Graafien automorfismiryhmä

Juuso Valli

22. 4. 2018

Tiivistelmä

Tutkitaan graafien muodostamia automorfismiryhmiä sekä mielivaltaista ryhmää vastaavan graafin konstruoimista.

Sisältö

1 Määritelmiä ja merkintöjä

Olkoon V äärellinen joukko. Olkoon $E(V) = \{\{u, v\} | u, v \in V, u \neq v\}$ joukon V alijoukkojen joukko, jonka jäsenet sisältävät täsmälleen kaksi eri solmua. Olkoon *graafi* $G = (V, E), E \subseteq E(V)$. Joukkoa V kutsutaan graafin G *solmuiksi*, ja joukkoa E kutsutaan *kaariksi*. Solmuja joiden välillä on kaari kutsutaan *naapureiksi*. Annetun solmun kaikkien naapureiden joukkoa kutsutaan solmun *naapurustoksi*. Annetun graafin solmujoukosta kätetään merkintää V_G, ja kaarijoukosta merkintää E_G. Kaaresta $\{u, v\}$ käytetään merkintää uv. Huomaa että näillä merkinnöillä $uv = vu$. Yksinkertaisuuden vuoksi solmuista käytetään myös merkintää $v \in G$ merkinnän $v \in V_G$ sijaan.

Olkoot G ja H graafeja. Graafit G ja H ovat *isomorfiset* $G \cong H$ mikäli on olemassa bijektio $f : V_G \to V_H$ siten, että

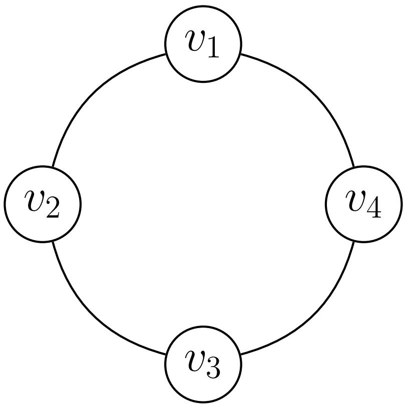
$$uv \in E_G \iff f(u)f(v) \in E_H$$

kaikilla $u, v \in G$.

Tällaisia bijektioita kutsutaan *isomorfismeiksi.*

Graafin G *automorfismit* ovat sen isomorfismeja itsensä kanssa. Triviaalisti nähdään että identiteettikuvaus on kaikkien graafien automorfismi, mutta graafeilla voi olla myös muita automorfismeja.

Esimerkki 1. Olkoon graafi $G = (\{v_1, v_2, v_3, v_4\}, \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_1\})$.



Olkoon kuvaus $f : V_G \to V_G, f(v_1) = v_2, f(v_2) = v_3, f(v_3) = v_4, f(v_4) = v_1$. Kuvaus f on selvästi bijektio. Se, että kuvaus f on automorfismi voidaan tarkistaa suoraan määritelmästä.

E_G	$f(u)f(v)$	$f^{-1}(u)f^{-1}(v)$
v_1v_2	v_2v_3	v_4v_1
v_2v_3	v_3v_4	v_1v_2
v_3v_4	v_4v_1	v_2v_3
v_4v_1	v_1v_2	v_3v_4

Huomautus 1. Kirjallisuudessa käytetään merkintää G sekä ryhmistä että graafeista. Väärinkäsitysten välttämiseksi sovitaan, että G viittaa aina graafiin ja ryhmästä käytetään merkintää R.

Olkoon R ryhmä, jolla on aliryhmät H ja K.
Ryhmä R on aliryhmiensä *suora tulo* (merkitään $R = H \times K$) mikäli seuraavat kolme ehtoa ovat voimassa:

$$R = HK, H \cap K = \{1\}, hk = kh \; \forall h \in H, k \in K$$

Ryhmä R on aliryhmiensä *puolisuora tulo* (merkitään $R = H \rtimes K$) mikäli seuraavat kolme ehtoa ovat voimassa:

$$R = HK, H \cap K = \{1\}, H \trianglelefteq R$$

2 Automorfismiryhmä

Olkoon $Aut(G)$ graafin G automorfismien joukko.

Lemma 1. Kuvausten kompositio on binäärioperaatio $\circ : Aut(G) \times Aut(G) \to Aut(G)$.

Todistus. Olkoot $u, v \in G$. Olkoon $f, g \in Aut(G)$.

$$uv \in E_G \xLeftrightarrow{g \in Aut(G)} g(u)g(v) \in E_G \xLeftrightarrow{f \in Aut(G)} f(g(u))f(g(v)) \in E_G$$

joten $f \circ g \in Aut(G)$. □

Lemma 2. Jokaisella graafilla on identiteettikuvaus, joka on automorfismi.

Todistus. Olkoot $u, v \in G$. Olkoon $id : V_G \to V_G, id(x) = x \; \forall x \in V_G$.

$$uv \in E_G \xLeftrightarrow{id(x)=x} id(u)id(v) \in E_G$$

joten $id \in Aut(G)$. □

Lemma 3. Automorfismin f käänteiskuvaus f^{-1} on automorfismi.

Todistus. Olkoot $u, v \in G$.

$$f^{-1}(u)f^{-1}(v) \in E_G \xLeftrightarrow{f \in Aut(G)} f(f^{-1}(u))f(f^{-1}(v)) \in E_G \Leftrightarrow uv \in E_G$$

joten $f^{-1} \in Aut(G)$. □

Lause 2. *Pari* $(Aut(G), \circ)$ *on ryhmä.*

Todistus. Lemman 1 mukaan $\circ$ on $Aut(G)$:n binäärioperaatio. Assosiatiivisuus on selvä kuvausten komposition assosiatiivisuuden perusteella. Lemman 2 mukaan jokainen $Aut(G)$ sisältää identiteettikuvauksen id, joka on ryhmän neutraalialkio. Lemman 3 mukaan jokaisella automorfismilla f on käänteisalkio $f^{-1} \in Aut(G)$ siten, että $f \circ f^{-1} = id$.

$\square$

Graafin automorfismiryhmää kutsutaan myös graafin symmetriaryhmäksi.

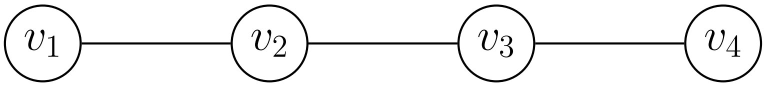
Huomautus 2. Graafien automorfismiryhmät eivät yleisesti ole kommutatiivisia.
Tämä nähdään helposti vastaesimerkin kautta. Tarkastellaan esimerkin 1 mukaista graafia. Olkoon f esimerkissä esitetty automorfismi. Olkoon kuvaus $g : V_G \to V_G, g(v_1) = v_1, g(v_2) = v_4, g(v_3) = v_3, g(v_4) = v_2$. Kuvaus g on selvästi myös graafin G automorfismi. Mikäli automorfismiryhmä olisi kommutatiivinen, olisi $f \circ g = g \circ f$. Kirjoittamalla kuvaukset auki nähdään että $f \circ g(v_1) = f(g(v_1)) = f(v_1) = v_2$, mutta toisaalta $g \circ f(v_1) = g(f(v_1)) = g(v_2) = v_4$, mistä seuraa ristiriita.

Esimerkki 3. Esimerkin 1 mukaisen graafin symmetriaryhmä $Aut(G)$ on isomorfinen diedriryhmän D_4 kanssa. Yleisemmin n:n solmun rengasgraafi on isomorfinen diedriryhmän D_n kanssa. Tämä nähdään helposti tarkastelemalla $Aut(G)$:n ryhmätaulua. Otetaan $Aut(G)$:n alkioille käyttöön seuraavat merkinnät: $\alpha_{i,j} \in Aut(G), 0 < i \leq n, j \in \{0, 1\}$, siten että $\alpha_{i,j}$ kuvaa solmun v_1 alkioksi v_i ja kääntää rengasgraafin suunnan mikäli $j = 1$. Tällä tavoin määriteltyjen isomorfismien lisäksi $Aut(G)$:llä ei ole muita isomorfismeja.

Näitä merkintöjä käyttäen $Aut(G)$:n symmeriaryhmän ryhmätaulu on seuraavanlainen tapauksessa $n = 4$:

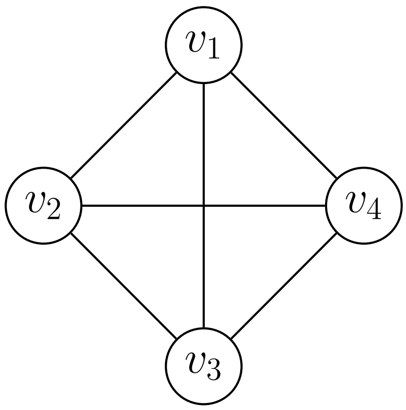
	$\alpha_{1,0}$	$\alpha_{2,0}$	$\alpha_{3,0}$	$\alpha_{4,0}$	$\alpha_{1,1}$	$\alpha_{2,1}$	$\alpha_{3,1}$	$\alpha_{4,1}$
$\alpha_{1,0}$	$\alpha_{1,0}$	$\alpha_{2,0}$	$\alpha_{3,0}$	$\alpha_{4,0}$	$\alpha_{1,1}$	$\alpha_{2,1}$	$\alpha_{3,1}$	$\alpha_{4,1}$
$\alpha_{2,0}$	$\alpha_{2,0}$	$\alpha_{3,0}$	$\alpha_{4,0}$	$\alpha_{1,0}$	$\alpha_{2,1}$	$\alpha_{3,1}$	$\alpha_{4,1}$	$\alpha_{1,1}$
$\alpha_{3,0}$	$\alpha_{3,0}$	$\alpha_{4,0}$	$\alpha_{1,0}$	$\alpha_{2,0}$	$\alpha_{3,1}$	$\alpha_{4,1}$	$\alpha_{1,1}$	$\alpha_{2,1}$
$\alpha_{4,0}$	$\alpha_{4,0}$	$\alpha_{1,0}$	$\alpha_{2,0}$	$\alpha_{3,0}$	$\alpha_{4,1}$	$\alpha_{1,1}$	$\alpha_{2,1}$	$\alpha_{3,1}$
$\alpha_{1,1}$	$\alpha_{1,1}$	$\alpha_{4,1}$	$\alpha_{3,1}$	$\alpha_{2,1}$	$\alpha_{1,0}$	$\alpha_{4,0}$	$\alpha_{3,0}$	$\alpha_{2,0}$
$\alpha_{2,1}$	$\alpha_{2,1}$	$\alpha_{1,1}$	$\alpha_{4,1}$	$\alpha_{1,1}$	$\alpha_{2,0}$	$\alpha_{1,0}$	$\alpha_{4,0}$	$\alpha_{1,0}$
$\alpha_{3,1}$	$\alpha_{3,1}$	$\alpha_{2,1}$	$\alpha_{1,1}$	$\alpha_{4,1}$	$\alpha_{3,0}$	$\alpha_{2,0}$	$\alpha_{1,0}$	$\alpha_{4,0}$
$\alpha_{4,1}$	$\alpha_{4,1}$	$\alpha_{3,1}$	$\alpha_{2,1}$	$\alpha_{3,1}$	$\alpha_{4,0}$	$\alpha_{3,0}$	$\alpha_{2,0}$	$\alpha_{3,0}$

Esimerkki 4. Suoran graafin symmetriaryhmä on C_2.



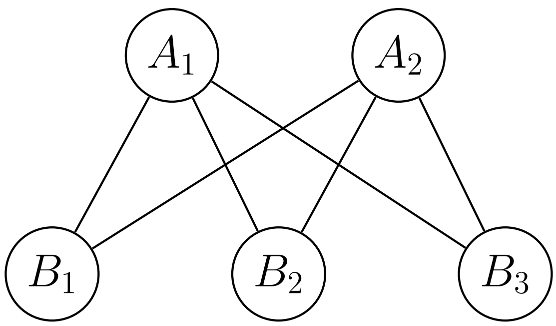
Suoran graafin päädyissä olevilla solmujen aste on 1, ja kaikkien muiden solmujen aste on 2. Tästä seuraa se, että graafin päätysolmut voidaan kuvata vain päätysolmuihin, sillä isomorfismit säilyttävät solmujen asteen. Yhden päätysolmujen kuvan määrääminen riittää määräämään koko graafin kuvan, joten mahdollisia kuvauksia on vain kaksi: id ja kuvaus f, joka kuvaa solmun v_i solmuksi v_{n-i+1}. Koska $f \circ f = id$, graafin automorfismiryhmä on C_2.

Esimerkki 5. Täyden graafin K_n symmetriaryhmä on S_n.



Koska jokainen solmu on kaikkien muiden solmujen naapuri, jokainen K_n:n bijektio itsensä kanssa on automorfismi. Tästä seuraa se, että graafin K_n automorfismiryhmä on $\Sigma(K_n) \simeq S_n$.

Esimerkki 6. Täysin kaksijakoisen graafin $K_{nm}, n \neq m$ symmetriaryhmä on $S_n \times S_m$.



Olkoot $A, B \subset G_v$ graafin ylä- ja alakomponentit. Olkoot $H = \{f \in Aut(G) : f|_A = id\}, K = \{f \in Aut(G) : f|_B = id\}$. Kumpikin osajoukko on selvästi aliryhmä, sillä $(f \circ g)|_X = id$ jos $f|_X = id, g|_X = id$. Lisäksi nähdään että $H \cap K = \{id\}$.

Määritellään funktion jako seuraavasti:

$$f_X(x) = \begin{cases} f(x) & \text{jos } x \in X \\ x & \text{jos } x \notin X \end{cases}$$

Mielivaltainen automorfismi f voidaan jakaa kahteen osaan joukkojen A ja B mukaan, josta saadaan $f = f_A \circ f_B, f_A \in K, f_B \in H$. Tästä seuraa että $G = HK$.

Olkoot $h \in H, k \in K$. Tapauksessa $x \in A$:

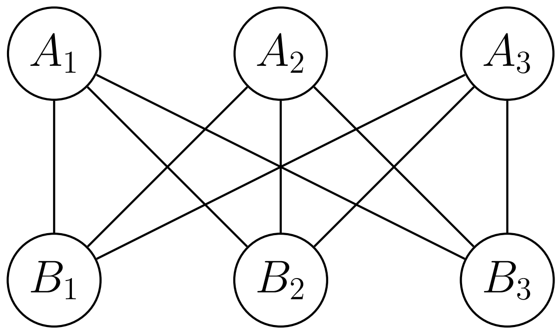
$$(h \circ k)(x) = (h \circ id)(x) = (id \circ h)(x) = (k \circ h)(x)$$

Toisaalta tapauksessa $x \in B$:

$$(h \circ k)(x) = (id \circ k)(x) = (k \circ id)(x) = (k \circ h)(x)$$

Eli $hk = kh$. Tästä seuraa että $Aut(G) = H \times K = S_n \times S_m$.

Esimerkki 7. Täysin kaksijakoisen graafin K_{nn} symmetriaryhmä on $S_n^2 \rtimes C_2$.



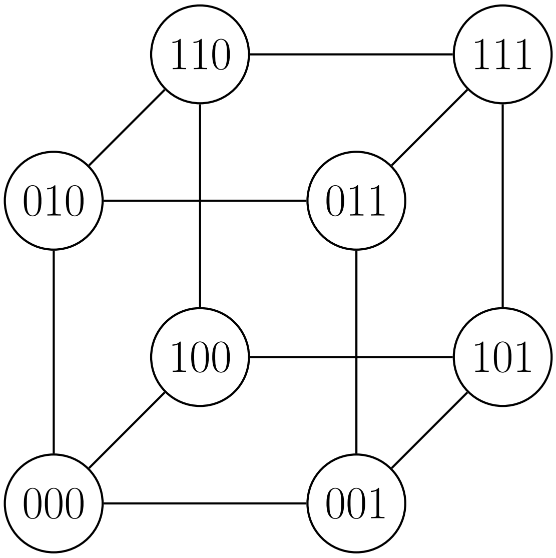
Olkoot $A, B \subset G_v$ graafin ylä- ja alakomponenit. Jokaisella automorfismilla joko $f(A) = A$ tai $f(A) = B$. Määritellään kuvaus $\phi : Aut(G) \to C_2$, jossa

$$\phi(f) = \begin{cases} 0 & \text{jos } f(A) = A \\ 1 & \text{jos } f(A) = B \end{cases}$$

Kuvaus ϕ on selvästi homomorfismi.

Homomorfismin ϕ ydin on esimerkin 6 nojalla S_n^2. Määritellään homomorfismi $\sigma : C_2 \to Aut(G)$ siten, että 0 kuvautuu identiteettikuvauksesi ja 1 kuvautuu kuvaukseksi, joka vaihtaa A:n ja B:n alkiot mutta säilyttää niiden sisäisen järjestyksen. Ryhmä C_2 operoi sillä joukossa $Aut(G)$, joten $Aut(G) = S_n^2 \rtimes C_2$.

Esimerkki 8. Hamming-graafi on graafi, jonka solmut vastaavat n:n merkin pituisia binäärijonoja, eli $\mathbb{Z}_2^n$:n alkioita. Kahden solmun välillä on kaari mikäli solmuja vastaavat binäärijonot poikkeavat täsmälleen yhdellä merkillä. Hamming-graafin voidaan ajatella kuvaavan n-ulotteisen hyperkuution kulmia.



Tutkitaan hamming-graafien automorfismiryhmää.

Käytetään tässä seuraavia merkintöjä:

$u + v = (u_1 + v_1, \ldots, u_n + v_n) \in \mathbb{Z}_2^n$
$1_i \in \mathbb{Z}_2^n$ missä 1_i:n i:s merkki on 1, muut 0.
$\bar{0} \in \mathbb{Z}_2^n$ missä kaikki merkit ovat 0.

Selvästi $\forall u \in \mathbb{Z}_2^n : u + u = \hat{0}$.

Olkoot G hamming-graafi ja f sen automorfismi. Olkoot $u \in G$ ja $v = f(u)$. Koska jokainen solmun u naapuri kuvatuu solmun v naapuriksi, yhden merkin muuttaminen alkukuvassa u muuttaa yhden merkin kuvassa v. Automorfismi f ei voi muuttaa samaa solmun v merkkiä solmun u naapurustossa, koska muuten f kuvaisi kaksi solmun u naapuria samaksi solmuksi. Voidaan ajatella, että f permutoi merkkien paikkoja solmun u ympäristössä.

Olkoot $0 < i, j \leq n, i \neq j$. Solmut $u + 1_i$ ja $u + i_j$ ovat solmun u naapureita, joiden kuvat poikkeavat solmusta v joillakin indekseillä $i' \neq j'$. Koska $v + 1_{i'} + 1_{j'} = v + 1_{j'} + 1_{i'}$ ja $f(u + 1_i + 1_j) = v + 1_{i'} + 1_{j'}$ nähdään että $f(u + 1_i + 1_j) + f(u + 1_i) = f(u + i_j) + f(u)$. Tästä seuraa se, että automorfismin f muodostamat merkkipermutaatiot eivät riipu solmun u valinnasta. Voidaan siis määritellä kuvaus $\phi : Aut(G) \to S_n$, joka kuvaa automorfismit niiden merkkipermutaatioiksi.

Olkoot $f_1, f_2 \in Aut(G)$.

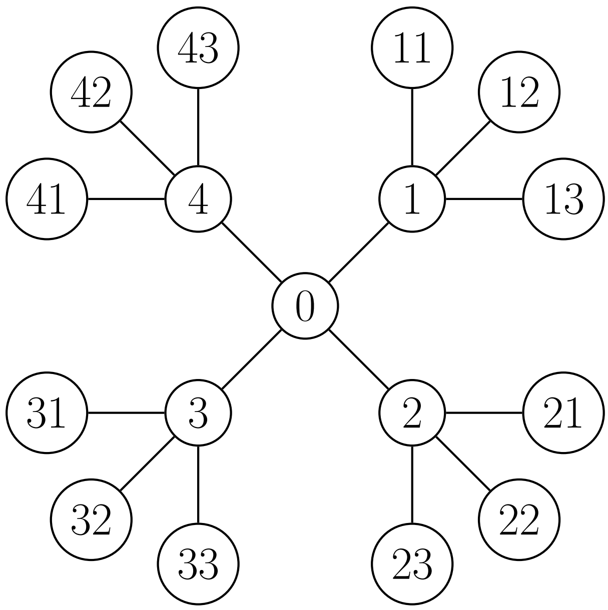
$$\forall u \in \mathbb{Z}_2^n, 0 < i \leq n : (f_1 \circ f_2)(u + 1_i) = f_1(f_2(u + 1_i)) =$$
$$f_1(f_2(u) + 1_{\phi(f_2)(i)}) = f_1(f_2(u)) + 1_{(\phi(f_1)\circ\phi(f_2))(i)}$$

Tästä seuraa, että $\phi(f_1 \circ f_2) = \phi(f_1) \circ \phi(f_2)$, eli kuvaus ϕ on homomorfismi.

Tarkastellaan kuvauksen ϕ ydintä. Symmetrisen ryhmän S_n neutraalialkio on identiteettikuvaus id. Automorfismin f kuva $\phi(f)$ on identiteettikuvaus jos ja vain jos $\forall u \in G, 0 < i \leq n : f(u + 1_i) = f(u) + 1_i$. Toisaalta $u = \Sigma 1_k$ jonkin indeksijoukon yli, joten $f(u) = u + f(\bar{0})$. Solmun $\bar{0}$ mahdolliset kuvat määrävät siis kuvauksen ϕ ytimen alkiot. Olkoot $f_1, f_2 \in Ker(\phi)$. $(f_1 \circ f_2)(u) = u + f_1(\bar{0}) + f_2(\bar{0})$, joten $Ker(\phi) \simeq C_2^n$. Toisaalta joukko $H = \{f \in Aut(G) : f(\hat{0}) = \hat{0}\} \simeq S_n$ muodostaa myös $Aut(G)$:n aliryhmän, sillä pelkät merkkipermutaatiot ovat myös automorfismeja. Koska H ei muuta merkkejä, ja $Ker(\phi)$ ei permutoi merkkien paikkoja, $H \cap Ker(\phi) = \{id\}$. Koska $Ker(\phi)$ on homomorfismin ydin, $Ker(\phi) \trianglelefteq Aut(G)$.

Automorfismiryhmä $Aut(G)$ ei sisällä muita aliryhmiä, sillä mielivaltainen automorfismi voidaan esittää edellä mainittujen aliryhmien avulla. Tästä seuraa että $Aut(G) = Ker(\phi) \rtimes H =\simeq C_2^n \rtimes S_n$.

Esimerkki 9. Olkoon G seuraava graafi:



Käytetään alkiosta 0 termiä runko, alkioista $0 \ldots 4$ termiä oksa ja muista alkioista termiä lehti. Helposti nähdään, että graafin G automorfismit säilyttävät rungon paikallaan, kuvaavat oksat oksiksi ja lehdet lehdiksi. Lisäksi saman oksan lehdet pysyvät yhdessä. Oksat voivat kaikki vaihtaa paikka keskenään, joten jokainen automorfismi f määrää oksien jonkin permutaation.

Olkoon kuvaus $\phi : Aut(G) \to S_4$ siten että $f \in Aut(G)$ kuvautuu oksien permutaatioksi. Kuvaus ϕ on selvästi homomorfismi, ja sen ytimessä olevat automorfismit säilyttävät siis oksat paikallan. Koska lehtiä voi permutoida vapaasti annetun oksan ympärillä ja lehtiryppäät eivät vaikuta toisiinsa, koko ydin saadaan lehtien permutaatioryhmien suorana tulona: $Ker(\phi) \simeq S_3^4$.

Määritellään homomorfismi $\sigma : S_4 \to Aut(G)$ siten, että S_4:n alkio kuvautuu automorfismiksi joka permutoi oksia syötealkion tavoin, mutta säilyttää lehtien luonnollisen järjestyksen. Ryhmä S_4 operoi tällä homomorfismilla joukossa $Aut(G)$, joten saadaan $Aut(G) \simeq S_3^4 \rtimes S_4$.

3 Fruchtin teoreema

Lause 10. *Olkoon R äärellinen ryhmä. On olemassa äärellinen graafi G siten, että $Aut(G) \simeq R$.*

Todistus. Olkoon G ryhmän R Cayleyn graafi, joka on väritetty ja suunnattu. Tutkitaan ensin väritetyn ja suunnatun graafin tapausta, ja esitellään menetelmä jolla voidaan siirtyä värittömiin ja suuntaamattomiin graafeihin.

Olkoon S ryhmän R generaattorijoukko. Cayleyn graafin konstruktion nojalla on olemassa bijektiot $\alpha : R \to V_G$ ja $\beta : R \times S \to E_G$.

Olkoot $a \in S$, $E_a = \{e \in E_G | \exists b \in R : \beta(b, a) = e\}$, ja $f_a : G \to G$ siten, että $\forall u \in G : f_a(u) = v, uv \in E_a$.

Kuvaus f_a on automorfismi, sillä

$$\begin{aligned} uv \in E_G \quad & \Leftrightarrow \exists b \in R : \alpha^{-1}(u)b = \alpha^{-1}(v) \\ & \Leftrightarrow \exists b \in R : \alpha^{-1}(u)ba = \alpha^{-1}(v)a \\ & \Leftrightarrow \exists b' = aba^{-1} \in R : \alpha^{-1}(u)ab' = \alpha^{-1}(v)a \\ & \Leftrightarrow f_a(u)f_a(v) \in E_G \end{aligned}$$

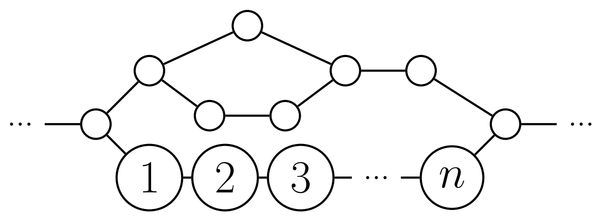
Olkoon $a \in R$. Koska alkio a voidaan esittää generoijien tulona $a = s_1 \dots s_n$, voidaan vastaava f_a määritellä generoijia vastaavien kuvausten kompositiona $f_a = f_{s_1} \circ \dots \circ f_{s_n}$.

Olkoot $a, b \in R$. Koska alkio ab voidaan esittää generoijien tulona $ab = a_1 \dots a_n b_1 \dots b_m$, kuvaus f_{ab} voidaan esittää muodossa $f_{ab} = f_{a_1} \circ \dots \circ f_{a_n} \circ f_{b_1} \circ \dots \circ f_{b_m}$, joka voidaan yhdistää muotoon $f_a \circ f_b$.

Olkoon $f \in Aut(G)$ mielivaltainen. Olkoot $a, b \in R$ siten, että $\exists c \in R : ac = b$. Koska kuvauksen alkupäätä voidaan siirtää kertomalla yhtälö $ac = b$ vasemmalta, nähdään että alkio c ei riipu a:n valinnasta, eli $f = f_c$ aiemman konstruktion mukaan.

Edellisen nojalla voimme määritellä kuvauksen $\phi : R \to Aut(G) : \phi(a) = f_a$, joka on isomorfismi.

Tutkitaan lisäksi miten voidaan konstruoida väritön ja suuntaamaton graafi G' jolla $Aut(G') \simeq Aut(G) \simeq R$. Korvataan graafin väritetyt ja suunnatut kaaret aligraafeilla, jotka ovat epäsymmetrisiä ja sellaisia, että vain samaa väriä vastaavat aligraafit ovat isomorfisia keskenään. Esimerkiksi seuraavalla tavalla:



missä jokainen väri korvataan n solmun ketjun sisältävällä aligraafilla, jossa n vastaa värin numerointia. Aligraafin ylemmän komponentin orientaatio vastaa alkuperäisen kaaren suuntaa. Näin saadaan suuntaamaton, väritön graafi G'. Voidaan sanoa että $Aut(G) \simeq Aut(G')$, koska jokaisesta alkuperäisen graafin solmusta lähtee yksi kopio kutakin aligraafityyppiä, aligraafit eivät sisällä omia symmetrioita ja aligraafit eivät ole keskenään isomorfisia. $\square$

4 Lähteet

László Babai: Automorphism groups, isomorphism, reconstruction, Budapest, 1994. Tero Harju: Lecture Notes on Graph Theory, Turku, Suomi, 2007. Markku Koppinen: Ryhmäteoria, Turku, Suomi, 2007.