

# Robusztus kvaternió Zernike momentumok és alkalmazásuk színes képek elemzésére és felismerésére

Nagy Gergely

Eötvös Loránd Tudományegyetem, Informatikai Kar

Tudományos Diákköri Konferencia

Budapest, 2020. december 16.

Témavezető: Németh Zsolt

EFOP-3.6.3-VEKOP-16-2017-00001

**SZÉCHENYI** 2020



HUNGARIAN  
GOVERNMENT

European Union  
European Social  
Fund



INVESTING IN YOUR FUTURE

# Momentumok

Általában valamilyen numerikus, leíró érték a pixel intenzitások alapján, például geometriai momentumok:

$$M_{ij} = \sum_x \sum_y x^i y^j I(x, y).$$

**Zernike momentumok:** az egységkörön definiált, ortogonális Zernike függvények alapján

$$Z_{n,m}(f) = \frac{n+1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} f(r, \theta) R_{n,m}(r) e^{-im\theta} dr d\theta,$$

ahol  $R_{n,m}(r)$  az ortogonális, sugárirányú polinomok.

**Momentumok invariánsok:** forgatás, skálázás és eltolás invariáns értékek konstruálhatók.

# Momentumok alkalmazása színes képekre

Hagyományos megoldások:

- ▶ A kép szürkeárnyalatossá alakítása.
- ▶ A színcsatornák elemzése külön-külön.

Újabb módszer az utóbbi évtizedben:

Értelmezzük az  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  képet kvaternió értékű függvényként:

$$f(x, y) = \mathbf{i}f_R(x, y) + \mathbf{j}f_G(x, y) + \mathbf{k}f_B(x, y)$$

Különböző momentumok általánosítása kvaterniókra:

QFMM (Fourier-Mellin), QG-CHFM (Csebisev-Fourier), QG-PJFM (Jacobi-Fourier), QBFM (Bessel-Fourier), QRHFM (radial-Fourier), **QZM (Zernike)**

# Kvaternió Zernike momentumok

Zernike függvények általánosítása kvaterniókra:

$$\Phi_{n,m}(r, \theta) = R_{n,m}(r)e^{-\mu m\theta},$$

ahol  $\mu$  egység hosszú, tiszta kvaternió (általában  $\mu = \frac{\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}}{\sqrt{3}}$ ).

Mivel a kvaterniók szorzása nem kommutatív, így jobb- és baloldali momentumok is definiálhatók:

$$Z_{n,m}^R(f) = \frac{n+1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} f(r, \theta) \Phi_{n,m}(r, \theta) dr d\theta,$$

$$Z_{n,m}^L(f) = \frac{n+1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \Phi_{n,m}(r, \theta) f(r, \theta) dr d\theta.$$

# Invariánsok konstrukciója

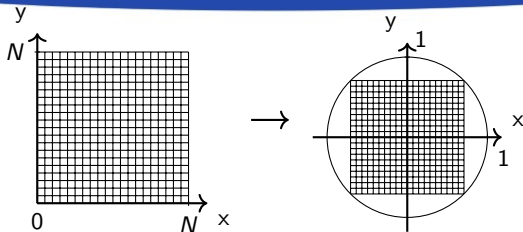
B. Chen et al. Quaternion zernike moments and their invariants for color image analysis and object recognition.

*Signal Processing*, 92:308–318, 2012

Csak forgatás ( $\Phi_{n,k}^m$ ), illetve forgatás, skálázás és eltolás kombinált invariánsok ( $\bar{\Psi}_{n,k}^m$ ) konstruálása.

$$\begin{aligned}\Phi_{n,k}^m(f) &= Z_{n,m}^R(f) Z_{k,-m}^L(f) = -Z_{n,m}^R(f) (Z_{k,m}^R(f))^* \\ L_{m+2l,m}^R(f) &= \sum_{t=0}^l \sum_{k=t}^l \left( \sqrt{|Z_{0,0}^R(f)|} \right)^{-(m+2k+2)} c_{m,l}^{t,k} Z_{m+2t,m}^R(f) \\ \bar{\Psi}_{n,k}^m(f) &= \bar{L}_{n,m}^R(f) (\bar{L}_{k,m}^R(f))^*\end{aligned}$$

# Korábbi diszkretizációs módszer



- ▶ Kép transzformálása az egységgörbe:

$$r_{x,y} = \sqrt{(c_1x + c_2)^2 + (c_1y + c_2)^2}, \quad \theta_{x,y} = \tan^{-1} \left( \frac{c_1y + c_2}{c_1x + c_2} \right),$$

ahol  $c_1 = \frac{\sqrt{2}}{N-1}$  és  $c_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ .

- ▶ Ekkor a pixelek helyét alappontoknak választva:

$$Z_{n,m}^R(f) \approx \frac{2(n+1)}{\pi(N-1)^2} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) \Phi_{n,m}(r_{x,y}, \theta_{x,y}).$$

# Új diszkretizációs módszer

Probléma a korábbi diszkretizációval: nincs diszkrét ortogonalitás.

Schipp F. és Pap M.: diszkrét ortogonális pontrendszer konstrukciója a klasszikus (komplex értékű) Zernike függvényekhez.

Ennek az ötletnek a kvaternió értékű Zernike függvényekre való kiterjesztése megfelelő pontrendszert ad.

Legyen  $N$  pozitív egész és  $\rho_{k,N}$  az  $N$ -edik Legendre polinom gyökei, ekkor a pontrendszer:

$$(r_{k,N}, \theta_{j,N}) = \left( \sqrt{\frac{1 + \rho_{k,N}}{2}}, \frac{2\pi j}{4N} \right), \quad (k = 1, \dots, N, j = 1, \dots, 4N).$$

# Új diszkretizációs módszer (folyt.)

Legyen

$$\mathcal{A}_{k,N} = \int_{-1}^1 \ell_{k,N}(x) dx, \quad (k = 1, \dots, N),$$

ahol  $\ell_{k,N}$  a Lagrange interpolációs alappolinomok a  $\rho_{k,N}$  pontokon.  
Ekkor a  $w(r_{k,N}, \theta_{j,N}) = \frac{\mathcal{A}_{k,N}}{8N}$  súlyokkal véve az integrálközelítést:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} f(r, \theta) d\theta dr \approx \int_{X_N} f = \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{4N} f(r_{k,N}, \theta_{j,N}) \frac{\mathcal{A}_{k,N}}{8N}.$$

Azaz a QZM-ek közelíthetők a következő módon:

$$Z_{n,m}^R(f) \approx (n+1) \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{4N} f(r_{k,N}, \theta_{j,N}) \Phi_{n,m}(r_{k,N}, \theta_{j,N}) \frac{\mathcal{A}_{k,N}}{8N}.$$



# Diszkrét ortogonalitás

## Tétel (Diszkrét ortogonalitás)

*Legyen  $n, n' \in \mathbb{N}$  természetes számok,  $m, m' \in \mathbb{Z}$  egészek, úgy, hogy teljesül*

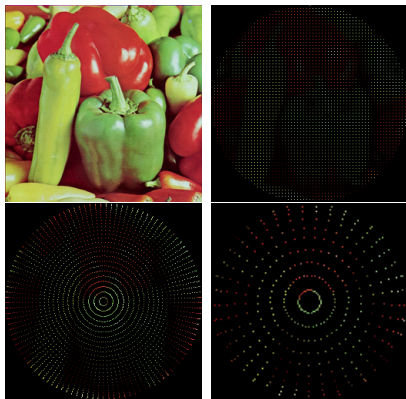
$$\frac{n + n'}{2} + \min(|m|, |m'|) < 2N.$$

*Ekkor*

$$(n + 1) \int_{X_N} \Phi_{n,m} \Phi_{n',m'}^* = \delta_{n,n'} \delta_{m,m'}.$$

Így a momentumok diszkrétizációs hiba nélkül előállíthatók és a képek visszaállítási pontossága és módszer hibatűrése is javult.

# Képpontok becslése



A képet lineárisan  
transzformáljuk az egységkörre.

A függvény értékének becslése a  
pontokban:

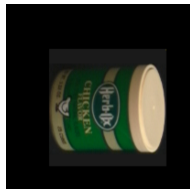
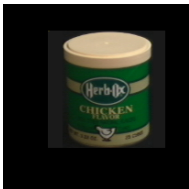
- ▶ Lineáris interpoláció (sok  
pont esetén)
- ▶ Diszkrét integrálás a pontok  
környezetében (kevés pont  
esetén)

# Gyakorlati tesztek

A következő tesztek alapján hasonlítottuk össze a régi és az új módszert:

- ▶ Invariancia teszt
- ▶ Kép visszaállítása momentumokból
- ▶ Transzformált, zajos képek felismerése

A tesztek során a Columbia Object Image Library és az Amsterdam Library of Object Images képeiből generált transzformált képeket használtuk.



# Fourier momentumok

- ▶ A módszert a Fourier momentumokkal (QRHFM) is összehasonlítottuk rekonstrukció és felismerés szempontjából.
- ▶ Y. Liu et al. [Accurate quaternion radial harmonic Fourier moments for color image reconstruction and object recognition.](#)  
*Pattern Analysis and Applications*, 2020
- ▶ QRHFM-hez triviálisan konstruálható diszkrét ortogonális pontrendszer, polár koordinátákban egyenletesen vett pontokkal.
- ▶ Csak forgatás invariánsokat konstruáltak ezekhez a momentumokhoz, így ezeket hasonlítottuk össze.

# Invariancia

Alacsony rendű momentumok modulusának, az összes transzformált képekre vett variációs koefficiense  $\left(\frac{\sigma}{\mu}\right)$ :

|                        | $\frac{\sigma}{\mu}$ |
|------------------------|----------------------|
| $ \bar{\Psi}_{1,1}^1 $ | 3.73%                |
| $ \bar{\Psi}_{2,0}^0 $ | 0.028%               |
| $ \bar{\Psi}_{2,2}^0 $ | 0.057%               |
| $ \bar{\Psi}_{2,2}^2 $ | 6.87%                |
| $ \bar{\Psi}_{3,1}^1 $ | 3.71%                |
| $ \bar{\Psi}_{3,3}^1 $ | 3.69%                |
| $ \bar{\Psi}_{3,3}^3 $ | 9.40%                |

Table: Régi módszer

|                        | $\frac{\sigma}{\mu}$ |
|------------------------|----------------------|
| $ \bar{\Psi}_{1,1}^1 $ | 3.72%                |
| $ \bar{\Psi}_{2,0}^0 $ | 0.028%               |
| $ \bar{\Psi}_{2,2}^0 $ | 0.056%               |
| $ \bar{\Psi}_{2,2}^2 $ | 6.82%                |
| $ \bar{\Psi}_{3,1}^1 $ | 3.70%                |
| $ \bar{\Psi}_{3,3}^1 $ | 3.68%                |
| $ \bar{\Psi}_{3,3}^3 $ | 9.32%                |

Table: Új módszer

# Képek visszaállítása



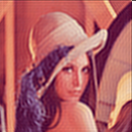
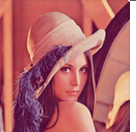











Egy kép rekonstruálható véges számú momentumot használva a következő képlet szerint:

$$f(x, y) \approx \sum_{n=0}^M \sum_{m=-n}^n Z_{n,m}^R(f) \Phi_{n,m}^*(r_{x,y}, \theta_{x,y}).$$

Ha  $f$  az eredeti,  $\hat{f}$  a visszaállított kép, akkor a hiba (mean square error):

$$\epsilon^2 = \frac{\sum_{x=1}^N \sum_{y=1}^N |f(x, y) - \hat{f}(x, y)|^2}{\sum_{x=1}^N \sum_{y=1}^N |f(x, y)|^2}.$$

# Képek visszaállítása

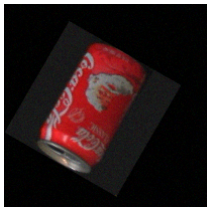
|              | Eredeti   | 50  | 150   | 250  | 350   |
|--------------|---|---|---|--|---|
| QZM – Régi   |  |  |  |  |  |
| $\epsilon^2$ |   | 0.02659   | 0.00868   | 0.00428  | 0.00279   |
| QZM – Új     |  |  |  |  |  |
| $\epsilon^2$ |   | 0.01611   | 0.00461   | 0.00164  | 0.00066   |
| QRHFM        |  |  |  |  |  |
| $\epsilon^2$ |   | 0.01088   | 0.00351   | 0.00150  | 0.00092   |

# Képfelismerés

Cél: a transzformált, zajos képet felismerni az eredeti képek közül.  
Különböző nagyságú és típusú zaj:

- ▶ Gauss zaj
- ▶ Só-bors zaj

Alacsony rendű invariáns momentumok (kvaterniók)  
komponenseiből kinyert valós értékek vektorként kezelése.  
Osztályozás legkisebb euklideszi távolság alapján.





# Gauss zaj

| $\sigma$  | Régi (%) | Új – "sok"<br>pont (%) | Új – "kevés"<br>pont (%) |
|-----------|----------|------------------------|--------------------------|
| Nincs zaj | 99.06    | 99.15                  | 98.21                    |
| 1         | 98.98    | 99.49                  | 98.81                    |
| 2         | 98.98    | 99.74                  | 98.81                    |
| 3         | 98.55    | 99.83                  | 98.04                    |
| 5         | 95.15    | 99.49                  | 94.64                    |
| 7         | 95.15    | 98.72                  | 91.67                    |
| 9         | 76.87    | 98.47                  | 89.20                    |
| 40        | 52.89    | 88.52                  | 51.87                    |
| 50        | 48.21    | 84.10                  | 45.07                    |
| 60        | 41.58    | 85.80                  | 39.12                    |

# Só-bors zaj

| p         | Régi (%) | Új – "sok"<br>pont (%) | Új – "kevés"<br>pont (%) |
|-----------|----------|------------------------|--------------------------|
| Nincs zaj | 99.06    | 99.15                  | 98.21                    |
| 0.2%      | 99.66    | 99.32                  | 94.98                    |
| 0.4%      | 99.91    | 99.74                  | 99.15                    |
| 0.6%      | 99.91    | 99.91                  | 99.40                    |
| 1%        | 98.98    | 99.91                  | 99.66                    |
| 2%        | 99.66    | 93.96                  | 99.74                    |
| 3%        | 99.40    | 99.40                  | 96.34                    |
| 5%        | 97.87    | 94.90                  | 97.87                    |
| 10%       | 99.91    | 93.03                  | 98.72                    |
| 15%       | 99.91    | 93.20                  | 97.87                    |

# Forgatás invariáns Zernike és Fourier momentumok

| <b>Zaj típusa</b> |     | <b>Zernike (%)</b> | <b>Fourier (%)</b> |
|-------------------|-----|--------------------|--------------------|
| Nincs zaj         |     | 100.00             | 100.00             |
| Gauss             | 80  | 98.12              | 97.52              |
|                   | 90  | 99.01              | 97.02              |
|                   | 100 | 98.91              | 96.63              |
|                   | 110 | 97.62              | 96.92              |
|                   | 120 | 96.23              | 96.63              |
| Só-bors           | 10% | 100.00             | 100.00             |
|                   | 15% | 100.00             | 100.00             |
|                   | 20% | 100.00             | 99.70              |
|                   | 25% | 100.00             | 100.00             |
|                   | 30% | 100.00             | 100.00             |

A momentumok sok területen alkalmazhatók, néhány példa:

- ▶ **Vízjelek:** a képre a momentumok szintjén helyeznek vízjelet, így ellenálló lesz különböző transzformációknak és zajnak. Ehhez fontos a rekonstrukciós pontosság. [3]
- ▶ **Neurális hálók, gépi tanulás:** A képekből kinyert invariáns momentumok lehet a bemeneti vektor része. A neurális hálók ismert hiányossága a zajra való érzékenység, ezen segíthetnek a momentumok. [4]
- ▶ **Orvosi/optikai alkalmazások:** lencsék leképezési hibáinak azonosítására, szaruhártya vizsgálatára, stb. [5]

# További lehetőségek

- ▶ Meglévő alkalmazások továbbfejlesztése az új módszer szerint.
- ▶ Más függvényrendszeren alapuló momentumokra hasonló konstrukció megadása.
- ▶ További általánosítás 3-dimenzióra és alkalmazás például LiDAR pontfelhőkre.

- ▶ Diszkrét ortogonális pontrendszer konstruálása QZM-hez.
- ▶ Összehasonlítás a korábbi, valamint más momentumokon alapuló módszerrel is.
  - ▶ Invariancia
  - ▶ Rekonstrukció
  - ▶ Képfelismerés
- ▶ Jelentősen jobb rekonstrukciós képesség és robusztusság különféle zajokkal szemben.
- ▶ Konferencia előadás (13th Joint Conference on Mathematics and Computer Science)

- [1] B. Chen et al. Quaternion zernike moments and their invariants for color image analysis and object recognition. *Signal Processing*, 92:308–318, 2012.
- [2] Y. Liu et al. Accurate quaternion radial harmonic Fourier moments for color image reconstruction and object recognition. *Pattern Analysis and Applications*, 2020.
- [3] H. Shojanazeri et al. Authentication of images using Zernike moment watermarking. *Multimedia Tools and Applications*, 76:577–606, 2015.
- [4] M. Liu et al. Analyzing the Noise Robustness of Deep Neural Networks. *IEEE Symposium on Visual Analytics Science and Technology (VAST)*, pages 60–71, 2018.
- [5] J. C. Wyant and K. Creath. Basic Wavefront Aberration Theory for Optical Metrology. *Applied Optics and Optical Engineering*, 11:2–55, 1992.

# KÖSZÖNÖM A FIGYELMET!

**SZÉCHENYI** 2020



HUNGARIAN  
GOVERNMENT

European Union  
European Social  
Fund



INVESTING IN YOUR FUTURE