M/M/3 bez fronty

Rovnice pro ustálený stav

$$\begin{aligned}
-\lambda p_0 + \mu p_1 &= 0 \\
\lambda p_0 - \mu p_1 - \lambda p_1 + 2\mu p_2 &= 0 \\
\lambda p_1 - 2\mu p_2 - \lambda p_2 + 3\mu p_3 &= 0 \\
\lambda p_2 - 3\mu p_3 &= 0 \\
p_0 + p_1 + p_2 + p_3 &= 1
\end{aligned}$$

Z první rovnice vyjádříme p_1:

$$p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0$$

Pro přehlednost zavedeme substituci $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$:

$$p_1 = \rho p_0;$$

Když sečteme první a druhou rovnici, můžeme vyjádřit p_2:

$$p_2 = \frac{\lambda}{2\mu} p_1 = \frac{\rho}{2} p_1 = \frac{\rho^2}{2} p_0$$

Podobně, když sečteme první, druhou a třetí rovnici, můžeme vyjádřit p_3:

$$p_3 = \frac{\lambda}{3\mu} p_2 = \frac{\rho}{3} p_2 = \frac{\rho^3}{6} p_0$$

To vše dosadíme do poslední rovnice a vypočteme p_0:

$$p_0 + \rho p_0 + \frac{\rho^2}{2} p_0 + \frac{\rho^3}{6} p_0 = 1$$

$$p_0 = \frac{6}{6 + 6\rho + 3\rho^2 + \rho^3}; \rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

Pravděpodobnost, že je při příchodu požadavku alespoň jedno zařízení volné, pokud požadavky přichází každých 5 sekund a každé zařízení obslouží dva požadavky za minutu pak bude:

$$p_x = p_0 + p_1 + p_2; \lambda = 12, \mu = 2 \Rightarrow p_x = \frac{25}{61}$$

M/M/2 s neomezenou frontou

Rovnice pro ustálený stav

$$\begin{aligned}
-\lambda p_0 + \mu p_1 &= 0 \quad \Rightarrow p_1 = \rho p_0; \rho = \frac{\lambda}{\mu} \\
\lambda p_0 - \mu p_1 - \lambda p_1 + 2\mu p_2 &= 0 \quad \Rightarrow p_2 = \frac{\rho^2}{2} p_0 \\
\lambda p_1 - 2\mu p_2 - \lambda p_2 + 2\mu p_3 &= 0 \quad \Rightarrow p_3 = \frac{\rho^3}{4} p_0 \\
\lambda p_2 - 2\mu p_3 - \lambda p_3 + 2\mu p_4 &= 0 \quad \Rightarrow p_4 = \frac{\rho^4}{8} p_0 \\
p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n &= 1
\end{aligned}$$

Pro stav p_i tedy platí:

$$p_i = \frac{\rho^i}{2^{i-1}} p_0; i \geq 1$$

Z poslední rovnice vypočítáme p_0:

$$\begin{aligned}
p_0 + \sum_{i=1}^{\infty} p_i &= 1 \\
p_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\rho^i}{2^{i-1}} p_0 &= 1
\end{aligned}$$

Sumu vypočítáme podle vzorce pro geometrickou řadu $S = \frac{a_0}{1-q}$:

$$\left.\begin{aligned}
a_0 &= \rho p_0 \\
q &= \tfrac{\rho}{2}
\end{aligned}\right\} S = \frac{\rho p_0}{1 - \frac{\rho}{2}} = \frac{2\rho p_0}{2 - \rho}$$

$$\begin{aligned}
p_0 + \frac{2\rho p_0}{2-\rho} &= 1 \\
p_0 \left(1 + \frac{2\rho}{2-\rho}\right) &= 1 \\
p_0 &= \tfrac{2-\rho}{2+\rho}
\end{aligned}$$

Průměrná délka fronty

Vypočteme takto:

$$L_w = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p_{k+2}$$

kde k je počet požadavků ve frontě (1 až nekonečno). Počítáme od p_{k+2}, protože fronta začíná ve stavu p_3.

$$
\begin{aligned}
L_w &= \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{\rho^{k+2}}{2^{k+1}} \cdot \frac{2-\rho}{2+\rho} = \frac{1}{2+\rho} \cdot S \\
S &= 1 \cdot \frac{\rho^3}{4}(2-\rho) + 2 \cdot \frac{\rho^4}{8}(2-\rho) + 3 \cdot \frac{\rho^5}{16}(2-\rho) + 4 \cdot \frac{\rho^6}{32}(2-\rho) + \ldots = \\
&= \frac{\rho^3}{2} - \frac{\rho^4}{4} + \frac{\rho^4}{2} - \frac{\rho^5}{4} + \frac{3\rho^5}{8} - \frac{3\rho^6}{16} + \frac{\rho^6}{4} - \frac{\rho^7}{8} + \ldots = \\
&= \frac{\rho^3}{2} + \frac{\rho^4}{4} + \frac{\rho^5}{8} + \frac{\rho^6}{16} + \ldots = \\
&= \frac{\frac{\rho^3}{2}}{1 - \frac{\rho}{2}} = \frac{\rho^3}{2-\rho} \\
L_w &= \frac{1}{2+\rho} \cdot \frac{\rho^3}{2-\rho} \\
L_w &= \frac{\rho^3}{4-\rho^2}
\end{aligned}
$$