3. Oszthatóság

3.1. Igazoljuk az alábbi oszthatóságokat!

(a) $9|(10^{19}+53)$

(b) $36|(10^{17}-64)$

(c) $6|(10^7-88)$

(d) $12|(10^{16}+44)$

3.2. Milyen számjegyeket írhatunk a és b helyére, hogy teljesüljön az oszthatóság?

(a) $33|\overline{52ab71}$

(b) $36|\overline{762a4b}$

(c) $45|\overline{61a24b}$

(d) $72|\overline{44a21b}$

3.3. Igazoljuk az alábbi oszthatóságokat!

(a) $200|(199^3-199)$

(b) $7|(11^9-4^9)$

(c) $200|(101^3+99^3)$

(d) $99|(11^{22}-22^{11})$

3.4. Számítsuk ki, hogy 100! hány nullára végződik!

3.5. Létezik-e olyan n egész szám, hogy $n!$ pontosan 5 nullára végződik?

3.6. Igazoljuk, hogy négy egymást követő egész szám szorzata mindig osztható 24-gyel!

3.7. Igazoljuk, hogy ha egy tetszőleges pozitív háromjegyű számot kétszer egymás után leírunk, akkor a kapott hatjegyű szám osztható 13-mal!

3.8. Euklideszi algoritmus segítségével számítsuk ki az alábbi számok legnagyobb közös osztóját!

(a) 672 és 360,

(b) 455 és -312,

(c) 1225 és 216,

(d) 680 és -845,

(e) 783 és 1160,

(f) 3751 és 1240.

3.9. Mutassuk meg, hogy nem léteznek olyan a és b pozitív egész számok, hogy $a^2=5b^2$.

3.10. Miért nem lehet két prímszám összege 2017?

3.11. Lehet-e 2007 egymást követő egész szám összege prímszám?

3.12. Van-e olyan n egész szám, melyre 2^n-1 és 2^n+1 is prímszám?

3.13. Lehetnek-e az $n-12$, $n+3$ és $n+5$ számok egyszerre prímszámok, ahol $n\in\mathbb{Z}$?

3.14. Legyen $p>3$ prímszám. Mutassuk meg, hogy $24|(p^2-1)$.

3.15. Határozzuk meg az alábbi számok legnagyobb közös osztóját és legkisebb közös többszörösét!

(a) 450 és 420,

(b) 539 és 364,

(c) 1260 és 14850,

(d) 663 és 308,

(e) 495 és 300,

(f) 990 és 420.

3.16. Bizonyítsuk be, hogy négy egymást követő természetes szám között mindig van egy, amely a másik háromhoz relatív prím!

3.17. Hány pozitív osztója van az alábbi számoknak?

(a) 252 (b) 600 (c) 528

3.18. Melyik az a legkisebb természetes szám, amelynek pontosan 12 pozitív osztója van?

3.19. Hány olyan pozitív osztója van 7560-nak, amely a 15-höz relatív prím?

3.20. Tudjuk, hogy valamely pozitív egész n számra a $110n^3$ számnak pontosan 110 pozitív osztója van. Hány pozitív osztója van a $81n^4$ számnak?

3.21. Oldjuk meg (amennyiben lehetséges) az alábbi lineáris diofantikus egyenleteket!

(a) $14x - 18y = 6$,
(c) $12x - 15y = 26$,
(e) $495x + 300y = 15$,
(b) $15x + 28y = 12$,
(d) $21x - 15y = 12$,
(f) $18x + 28y = 10$.

3.22. Gombóc Artúrnak 1420 Ft-ja van, ezt mindet csokoládéra szeretné költeni. A boltban kétféle csokoládét lehet kapni: a lyukas csokoládénak 35 Ft darabja, a kerek csokoládénak 40 Ft. Hogyan választhat csokoládét Gombóc Artúr?

3.23.* Péter egy 20 szál virágból álló csokrot vásárolt 1430 Ft-ért. A csokorban háromféle virág található, amelyekből egy szál rendre 50, 70, ill. 80 Ft-ba kerül. Hány szál virágot tartalmaz az egyes fajtákból a csokor, ha tudjuk, hogy egyik fajtából sincs benne 10-nél több?

3.24. Oldjuk meg (amennyiben lehetséges) az alábbi lineáris kongruenciákat!

(a) $3x \equiv 5 \pmod 7$,
(b) $12x \equiv 8 \pmod{16}$,
(c) $9x \equiv 15 \pmod{12}$,
(d) $5x \equiv 4 \pmod{11}$,
(e) $5x \equiv 24 \pmod{13}$,
(f) $14x \equiv 8 \pmod{21}$,
(g) $11x \equiv 12 \pmod{18}$,
(h) $30x \equiv 48 \pmod{58}$.

3.25. Mennyi maradékot ad

(a) 39^{28}, ha 29-cel osztjuk,
(b) 17^{40}, ha 25-tel osztjuk,
(c) 23^{81}, ha 50-nel osztjuk,
(d) 17^{18}, ha 40-nel osztjuk,
(e)* $54^{55^{56}}$, ha 13-mal osztjuk,
(f)* $38^{39^{40}}$, ha 11-gyel osztjuk?

3.26. Mi az utolsó két számjegye 19^{81}-nek?