Graafien automorfismiryhmät

Juuso Valli

25. 4. 2018

Tiivistelmä

Määritellään graafien automorfismiryhmät, selvitetään joidenkin graafiluokkien automorfismiryhmät, todistetaan Fruchtin teoreema uudella konstruktiolla.

Sisältö

1 Määritelmiä ja merkintöjä

Olkoon V äärellinen joukko. Olkoon $E(V) = \{\{u, v\} \mid u, v \in V, u \neq v\}$ joukon V alijoukkojen joukko, jonka jäsenet sisältävät täsmälleen kaksi eri solmua. Olkoon *graafi* $G = (V, E), E \subseteq E(V)$. Joukkoa V kutsutaan graafin G *solmuiksi*, ja joukkoa E kutsutaan *kaariksi*. Solmuja joiden välillä on kaari kutsutaan *naapureiksi*. Annetun solmun kaikkien naapureiden joukkoa kutsutaan solmun *naapurustoksi*. Solmut eivät sisälly omaan naapurustoonsa. Annetun graafin solmujoukosta kätetään merkintää V_G, ja kaarijoukosta merkintää E_G. Kaaresta $\{u, v\}$ käytetään merkintää uv. Huomaa, että näillä merkinnöillä $uv = vu$. Yksinkertaisuuden vuoksi solmuista käytetään myös merkintää $v \in G$ merkinnän $v \in V_G$ sijaan.

Olkoot G ja H graafeja. Graafit G ja H ovat *isomorfiset* $G \simeq H$ mikäli on olemassa bijektio $f : V_G \to V_H$ siten, että

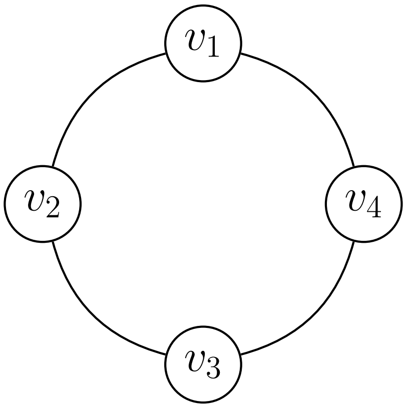
$$uv \in E_G \iff f(u)f(v) \in E_H$$

kaikilla $u, v \in G$.

Tällaisia bijektioita kutsutaan *isomorfismeiksi.*

Graafin G *automorfismit* ovat sen isomorfismeja itsensä kanssa. Triviaalisti nähdään, että identiteettikuvaus on kaikkien graafien automorfismi, mutta graafeilla voi olla myös muita automorfismeja.

Esimerkki 1. Olkoon graafi $G = (\{v_1, v_2, v_3, v_4\}, \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_1\})$.



Olkoon kuvaus $f : V_G \to V_G, f(v_1) = v_2, f(v_2) = v_3, f(v_3) = v_4, f(v_4) = v_1$. Kuvaus f on selvästi bijektio. Se, että kuvaus f on automorfismi voidaan tarkistaa suoraan määritelmästä.

E_G	$f(u)f(v)$	$f^{-1}(u)f^{-1}(v)$
v_1v_2	v_2v_3	v_4v_1
v_2v_3	v_3v_4	v_1v_2
v_3v_4	v_4v_1	v_2v_3
v_4v_1	v_1v_2	v_3v_4

Huomautus 1. Kirjallisuudessa käytetään merkintää G sekä ryhmistä että graafeista. Väärinkäsitysten välttämiseksi sovitaan, että G viittaa aina graafiin ja ryhmästä käytetään merkintää R.

Olkoon R ryhmä, jolla on aliryhmät H ja K.

Ryhmä R on aliryhmiensä *suora tulo* (merkitään $R = H \times K$) mikäli seuraavat kolme ehtoa ovat voimassa:

$$R = HK, H \cap K = \{1\}, hk = kh \ \forall h \in H, k \in K$$

Ryhmä R on aliryhmiensä *(sisäinen) puolisuora tulo* (merkitään $R = H \rtimes K$) mikäli seuraavat kolme ehtoa ovat voimassa:

$$R = HK, H \cap K = \{1\}, H \trianglelefteq R$$

Olkoot H, K mielivaltaisia ryhmiä, ja ryhmähomomorfismi $\tau : K \to \mathrm{Aut}(H)$. Merkitään $\tau_k = f(k)$. Ryhmien *(ulkoinen) puolisuora tulo*, merkitään $H \rtimes_\tau K$, on karteesinen tulo $H \times K$ varustettuna tulolla $(h_1, k_1)(h_2, k_2) = (h_1\tau_{k_1}(h_2), k_1k_2)$.

Määritelmät ovat mukailtuja lähteistä [3] [2].

2 Automorfismiryhmä

Olkoon $\mathrm{Aut}(G)$ graafin G automorfismien joukko.

Lemma 1. Kuvausten kompositio on binäärioperaatio $\circ : \mathrm{Aut}(G) \times \mathrm{Aut}(G) \to \mathrm{Aut}(G)$.

Todistus. Olkoot $u, v \in G$. Olkoon $f, g \in \mathrm{Aut}(G)$.

$$uv \in E_G \overset{g \in \mathrm{Aut}(G)}{\Longleftrightarrow} g(u)g(v) \in E_G \overset{f \in \mathrm{Aut}(G)}{\Longleftrightarrow} f(g(u))f(g(v)) \in E_G$$

joten $f \circ g \in \mathrm{Aut}(G)$. □

Lemma 2. Jokaisella graafilla on identiteettikuvaus, joka on automorfismi.

Todistus. Olkoot $u, v \in G$. Olkoon $\mathrm{id} : V_G \to V_G, \mathrm{id}(x) = x \ \forall x \in V_G$.

$$uv \in E_G \overset{\mathrm{id}(x)=x}{\Longleftrightarrow} \mathrm{id}(u)\mathrm{id}(v) \in E_G$$

joten $\mathrm{id} \in \mathrm{Aut}(G)$. $\square$

Lemma 3. Automorfismin f käänteiskuvaus f^{-1} on automorfismi.

Todistus. Olkoot $u, v \in G$.

$$f^{-1}(u)f^{-1}(v) \in E_G \overset{f\in\mathrm{Aut}(G)}{\Longleftrightarrow} f(f^{-1}(u))f(f^{-1}(v)) \in E_G \Leftrightarrow uv \in E_G$$

joten $f^{-1} \in \mathrm{Aut}(G)$. $\square$

Lause 2. *Pari* $(\mathrm{Aut}(G), \circ)$ *on ryhmä.*

Todistus. Lemman 1 mukaan $\circ$ on $\mathrm{Aut}(G)$:n binäärioperaatio. Assosiatiivisuus on selvä kuvausten komposition assosiatiivisuuden perusteella. Lemman 2 mukaan jokainen $\mathrm{Aut}(G)$ sisältää identiteettikuvauksen id, joka on ryhmän neutraalialkio. Lemman 3 mukaan jokaisella automorfismilla f on käänteisalkio $f^{-1} \in \mathrm{Aut}(G)$ siten, että $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}$.

$\square$

Graafin automorfismiryhmää kutsutaan myös graafin symmetriaryhmäksi.

Huomautus 2. Graafien automorfismiryhmät eivät yleisesti ole kommutatiivisia.
Tämä nähdään helposti vastaesimerkin kautta. Tarkastellaan esimerkin 1 mukaista graafia. Olkoon f esimerkissä esitetty automorfismi. Olkoon kuvaus $g : V_G \to V_G, g(v_1) = v_1, g(v_2) = v_4, g(v_3) = v_3, g(v_4) = v_2$. Kuvaus g on selvästi myös graafin G automorfismi. Mikäli automorfismiryhmä olisi kommutatiivinen, olisi $f \circ g = g \circ f$. Kirjoittamalla kuvaukset auki nähdään, että $f \circ g(v_1) = f(g(v_1)) = f(v_1) = v_2$, mutta toisaalta $g \circ f(v_1) = g(f(v_1)) = g(v_2) = v_4$, mistä seuraa ristiriita.

Esimerkki 3. Esimerkin 1 mukaisen graafin symmetriaryhmä $\mathrm{Aut}(G)$ on isomorfinen diedriryhmän D_4 kanssa. Yleisemmin n:n solmun rengasgraafi on isomorfinen diedriryhmän D_n kanssa.

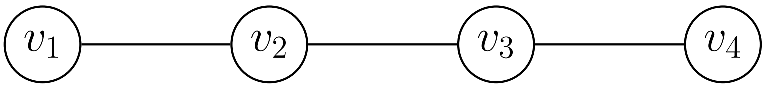
Olkoon G n:n solmun rengasgraafi, ja v_i sen i:nnes solmu jossakin järjestyksessä. Solmujen orientaatiolla tarkoitetaan sitä, ovatko alkiot indeksoitu myötä- vai vastapäivään.

Jokainen automorfismi joko säilyttää solmujen orientaation tai kääntää sen. Tästä voidaan määritellä homomorfismi $\phi : \mathrm{Aut}(G) \to C_2$, missä $\phi(f) = 0$ mikäli f säilyttää solmujen orientaation, muulloin $\phi(f) = 1$. Homomorfismin ϕ ydin $\mathrm{Ker}(\phi) = \{f_i \in \mathrm{Aut}(G), o \leq i < n \mid \forall 0 \leq j < n : f_i(v_j) =$

$v_{i+j \pmod n}\}$ muodostuu kuvauksista, jotka siirtävät graafin solmuja kääntämättä niiden orientaatiota. Tämä on isomorfinen ryhmän C_n kanssa. Olkoot kuvaus $\mathrm{rev} \in \mathrm{Aut}(G) : \mathrm{rev}(v_i) = v_{n-1-i}$. Selvästi $\mathrm{rev} \circ \mathrm{rev} = \mathrm{id}$, joten $\langle \mathrm{rev} \rangle$ määrittää kahden alkion aliryhmän, joka leikkaus aliryhmän $\mathrm{Ker}(\phi)$ kanssa on $\mathrm{Ker}(\phi) \cap \langle rev \rangle = \{\mathrm{id}\}$.

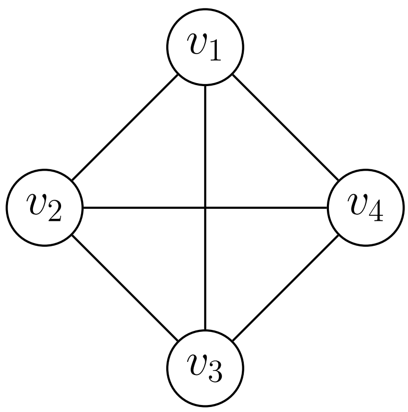
Olkoon $f \in \mathrm{Aut}(G)$ mielivaltainen, ja $0 \leq i < n$ siten, että $f(v_0) = v_i$. Nyt $(f_i^{-1} \circ f)(0) = 0$, eli $(f_i^{-1} \circ f \in \langle \mathrm{rev} \rangle$. Tästä seuraa, että f voidaan esittää muodossa $f = f_i \circ \mathrm{rev}^k$ missä $k \in \{0, 1\}$. Tästä seuraa se, että $\mathrm{Aut}(G) = \mathrm{Ker}(\phi)\langle \mathrm{rev} \rangle$, mistä seuraa edellisten kohtien perusteella se, että $\mathrm{Aut}(G) = \mathrm{Ker}(\phi) \rtimes \langle \mathrm{rev} \rangle \simeq C_n \rtimes_\tau C_2$, jossa $\tau : C_2 \to \mathrm{Aut}(C_n), \tau(0) = \mathrm{id}, \tau(1) = c_i \mapsto c_{n-1-i}$.

Esimerkki 4. Suoran graafin symmetriaryhmä on C_2.



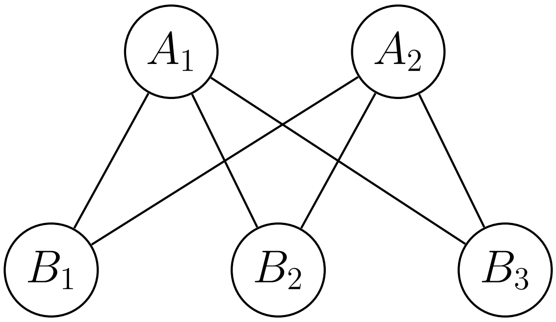
Suoran graafin päädyissä olevilla solmujen aste on 1, ja kaikkien muiden solmujen aste on 2. Tästä seuraa se, että graafin päätysolmut voidaan kuvata vain päätysolmuihin, sillä isomorfismit säilyttävät solmujen asteen. Yhden päätysolmujen kuvan määrääminen riittää määräämään koko graafin kuvan, joten mahdollisia kuvauksia on vain kaksi: id ja kuvaus f, joka kuvaa solmun v_i solmuksi v_{n-i+1}. Koska $f \circ f = \mathrm{id}$, graafin automorfismiryhmä on C_2.

Esimerkki 5. Täyden graafin K_n symmetriaryhmä on S_n.



Koska jokainen solmu on kaikkien muiden solmujen naapuri, jokainen K_n:n bijektio itsensä kanssa on automorfismi. Tästä seuraa se, että graafin K_n automorfismiryhmä on $Sym(K_n) \simeq S_n$.

Esimerkki 6. Täysin kaksijakoisen graafin $K_{nm}, n \neq m$ symmetriaryhmä on $S_n \times S_m$.



Olkoot $A, B \subset G_v$ graafin ylä- ja alakomponentit. Olkoot $H = \{f \in \mathrm{Aut}(G) : f|_A = \mathrm{id}\}, K = \{f \in \mathrm{Aut}(G) : f|_B = \mathrm{id}\}$. Kumpikin osajoukko on selvästi aliryhmä, sillä $(f \circ g)|_X = \mathrm{id}$ jos $f|_X = \mathrm{id}, g|_X = \mathrm{id}$. Lisäksi nähdään, että $H \cap K = \{\mathrm{id}\}$.

Määritellään funktion jako seuraavasti:

$$f_X(x) = \begin{cases} f(x) & \text{jos } x \in X \\ x & \text{jos } x \notin X \end{cases}$$

Mielivaltainen automorfismi f voidaan jakaa kahteen osaan joukkojen A ja B mukaan, josta saadaan $f = f_A \circ f_B, f_A \in K, f_B \in H$. Tästä seuraa, että $G = HK$.

Olkoot $h \in H, k \in K$. Tapauksessa $x \in A$:

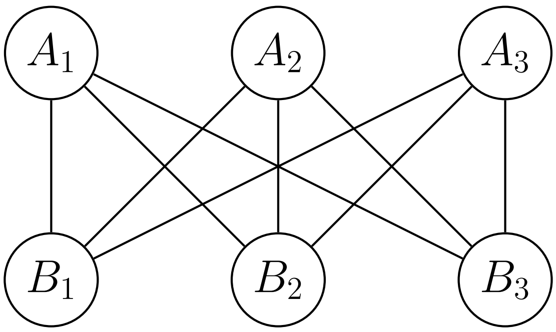
$$(h \circ k)(x) = (h \circ \mathrm{id})(x) = (\mathrm{id} \circ h)(x) = (k \circ h)(x)$$

Toisaalta tapauksessa $x \in B$:

$$(h \circ k)(x) = (\mathrm{id} \circ k)(x) = (k \circ \mathrm{id})(x) = (k \circ h)(x)$$

Eli $hk = kh$. Tästä seuraa, että $\mathrm{Aut}(G) \simeq H \times K = S_n \times S_m$.

Esimerkki 7. Täysin kaksijakoisen graafin K_{nn} symmetriaryhmä on $S_n^2 \rtimes C_2$.



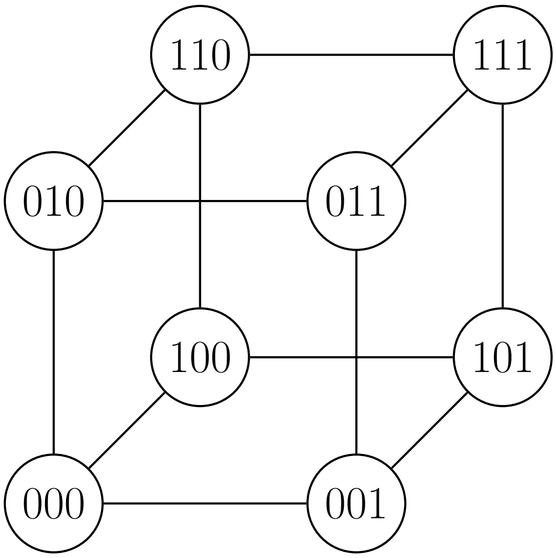
Olkoot $A, B \subset G_v$ graafin ylä- ja alakomponenit. Jokaisella automorfismilla joko $f(A) = A$ tai $f(A) = B$. Määritellään kuvaus $\phi : \mathrm{Aut}(G) \to C_2$, jossa

$$\phi(f) = \begin{cases} 0 & \text{jos } f(A) = A \\ 1 & \text{jos } f(A) = B \end{cases}$$

Kuvaus ϕ on selvästi homomorfismi.

Homomorfismin ϕ ydin on esimerkin 6 nojalla S_n^2. Määritellään homomorfismi $\sigma : C_2 \to \mathrm{Aut}(G)$ siten, että 0 kuvautuu identiteettikuvauksesi ja 1 kuvautuu kuvaukseksi, joka vaihtaa A:n ja B:n alkiot mutta säilyttää niiden sisäisen järjestyksen. Ryhmä C_2 operoi sillä joukossa $\mathrm{Aut}(G)$, joten $\mathrm{Aut}(G) \simeq S_n^2 \rtimes_\sigma C_2$.

Esimerkki 8. Hamming-graafi on graafi, jonka solmut vastaavat n:n merkin pituisia binäärijonoja, eli $\mathbb{Z}_2^n$:n alkioita. Kahden solmun välillä on kaari mikäli solmuja vastaavat binäärijonot poikkeavat täsmälleen yhdellä merkillä. Hamming-graafin voidaan ajatella kuvaavan n-ulotteisen hyperkuution kulmia.



Tutkitaan hamming-graafien automorfismiryhmää.

Käytetään tässä seuraavia merkintöjä:

$u + v = (u_1 + v_1, \ldots, u_n + v_n) \in \mathbb{Z}_2^n$

$1_i \in \mathbb{Z}_2^n$ missä 1_i:n i:s merkki on 1, muut 0.

$\bar{0} \in \mathbb{Z}_2^n$ missä kaikki merkit ovat 0.

Selvästi $\forall u \in \mathbb{Z}_2^n : u + u = \bar{0}$.

Olkoot G hamming-graafi ja f sen automorfismi. Olkoot $u \in G$ ja $v = f(u)$. Koska jokainen solmun u naapuri kuvatuu solmun v naapuriksi, yhden merkin muuttaminen alkukuvassa u muuttaa yhden merkin kuvassa v. Automorfismi f ei voi muuttaa samaa solmun v merkkiä solmun u naapurustossa, koska muuten f kuvaisi kaksi solmun u naapuria samaksi solmuksi. Voidaan ajatella, että f permutoi merkkien paikkoja solmun u ympäristössä.

Olkoot $0 < i, j \leq n, i \neq j$. Solmut $u + 1_i$ ja $u + 1_j$ ovat solmun u naapureita, joiden kuvat poikkeavat solmusta v joillakin indekseillä $i' \neq j'$. Solmun u lisäksi on olemassa vain yksi toinen solmu joka on solmujen $u + 1_i$ ja $u + 1_j$ naapureita: $u + 1_i + 1_j$. Sitä vastaava kuva voidaan esittää kahdella tavalla: $f(u + 1_i + 1_j) = f(u + 1_i) + 1_{j''} = f(u + 1_j) + 1_{i''}$ joillakin indekseillä $i'' \neq j', j'' \neq i'$. Tästä seuraa, että $v + 1_{i'} + 1_{j''} = v + 1_{j'} + 1_{i''} \Leftrightarrow 1_{i'} = 1_{i'} \wedge 1_{j'} = j_{j''}$, eli automorfismin f muodostamat merkkipermutaatiot eivät riipu solmun u valinnasta. Voidaan siis määritellä kuvaus $\phi : \mathrm{Aut}(G) \to S_n$, joka kuvaa automorfismit niiden merkkipermutaatioiksi.

Olkoot $f_1, f_2 \in \mathrm{Aut}(G)$.

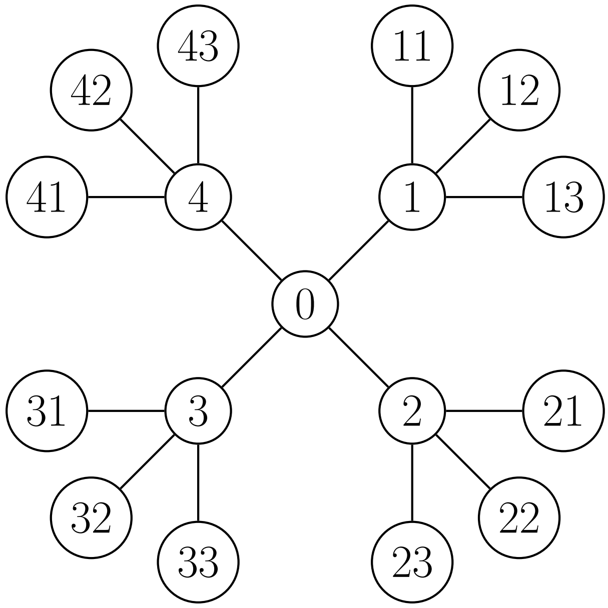
$$\forall u \in \mathbb{Z}_2^n, 0 < i \leq n : (f_1 \circ f_2)(u + 1_i) = f_1(f_2(u + 1_i)) = \\ f_1(f_2(u) + 1_{\phi(f_2)(i)}) = f_1(f_2(u)) + 1_{(\phi(f_1)\circ\phi(f_2))(i)}$$

Tästä seuraa, että $\phi(f_1 \circ f_2) = \phi(f_1) \circ \phi(f_2)$, eli kuvaus ϕ on homomorfismi.

Tarkastellaan kuvauksen ϕ ydintä. Symmetrisen ryhmän S_n neutraalialkio on identiteettikuvaus id. Automorfismin f kuva $\phi(f)$ on identiteettikuvaus jos ja vain jos $\forall u \in G, 0 < i \leq n : f(u + 1_i) = f(u) + 1_i$. Toisaalta $u = \sum k \in I 1_k$ jonkin indeksijoukon $I \subset \{1, \ldots, n\}$ yli, joten $f(u) = u + f(\bar{0})$. Solmun $\bar{0}$ mahdolliset kuvat määrävät siis kuvauksen ϕ ytimen alkiot. Olkoot $f_1, f_2 \in \mathrm{Ker}(\phi)$. $(f_1 \circ f_2)(u) = u + f_1(\bar{0}) + f_2(\bar{0})$, joten $\mathrm{Ker}(\phi) \simeq C_2^n$. Toisaalta joukko $H = \{f \in \mathrm{Aut}(G) : f(\bar{0}) = \bar{0}\} \simeq S_n$ muodostaa myös $\mathrm{Aut}(G)$:n aliryhmän, sillä pelkät merkkipermutaatiot ovat myös automorfismeja. Koska H ei muuta merkkejä, ja $\mathrm{Ker}(\phi)$ ei permutoi merkkien paikkoja, $H \cap \mathrm{Ker}(\phi) = \{\mathrm{id}\}$. Koska $\mathrm{Ker}(\phi)$ on homomorfismin ydin, $\mathrm{Ker}(\phi) \trianglelefteq \mathrm{Aut}(G)$.

Automorfismiryhmä $\mathrm{Aut}(G)$ ei sisällä muita aliryhmiä, sillä mielivaltainen automorfismi voidaan esittää edellä mainittujen aliryhmien avulla. Tästä seuraa, että $\mathrm{Aut}(G) = \mathrm{Ker}(\phi) \rtimes H \simeq C_2^n \rtimes_\tau S_n$, jossa $\tau : S_n \to \mathrm{Aut}(C_2^n)$ siten, että $\phi \circ \tau = \mathrm{id}$.

Esimerkki 9. Olkoon G seuraava graafi:



Käytetään alkiosta 0 termiä runko, alkioista $0 \dots 4$ termiä oksa ja muista alkioista termiä lehti. Helposti nähdään, että graafin G automorfismit säilyttävät rungon paikallaan, kuvaavat oksat oksiksi ja lehdet lehdiksi. Lisäksi saman oksan lehdet pysyvät yhdessä. Oksat voivat kaikki vaihtaa paikkaa keskenään, joten jokainen automorfismi f määrää oksien jonkin permutaation. Olkoon kuvaus $\phi : \mathrm{Aut}(G) \to S_4$ siten, että $f \in \mathrm{Aut}(G)$ kuvautuu oksien permutaatioksi. Kuvaus ϕ on selvästi homomorfismi, ja sen ytimessä olevat automorfismit säilyttävät siis oksat paikallan. Koska lehtiä voi permutoida vapaasti annetun oksan ympärillä ja lehtiryppäät eivät vaikuta toisiinsa, koko ydin saadaan lehtien permutaatioryhmien suorana tulona: $\mathrm{Ker}(\phi) \simeq S_3^4$.

Määritellään homomorfismi $\sigma : S_4 \to \mathrm{Aut}(G)$ siten, että S_4:n alkio kuvautuu automorfismiksi joka permutoi oksia syötealkion tavoin, mutta säilyttää lehtien luonnollisen järjestyksen. Ryhmä S_4 operoi tällä homomorfismilla joukossa $\mathrm{Aut}(G)$, joten saadaan $\mathrm{Aut}(G) \simeq S_3^4 \rtimes S_4$.

3 Fruchtin teoreema

Lause 10. *Olkoon R äärellinen ryhmä. On olemassa äärellinen graafi G siten, että* $\mathrm{Aut}(G) \simeq R$.

Todistus. Tutkitaan ensin väritettyä ja suunnattua Cayleyn graafia, ja esitellään menetelmä jolla voidaan siirtyä värittömiin ja suuntaamattomiin graafeihin. Väritetyn ja suunnatun graafin automorfismit määritellään ilmeisellä tavalla.

Olkoot S ryhmän R generaattorijoukko ja C $|S|$:n värin joukko. Määritellään bijektio $\lambda : S \to C$, joka määrittää siis joukon R generaattoreiden värityksen.

Olkoon G suunnattu ja väritetty graafi, jonka solmut vastaavat ryhmän R alkioita bijektion $\alpha : R \to V_G$ avulla. Merkitään $v_a = \alpha(a)$. Graafin suunnatut kaaret ovat $E_G = \{(a, ab) : a \in R, b \in S\}$. Annetun kaaren (a, ab) väri on $\lambda(b)$.

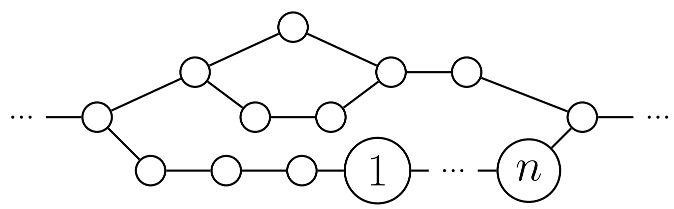
Määritellään ryhmän R mielivaltaisia alkioita a vastaavat kuvaukset $f_a : G \to G, f_a(v_b) = v_{ab}$. Kuvaus f_a on automorfismi, sillä

$$\begin{aligned} uv \in E_G \quad &\Leftrightarrow \exists b \in S : \alpha^{-1}(u) = \alpha^{-1}(v)b \\ &\Leftrightarrow \exists b \in S : a\alpha^{-1}(u) = a\alpha^{-1}(v)b \\ &\Leftrightarrow f_a(u)f_a(v) \in E_G \end{aligned}$$

Olkoon $f \in \mathrm{Aut}(G)$ mielivaltainen. Yksittäisen solmun kuva riittää määräämään kuvauksen f täysin, sillä kuvan $f(v_a)$ naapureilla on aina täsmälleen yksi mahdollinen kuva joka säilyttää graafin kaaret. Selvästi $\exists b \in R : f(v_a) = v_{ba}$ joten $f = f_b$.

Edellisen nojalla voimme määritellä kuvauksen $\phi : R \to \mathrm{Aut}(G) : \phi(a) = f_a$, joka on isomorfismi.

Tutkitaan lisäksi miten voidaan konstruoida väritön ja suuntaamaton graafi G' jolla $\mathrm{Aut}(G') \simeq \mathrm{Aut}(G) \simeq R$. Korvataan graafin väritetyt ja suunnatut kaaret aligraafeilla, jotka ovat epäsymmetrisiä ja sellaisia, että vain samaa väriä vastaavat aligraafit ovat isomorfisia keskenään. Esimerkiksi seuraavalla tavalla:



missä jokainen väri korvataan n solmun ketjun sisältävällä aligraafilla, jossa n vastaa värin numerointia. Aligraafin ylemmän komponentin orientaatio vastaa alkuperäisen kaaren suuntaa. Näin saadaan suuntaamaton, väritön graafi G'. Huomataan, että aligraafityypit eivät ole keskenään isomorfismisia, sillä jokainen sisältää eri määrän solmuja. Jokainen aligraafi sisältää täsmälleen yhden 5-syklin, joka on epäsymmetrisesti kiinnitetty aligraafiin. Muut aligraafin solmut määräytyvät 5-syklin mukaan. Graafi ei sisällä muita 5-syklejä, sillä jokainen muu sykli sisältää vähintään 6 solmua. Tästä seuraa se, että $\mathrm{Aut}(G) \simeq \mathrm{Aut}(G')$. $\square$

Roberto Frucht todisti Lauseen 10 ensimmäisen kerran vuonna 1938 [1].

Viitteet

[1] Roberto Frucht. Herstellung von graphen mit vorgegebener abstrakter gruppe. *Compositio Math*, 6(23):239–250, 1938.

[2] Tero Harju. Lecture notes of graph theory. pages 4–5, 2007.

[3] Markku Koppinen. Ryhmäteoria. pages 1–14, 2007.