\pi \sin^2(x) dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} \right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}.$$



Görbék ívhossza

Legyen $\varphi\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ egy folytonosan differenciálható függvény, ekkor a φ függvény által meghatározott görbedarab ívhossza,

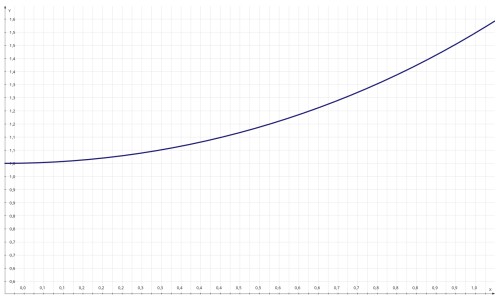
$$L(\varphi) = \int_a^b \sqrt{1 + (\varphi'(x))^2} dx.$$

7. Példa. *Legyen* $\alpha > 0$ *rögzített és*

$$\varphi(x) = \alpha \cosh\left(\frac{x}{\alpha}\right) \qquad (x \in [0, \alpha]) .$$

Ekkor a $\varphi\colon [0, \alpha] \to \mathbb{R}$ *folytonosan differenciálható függvény által meghatározott görbedarab hossza,*

$$L(\varphi) = \int_0^\alpha \sqrt{1 + (\varphi'(x)^2)} dx = \int_0^\alpha \sqrt{1 + \left(\sinh^2\left(\frac{x}{a}\right)\right)} dx = \int_0^\alpha \cosh\left(\frac{x}{\alpha}\right) dx$$
$$= \left[\alpha \sinh\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right]_0^\alpha = \alpha \cdot \sinh(1).$$



Forgástestek térfogata

Legyen $\varphi\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ egy folytonos függvény és forgassuk meg az x tengely körül az

$$a \leqslant x \leqslant b \qquad 0 \leqslant y \leqslant \varphi(x)$$

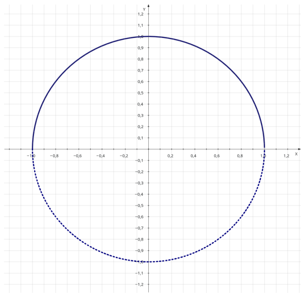
tartományt. A forgás során súrolt pontok egy S forgástestet alkotnak, melynek térfogata

$$V(S) = \pi \int_a^b \varphi^2(x) dx.$$

8. Példa. *Legyen $r > 0$ adott és*

$$\varphi(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \qquad (x \in [-r, r]) .$$

Ekkor a φ függvény x tengely körüli megforgatásával nyert forgástest éppen az origó középpontú r sugarú gömb.



A fentiek szerint ennek a forgástestnek a térfogata

$$V(S) = \pi \int_{-r}^{r} \varphi^2(x)dx = \pi \int_{-r}^{r} \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx = \pi \int_{-r}^{r} r^2 - x^2 dx = \pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-r}^{r} = \frac{4r^3\pi}{3}.$$

Improprius integrálok

9. Definíció. *Legyen a valós, b pedig bővített valós szám, úgy, hogy $a < b$ teljesül. Legyen továbbá $f\colon [a, b[\to \mathbb{R}$ egy olyan függvény, mely minden $x \in [a, b[$ esetén Riemann-integrálható az $[a, x]$ intervallumon. Értelmezzük az $F\colon [a, b[\to \mathbb{R}$ függvényt az*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \qquad (x \in [a, b[)$$

formulával. Ha az F függvénynek a b pontban létezik és véges a baloldali határértéke, akkor azt mondjuk, hogy az $\int_a^b f(x)dx$ ***improprius integrál konvergens*** *és ebben az esetben*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{x \to b-} F(x).$$

10. Definíció. *Legyen a bővített valós, b pedig valós szám, úgy, hogy $a < b$ teljesül. Legyen továbbá $f\colon]a, b] \to \mathbb{R}$ egy olyan függvény, mely minden $x \in]a, b]$ esetén Riemann-integrálható az $[x, b]$ intervallumon. Értelmezzük az $F\colon]a, b] \to \mathbb{R}$ függvényt az*

$$F(x) = \int_x^b f(t)dt \qquad (x \in]a, b])$$

formulával. Ha az F függvénynek az a pontban létezik és véges a jobboldali határértéke, akkor azt mondjuk, hogy az $\int_a^b f(x)dx$ ***improprius integrál konvergens*** *és ebben az esetben*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{x \to a+} F(x).$$

11. Definíció. *Legyenek a, b bővített valós számok úgy, hogy $a < b$. Legyen továbbá $f\colon \,]a, b[\to \mathbb{R}$ egy olyan függvény, mely az $]a, b[$ intervallum minden zárt részintervallumán Riemann-integrálható. Tegyük fel, hogy van olyan $c \in]a, b[$, mely esetén az*

$$\int_a^c f(x)dx \qquad \text{és az} \qquad \int_c^b f(x)dx$$

improprius integrálok konvergensek. Ebben az esetben azt mondjuk, hogy az $\int_a^b f(x)dx$ improprius integrál is konvergens és

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

15. Tétel (Összehasonlító kritérium I.). *Legyen $a \in \mathbb{R}$ és $\varphi, \Phi\colon [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ olyan függvények, melyek az $[a, +\infty[$ intervallum minden zárt részintervallumán Riemann-integrálhatóak. Tegyük fel továbbá, hogy*

$$|\varphi(x)| \leqslant \Phi(x) \qquad (x \in [a, +\infty[)\,.$$

Ekkor, ha az $\int_a^{+\infty} \Phi(x)dx$ improprius integrál konvergens, akkor az $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ improprius integrál abszolút konvergens.

16. Tétel (Összehasonlító kritérium II.). *Legyen $a \in \mathbb{R}$ és $\varphi, \psi\colon [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ olyan függvények, melyek az $[a, +\infty[$ intervallum minden zárt részintervallumán Riemann-integrálhatóak. Tegyük fel továbbá, hogy $\psi(x) > 0$ teljesül minden $x \in [a, +\infty[$ esetén és létezik és nullától különböző a*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

határérték. Ebben az esetben az $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ és az $\int_a^{+\infty} \psi(x)dx$ improprius integrálok egyszerre konvergensek, illetve divergensek.

17. Tétel. *Legyenek $a, p \in \mathbb{R}$ és $\varphi\colon [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ olyan függvény, mely az $[a, +\infty[$ intervallum minden zárt részintervallumán Riemann-integrálható. Tegyük fel továbbá, hogy létezik és nullától különböző a*

$$\lim_{x\to+\infty} x^p \varphi(x)$$

határérték. Ekkor

- *$p > 1$ esetén az $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ improprius integrál konvergens;*
- *$p \leqslant 1$ esetén az $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ improprius integrál divergens.*

18. Tétel. *Legyenek $f, \varphi\colon [a, +\infty[\to \mathbb{R}$, melyekre*

(i) $x \to +\infty$ esetén a φ függvény monoton csökkenően nullához konvergál;

(ii) az

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \qquad (x \in [a, +\infty[)$$

módon megadott $F\colon [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ függvény korlátos.

Ekkor az

$$\int_a^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx$$

improprius integrál konvergens, azonban abszolút konvergencia általában nem teljesül.

3. Következmény. *Legyenek $a, \alpha \in]0, +\infty[$ tetszőlegesek. Ekkor az*

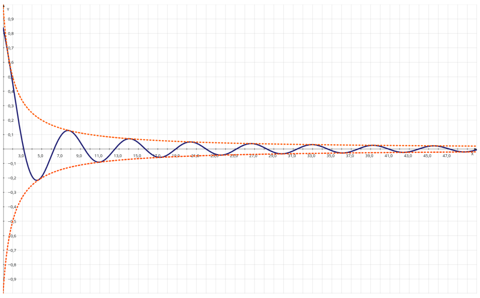
$$\int_a^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^\alpha}dx \quad \text{és az} \quad \int_a^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^\alpha}dx$$

integrálok konvergensek.

9. Példa. *Az előző következmény alkalmazásával azonnal adódik, hogy az*

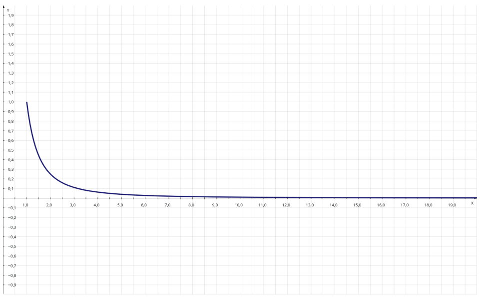
$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx$$

improprius integrál konvergens.



10. Példa.

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx = 1,$$



ugyanis tetszőleges $x \in [1, +\infty[$ esetén az

$$f(t) = \frac{1}{t^2} \qquad (t \in [1, x])$$

függvény Riemann-integrálható az $[1, x]$ intervallumon. Továbbá,

$$F(x) = \int\limits_1^x f(t)dt = \int\limits_1^x \frac{1}{t^2}dt = \left[\frac{1}{t^2}\right]_1^x = -\frac{1}{x} + 1 = 1 - \frac{1}{x},$$

ezért

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x\to\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1,$$

vagyis az $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ *improprius integrál konvergens és*

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} = 1.$$

11. Példa.

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = +\infty,$$

ugyanis tetszőleges $x \in [1, +\infty[$ *esetén az*

$$f(t) = \frac{1}{t} \qquad (t \in [1, x])$$

függvény Riemann-integrálható az $[1, x]$ *intervallumon. Továbbá,*

$$F(x) = \int\limits_1^x f(t)dt = \int\limits_1^x \frac{1}{t} dt = [\ln |x|]_1^x = \ln |x| - \ln |1| = \ln |x|,$$

ezért

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x\to\infty} \ln |x| = +\infty,$$

vagyis az $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ *improprius integrál divergens.*

12. Példa.

$$\int\limits_0^1 \frac{1}{x} dx = +\infty,$$

ugyanis tetszőleges $x \in [0, 1[$ *esetén az*

$$f(t) = \frac{1}{t} \qquad (t \in [x, 1])$$

függvény Riemann-integrálható az $[x, 1]$ *intervallumon. Továbbá,*

$$F(x) = \int\limits_x^1 f(t)dt = \int\limits_x^1 \frac{1}{t} dt = [\ln |t|]_x^1 = \ln |1| - \ln |x| = -\ln |x|$$

ezért

$$\lim_{x\to 0+} F(x) = \lim_{x\to 0+} (-\ln |x|) = +\infty,$$

vagyis az $\int\limits_0^1 \frac{1}{x} dx$ *improprius integrál divergens.*

13. Példa.

$$\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2,$$

ugyanis tetszőleges $x \in [0, 1[$ *esetén az*

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \qquad (t \in [x, 1])$$

függvény Riemann-integrálható az $[x, 1]$ *intervallumon. Továbbá,*

$$F(x) = \int_x^1 f(t)dt = \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{t}}dt = \left[2\sqrt{t}\right]_x^1 = 2 - 2\sqrt{x}$$

ezért

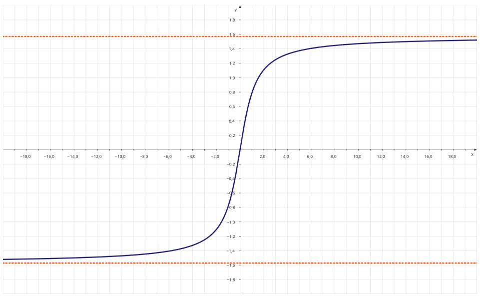
$$\lim_{x\to 0+} F(x) = \lim_{x\to 0+} \left(2 - 2\sqrt{x}\right) = 2,$$

vagyis az $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ *improprius integrál konvergens és*

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2.$$

14. Példa.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \pi,$$



ugyanis tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ *esetén az*

$$f(t) = \frac{1}{1+t^2} \qquad (t \in [a, b])$$

függvény Riemann-integrálható az $[a, b]$ *intervallumon és*

$$\int_a^b \frac{1}{1+t^2}dt = [\mathrm{arctg}(t)]_a^b = \mathrm{arctg}(b) - \mathrm{arctg}(a),$$

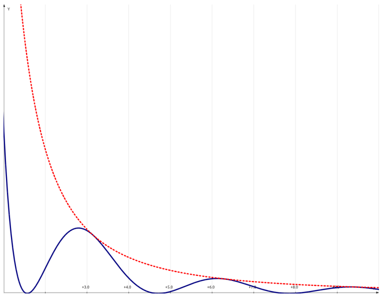
így

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} \int_a^b \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} (\mathrm{arctg}(b) - \mathrm{arctg}(a)) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

15. Példa. *Az*

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos^2(x)}{x^2}dx$$

improprius integrál abszolút konvergens.



Ugyanis tetszőleges $x \in]0, +\infty[$ esetén

$$\left|\frac{\cos^2(x)}{x^2}\right| \leqslant \frac{1}{x^2}$$

teljesül, valamint a 10. Példa szerint

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1.$$

16. Példa. *Az*

$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{x - e^{-x}} dx$$

improprius integrál divergens, hiszen minden $x \in [3, +\infty[$ esetén

$$\frac{1}{x - e^{-x}} > \frac{1}{x}$$

teljesül. Továbbá,

$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{x} = +\infty,$$

amiből az Összehasonlító kritérium felhasználásával adódik a fenti improprius integrál divergenciája.

17. Példa. *Az*

$$\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

improprius integrál konvergens, hiszen, ha $x \in]1, +\infty[$, akkor

$$e^{-x^2} < e^{-x}.$$

Továbbá, az

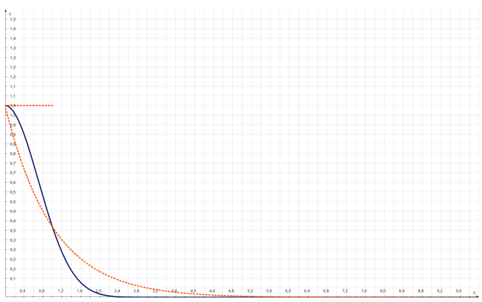
$$\int_1^{+\infty} e^{-x} dx$$

improprius integrál konvergens.

18. Példa. *Az*

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

improprius integrál konvergens.



Ebben az esetben azonban nem használható az előző gondolatmenet, hiszen, ha $x \in [0,1]$, akkor

$$e^{-x^2} > e^{-x}.$$

Használjuk azt, hogy

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^1 e^{-x^2} dx + \int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

Az előző példa alapján az

$$\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

improprius integrál konvergens. Továbbá, minden $x \in [0,1]$ esetén

$$e^{-x^2} \leqslant 1,$$

így

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \leqslant \int_0^1 1 dx = 1,$$

amiből

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx < +\infty$$

adódik.