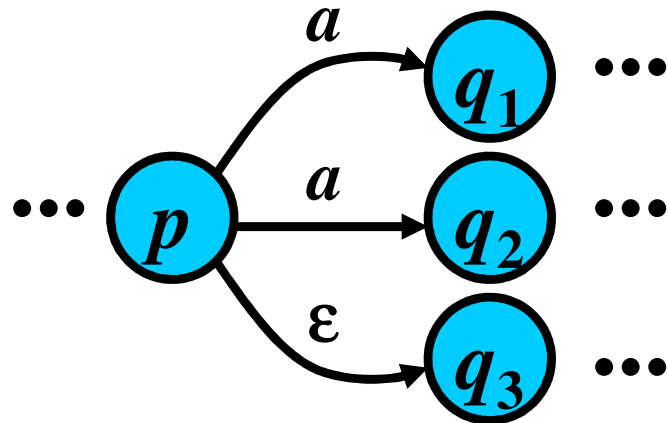


Kapitola IV. Speciální typy konečných automatů

Teorie vs. praxe

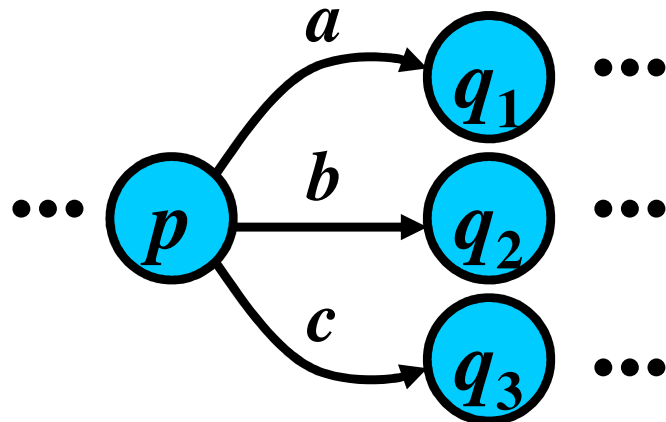
a) Konfigurace: *pac*



Další konfigurace:
q₁x nebo *q₂x* nebo *q₃ax* ?

Teorie: 😊 × Praxe: ☹️

b) Konfigurace: *pac*



Další konfigurace:
 pouze *q₁x*

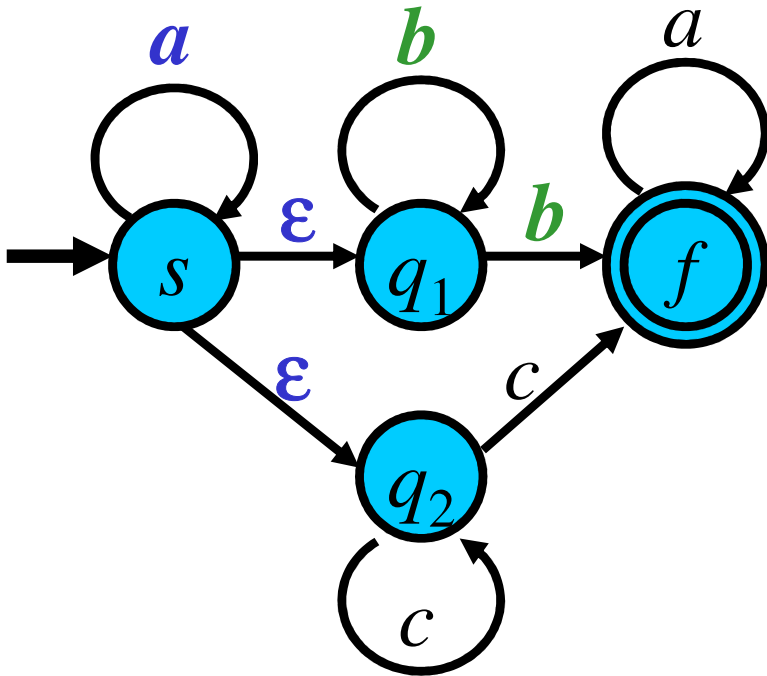
Teorie: ☹️ × Praxe: 😊

Užití obecného KA

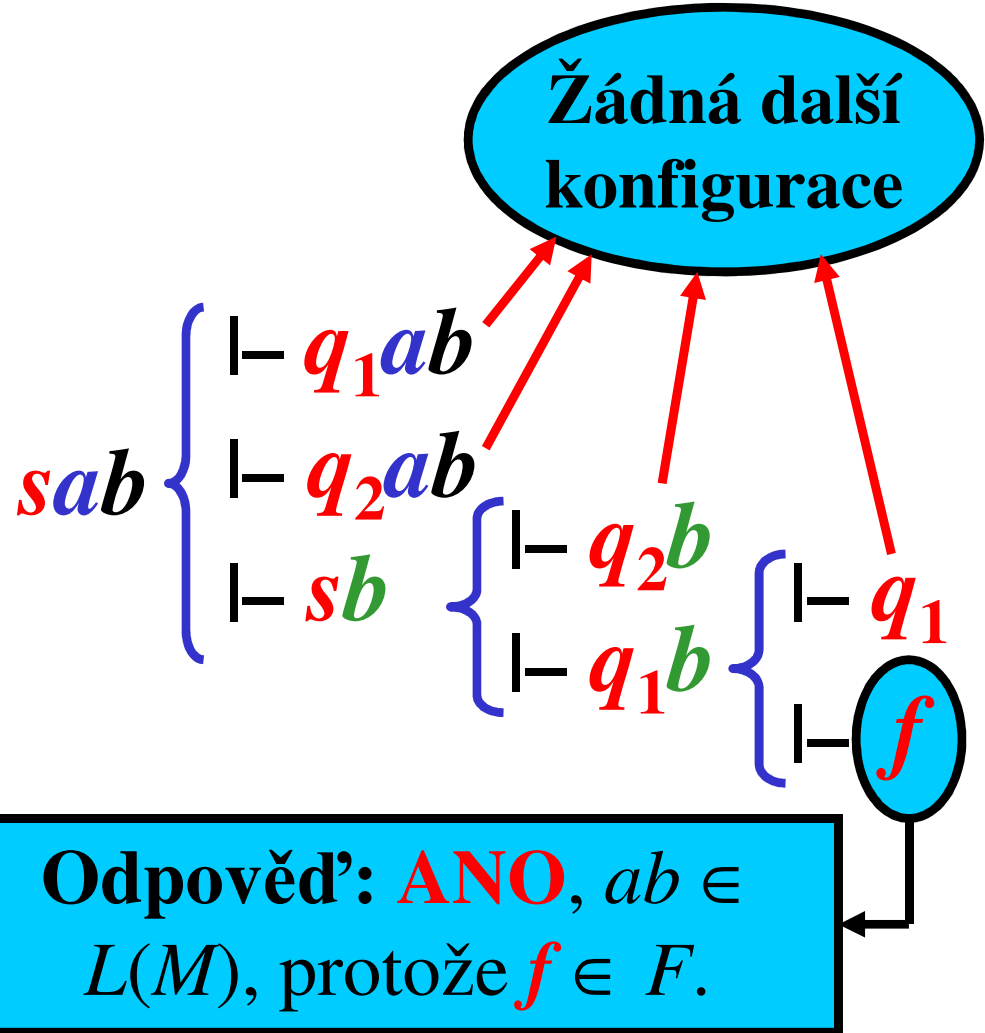
Simulace všech možných přechodů z aktuální konfigurace

Příklad:

$\text{KA } M$ je definován:



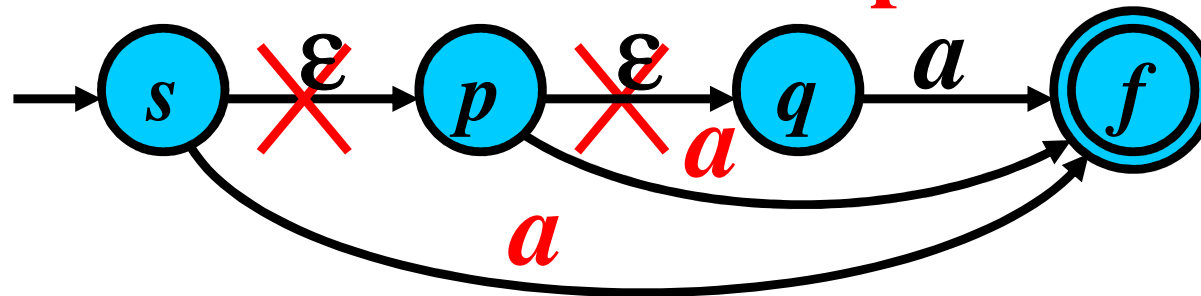
Otázka: $ab \in L(M)$?



Převod KA na DKA: Myšlenka 1/2

Požadavek do praxe: *Deterministický KA (DKA):* KA, který z každé konfigurace může přejít maximálně do jedné další.

1) Myšlenka: Odstranění ε -přechodů

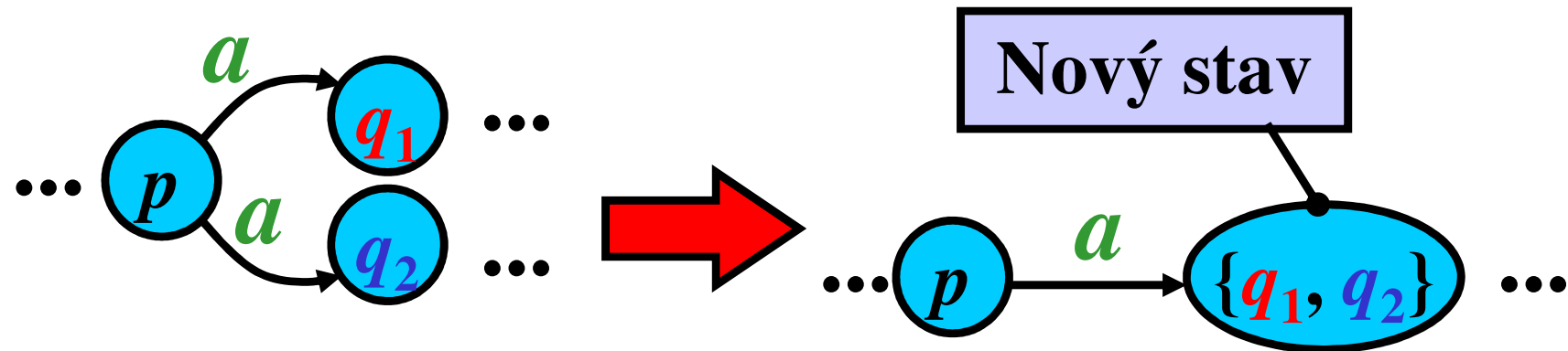


Definice: Necht' $M = (Q, \Sigma, R, s, F)$ je KA. M je *KA bez ε -přechodů*, pokud pro každé pravidlo $pa \rightarrow q \in R$, kde $p, q \in Q$, platí:

$$a \in \Sigma (a \neq \varepsilon)$$

Převod KA na DKA: Myšlenka 2/2

2) Myšlenka: Odstranění nedeterminismu

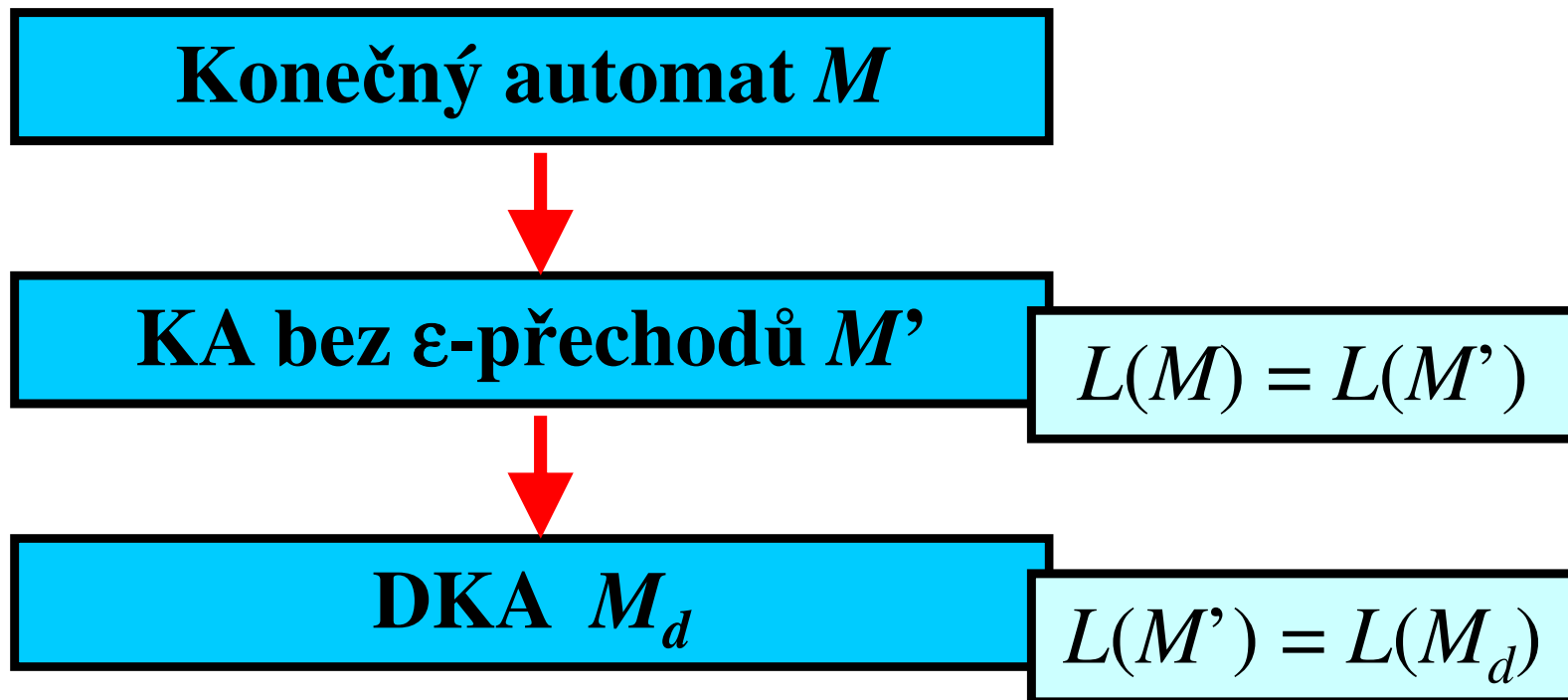


Definice: Necht' $M = (Q, \Sigma, R, s, F)$ je KA bez ε -přechodů. M je *deterministický konečný automat* (DKA), pokud pro každé $pa \rightarrow q \in R$ platí, že množina $R - \{pa \rightarrow q\}$ neobsahuje žádné pravidlo s levou stranou pa .

Tvrzení

- Pro každý KA M , existuje ekvivalentní DKA M_d .

Důkaz je založen na následujících převodech:



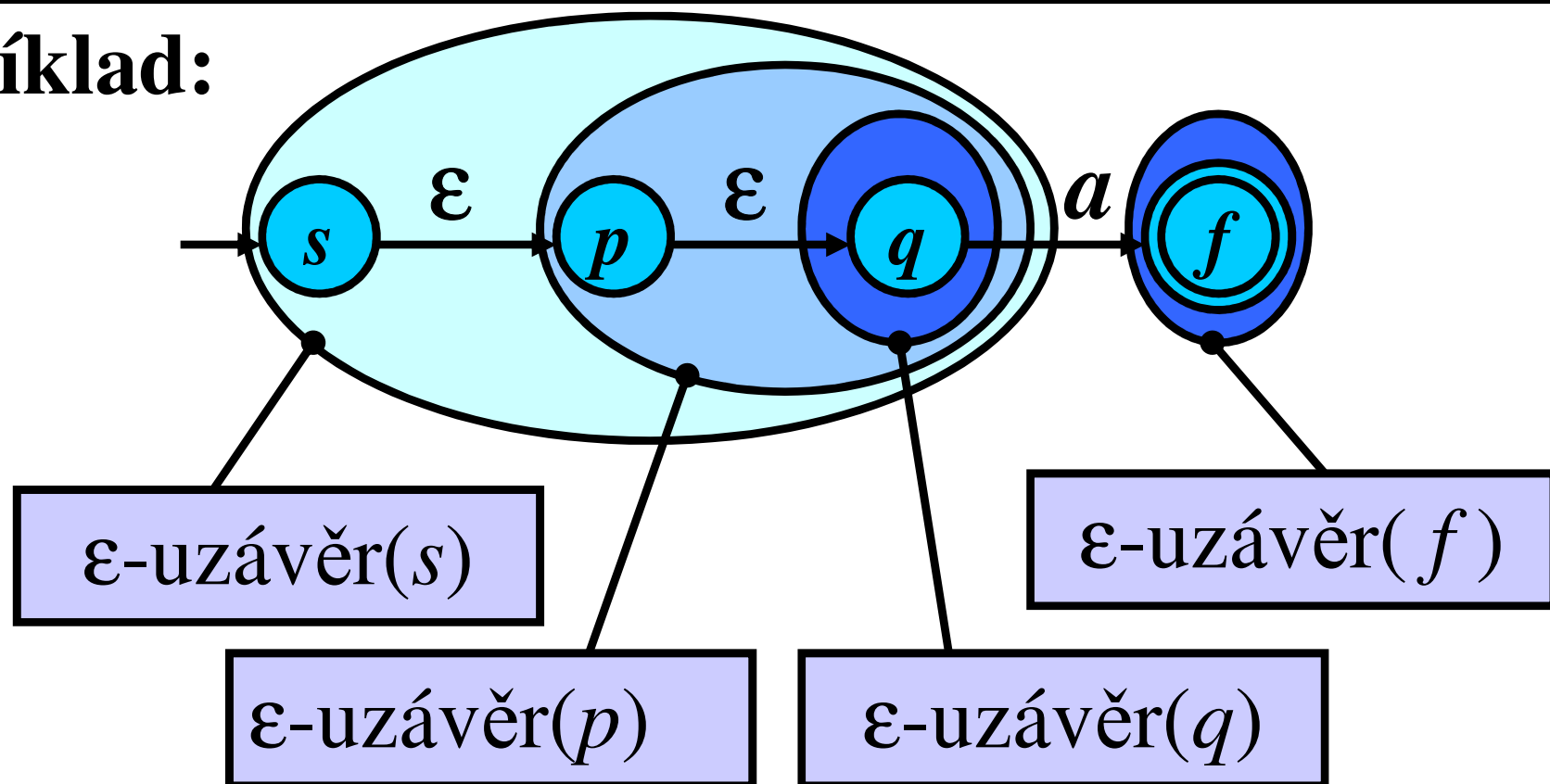
ε -uzávěr

Myšlenka: q je v „ ε -uzávěr(p)“, pokud KA může přejít do q z p bez přečtení vstupního symbolu.

Definice: Pro každý stav $p \in Q$ je definován ε -uzávěr(p):

$$\varepsilon\text{-uzávěr}(p) = \{q: q \in Q, p \vdash^* q\}$$

Příklad:



Algoritmus: ε -uzávěr

- **Vstup:** $M = (Q, \Sigma, R, s, F)$; $p \in Q$
 - **Výstup:** $\varepsilon\text{-uzávěr}(p)$
-

- **Metoda:**

- $i := 0$; $Q_0 := \{p\}$;

- **repeat**

$i := i + 1$;

$Q_i := Q_{i-1} \cup \{ p' : p' \in Q, q \rightarrow p' \in R, \\ q \in Q_{i-1} \}$;

until $Q_i = Q_{i-1}$;

- $\varepsilon\text{-uzávěr}(p) := Q_i$.

ε -uzávěr: Příklad

$M = (Q, \Sigma, R, s, F)$, kde: $Q = \{s, p, q, f\}$, $\Sigma = \{a\}$,
 $R = \{s \rightarrow p, p \rightarrow q, qa \rightarrow f\}$, $F = \{f\}$

Určeme: ε -uzávěr(s)

$$Q_0 = \{s\}$$

$$1) \quad s \rightarrow p'; p' \in Q: \quad s \rightarrow p$$

$$Q_1 = \{s\} \cup \{p\} = \{s, p\}$$

$$2) \quad \begin{array}{l} s \rightarrow p'; p' \in Q: \quad s \rightarrow p \\ p \rightarrow p'; p' \in Q: \quad p \rightarrow q \end{array}$$

$$Q_2 = \{s, p\} \cup \{p, q\} = \{s, p, q\}$$

$$3) \quad \begin{array}{l} s \rightarrow p'; p' \in Q: \quad s \rightarrow p \\ p \rightarrow p'; p' \in Q: \quad p \rightarrow q \\ q \rightarrow p'; p' \in Q: \quad \text{nic} \end{array}$$

$$Q_3 = \{s, p, q\} \cup \{p, q\} = \{s, p, q\} = Q_2 = \varepsilon\text{-uzávěr}(s)$$

Algoritmus: Odstranění ε -přechodů

Myšlenka: Odstranit ε -přechody

- **Vstup:** KA $M = (Q, \Sigma, R, s, F)$
- **Výstup:** KA bez ε -přechodů $M' = (Q, \Sigma, R', s, F')$

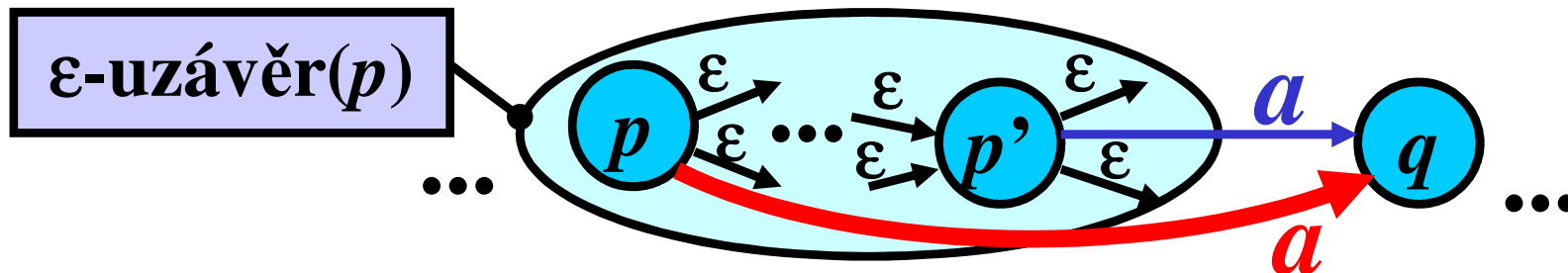
• Metoda:

- $R' := \emptyset$;

- for each $p \in Q$ do

$$R' := R' \cup \{ pa \rightarrow q : p' a \rightarrow q \in R, a \in \Sigma, \\ p' \in \varepsilon\text{-uzávěr}(p), q \in Q \};$$

- $F' := \{ p : p \in Q, \varepsilon\text{-uzávěr}(p) \cap F \neq \emptyset \}.$



Odstranění ε -přechodů: Příklad 1/3

$M = (Q, \Sigma, R, s, F)$, kde:

$$Q = \{s, q_1, q_2, f\}; \Sigma = \{a, b, c\};$$

$$R = \{sa \rightarrow s, s \rightarrow q_1, q_1b \rightarrow q_1, q_1b \rightarrow f, s \rightarrow q_2, \\ q_2c \rightarrow q_2, q_2c \rightarrow f, fa \rightarrow f\}; F = \{f\}$$

1) pro $p = s$: ε -uzávěr(s) = $\{s, q_1, q_2\}$

A. $sd \rightarrow q', d \in \Sigma, q' \in Q$: $sa \rightarrow s$

B. $q_1d \rightarrow q', d \in \Sigma, q' \in Q$: $q_1b \rightarrow q_1, q_1b \rightarrow f$

C. $q_2d \rightarrow q', d \in \Sigma, q' \in Q$: $q_2c \rightarrow q_2, q_2c \rightarrow f$

$$R' = \emptyset \cup \{sa \rightarrow s, sb \rightarrow q_1, sb \rightarrow f, sc \rightarrow q_2, sc \rightarrow f\}$$

Odstranění ε -přechodů: Příklad 2/3

2) pro $p = q_1$: ε -uzávěr(q_1) = $\{q_1\}$

A. $q_1 d \rightarrow q'$; $d \in \Sigma$; $q' \in Q$: $q_1 b \rightarrow q_1$, $q_1 b \rightarrow f$

$R' = R' \cup \{q_1 b \rightarrow q_1, q_1 b \rightarrow f\}$

3) pro $p = q_2$: ε -uzávěr(q_2) = $\{q_2\}$

A. $q_2 d \rightarrow q'$; $d \in \Sigma$; $q' \in Q$: $q_2 c \rightarrow q_2$, $q_2 c \rightarrow f$

$R' = R' \cup \{q_2 c \rightarrow q_2, q_2 c \rightarrow f\}$

4) pro $p = f$: ε -uzávěr(f) = $\{f\}$

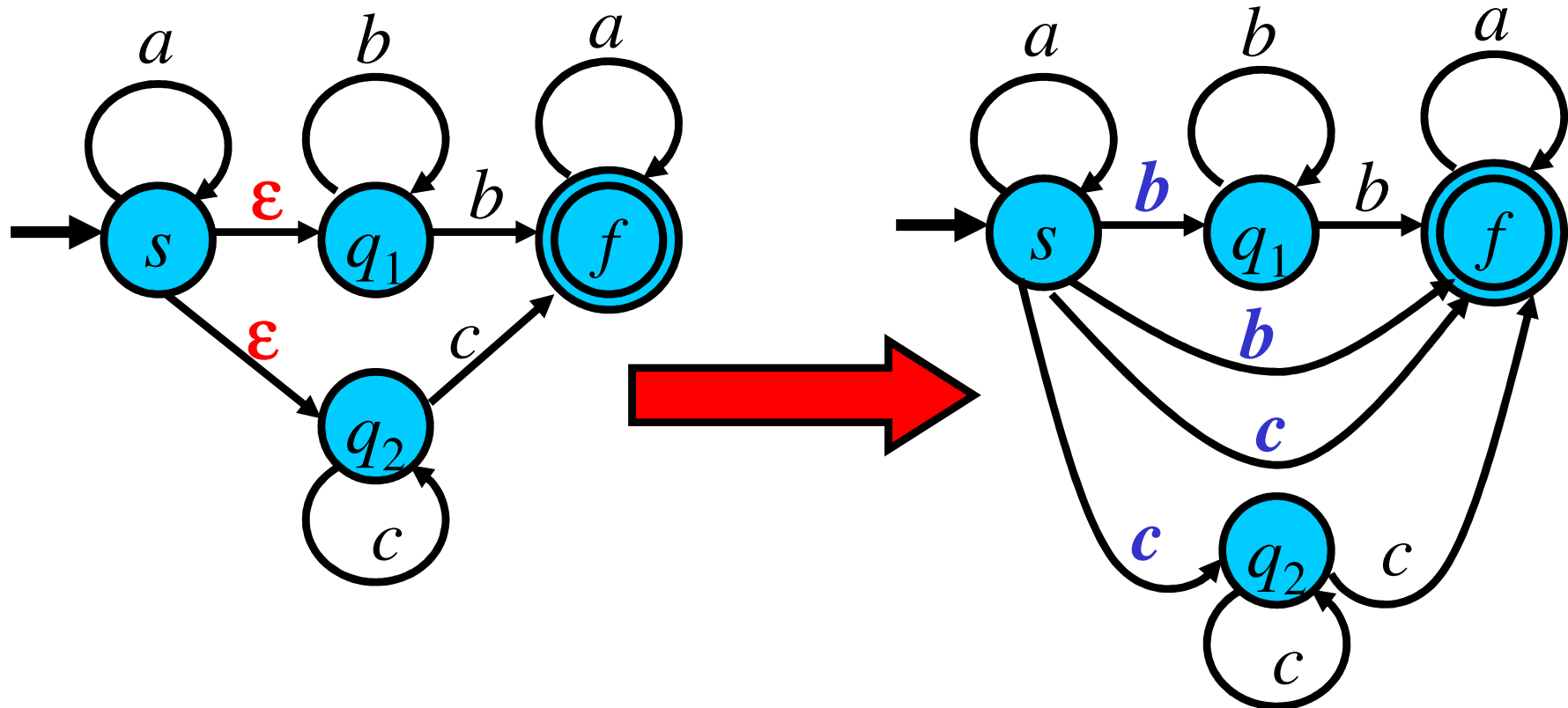
A. $f d \rightarrow q'$; $d \in \Sigma$; $q' \in Q$: $f a \rightarrow f$

$R' = R' \cup \{f a \rightarrow f\}$

$R' = \{s a \rightarrow s, s b \rightarrow q_1, s b \rightarrow f, s c \rightarrow q_2, s c \rightarrow f,$
 $q_1 b \rightarrow q_1, q_1 b \rightarrow f, q_2 c \rightarrow q_2, q_2 c \rightarrow f, f a \rightarrow f\}$

Odstranění ε -přechodů: Příklad 3/3

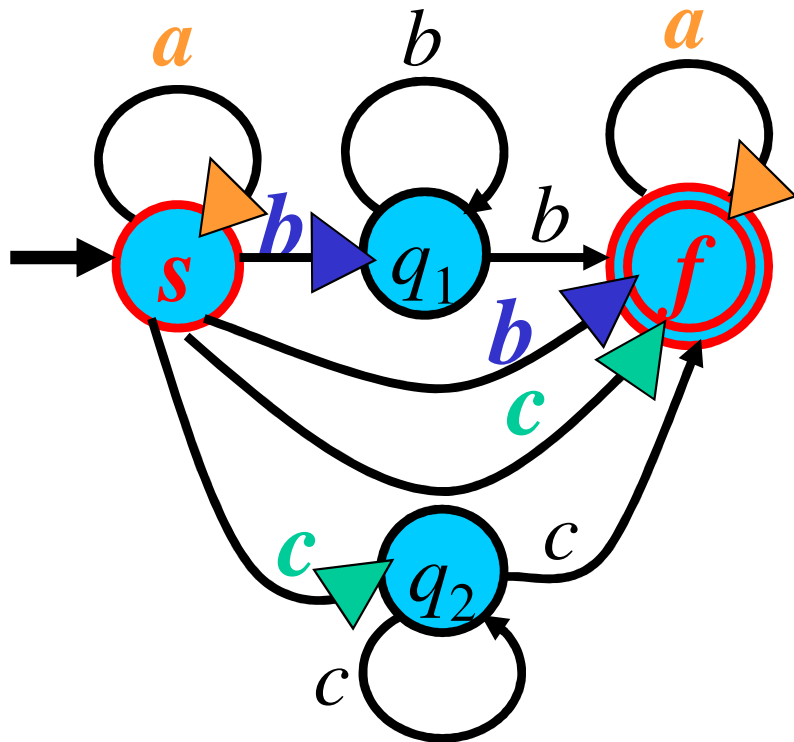
$$\begin{array}{lcl}
 \varepsilon\text{-uzávěr}(s) \cap F = \{s, q_1, q_2\} \cap \{f\} = \emptyset \\
 \varepsilon\text{-uzávěr}(q_1) \cap F = \{q_1\} \cap \{f\} = \emptyset \\
 \varepsilon\text{-uzávěr}(q_2) \cap F = \{q_2\} \cap \{f\} = \emptyset \\
 \varepsilon\text{-uzávěr}(f) \cap F = \{f\} \cap \{f\} = \{f\} \neq \emptyset
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}} \right\} F' = \{f\}$$



Odstranění nedeterminismu

Myšlenka: Vytvořit stavy ze všech podmnožin množiny stavů KA bez ε -přechodů a přidat přechody mezi nimi tak, aby simulovaly přechody původního automatu.

Ilustrace:



$Q_{DKA} = \{\{s\}, \{q_1\}, \{q_2\}, \{f\}, \{s, q_1\}, \{s, q_2\}, \{s, f\}, \{q_1, q_2\}, \{q_1, f\}, \{q_2, f\}, \{s, q_1, q_2\}, \{s, q_1, f\}, \{s, q_2, f\}, \{q_1, q_2, f\}, \{s, q_1, q_2, f\}\}$

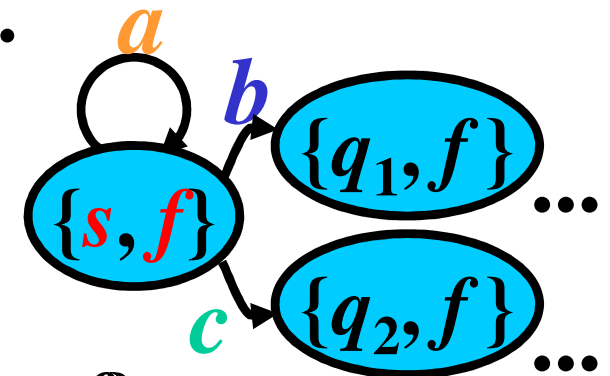
Pro stav $\{s\}$: ...

⋮

Pro stav $\{s, f\}$:

⋮

Pro stav $\{s, q_1, q_2, f\}$: ...



Algoritmus: Odstranění nedeterminismu

- **Vstup:** KA bez ε -přechodů: $M = (Q, \Sigma, R, s, F)$
 - **Výstup:** DKA: $M_d = (Q_d, \Sigma, R_d, s_d, F_d)$
-

- **Metoda:**

- $Q_d := \{Q' : Q' \subseteq Q, Q' \neq \emptyset\}; R_d := \emptyset;$
- for each $Q' \in Q_d$, and $a \in \Sigma$ do begin
 $Q'' := \{q : p \in Q', pa \rightarrow q \in R\};$
if $Q'' \neq \emptyset$ then $R_d := R_d \cup \{Q' a \rightarrow Q''\};$
end
- $s_d := \{s\};$
- $F_d := \{F' : F' \in Q_d, F' \cap F \neq \emptyset\}.$

Odstranění nedeterminismu: Příklad 1/5

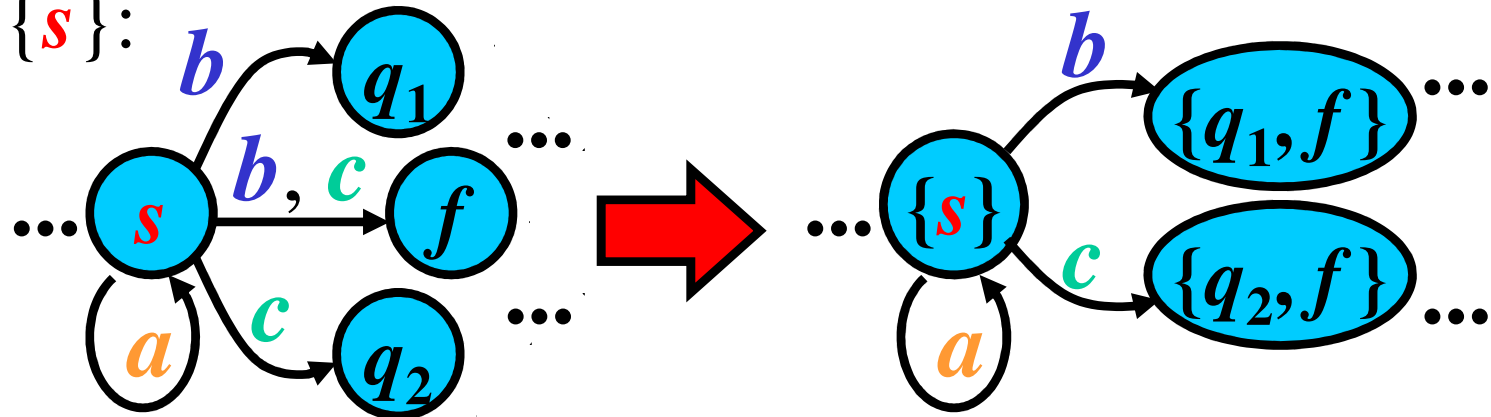
$M = (Q, \Sigma, R, s, F)$, kde:

$$Q = \{s, q_1, q_2, f\}; \Sigma = \{a, b, c\}; F = \{f\}$$

$$R = \{sa \rightarrow s, sb \rightarrow q_1, sb \rightarrow f, sc \rightarrow q_2, sc \rightarrow f, \\ q_1b \rightarrow q_1, q_1b \rightarrow f, q_2c \rightarrow q_2, q_2c \rightarrow f, fa \rightarrow f\};$$

$$Q_d = \{\{s\}, \{s, q_1\}, \{s, q_1, q_2\}, \{s, q_1, f\}, \{s, q_1, q_2, f\}, \{s, q_2\}, \{s, q_2, f\}, \\ \{s, f\}, \{q_1\}, \{q_1, q_2\}, \{q_1, f\}, \{q_1, q_2, f\}, \{q_2\}, \{q_2, f\}, \{f\}\}$$

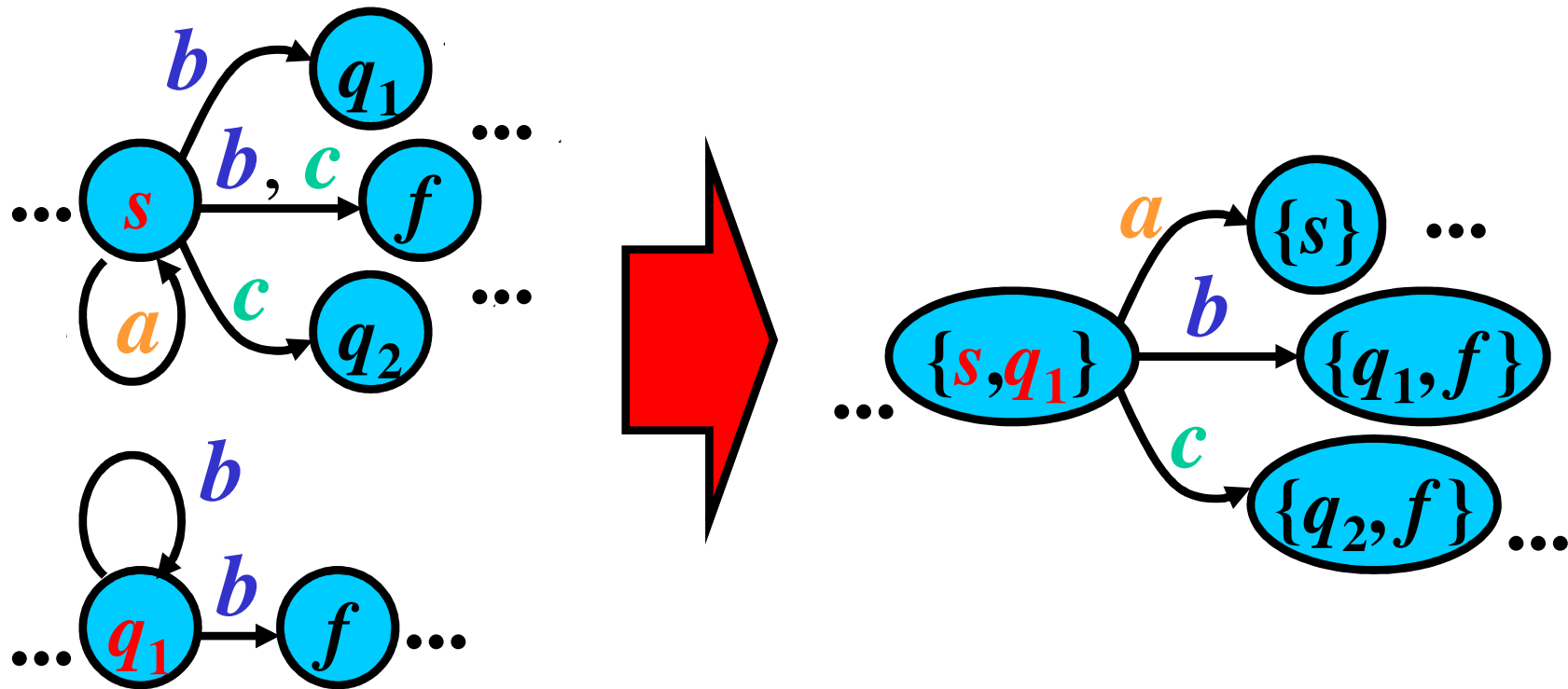
pro $Q' = \{s\}$:



$$R_d = \emptyset \cup \{\{s\}a \rightarrow \{s\}, \{s\}b \rightarrow \{q_1, f\}, \{s\}c \rightarrow \{q_2, f\}\}$$

Odstranění nedeterminismu: Příklad 2/5

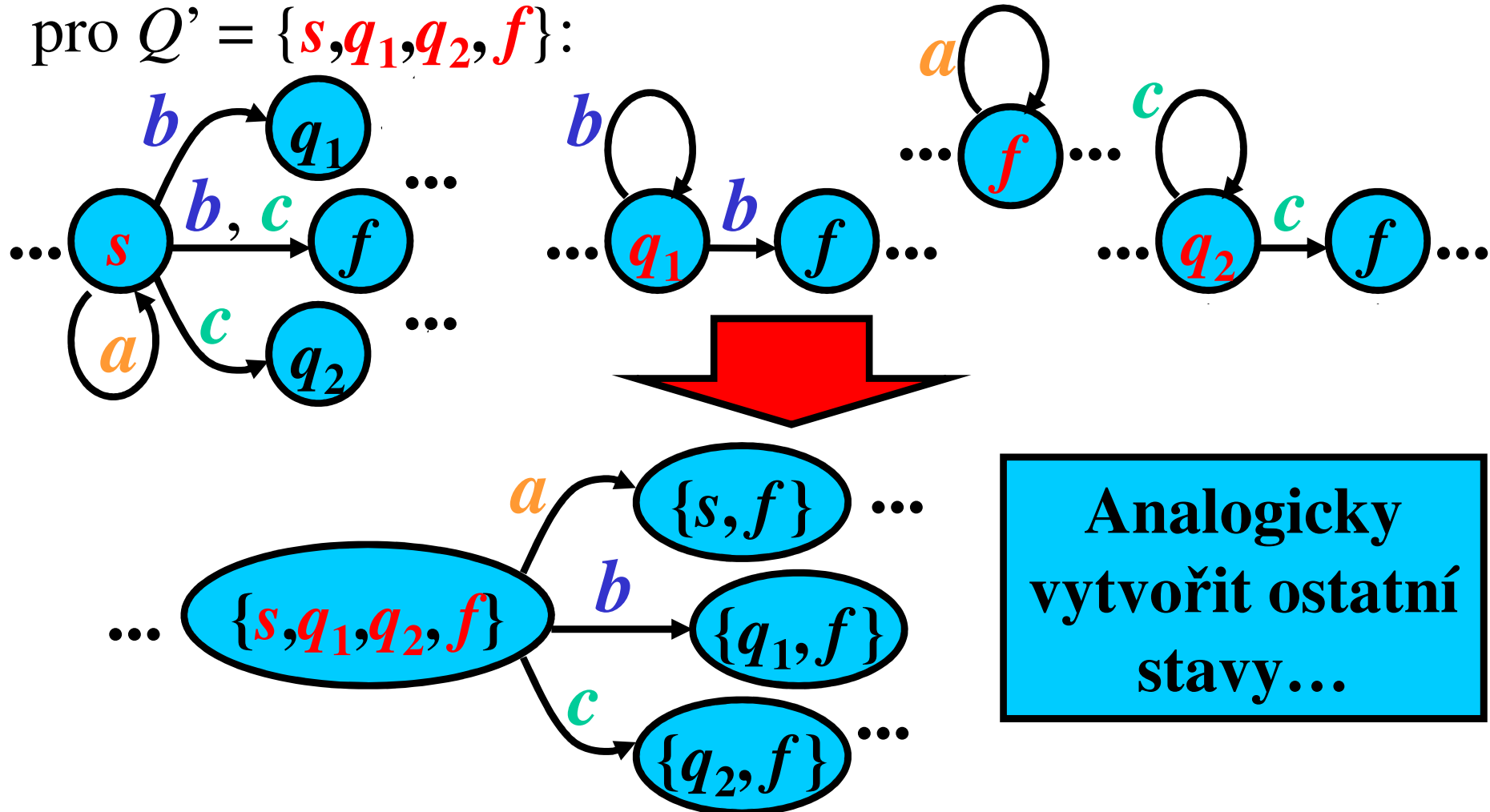
pro $Q' = \{s, q_1\}$:



$$R_d = R_d \cup \{ \{s, q_1\} a \rightarrow \{s\}, \{s, q_1\} b \rightarrow \{q_1, f\}, \{s, q_1\} c \rightarrow \{q_2, f\} \}$$

Odstranění nedeterminismu: Příklad 3/5

pro $Q' = \{s, q_1, q_2, f\}$:



$$R_d = R_d \cup \{ \{s, q_1, q_2, f\} a \rightarrow \{s, f\}, \{s, q_1, q_2, f\} b \rightarrow \{q_1, f\}, \\ \{s, q_1, q_2, f\} c \rightarrow \{q_2, f\} \}$$

Odstranění nedeterminismu: Příklad 4/5

Koncové stavy: $F_d := \{F' : F' \in Q_d, F' \cap F \neq \emptyset\}$

pro $F = \{f\}$:

$$\{s\} \cap \{f\} = \emptyset \quad \Rightarrow \quad \{s\} \notin F_d$$

$$\{s, q_1\} \cap \{f\} = \emptyset \quad \Rightarrow \quad \{s, q_1\} \notin F_d$$

$$\{s, q_1, q_2\} \cap \{f\} = \emptyset \quad \Rightarrow \quad \{s, q_1, q_2\} \notin F_d$$

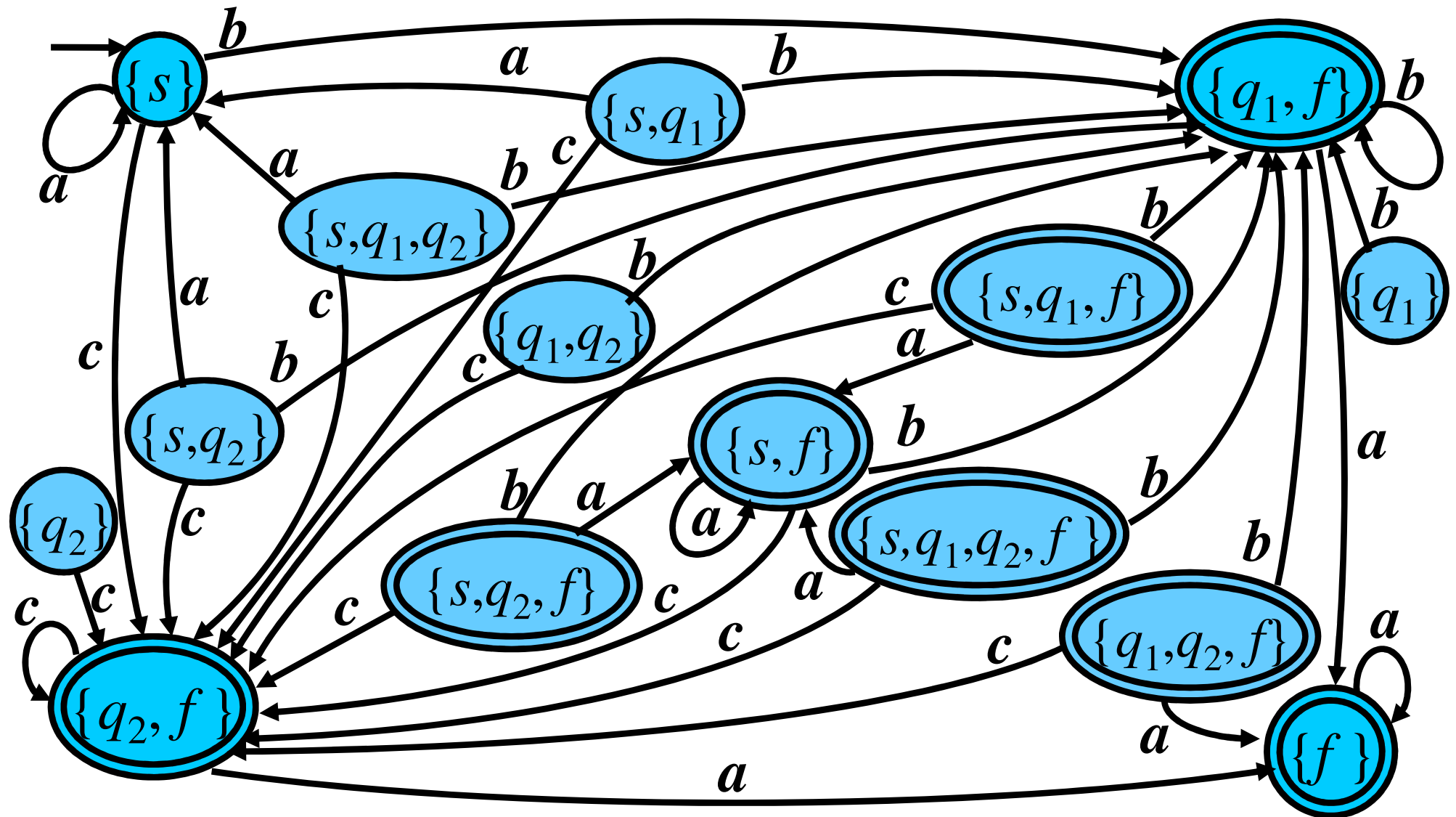
$$\{s, q_1, f\} \cap \{f\} = \{f\} \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad \{s, q_1, f\} \in F_d$$

$$\{s, q_1, q_2, f\} \cap \{f\} = \{f\} \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad \{s, q_1, q_2, f\} \in F_d$$

⋮

$$F_d = \{\{s, q_1, f\}, \{s, q_1, q_2, f\}, \{s, q_2, f\}, \{s, f\}, \\ \{q_1, f\}, \{q_1, q_2, f\}, \{q_2, f\}, \{f\}\}$$

Odstranění nedeterminismu: Příklad 5/5



Otázka: Můžeme vytvořit DKA menší?

Odpověď: **Ano**

Dostupné stavy

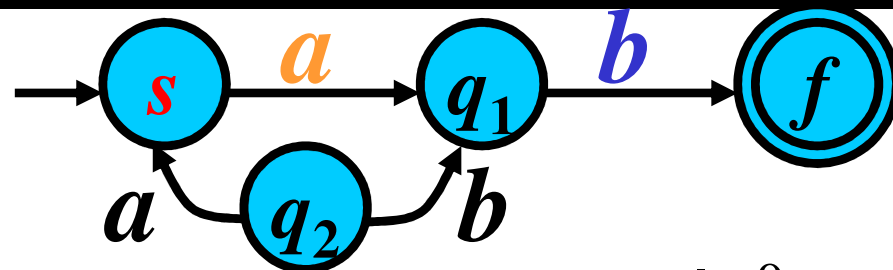
Myšlenka: Stav q je *dostupný*, pokud pro nějaký řetězec „dostane“ DKA z s (počáteční stav) do q .

Definice: Necht' $M = (Q, \Sigma, R, s, F)$ je KA.

Stav $q \in Q$ je *dostupný*, pokud existuje $w \in \Sigma^*$, pro který platí $sw \vdash^* q$. Jinak q je *nedostupný*.

Pozn.: Každý nedostupný stav může být odstraněn

Příklad:



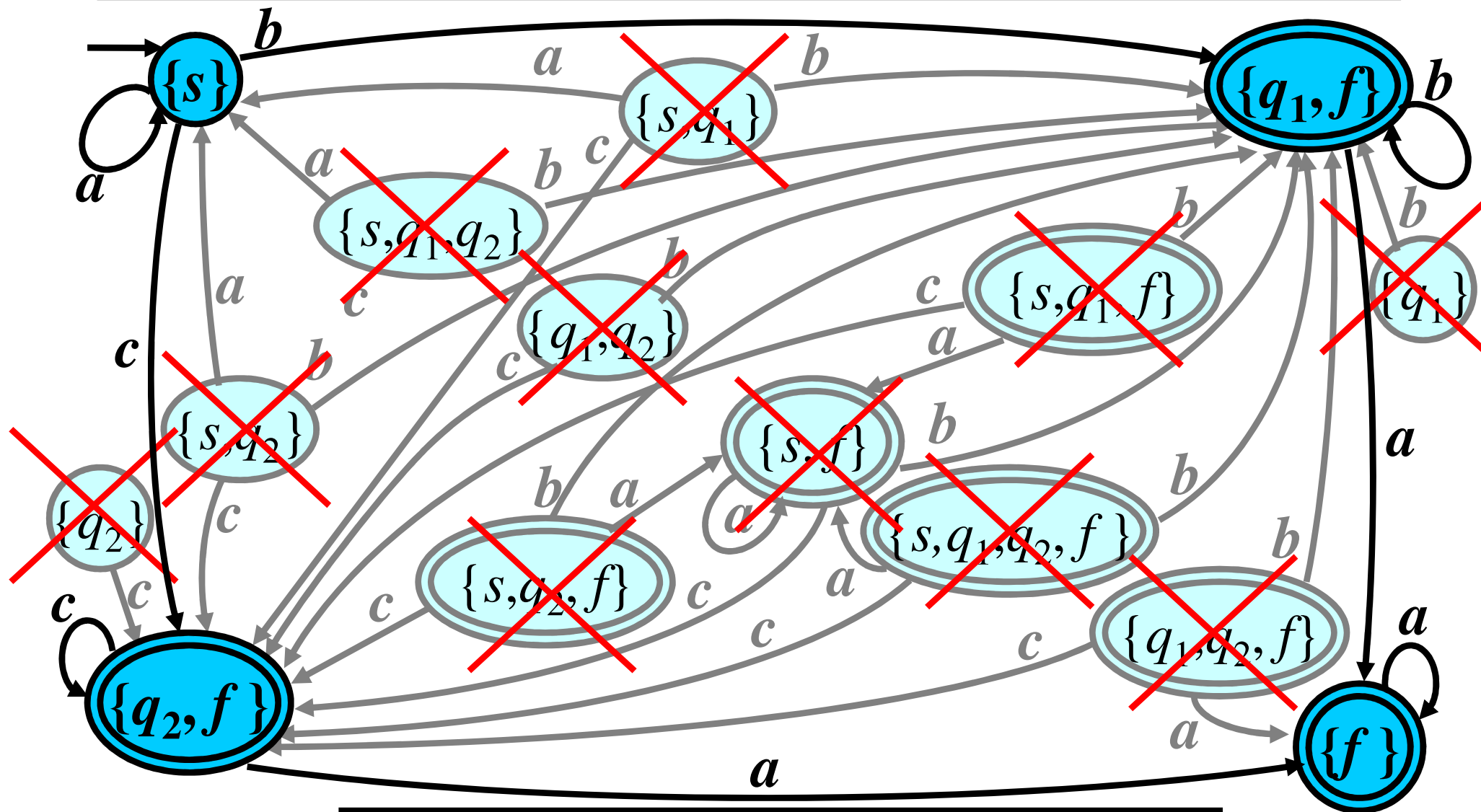
Stav s - dostupný: $w = \varepsilon$: $s \vdash^0 s$

Stav q_1 - dostupný: $w = a$: $sa \vdash q_1$

Stav f - dostupný: $w = ab$: $sab \vdash q_1 b \vdash f$

Stav q_2 - **nedostupný** (neexistuje žádné $w \in \Sigma^*$ takové, že $sw \vdash^* q_2$)

Předchozí příklad: Nedostupné stavy

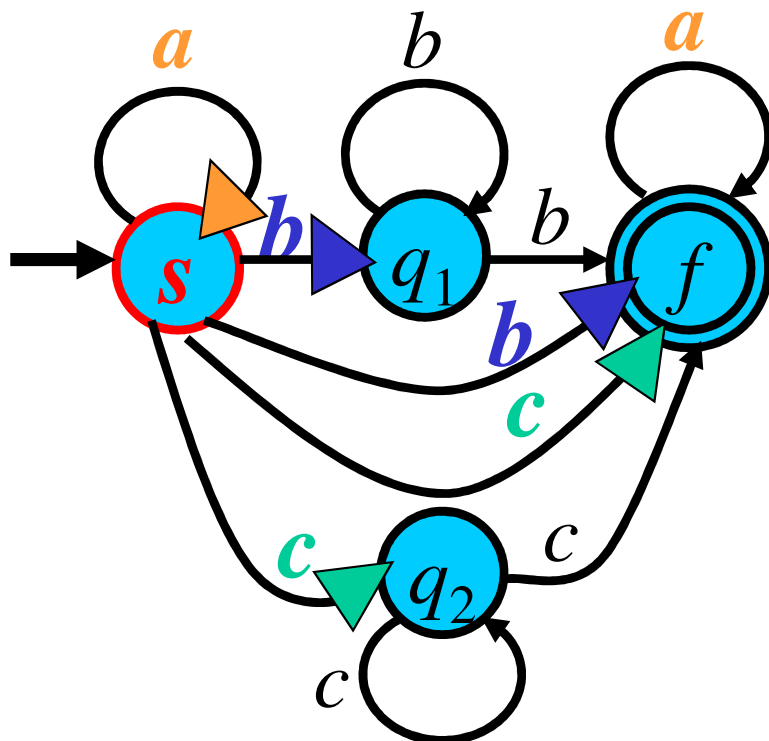


Mnoho nedostupných stavů

Algoritmus II: Odstranění nedeterminismu

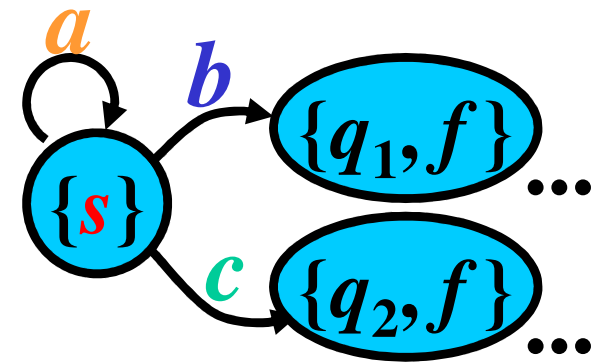
Myšlenka: Analogie předchozího algoritmu s tím rozdílem, že budeme postupně přidávat pouze stavy, které jsou dostupné

Ilustrace:



$$Q_{DKA} = \{\{s\}\}$$

Pro stav $\{s\}$:



Přidej nové stavy $\{q_1, f\}$, $\{q_2, f\}$ do Q_{DKA}

Pro stav $\{q_1, f\}$: ...

Pro stav $\{q_2, f\}$: ...

Přidej nové stavy ...

⋮

Algoritmus II: Odstranění nedeterminismu

• **Vstup:** KA bez ε -přechodů: $M = (Q, \Sigma, R, s, F)$

• **Výstup:** DKA: $M_d = (Q_d, \Sigma, R_d, s_d, F_d)$

bez nedostupných stavů

• **Metoda:**

• $s_d := \{s\}; Q_{new} := \{s_d\}; R_d := \emptyset; Q_d := \emptyset; F_d := \emptyset;$

• **repeat**

necht' $Q' \in Q_{new}; Q_{new} := Q_{new} - \{Q'\}; Q_d := Q_d \cup \{Q'\};$

for each $a \in \Sigma$ **do begin**

$Q'' := \{q: p \in Q', pa \rightarrow q \in R\};$

if $Q'' \neq \emptyset$ **then** $R_d := R_d \cup \{Q'a \rightarrow Q''\};$

if $Q'' \notin Q_d \cup \{\emptyset\}$ **then** $Q_{new} := Q_{new} \cup \{Q''\}$

end

if $Q' \cap F \neq \emptyset$ **then** $F_d := F_d \cup \{Q'\}$

until $Q_{new} = \emptyset.$

Odstranění nedeterminismu II: Příklad 1/3

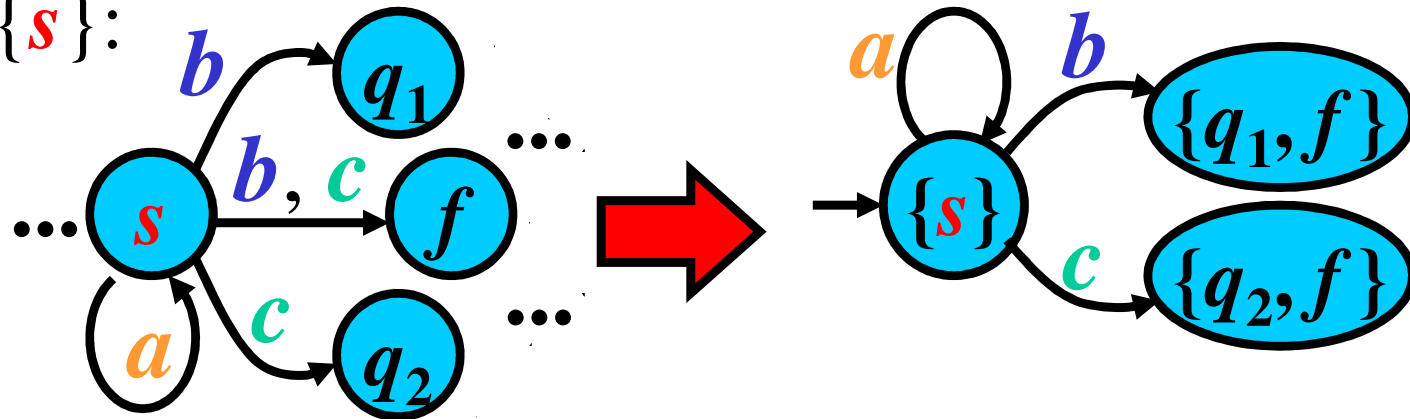
$M = (Q, \Sigma, R, s, F)$, kde:

$$Q = \{s, q_1, q_2, f\}; \Sigma = \{a, b, c\}; F = \{f\}$$

$$R = \{sa \rightarrow s, sb \rightarrow q_1, sb \rightarrow f, sc \rightarrow q_2, sc \rightarrow f, \\ q_1b \rightarrow q_1, q_1b \rightarrow f, q_2c \rightarrow q_2, q_2c \rightarrow f, fa \rightarrow f\};$$

$$Q_{new} = \{\{s\}\}; R_d = \emptyset; Q_d = \emptyset; F_d = \emptyset$$

for $Q' = \{s\}$:

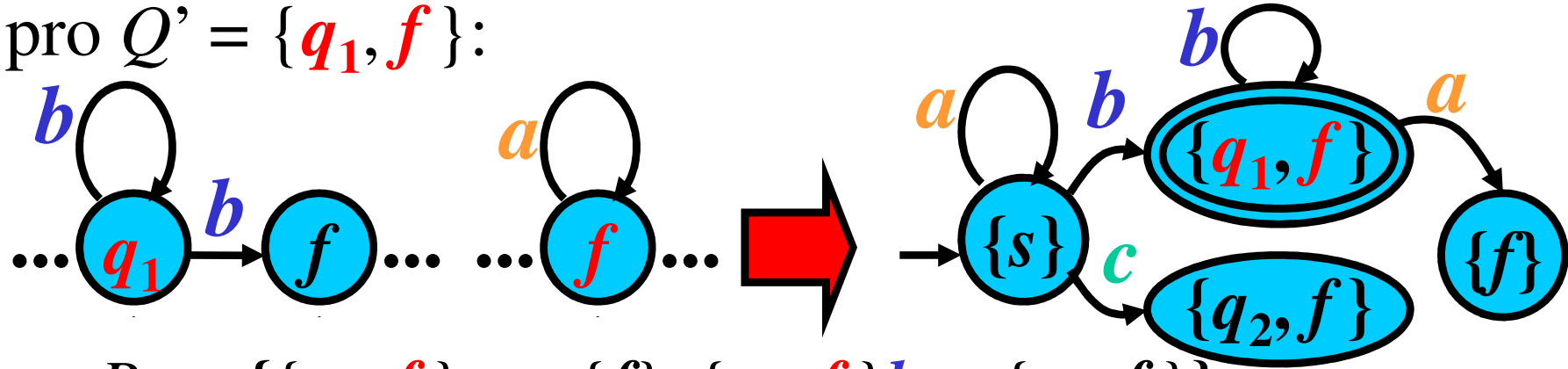


$$R_d := \emptyset \cup \{\{s\}a \rightarrow \{s\}, \{s\}b \rightarrow \{q_1, f\}, \{s\}c \rightarrow \{q_2, f\}\}$$

$$Q_{new} = \{\{q_1, f\}, \{q_2, f\}\}, Q_d = \emptyset \cup \{\{s\}\}, F_d = \emptyset$$

Odstranění nedeterminismu II: Příklad 2/3

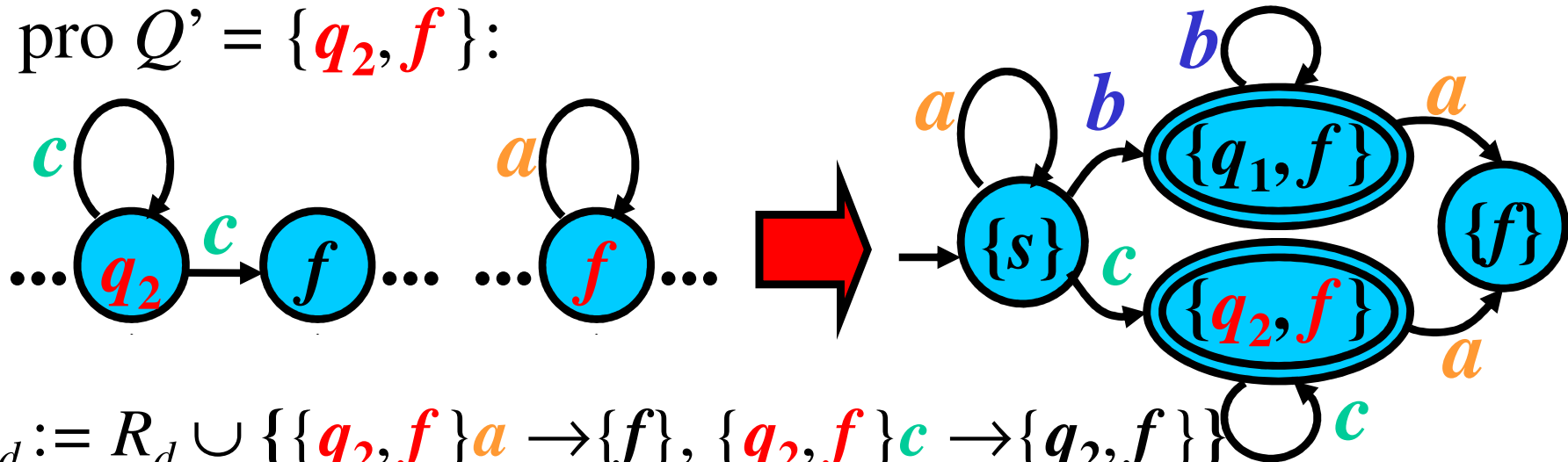
pro $Q' = \{q_1, f\}$:



$$R_d := R_d \cup \{\{q_1, f\}a \rightarrow \{f\}, \{q_1, f\}b \rightarrow \{q_1, f\}\}$$

$$Q_{new} = \{\{q_2, f\}, \{f\}\}, Q_d = Q_d \cup \{\{q_1, f\}\}, F_d := \emptyset \cup \{\{q_1, f\}\}$$

pro $Q' = \{q_2, f\}$:

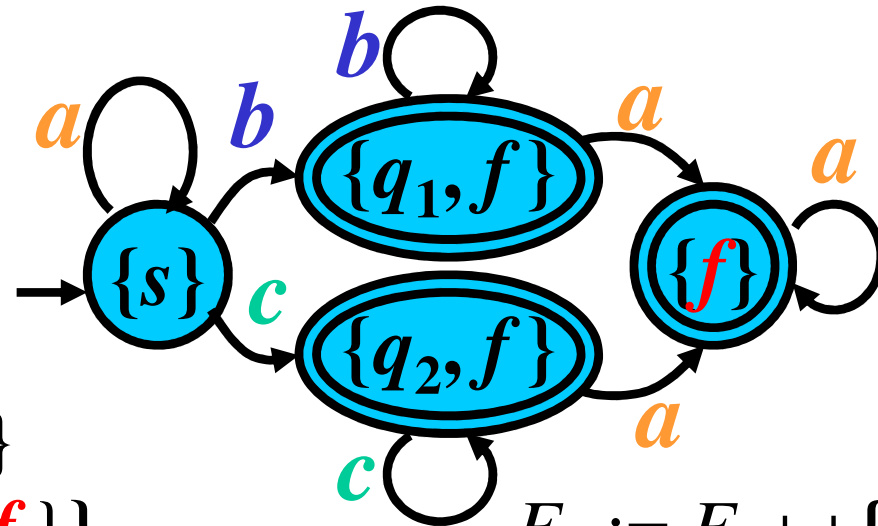
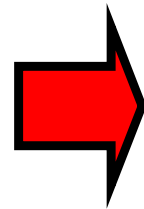
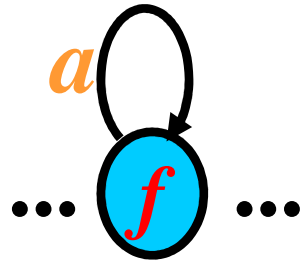


$$R_d := R_d \cup \{\{q_2, f\}a \rightarrow \{f\}, \{q_2, f\}c \rightarrow \{q_2, f\}\}$$

$$Q_{new} = \{\{f\}\}, Q_d = Q_d \cup \{\{q_2, f\}\}, F_d := F_d \cup \{\{q_2, f\}\}$$

Odstranění nedeterminismu II: Příklad 3/3

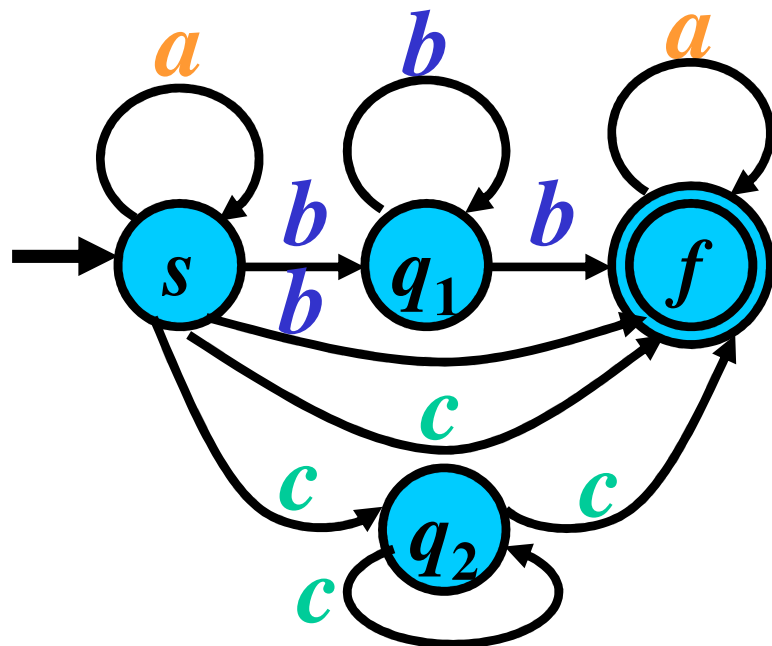
pro $Q' = \{f\}$:



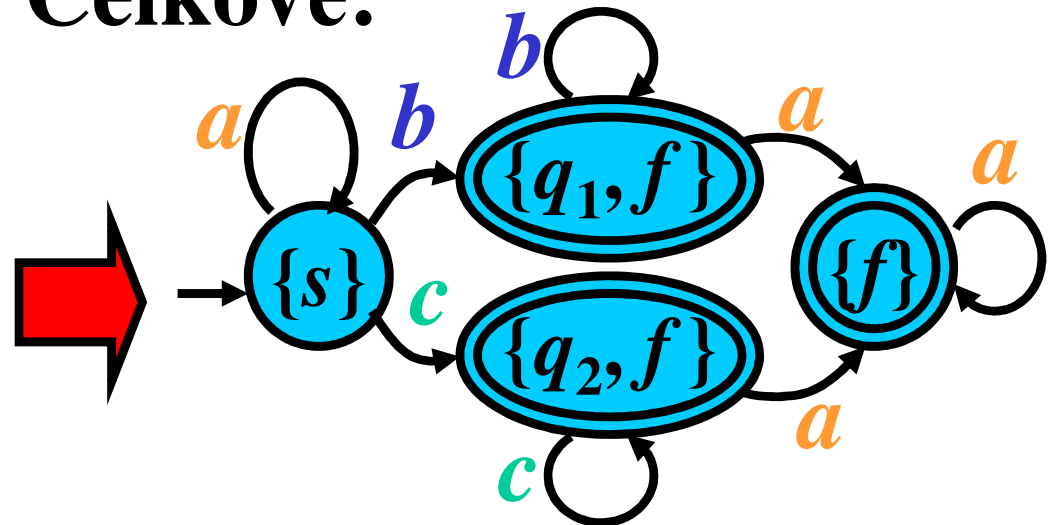
$$R_d := R_d \cup \{\{f\}a \rightarrow \{f\}\}$$

$$Q_{new} = \emptyset, Q_d = Q_d \cup \{\{f\}\},$$

$$F_d := F_d \cup \{\{f\}\}$$



Celkově:



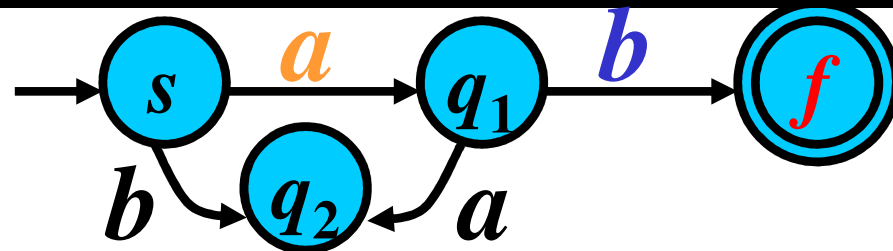
Ukončující stavy

Myšlenka: Stav q je *ukončující*, pokud pro nějaký řetězec „dostane“ DKA z q do koncového stavu

Definice: Necht' $M = (Q, \Sigma, R, s, F)$ je DKA. Stav $q \in Q$ je *ukončující*, pokud existuje řetězec $w \in \Sigma^*$, pro který platí: $qw \vdash^* f$, $f \in F$. Jinak q je *neukončující*.

Pozn.: Každý neukončující stav může být odstraněn.

Příklad:



Stav s - ukončující: $w = ab$:

$sab \vdash q_1b \vdash f$

Stav q_1 - ukončující: $w = b$:

$q_1b \vdash f$

Stav f - ukončující: $w = \varepsilon$:

$f \vdash^0 f$

Stav q_2 - **neukončující** (neexistuje žádné $w \in \Sigma^*$

takové že: $q_2w \vdash^* q$, $q \in F$)

Algoritmus: Odstranění neukončujících stavů

- **Vstup:** DKA: $M = (Q, \Sigma, R, s, F)$
 - **Výstup:** DKA: $M_t = (Q_t, \Sigma, R_t, s, F)$
-

- **Metoda:**

- $Q_0 := F; i := 0;$

- **repeat**

$i := i + 1;$

$Q_i := Q_{i-1} \cup \{q: qa \rightarrow p \in R, a \in \Sigma, p \in Q_{i-1}\};$

until $Q_i = Q_{i-1};$

- $Q_t := Q_i;$

- $R_t := \{qa \rightarrow p: qa \rightarrow p \in R, p, q \in Q_t, a \in \Sigma\}.$

Odstranění neukončujících stavů: Příklad

$M = (Q, \Sigma, R, s, F)$, kde: $Q = \{s, q_1, q_2, f\}$, $\Sigma = \{a, b\}$,
 $R = \{sa \rightarrow q_1, sb \rightarrow q_2, q_1a \rightarrow q_2, q_1b \rightarrow f\}$, $F = \{f\}$

$$Q_0 = \{f\}$$

$$1) qd \rightarrow f; q \in Q; d \in \Sigma: \quad q_1b \rightarrow f$$

$$Q_1 = \{f\} \cup \{q_1\} = \{f, q_1\}$$

$$2) qd \rightarrow f; q \in Q; d \in \Sigma: \quad q_1b \rightarrow f$$

$$qd \rightarrow q_1; q \in Q; d \in \Sigma: \quad sa \rightarrow q_1$$

$$Q_2 = \{f, q_1\} \cup \{q_1, s\} = \{f, q_1, s\}$$

$$3) qd \rightarrow f; q \in Q; d \in \Sigma: \quad q_1b \rightarrow f$$

$$qd \rightarrow q_1; q \in Q; d \in \Sigma: \quad sa \rightarrow q_1$$

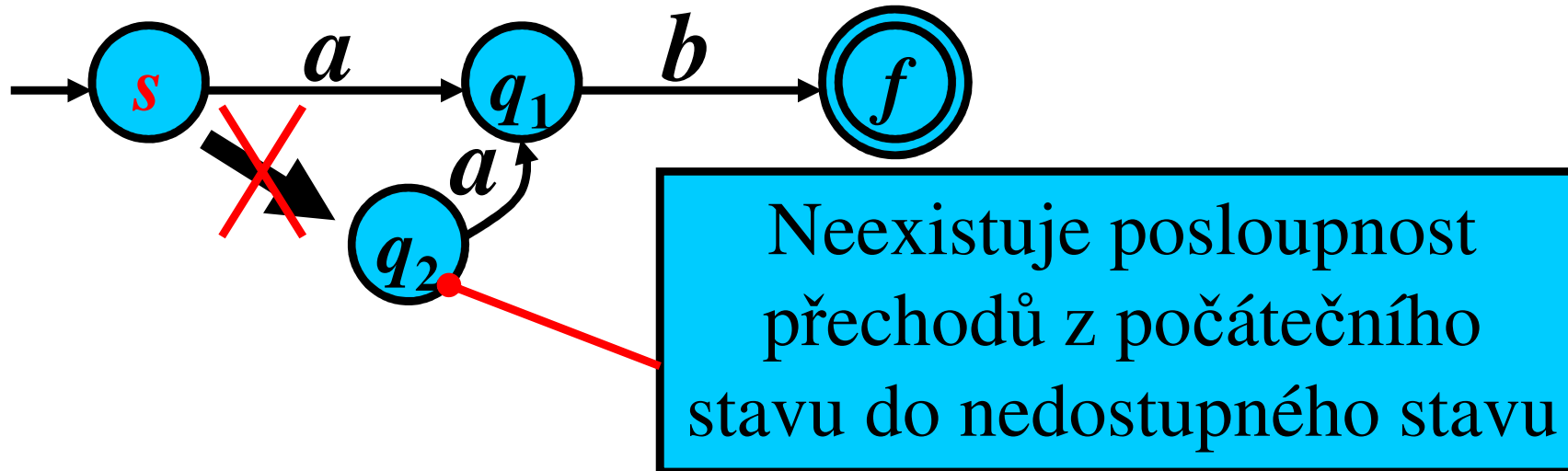
$$qd \rightarrow s; q \in Q; d \in \Sigma: \quad \text{nic}$$

$$Q_3 = \{f, q_1, s\} \cup \{q_1, s\} = \{f, q_1, s\} = Q_2 = Q_t$$

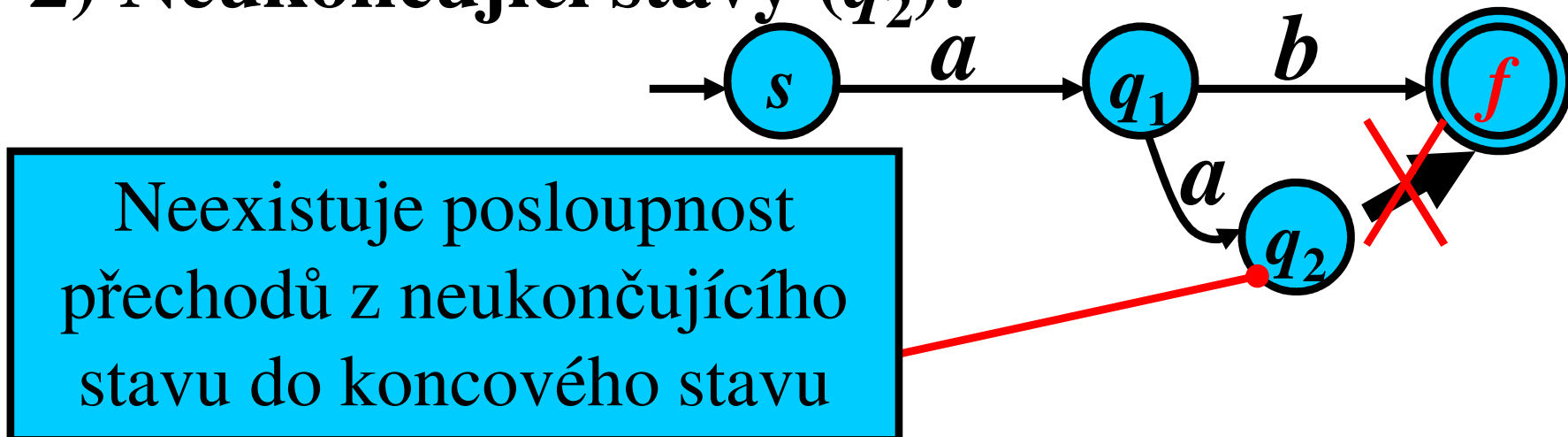
$$R_t = \{sa \rightarrow q_1, sb \not\rightarrow q_2, q_1a \not\rightarrow q_2, q_1b \rightarrow f\}$$

Celkem: Stavy k odstranění

1) Nedostupné stavy (q_2):



2) Neukončující stavy (q_2):

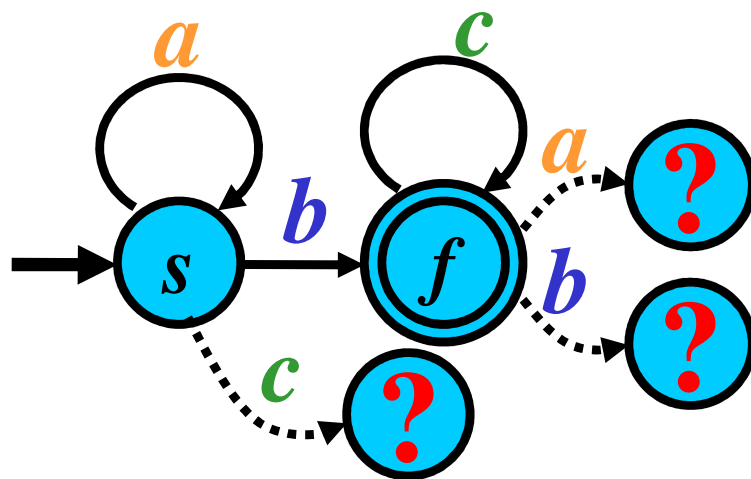


Úplný DKA

Myšlenka: Úplný DKA se nemůže zaseknout.

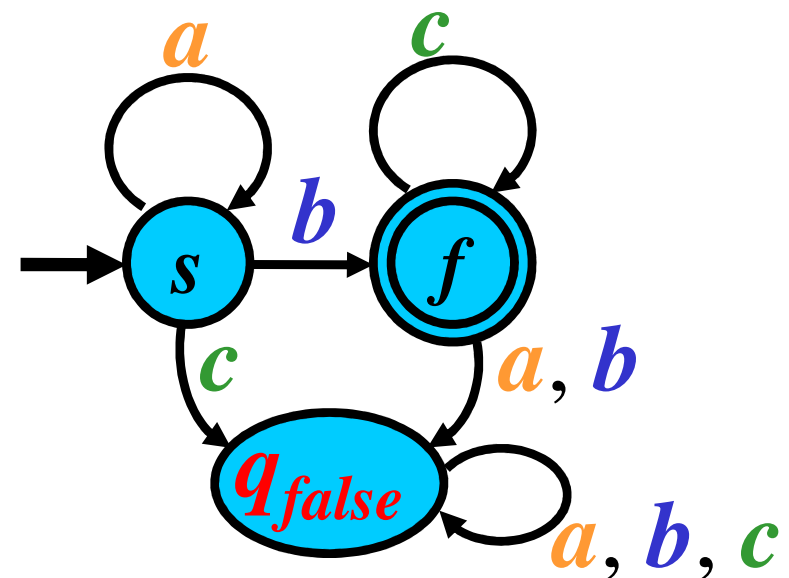
Definice: Necht' $M = (Q, \Sigma, R, s, F)$ je **DKA**.
 M je *úplný*, pokud pro libovolné $p \in Q$, $a \in \Sigma$ existuje právě jedno pravidlo $pa \rightarrow q \in R$ pro nějaké $q \in Q$. Jinak M je *neúplný*.

Převod: Neúplný DKA:



$$\Sigma = \{a, b, c\}$$

Úplný DKA:



Algoritmus: Z DKA na úplný DKA

Myšlenka: Přidej stav simulující “past”

- **Vstup:** Neúplný DKA $M = (Q, \Sigma, R, s, F)$
 - **Výstup:** Úplný DKA $M_c = (Q_c, \Sigma, R_c, s, F)$
-

- **Metoda:**

- $Q_c := Q \cup \{q_{false}\};$
- $R_c := R \cup \{qa \rightarrow q_{false} : a \in \Sigma, q \in Q_c, \\ qa \rightarrow p \notin R, p \in Q\}.$

Dobře specifikovaný KA

Definice: Necht' $M = (Q, \Sigma, R, s, F)$ je úplný DKA. Pak M je *dobře specifikovaný KA* (DSKA), pokud:

- 1) Q nemá nedostupné stavy
- 2) Q má maximálně jeden neukončující stav

Pozn.: Pokud dobře specifikovaný KA má neukončující stav, je to q_{false} z předchozího algoritmu

Tvrzení: Pro každý KA M existuje ekvivalentní dobře specifikovaný KA M_{ds}

Důkaz: Použij následující algoritmus

Algoritmus: Převod KA na DSKA

- **Vstup:** KA M
 - **Výstup:** DSKA M_{ds}
-
- **Metoda:**
 - převed' KA M na ekvivalentní KA M' bez ε -přechodů
 - převed' KA M' na ekvivalentní DKA M_d bez nedostupných stavů
 - převed' DKA M_d na ekvivalentní DKA M_t bez neukončujících stavů
 - převed' DKA M_t na ekvivalentní úplný DKA M_c
 - $M_{ds} := M_c$
- Pozn.:** V M_{ds} je max. jeden neukončující stav— q_{false}

Typy KA: Shrnutí

	KA	KA bez ε -přech.	DKA	Úplný KA	DSKA
Počet všech pravidel tvaru $p \rightarrow q$, kde $p, q \in Q$	0-n	0	0	0	0
Počet pravidel tvaru $pa \rightarrow q$, pro libovolné $p \in Q$ a libovolné $a \in \Sigma$	0-n	0-n	0-1	1	1
Počet všech nedostupných stavů	0-n	0-n	0-n	0-n	0
Počet všech neukončujících stavů	0-n	0-n	0-n	0-n	0-1
Počet všech možných těchto automatů pro jeden regulární jazyk	∞	∞	∞	∞	∞