

# **Robusztus kvaterniós Zernike momentumok és alkalmazásuk színes képek elemzésére és felismerésére**

Nagy Gergely

Eötvös Loránd Tudományegyetem, Informatikai Kar

Tudományos Diákköri Konferencia  
Budapest, 2020. december 16.

Témavezető: Németh Zsolt



HUNGARIAN  
GOVERNMENT

European Union  
European Social  
Fund



INVESTING IN YOUR FUTURE

EFOP-3.6.3-VEKOP-16-2017-00001

# Momentumok

Általában valamilyen numerikus, leíró érték a pixel intenzitások alapján, például geometriai momentumok:

$$M_{ij} = \sum_x \sum_y x^i y^j I(x, y).$$

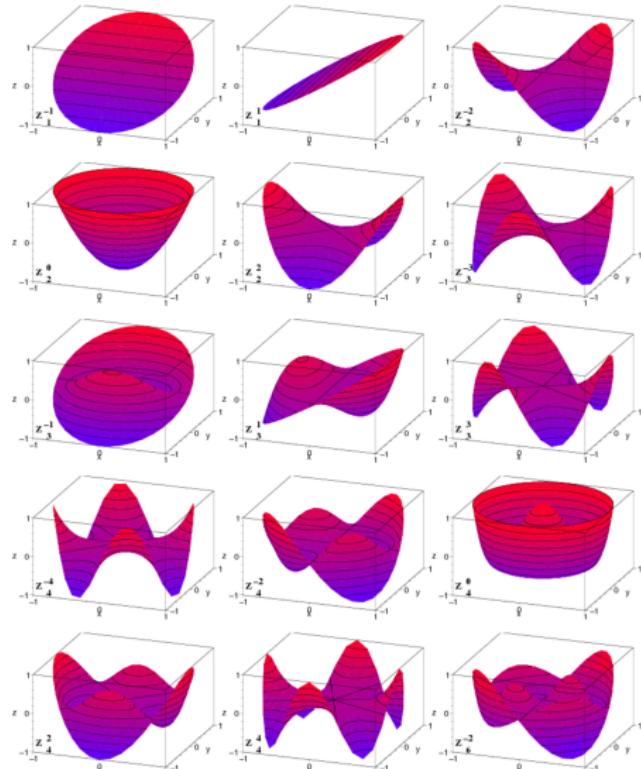
**Zernike momentumok:** az egysékgörön definiált, ortogonális Zernike függvények alapján

$$Z_{n,m}(f) = \frac{n+1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} f(r, \theta) R_{n,m}(r) e^{-im\theta} dr d\theta,$$

ahol  $R_{n,m}(r)$  az ortogonális, sugárirányú polinomok.

**Momentumok invariánsok:** forgatás, skálázás és eltolás invariáns értékek konstruálhatók.

# Komplex Zernike függvények ábrázolása



# Momentumok alkalmazása színes képekre

Hagyományos megoldások:

- ▶ A kép szürkeárnyalatossá alakítása.
- ▶ A színcsatornák elemzése külön-külön.

Újabb módszer az utóbbi évtizedben:

Értelmezzük az  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  képet kvaternió értékű függvényként:

$$f(x, y) = \mathbf{i}f_R(x, y) + \mathbf{j}f_G(x, y) + \mathbf{k}f_B(x, y)$$

Különböző momentumok általánosítása kvaterniókra:

QFMM (Fourier-Mellin), QG-CHFM (Csebisev-Fourier), QG-PJFM (Jacobi-Fourier), QBFM (Bessel-Fourier), QRHFM (radial-Fourier),  
**QZM (Zernike)**

# Kvaterniós Zernike momentumok

Zernike függvények általánosítása kvaterniókra:

$$\Phi_{n,m}(r, \theta) = R_{n,m}(r)e^{-\mu m \theta},$$

ahol  $\mu$  egység hosszú, tiszta kvaterniós (általában  $\mu = \frac{i+j+k}{\sqrt{3}}$ ).

Mivel a kvaterniók szorzása nem kommutatív, így jobb- és baloldali momentumok is definiálhatók:

$$Z_{n,m}^R(f) = \frac{n+1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} f(r, \theta) \Phi_{n,m}(r, \theta) dr d\theta,$$

$$Z_{n,m}^L(f) = \frac{n+1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \Phi_{n,m}(r, \theta) f(r, \theta) dr d\theta.$$

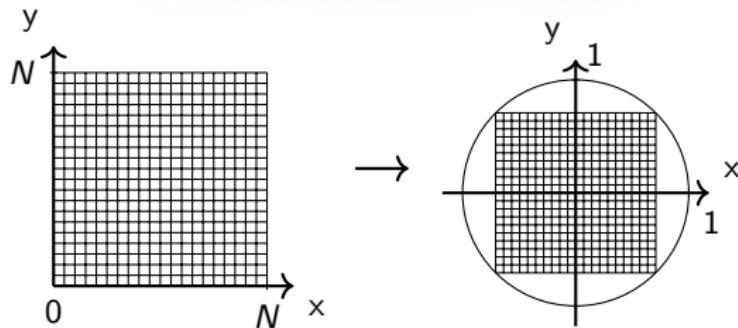
# Invariánsok konstrukciója

B. Chen et al. Quaternion zernike moments and their invariants for color image analysis and object recognition.  
*Signal Processing*, 92:308–318, 2012

Csak forgatás ( $\Phi_{n,k}^m(f)$ ), illetve forgatás, skálázás és eltolás kombinált invariánsok ( $\bar{\Psi}_{n,k}^m(f)$ ) konstruálása.

$$\begin{aligned}\Phi_{n,k}^m(f) &= Z_{n,m}^R(f)Z_{k,-m}^L(f) = -Z_{n,m}^R(f)(Z_{k,m}^R(f))^* \\ L_{m+2l,m}^R(f) &= \sum_{t=0}^l \sum_{k=t}^l \left( \sqrt{|Z_{0,0}^R(f)|} \right)^{-(m+2k+2)} c_{m,l}^{t,k} Z_{m+2t,m}^R(f) \\ \bar{\Psi}_{n,k}^m(f) &= \bar{L}_{n,m}^R(f)(\bar{L}_{k,m}^R(f))^*\end{aligned}$$

# Korábbi diszkretizációs módszer



- ▶ Kép transzformálása az egységkörbe:

$$r_{x,y} = \sqrt{(c_1 x + c_2)^2 + (c_1 y + c_2)^2}, \quad \theta_{x,y} = \tan^{-1} \left( \frac{c_1 y + c_2}{c_1 x + c_2} \right),$$

ahol  $c_1 = \frac{\sqrt{2}}{N-1}$  és  $c_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ .

- ▶ Ekkor a pixelek helyét alappontoknak választva:

$$Z_{n,m}^R(f) \approx \frac{2(n+1)}{\pi(N-1)^2} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \Phi_{n,m}(r_{x,y}, \theta_{x,y}).$$

# Új diszkretizációs módszer

Probléma a korábbi diszkretizációval: nincs diszkrét ortogonalitás.

Schipp F. és Pap M.: diszkrét ortogonális pontrendszer konstrukciója a klasszikus (komplex értékű) Zernike függvényekhez.

Ennek az ötletnek a kvaternió értékű Zernike függvényekre való kiterjesztése megfelelő pontrendszert ad.

Legyen  $N$  pozitív egész és  $\rho_{k,N}$  az  $N$ -edik Legendre polinom gyökei, ekkor a pontrendszer:

$$(r_{k,N}, \theta_{j,N}) = \left( \sqrt{\frac{1 + \rho_{k,N}}{2}}, \frac{2\pi j}{4N} \right), \quad (k = 1, \dots, N, j = 1, \dots, 4N).$$

# Új diszkretizációs módszer (folyt.)

Legyen

$$\mathcal{A}_{k,N} = \int_{-1}^1 \ell_{k,N}(x) dx, \quad (k = 1, \dots, N),$$

ahol  $\ell_{k,N}$  a Lagrange interpolációs alappolinomok a  $\rho_{k,N}$  pontokon.

Ekkor a  $w(r_{k,N}, \theta_{j,N}) = \frac{\mathcal{A}_{k,N}}{8N}$  súlyokkal véve az integrálközelítést:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} f(r, \theta) d\theta dr \approx \int_{X_N} f = \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{4N} f(r_{k,N}, \theta_{j,N}) \frac{\mathcal{A}_{k,N}}{8N}.$$

Azaz a QZM-ek közelíthetők a következő módon:

$$Z_{n,m}^R(f) \approx (n+1) \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{4N} f(r_{k,N}, \theta_{j,N}) \Phi_{n,m}(r_{k,N}, \theta_{j,N}) \frac{\mathcal{A}_{k,N}}{8N}.$$

# Diszkrét ortogonalitás

## Tétel (Diszkrét ortogonalitás)

Legyen  $n, n' \in \mathbb{N}$  természetes számok,  $m, m' \in \mathbb{Z}$  egészek, úgy, hogy teljesül

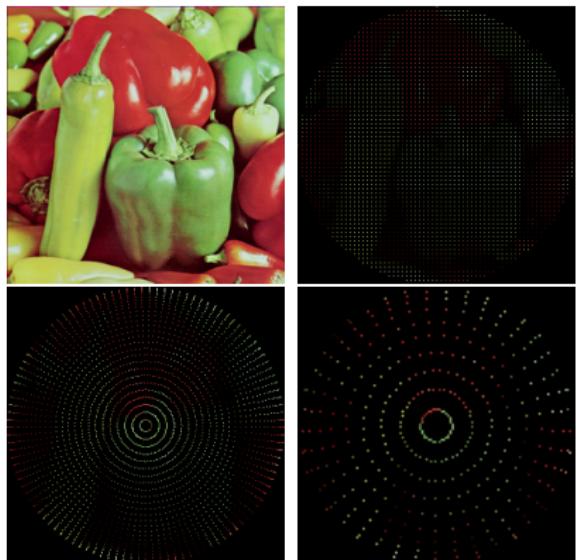
$$\frac{n+n'}{2} + \min(|m|, |m'|) < 2N.$$

Ekkor

$$(n+1) \int_{X_N} \Phi_{n,m} \Phi_{n',m'}^* = \delta_{n,n'} \delta_{m,m'}.$$

Így a momentumok diszkretizációs hiba nélkül előállíthatók és a képek visszaállítási pontossága és módszer hibatűrése is javult.

# Képpontok becslése



A képet lineárisan transzformáljuk az egységkörre.

A függvény értékének becslése a pontokban:

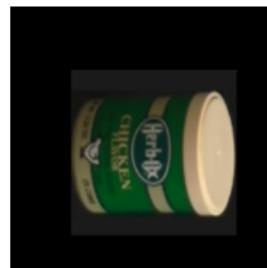
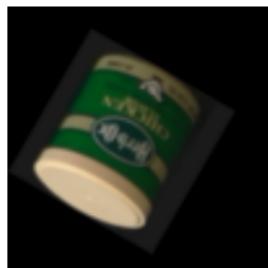
- ▶ Lineáris interpoláció (sok pont esetén)
- ▶ Diszkrét integrálás a pontok környezetében (kevés pont esetén)

# Gyakorlati tesztek

A következő tesztek alapján hasonlítottuk össze a régi és az új módszert:

- ▶ Invariancia teszt
- ▶ Kép visszaállítása momentumokból
- ▶ Transzformált, zajos képek felismerése

A tesztek során a Columbia Object Image Library és az Amsterdam Library of Object Images képeiből generált transzformált képeket használtuk.



# Fourier momentumok

- ▶ A módszert a Fourier momentumokkal (QRHFM) is összehasonlítottuk rekonstrukció és felismerés szempontjából.
- ▶ Y. Liu et al. [Accurate quaternion radial harmonic Fourier moments for color image reconstruction and object recognition.](#)  
*Pattern Analysis and Applications*, 2020
- ▶ QRHFM-hez triviálisan konstruálható diszkrét ortogonális pontrendszer, polár koordinátákban egyenletesen vett pontokkal.
- ▶ Csak forgatás invariánsokat konstruáltak ezekhez a momentumokhoz, így ezeket hasonlítottuk össze.

$$R_n(r) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{r}}, & n = 0 \\ \sqrt{\frac{2}{r}} \cos(\pi nr), & n \text{ páros} \\ \sqrt{\frac{2}{r}} \sin(\pi(n+1)r), & n \text{ páratlan} \end{cases} .$$

# Invariancia

Alacsony rendű momentumok modulusának, az összes transzformált képekre vett variációs koefficiense  $\left(\frac{\sigma}{\mu}\right)$ :

	$\frac{\sigma}{\mu}$
$ \bar{\Psi}_{1,1}^1 $	3.73%
$ \bar{\Psi}_{2,0}^0 $	0.028%
$ \bar{\Psi}_{2,2}^0 $	0.057%
$ \bar{\Psi}_{2,2}^2 $	6.87%
$ \bar{\Psi}_{3,1}^1 $	3.71%
$ \bar{\Psi}_{3,3}^1 $	3.69%
$ \bar{\Psi}_{3,3}^3 $	9.40%

Régi módszer

	$\frac{\sigma}{\mu}$
$ \bar{\Psi}_{1,1}^1 $	3.72%
$ \bar{\Psi}_{2,0}^0 $	0.028%
$ \bar{\Psi}_{2,2}^0 $	0.056%
$ \bar{\Psi}_{2,2}^2 $	6.82%
$ \bar{\Psi}_{3,1}^1 $	3.70%
$ \bar{\Psi}_{3,3}^1 $	3.68%
$ \bar{\Psi}_{3,3}^3 $	9.32%

Új módszer

# Képek visszaállítása

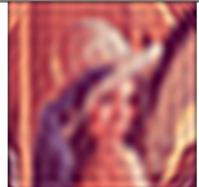
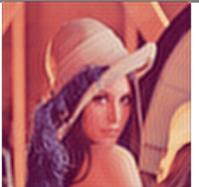
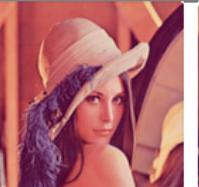
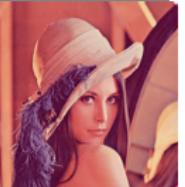
Egy kép rekonstruálható véges számú momentumot használva a következő képlet szerint:

$$f(x, y) \approx \sum_{n=0}^M \sum_{m=-n}^n Z_{n,m}^R(f) \Phi_{n,m}^*(r_{x,y}, \theta_{x,y}).$$

Ha  $f$  az eredeti,  $\hat{f}$  a visszaállított kép, akkor a hiba (mean square error):

$$\varepsilon^2 = \frac{\sum_{x=1}^N \sum_{y=1}^N |f(x, y) - \hat{f}(x, y)|^2}{\sum_{x=1}^N \sum_{y=1}^N |f(x, y)|^2}.$$

# Képek visszaállítása

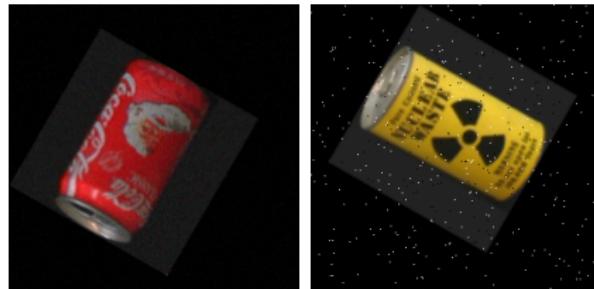
	Eredeti	50	150	250	350
QZM – Régi					
$\varepsilon^2$		0.02659	0.00868	0.00428	0.00279
QZM – Új					
$\varepsilon^2$		0.01611	0.00461	0.00164	0.00066
QRHFM					
$\varepsilon^2$		0.01088	0.00351	0.00150	0.00092

# Képfelismerés

Cél: a transzformált, zajos képet felismerni az eredeti képek közül.  
Különböző nagyságú és típusú zaj:

- ▶ Gauss zaj
- ▶ Só-bors zaj

Alacsony rendű invariáns momentumok (kvaterniók)  
komponenseiből kinyert valós értékek vektorként kezelése.  
Osztályozás legkisebb euklideszi távolság alapján.



# Képfelismeréshez használt képek



## Forgatás, skálázás, eltolás invariancia – Gauss zaj

$\sigma$	<b>QZM, régi (%)</b>	<b>QZM, új – "sok" pont (%)</b>	<b>QZM, új – "kevés" pont (%)</b>	<b>QRHFM (%)</b>
Nincs zaj	99.06	99.15	98.21	n.a.
1	98.98	99.49	98.81	n.a.
2	98.98	99.74	98.81	n.a.
3	98.55	99.83	98.04	n.a.
5	95.15	99.49	94.64	n.a.
7	95.15	98.72	91.67	n.a.
9	76.87	98.47	89.20	n.a.
40	52.89	88.52	51.87	n.a.
50	48.21	84.10	45.07	n.a.
60	41.58	85.80	39.12	n.a.

# Forgatás, skálázás, eltolás invariancia – Só-bors zaj

p	QZM, régi (%)	QZM, új – "sok" pont (%)	QZM, új – "kevés" pont (%)	QRHFM (%)
Nincs zaj	99.06	99.15	98.21	n.a.
0.2%	99.66	99.32	94.98	n.a.
0.4%	99.91	99.74	99.15	n.a.
0.6%	99.91	99.91	99.40	n.a.
1%	98.98	99.91	99.66	n.a.
2%	99.66	93.96	99.74	n.a.
3%	99.40	99.40	96.34	n.a.
5%	97.87	94.90	97.87	n.a.
10%	99.91	93.03	98.72	n.a.
15%	99.91	93.20	97.87	n.a.

# Forgatás invariáns Zernike és Fourier momentumok

Zaj típusa		Zernike, új (%)	Fourier (%)
Nincs zaj		100.00	100.00
Gauss	80	98.12	97.52
	90	99.01	97.02
	100	98.91	96.63
	110	97.62	96.92
	120	96.23	96.63
Só-bors	10%	100.00	100.00
	15%	100.00	100.00
	20%	100.00	99.70
	25%	100.00	100.00
	30%	100.00	100.00

# Alkalmazások

A momentumok sok területen alkalmazhatók, néhány példa:

- ▶ **Vízjelek:** a képre a momentumok szintjén helyeznek vízjelet, így ellenálló lesz különböző transzformációknak és zajnak. Ehhez fontos a rekonstrukciós pontosság. [3]
- ▶ **Neurális hálók, gépi tanulás:** A képekből kinyert invariáns momentumok lehet a bemeneti vektor része. A neurális hálók ismert hiányossága a zajra való érzékenység, ezen segíthetnek a momentumok. [4]
- ▶ **Orvosi/optikai alkalmazások:** lencsék leképezési hibáinak azonosítására, szaruhártya vizsgálatára [5]

## További lehetőségek

- ▶ Meglévő alkalmazások továbbfejlesztése az új módszer szerint.
- ▶ Más függvényrendszeren alapuló momentumokra hasonló konstrukció megadása.
- ▶ További általánosítás 3-dimenzióra és alkalmazás például LiDAR pontfelhőkre.

# Összefoglalás

- ▶ Diszkrét ortogonális pontrendszer konstruálása QZM-hez.
- ▶ Összehasonlítás a korábbi, valamint más momentumokon alapuló módszerrel is.
  - ▶ Invariancia
  - ▶ Rekonstrukció
  - ▶ Képfelismerés
- ▶ Jelentősen jobb rekonstrukciós képesség és robusztusság különféle zajokkal szemben.
- ▶ Konferencia előadás (13th Joint Conference on Mathematics and Computer Science)
- ▶ G. Nagy, Zs. Németh. [Robust quaternion zernike moments for colorimage analysis and recognition](#). *Signal Processing*, kézirat.

# Irodalomjegyzék

- [1] B. Chen et al. Quaternion zernike moments and their invariants for color image analysis and object recognition. *Signal Processing*, 92:308–318, 2012.
- [2] Y. Liu et al. Accurate quaternion radial harmonic Fourier moments for color image reconstruction and object recognition. *Pattern Analysis and Applications*, 2020.
- [3] H. Shojanazeri et al. Authentication of images using Zernike moment watermarking. *Multimedia Tools and Applications*, 76:577–606, 2015.
- [4] M. Liu et al. Analyzing the Noise Robustness of Deep Neural Networks. *IEEE Symposium on Visual Analytics Science and Technology (VAST)*, pages 60–71, 2018.
- [5] J. C. Wyant and K. Creath. Basic Wavefront Aberration Theory for Optical Metrology. *Applied Optics and Optical Engineering*, 11:2–55, 1992.
- [6] G. Nagy and Zs. Németh. Color image analysis and recognition using discrete orthogonal quaternion zernike moments. *13th Joint Conference on Mathematics and Computer Science*, 2020.
- [7] G. Nagy and Zs. Németh. Robust quaternion zernike moments for color image analysis and recognition. *Signal Processing*. kézirat.

# KÖSZÖNÖM A FIGYELMET!

SZÉCHENYI 2020



HUNGARIAN  
GOVERNMENT

European Union  
European Social  
Fund



INVESTING IN YOUR FUTURE