Algoritmos y Estructuras de Datos I

Digesto de Axiomas y Teoremas Básicos

Cuantificadores generalizados

Axiomas

A1 (Rango vacío): $\langle \bigoplus i : False : T \rangle = e$

– e es el elemento neutro de $\oplus$: $a \oplus e = a$

A2 (Rango unitario): $\langle \bigoplus i : i = C : T.i \rangle = T.C$

– i no aparece en C

A3 (Partición de rango): $\langle \bigoplus i : R.i \vee S.i : T.i \rangle = \langle \bigoplus i : R.i : T.i \rangle \oplus \langle \bigoplus i : S.i : T.i \rangle$

– $\oplus$ es idempotente ($a \oplus a = a$) ó R y S son disjuntos (no hay i tal que $R.i \wedge S.i$)

A4 (Regla del término): $\langle \bigoplus i : R.i : T.i \oplus U.i \rangle = \langle \bigoplus i : R.i : T.i \rangle \oplus \langle \bigoplus i : R.i : U.i \rangle$

A5 (Término constante): $\langle \bigoplus i : R.i : C \rangle = C$

– i no aparece en C
– $C \oplus C = C$ ($\oplus$ es idempotente para C)
– R es no vacío

A6 (Distributividad): $\langle \bigoplus i : R.i : T.i \otimes C \rangle = \langle \bigoplus i : R.i : T.i \rangle \otimes C$

– i no aparece en C
– $\otimes$ distributivo con $\oplus$: $(a \otimes c) \oplus (b \otimes c) = (a \oplus b) \otimes c$
– R es no vacío, o el neutro de $\oplus$ es absorbente para $\otimes$

A7 (Anidado): $\langle \bigoplus i, j : R.i \wedge S.i.j : T.i.j \rangle = \langle \bigoplus i : R.i : \langle \bigoplus j : S.i.j : T.i.j \rangle \rangle$

A8 (Intercambio): $\langle \forall i : R.i : T.i \rangle \equiv \langle \forall i :: R.i \Rightarrow T.i \rangle$
$\langle \exists i : R.i : T.i \rangle \equiv \langle \exists i :: R.i \wedge T.i \rangle$

A9 (De Morgan): $\neg \langle \forall i : R.i : T.i \rangle \equiv \langle \exists i : R.i : \neg T.i \rangle$
$\neg \langle \exists i : R.i : T.i \rangle \equiv \langle \forall i : R.i : \neg T.i \rangle$

A10 (Definición de conteo): $\langle N\, i : R.i : T.i \rangle = \langle \sum i : R.i \wedge T.i : 1 \rangle$

Teoremas

T1 (Propiedad de máximo y mínimo): Si el rango R es no vacío entonces

$$z = \langle \text{Max } i : R.i : F.i \rangle \equiv \langle \exists i : R.i : z = F.i \rangle \wedge \langle \forall i : R.i : F.i \leq z \rangle$$
$$z = \langle \text{Min } i : R.i : F.i \rangle \equiv \langle \exists i : R.i : z = F.i \rangle \wedge \langle \forall i : R.i : z \leq F.i \rangle$$

T2 (Cambio de variable): $\langle \bigoplus i : R.i : T.i \rangle = \langle \bigoplus j : R.(f.j) : T.(f.j) \rangle$

– f tiene inversa en R
– j no aparece en R y T.

Algunos cuantificadores concretos

Cuantificador ($\bigoplus$)	Operador ($\oplus$)	Neutro (e)	Absorbente	Idempotente?	Distributiva ($\otimes$)
$\forall$	$\wedge$	$True$	$False$	sí	$\vee$
$\exists$	$\vee$	$False$	$True$	sí	$\wedge$
$\sum$	$+$	0	(no tiene)	no	$\times$
$\prod$	$\times$	1	0	no	
Max	max	$-\infty$	$+\infty$	sí	$+$
Min	min	$+\infty$	$-\infty$	sí	$+$

Cuantificador de Conteo N

*A continuación se listan los axiomas y teoremas para el cuantificador de conteo N. El cuantificador N tiene reglas especiales por ser **sólo una notación** para una forma particular del cuantificador de suma que se utiliza muy frecuentemente.*

AN11 (Definición de conteo):

$$\langle N\, i\ : R.i :\ T.i \,\rangle = \langle \sum i\ : R.i \wedge T.i :\ 1 \,\rangle$$

TN3 (Rango vacío):

$$\langle N\, i\ : False :\ T.i \,\rangle = 0$$

TN4 (Rango unitario):

$$\langle N\, i\ : i = C :\ T.i \,\rangle \;=\; \begin{array}{lll} (& T.C & \to\ 1 \\ \square & \neg\, T.C & \to\ 0 \\ ) & & \end{array}$$

TN5 (Partición de rango):

$$\langle N\, i\ : R.i \vee S.i :\ T.i \,\rangle = \langle N\, i\ : R.i :\ T.i \,\rangle + \langle N\, i\ : S.i :\ T.i \,\rangle$$

– R y S son disjuntos.

TN6 (Cambio de variable): Igual a Cambio de variable general.

$$\langle N\, i\ : R.i :\ T.i \,\rangle = \langle N\, j\ : R.(f.j) :\ T.(f.j) \,\rangle$$

– f tiene inversa en R.
– j no aparece en R y T.

*Las siguientes reglas **no valen o ni siquiera tienen sentido** para el cuantificador N:*

- *Regla del término*
- *Término constante*
- *Distributividad*
- *Anidado*