Graafien automorfismiryhmä

Juuso Valli

24. 9. 2017

Tiivistelmä

Sisältö

1 Määritelmiä ja merkintöjä

Olkoon V äärellinen joukko. Olkoon $E(V) = \{\{u, v\} | u, v \in V, u \neq v\}$ joukon V alijoukkojen joukko, jonka jäsenet sisältävät täsmälleen kaksi eri solmua. Olkoon *graafi* $G = (V, E), E \subseteq E(V)$. Joukkoa V kutsutaan graafin G *solmuiksi*, ja joukkoa E kutsutaan *kaariksi*. Annetun graafin solmujoukosta kätetään merkintää G_V, ja kaarijoukosta merkintää G_E. Kaaresta $\{u, v\}$ käytetään merkintää uv. Huomaa että näillä merkinnöillä $uv = vu$. Yksinkertaisuuden vuoksi solmuista käytetään myös merkintää $v \in G$ merkinnän $v \in G_V$ sijaan.

Olkoon G ja H graafeja. Graafit G ja H ovat *isomorfiset* $G \cong H$ mikäli on olemassa bijektio $f : V_G \to V_H$ siten, että

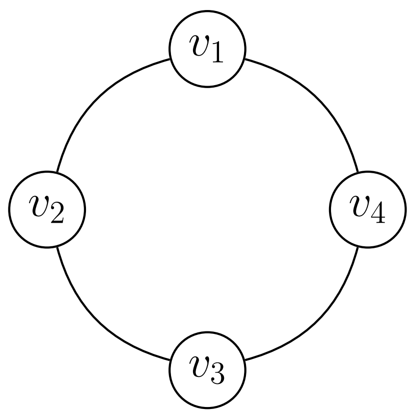
$$uv \in E_G \iff f(u)f(v) \in E_H$$

kaikilla $u, v \in G$.

Tällaisia bijektioita kutsutaan *isomorfismeiksi*.

Graafin G *automorfismit* ovat sen isomorfismeja itsensä kanssa. Triviaalisti nähdään että identiteettikuvaus on kaikkien graafien automorfismi, mutta graafeilla voi olla myös muita automorfismeja.

Esimerkki 1. Olkoon graafi $G = (\{v_1, v_2, v_3, v_4\}, \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_1\})$.



Olkoon kuvaus $f : V_G \to V_G, f(v_1) = v_2, f(v_2) = v_3, f(v_3) = v_4, f(v_4) = v_1$. Kuvaus f on selvästi bijektio. Se, että kuvaus f on automorfismi voidaan tarkistaa suoraan määritelmästä.

G_E	$f(u)f(v)$	$f^{-1}(u)f^{-1}(v)$
v_1v_2	v_2v_3	v_4v_1
v_2v_3	v_3v_4	v_1v_2
v_3v_4	v_4v_1	v_2v_3
v_4v_1	v_1v_2	v_3v_4

2 Automorfismiryhmä

Olkoon G_S graafin G automorfismien joukko.

Lemma 1. Kuvausten kompositio on binäärirelaatio $\circ : G_S \times G_S \to G_S$.

Todistus. Olkoon $u, v \in G$. Olkoon $f, g \in G_S$.

$$uv \in E_G \overset{g \in G_S}{\Longleftrightarrow} g(u)g(v) \in E_G \overset{f \in G_S}{\Longleftrightarrow} f(g(u))f(g(v)) \in E_G$$

joten $f \circ g \in G_S$. □

Lemma 2. Jokaisella graafilla on identiteettikuvaus, joka on automorfismi.

Todistus. Olkoon $u, v \in G$. Olkoon $id : G_V \to G_V, id(x) = x \forall x \in G_V$.

$$uv \in E_G \overset{id(x)=x}{\Longleftrightarrow} id(u)id(v) \in E_G$$

joten $id \in G_S$. □

Lemma 3. Automorfismin f käänteiskuvaus f^{-1} on automorfismi.

Todistus. Olkoon $u, v \in G$.

$$f^{-1}(u)f^{-1}(v) \in E_G \overset{f \in G_S}{\Longleftrightarrow} f(f^{-1}(u))f(f^{-1}(v)) \in E_G \Leftrightarrow uv \in E_G$$

joten $f^{-1} \in G_S$. □

Lause 2. *Pari* $(G_S, \circ)$ *on ryhmä.*

Todistus. Lemman 1 mukaan $\circ$ on G_S:n binäärirelaatio. Assosiatiivisuus on selvä kuvausten komposition assosiatiivisuuden perusteella. Lemman 2 mukaan jokainen G_S sisältää identiteettikuvauksen id, joka on ryhmän neutraalialkio. Lemman 3 mukaan jokaisella automorfismilla f on käänteiskuvaus $f^{-1} \in G_S$.

□

Graafin automorfismiryhmää kutsutaan myös graafin symmetriaryhmäksi.

Huomautus 1. Graafien automorfismiryhmät eivät yleisesti ole kommutatiivisia.
Tämä nähdään helposti vastaesimerkin kautta. Tarkastellaan esimerkin 1 mukaista graafia. Olkoon f esimerkissä esitetty automorfismi. Olkoon kuvaus $g : V_G \to V_G, g(v_1) = v_1, g(v_2) = v_4, g(v_3) = v_3, g(v_4) = v_2$. Kuvaus g on selvästi myös graafin G automorfismi. Mikäli automorfismiryhmä olisi kommutatiivinen, olisi $f \circ g = g \circ f$. Kirjoittamalla kuvaukset auki nähdään että

$f \circ g(v_1) = f(g(v_1)) = f(v_1) = v_2$, mutta toisaalta $g \circ f(v_1) = g(f(v_1)) = g(v_2) = v_4$, mistä seuraa ristiriita.

Esimerkki 3. Esimerkin 1 mukaisen graafin symmetriaryhmä on isomorfinen diedriryhmän D_4 kanssa.

Esimerkki 4. Suoran graafin symmetriaryhmä on C_2

Esimerkki 5. Puugraafin symmetriaryhmä on C_2

3 Fruchtin teoreema