

ESTRUCTURAS I A

U

APUNTE DE CLASE

N

L

P

I
N
G
E
N
I
E
R
I
A



ING. ASDRÚBAL E. BOTTANI
ING. FEDERICO C. ANTI CO

EDICIÓN CORREGIDA
2018

SI NTESI S TEMATICA DE LA UNIDAD I

SI STEMAS PLANOS DE FUERZAS PRINCIPIOS FUNDAMENTALES

INDICE

1 NOCION DE FUERZA

2 PRIMER PRINCIPIO DE LA ESTATICA Y APLICACIONES

- *Descomposición ortogonal de una fuerza*
- *Resultante de n fuerzas concurrentes a un punto*
- *Descomposición de una fuerza en dos direcciones concurrentes*

3 SEGUNDO PRINCIPIO DE LA ESTATICA Y APLICACIONES

- *Equilibrio de tres o más fuerzas aplicadas en un punto*

4 SEGUNDO PRINCIPIO DE LA ESTATICA Y APLICACIONES

- *Teorema de transmisibilidad*
- *Caso de tres o más fuerzas concurrentes a un punto*

5 MOMENTO DE UNA FUERZA RESPECTO DE UN PUNTO

- *Definición*
- *Teorema de Varignon*
- *Aplicación al caso de Componentes ortogonales*
- *Pares de fuerzas o cuplas*
- *Traslación de fuerzas*
- *Fuerzas paralelas - Resultante*
- *Fuerzas paralelas - Equilibrio*
- *Fuerzas no concurrentes - Resultante*
- *Fuerzas no concurrentes - Equilibrio*

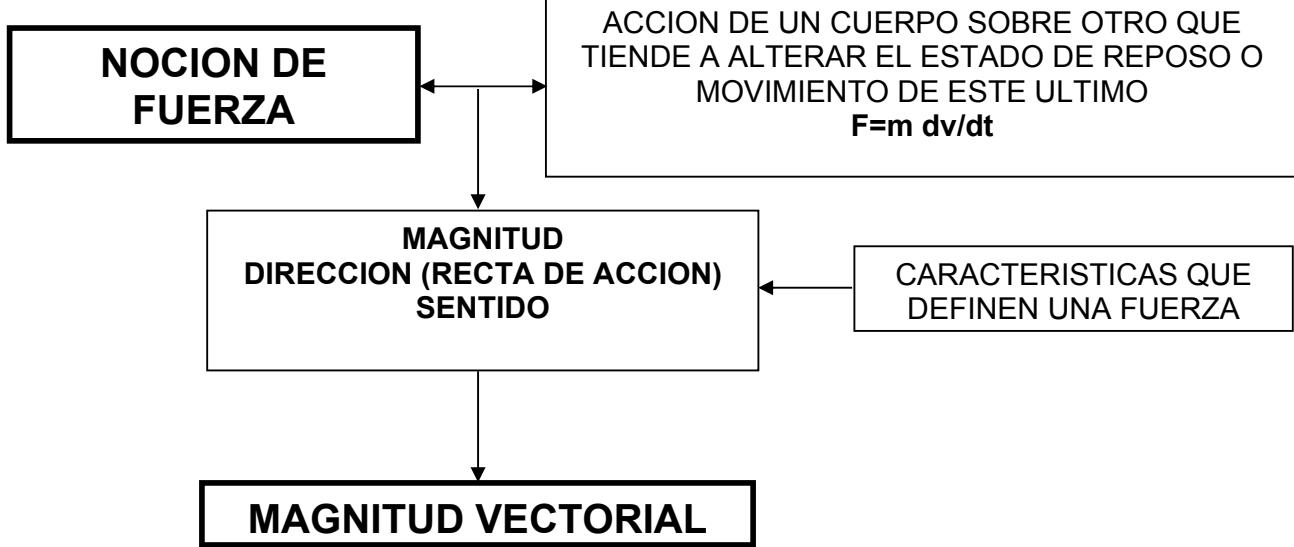
6 CUARTO PRINCIPIO DE LA ESTATICA – ACCION Y REACCION

- *Vínculos y reacciones*

SI NTESI S TEMATI CA DE LA UNI DAD I

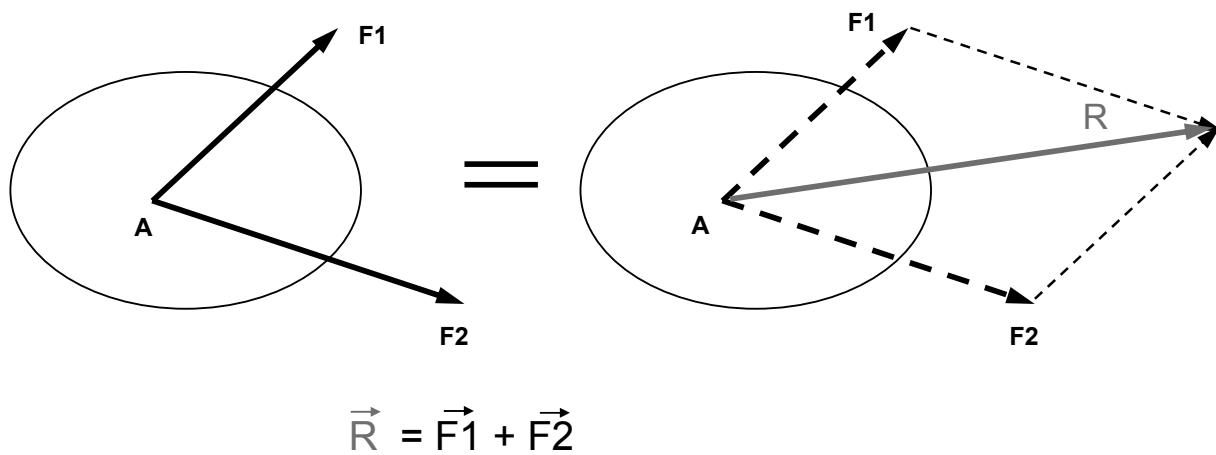
SI STEMAS PLANOS DE FUERZAS PRI NCI PI OS FUNDAMENTALES

1.- NOCION DE FUERZA



2. PRIMER PRINCIPIO DE LA ESTATICA (STEVINIUS 1586):

"La acción de dos fuerzas F_1 y F_2 aplicadas en un punto A de un cuerpo rígido es equivalente a la acción de una única fuerza llamada resultante R de F_1 y F_2 , aplicada en el mismo punto A y que se obtiene como la diagonal del paralelogramo que tiene como lados adyacentes a F_1 y F_2 ."

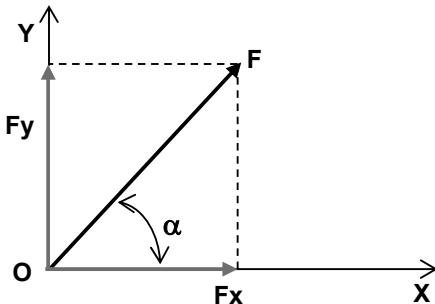


SI F_1 Y F_2 SON COLINEALES LA SUMA VECTORIAL SE TRANSFORMA EN SUMA ALGEBRAICA

APLICACIONES DEL PRIMER PRINCIPIO:

Descomposición y composición de fuerzas en el plano:

- Descomposición ortogonal de una fuerza:



DESCOMPOSICION:

$$F_x = F \cos \alpha$$

$$F_y = F \sin \alpha$$

COMPOSICION:

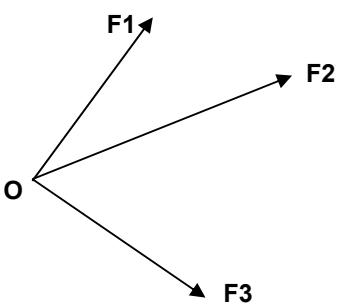
$$|F| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

$$\tan \alpha = \frac{F_y}{F_x}$$

Fx es positiva si coincide con x positivo

Fy es positiva si coincide con y positivo

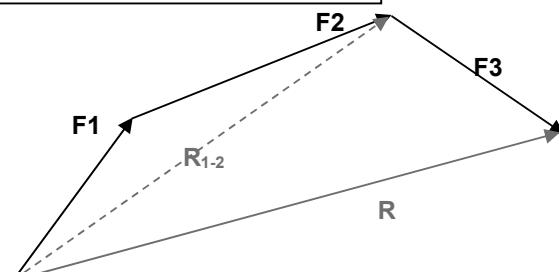
- Resultante de n fuerzas concurrentes a un punto: polígono de fuerzas



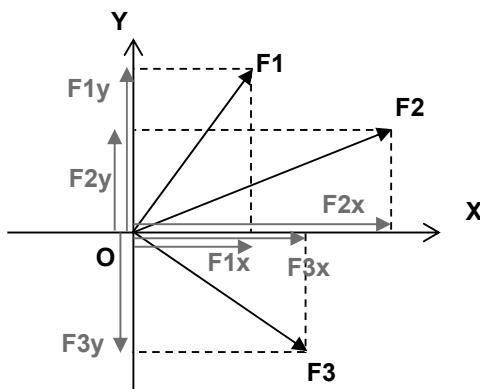
SOLUCION GRAFICA:

POLIGONO AUXILIAR DE FUERZAS

Construcción auxiliar dibujando cada fuerza una a continuación de la otra, siendo la resultante el vector con origen en el origen de la primera y extremo en el extremo de la última



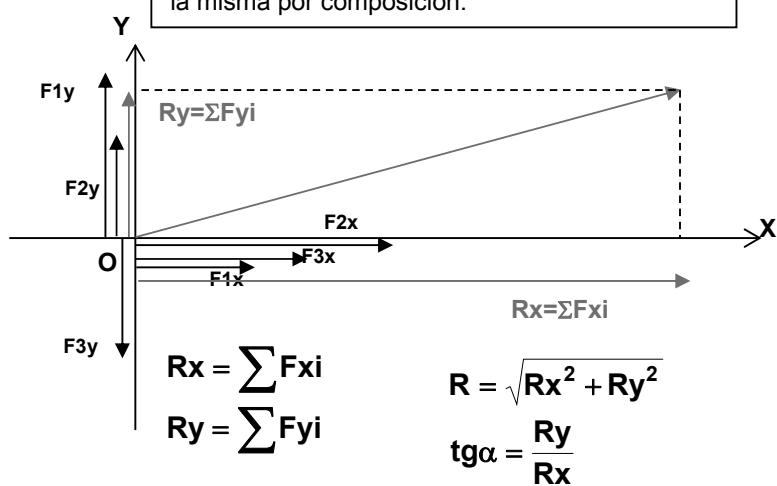
SOLUCION ANALITICA: PASO 1:
Se adopta un sistema de referencia ortogonal X e Y con origen en O
Descomposición de cada una de las fuerzas en sus componentes ortogonales F_{xi} y F_{yi}



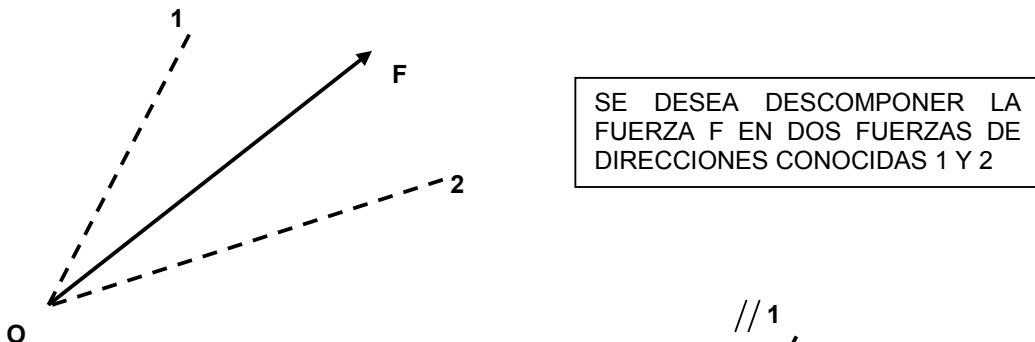
$$F_{xi} = F_i \cos \alpha_i$$

$$F_{yi} = F_i \sin \alpha_i$$

SOLUCION ANALITICA: PASO 2:
Obtención de cada una de las componentes R_x y R_y de la resultante y finalmente obtención de la misma por composición.

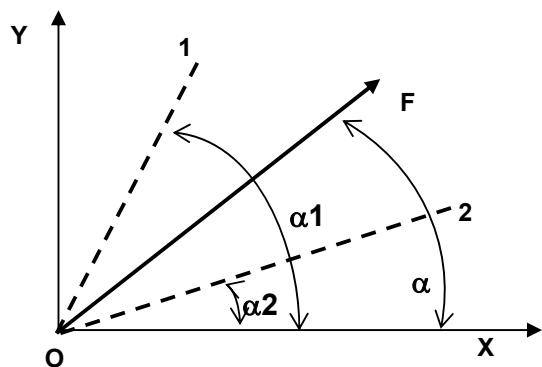
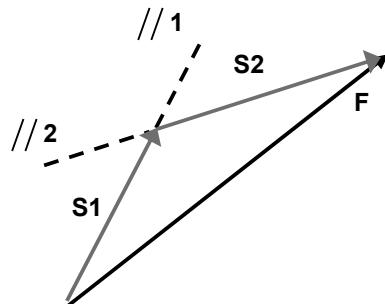


-Descomposición de una fuerza en dos direcciones concurrentes:

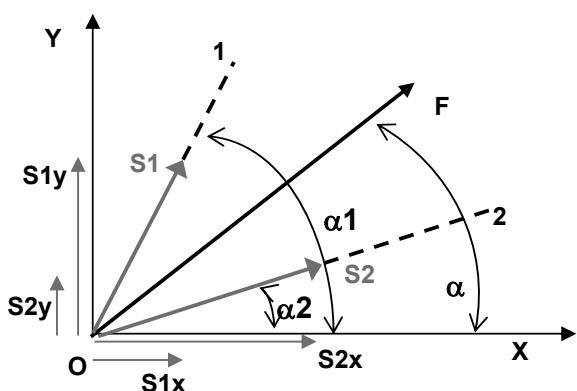


SE DESEA DESCOMONER LA FUERZA F EN DOS FUERZAS DE DIRECCIONES CONOCIDAS 1 Y 2

SOLUCION GRAFICA:
CONSTRUCCION AUXILIAR
Aplicando el principio del paralelogramo por el origen y extremo de f se trazan paralelas a 1 y 2 respectivamente obteniendo S_1 y S_2 .



SOLUCION ANALITICA:
PASO 1
Se elige un sistema ortogonal de referencia con origen en O .
 F , α_1 y α_2 son datos del problema



SOLUCION ANALITICA:
PASO 2
Se adopta un sentido arbitrario para las fuerzas S_1 y S_2 .
Se plantean dos ecuaciones algebraicas según cada uno de los ejes igualando la suma de cada componente de S_1 y S_2 en cada eje con la componente de F en ese eje. Las incógnitas son S_1 y S_2 . Si los resultados obtenidos tienen signo positivo significa que los sentidos adoptados son correctos, de lo contrario los sentidos reales son opuestos a los adoptados

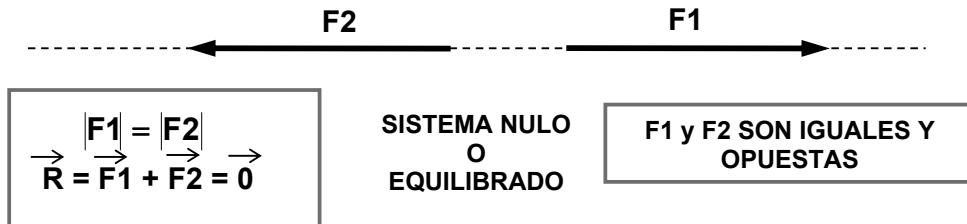
$$S_1 \cos \alpha_1 + S_2 \cos \alpha_2 = F \cos \alpha$$

$$S_1 \sin \alpha_1 + S_2 \sin \alpha_2 = F \sin \alpha$$

LA DESCOMPOSICION DE UNA FUERZA EN MAS DE DOS DIRECCIONES CONCURRENTES ES UN PROBLEMA QUE NO TIENE SOLUCION MEDIANTE EL USO DE CUACIONES ESTATICAS SOLAMENTE

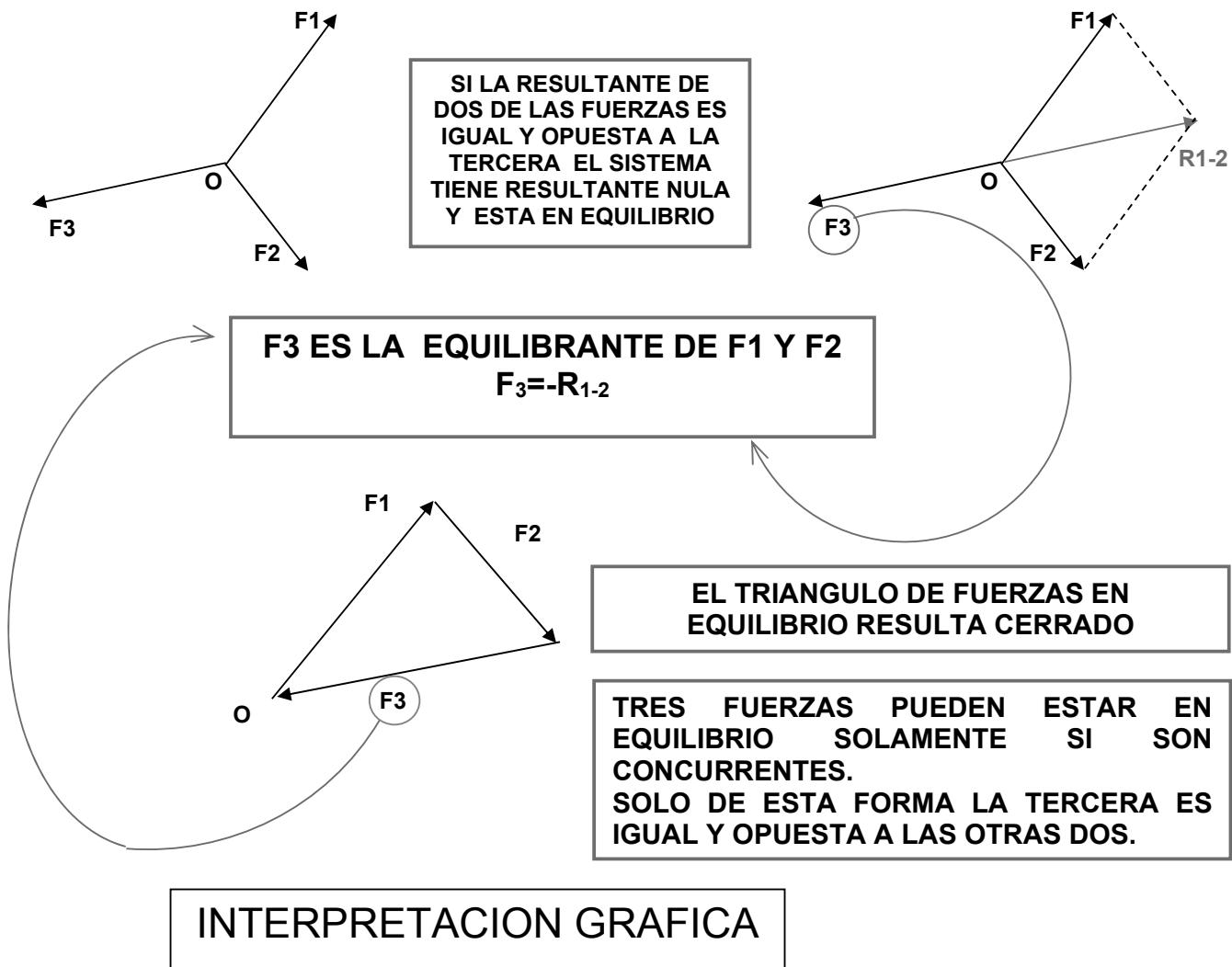
3. SEGUNDO PRINCIPIO DE LA ESTATICA:

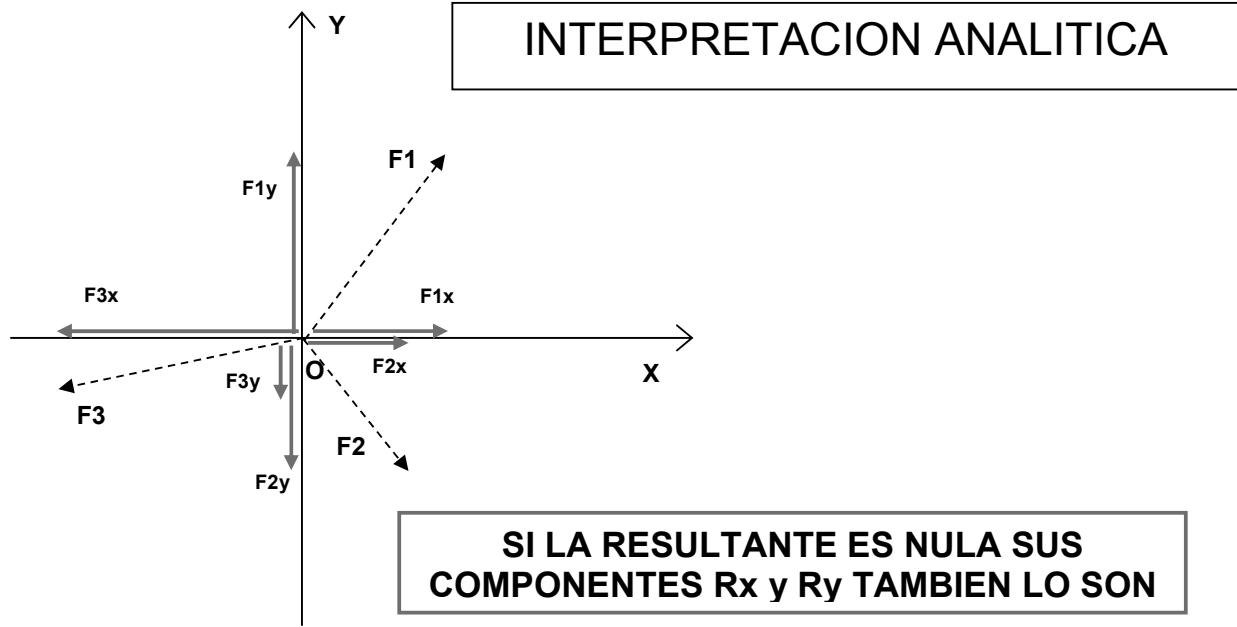
"Dos fuerzas F_1 y F_2 están en equilibrio únicamente si tienen la misma magnitud, la misma recta de acción y sentido opuesto."



APLICACIONES DEL SEGUNDO PRINCIPIO:

- *Equilibrio de tres o más fuerzas aplicadas en un punto*

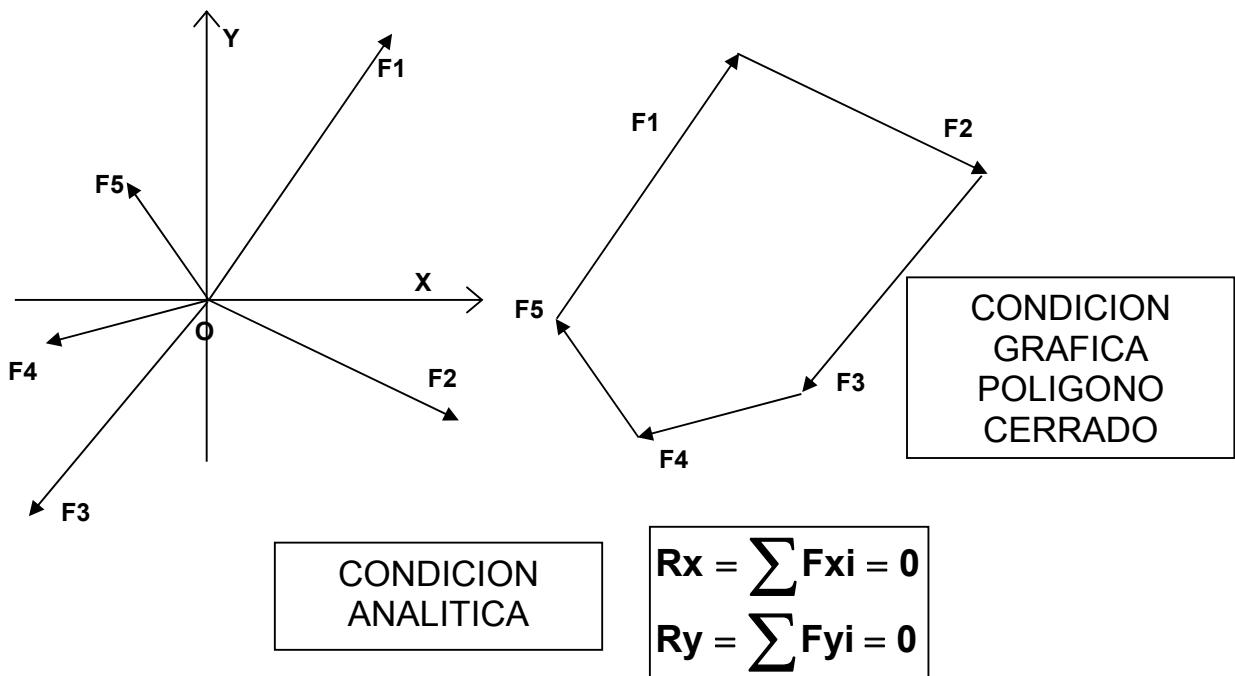




$$Rx = \sum F_{xi} = 0$$

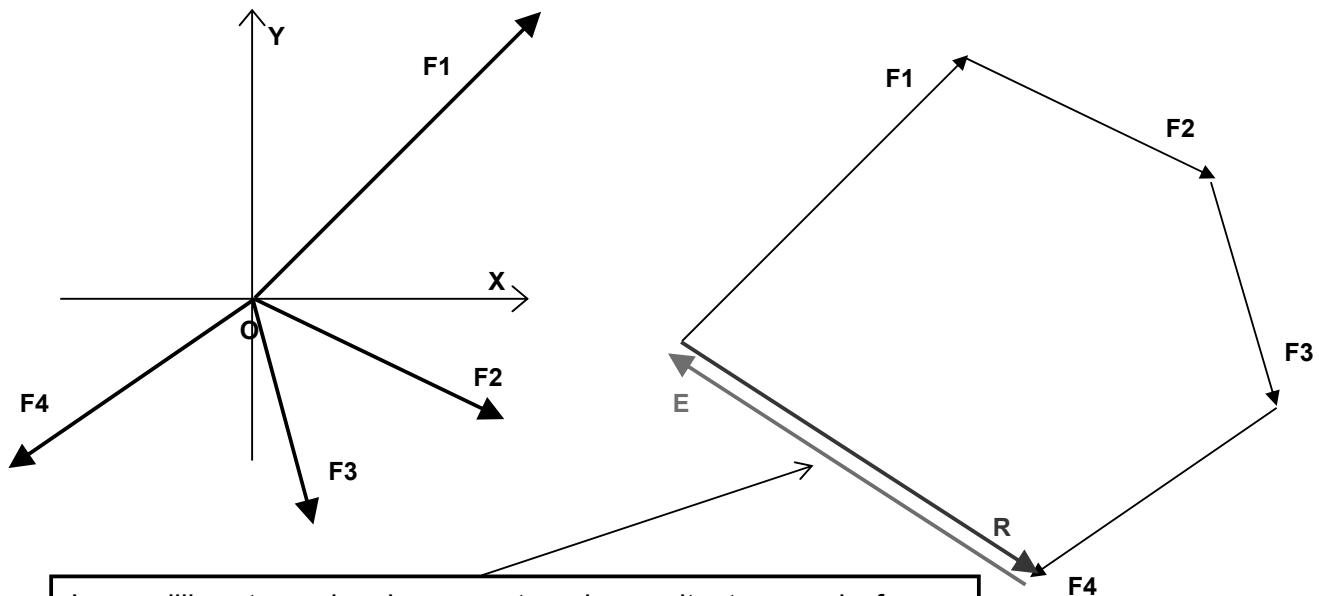
$$Ry = \sum F_{yi} = 0$$

Lo indicado para el caso de tres fuerzas se puede generalizar a más de tres fuerzas aplicadas en un punto:



-Aplicación: Dadas n fuerzas concurrentes encontrar la equilibrante del sistema.

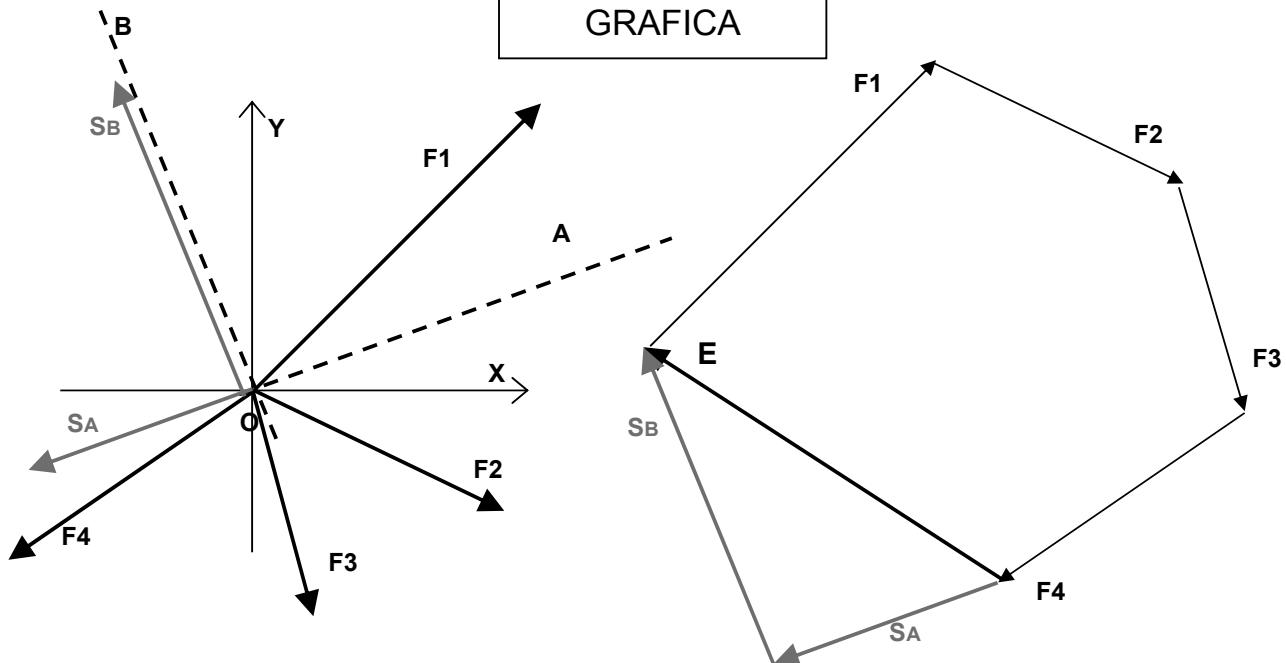
Establecer el número mínimo de direcciones necesarias para poder generar siempre la equilibrante del sistema

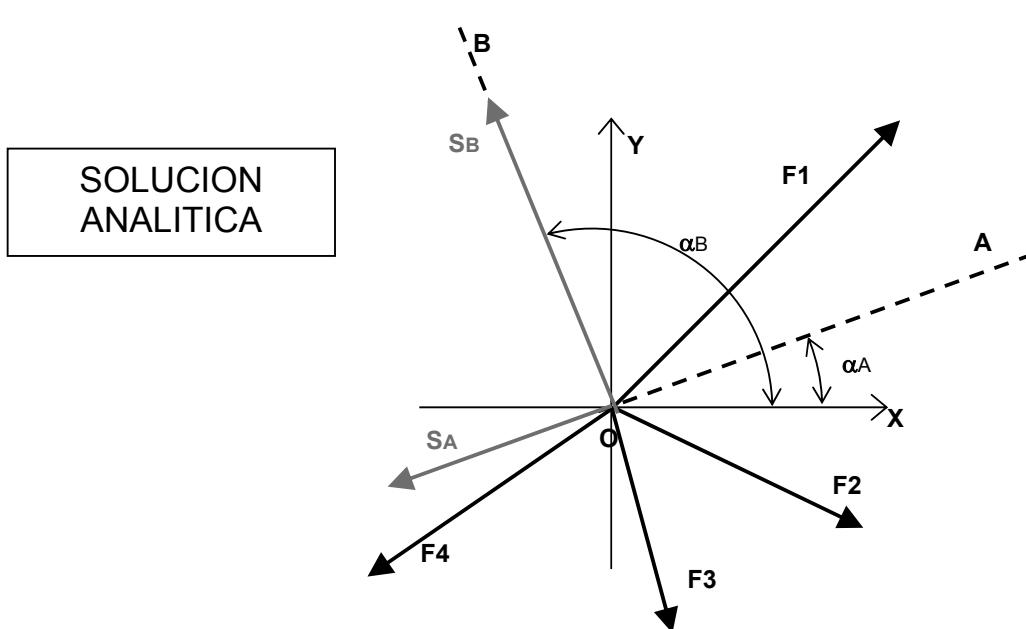


La equilibrante es igual y opuesta a la resultante y es la fuerza que cierra el polígono de fuerzas

El número mínimo de direcciones para poder generar siempre esta equilibrante para cualquier conjunto de fuerzas F1 a F4 es dos porque E cambia su orientación de acuerdo a los valores de las fuerzas F1 a F4

SOLUCION GRAFICA

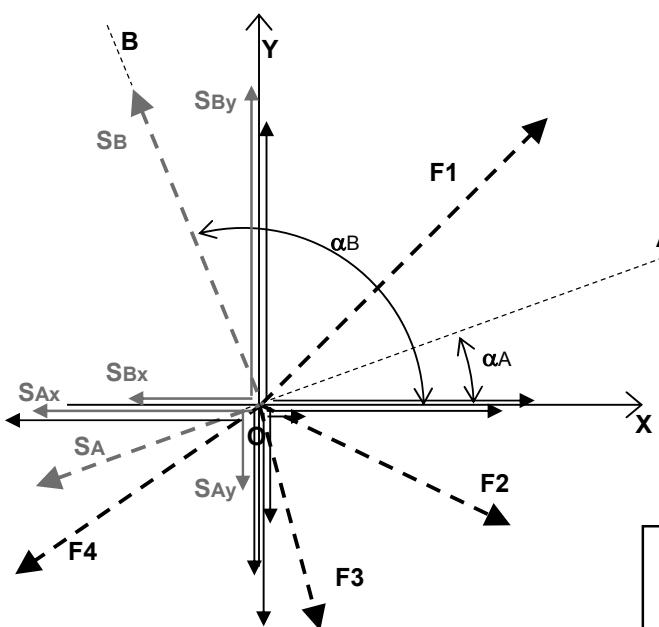




Datos del Problema: Fuerzas F1 a F4 (en general F1 a Fn)
Direcciones A y B

Paso 1: Se asumen sentidos arbitrarios de las incógnitas S_A y S_B

Paso 2: Planteo de la nulidad de la resultante de todo el sistema de fuerzas F1 a Fn, S_A y S_B, aplicando nulidad según los ejes ortogonales X e Y



$$R_x = \sum F_{xi} = 0$$

$$R_y = \sum F_{yi} = 0$$

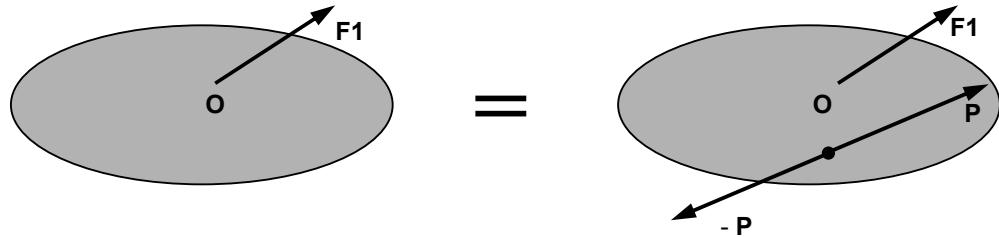
$$-S_A \cos \alpha_A - S_B \cos \alpha_B + \sum F_i \cos \alpha_i = 0$$

$$+ S_A \cdot \operatorname{sen} \alpha_A + S_B \cdot \operatorname{sen} \alpha_B + \sum F_i \operatorname{sen} \alpha_i = 0$$

Paso 3: La solución del sistema es la solución del problema. Si los resultados son positivos los sentidos supuestos son los reales

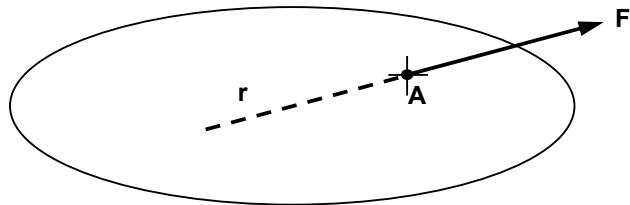
4. TERCER PRINCIPIO DE LA ESTATICA:

“La acción de un sistema de fuerzas dado no se altera si se agrega o quita a estas fuerzas cualquier otro sistema de fuerzas equilibrado”.



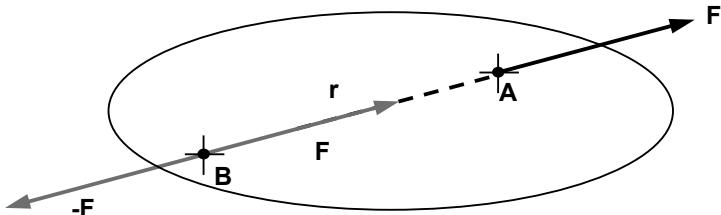
APLICACIONES DEL TERCER PRINCIPIO:

-Teorema de transmisibilidad:



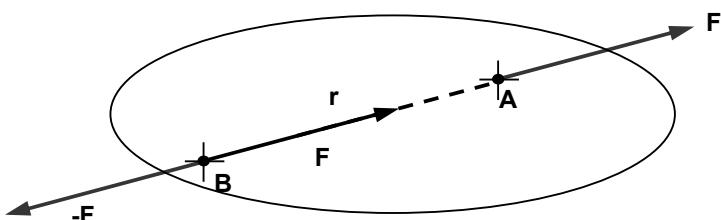
1

FUERZA F CON RECTA DE ACCION r APlicada EN A



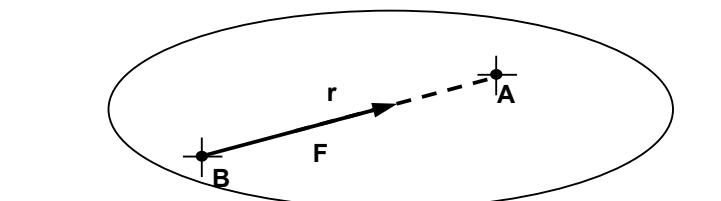
2

SE AGREGA SISTEMA NULO F Y -F EN B LAS CONDICIONES NO SE ALTERAN



3

SE QUITA SISTEMA NULO F EN A Y -F EN B LAS CONDICIONES NO SE ALTERAN



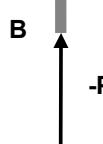
4

LA FUERZA F SE HA TRASLADADO A LO LARGO DE SU RECTA DE ACCION AL PUNTO B SIN QUE LAS CONDICIONES ESTATICAS SE ALTEREN

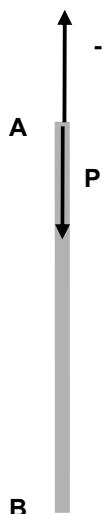
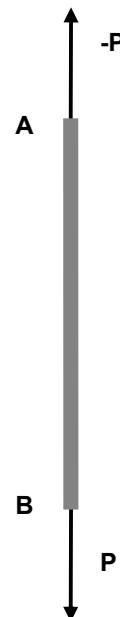
EL TEOREMA DE TRANSMISIBILIDAD ES VALIDO SOLAMENTE EN EL CASO DE CUERPOS RIGIDOS



CASO 1:
BARRA AB CON FUERZAS P y $-P$ EN A Y B RESPECTIVAMENTE.
SI LA BARRA FUERA DEFORMABLE EL EFECTO DE P y $-P$ ES UN **ACORTAMIENTO** DE LA BARRA AB

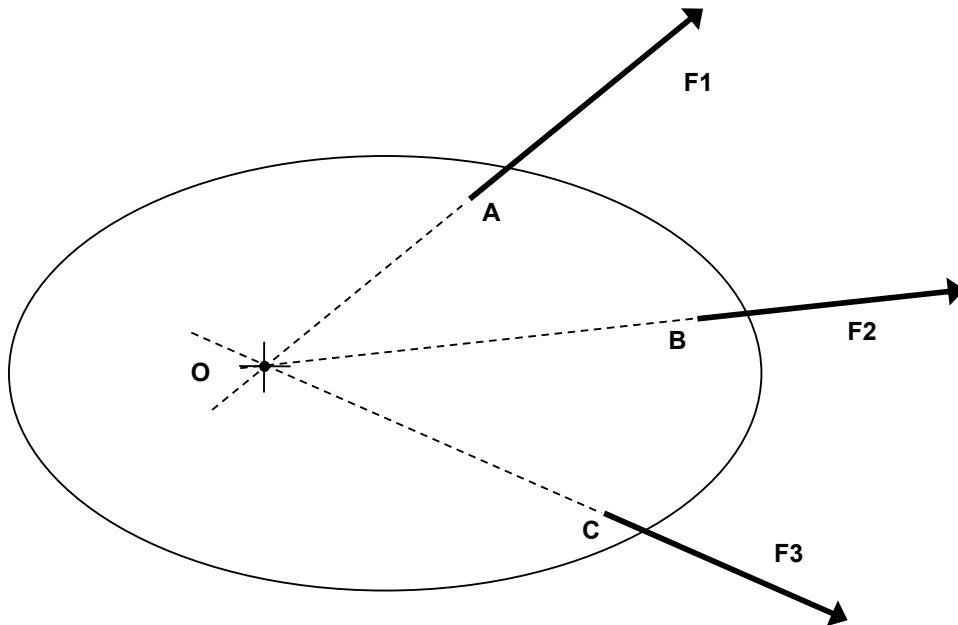


CASO 2:
APLICANDO TRANSMISIBILIDAD LA FUERZA P SE LLEVA AL PUNTO B Y $-P$ SE LLEVA AL PUNTO A.
SI LA BARRA FUERA DEFORMABLE EL EFECTO DE P y $-P$ ES AHORA UN **ALARGAMIENTO** DE LA BARRA AB



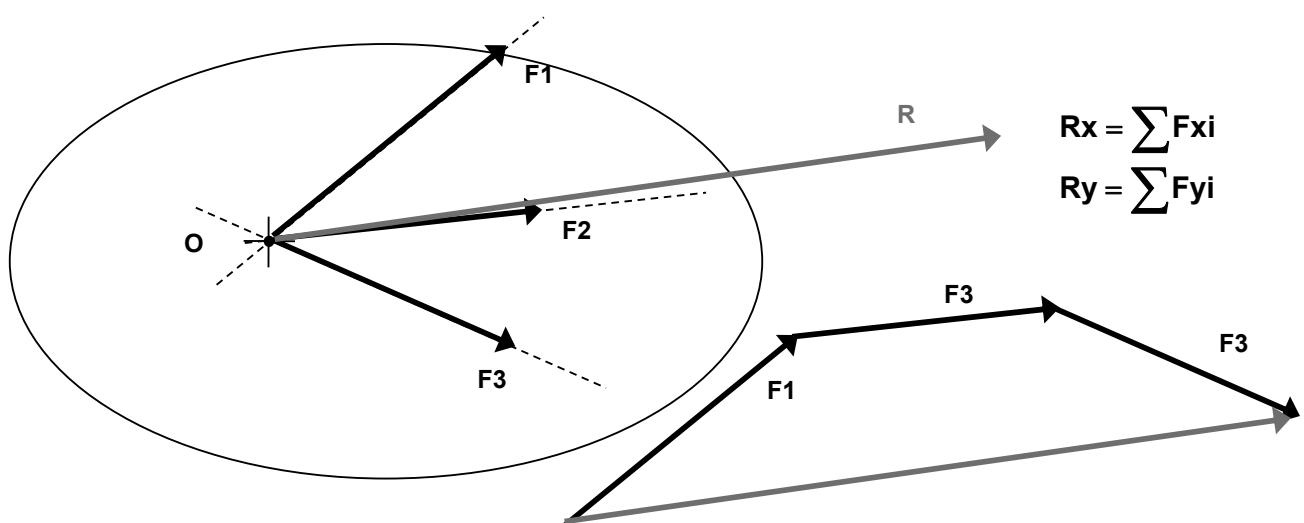
CASO 3:
APLICANDO TRANSMISIBILIDAD SOLO LA FUERZA $-P$ SE LLEVA AL PUNTO A
LA BARRA EN ESTE CASO NO SE DEFORMA

-Caso de tres o más fuerzas concurrentes a un punto:



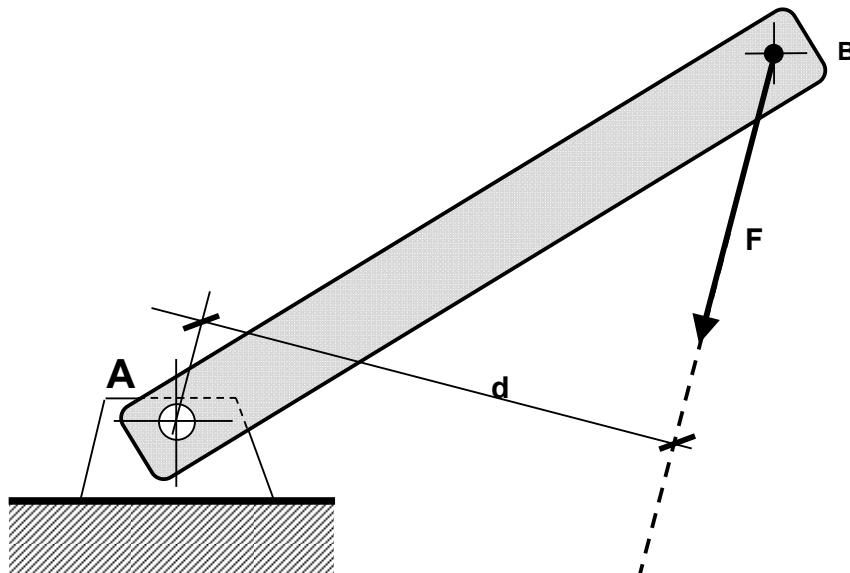
POR APLICACIÓN DEL TEOREMA DE TRANSMISIBILIDAD TRES O MAS FUERZAS APLICADAS EN PUNTOS A, B, C, ETC DE UN **CUERPO RIGIDO** CON RECTAS DE ACCION CONCURRENTES A UN PUNTO O PUEDEN SUPONERSE APLICADAS EN DICHO PUNTO PARA EL ANALISIS ESTATICO DEL MISMO CON RESULTADOS EQUIVALENTES.

ASI SE PUEDE DETERMINAR LA RESULTANTE R DE DICHAS FUERZAS EN FORMA GRAFICA O ANALITICA SABIENDO QUE EL PUNTO O ES UN PUNTO DE LA RECTA DE ACCION DE DICHA RESULTANTE.



5. MOMENTO DE UNA FUERZA RESPECTO DE UN PUNTO

- Definición

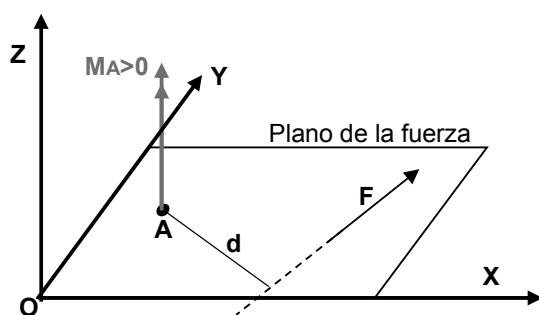


$$M_A = Fd$$

EL MOMENTO DE UNA FUERZA RESPECTO A UN PUNTO ES IGUAL AL PRODUCTO DE LA FUERZA POR LA DISTANCIA DESDE LA RECTA DE ACCION DE LA FUERZA A ESE PUNTO.
LA DISTANCIA DEL PUNTO A LA RECTA SE MIDE SOBRE LA PERPENDICULAR PASANDO POR EL PUNTO HASTA Dicha RECTA.

EL MOMENTO MIDE LA CAPACIDAD DE UNA FUERZA DE PRODUCIR UN GIRO ALREDEDOR DE UN PUNTO.
SE PUEDE AUMENTAR ESA CAPACIDAD AUMENTANDO LA FUERZA O EL BRAZO DE PALANCA "d"

EL MOMENTO DE UNA FUERZA RESPECTO A UN PUNTO ES UNA MAGNITUD VECTORIAL PORQUE ESTA CARACTERIZADO POR EL MODULO $F \times d$, Y UN SENTIDO:
EL VECTOR MOMENTO ES PERPENDICULAR AL PLANO DE LA FUERZA Y SU SENTIDO SE ASIGNA SEGÚN LA REGLA DE LA MANO DERECHA.



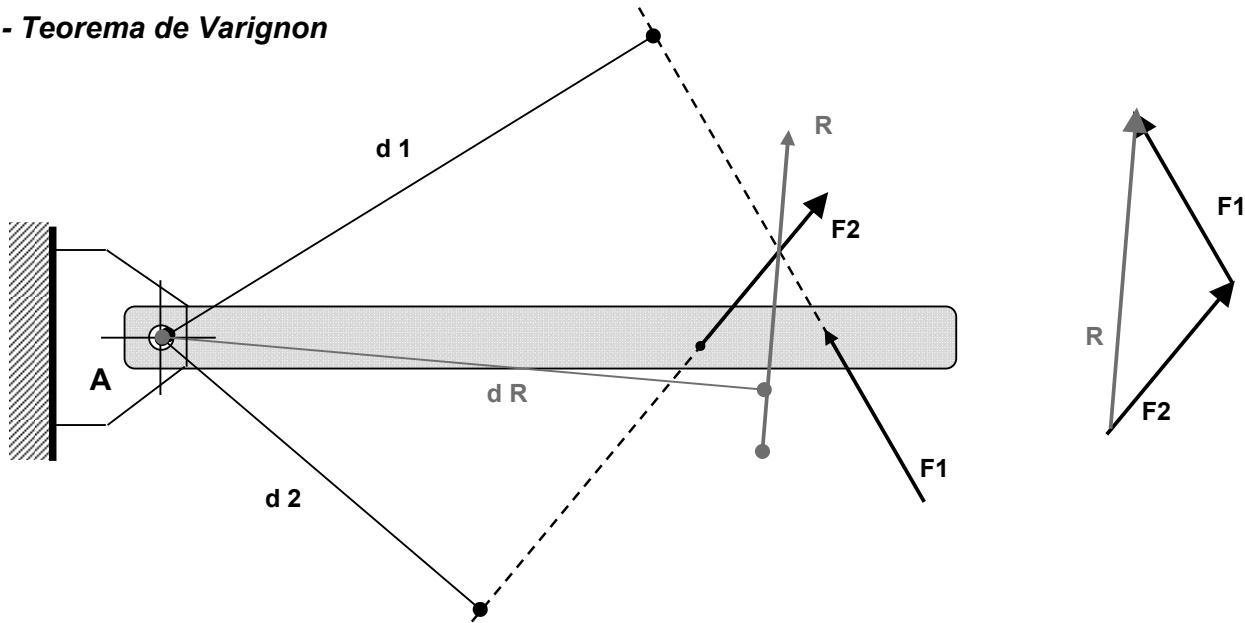
M es positivo si produce giro antihorario



M es negativo si produce giro horario



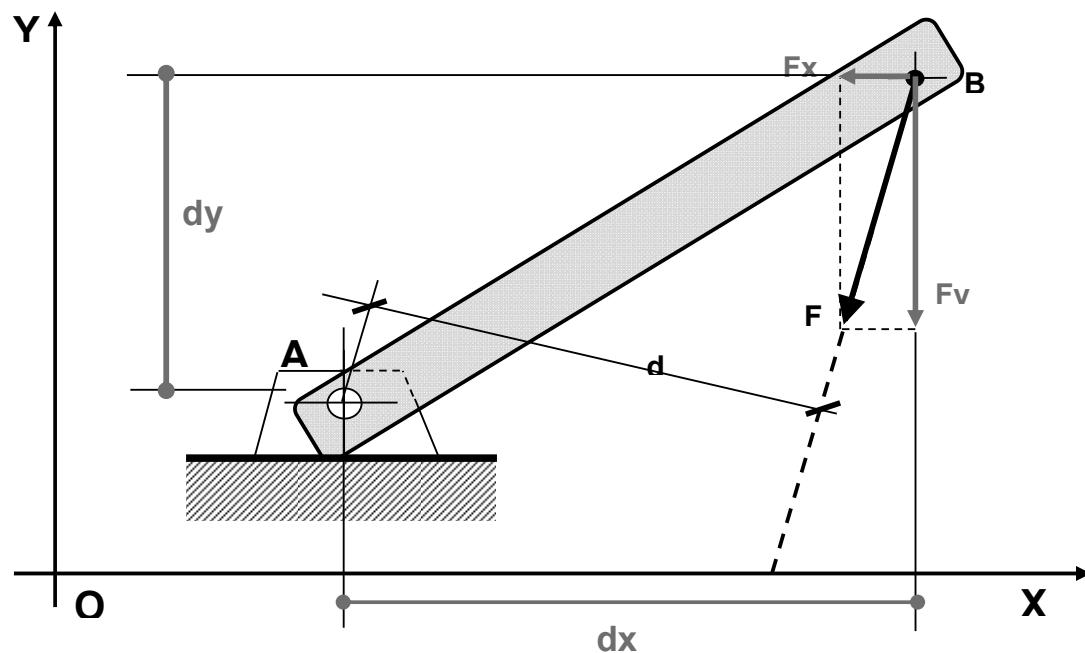
- Teorema de Varignon



$$M_A = Rd_R = F_1d_1 + F_2d_2$$

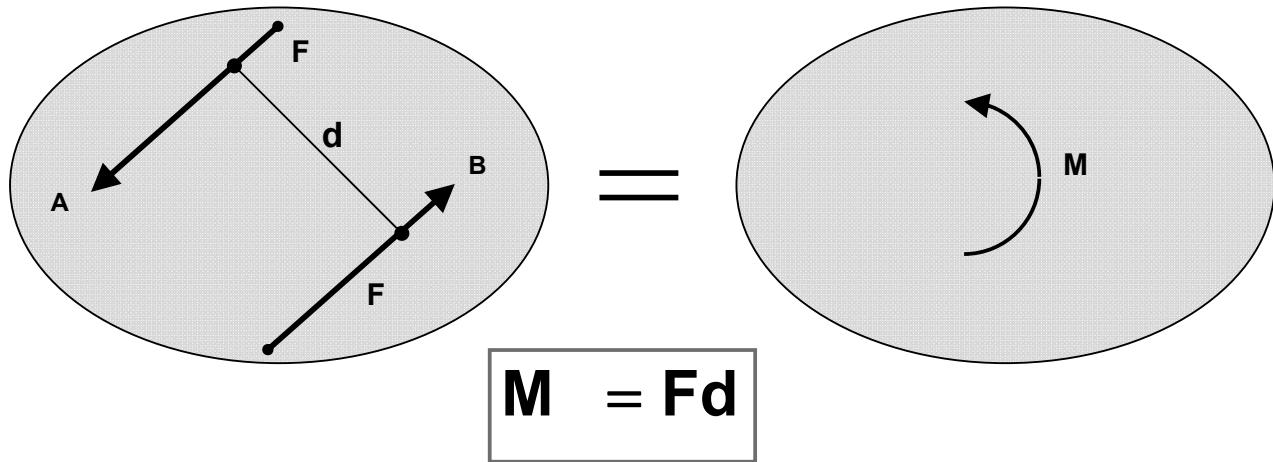
“El momento de dos o más fuerzas respecto de un punto es igual al momento de su resultante respecto del mismo punto”.

- Aplicación al caso de componentes ortogonales:



$$M_A = Fd = F_x d_y - F_y d_x$$

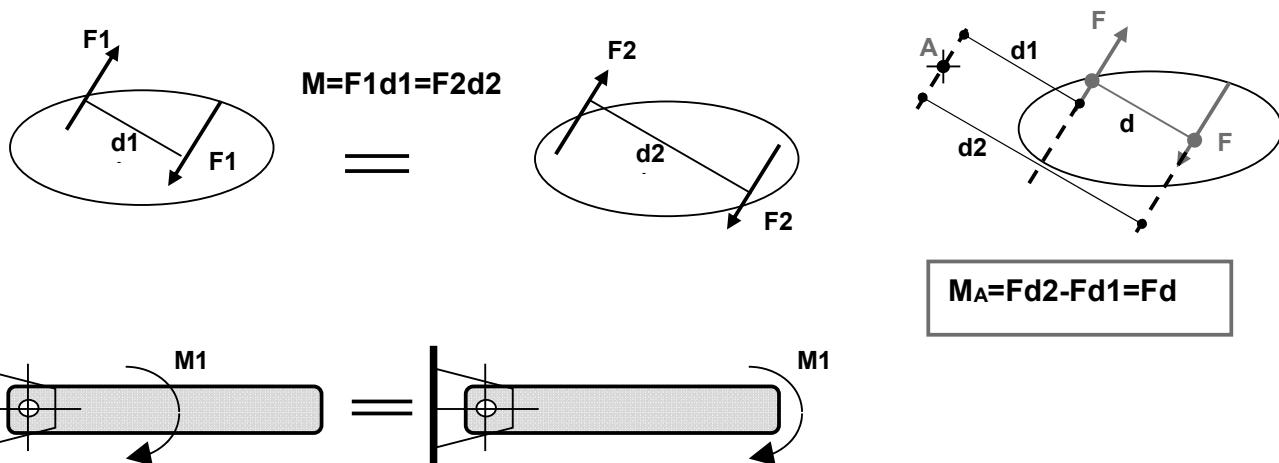
- **Pares de Fuerzas o Cuplas:**



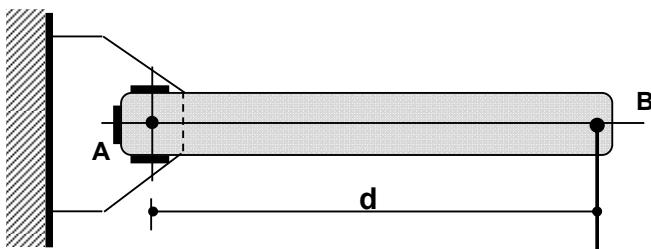
"Dos fuerzas actuantes en un cuerpo rígido, de igual magnitud, sentido contrario y rectas de acción paralelas constituyen una **cupla o par".**

CARACTERISTICAS Y PROPIEDADES:

- EL EFECTO DE UNA CUPLA ES PRODUCIR UNA ROTACION DEL CUERPO EN EL QUE ACTUA.
- LA CUPLA ESTA CARACTERIZADA POR EL PRODUCTO Fd Y NO POR EL VALOR INDIVIDUAL DE F o d . SI VARIAN AMBOS MANTENIENDO CONSTANTE EL PRODUCTO EL EFECTO ES EL MISMO.
- **EL MOMENTO RESPECTO DE CUALQUIER PUNTO DEL PLANO EN EL QUE ACTUA LA CUPLA ES IGUAL AL PRODUCTO Fxd**
- LAS CUPLAS SE PUEDEN DESPLAZAR EN TODO EL PLANO EN EL QUE ACTUAN SIN QUE VARIE SU EFECTO (VALIDO SOLO PARA CUERPOS RIGIDOS)
- LAS CUPLAS QUE ACTUAN EN UN PLANO SE PUEDEN SUMAR ALGEBRAICAMENTE (TODOS LOS VECTORES ASOCIADOS SON PARALELOS Y PERPENDICULARES AL PLANO EN EL QUE ACTUA LA CUPLA)

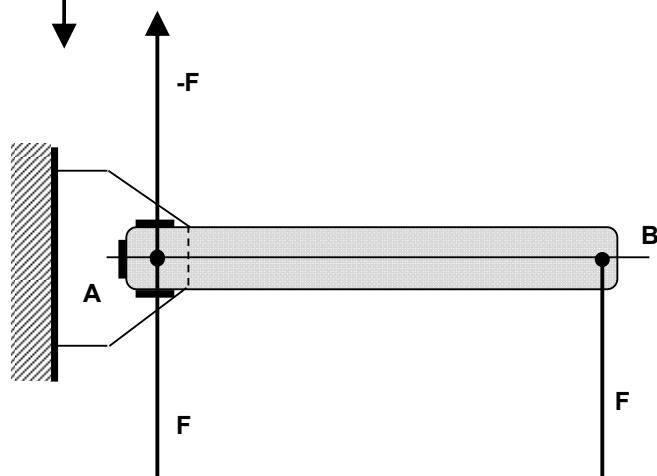


- Aplicación a la traslación de fuerzas

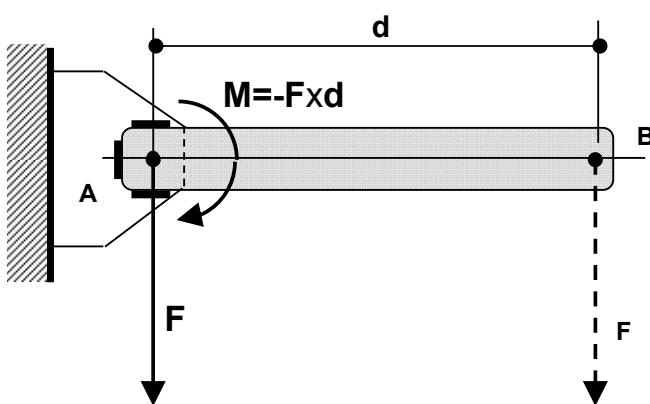
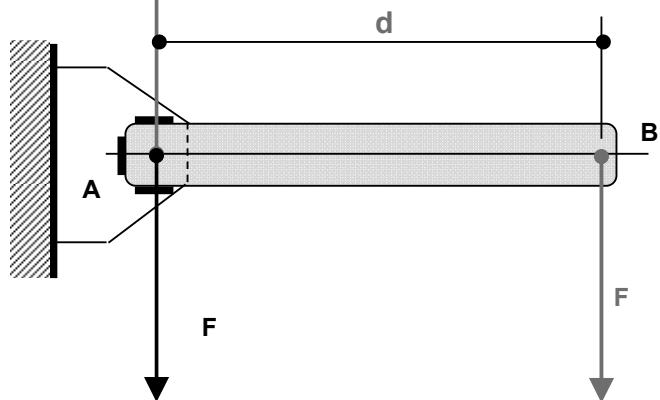


Problema: Dada una chapa rígida imposibilitada de moverse por encontrarse el extremo A soldado a un apoyo fijo, y sometida a la acción de una fuerza F en su extremo B, se desea trasladar esta fuerza al centro del apoyo A.

PASO 1:
APLICANDO EL TERCER PRINCIPIO SE AGREGA EN A UN SISTEMA NULO F Y $-F$. LAS CONDICIONES ESTÁTICAS NO SE ALTERAN



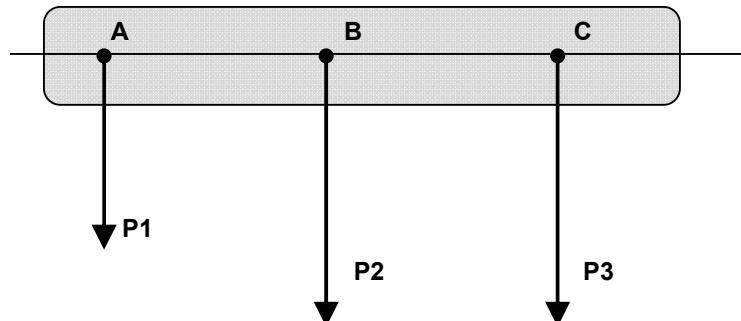
PASO 2:
LA FUERZA F EN A Y $-F$ EN B CONSTITUYEN UN PAR DE VALOR Fxd QUE SE PUEDE APPLICAR EN CUALQUIER PUNTO DEL PLANO



LA FUERZA F EN B SE HA TRASLADADO AL PUNTO A ADICIONANDO EL MOMENTO DE LA FUERZA CONSIDERADA EN SU POSICIÓN ORIGINAL B RESPECTO AL PUNTO AL QUE SE TRASLADA A.

- Aplicación al caso de Fuerzas Paralelas - Resultante

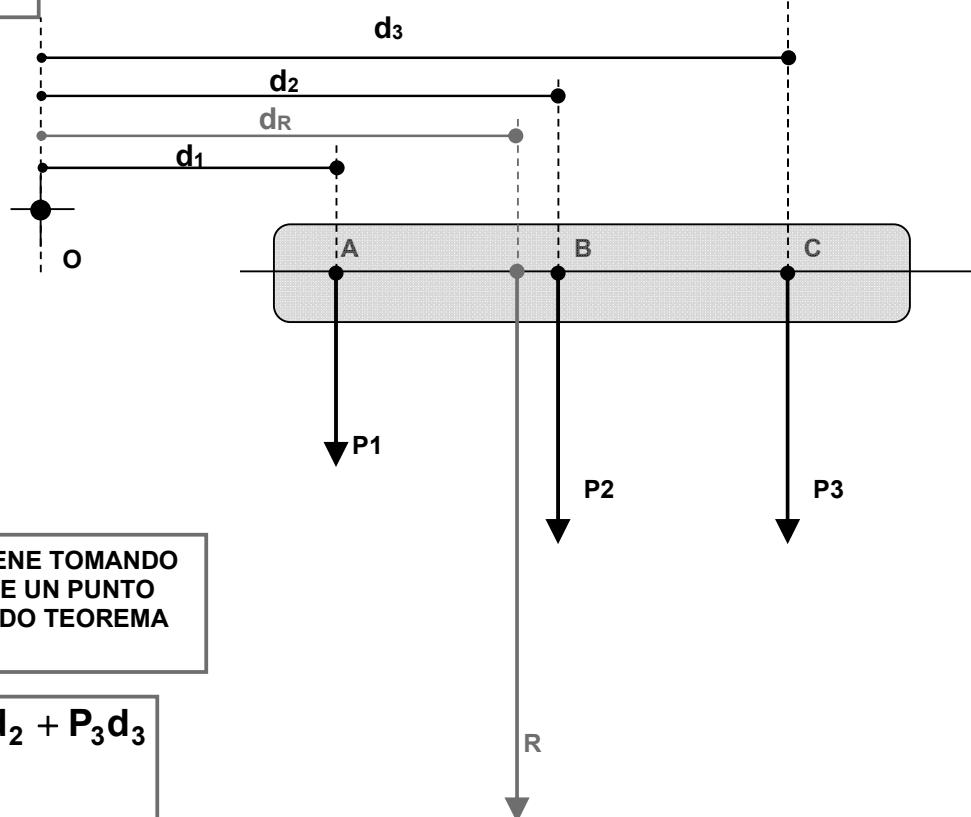
DATOS:
FUERZAS P₁, P₂, P₃ PARALELAS
PUNTOS DE APLICACIÓN A,B Y C



EL MODULO DE LA RESULTANTE
ES IGUAL A LA SUMA ALGEBRAICA
DE LOS MODULOS DE CADA UNA
DE LAS FUERZAS

$$R = P_1 + P_2 + P_3$$

$$R = \sum P_i$$

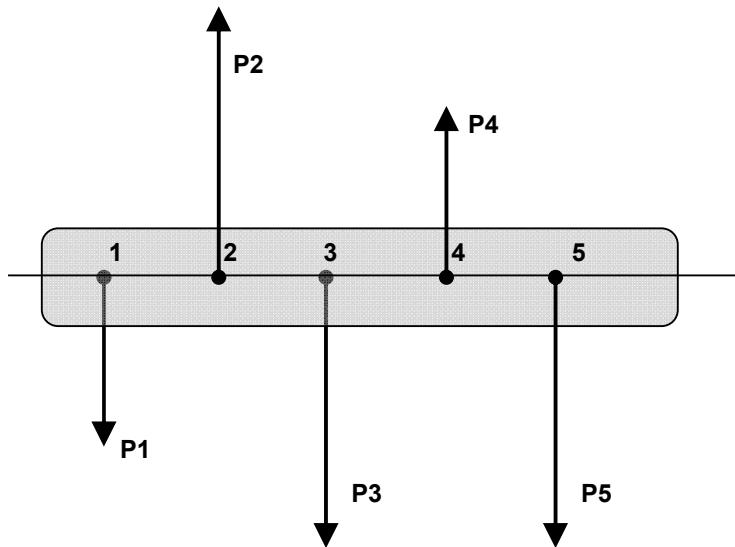


SU UBICACIÓN SE OBTIENE TOMANDO
MOMENTO RESPECTO DE UN PUNTO
ARBITRARIO Y APLICANDO TEOREMA
DE VARIGNON

$$Rd_R = P_1d_1 + P_2d_2 + P_3d_3$$

$$Rd_R = \sum P_i d_i$$

- Aplicación al caso de Fuerzas Paralelas - Equilibrio



CONDICION 1: RESULTANTE NULA

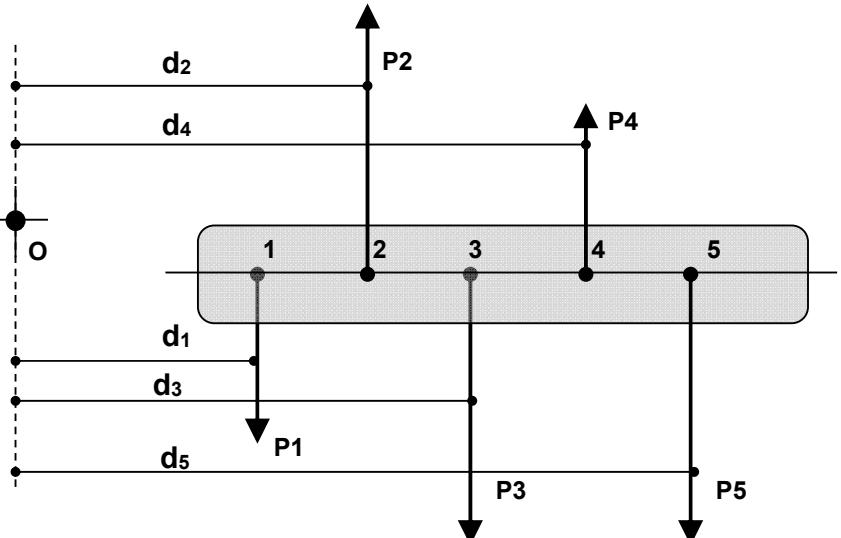
$$R = \sum P_i = 0$$

ASEGURA LA NO TRASLACION DEL SISTEMA
PERO NO LA INEXISTENCIA DE UNA CUPLA

CONDICION 2: CUPLA NULA

$$M_O = \sum P_i d_i = 0$$

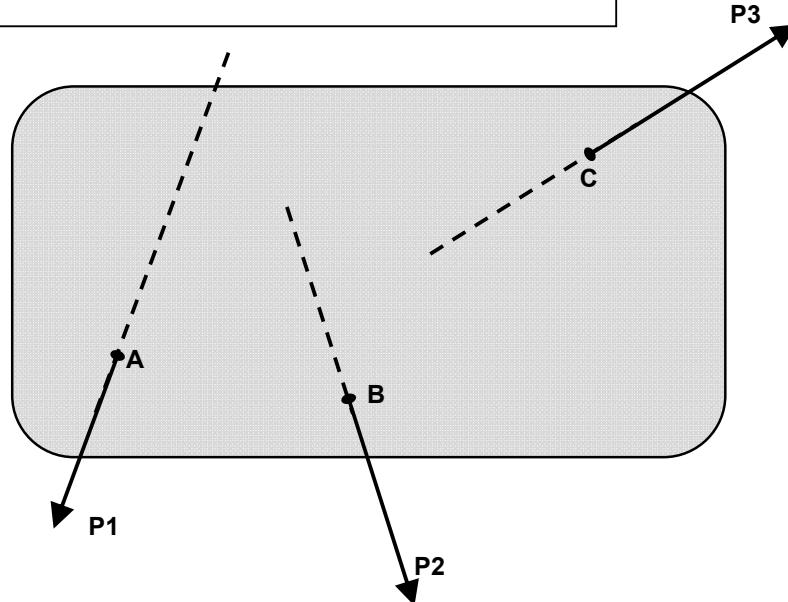
ASEGURA LA INEXISTENCIA DE
UNA CUPLA PORQUE EL VALOR DE
LA CUPLA NO DEPENDE DEL
PUNTO QUE SE TOME PARA
EVALUAR EL MOMENTO. ASEGURA
LA NO ROTACION DEL SISTEMA



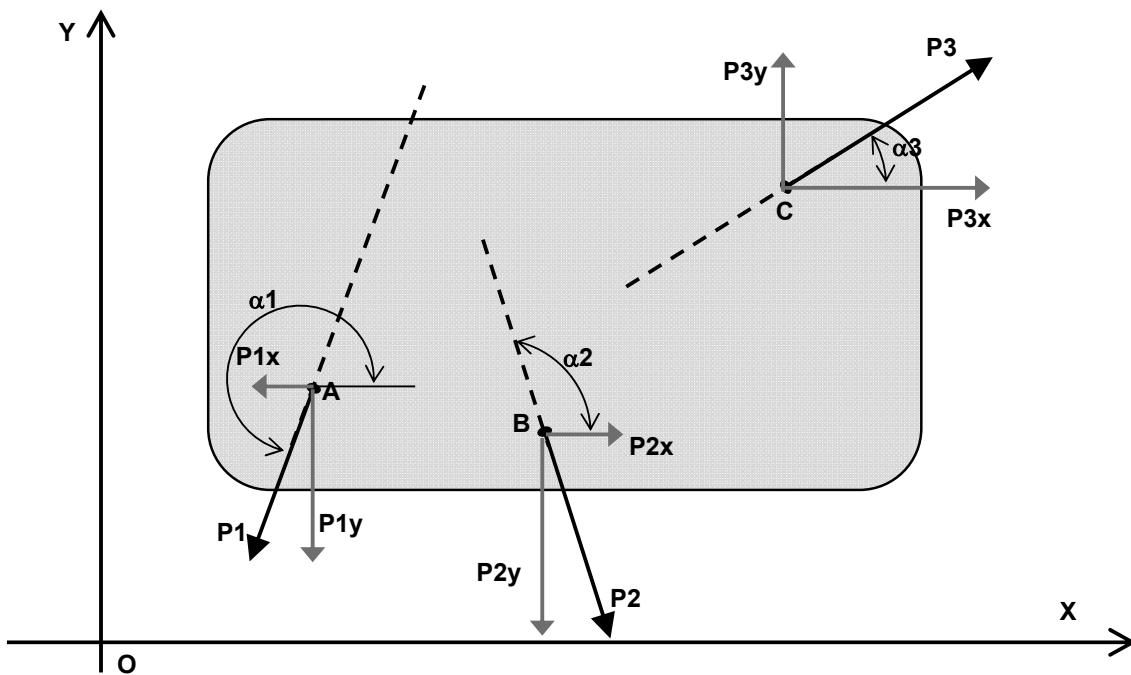
COMO ALTERNATIVA SE PUEDE PLANTEAR NULIDAD DE MOMENTOS RESPECTO A DOS PUNTOS
CUALQUIERA DEL PLANO QUE NO ESTÉN SOBRE UNA LINEA PARALELA A LAS RECTAS DE ACCION
DEL SISTEMA DE FUERZAS.

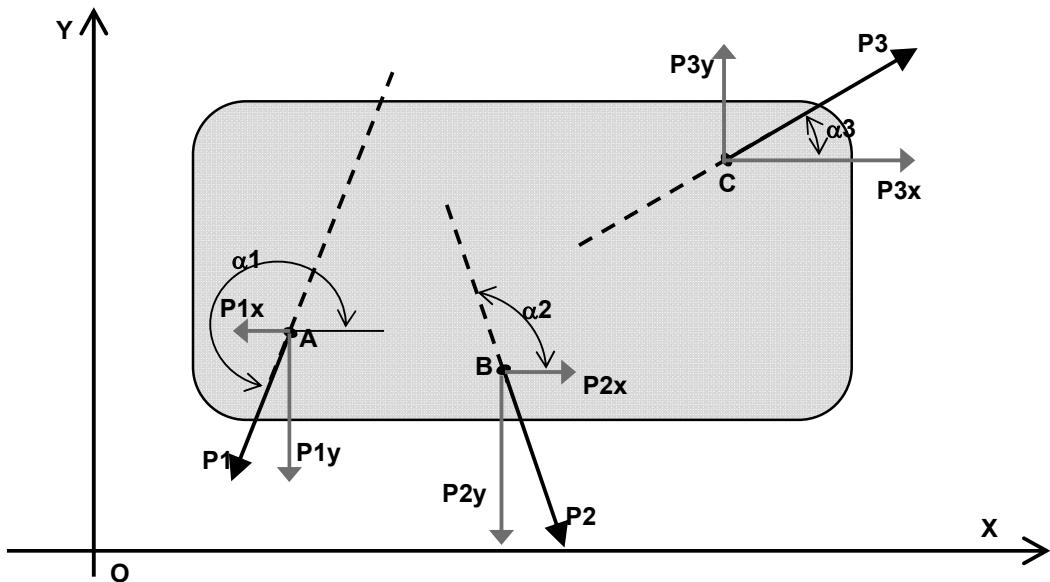
- Aplicación al caso de Fuerzas No Concurrentes - Resultante

DATOS: P_1 , P_2 , P_3 FUERZAS NO CONCURRENTES
INCÓGNITA: RESULTANTE DEL SISTEMA Y SU RECTA DE ACCIÓN



ELECCION DE UN SISTEMA DE COORDENADAS DE REFERENCIA XY
DESCOMPOSICIÓN DE C/U DE LAS FUERZAS EN SUS COMPONENTES P_{xi} Y P_{yi}





MODULO Y DIRECCION DE LA RESULTANTE:

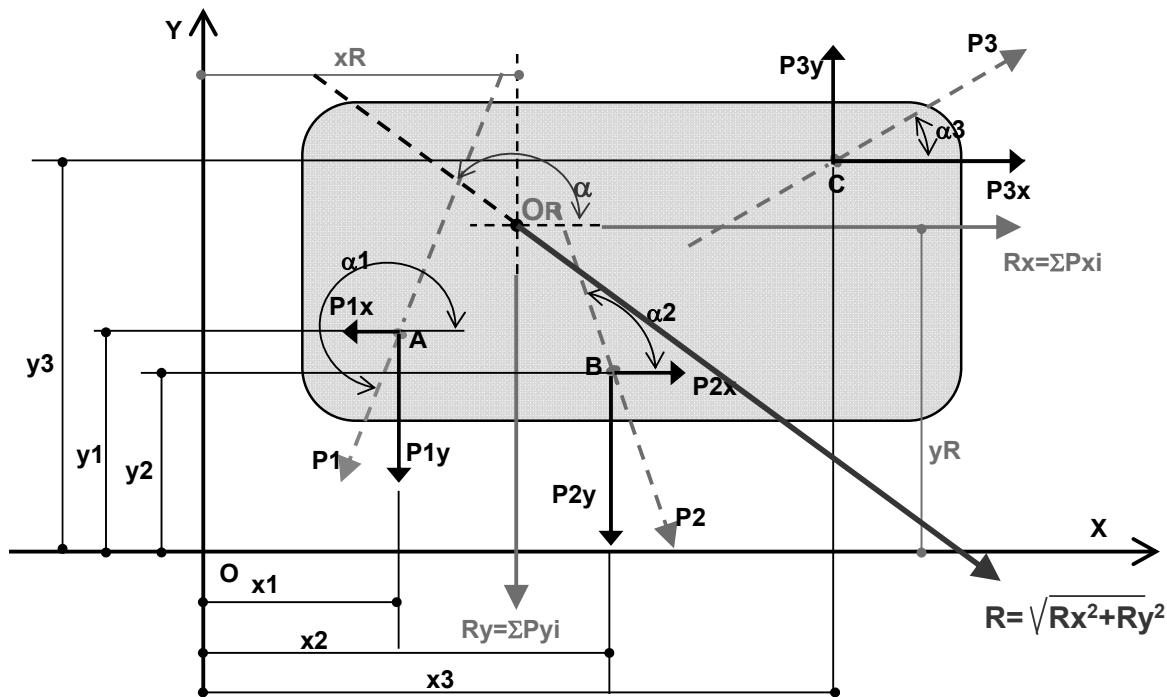
$$R_x = \sum F_{xi} \quad |R| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \quad \tan \alpha = \frac{R_y}{R_x}$$

$$R_y = \sum F_{yi}$$

UBICACION DE LA RESULTANTE:

LO QUE SE DESEA ENCONTRAR ES LA ECUACION DE LA RECTA DE ACCION DE LA RESULTANTE O EN SU DEFECTO UN PUNTO DE LA MISMA PORQUE YA SE CONOCE LA ORIENTACION CON EL ANGULO α .

UNA SOLUCION POSIBLE ES ENCONTRAR LA UBICACION DE LA RESULTANTE R_x Y R_y SABIENDO QUE EL PUNTO DONDE SE CRUZAN AMBAS RECTAS DE ACCION ES UN PUNTO DE LA RECTA DE ACCION DE LA RESULTANTE



UBICACION DE LA RESULTANTE:

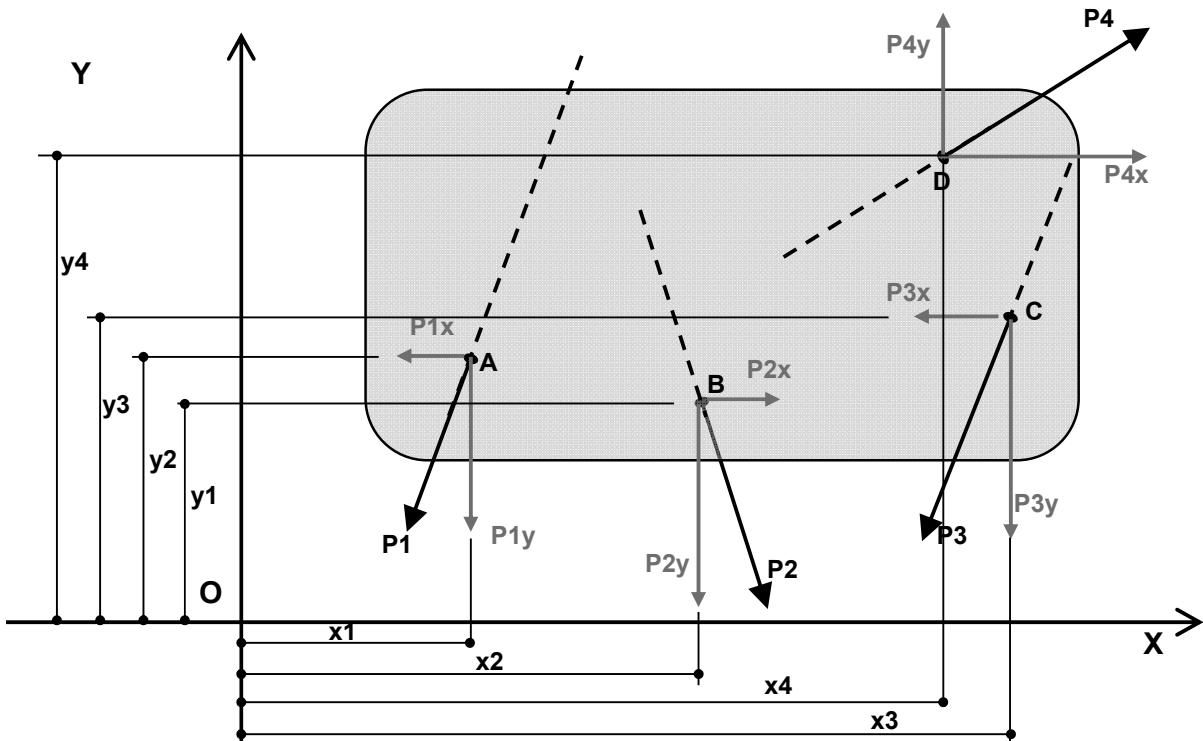
EL PUNTO OR DE COORDENADAS x_R E y_R ES UN PUNTO DE LA RECTA DE ACCION DE LA RESULTANTE QUE TIENE EL MODULO R Y LA DIRECCION α ANTES CALCULADOS

- LAS DISTANCIAS x_R E y_R ESTÁN DADAS POR LAS SIGUIENTES FORMULAS:

$$x_R = \left| \frac{\sum P_{Yi} x_i}{\sum P_{Yi}} \right| \quad y_R = \left| \frac{\sum P_{Xi} y_i}{\sum P_{Xi}} \right|$$

- EL SENTIDO DE LOS MOMENTOS DE LAS COMPONENTES HORIZONTALES Y VERTICALES DEBE COINCIDIR CON EL SENTIDO DEL MOEMENTO DE LAS RESULTANTES RESPECTIVAS R_x Y R_y , DE ESTA MANERA SE OBTIENE EL CUADRANTE EN LOS QUE SE UBICAN x_R E y_R .

- Aplicación al caso de Fuerzas No Concurrentes - Equilibrio



DATOS: Fuerzas P₁, P₂, P₃, P₄ (....P_n)

EN PRINCIPIO DEBEN SER **MAS DE TRES FUERZAS**, PORQUE TRES FUERZAS NO CONCURRENTES NUNCA PUEDEN ESTAR EN EQUILIBRIO

CONDICION 1: RESULTANTE NULA

$$R_x = \sum P_{xi} = 0$$

$$R_y = \sum P_{yi} = 0$$

ASEGURA LA NO TRASLACION DEL SISTEMA
PERO NO LA INEXISTENCIA DE UNA CUPLA

CONDICION 2: CUPLA NULA

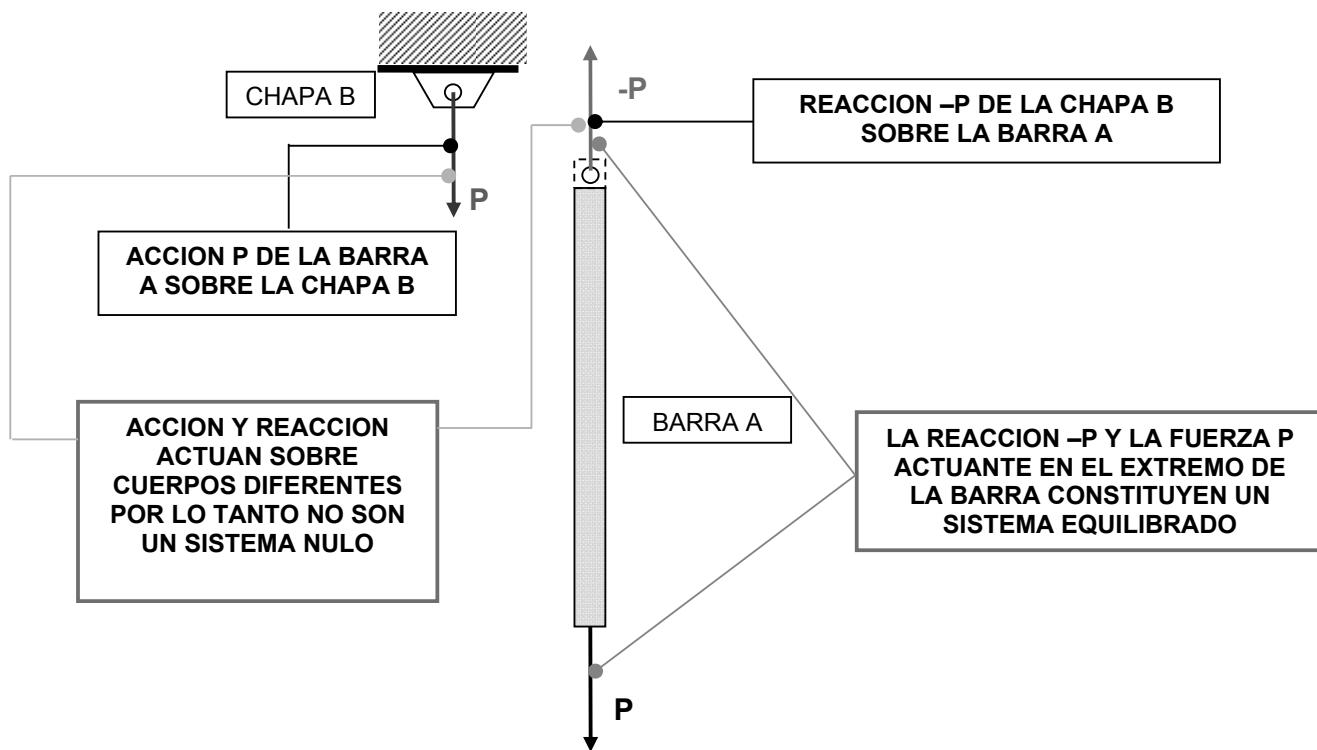
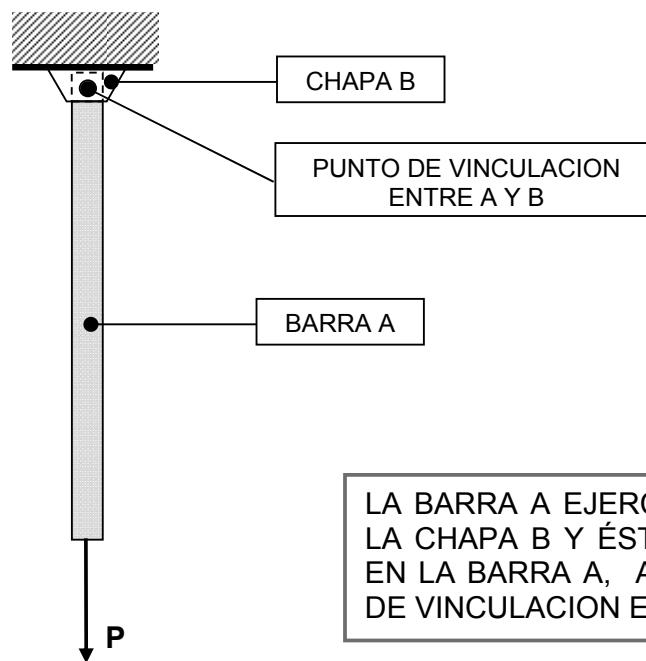
$$M_O = \sum P_{xi}y_i + \sum P_{yi}x_i = 0$$

ASEGURA LA INEXISTENCIA DE CUPLA Y
POR LO TANTO LA NO ROTACION DEL
SISTEMA. EL PUNTO O PUEDE SER
CUALQUIER PUNTO DEL PLANO NO
NECESARIAMENTE EL ORIGEN DE
COORDENADAS

COMO CONDICION ALTERNATIVA SE PUEDE ASEGURAR EL EQUILIBRIO DEL SISTEMA SI SE CUMPLE QUE LA SUMA DE LOS MOMENTOS RESPECTO A TRES PUNTOS NO ALINEADOS DEL PLANO RESULTA SIMULTANEAMENTE NULA.

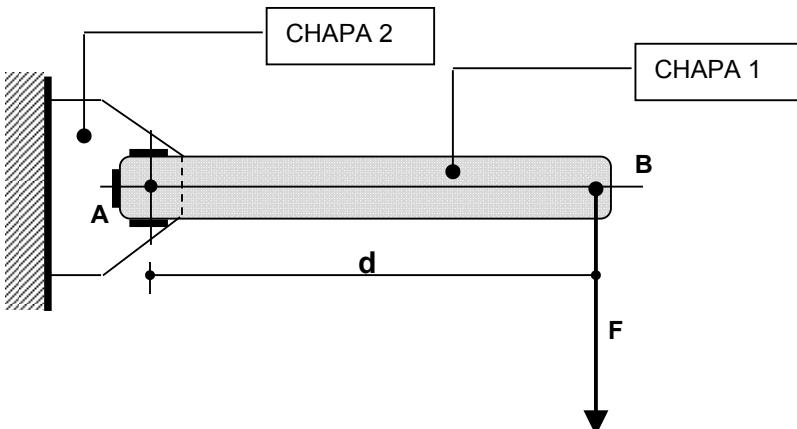
6. CUARTO PRINCIPIO DE LA ESTATICA: ACCION Y REACCION

“Si un cuerpo A ejerce una fuerza sobre otro cuerpo B, éste ejerce una fuerza de igual magnitud, la misma recta de acción y sentido contrario sobre el primero. Estas dos fuerzas se denominan acción y reacción respectivamente”.



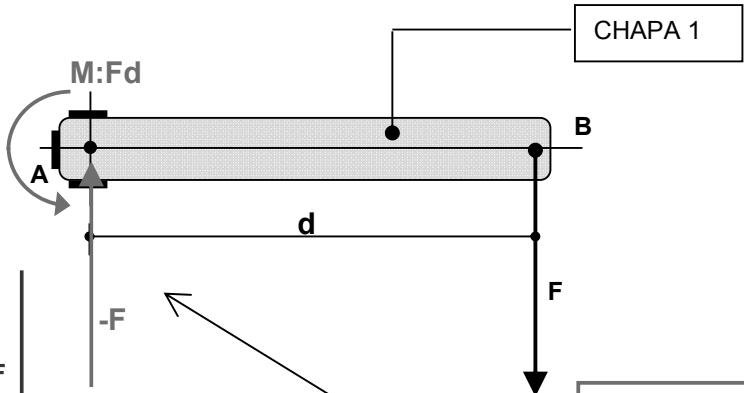
APLICACIONES DEL CUARTO PRINCIPIO : - Apoyos o vínculos

- Ejemplo 1

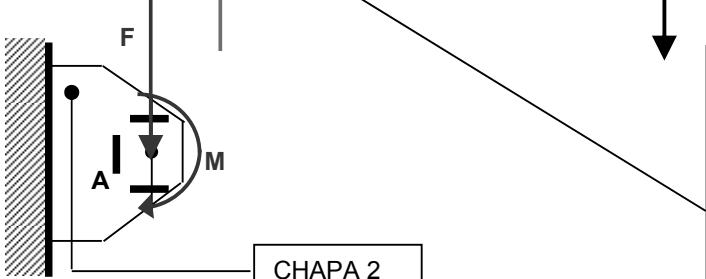


CHAPA 1 DE LONGITUD d CON UNA CARGA F EN EL EXTREMO B SOLDADA A UNA CHAPA 2 COMPLETAMENTE FIJA.

SE DESEA ENCONTRAR LAS REACCIONES QUE LA CHAPA 2 LE APLICA A LA 1 ATRAVES DE LA SOLDADURA EN A PARA QUE EL SISTEMA EN SU CONJUNTO ESTE EN EQUILIBRIO



SE SEPARAN LAS DOS CHAPAS PONIENDO DE MANIFIESTO LA ACCION Y REACCION QUE SE APLICAN MUTUAMENTE EN A. ESTAS FUERZAS EN EL CASO DE LA CHAPA 1 SE DENOMINARAN REACTIVAS Y JUNTAMENTE CON LA FUERZA F DENOMINADA ACTIVA DEBEN CONFORMAR UN SISTEMA EN EQUILIBRIO

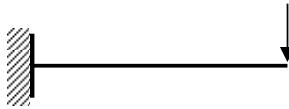


LA FUERZA $-F$ ASEGURA LA NULIDAD DE LA RESULTANTE (NO HAY TRASLACION). SE OBTIENE PLANTEANDO $R_x=0$ Y $R_y=0$.
EL PAR $M=Fd$ ANTIHORARIO ASEGURA LA INEXISTENCIA DE CUPLA (NO HAY ROTACION). SE OBTIENE PLANTEANDO LA NULIDAD DE MOMENTOS RESPECTO A CUALQUIER PUNTO.

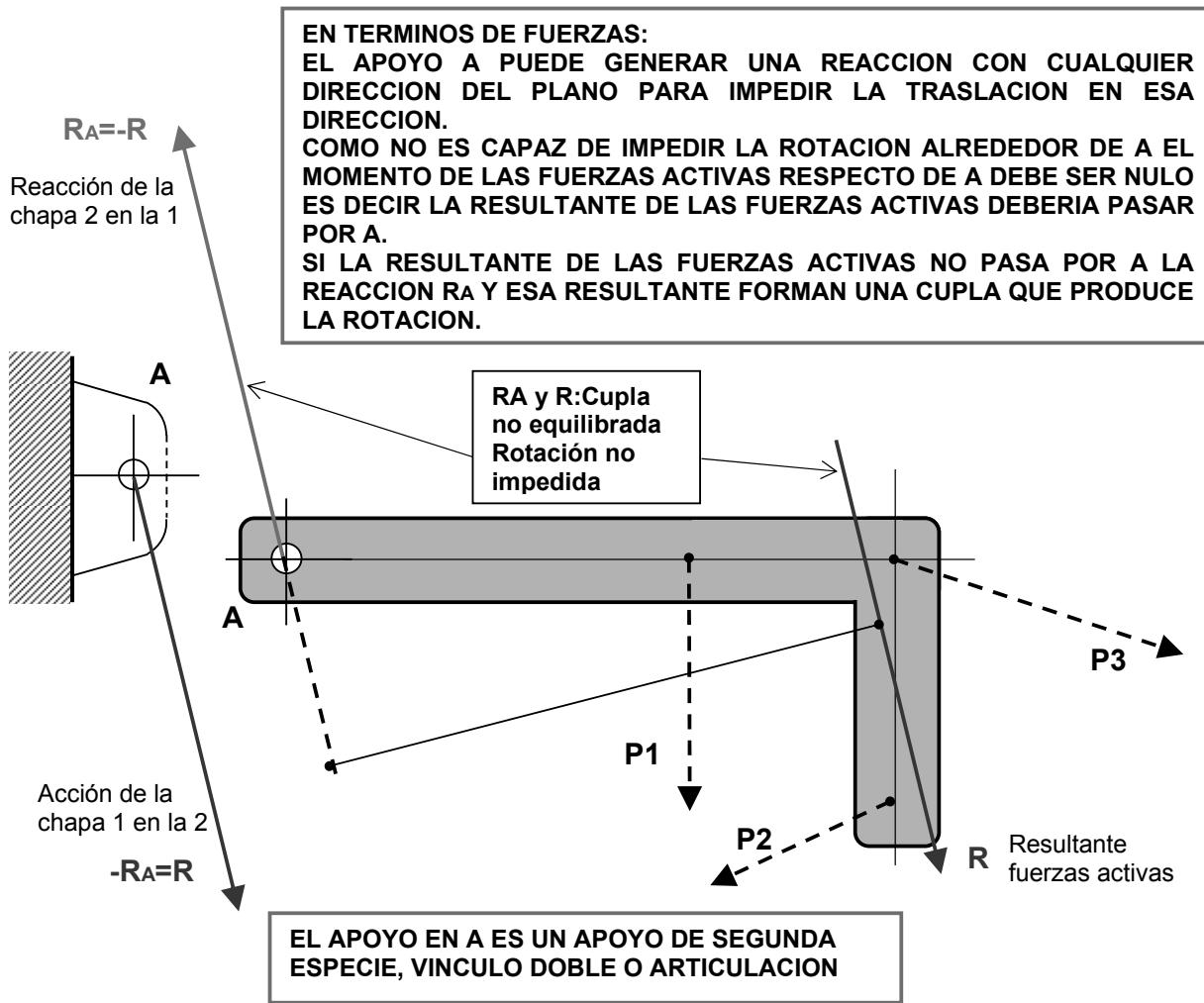
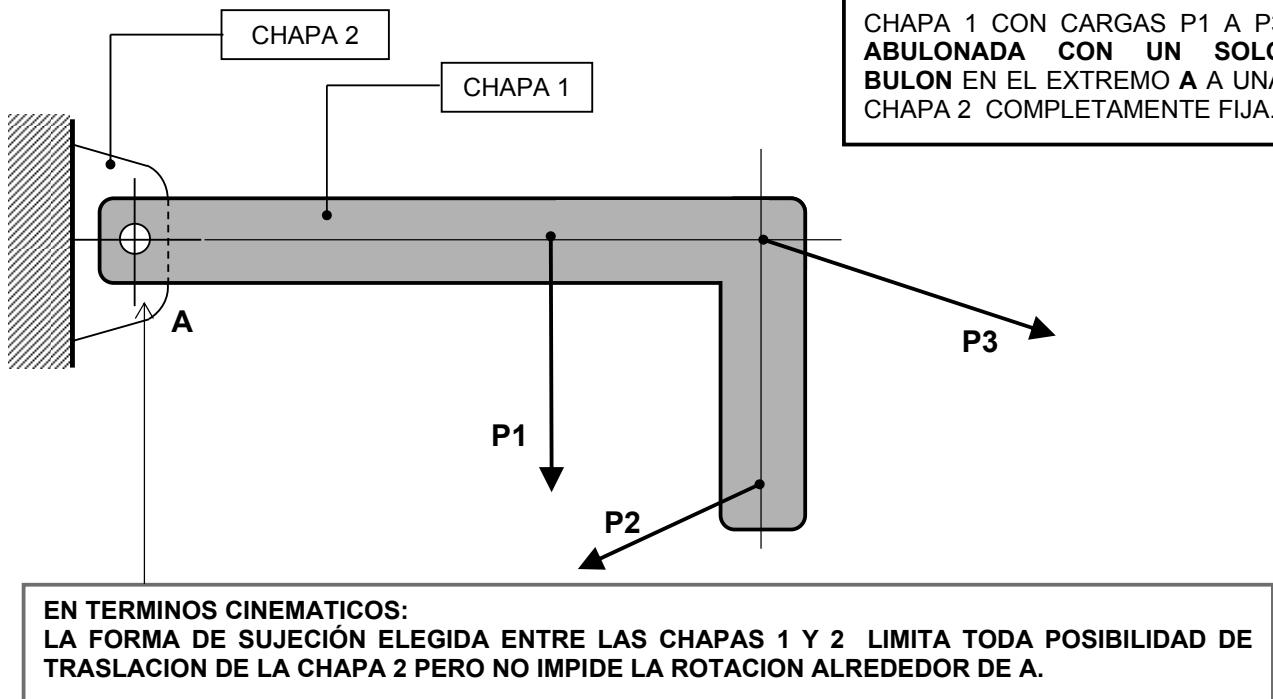
LAS ACCIONES DE LA CHAPA 1 EN LA 2 SON IGUALES Y CONTRARIAS A LAS REACCIONES CALCULADAS EN VIRTUD DEL CUARTO PRINCIPIO

EL MEDIO DE UNION ADOPTADO ENTRE LAS DOS CHAPAS DEBE SER CAPAZ DE TRANSMITIR LA FUERZA Y EL PAR, O LO QUE ES LO MISMO IMPEDIR LA TRASLACION DE LA CHAPA 1 EN CUALQUIER DIRECCION E IMPEDIR SIMULTANEAMENTE LA ROTACION DE LA MISMA. ESTE TIPO DE APOYO SE DENOMINA VINCULO DE TERCERA ESPECIE O EMPOTRAMIENTO.

EL SISTEMA SE PUEDE ESQUEMATIZAR DE ESTA FORMA:

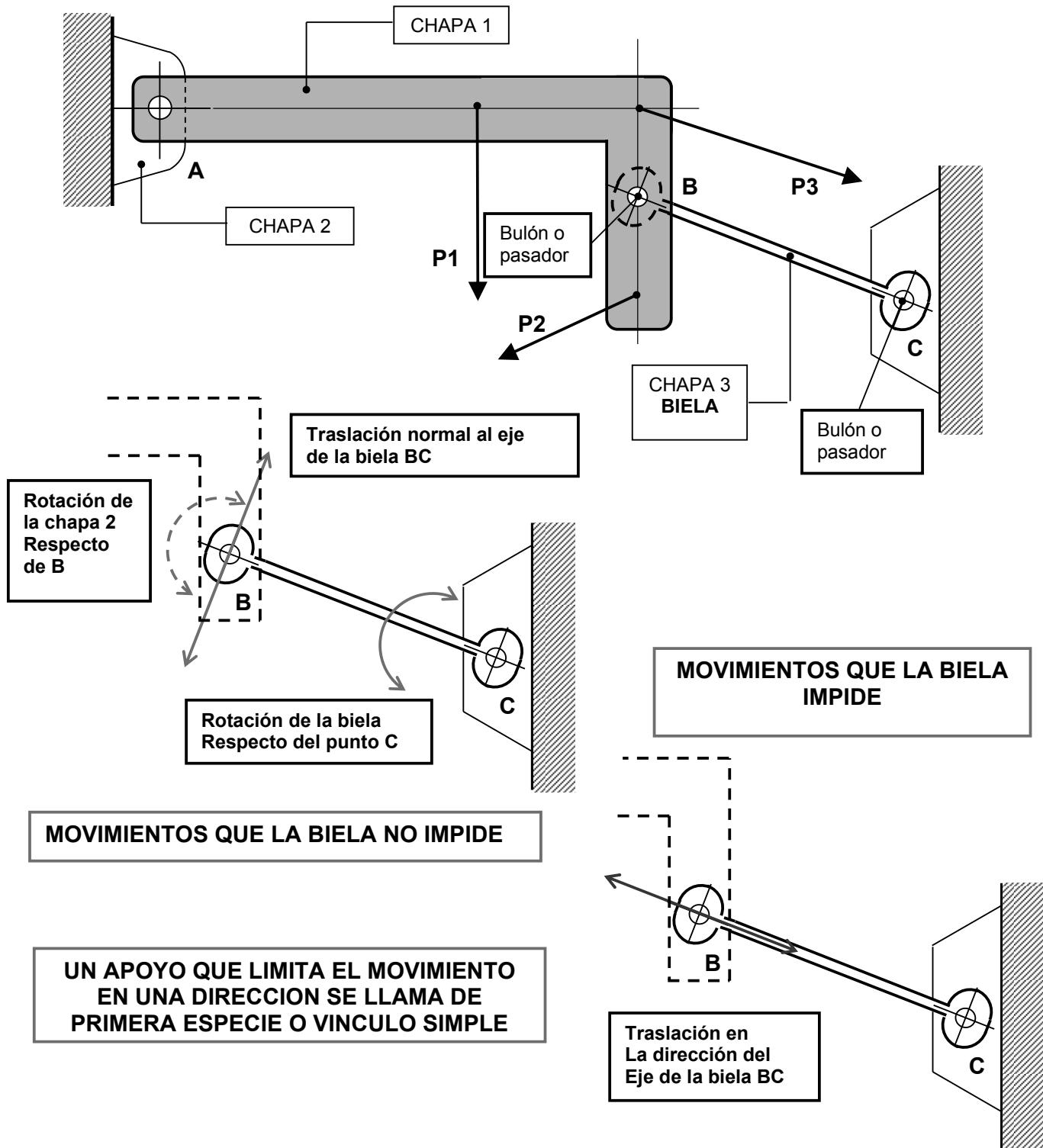


- Ejemplo 2

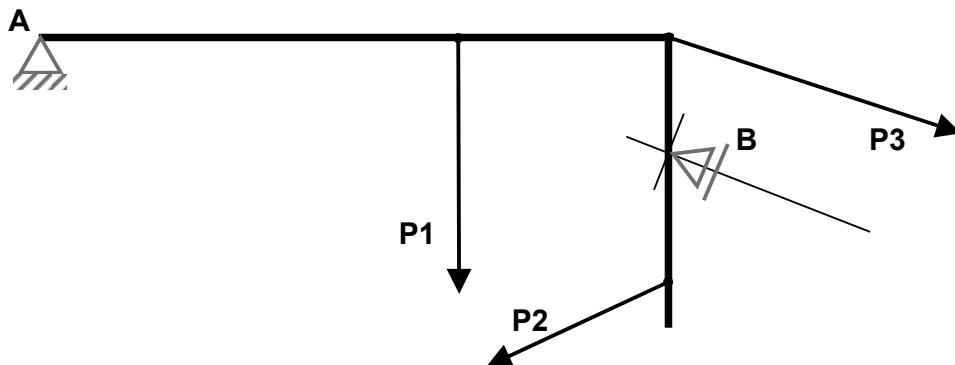


SE DEBE AGREGAR UN ELEMENTO QUE SEA CAPAZ DE LIMITAR LA ROTACION ALREDEDOR DE A.

EN TERMINOS DE FUERZA EL ELEMENTO A AGREGAR DEBE SER CAPAZ DE GENERAR UNA FUERZA EN UNA DIRECCION DADA CUYA UNICA CONDICION ES QUE NO PASE POR EL PUNTO A DE MANERA QUE PUEDA ANULAR EL MOMENTO RESPECTO DE DICHO PUNTO.



ESQUEMA SIMPLIFICADO:

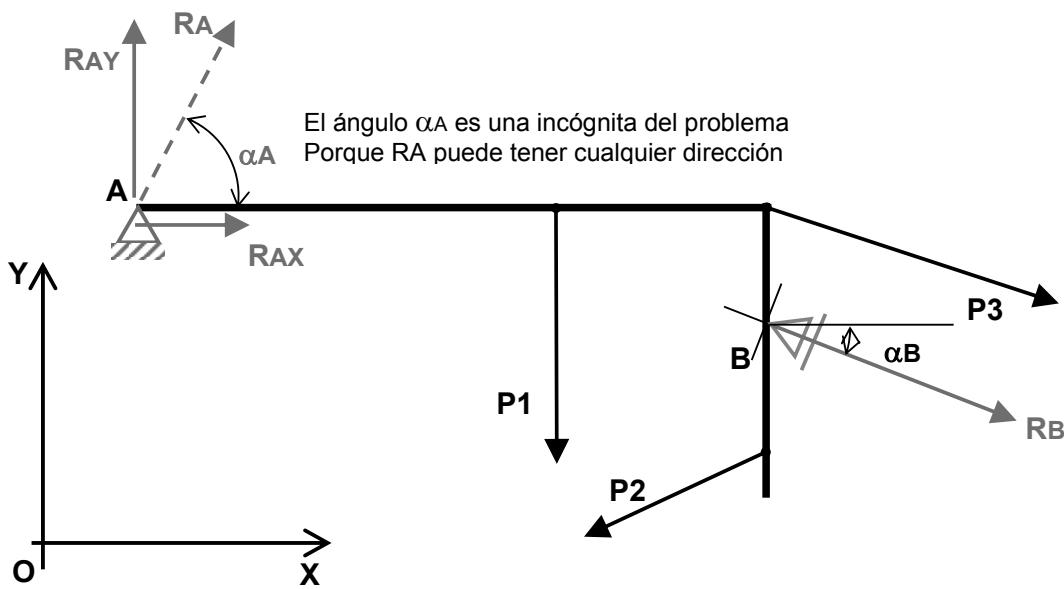


APLICACIÓN DEL PRINCIPIO DE ACCION Y REACCION:

Los vínculos se reemplazan por las reacciones que aplican sobre la chapa 2

El vínculo doble en A aplica una fuerza R_A a la chapa 2 en cualquier dirección del plano, por lo tanto tiene dos componentes desconocidas: R_{AX} y R_{AY} .

El vínculo simple en B aplica a la chapa 2 una fuerza R_B de dirección conocida α_B , por lo tanto las componentes en X e Y son función de la incógnita R_B .



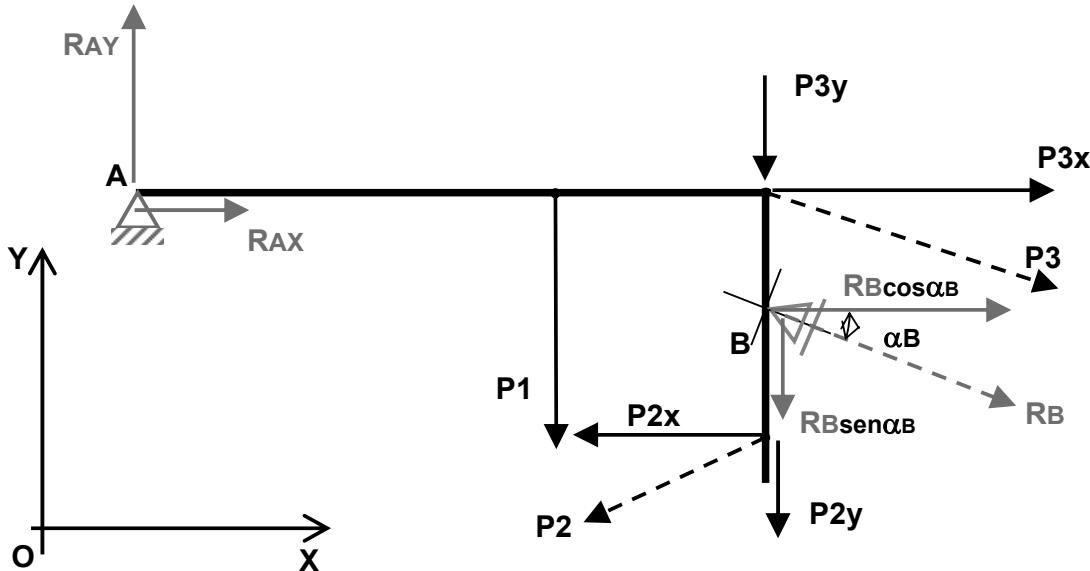
DATOS DEL PROBLEMA:

Geometría de la chapa
Fuerzas activas P_1 , P_2 y P_3
(magnitud, dirección, sentido y punto de aplicación)
Disposición de los vínculos

INCÓGNITAS DEL PROBLEMA:

Reacción en A (magnitud, dirección y sentido)
Reacción en B (magnitud y sentido)
 R_{AX} , R_{AY} y R_B

RESOLUCION DEL PROBLEMA:



El problema se resuelve aplicando las condiciones de equilibrio para un sistema de n fuerzas no concurrentes.

Se asumen sentidos arbitrarios para las reacciones incógnitas.

$$\sum P_{xi} + \sum R_{xi} = 0$$

RESULTANTE NULA / NO TRASLACION

$$\sum P_{yi} + \sum R_{yi} = 0$$

$$\sum M_O = 0$$

CUPLA NULA / NO ROTACION (O punto cualquiera del plano)

Si resuelto el sistema de ecuaciones las incógnitas son positivas significa que los sentidos supuestos son los reales, si son negativos los sentidos reales son contrarios a los supuestos.

I N G E N I E R I A
U N L P

ESTRUCTURAS IA

APUNTE DE CLASE

SISTEMAS VINCULADOS EN EL PLANO



"Los Nadies", Oswaldo Guayasamín.

Perteneciente a la serie "La edad de la ira" (1961-1990)
Pintor, dibujante, escultor, grafista y muralista ecuatoriano
(1919-1999).

Ing. Axel Greco
2014

1	PRINCIPIO DE ACCIÓN Y REACCIÓN	4
1.1	Definiciones	4
2	TIPOS DE VÍNCULOS	8
2.1	Vínculos Externos	8
2.1.1	Bielas (chapa articulada-articulada sin carga transversal aplicada)	8
2.1.2	Vínculo simple (Unión con bulón pasante deslizante).....	13
2.1.3	Vínculo doble (Unión soldada con bulón pasante)	14
2.1.4	Aclaraciones (Bielas, Vínculos Simples, Vínculos Dobles)	18
2.1.5	Empotramiento (Unión soldada)	19
2.1.6	Empotramiento guiado (unión soldada deslizante)	21
2.2	-Vínculos Internos, sistemas de más de una chapa	23
2.2.1	Articulación 2 chapas (unión con bulón pasante).....	23
2.2.1.1	Chapa isostática - Chapa apoyada	26
2.2.1.2	Chapa apoyada - Chapa apoyada	30
2.2.2	Articulación más de 2 chapas (unión con bulón pasante).....	35
2.2.3	Bielas	39
2.2.4	Bielas paralelas.....	42
2.2.5	Bielas cruzadas.....	43
2.3	Ejemplos de cálculo	44
2.3.1	Ejemplo 1: BIELAS CRUZADAS	44
2.3.1.1	Cálculo de reacciones en vínculos externos e internos:	44
2.3.1.1.1	Sistema estructural propuesto	44
2.3.1.1.2	Análisis de isostaticidad.....	44
2.3.1.1.3	Análisis de funcionamiento	45
2.3.2	Ejemplo 2: BIELAS PARALELAS	49
2.3.2.1	Cálculo de reacciones en vínculos externos e internos:	49
2.3.2.1.1	Sistema estructural propuesto	49
2.3.2.1.2	Análisis de isostaticidad.....	49
2.3.2.1.3	Análisis de funcionamiento	50
2.3.3	Ejemplo 3: MARCO CERRADO	53
2.3.3.1	Cálculo de reacciones en vínculos externos e internos:	53
2.3.3.1.1	Sistema estructural propuesto	53
2.3.3.1.2	Análisis de isostaticidad.....	53
2.3.3.1.3	Análisis de funcionamiento	54
3	CONCLUSIONES	58

1 PRINCIPIO DE ACCIÓN Y REACCIÓN

1.1 DEFINICIONES

Retomando el cuarto principio de la estática "acción-reacción" introducido en el apunte "principios fundamentales" citamos el mismo.

"Si un cuerpo A ejerce una fuerza sobre otro cuerpo B, éste ejerce una fuerza de igual magnitud, la misma recta de acción y sentido contrario sobre el primero. Estas dos fuerzas se denominan acción y reacción respectivamente".



Figura 1. Sistema en estudio.

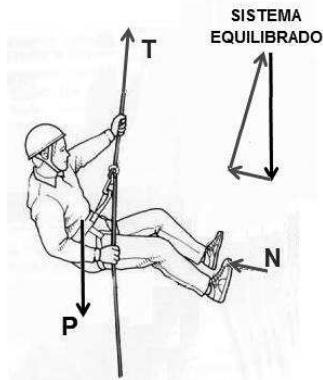


Figura 2. Cuerpo en estudio, sistema activo/sistema reactivo.

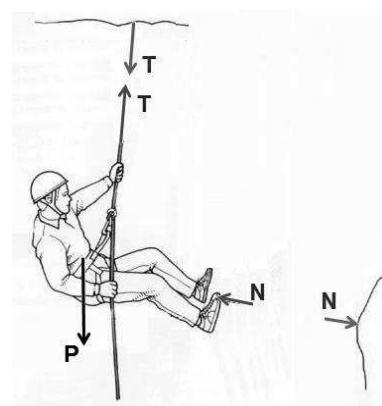


Figura 3. Sistema en estudio, acción y reacción.

"La acción y reacción NO actúan sobre el mismo cuerpo, por lo tanto NO constituyen un sistema equilibrado".

Definimos, en primera instancia conceptos que serán importantes en los siguientes análisis y definirán el campo de validez de lo que aquí se desarrolle.

CHAPAS y BARRAS.

Llamaremos chapa a aquel cuerpo que posee dos dimensiones predominantes frente a otra (el espesor) y las cargas que actúen sobre ella estarán incluidas en su plano medio, de manera que se restringe el campo espacial al plano medio de la chapa, no pudiendo salirse del mismo, la chapa se representa como una cerrado de la forma de la misma.

La barra es una chapa que tiene como característica que una de las dimensiones (longitud) es preponderante frente a las otras dos, y también está contenida en un plano, y las cargas que actúan sobre ella están en ese plano. La barra se representa como una línea que une los baricentros de sus secciones transversales.

EN ESTAS CONDICIONES SE REDUCE EL ANALISIS A LO QUE SUCEDE EN EL PLANO MEDIO DE LA CHAPA/BARRA ASUMIENDO QUE EL PROBLEMA SE PRESENTA EN DOS DIMENSIONES



Figura 5. Representación gráfica, chapas.

Figura 4. Chapas.

Hipótesis de rigidez. Los cuerpos analizados son considerados CUERPOS RIGIDOS. Bajo ésta hipótesis las distancias relativas entre dos puntos de un mismo cuerpo NO varían cuando se le aplican fuerzas, es decir que los mismos son indeformables.

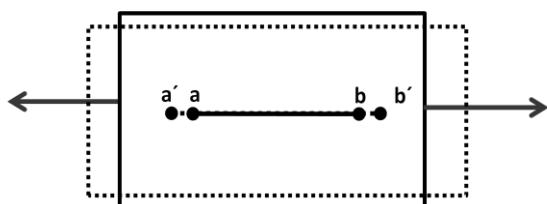


Figura 6. Sistema deformable, cuerpo elástico.

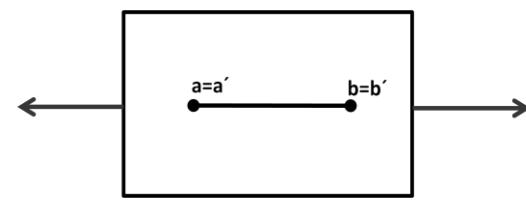


Figura 7. Sistema NO deformable, cuerpo rígido.

Si fijamos un sistema coordenado bidimensional X_Y en el plano y sobre él situamos una chapa rígida libre, y estudiamos las posibilidades de movimiento de la chapa observamos que la misma se puede trasladar según cualquier dirección del plano, y puede a su vez rotar alrededor de cualquier eje perpendicular al plano. Para definir la translación en una dirección cualquiera, se utilizan dos componentes ortogonales independientes.

En resumen se puede decir que la chapa en el plano posee **3 grados de libertad**, las translaciones según cada uno de los ejes y la rotación alrededor de un eje cualquiera perpendicular al plano. Llamaremos a este sistema de ejes el **Sistema Global de Referencia**.

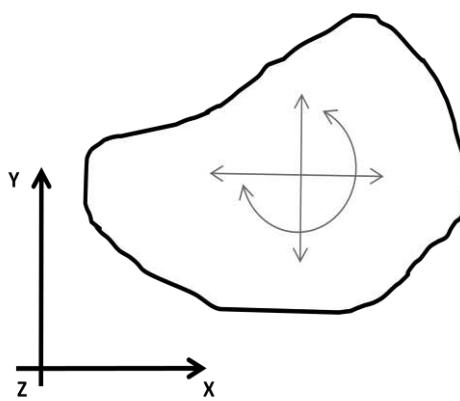
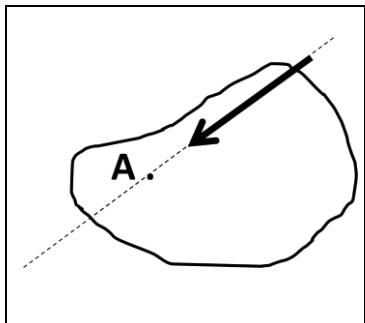
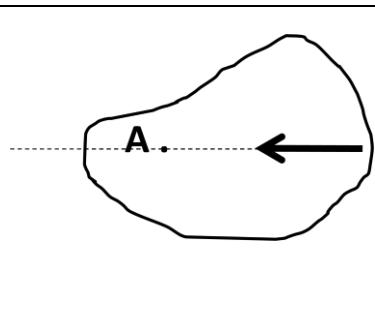
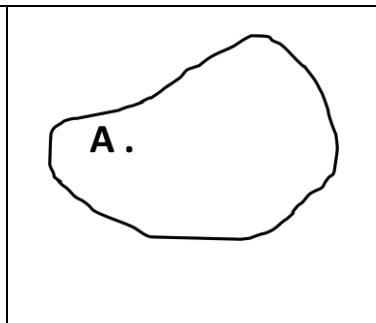


Figura 8. Grados de libertad, cuerpo libre

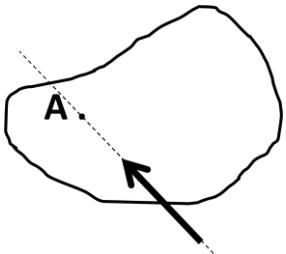
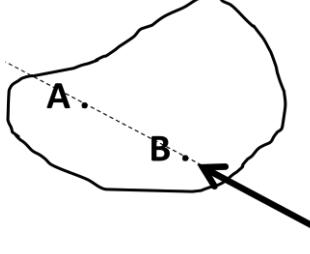
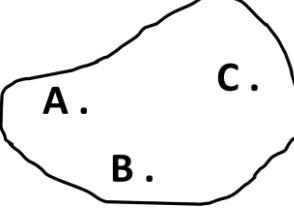
Como se menciona en el apunte "Principios Fundamentales", si esta chapa se encuentra sometida a la acción de un sistema de fuerzas y existe una **resultante de fuerzas NO NULA** existirá una aceleración lineal, cambia la velocidad del mismo, y/o si existe una **cupla resultante NO NULA** ésta generará una aceleración angular. En cambio si la resultante de fuerzas y momentos actuantes sobre la chapa son nulos y la misma está en reposo o se mueve con movimiento rectilíneo uniforme (movimiento estacionario) ésta permanecerá en reposo o en movimiento sin aceleraciones.

"Para asegurar el equilibrio de una chapa con tres grados de libertad, entonces se necesitan tres ecuaciones que aseguren la nulidad de fuerzas congruentes con los tres grados de libertad que tiene la chapa en el plano".

Si nos centramos en el equilibrio estático existen dos posibles planteos para asegurar esta condición, el primer caso se tomará una sumatoria de momentos y dos sumatorias de fuerza para asegurar el equilibrio.

		
<p>1) $\sum M_a = 0$</p> <p>Si definimos la sumatoria de MOMENTOS desde un punto "A" igual a cero aseguramos inexistencia de una cupla resultante y por tanto la no rotación del cuerpo pero no el equilibrio ya que es posible que exista una resultante de fuerzas no nula y la misma pase por dicho punto.</p>	<p>2) $\sum F_y = 0$</p> <p>Si luego definimos la sumatoria de FUERZAS en uno de los ejes, en este caso el eje "y" aseguramos el no desplazamiento del cuerpo en dicha dirección pero no el equilibrio ya que es posible que exista una resultante de fuerzas no nula perpendicular a la misma (en este caso en dirección "x") que pase por dicho punto.</p>	<p>3) $\sum F_x = 0$</p> <p>Por último definimos la sumatoria de FUERZAS en el otro eje, en este caso el eje "x" así aseguramos el no desplazamiento del cuerpo en dicha dirección y también el equilibrio ya que no existe más posibilidad de que la resultante de fuerzas sea también nula.</p>

En el segundo caso se tomarán sumatorias de momentos desde **tres puntos no alineados**.

		
1) $\sum M_a = 0$ Si definimos la sumatoria de MOMENTOS desde un punto "A" igual a cero aseguramos inexistencia de una cupla resultante y por tanto la no rotación del cuerpo pero no el equilibrio ya que es posible que exista una resultante de fuerzas no nula y la misma pase por dicho punto.	2) $\sum M_b = 0$ Si luego definimos la sumatoria de MOMENTOS desde un punto "B" igual a cero no alcanza para asegurar la inexistencia de resultante de fuerzas ya que es posible que exista una resultante de fuerzas no nula y la misma pase simultáneamente por los puntos "A" "B".	3) $\sum M_c = 0$ Si por último planteamos la sumatoria de MOMENTOS desde un tercer punto "C" igual a cero aseguraremos la inexistencia de resultante de fuerzas si los 3 puntos no se encuentran alineados ya que es imposible que exista una resultante de fuerzas no nula que pase simultáneamente por los puntos "A" "B" y "C".

"Para garantizar el equilibrio de un cuerpo bajo un sistema de fuerzas y momentos actuantes sobre él la sumatorias de fuerzas y momentos, o sumatoria de momentos respecto de tres puntos no alineados o combinaciones de ambos deberá ser nula".

Asegurar el equilibrio será, entonces, lograr restringir dichos desplazamientos y giros generados por sistemas de fuerzas y momentos "ACTIVOS" incorporando un sistema de fuerzas y momentos "REACTIVOS" que hagan que el sistema resultante sea un sistema equilibrado, a tal fin, se utilizan los vínculos, éstos son componentes físicos que restringen uno o más grados de libertad que impiden dichos movimientos, y que generan el sistema reactivo mencionado.

Los vínculos, entonces, generan las fuerzas y/o momentos reactivos que equilibran un sistema de cargas activas que actúa sobre un cuerpo para mantenerlo en equilibrio estático, entendiendo que los sistemas estructurales estudiados están en equilibrio si conservan la condición de reposo (en traslación y rotación) a pesar de estar actuando sobre ellos un sistema de fuerzas y/o momentos.

"Si a una chapa le restringimos sus 3 grados de libertad utilizando el menor número de vínculos externos BIEN DISPUESTOS el sistema se convierte en un sistema ISOSTÁTICO", LA CHAPA PUEDE CONSERVAR EL EQUILIBRIO ESTÁTICO PARA CUALQUIER CONDICIÓN DE CARGA QUE ACTUE SOBRE EL PLANO MEDIO DE LA MISMA

"Si existen más de una chapa y las mismas están vinculadas entre sí por medio de vínculos internos se necesitan disponer las vinculaciones externas necesarias para impedir cualquier movimiento absoluto y relativo en el sistema".

"Si la chapa tiene menos vínculos que los necesarios para limitar sus posibilidades de movimiento, entonces el esquema de sustentación es HIPOSTATICO. En estas condiciones sólo puede conservar el equilibrio estático para casos particulares de carga, tales que no produzcan resultante según el grado de libertad no restringido"

"Si a un cuerpo le restringimos más grados de libertad de los que posee el esquema de sustentación es HIPERESTATICO"

"Si a la chapa posee los vínculos necesarios o supernumerarios pero mal dispuestos el esquema de sustentación es APARENTE, al igual que en los casos hipostáticos, el sistema sólo puede conservar el equilibrio estático para casos particulares de carga"

2 TIPOS DE VÍNCULOS

2.1 VÍNCULOS EXTERNOS

Como se mencionó anteriormente, los vínculos externos son aquellos elementos que se agregan al sistema para poder soportar los estados de carga permaneciendo en la condición de reposo y/o traslación o rotación uniforme (estacionaria).

2.1.1 Biela (chapa articulada-articulada sin carga transversal aplicada)

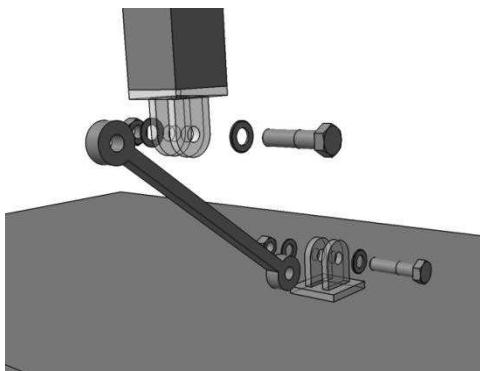


Figura 9. Biela, componentes.

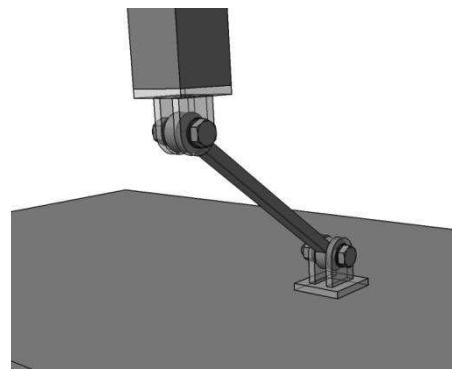


Figura 10. Biela, conjunto.

Si vinculamos una chapa con el extremo de una biela que posee un extremo fijo por medio de un bulón pasante, las posibilidades de movimiento de esa biela es un giro alrededor de dicho punto fijo, que para pequeños desplazamientos se traduce en un desplazamiento del otro extremo en la dirección perpendicular a la biela. Por otro lado por la forma de vinculación entre la chapa y la biela, la chapa también puede rotar alrededor de dicho punto. Estos movimientos descriptos se pueden dar en simultaneo.

"Desde un punto de vista cinemático una biela restringe únicamente 1 grado de libertad que corresponde con el desplazamiento en la dirección de su eje longitudinal"

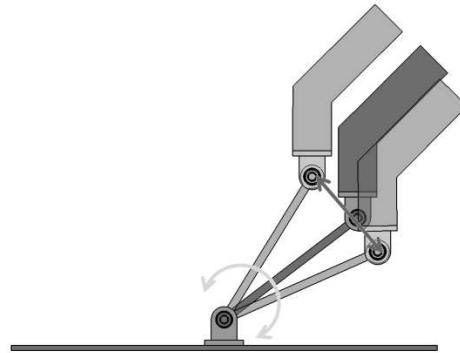


Figura 11. Biela, mov. permitido (1).

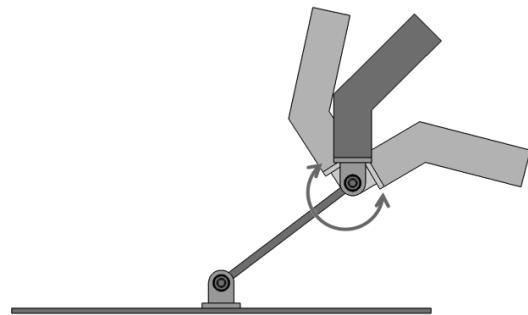


Figura 12. Biela, mov. permitido (2).

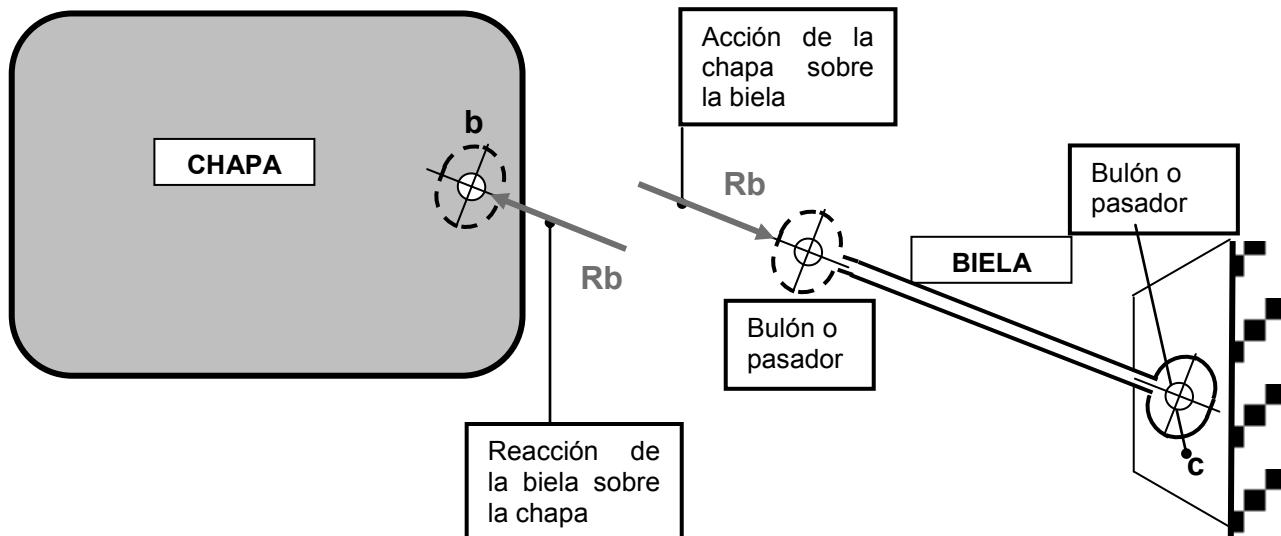


Figura 13. Biela, esquema de fuerzas.

"Una biela sólo puede reaccionar con una fuerza que tenga la dirección del eje de la biela (línea que une los dos extremos articulados de la biela), porque de lo contrario si la acción de la chapa sobre la biela Rb no pasara por el punto c, la biela giraría alrededor de este punto"

UNA BIELA ES UNA BARRA CON SUS DOS EXTREMOS ARTICULADOS Y NINGUNA FUERZA TRANSVERSAL APlicADA EN SU TRAMO.

Si representamos una biela en un sistema estructural determinado, llegamos, por ejemplo, al siguiente esquema que posee 2GL. **Si retiramos el vínculo pondremos en evidencia las fuerzas que el mismo realiza sobre la estructura (reacciones de vínculo) y el sistema recobrará sus 3GL.**

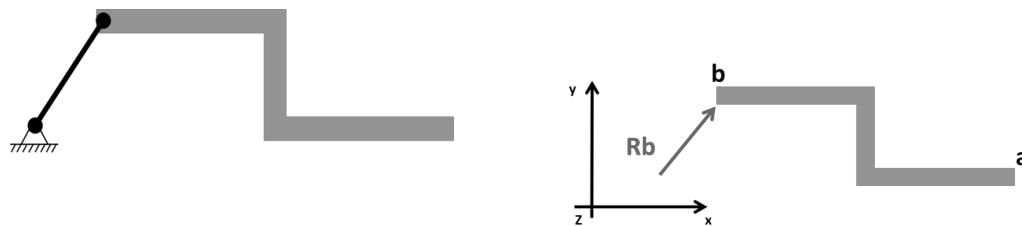


Figura 14. Esquema estructural, biela (2GL).

Figura 15. Reacciones de vínculo, biela (3GL).

Para poder conservar el sistema en equilibrio, la resultante del sistema activo aplicado sobre el cuerpo deberá ser una fuerza que tenga la dirección de R_b que pase por el punto "b" ya que el sistema reactivo, en este caso R_b , sólo podrá equilibrar ese tipo de fuerzas.

Bielas concurrentes – Articulación Virtual

Teniendo en cuenta el siguiente esquema podemos ver que la biela "I" y la biela "II" se cruzan en el punto denominado "AV" (articulación virtual). Este punto se denomina así porque el único movimiento permitido de la chapa es un giro alrededor de AV. El punto "a" por pertenecer a la biela I, se mueve según su perpendicular, lo mismo sucede con el punto "b". Entonces estos dos movimientos son posibles si la chapa gira alrededor de AV.

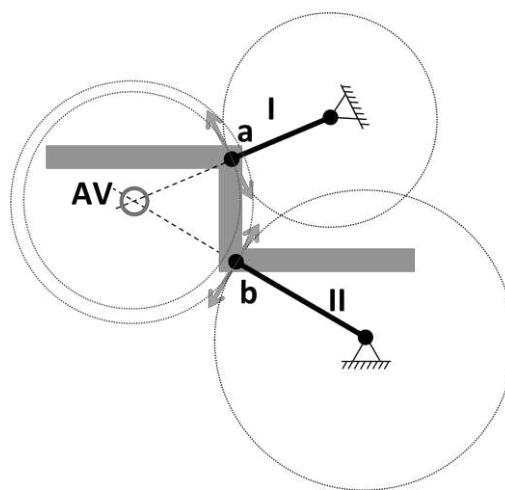


Figura 16. Bielas concurrentes.

Debido a que el sistema de la figura 14 sólo puede equilibrar un caso particular de carga, podemos concluir que el anterior es un sistema HIPOSTÁTICO. Para lograr un esquema de vinculación isostático se deberán agregar, por ejemplo, dos bielas más, que anulen todas las posibilidades de movimiento restantes y permitan aplicar cualquier estado de cargas sobre el cuerpo.

<p>1) -La biela vinculada a una chapa en el punto "b" deja libres 2GL. -El único sistema de fuerzas activas que permite el equilibrio del sistema es una fuerza que actúe sobre el punto "b" en la dirección de la biela.</p>	<p>2) -Agregando una biela que concurre también al punto b se genera una articulación virtual en "b" que permite, por ejemplo que el punto "a" se desplace en la dirección de la tangente al radio a-b (1 GL).</p> <p>-La única fuerza resultante que permite el equilibrio del sistema es una fuerza que pase por el punto "b" y que tenga cualquier dirección.</p>	<p>3) -Agregando una biela en el punto "a" tal que su dirección no permita el desplazamiento de "a" (es decir, que no concurre a "b"), el sistema queda impedido de moverse (0GL).</p> <p>-Por ser un sistema isostático resiste permite generar el equilibrio ante la aplicación de cualquier sistema de cargas activo.</p>

A continuación se presentan como ejemplo un posible sistema isostático y posteriormente uno con vinculación aparente.

Caso A (ISOSTÁTICO)

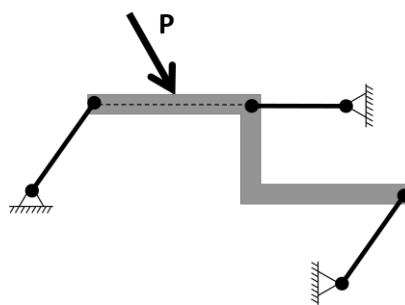


Figura 17. Sistema isostático, vínculos externos (0GL).

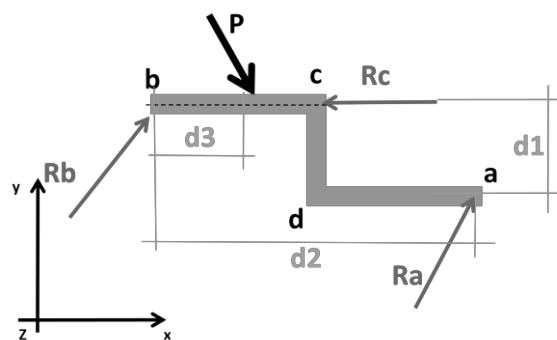


Figura 18. Sistema isostático, fuerzas reactivas (3GL).

"El esquema de la figura 17 es el esquema vinculado, el esquema de la figura 18 es el esquema de "cuerpo libre", en el cual se han eliminado los vínculos y se han colocado en su lugar las reacciones que esos vínculos aplican a la chapa.

Al ser un cuerpo libre, en este caso una chapa en el plano, la resultante del sistema de fuerzas activas y la resultante del sistema de fuerzas reactivas debe constituir un sistema equilibrado. Las tres incógnitas del sistema reactivo se encuentran planteando las tres condiciones que aseguren el equilibrio según los 3GL que posee la chapa libre en el plano".

Caso B (APARENTE)

Como se explicó anteriormente, en el caso de dos bielas concurrentes, se observa que en este caso, al aplicar la fuerza activa "P", el sistema reactivo de tres fuerzas concurrentes en "b" no pueden equilibrar a una carga que no pase por ese punto. En términos cinemáticos, al no estar restringida la posibilidad de rotación de la chapa alrededor de "b", cualquier fuerza activa que no pase por "b", provocará momento respecto de este punto y por lo tanto aceleración angular de la chapa.

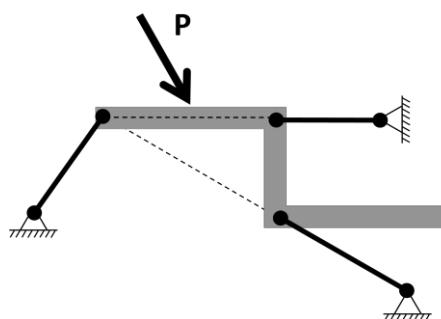


Figura 19. Sistema Aparente, vínculos externos (1GL).

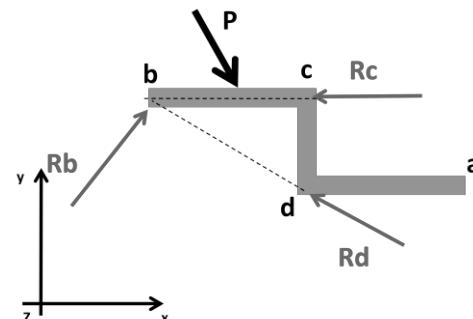


Figura 20. Sistema aparente, fuerzas reactivas (3GL).

"Un sistema con la cantidad de vínculos necesaria para ser isostático pero MAL DISPUESTOS, se transforma en un sistema con VINCULACIÓN APARENTE".

Si tomamos el sistema isostático (caso a), una vez reemplazados los vínculos por sus reacciones, se debemos plantear las tres ecuaciones de equilibrio de cuerpo libre **asociadas a sus posibilidades de movimiento**.

GRADO DE LIBERTAD		ECUACIÓN
CUERPO LIBRE	Desplazamiento en "X"	$\sum F_x = R_{xb} + R_{xa} - R_c + P_x = 0$
	Desplazamiento en "Y"	$\sum F_y = R_{yb} + R_{ya} - P_y = 0$
	Giro	$\sum M_b = R_{ya} * d2 + R_{xa} * d1 - P_y * d3 = 0$

o bien una sumatoria de momentos de tres puntos no alineados,

$$\sum M_a = 0$$

$$\sum M_b = 0$$

$$\sum M_d = 0$$

2.1.2 Vínculo simple (Unión con bulón pasante deslizante)

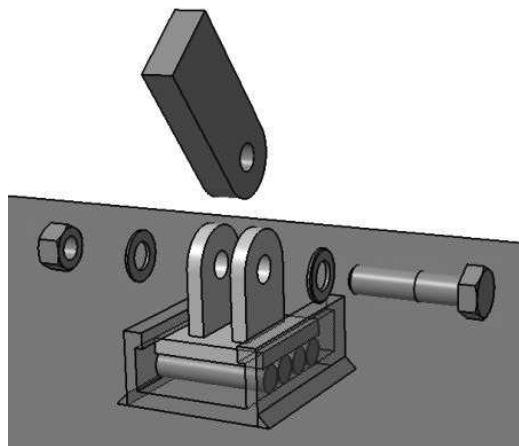


Figura 21. V. Simple, componentes.

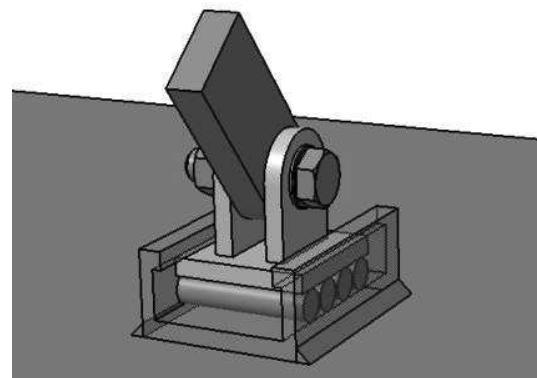


Figura 22. V. Simple, conjunto.

Si vinculamos una chapa con un vínculo simple, las posibilidades de movimiento son un giro de la chapa alrededor de dicho punto, y un desplazamiento en la dirección permitida por los rodillos. Los movimientos anteriores se pueden dar simultáneamente.

"El vínculo simple restringe únicamente 1 grado de libertad que se corresponde con impedir el desplazamiento en la dirección perpendicular al movimiento que permiten los rodillos"

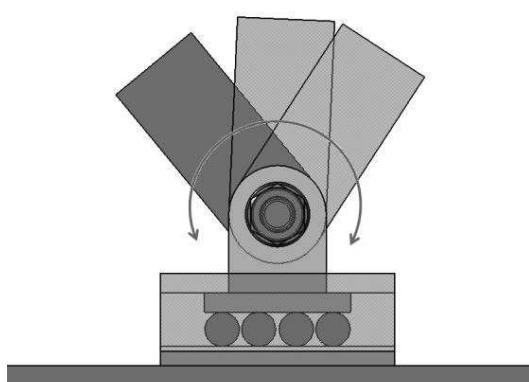


Figura 23. V. Simple, mov. permitido (1).

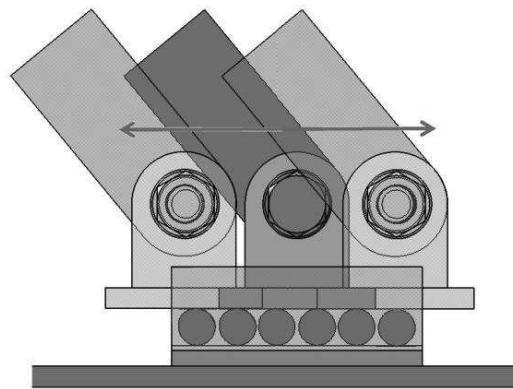


Figura 24 V. Simple, mov. permitido (1).

Si agregamos a una chapa un vínculo simple con determinada orientación, esa chapa posee 2GL. La dirección en la que el vínculo se orienta define la dirección del desplazamiento restringido. Si retiramos el vínculo pondremos en evidencia la fuerza que el mismo realiza sobre la estructura (reacción de vínculo) y el sistema recobrará sus 3GL. **Esa fuerza tendrá la dirección del vínculo original, es decir la dirección en que el vínculo restringía el desplazamiento.**



Figura 25. Esquema estructural, V. Simple (2GL).

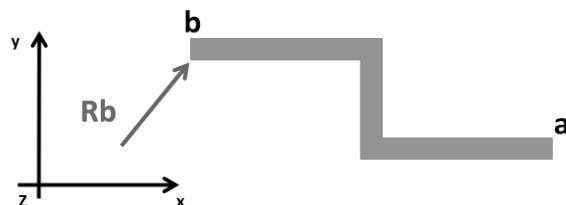


Figura 26. Reacciones de vínculo, V. Simple (3GL).

Como en el caso de la biela existe la misma condición sobre el sistema de fuerzas activo resultante para conservar el equilibrio del sistema.

El anterior es un sistema HIPOSTÁTICO para lograr un esquema de vinculación isostático se deberá agregar, al igual que con una única biela, dos vínculos simples (o bielas) más, bien dispuestas para generar un esquema ISOSTÁTICO.

2.1.3 Vínculo doble (Unión soldada con bulón pasante)

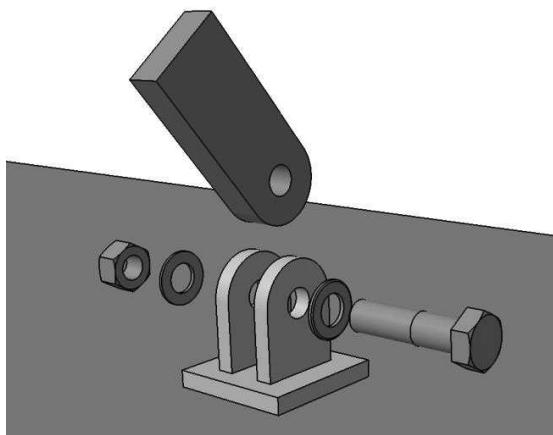


Figura 27. V. Doble, componentes.

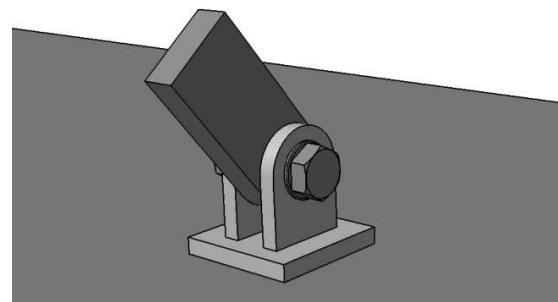


Figura 28. V. Doble, conjunto.

Si vinculamos un cuerpo con un vínculo doble, la única posibilidad de movimiento es un giro de la chapa alrededor de dicho punto.

"El vínculo doble permite sólo la rotación de la chapa alrededor del eje coincidente con el eje del bulón pasante, impidiendo la traslación en cualquier dirección, o sea debe anular las dos componentes ortogonales de la traslación, por lo tanto decimos que el vínculo doble restringe dos grados de libertad"

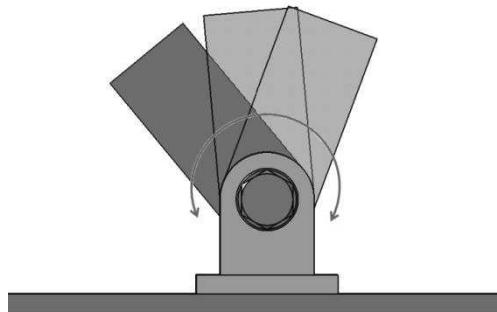


Figura 29. V. Doble, mov. permitido.

Si representamos un vínculo doble en un sistema estructural determinado, llegamos, por ejemplo, al siguiente esquema que posee 1GL. El punto donde se aplica el vínculo doble se corresponde al centro de rotación (si el mismo es el único vínculo existente). Si retiramos los vínculos pondremos en evidencia las fuerzas que el mismo realiza sobre la estructura (reacciones de vínculo) y el sistema recobrará sus 3GL.



Figura 30. Esquema estructural, V. doble (1GL).

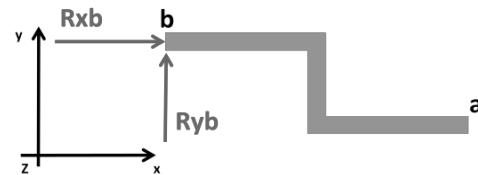


Figura 31. Cuerpo libre, Reacciones de vínculo, V. doble (3GL).

"Este sistema podrá únicamente equilibrar una carga que pase por el punto b, pero en este caso, y a diferencia de la biela o el vínculo simple, la resultante de fuerzas activas podrá tener cualquier dirección, por lo tanto queda definida por dos componentes ortogonales independientes".

El vínculo doble puede generar una fuerza de **cualquier módulo y dirección**, por desconocer dicha dirección deberán plantearse como dos fuerzas independientes (a diferencia del vínculo simple o la biela del cual se conoce la dirección de la reacción y la misma se plantea como una fuerza descompuesta en los ejes "x" e "y")

<p>- En el caso de utilizar un vínculo simple (ó la biela) se descompondrá la única fuerza que genera, de dirección conocida, en sus dos componentes, resultando ambas variables dependientes.</p>	
<p>- En el caso de utilizar un vínculo doble el mismo es capaz de generar una fuerza en cualquier dirección y por ser la misma desconocida, se plantearán dos fuerzas ortogonales, resultando ambas variables independientes.</p>	

El anterior es un sistema HIPOSTÁTICO para lograr un esquema de vinculación isostático deberemos agregar una biela (o vínculo simple) que impida el único movimiento permitido que es el giro alrededor de "b". A eso nos referimos cuando decimos "bien dispuesto".

<p>1) -El vínculo doble en "b" permite que la chapa gire a su alrededor (1 GL) y que el punto "a" se mueva en la dirección perpendicular a "ba".</p> <p>-Al igual que con dos bielas concurrentes, el único sistema de fuerzas activas que permite el equilibrio del sistema es una que pase por el punto "b" y que tenga cualquier dirección. Es decir que no ponga en juego el GDL del sistema</p>	<p>2) -Agregando un vínculo simple (o una biela) en el punto "a" tal que su dirección no permita el desplazamiento de "a" compatible con el vínculo doble, el sistema queda impedido de moverse (0GL). Entonces la dirección del vínculo simple no debe pasar por "b"</p> <p>-Por ser un sistema isostático permite generar el equilibrio ante la aplicación de cualquier sistema de cargas activo.</p>

A continuación se presentan un sistema isostático y posteriormente uno con vinculación aparente.

Caso A (ISOSTÁTICO)

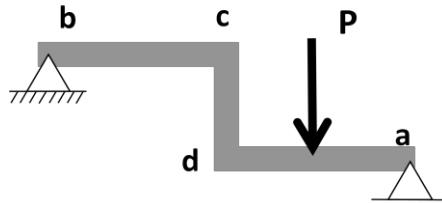


Figura 32. Sistema isostático, vínculos externos (0GL).

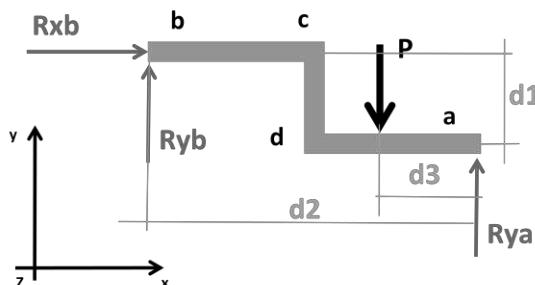


Figura 33. Cuerpo libre Sistema isostático, Fzas. activas y reactivas (3GL).

Caso B (APARENTE)

Se observa que el sistema no puede, con tres fuerzas concurrentes al punto "b", equilibrar una carga que no pase por dicho punto.

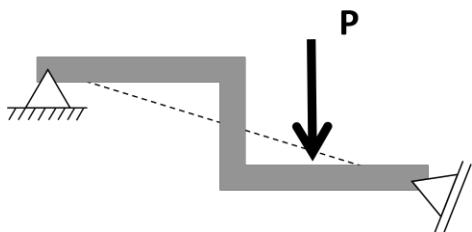


Figura 34. Sistema Aparente, vínculos externos (1GL).

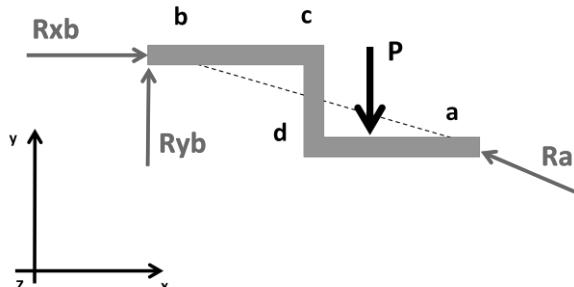


Figura 35. Cuerpo libre - Sistema aparente, fuerzas activas y reactivas (3GL).

Las ecuaciones de equilibrio que deberán utilizarse son las tres correspondientes a un cuerpo libre en el espacio.

En el caso del diagrama de cuerpo libre de la figura 35 observamos que como todas las reacciones pasan por "b", cuando las fuerzas activas producen momento respecto de "b" distinto de cero, no hay una fuerza reactiva que lo contrarreste.

Tomando el caso isostático, al reemplazar los vínculos por sus respectivas reacciones, la chapa recupera sus 3GL, y por lo tanto para el total de las fuerzas reactiva y activas debemos plantear las tres ecuaciones de equilibrio de cuerpo libre **asociadas a sus posibilidades de movimiento**.

GRADO DE LIBERTAD	ECUACIÓN
CUERPO LIBRE	Desplazamiento en "X" $\sum F_x = Rxb = 0$
	Desplazamiento en "Y" $\sum F_y = Ryb + Rya - P = 0$
	Giro $\sum M_a = -Rxb * d1 - Ryb * d2 + P * d3 = 0$

2.1.4 Aclaraciones (Bielas, Vínculos Simples, Vínculos Dobles)

1) Únicamente para el cálculo de las reacciones la representación gráfica de una biela se puede realizar como la Figura 36, o bien, como la Figura 37 asumiendo que el giro en su punto fijo es un desplazamiento en su punto opuesto.



Figura 36. Esquema estructural, biela-V. simple, cálculo de reacciones (1).



Figura 37. Esquema estructural, biela-V. simple, cálculo de reacciones (2).

"Sólo para el cálculo de reacciones la biela se podrá reemplazar por un vínculo simple"

2) Dos bielas (o vínculos simples) concurrentes a un punto producen un centro de rotación en éste, lo que es equivalente a tener un vínculo doble en ese lugar. El punto mencionado podrá o no ser un punto material de la chapa, en cuyo caso se corresponderá a una articulación virtual "AV". Este detalle facilita el cálculo de reacciones haciendo del mismo un posible punto para el planteo de la ecuación de momento.



Figura 38. Esquema estructural, bielas concurrentes, cálculo de reacciones (1).



Figura 39. Esquema estructural, bielas concurrentes, cálculo de reacciones (2).

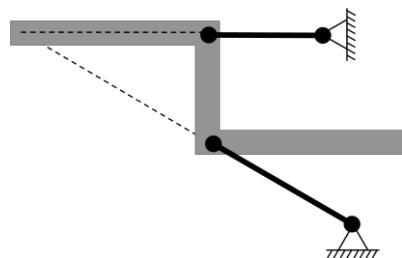


Figura 40. Esquema estructural, bielas concurrentes, cálculo de reacciones (3).



Figura 41. Esquema estructural, bielas concurrentes, cálculo de reacciones (4).

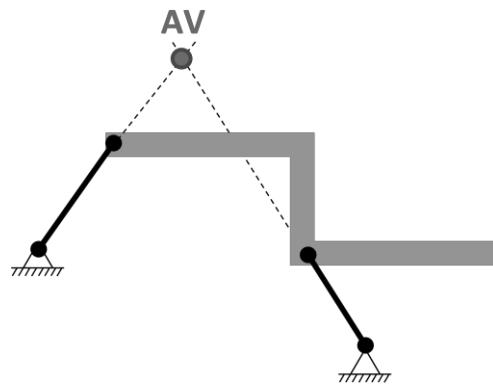


Figura 42. Esquema estructural, bielas concurrentes, cálculo de reacciones (2).

"Considerar el punto de cruce de las bielas o vínculos simples facilita el cálculo de reacciones en algunos casos"

2.1.5 Empotramiento (Unión soldada)

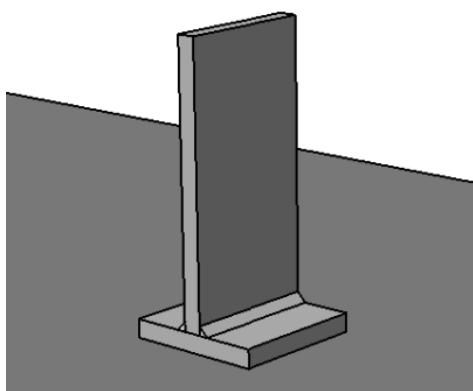


Figura 43. Empotramiento (1)

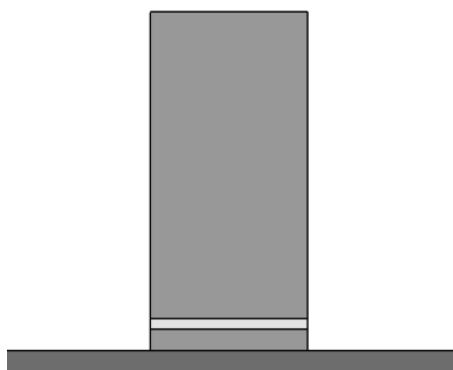


Figura 44. Empotramiento (2)

Si vinculamos una chapa con un empotramiento, las posibilidades de movimiento de la chapa en el plano se anulan completamente.

"El empotramiento restringe los 3 grados de libertad, impidiendo todos los movimientos posibles de la chapa en el plano. Un empotramiento se caracteriza porque no sólo reacciona con dos fuerzas ortogonales independientes, sino también con una cupla"

Si representamos un empotramiento en un sistema estructural determinado, llegamos, por ejemplo, al siguiente esquema: El sistema resultante se encuentra imposibilitado de moverse (0GL). Si retiramos los vínculos pondremos en evidencia las fuerzas que el mismo realiza sobre la estructura (reacciones de vínculo) y el sistema recobrará sus 3GL.

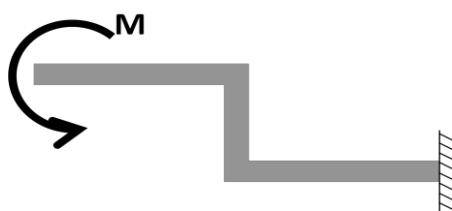


Figura 45. Esquema estructural empotramiento (0GL).

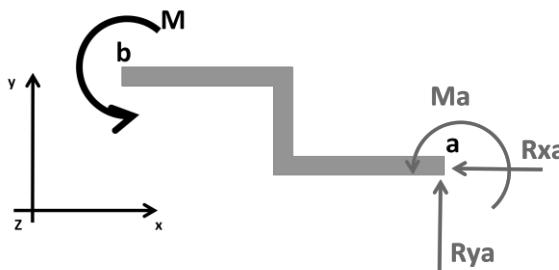


Figura 46. Cuerpo libre – Fzas activas y reactivas, empotramiento (3GL).

El anterior es un sistema ISOSTÁTICO por lo tanto no necesita más vínculos externos para lograr el equilibrio ante cualquier sistema de cargas activas.

"Las ecuaciones de equilibrio que deberán utilizarse son las tres correspondientes a un cuerpo libre en el plano, es decir, deberán asegurar la nulidad de las fuerzas congruentes con los grados de libertad que tiene el cuerpo en asociadas a sus posibilidades de movimiento, por ejemplo

GRADO DE LIBERTAD	ECUACIÓN
CUERPO LIBRE	Desplazamiento en "X"
	$\sum F_x = -Rxa = 0$
	Desplazamiento en "Y"
	$\sum F_y = Ryg = 0$
	Giro
	$\sum M_a = M + Ma = 0$

2.1.6 Empotramiento guiado (unión soldada deslizante)

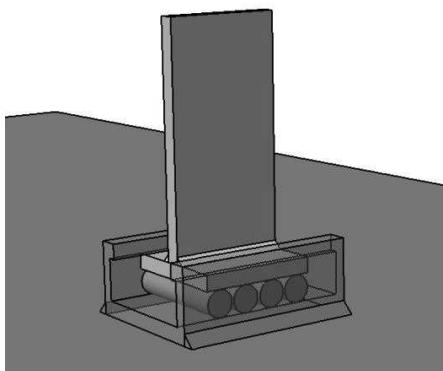


Figura 47. Empotramiento guiado (1).

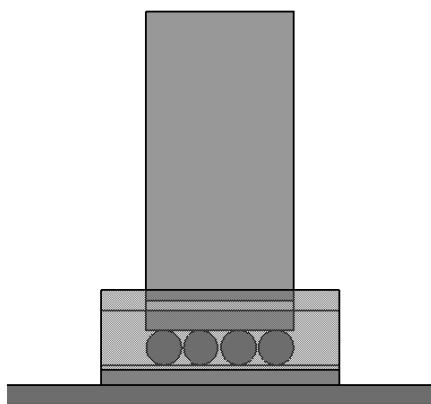


Figura 48. Empotramiento guiado (2).

Si vinculamos una chapa con un empotramiento guiado, la única posibilidad de movimiento es un desplazamiento de la chapa en la dirección de los rodillos ya que la guía no le permite girar ni desplazarse perpendicularmente a la dirección de giro de los rodillos.

"El empotramiento guiado restringe 2 grados de libertad que se corresponden con el giro y el desplazamiento normal a los rodillos, y permite el desplazamiento en la dirección de los rodillos"

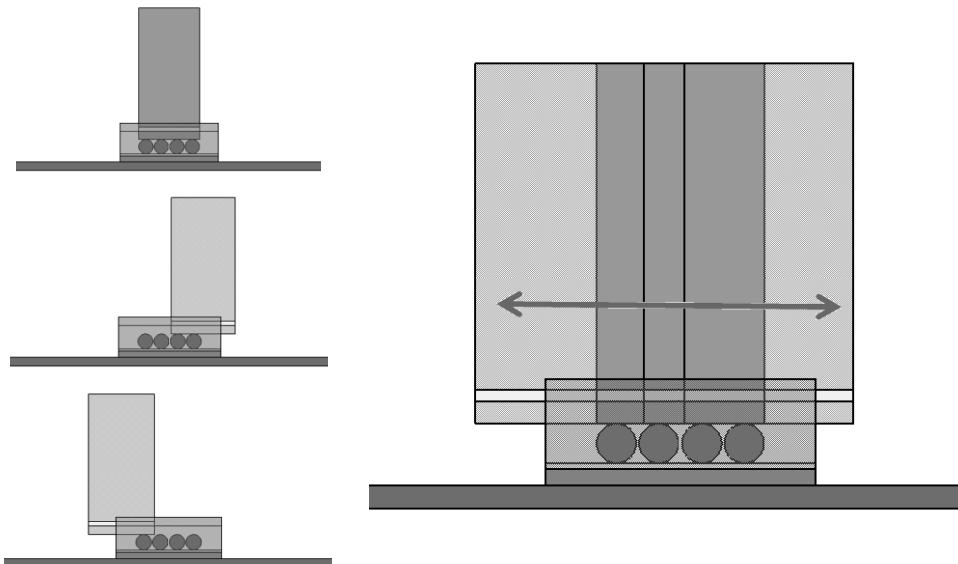


Figura 49. Empotramiento guiado, mov. permitidos.

Si representamos un empotramiento en un sistema estructural determinado, llegamos, por ejemplo, al siguiente esquema que posee 1GL. El sistema resultante únicamente podrá desplazarse en la dirección perpendicular al vínculo (dirección de los rodillos). Si retiramos los vínculos pondremos en evidencia las fuerzas que el mismo realiza sobre la estructura y el sistema recobrará sus 3GL.



Figura 50. Esquema estructural, empotramiento guiado (1GL).



Figura 51. Cuerpo libre, empotramiento guiado (3GL).

El anterior es un sistema HIPOSTÁTICO para lograr un esquema de vinculación isostático se deberá agregar una biela (o vínculo simple) bien dispuestas.

<p>Diagrama de un sistema estructural isostático. La parte vertical tiene un empotramiento guiado en 'a' y un soporte rígido en 'c'. La parte horizontal tiene un empotramiento fijo en 'd' y un soporte rígido en 'b'. Un punto 'd' se encuentra en la parte horizontal.</p>	<p>Diagrama de un sistema estructural isostático. La parte vertical tiene un empotramiento guiado en 'a' y un soporte triangular en 'c'. La parte horizontal tiene un empotramiento fijo en 'd' y un soporte rígido en 'b'. Un punto 'd' se encuentra en la parte horizontal.</p>
<p>1) -El empotramiento guiado en "a" permite, por ejemplo que el punto "b" se desplace verticalmente (1 GL).</p> <p>- Para asegurar el equilibrio el sistema de fuerzas activo debe cumplir con la condición de no tener resultante en la dirección vertical.</p>	<p>2) -Agregando un vínculo simple (o una biela) en el punto "b" tal que su dirección no permita el desplazamiento vertical de "b" el sistema queda impedido de moverse (0GL).</p> <p>-Por ser un sistema isostático el sistema activo no tiene ninguna restricción porque el sistema reactivo siempre va a ser capaz de generar la equilibrante.</p>

A continuación se presentan un sistema isostático y posteriormente uno con vinculación aparente.

Caso A (ISOSTATICO)

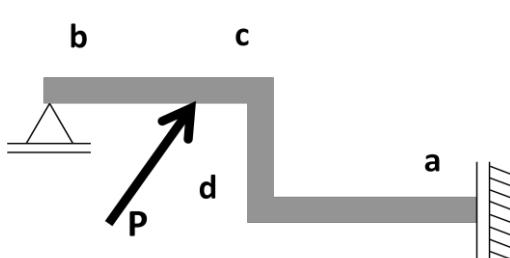


Figura 52. Sistema isostático, vínculos externos (0GL).

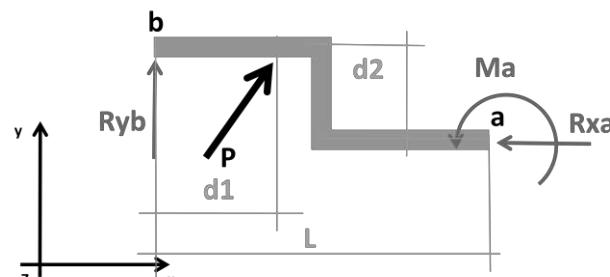


Figura 53 Sistema isostático, fuerzas reactivas (3GL).

Caso B (APARENTE)

Podemos observar que el siguiente sistema no puede generar una reacción vertical que compense la componente vertical del sistema de fuerzas activo resultante.

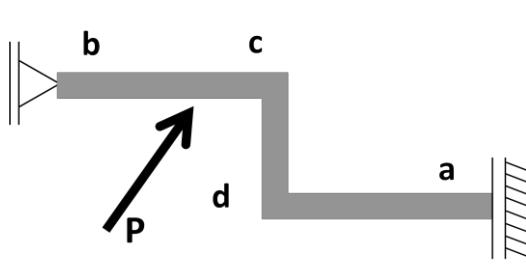


Figura 54. Sistema Aparente,
vínculos externos (1GL).

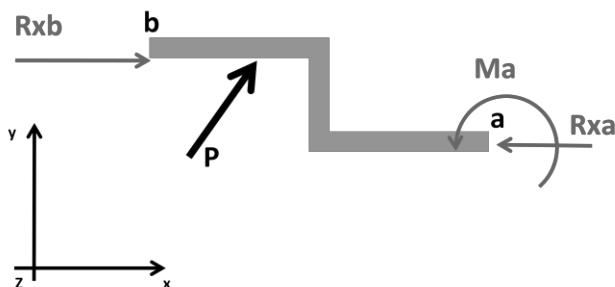


Figura 55. Sistema aparente, fuerzas
reactivas (3GL).

Las ecuaciones de equilibrio que deberán utilizarse (para el caso isostático) son las tres correspondientes a un cuerpo libre en el espacio **asociadas a sus posibilidades de movimiento**, por ejemplo

	GRADO DE LIBERTAD	ECUACIÓN
CUERPO LIBRE	Desplazamiento en "X"	$\sum F_x = -Rxa + Px = 0$
	Desplazamiento en "Y"	$\sum F_y = Py + Ryb = 0$
	Giro	$\sum M_b = +Py * d1 - Rxa * d2 + Ma = 0$

2.2 -VÍNCULOS INTERNOS, SISTEMAS DE MÁS DE UNA CHAPA

Así como una sola chapa puede estar vinculada al plano que la contiene, se pueden definir vinculaciones entre dos o más chapas. Dichos vínculos **agregan ecuaciones de equilibrio relativo** que complementan a las tres de cuerpo rígido libre presentadas con anterioridad.

"Las ecuaciones de equilibrio relativo deben asegurar que no haya resultante según el GDL relativo que el vínculo no es capaz de limitar.

Así en el caso de que esté permitido el giro relativo entre dos chapas, deberá asegurarse que la resultante de las fuerzas en cada una de las chapas pase por el centro de rotación relativo, es decir el momento de esas fuerzas respecto de dicho punto debe ser nulo; y en el caso de un desplazamiento relativo permitido, la resultante de las fuerzas en cada chapa según ese desplazamiento debe ser nula".

2.2.1 Articulación 2 chapas (unión con bulón pasante)

Si tomamos dos chapas libres en el plano, los mismos tienen 6 GL, cada una tiene los 3GL correspondientes a los movimientos de cuerpo libre independiente uno del otro. Si los vinculamos entre sí con un bulón pasante, estaríamos restringiendo 2 GL, esto es porque suponiendo fija una de las chapas, la otra el único movimiento permitido es un giro alrededor del bulón pasante.

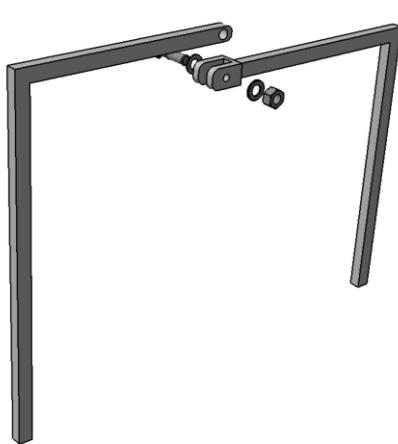


Figura 56. Articulación, componentes.



Figura 57. Articulación, conjunto.

"Dos chapas que no están vinculadas entre sí poseen $2 \times 3 = 6$ Grados de libertad correspondientes a los movimientos de cuerpo libre independiente una de la otra"

Movimientos como cuerpo rígido (3GL)

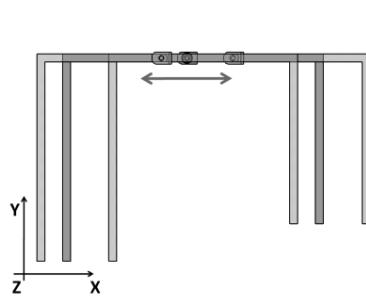


Figura 58. Mov. de cuerpo libre, Traslación en "x".

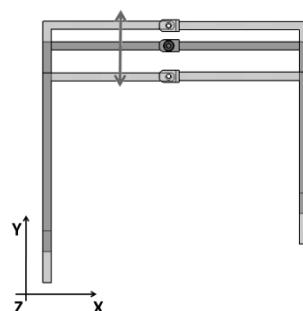


Figura 59. Mov. de cuerpo libre, Traslación en "y".

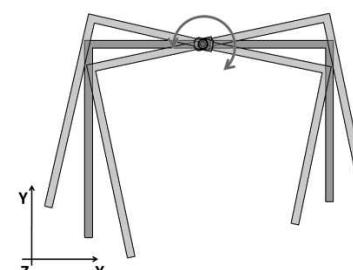


Figura 60. Mov. de cuerpo libre, rotación en "z".

Si por un momento consideramos ambos chapas vinculadas rígidamente entre sí, las ecuaciones que permiten establecer el equilibrio de cuerpo rígido de ambas chapas son:

$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0 \\ \sum F_y &= 0 \\ \sum M &= 0\end{aligned}$$

Movimiento relativo (1GL)

Si ahora **fijamos una de las chapas** podemos poner de manifiesto las posibilidades de movimiento relativo del sistema. En este caso observamos que fijando, por ejemplo, la chapa I, la única posibilidad de movimiento de la chapa II es una rotación alrededor del punto articulado. Podemos observar, por lo tanto,

que a la chapa II la articulación relativa le condicionó el desplazamiento en el eje "x" y en el eje "y" dejando libre únicamente un grado de libertad.

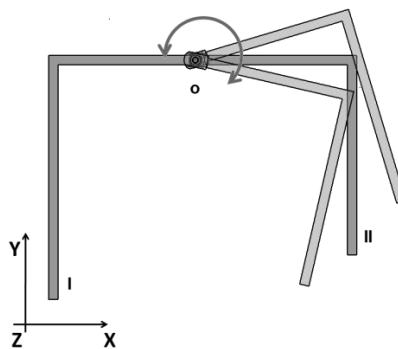


Figura 61. Movimiento relativo, chapa I fija.

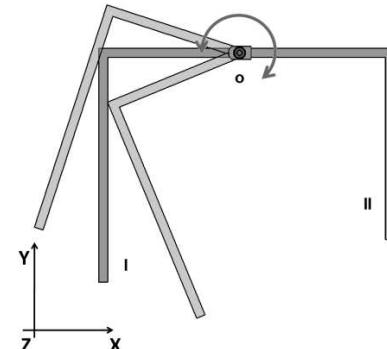


Figura 62. Movimiento relativo, chapa II fija.

"Una articulación relativa entre dos chapas restringe 2 Grados de Libertad"

Como mencionamos con anterioridad la única posibilidad de movimiento relativo es el giro alrededor de la articulación que las vincula, entonces la condición de equilibrio es que la resultante de todas las fuerzas (activas y reactivas) que actúan en una de las chapas, pase por esa articulación, para asegurar que no produzcan momento y por consiguiente activen el GL no restringido. La ecuación que permiten establecer el equilibrio entre las chapas, será entonces, una ecuación de momento relativo, caso correspondiente a la Figura 61.

$$\sum M_{rel \ 0}^{II} = 0$$

o bien, para la Figura 62

$$\sum M_{rel \ 0}^I = 0$$

"El conjunto de dos chapas unidas por una articulación posee 4GL, 3GL corresponden al movimiento del conjunto como cuerpo rígido libre y 1GL corresponde al movimiento relativo no restringido entre las chapas"

Para efectuar la anterior afirmación nos podemos asistir de un **análisis de sustentación** que nos permite determinar si la estructura está vinculada correctamente. Para el caso anterior:

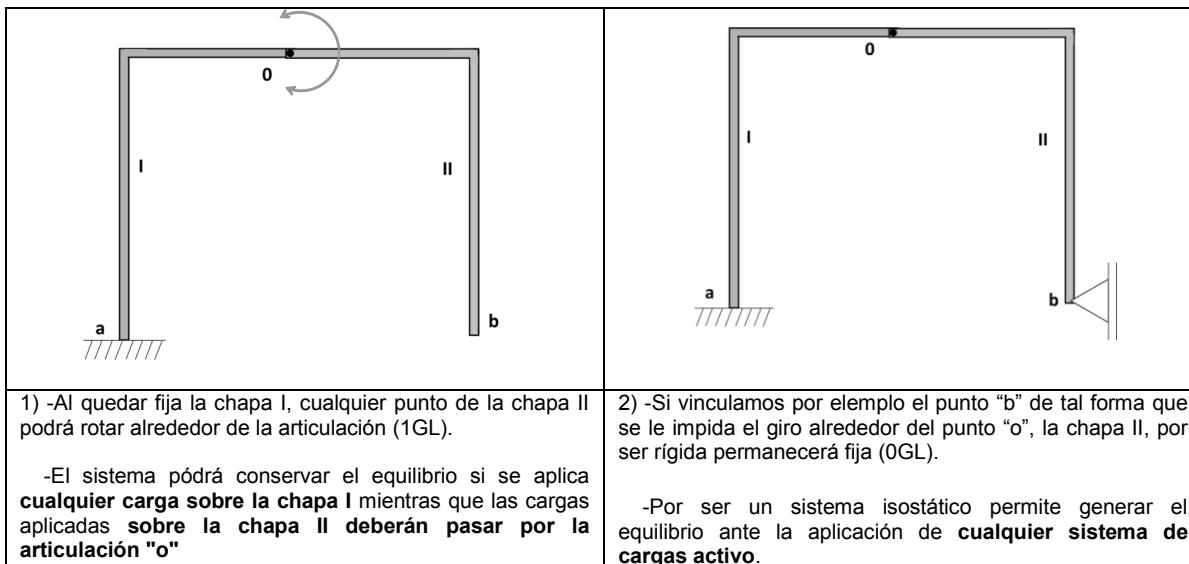
Cantidad de chapas?	2	+6GL
Vínculos relativos internos?		
Articulación relativa	1	-2GL
GL del sistema		+4GL
Vínculos externos?		
	-	
GL del sistema		+4GL
Tiene la cantidad necesaria de vínculos externos y están bien dispuestos?		

De este análisis podemos afirmar entonces que el anterior es un sistema HIPOSTÁTICO. Para lograr un esquema de vinculación isostático se deberán restringir los 4GL que posee el sistema de las dos chapas articuladas.

Se pueden presentar dos casos, el primero, se corresponde a una chapa isostática a la cual se acopla, mediante una articulación, otra chapa (Chapa isostática - Chapa apoyada). El segundo caso se corresponde a dos chapas vinculadas entre sí y con una vinculación externa tal que no permita a ninguna sustentarse por sus propios medios (Chapa apoyada - Chapa apoyada)

2.2.1.1 Chapa isostática - Chapa apoyada

Si vinculamos el sistema tal que una de las chapas está isostáticamente sustentada, y a ésta le articulamos una segunda, ésta última sólo puede rotar alrededor de esa articulación, y sólo resta agregar un vínculo que impida esta rotación (biela no pasante por la articulación relativa)



Caso A (ISOSTATICO, chapa I isostática)

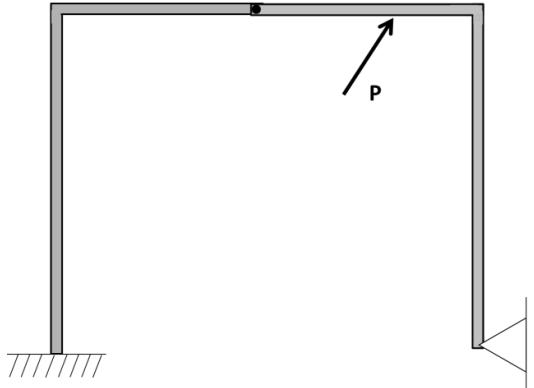


Figura 63. Sistema isostático, vínculos externos (0GL).

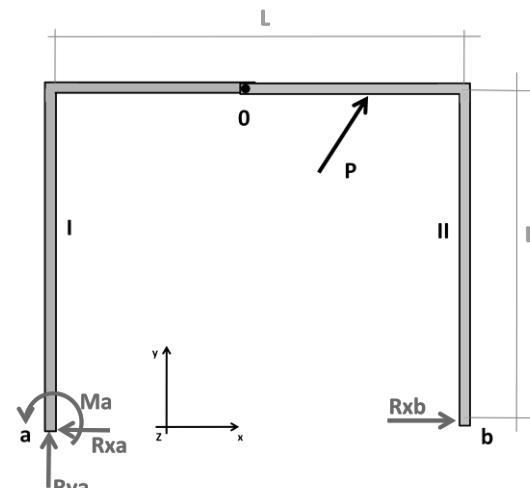


Figura 64. Cuerpo libre, fuerzas activas y reactivas (4GL).

Si realizamos nuevamente el análisis de sustentación presentado anteriormente podemos llegar al siguiente resultado:

Cantidad de chapas?	2	+6GL
Vínculos relativos internos?		
GL del sistema	Articulación relativa	1 -2GL
Vínculos externos?		+4GL
	Empotramiento	1 -3GL
	Vínculo simple	1 -1GL
GL del sistema		+0GL
Tiene la cantidad necesaria de vínculos externos y están bien dispuestos?		SÍ

Confirmando que el anterior es un **sistema ISOSTÁTICO**

Caso B (APARENTE, chapa I isostática)

Podemos observar al tomar momento relativo de la chapa II respecto al punto "o" que el siguiente sistema no puede generar una reacción en "b" que compense el momento generado por la fuerza activa "P".

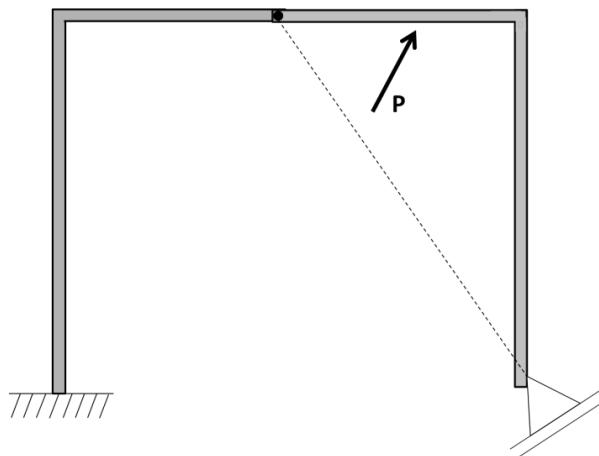


Figura 65. Sistema Aparente, vínculos externos (1GL).

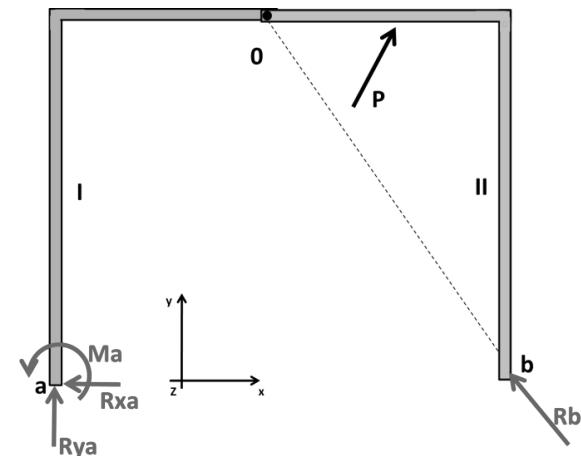


Figura 66. Cuerpo libre - Sistema aparente, fuerzas activas y reactivas (4GL).

Si realizamos el análisis de sustentación presentado anteriormente podemos llegar al siguiente resultado:

Cantidad de chapas?	2	+6GL
Vínculos relativos internos?		
Articulación relativa	1	-2GL
GL del sistema		+4GL
Vínculos externos?		
Empotramiento	1	-3GL
Vínculo simple	1	-1GL
GL del sistema		+0GL
Tiene la cantidad necesaria de vínculos externos y están bien dispuestos?	NO	

Confirmando que el anterior es un **sistema con VINCULACIÓN APARENTE**

Para resolver el sistema isostático las ecuaciones de equilibrio que deberán utilizarse son las tres asociadas a sus posibilidades de movimiento de un cuerpo libre en el espacio más la ecuación de equilibrio relativo que anule la posibilidad de movimiento respecto del cuarto grado de libertad, por ejemplo

GRADO DE LIBERTAD	ECUACIÓN	
CUERPO LIBRE RÍGIDO	Desplazamiento en "X"	$\sum F_x = Rxb - Rxa + Px = 0$
	Desplazamiento en "Y"	$\sum F_y = Py + Rya = 0$
	Giro	$\sum M_a = +Ma + Py * 0.75L - Px * L = 0$
MOVIMIENTO RELATIVO	Giro de la chapa "II" respecto de la chapa "I"	$\sum M_o^{II} = Rxb * L + Py * 0.25L = 0$

NOTA: Si planteamos la ecuación de equilibrio relativo en primer lugar podemos calcular la R_{xb} directamente resultando dos sistemas de ecuaciones desacoplados, un sistema de 1×1 y un sistema de 3×3 (dos sistemas desacoplados).

Camino de las cargas

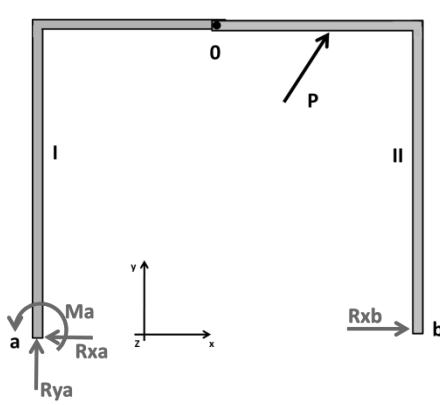


Figura 67. Camino de cargas. Chapa II (no isostática) cargada.

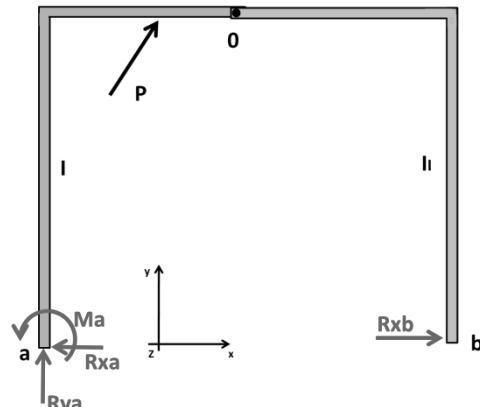


Figura 68. Camino de cargas. Chapa I (isostática) cargada.

Debe notarse que si el sistema activo se encuentra aplicado sobre la chapa isostática (chapa I) las reacciones en la chapa II son nulas. Esto surge en la ecuación de equilibrio relativo ya que al verificar la sumatoria de momentos respecto a la articulación "o" la única fuerza actuante será la reacción de vínculo, y por tanto, para existir el equilibrio, ésta deberá ser nula (Figura 68). Esto pone en evidencia que la chapa I no necesita de la chapa II y por lo tanto las cargas que actúen sobre ella van directamente a sus apoyos. En cambio cualquier fuerza que actúe sobre la II, va a generar reacciones en la I porque la chapa II necesita de la I para asegurar el equilibrio

$$\sum M_o^I = R_{xb} * L = 0 \Rightarrow R_{xb} = 0$$

"Las cargas viajan a través de la estructura desde el punto de aplicación hacia los vínculos. Si una de las chapas del sistema es isostática por sí misma, el resto de las chapas se apoyan en ésta, por lo tanto, las cargas que actúen en estas últimas generaran reacciones sobre la primera y en consecuencia en todos los vínculos externos. En el caso de las cargas que actúen en la chapa isostática no transmitirán reacciones a las restantes y no generaran reacciones sobre los vínculos externos de las mismas"

Reacciones vínculos internos – Acciones mutuas

Si quisieramos conocer las reacciones internas de la articulación debemos desarmar la estructura para poner esas reacciones de manifiesto, **teniendo que agregar tanto las cargas activas como reactivas de todo el sistema incluyendo las acciones mutuas de una chapa respecto a la otra.**

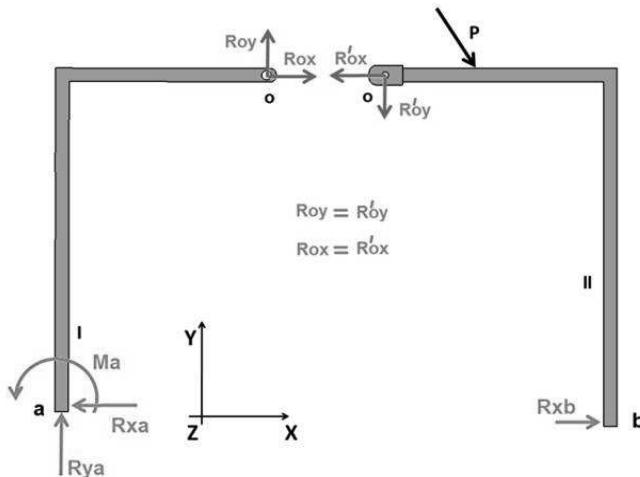


Figura 69. Reacciones de vínculo internas.

"Una vez resueltas las reacciones de los vínculos externos, separando ambas chapas por su vínculo interno, y teniendo en cuenta que en este ejemplo es una articulación, se colocamos las reacciones que pasan de una chapa a la otra por ese vínculo, y planteando sólo dos ecuaciones de equilibrio para cualquiera de las chapas podemos establecer el valor de dichas reacciones, también llamadas acciones mutuas"

Si hubiésemos procedido así antes de calcular las reacciones externas, las ecuaciones resultantes hubieran sido un **sistema de 6x6 acoplado que surge de plantear las tres ecuaciones de equilibrio para cada chapa**. En el caso de una chapa que apoya sobre otra, se puede resolver la estructura siguiendo el camino de las cargas, es decir primero resolver las reacciones en la chapa II con un sistema de 3x3, y luego transferir las reacciones halladas R'_{ox} y R'_{oy} **invirtiendo sus sentidos de acuerdo al principio de acción y reacción**, sobre la chapa I y resolver ésta última.

Así se ve claramente que una fuerza que actúe en la chapa I, sólo interviene recién en la segunda parte del cálculo, y no influye en los resultados de las reacciones calculadas para los vínculos de la chapa II.

"Las fuerzas activas de la chapa isostática no generan reacciones en la chapa que se apoya, pero sí las fuerzas reactivas que actúan en la chapa que se apoya, transfieren cargas a la isostática"

2.2.1.2 Chapa apoyada - Chapa apoyada

Si vinculamos el sistema tal que ninguna de las chapas esté isostáticamente sustentada por sí misma, ambas chapas dependen de la existencia de la otra para poder sostenerse.

<p>1) -Al vincular la chapa I con un vínculo doble (-2GL), cualquier punto de la chapa II podrá rotar alrededor de la articulación "o" (mov. relativo) pero además podrá rotar alrededor del punto "a" que se encuentra vinculado con un bulón pasante (restan restringir 2GL). Es decir el sistema como cuerpo rígido tiene 1GL, pero además por la preencia del vínculo interno tiene 1GL relativo</p> <p>-Cualquier carga que no este aplicada sobre la chapa I y no pase por el punto "a" no podrá ser equilibrada por el vínculo.</p>	<p>2) -Si se coloca en el punto "b" un vínculo doble, puede observarse que el punto "o" por pertenecer a la chapa I puede girar alrededor de "a" moviéndose en una perpendicular al radio "oa", pero por pertenecer simultáneamente a la chapa II, puede girar alrededor de "b" y moverse perpendicular al radio "ob". En consecuencia el punto "o" no se puede mover, y por lo tanto al tener tres puntos fijos la estructura no puede moverse. Como tiene el número mínimo de vínculos necesarios adecuadamente dispuestos, el sistema es isostático.</p> <p>-Por ser un sistema isostático podrá generar el equilibrio ante la aplicación de cualquier sistema de cargas activo sobre cualquiera de las chapas.</p>

Caso A (ISOSTATICO, chapas apoyadas)

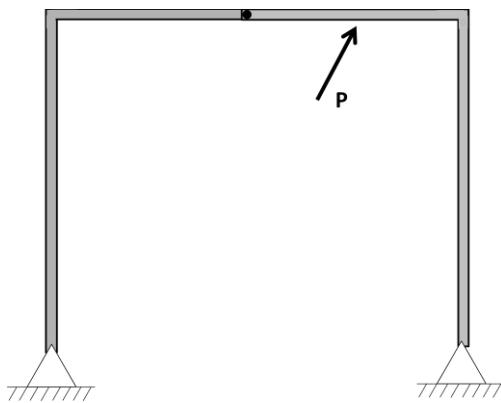


Figura 70. Sistema isostático, vínculos externos (0GL).

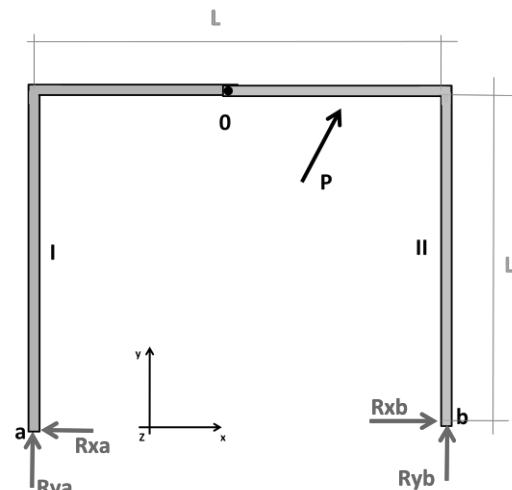


Figura 71. Cuerpo libre, fuerzas activas y reactivas (4GL).

Si realizamos el análisis de sustentación presentado anteriormente podemos llegar al siguiente resultado:

Cantidad de chapas?	2	+6GL
Vínculos relativos internos?		
Articulación relativa	1	-2GL
GL del sistema		+4GL
Vínculos externos?		
Vínculo doble	2	-4GL
GL del sistema		+0GL
Tiene la cantidad necesaria de vínculos externos y están bien dispuestos?	SÍ	

Confirmando que el anterior es un **sistema ISOSTÁTICO**

Caso B (APARENTE, chapas apoyadas)

Podemos observar al tomar momento relativo de la chapa II respecto al punto "o" que el siguiente sistema no puede generar una reacción en "b" que compense el momento generado por la fuerza activa.

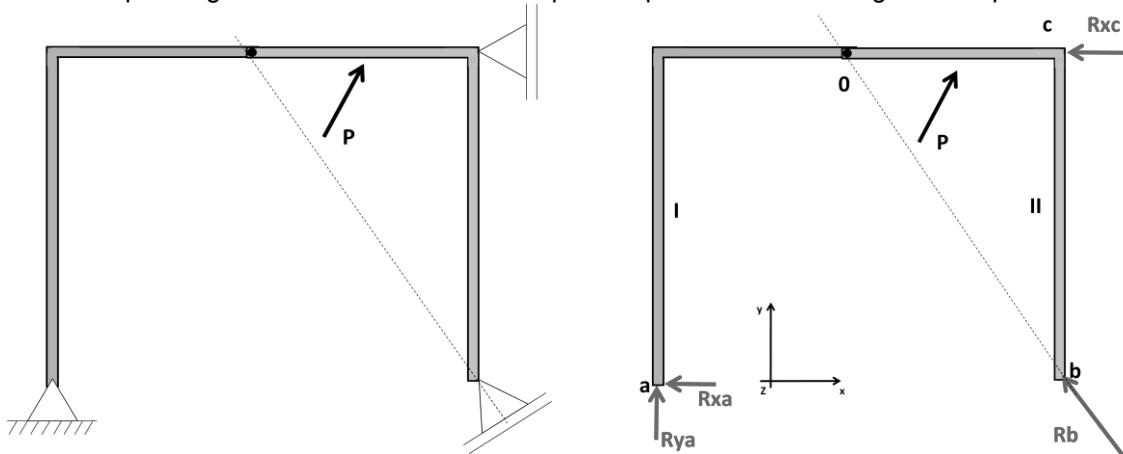


Figura 72. Sistema Aparente, vínculos externos (2GL).

Figura 73. Cuerpo libre, fuerzas activas y reactivas (4GL).

Si realizamos el análisis de sustentación presentado anteriormente podemos llegar al siguiente resultado:

Cantidad de chapas?	2	+6GL
Vínculos relativos internos?		
Articulación relativa	1	-2GL
GL del sistema		+4GL
Vínculos externos?		
Vínculo doble	1	-2GL
Vínculo simple	2	-2GL
GL del sistema		+0GL
Tiene la cantidad necesaria de vínculos externos y están bien dispuestos?	NO	

Confirmando que el anterior es un **sistema con VINCULACIÓN APARENTE**

Si resolvemos el sistema isostático las ecuaciones de equilibrio que deberán utilizarse son las tres asociadas a sus posibilidades de movimiento de un cuerpo libre en el espacio más la ecuación de equilibrio relativo, por ejemplo:

GRADO DE LIBERTAD		ECUACIÓN
CUERPO LIBRE RÍGIDO	Desplazamiento en "X"	$\sum F_x = -Rxa + Rxb + Px = 0$
	Desplazamiento en "Y"	$\sum F_y = Py + Rya + Ryb = 0$
	Giro	$\sum M_a = +Ryb * L + Py * 0.75L - Px * L = 0$
MOVIMIENTO RELATIVO	Giro de la chapa "I" respecto de la chapa "II"	$\sum M_o^I = -Rxa * L - Rya * L = 0$

NOTA: En este caso se deberá resolver el sistema completo de 4x4 ya que las ecuaciones no están desacopladas.

Camino de las cargas

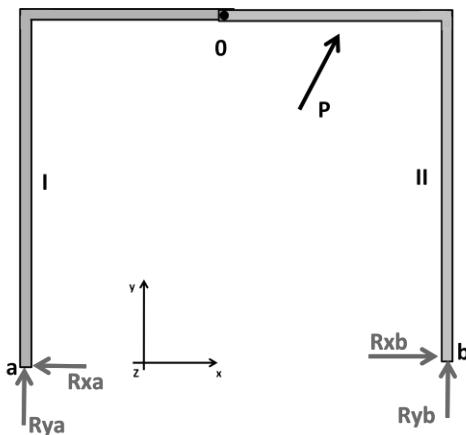


Figura 74. Camino de cargas. Chapa I (isostática) cargada.

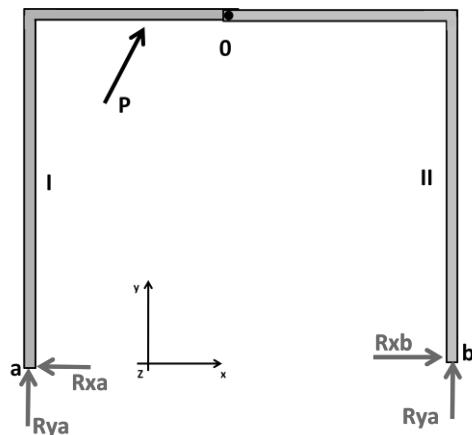


Figura 75. Camino de cargas. Chapa I (isostática) cargada.

Notar que en éste caso, **por no existir una chapa isostática**, si el sistema activo se encuentra aplicado tanto sobre la chapa I como sobre la chapa II las reacciones nunca se anulan.

"Las cargas viajan a través de la estructura desde el punto de aplicación hacia los vínculos, si ninguna chapa es isostática por sí misma, aunque sólo exista carga en una chapa la otra tendrá reacciones no nulas"

Reacciones vínculos internos – Acciones mutuas

Si quisieramos conocer las reacciones internas de la articulación debemos desarmar la estructura para poner de manifiesto las reacciones **teniendo en cuenta agregar tanto cargas activas como reactivas de todo el sistema**. Vemos que es conveniente primero resolver las fuerzas reactivas exteriores sin desarmar el conjunto, trabajando con el sistema de ecuaciones de 4×4 , y luego desarmar el conjunto poniendo las acciones mutuas en evidencia, y plantear para cada una de las chapas un sistema de 2×2 con dichas acciones como únicas incógnitas.

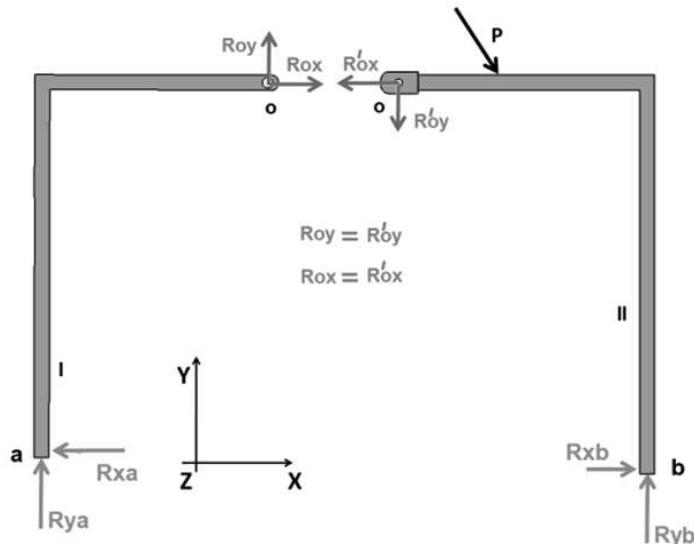


Figura 76. Reacciones de vínculo internas., chapas apoyadas.

Si se separara toda la estructura desde el inicio, se obtienen las tres ecuaciones de equilibrio de cada chapa como cuerpo libre, resultando un sistema de 6×6 acoplado.

Caso C (APARENTE, articulaciones alineadas de dos chapas sucesivas)

Así como mencionamos la existencia de la vinculación aparente al incorporar vínculos externos la aplicación de vínculos internos podrá generar también vinculación aparente.

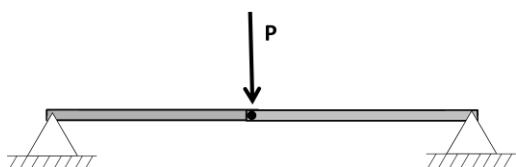


Figura 77. Articulaciones en línea, configuración estructural.

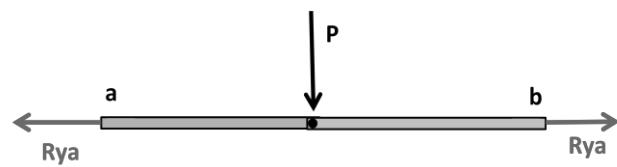


Figura 78. Articulaciones en línea, reacciones de vínculo.

Al estar la carga aplicada en la articulación ambas reacciones deberán pasar por dicho punto para no generar una rotación relativa. Se puede observar que para equilibrar el sistema necesariamente deberá desplazarse la articulación para generar una componente vertical que equilibre la carga aplicada.



Figura 79. Articulaciones en línea, configuración estructural.

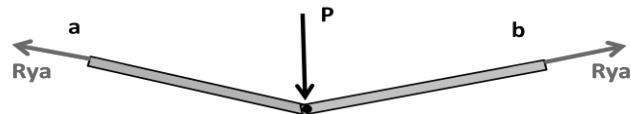


Figura 80. Articulaciones en línea, reacciones de vínculo.

Otra posibilidad de observar el mismo fenómeno es, como en casos anteriores analizar el movimiento posible de algún punto de la estructura.

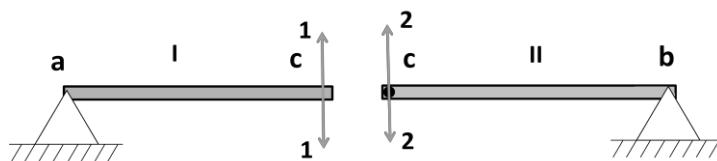


Figura 81. Movimiento posible articulación "c"

Si sepáramos las chapas observamos que, por pertenecer a la chapa I, el punto "c" puede moverse en la dirección vertical 1-1, y, por pertenecer a la chapa II, el punto "c" podrá moverse en la dirección 2-2 que también es vertical. Por lo tanto, el punto c puede moverse verticalmente.

"TRES ARTICULACIONES EN LINEA DE DOS CHAPAS SUCESIVAS CONSTITUYE UN CASO DE VINCULACION APARENTE"

2.2.2 Articulación más de 2 chapas (unión con bulón pasante)

Si tomamos, por ejemplo, tres cuerpos libres en el espacio, los mismos tienen 9 GL. Si unimos entre sí las tres chapas con un bulón, estaríamos restringiendo 4 GL a los mismos.

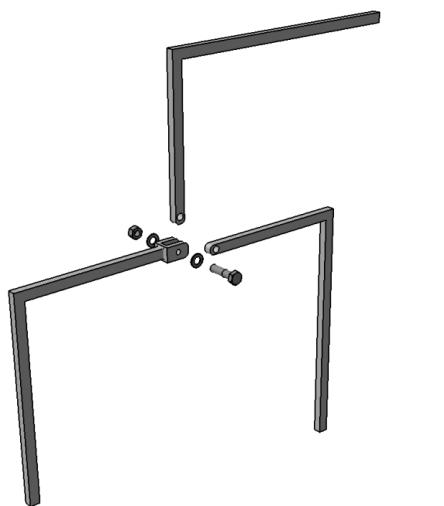


Figura 82. Articulación de "n" chapas.
Componentes.



Figura 83. Articulación de "n" chapas.
Conjunto.

"Tres chapas que no están vinculadas entre sí poseen 9 Grados de libertad"

EN GENERAL: "n chapas que no están vinculadas entre sí poseen $3n$ grados de libertad"

Movimientos como cuerpo rígido (3GL)

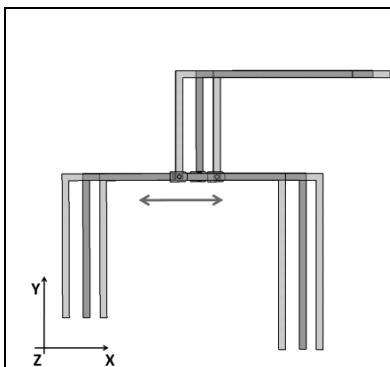


Figura 84. Mov. de cuerpo libre, Traslación en "x"

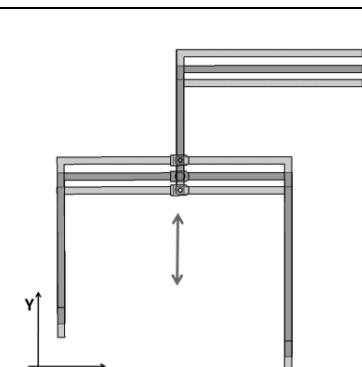


Figura 85. Mov. de cuerpo libre, Traslación en "y"

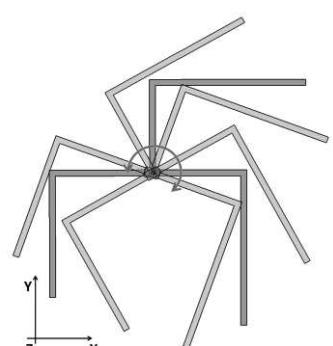


Figura 86. Mov. de cuerpo libre, rotación en "z".

"El conjunto de TRES chapas unidas por una articulación posee 5GL, 3GL corresponden al movimiento del conjunto como cuerpo rígido libre y 2GL corresponde a un movimiento relativo PERMITIDO entre las chapas (Cada una puede girar respecto de la tercera suponiendo a ésta fija)"

Las ecuaciones que permiten establecer el equilibrio del cuerpo rígido son las mismas que para una única chapa

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum M = 0$$

Movimiento relativo (2GL)

Si fijamos una de las chapas podemos poner de manifiesto las posibilidades de movimiento relativo del sistema y podremos observar los dos grados de libertad remanentes en el sistema.

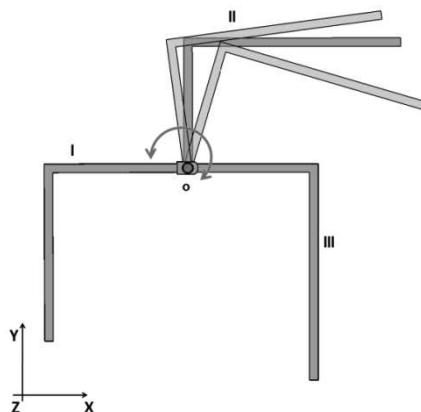


Figura 87. Movimiento relativo de la chapa II, chapa I fija.

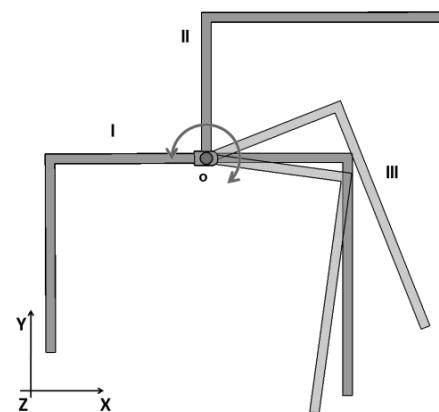


Figura 88. Movimiento relativo de la chapa III, chapa I fija.

"Una articulación entre tres chapas restringe 4 Grados de Libertad, a dos de las chapas le restringe 2GL a c/u respecto de la tercera que se considera fija"

GENERAL: "Una articulación entre n chapas restringe 2(n-1) Grados de Libertad"

Las ecuaciones que permiten establecer el equilibrio relativo entre las chapas es una ecuación de momento relativo respecto del punto de giro de una con respecto a la otra. por ejemplo

$$\sum M_{rel\ 0}^{II} = 0$$

$$\sum M_{rel\ 0}^{III} = 0$$

El sistema de ecuaciones que deberá utilizarse son las tres **asociadas a sus posibilidades de movimiento de un cuerpo libre en el espacio más las ecuaciones de equilibrio relativo**, por ejemplo

GRADO DE LIBERTAD		ECUACIÓN
CUERPO LIBRE RIGIDO	Desplazamiento en "X"	$\sum F_x = 0$
	Desplazamiento en "Y"	$\sum F_y = 0$
	Giro	$\sum M_a = 0$
MOVIMIENTO RELATIVO	Giro de la chapa "II" respecto de la chapa "I"	$\sum M_{rel\ 0}^{II} = 0$
	Giro de la chapa "III" respecto de la chapa "I"	$\sum M_{rel\ 0}^{III} = 0$

Si se quieren conocer las reacciones internas de la articulación debemos desarmar la estructura para poner de manifiesto las reacciones mutuas teniendo en cuenta que si fijamos la chapa I, su reacción de vínculo interno es la suma de las reacciones en la chapa II y chapa III cambiadas de signo (principio de acción y reacción). **Debemos además tener en cuenta agregar tanto las cargas activas como las reactivas de todo el sistema.**

En la Figura 89 sólo se presenta una configuración posible de reacciones internas para ejemplificar la aplicación del principio de acción y reacción.

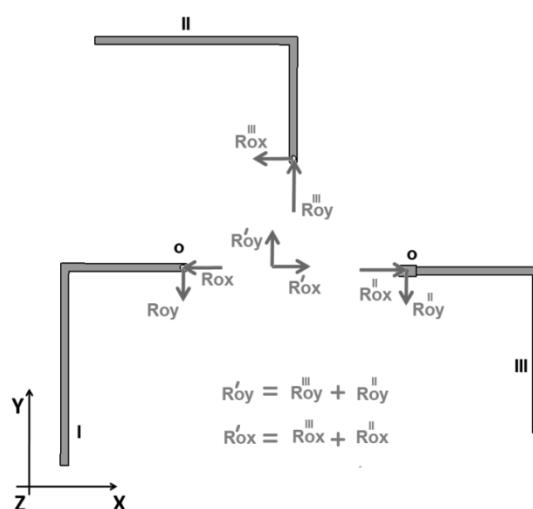


Figura 89. Reacciones de vínculo internas.

NOTA: Si quisieramos resolver desde el inicio (antes de calcular las reacciones) el sistema resultante es un **sistema de 9x9 acoplado**, mientras que en este caso deberemos resolver dos de las chapas aplicando sobre ésta tanto las cargas activas como reactivas calculadas con anterioridad siendo las nuevas incógnitas las reacciones internas, resultando dos sistemas de 2x2 necesarios para su cálculo.

2.2.3 Biela

Otro medio de vinculación relativa posible es la utilización de bielas, las cuales según su disposición serán las cantidades y tipos de grados de libertad capaces de restringir.



Figura 90. Biela, componentes.



Figura 91. Biela, conjunto.

"Dos chapas que no están vinculadas entre sí poseen 6 Grados de libertad"

Movimientos como cuerpo rígido (3GL)

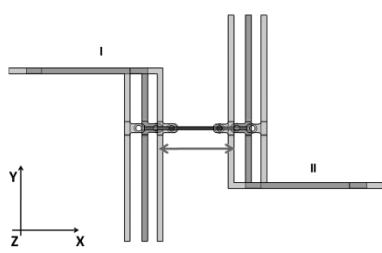


Figura 92. Mov. de cuerpo libre, Traslación en "x".

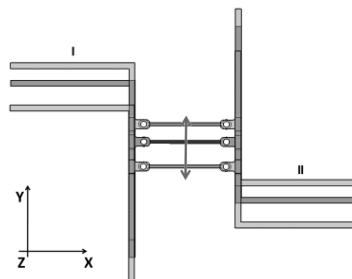


Figura 93. Mov. de cuerpo libre, Traslación en "y".

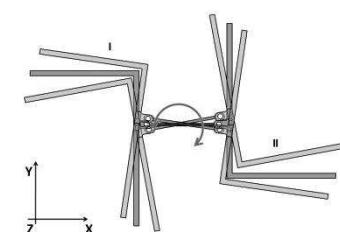


Figura 94. Mov. de cuerpo libre, rotación en "z".

"El conjunto de dos chapas unidas por una biela posee 5GL, 3GL corresponden al movimiento del conjunto como cuerpo rígido libre y 2GL corresponde a un movimiento relativo entre las chapas"

Las ecuaciones que permiten establecer el equilibrio de el cuerpo rígido son las mismas que para una única chapa

$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0 \\ \sum F_y &= 0 \\ \sum M &= 0\end{aligned}$$

Movimiento relativo (2GL)

Si fijamos una de las chapas y verificamos los movimientos posibles para la otra podemos observar un movimiento vertical (correspondiente a la rotación del extremo de la biela articulado sobre la chapa I) y un giro respecto al punto articulado sobre la chapa II

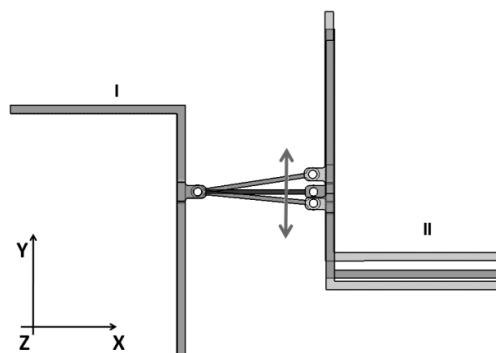


Figura 95. Movimiento relativo, chapa I fija (1).

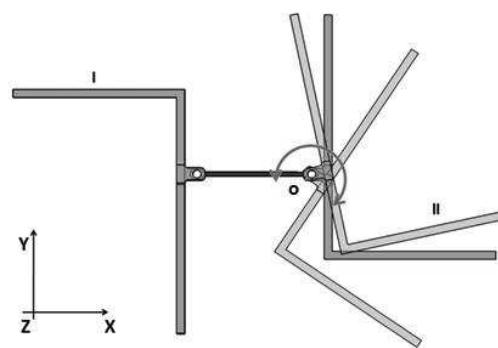


Figura 96. Movimiento relativo, chapa I fija (2).

"Una biela entre dos chapas restringe 1 Grado de Libertad, que se corresponde al movimiento en su dirección longitudinal"

Las ecuaciones que permiten establecer el equilibrio relativo entre las chapas son una ecuación de fuerzas en la dirección **perpendicular al eje longitudinal de la biela** y **una ecuación de momento relativo**.

Por ejemplo si quisiéramos verificar el equilibrio de las dos chapas deberíamos verificar por medio de ecuaciones el equilibrio de todos los movimientos que el vínculo no puede impedir.

$$\sum F_{y\text{ rel}}^{\text{II}} = 0$$

$$\sum M_{\text{rel } 0}^{\text{II}} = 0$$

El sistema de ecuaciones que deberá utilizarse son las tres asociadas a sus posibilidades de movimiento de un chapa rígida libre en el plano más las ecuaciones de equilibrio relativo, por ejemplo

GRADO DE LIBERTAD		ECUACIÓN
CUERPO RÍGIDO	Desplazamiento en "X"	$\sum F_x = 0$
	Desplazamiento en "Y"	$\sum F_y = 0$
	Giro	$\sum M_a = 0$
MOVIMIENTO RELATIVO	Desplazamiento vertical de la chapa "II" respecto de la chapa "I"	$\sum F_{y\ rel}^H = 0$
	Giro de la chapa "II" respecto de la chapa "I" (pto o)	$\sum M_{rel\ 0}^H = 0$

Para calcular los esfuerzos internos en el vínculo debemos desarmar la estructura para poner de manifiesto las acciones y reacciones que el vínculo genera sobre cada chapa.

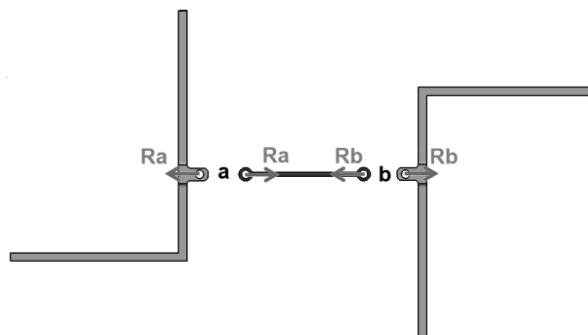


Figura 97. Reacciones de vínculo internas.

NOTA: Una biela podrá considerarse como un vínculo entre dos chapas (que tendrán 6GL), en cuyo caso restringe 1GL pero también podrá considerarse como una chapa extra (que tendrán 9GL) en cuyo caso se encontrará vinculada a las otras dos por medio de dos articulaciones relativas (que restringen 2 GL cada una). Mencionando que en ambos análisis el sistema conservará la misma condición de vinculación independientemente del análisis realizado.

Cuando se combinen dos bielas en la unión entre dos chapas, depende la forma en que se positionen esas dos bielas se pueden restringir hasta 2 GL, a continuación se detallan posibles casos.

2.2.4 Bielas paralelas

Si vinculamos dos chapas mediante dos bielas que son paralelas estas permitirán el desplazamiento relativo de ambos cuerpos en su dirección perpendicular. Por ejemplo, si fijamos la chapa I se pone de manifiesto tal movimiento.

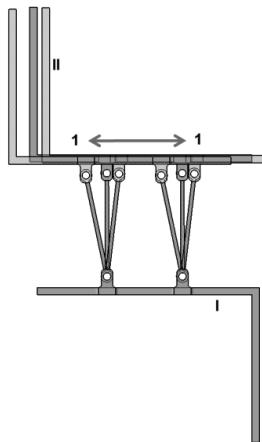


Figura 98. Bielas paralelas, configuración 1.

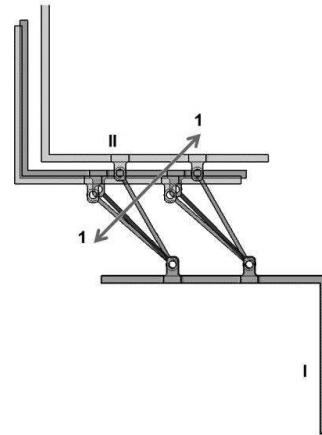


Figura 99. Bielas paralelas, configuración 2.

"Dos bielas paralelas entre dos chapas restringen 2 Grados de Libertad que se corresponde con permitir el desplazamiento relativo en la dirección perpendicular a la de ambas bielas. La ecuación que define dicho movimiento es la que define el equilibrio de fuerzas relativo en dicha dirección".

Si queremos obtener los esfuerzos internos se deberá desarmar la estructura para poner de manifiesto dichos esfuerzos teniendo en cuenta las consideraciones mencionadas con anterioridad.

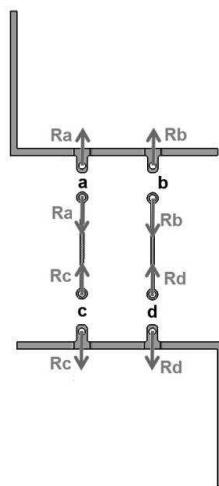


Figura 100. Reacciones de vínculo internas, configuración 1.

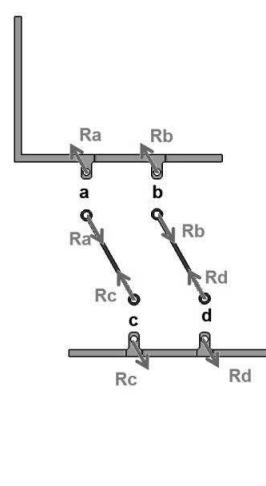


Figura 101 Reacciones de vínculo internas, configuración 2.

2.2.5 Bielas cruzadas

Si vinculamos dos chapas mediante dos bielas que poseen un punto de cruce, el mismo se convertirá en una articulación virtual relativa "AVR" y permitirá el giro relativo de ambos cuerpos. Por ejemplo, si fijamos la chapa I se pone de manifiesto tal movimiento.

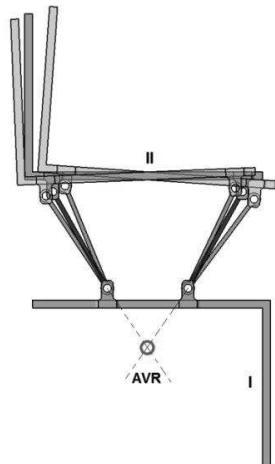


Figura 102. Bielas cruzadas, configuración 1.

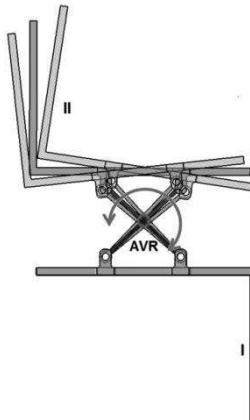


Figura 103. Bielas cruzadas, configuración 1.

"Dos bielas cruzadas entre dos chapas restringen 2 Grados de Libertad que se corresponden con permitir el giro relativo respecto al punto de cruce de ambas bielas. La ecuación que define dicho movimiento es la que define el equilibrio de momento relativo respecto a ese punto".

Si queremos obtener los esfuerzos internos se deberá desarmar la estructura para poner de manifiesto dichos esfuerzos teniendo en cuenta las consideraciones mencionadas con anterioridad.

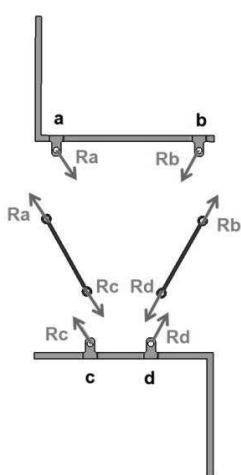


Figura 104. Reacciones de vínculo internas, configuración 1.

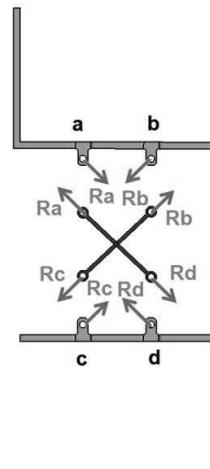


Figura 105. Reacciones de vínculo internas, configuración 2.

2.3 EJEMPLOS DE CÁLCULO

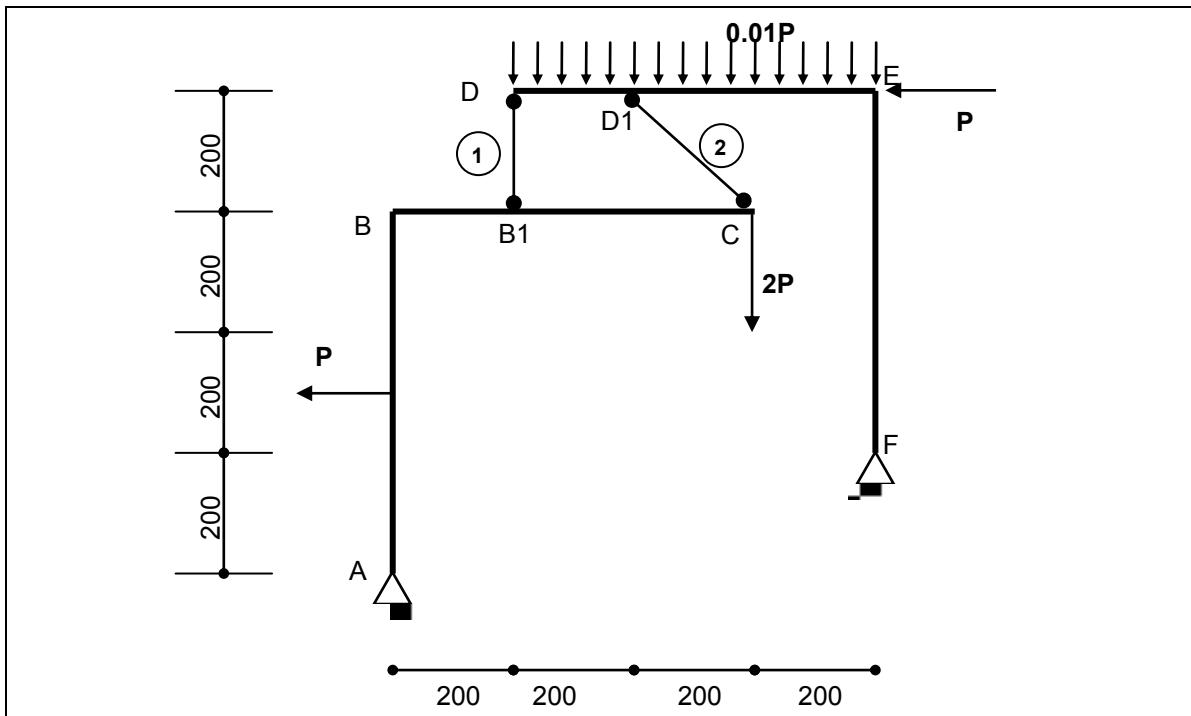
2.3.1 Ejemplo 1: BIELAS CRUZADAS

2.3.1.1 Cálculo de reacciones en vínculos externos e internos:

2.3.1.1.1 Sistema estructural propuesto

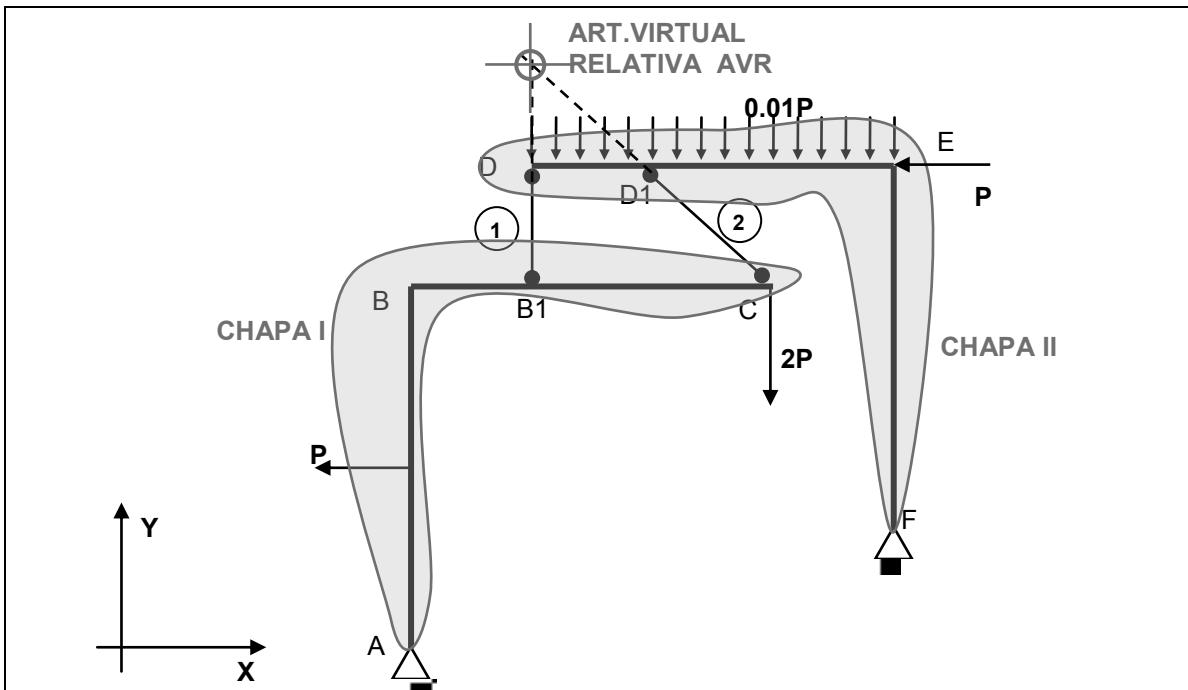
El primer ejemplo de cálculo presenta un sistema de dos chapas vinculadas entre sí por medio de dos bielas que tienen un punto de intersección fuera de la estructura.

Ambas chapas se encuentran fijas por dos vínculos dobles y bajo un sistema de cargas puntuales en ambas chapas y una carga distribuida sobre una sola de ellas.



2.3.1.1.2 Análisis de isostaticidad

A continuación debemos analizar el grado de sustentación del sistema para luego poder plantear el sistema de ecuaciones que permite resolver las incógnitas.



Cantidad de chapas?	2	+6GL
Vínculos relativos internos?		
Bielas que se cortan	2	-2GL
GL del sistema		+4GL
Vínculos externos?		
Vínculo doble	2	-4GL
GL del sistema		+0GL
Tiene la cantidad necesaria de vínculos externos y están bien dispuestos?	SI	

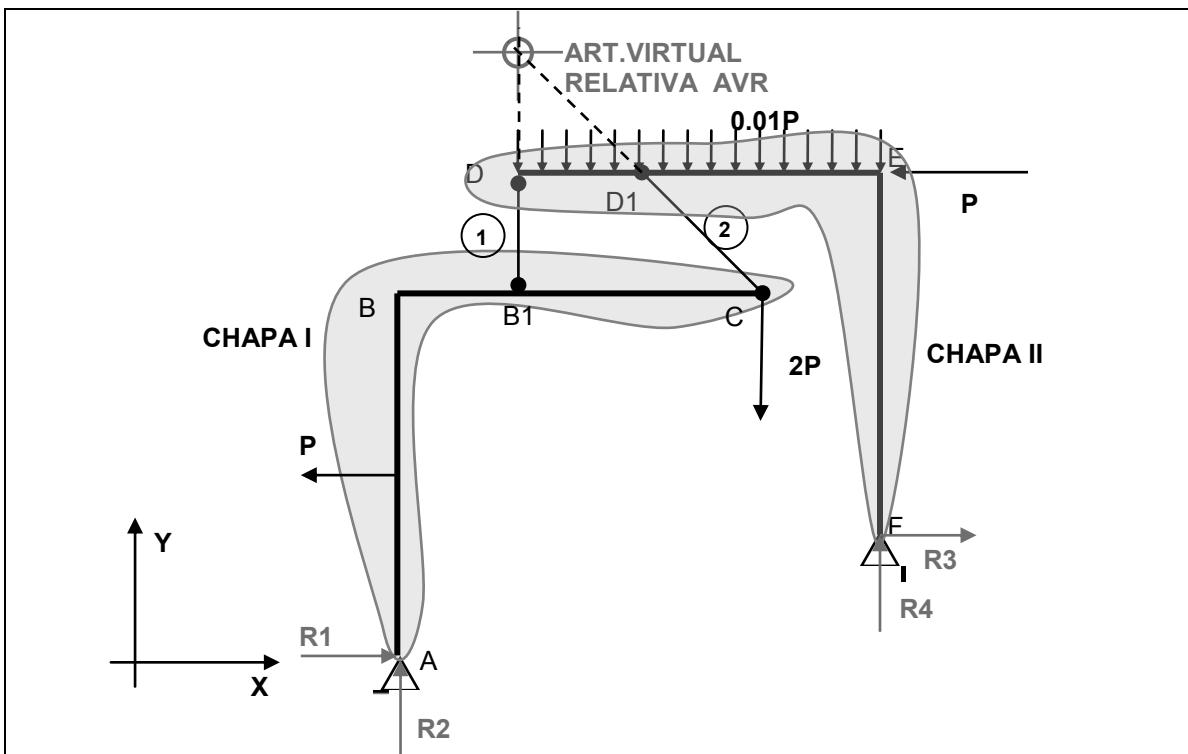
2.3.1.1.3 Análisis de funcionamiento

El sistema de las dos chapas vinculadas entre sí habiendo quitado los vínculos externos tiene 4 grados de libertad:

1. Traslación en x como una única chapa rígida
2. Traslación en y como una única chapa rígida
3. Rotación alrededor de un punto del plano como una única chapa rígida
4. Rotación de una chapa respecto de la otra alrededor de AVR

Ninguna de las dos chapas es isostática por sí misma.

Las fuerzas activas y las fuerzas reactivas constituyen un sistema equilibrado.



Como el sistema es un sistema equilibrado no debe haber resultante de fuerzas en correspondencia de los grados de libertad que tiene el sistema de las dos chapas:

GRADO DE LIBERTAD	ECUACIÓN	
CUERPO RÍGIDO	(1) Desplazamiento en "X"	$\sum F_x = -P - P + R1 + R3 = 0$
	(2) Desplazamiento en "Y"	$\sum F_y = -0.01Px600 - 2P + R2 + R4 = 0$
	(3) Rotación del conjunto	$\sum M_a = 300xP - 600 * 2P - 0.01Px600x500 + 800xP - 200xR3 + 800xR4 = 0$
MOVIMIENTO RELATIVO	(4) Rotación relativa de la chapa "II" respecto de la chapa "I"	$\sum M_{AVR}^{II} = -0.01Px600x300 - 200xP + 800xR3 + 600xR4 = 0$

La expresión (4) se interpreta como el momento de las fuerzas actuantes (activas y reactivas) en la chapa II respecto del punto AVR deben ser nulos. Esta ecuación está indicando que la resultante de las fuerzas activas (P_i) y reactivas (R_i) de la chapa II debe pasar por el punto AVR (articulación virtual relativa), puesto que la vinculación relativa entre las dos chapas no es capaz de limitar giros relativos.

Se observa que las ecuaciones (3) y (4) están desacopladas de las (1) y (2), al haber elegido el punto de momento general de manera que no intervengan R_1 y R_2 , y la ecuación de momentos relativo en la chapa II con el mismo objeto.

El sistema resuelto arroja los siguientes valores de las reacciones:

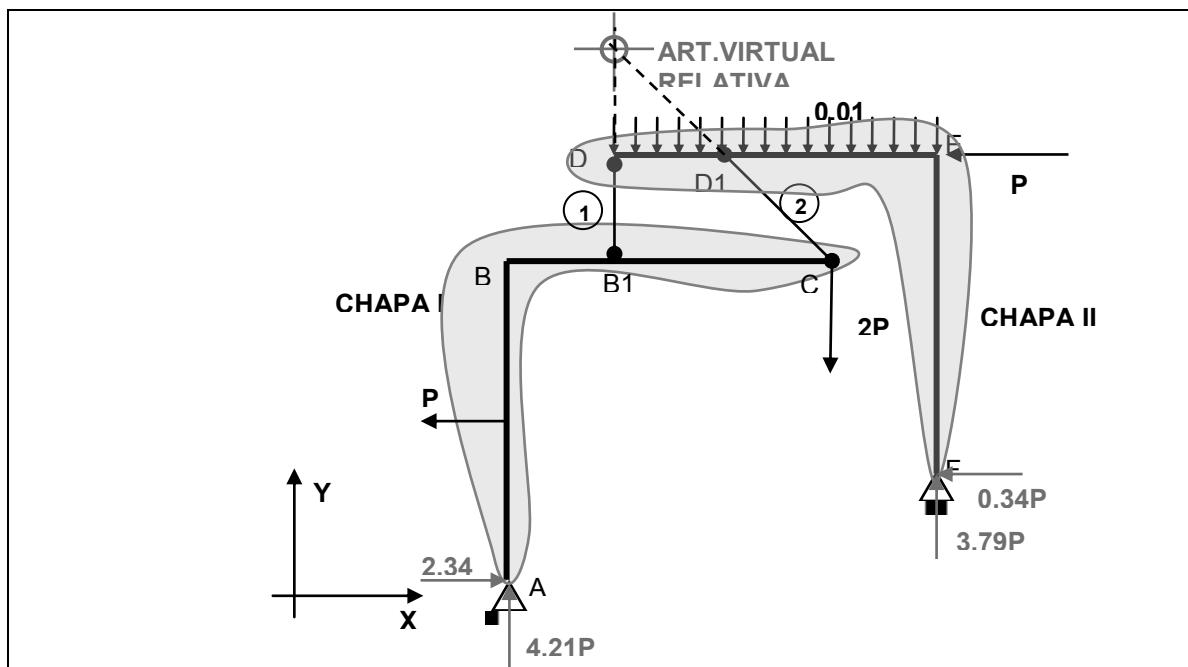
$$R1 = +2.34P$$

$$R2 = +4.21P$$

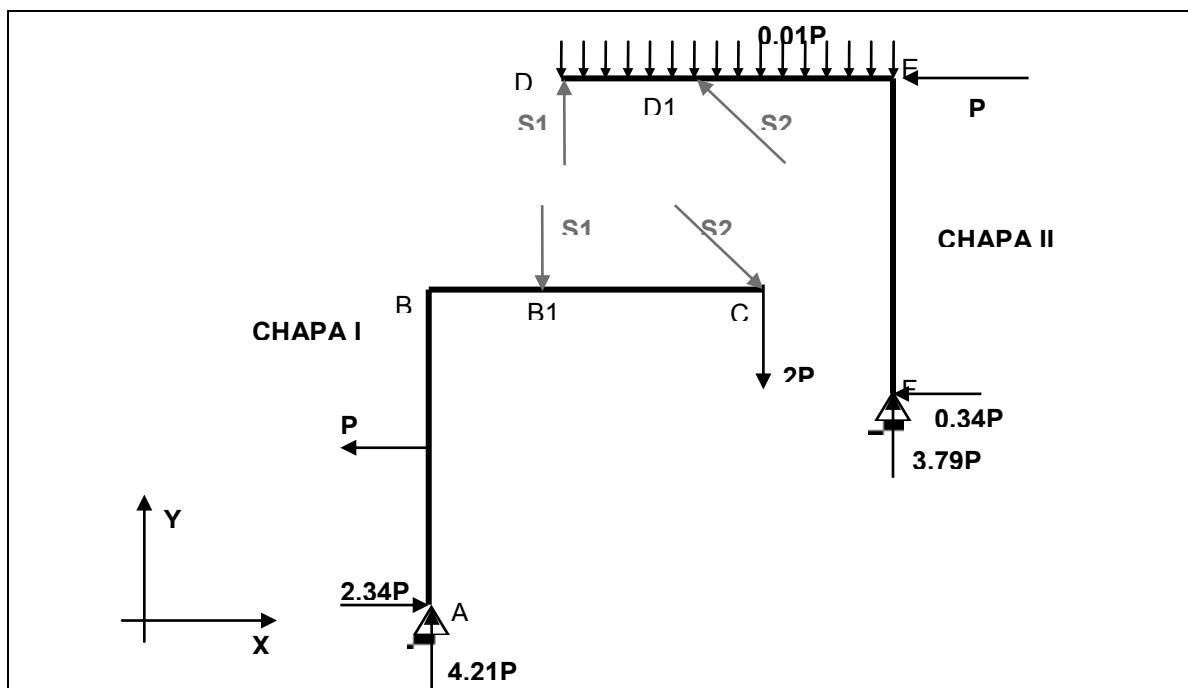
$$R3 = -0.34P$$

$$R4 = +3.79P$$

El signo negativo de $R3$ implica que su sentido es contrario al supuesto.



Resta conocer el valor de los esfuerzos en las bielas de vinculación entre las chapas 1 y 2: para ello y para poner de manifiesto dichos esfuerzos resulta necesario separar ambas chapas y colocar las acciones que las bielas ejercen sobre cada una de ellas.



En chapa (I):

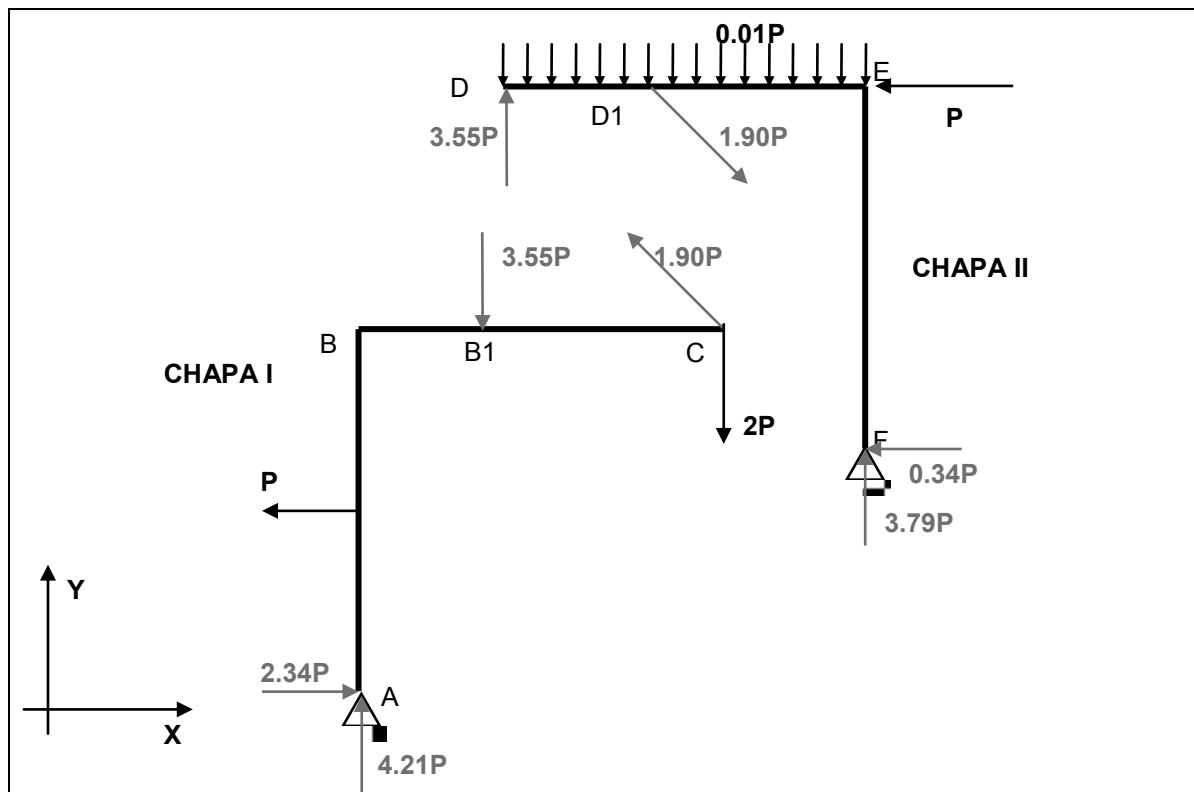
$$1') \sum F_x = -P - 2.34P + S_2 \cos(45) = 0$$

$$2') \sum F_y = +4.21P - 2P - S_1 - S_2 \sin(45) = 0$$

El sistema de ecuaciones (1') y (2') permite conocer los valores de las incógnitas S_1 y S_2 .

$$S_1 = -1.90P$$

$$S_2 = +3.55P$$



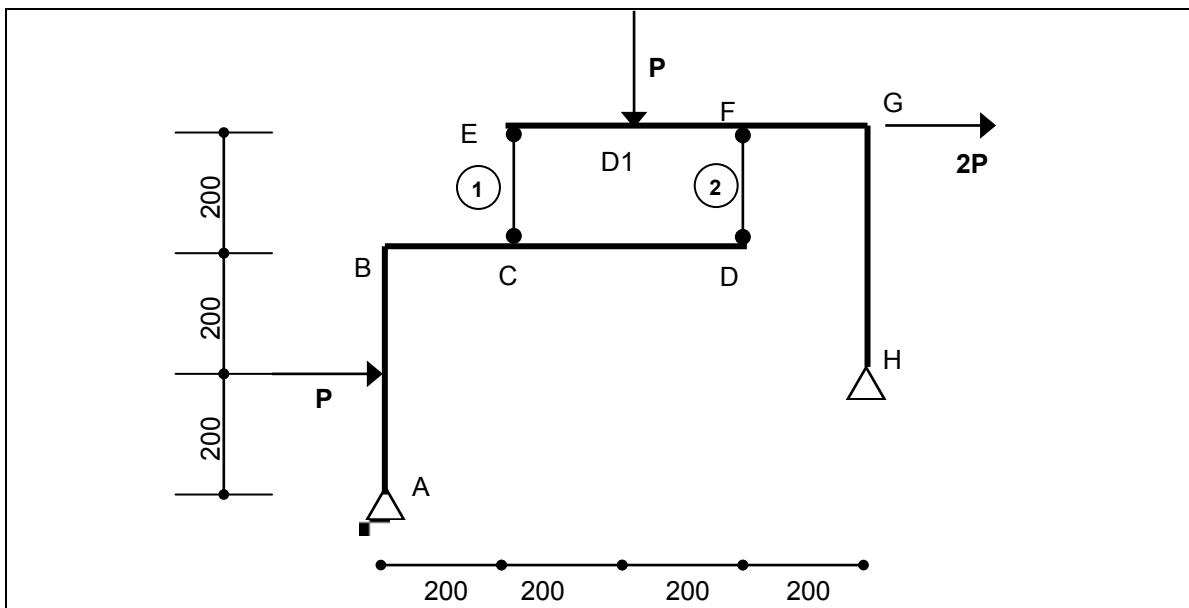
2.3.2 Ejemplo 2: BIELAS PARALELAS

2.3.2.1 Cálculo de reacciones en vínculos externos e internos:

2.3.2.1.1 Sistema estructural propuesto

El segundo ejemplo de cálculo presenta un sistema de dos chapas vinculadas entre sí por dos bielas paralelas, que idealmente, se cruzan en un punto situado en el infinito.

Ambas chapas se encuentran fijas por dos vínculos dobles y bajo un sistema de cargas puntuales.



2.3.2.1.2 Análisis de isostaticidad

A continuación debemos analizar el grado de sustentación del sistema para luego poder plantear el sistema de ecuaciones que permite resolver las incógnitas.

Cantidad de chapas?	2	+6GL
Vínculos relativos internos?		
Bielas que se cortan	2	-2GL
GL del sistema		+4GL
Vínculos externos?		
Vínculo doble	2	-4GL
GL del sistema		+0GL
Tiene la cantidad necesaria de vínculos externos y están bien dispuestos?		SI

2.3.2.1.3 Análisis de funcionamiento

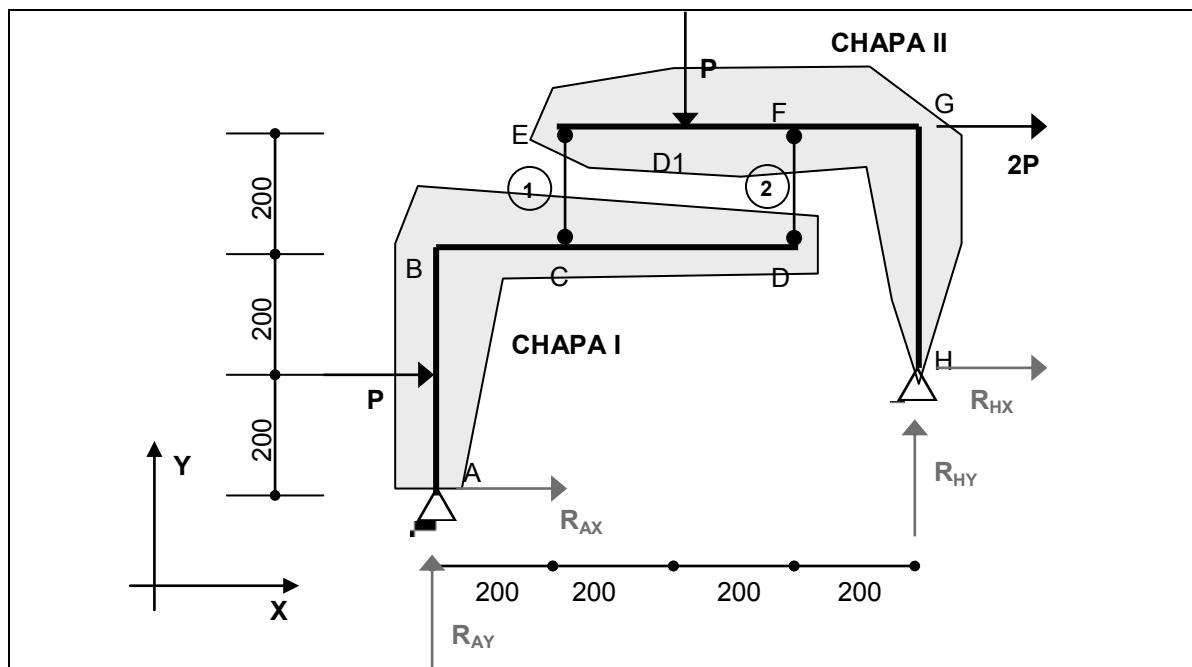
El sistema de las dos chapas vinculadas entre sí pero habiendo quitado los vínculos externos tiene 4 grados de libertad:

1. Traslación en x como una única chapa rígida
2. Traslación en y como una única chapa rígida
3. Rotación alrededor de un punto del plano como una única chapa rígida
4. Suponiendo una de las chapas fija, la otra puede desplazarse horizontalmente respecto de la primera. Es decir que en este caso la articulación virtual relativa puede interpretarse como una dirección impropia vertical.

Nuevamente se cumple que:

Ninguna de las dos chapas es isostática por sí misma.

Las fuerzas activas y las fuerzas reactivas constituyen un sistema equilibrado.



Como el sistema es un sistema equilibrado no debe haber resultante de fuerzas en correspondencia de los grados de libertad que tiene el sistema de las dos chapas:

GRADO DE LIBERTAD	ECUACIÓN
CUERPO RÍGIDO	(1) Desplazamiento en "X" $\sum F_x = RAx + RHx + 3P = 0$
	(2) Desplazamiento en "Y" $\sum F_y = RAy + RHy - P = 0$
	(3) Rotación del conjunto $\sum M_A = -200xRHx + 800xRHx - 200P - 400P - 1200P = 0$
MOVIMIENTO RELATIVO	(4) Rotación relativa de la chapa "II" respecto de la chapa "I" $\sum F_x^I = RAx + P = 0$

La ecuación (4) está asegurando en otros términos que no hay resultante de las fuerzas activas y reactivas exteriores en la dirección x-x, en razón que los vínculos internos (1) y (2) no son capaces de generar una reacción en x.

El sistema resuelto da los siguientes valores de las reacciones:

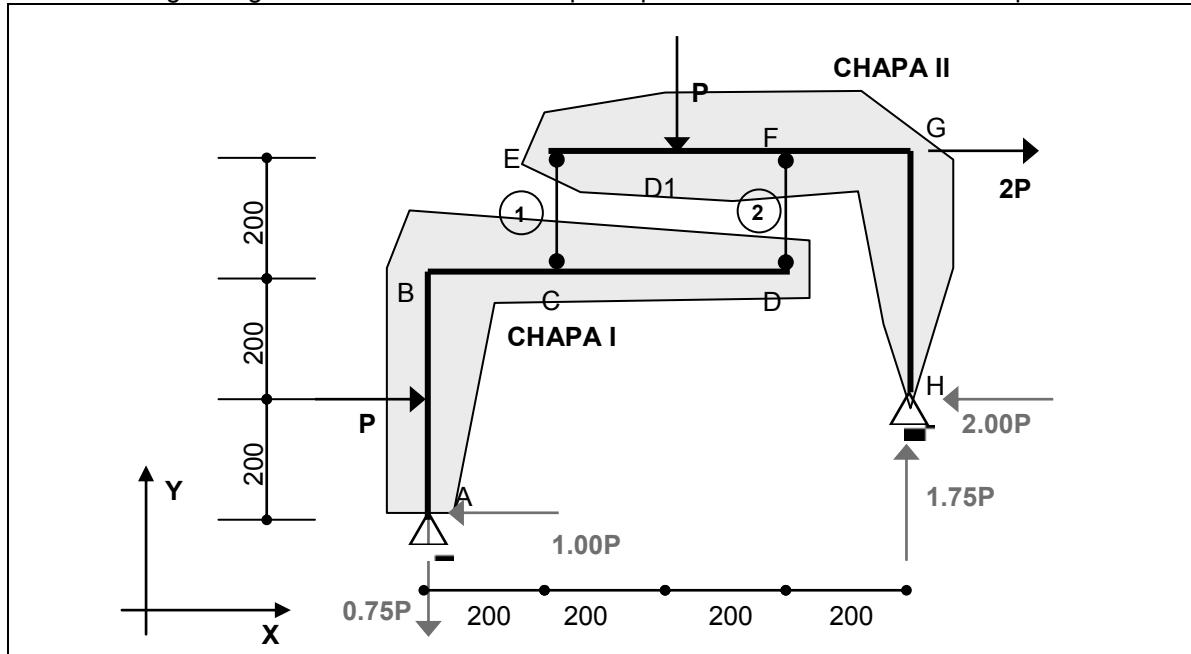
$$RAx = -1.00P$$

$$RHx = -2.00P$$

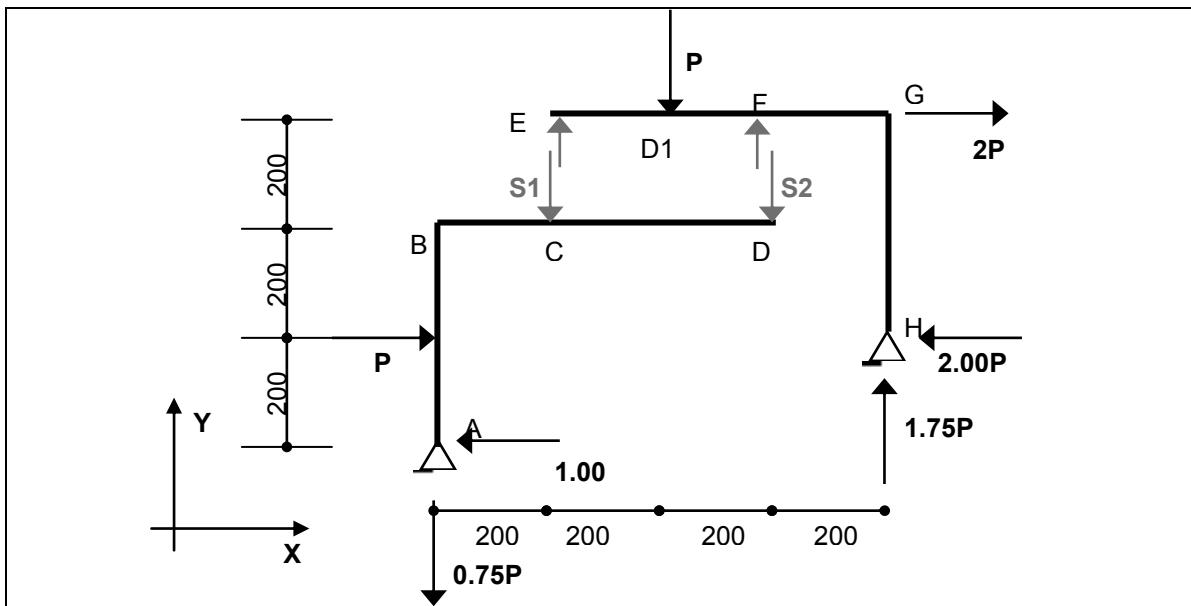
$$RHy = +1.75P$$

$$RAy = -0.75P$$

El signo negativo de las reacciones implica que su sentido es contrario al supuesto.



Una vez resuelto el sistema de las chapas I y II en su conjunto analizando separadamente uno de ellos se pueden calcular los esfuerzos en las bielas.



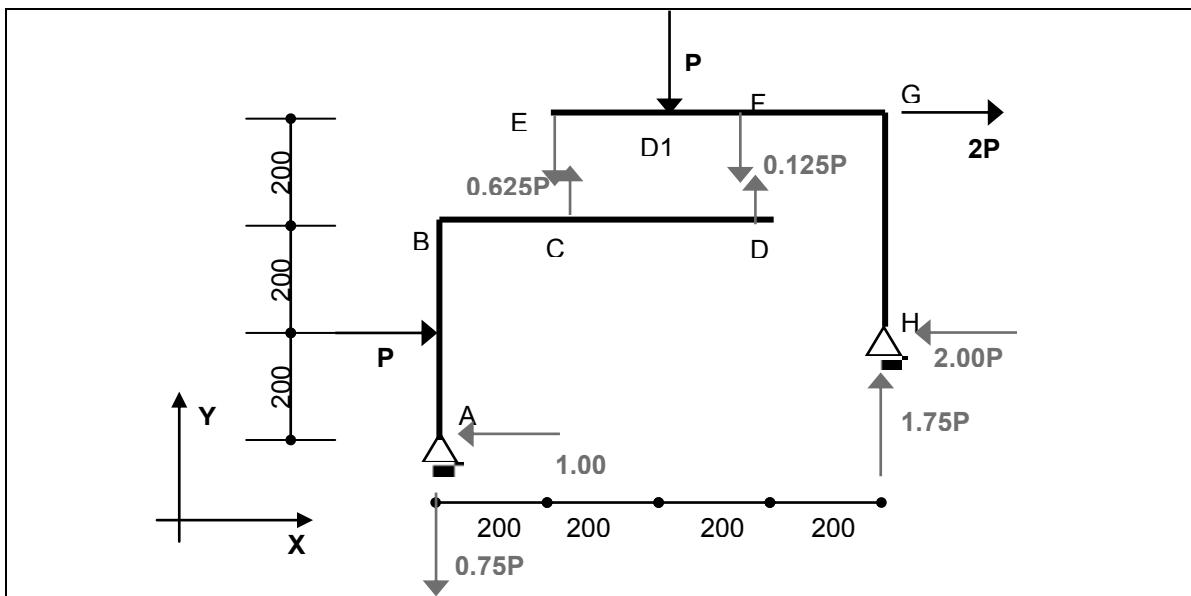
En chapa (II):

$$1') \sum F_y = -S1 - S2 - 0.75P = 0$$

$$2') \sum M_D = +400xS1 + 200P - 400P + 450P = 0$$

El sistema de ecuaciones (1') y (2') permite conocer los valores de las incógnitas $S1$ y $S2$.

$$\begin{aligned} S1 &= -0.625P \\ S2 &= -0.125P \end{aligned}$$



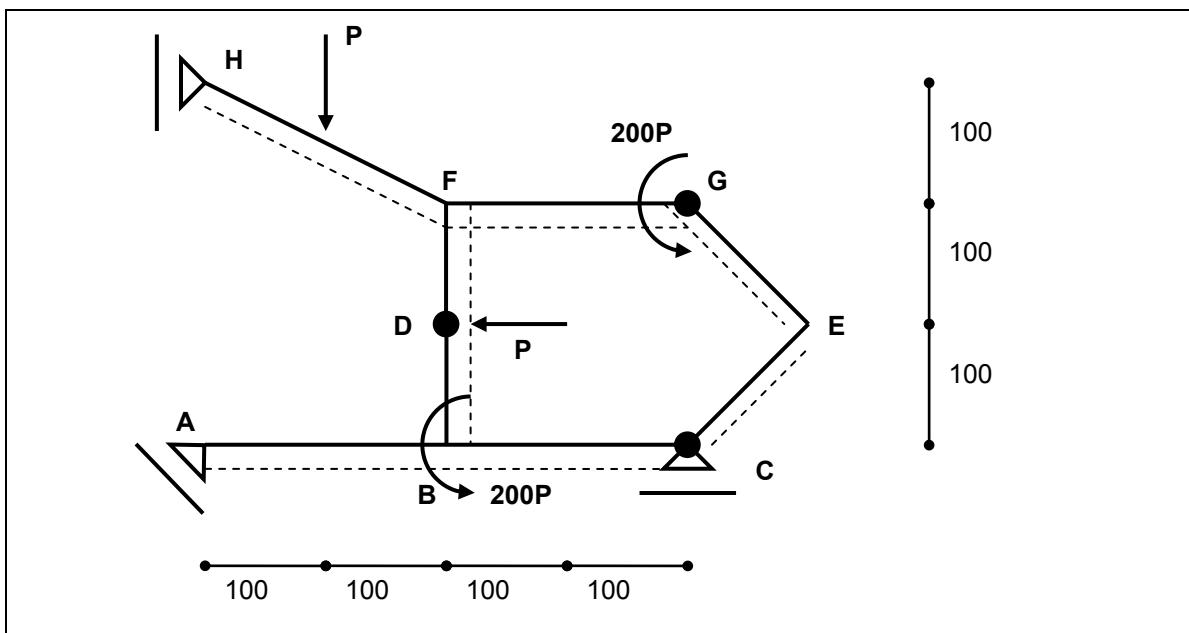
2.3.3 Ejemplo 3: MARCO CERRADO

2.3.3.1 Cálculo de reacciones en vínculos externos e internos:

2.3.3.1.1 Sistema estructural propuesto

El último ejemplo de cálculo se trata de tres chapas articuladas entre sí, con la particularidad de que las tres chapas constituyen un marco cerrado.

El sistema se encuentra fijo por dos vínculos dobles y bajo un sistema de cargas y cuplas puntuales sobre las chapas.



2.3.3.1.2 Análisis de isostaticidad

Por ser, como se mencionó con anterioridad, un sistema de tres chapas articuladas entre sí, el mismo tiene tres grados de libertad, y se comporta como una única chapa, siendo necesarios tres vínculos externos para lograr la condición de sustentación isostática. De esta manera las reacciones se pueden calcular fácilmente suponiendo un sentido para las mismas y planteando las condiciones de equilibrio de una chapa rígida en el plano. Otra posibilidad de análisis es considerar el sistema compuesto por una cierta cantidad de chapas vinculadas externas e internamente, para ello desarmamos el sistema y, lógicamente, también concluimos en un sistema isostático.

Cantidad de chapas?		3	+9GL
Vínculos relativos internos?			
Artic. relativas		3	-6GL
GL del sistema			+3GL
Vínculos externos?			
Vínculo doble		1	-2GL
Vínculo simple		1	-1GL
GL del sistema			+0GL
Tiene la cantidad necesaria de vínculos externos y están bien dispuestos?		SI	

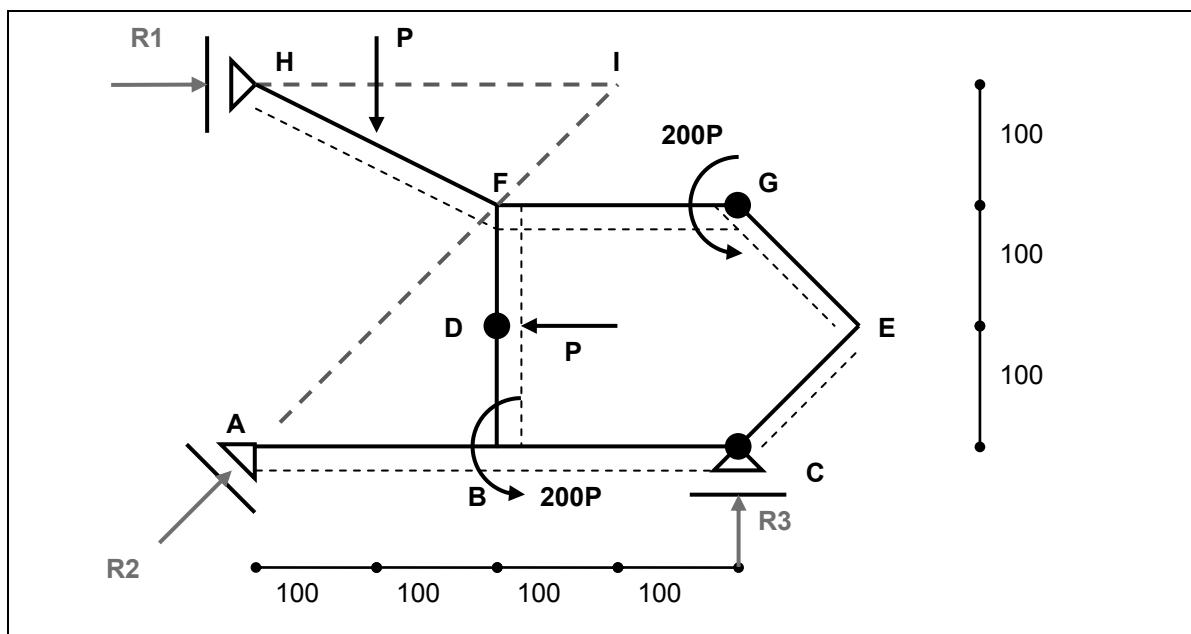
2.3.3.1.3 Análisis de funcionamiento

El sistema de las tres chapas vinculadas entre sí tiene 3 grados de libertad:

1. Traslación en x como una única chapa rígida
2. Traslación en y como una única chapa rígida
3. Rotación alrededor de un punto del plano como una única chapa rígida

Ninguna de las tres chapas es isostática por sí misma.

Las fuerzas activas y las fuerzas reactivas constituyen un sistema equilibrado.



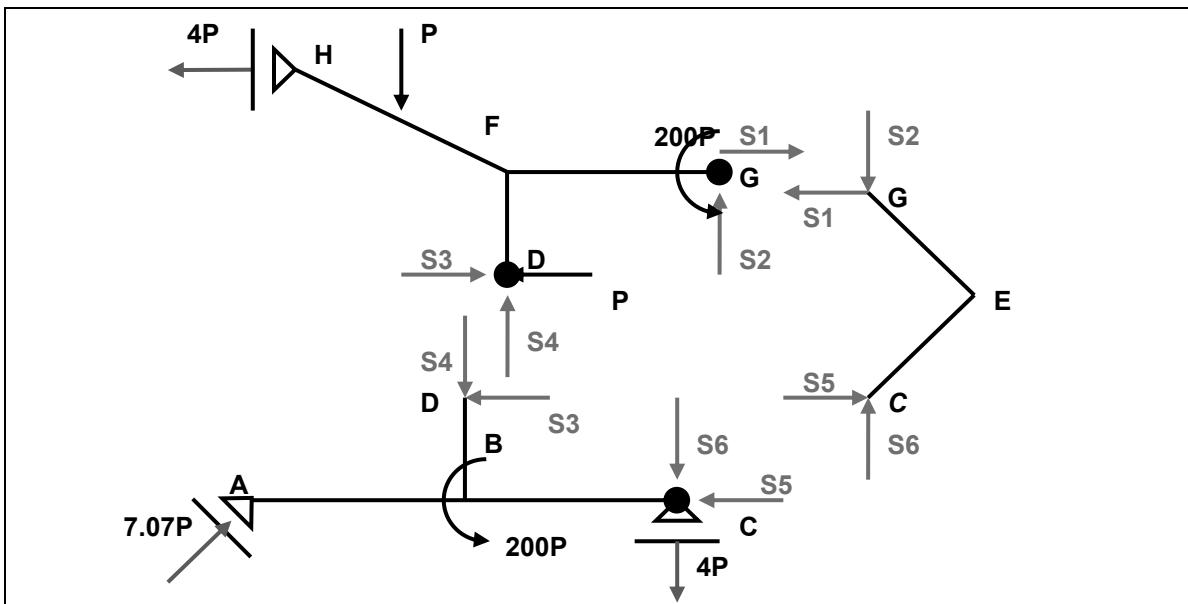
Como el sistema es un sistema equilibrado no debe haber resultante de fuerzas en correspondencia de los grados de libertad que tiene el sistema de las dos chapas

GRADO DE LIBERTAD	ECUACIÓN
CUERPO RÍGIDO	$\sum F_x = -P + R1 + R2\cos(45) = 0$
	$\sum F_y = -P + R2\sin(45) + R3 = 0$
	$\sum M_a = 200P - 200P + 200P + 200P + 100R3 = 0$

Se obtienen los siguientes valores de reacciones, recordando que el signo negativo indica que el sentido verdadero es contrario al supuesto:

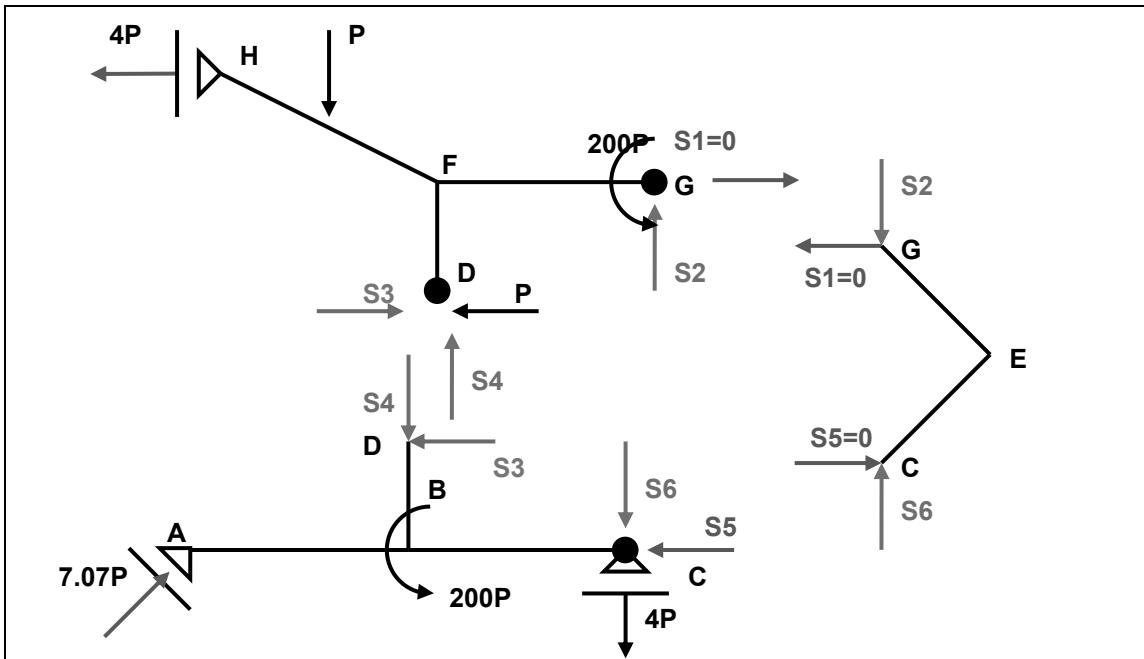
$$\begin{aligned} R1 &= -4.00P \\ R2 &= +7.07P \\ R3 &= -4.00P \end{aligned}$$

Para calcular las acciones mutuas en los vínculos internos es necesario abrir la estructura. En este caso particular, si se separaran todas las chapas colocando las reacciones mutuas en las articulaciones y tomando las reacciones externas como cargas ya conocidas se tendrá lo siguiente:

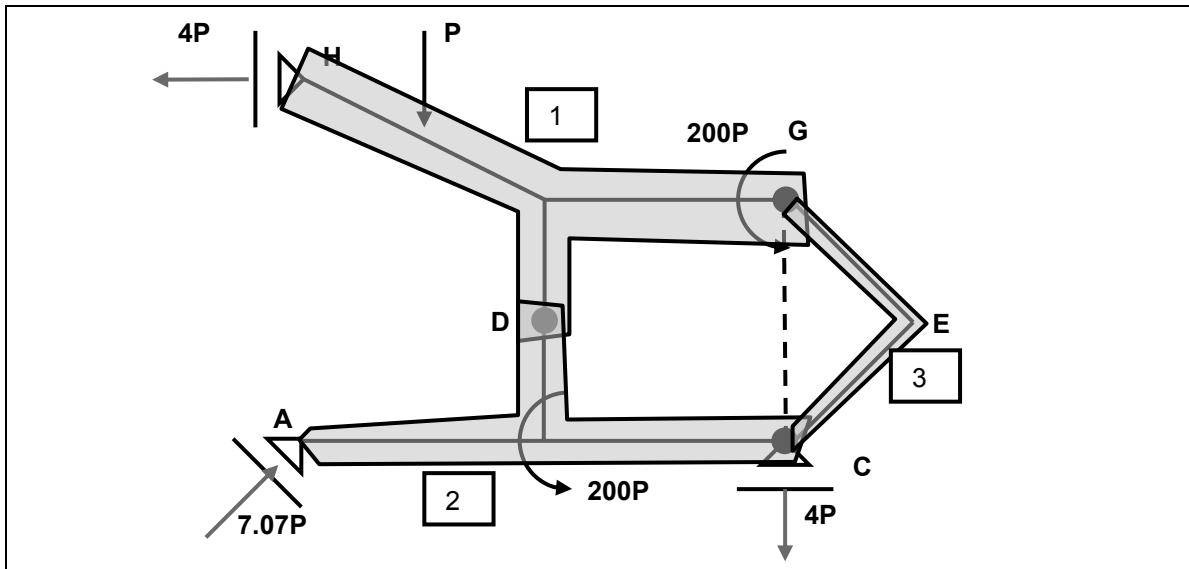


Observando la figura se ve que si se analizara el equilibrio de cada una de las tres chapas, en cada grupo de tres ecuaciones intervendrían cuatro incógnitas, por lo tanto habría que tomar dos grupos de tres ecuaciones para resolver el sistema de 6×6 .

En este caso particular se observa que $S1$ y $S5$ deben ser nulas y $S2$ debe ser igual y contraria a $S6$ porque la chapa CEG no tiene carga en su tramo y actúa como una biela articulada en C y G.

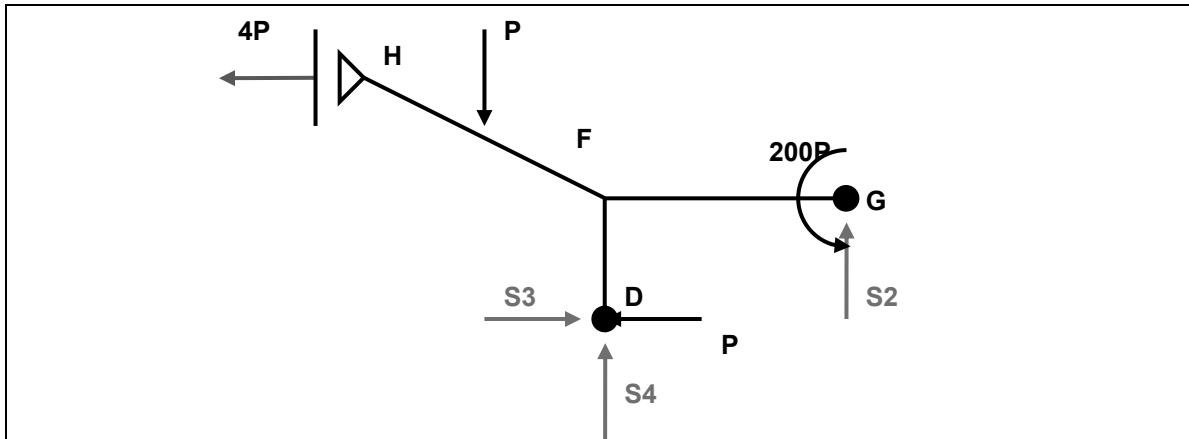


Es decir que como la barra CEG tiene sus extremos articulados y no tiene carga en su tramo, se comporta como una biela de eje inmaterial CG:



Así se puede ver que la chapa (1) se apoya sobre la chapa (2), a través de la articulación en D y la "biela" (3).

El esquema a resolver resulta muy sencillo, determinando primero las reacciones S3, S4 y S2 sobre la chapa (1) y transfiriendo luego esas reacciones a la chapa (2) para verificar el equilibrio de esta última, que es isostática por sí misma y cuyas reacciones de vínculo estaban previamente calculadas.



GRADO DE LIBERTAD	ECUACIÓN
CUERPO LIBRE RÍGIDO	(1) Desplazamiento en "X" $\sum F_x = -4P - P + S_3 = 0$
	(2) Desplazamiento en "Y" $\sum F_y = -P + S_2 + S_4 = 0$
	(3) Rotación del conjunto $\sum M_D = 200P + 100xP + 4Px200 + S_2x200 = 0$

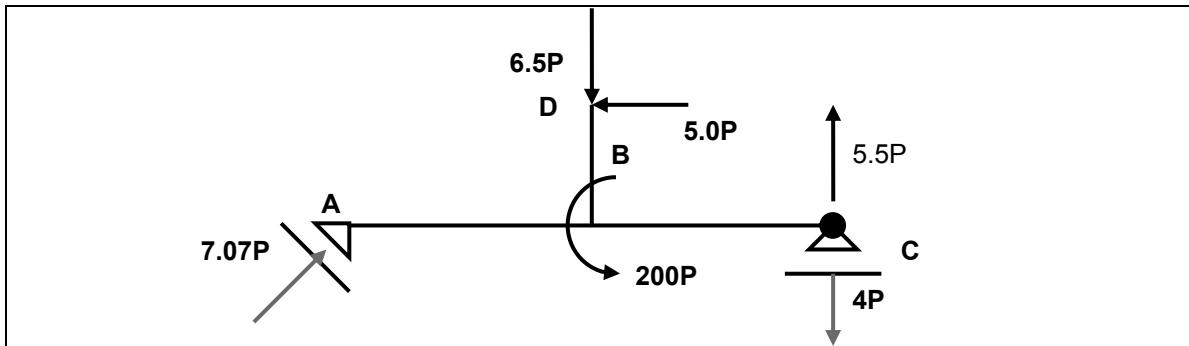
Se obtiene:

$$S2 = -5.50P$$

$$S3 = +5.00P$$

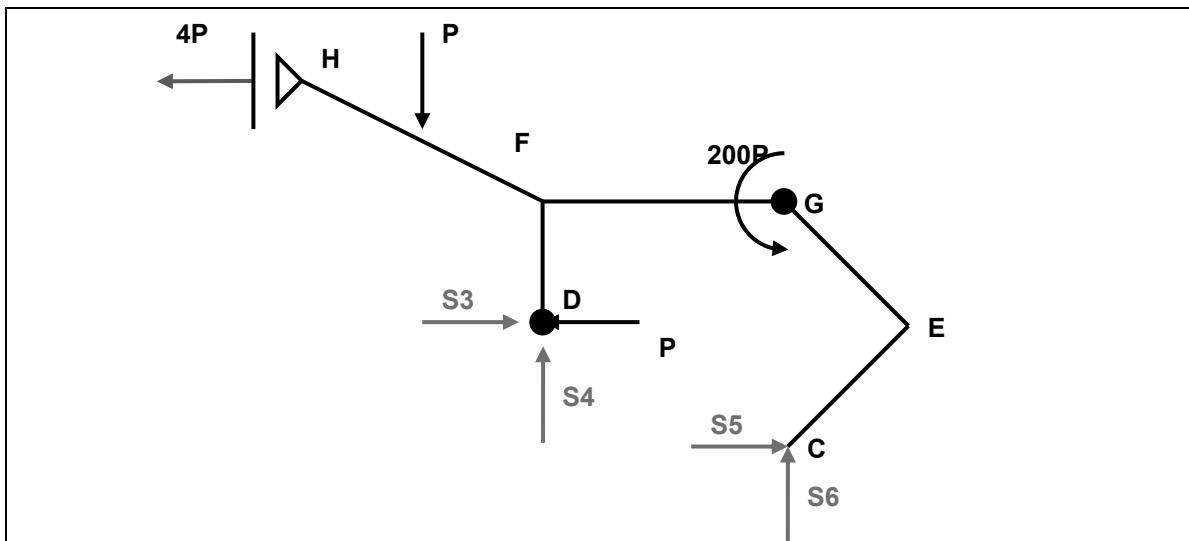
$$S4 = +6.50P$$

Entonces la chapa (2) queda sometida a un sistema de fuerzas activas y reactivas todas ya determinadas que deben verificar el equilibrio:



	GRADO DE LIBERTAD	ECUACIÓN
CUERPO LIBRE RÍGIDO	(1) Desplazamiento en "X"	$\sum F_x = 7.07P \cos(45) - 5P = 0$
	(2) Desplazamiento en "Y"	$\sum F_y = 7.07P \sin(45) - 4P + 3.5P - 6.5P = 0$
	(3) Rotación del conjunto	$\sum M_A = 200P + 5Px100 - 6.5Px200 - 4Px400 + 5.5Px400 = 0$

Si la barra (2) hubiera tenido alguna carga transversal a su eje ideal CG, entonces ya la suposición $S1=0$ y $S5=0$ no hubieran sido correctas, y entonces se tendría que haber analizado el conjunto de la chapa (2) y (3) como un sistema de dos chapas articuladas entre sí en G para resolver un sistema de $4x4$ en vez de uno de $6x6$ considerando el equilibrio en cada chapa por separado:



Se podría plantear el siguiente sistema en correspondencia con los cuatro grados de libertad que tiene el esquema:

GRADO DE LIBERTAD		ECUACIÓN
CUERPO LIBRE RÍGIDO	(1) Desplazamiento en "X"	$\sum F_x = 0$
	(2) Desplazamiento en "Y"	$\sum F_y = 0$
	(3) Rotación del conjunto	$\sum M_D = 0$
MOVIMIENTO RELATIVO	(4) Rotación relativa alrededor de G	$\sum M_G^I = 0$ $\sum M_G^{II} = 0$

Se llegaría a los resultados ya encontrados.

3 CONCLUSIONES

Hemos visto los distintos vínculos en los sistemas planos y las restricciones que imponen en los movimientos libres de las chapas.

También hemos visto que en correspondencia de dichos vínculos y en virtud del principio de acción y reacción hay acciones de la estructura sobre el vínculo, y reacciones del vínculo sobre la estructura.

En general estas acciones y reacciones son fuerzas congruentes con el desplazamiento que impide el vínculo (Fuerzas en los casos de vínculos simples y dobles, y fuerzas y cuplas en los casos de empotramiento).

Hemos visto que el procedimiento para calcular las reacciones de vínculo se puede resumir así:

1. Analizar la isostática o no del sistema, determinando;
 - Número de chapas
 - Grados de libertad total
 - Vínculos internos y sus restricciones
 - Grados de libertad de las chapas vinculadas
 - Vínculos externos y disposición
2. Eliminar los vínculos externos y reemplazarlos por las reacciones de manera que el sistema recupere sus grados de libertad original
3. Plantear las condiciones de equilibrio según los grados de libertad del sistema

Para el punto 3, y en particular cuando se trata de sistemas de chapas vinculadas hemos visto distintas maneras de plantear el problema, la decisión de tomar alguna de ellas es meramente estratégica a la hora de resolver los sistemas de ecuaciones que resultan, pero todas ellas se basan en analizar el camino que siguen las cargas desde su punto de aplicación hasta los apoyos, haciendo particular hincapié en poder describir cómo funciona mecánicamente el sistema estructural.

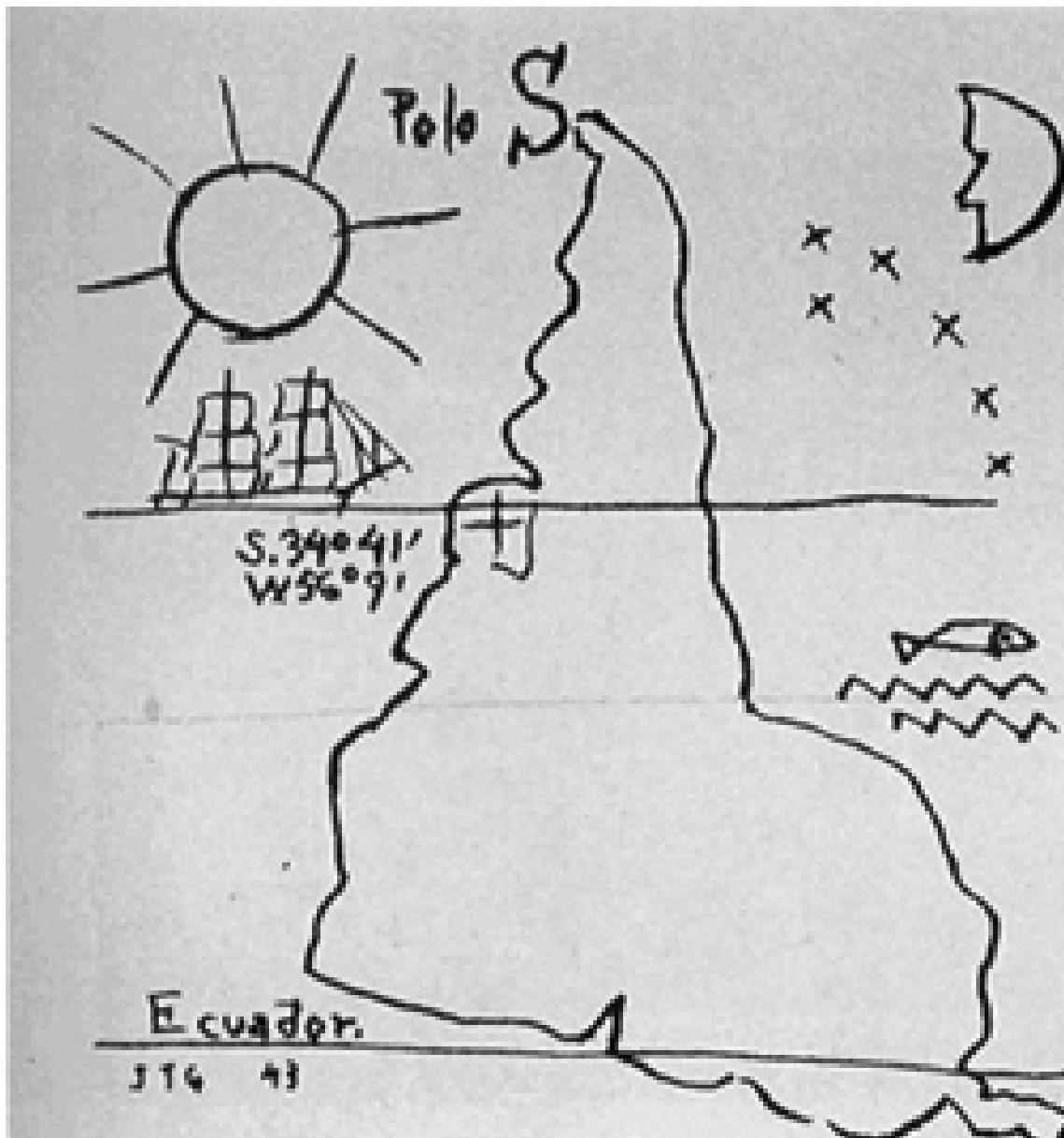
=====

I N G E N I E R I A
U N L P

ESTRUCTURAS IA

APUNTE DE CLASE

CARGAS DISTRIBUIDAS

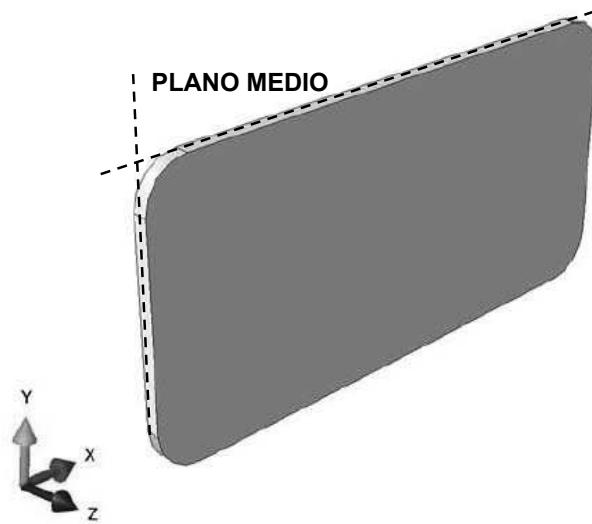


Joaquín Torres García: América
Invertida (1943). Dibujo. © Museo
Torres García. Montevideo, Uruguay.

ING. ASDRUBAL E. BOTTANI
ANO 2012

1.- ELEMENTOS ESTRUCTURALES EN EL PLANO Y SISTEMAS DE EJES:

CHAPA:



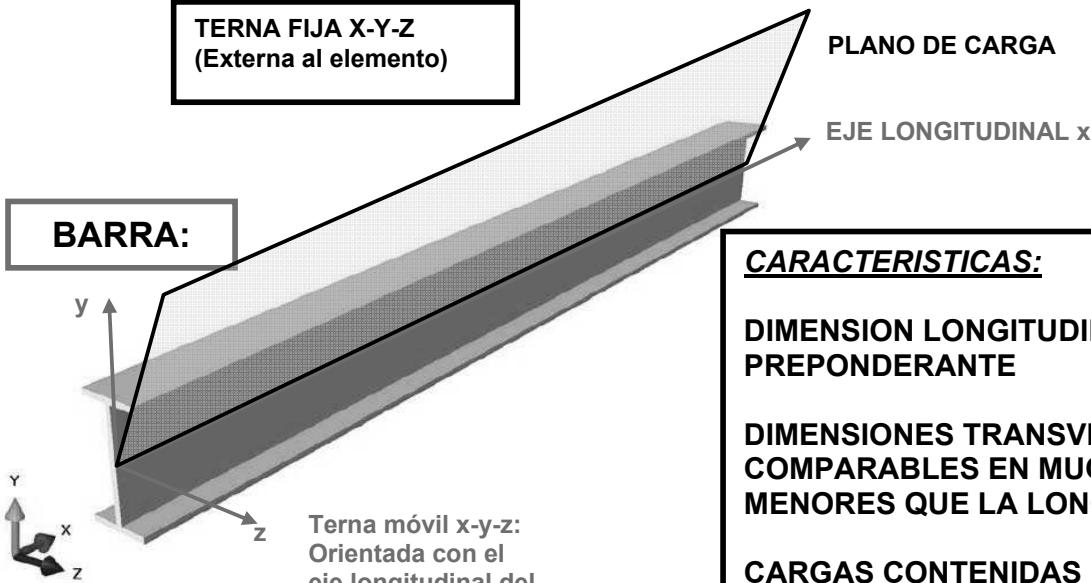
CARACTERISTICAS:

DIMENSIONES EN EL PLANO X-Y COMPARABLES

DIMENSION EN Z (ESPESOR)
MUY PEQUEÑA RESPECTO
DE LAS ANTERIORES

CARGAS CONTENIDAS EN EL
PLANO MEDIO X-Y

BARRA:



CARACTERISTICAS:

DIMENSION LONGITUDINAL (eje x)
PREPONDERANTE

DIMENSIONES TRANSVERSALES
COMPARABLES EN MUCHO
MENORES QUE LA LONGITUD

CARGAS CONTENIDAS EN UN
PLANO QUE CONTIENE AL EJE
LONGITUDINAL

SECCION TRANSVERSAL:
SE OBTIENE CORTANDO LA
BARRA CON UN PLANO NORMAL
AL EJE LONGITUDINAL

Terna fija X-Y-Z
(Externa al elemento)

TERNA FIJA:

SE UTILIZA PARA EL ANALISIS DE FUERZAS ACTUANTES SOBRE LA ESTRUCTURA

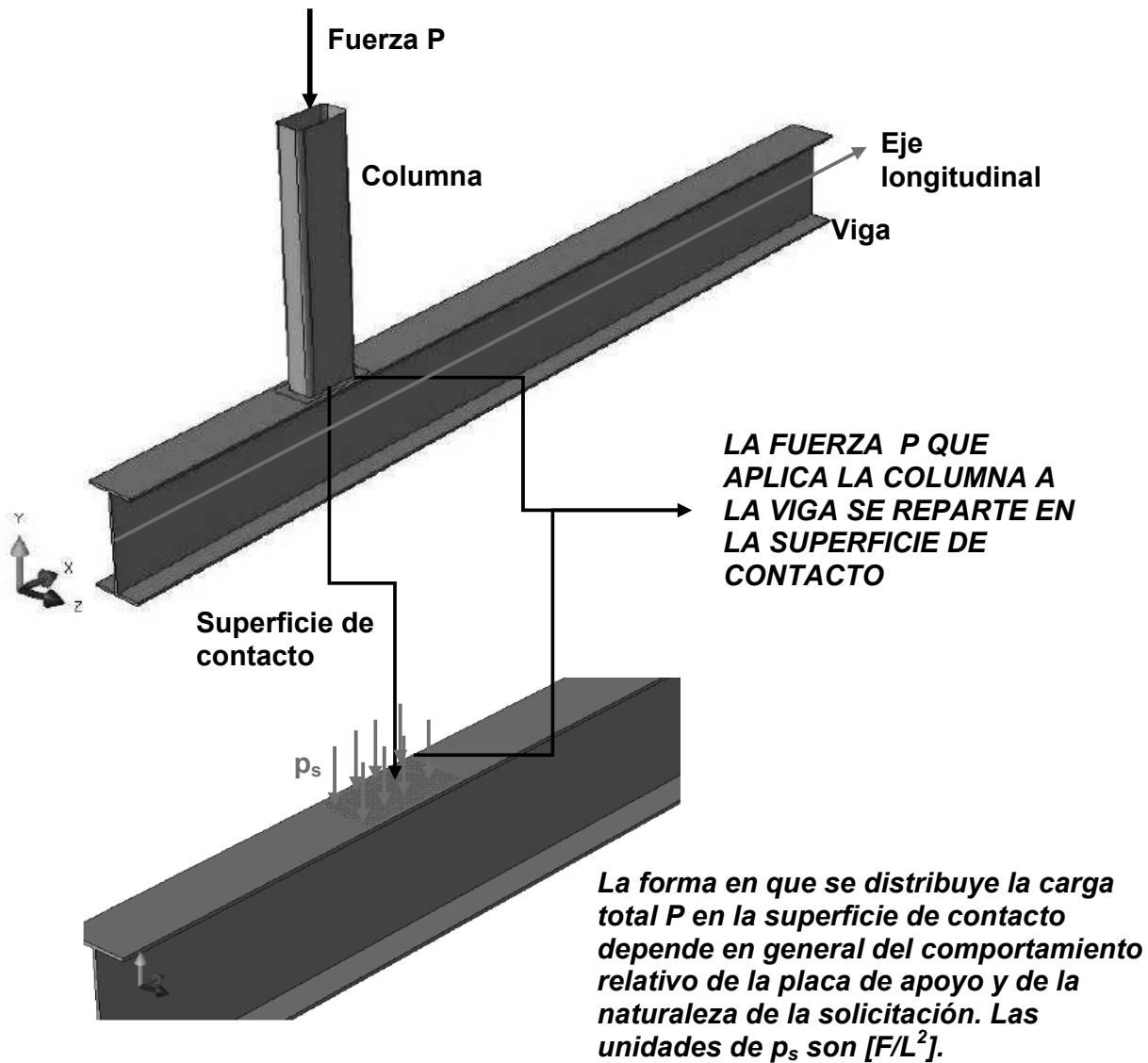
TERNA MOVIL:

SE UTILIZA CUANDO INTERESA SABER LA ORIENTACION DE LAS FUERZAS RESPECTO DE LA SECCION
TRANSVERSAL DE LA BARRA

2.- APPLICACIÓN DE FUERZAS PUNTUALES:

Caso de análisis: Columna apoyada sobre una viga:

2.1. MODELO FISICO

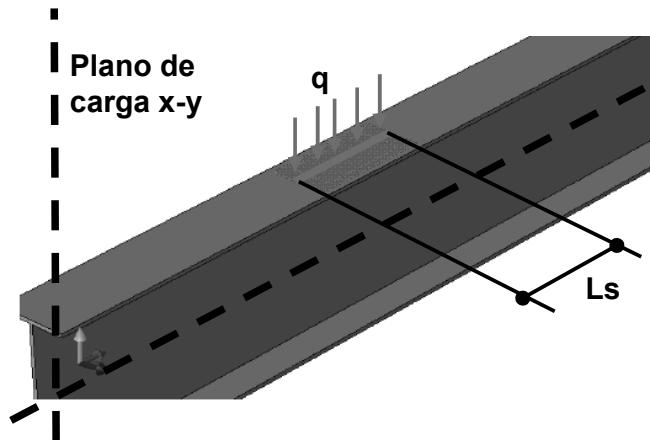


2.2. CONSTRUCCION DEL MODELO DE ANALISIS:

Consideraciones para la modelización:

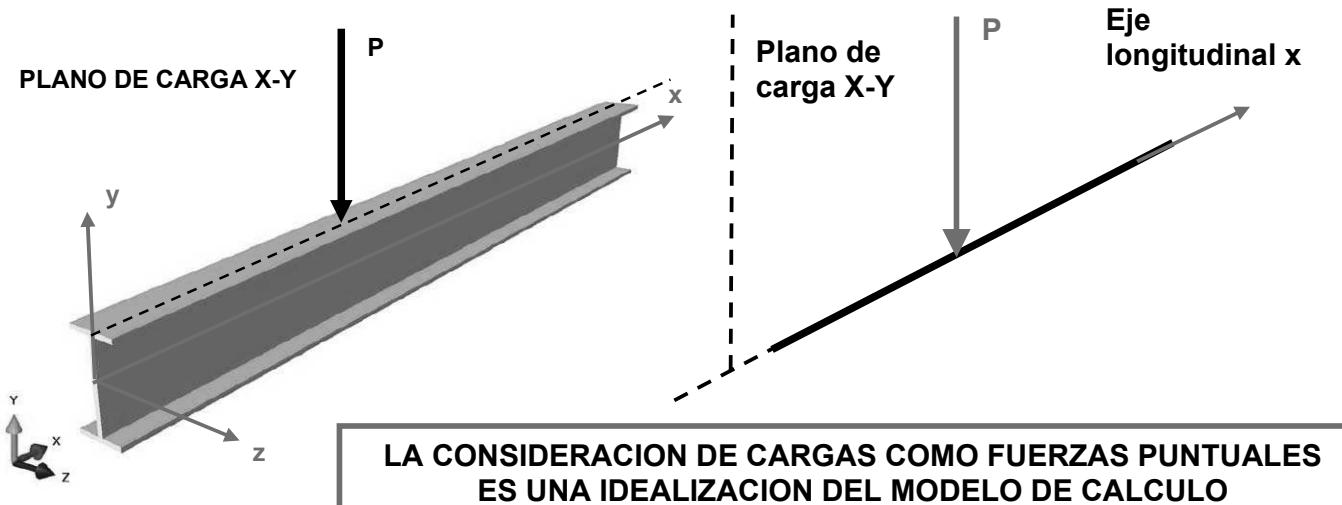
1.- Las fuerzas aplicadas guardan simetría respecto del plano x-y que contiene al eje longitudinal de la barra.

Esto permite reducir la carga distribuida p_s en la superficie de contacto a una carga distribuida en la longitud L_s que resulta de la intersección del plano x-y con la superficie de contacto:



2.- Si la longitud L_s es muy pequeña comparada con la longitud total L de la viga, se puede suponer para el caso que se analiza que la carga P está aplicada en su totalidad en el punto intersección del eje longitudinal de la columna con el de la viga.

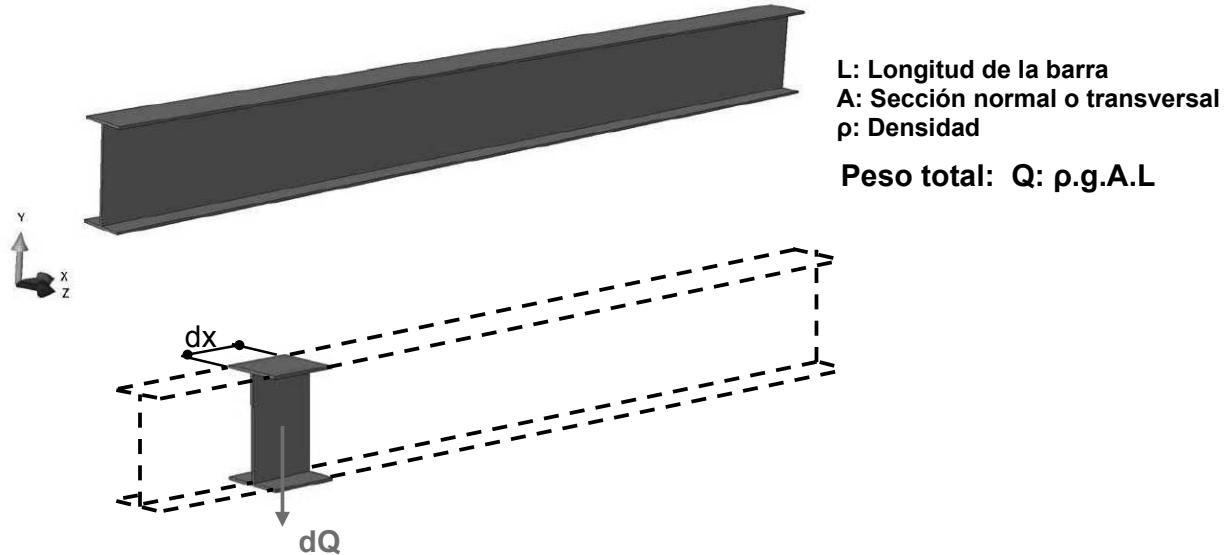
3.- Finalmente se modeliza a las barras con líneas coincidentes con sus respectivos ejes longitudinales



3.- APPLICACIÓN DE FUERZAS DISTRIBUIDAS:

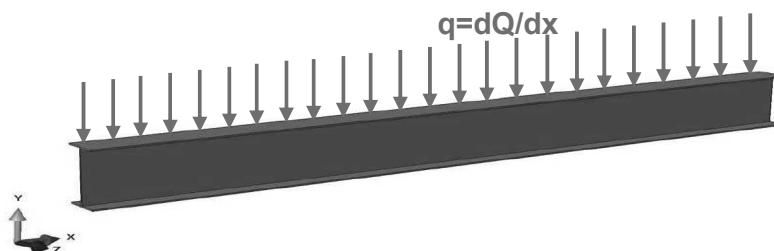
**NO SIEMPRE SE PUEDEN FORMULAR LAS SIMPLIFICACIONES ANTERIORES
RESPECTO A LA APLICACIÓN DE LAS CARGAS**

3.1. EJEMPLO: PESO PROPIO DE UNA BARRA:



1.- Cada elemento de la barra de longitud dx tiene un peso $dQ = \rho \cdot g \cdot A \cdot dx$

2.- Entonces la carga de peso propio está distribuida a lo largo de la longitud de la barra con una magnitud $q = dQ/dx = \rho \cdot g \cdot A$



3.- Peso Total :

Se obtiene sumando todas las fuerzas elementales $dQ = q \cdot dx$

Como son fuerzas paralelas la suma es suma algebraica

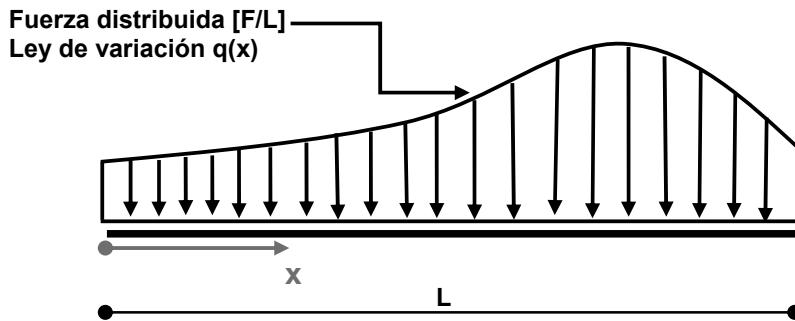
$$Q = \int q \cdot dx = q \cdot L = \rho \cdot g \cdot A \cdot L$$

4.- El peso total está aplicado en el centro de gravedad (CG) de la barra, en este caso a $L/2$ del origen $x=0$

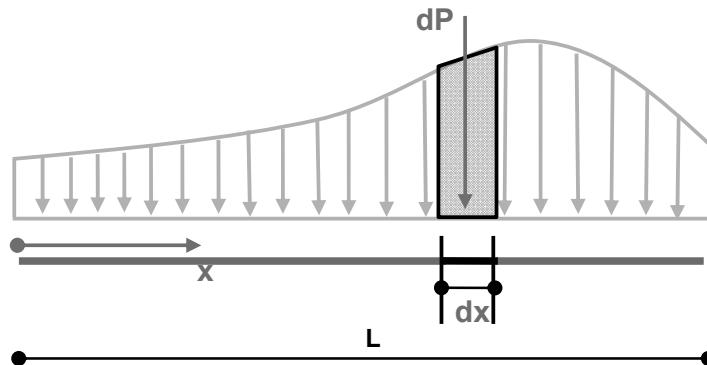
5.- Sólo para algunas consideraciones se puede reemplazar la carga distribuida por su resultante

3.2. Caso general de una carga distribuida:

Barra de longitud L bajo la acción de una fuerza distribuida de ley de variación cualquiera:



Cada elemento dx de la barra está bajo la acción de una fuerza $dP = q(x).dx$



La barra está bajo la acción de una serie de fuerzas paralelas dP

La resultante de esas fuerzas es la suma algebraica de cada una de las componentes

$$P = \int_0^L q(x).dx$$

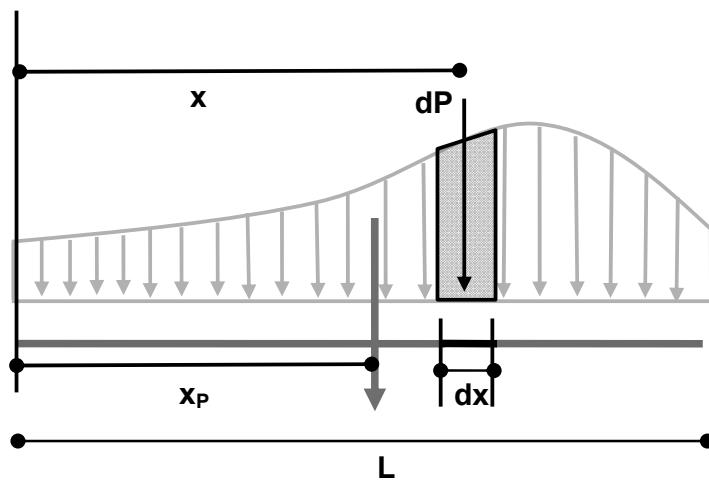
LA RESULTANTE DE LA FUERZA
DISTRIBUIDA ES EL AREA DEL
DIAGRAMA DE CARGA

La ubicación de la resultante se obtiene por aplicación del teorema de Varignon

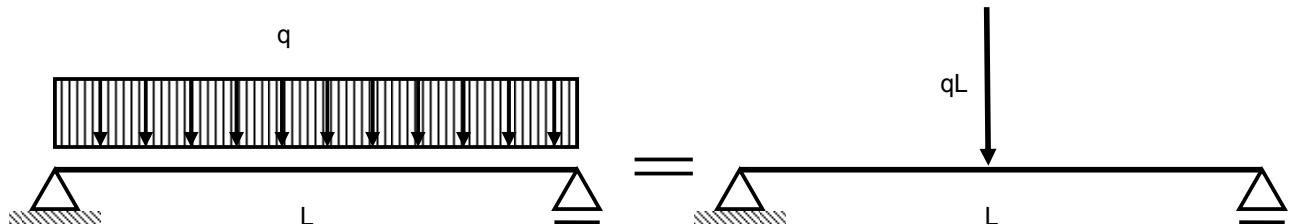
$$P \cdot x_P = \int_0^L dP \cdot x = \int_0^L q(x) \cdot x \cdot dx$$

$$x_P = \frac{\int_0^L q(x) \cdot x \cdot dx}{\int_0^L q(x) \cdot dx}$$

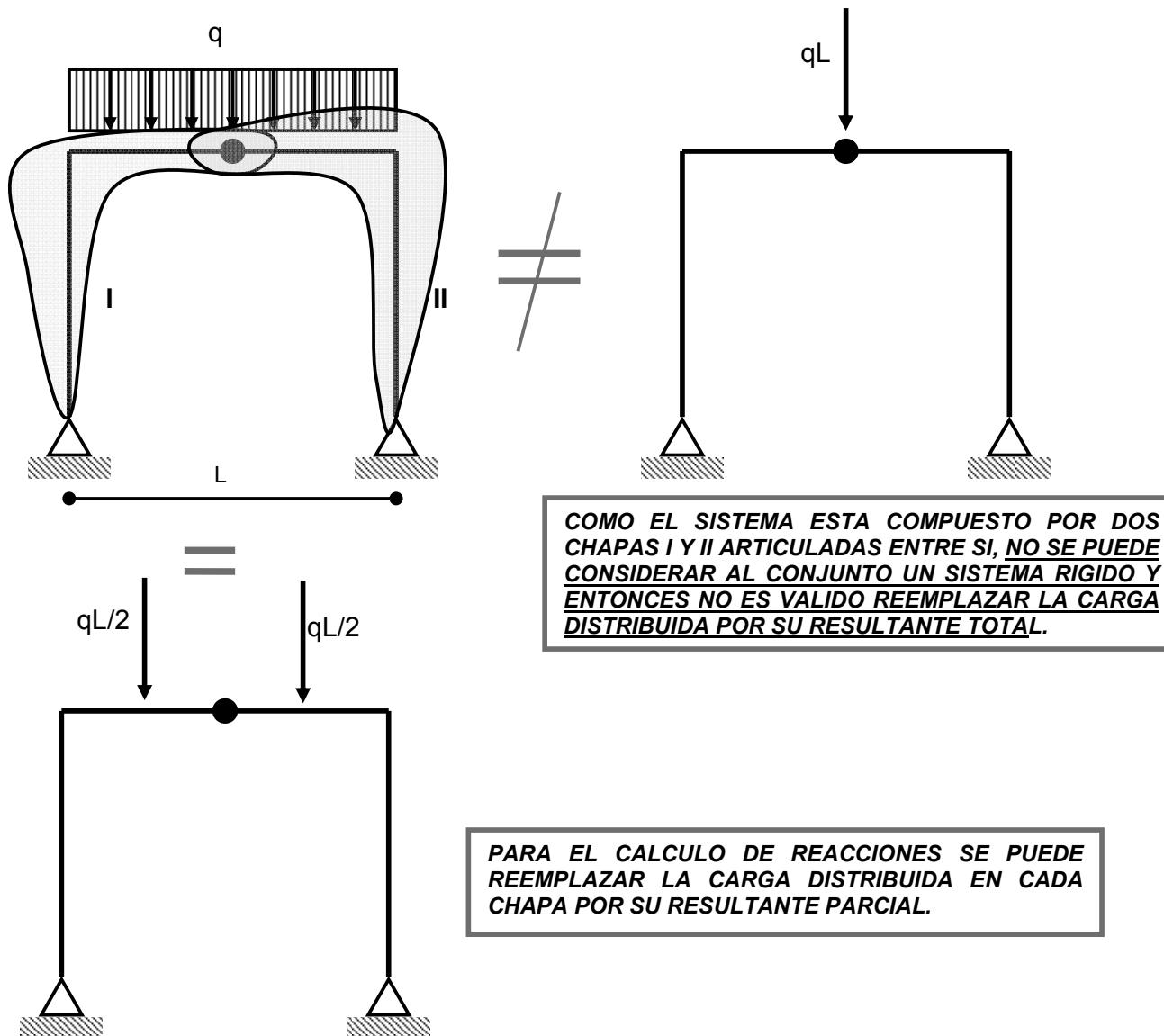
LA RESULTANTE DE LA FUERZA DISTRIBUIDA
ESTA APlicada EN CORRESPONDENCIA DE LA
COORDENADA x_P DEL BARICENTRO DE LA
SUPERFICIE DE CARGA



SOLO ES VALIDO REEMPLAZAR LA FUERZA DISTRIBUIDA POR SU RESULTANTE EN EL CASO QUE SE TRATE DE ELEMENTOS INFINITAMENTE RIGIDOS



SOLO SE PUEDE REEMPLAZAR LA CARGA DISTRIBUIDA POR SU RESULTANTE PARA EL CALCULO DE REACCIONES YA QUE EL PROCESO DE CALCULO SOLO SE BASA EN CONSIDERACIONES ESTATICAS



ESTRUCTURAS IA



SINTESIS TEMATICA MOMENTOS DE INERCIA DE SECCIONES PLANAS

ING. ASDRÚBAL E. BOTTANI
AÑO 2010

Alfredo Hlito, Líneas tangentes, 1964

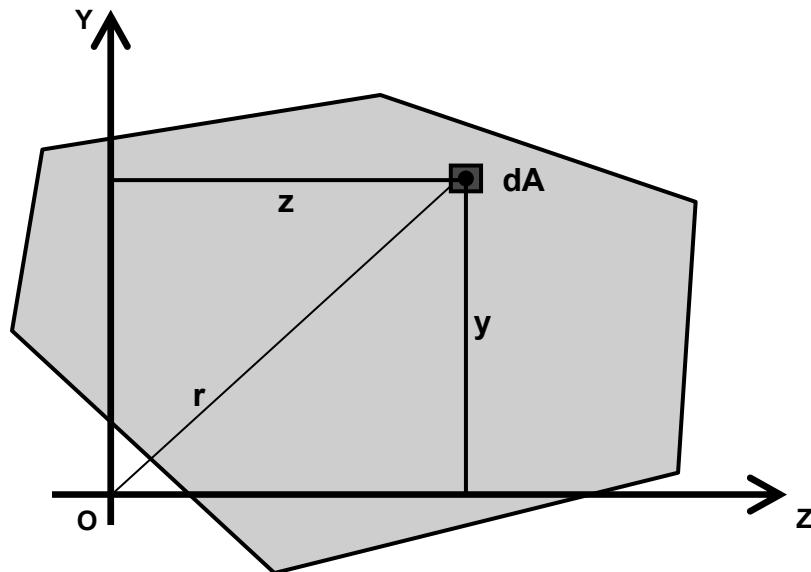
Oleo sobre tela,, MNBA

FI - UNLP

SINTESIS TEMATICA

MOMENTOS DE INERCIA DE UNA SECCION

1.- DEFINICIONES:



Momento de Inercia respecto del eje z:

$$J_z = \int_A y^2 dA \quad [L]^4 \quad \text{Siempre} >0$$

Momento de Inercia respecto del eje y:

$$J_y = \int_A z^2 dA \quad [L]^4 \quad \text{Siempre} >0$$

Momento de Inercia Polar respecto de O:

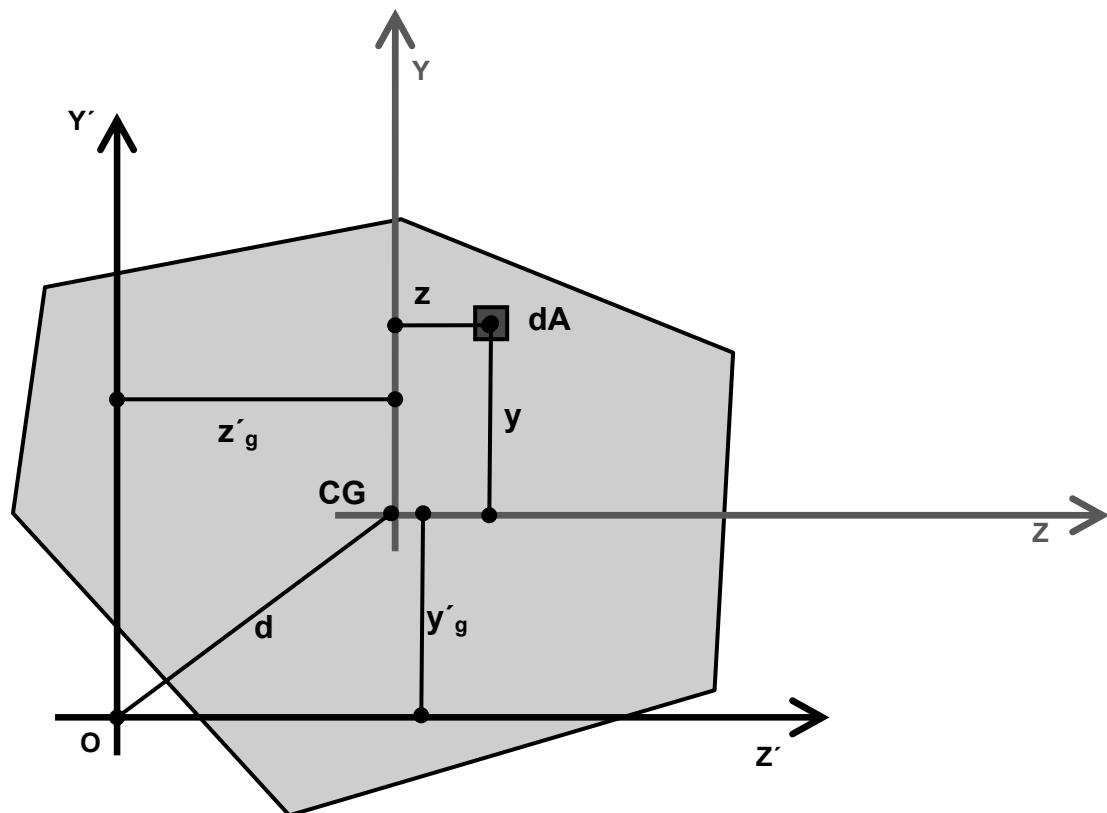
$$J_p = \int_A r^2 dA = J_z + J_y \quad [L]^4 \quad \text{Siempre} >0$$

Momento de inercia Centrífugo o Producto de inercia:

$$J_{zy} = \int_A zy dA \quad [L]^4 \quad \text{Puede ser} >0, <0, =0$$

EN EL CASO QUE UNO DE LOS EJES Z o Y SEAN UN EJE DE SIMETRIA EL MOMENTO CENTRÍFUGO ES NULO

2.- TEOREMA DE STEINER:



- CG: Baricentro del Área A
 y'_g : Coordenada según y' del CG
 z'_g : Coordenada según z' del CG
 Ejes Z CG Y: Ejes baricéntricos
 Ejes Z' O Y': Ejes cualesquiera
 J_x : Momento de inercia respecto eje z baricéntrico
 J_y : Momento de inercia respecto eje y baricéntrico

$$J_{z'} = \int_A y' dA = \int_A (y + y'_g)^2 dA = \int_A (y^2 + 2yy'_g + y'^2_g) dA$$

Por definición de baricentro: $\int_A y dA = 0$

Entonces:

$$J_{z'} = J_z + y'^2_g A$$

ENUNCIADO:

EL MOMENTO DE INERCIA RESPECTO A UN EJE NO BARICENTRICO ES IGUAL AL MOMENTO DE INERCIA BARICENTRICO RESPECTO DEL EJE PARALELO AL ANTERIOR MAS EL AREA POR EL CUADRADO DE LA DISTANCIA ENTRE AMBOS EJES.

$$J_{Z'} = J_Z + y_g'^2 A$$

$$J_{Y'} = J_Y + z_g'^2 A$$

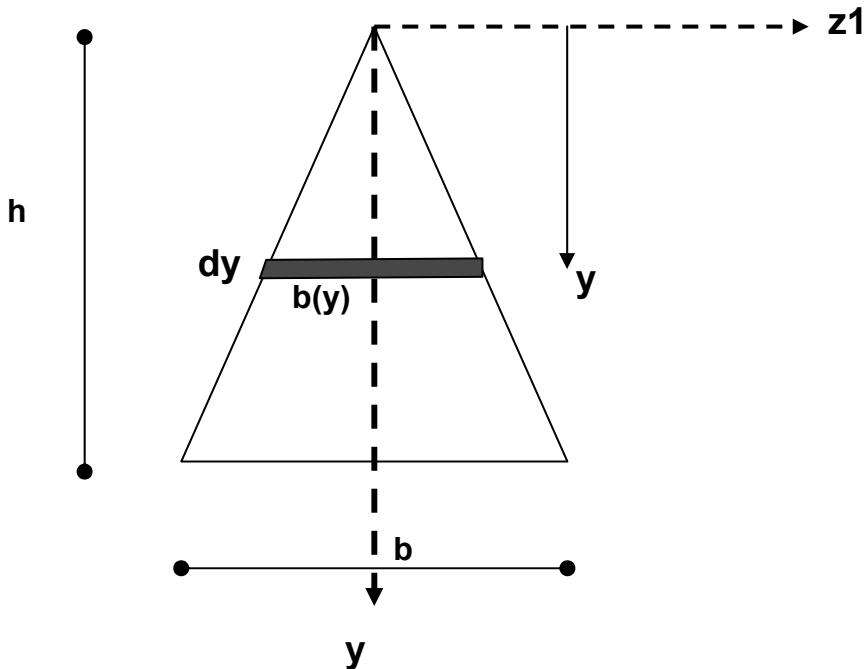
$$J_{PO'} = J_{PG} + d^2 A$$

LA APLICACIÓN:

CALCULO DE INERCIAS DE SECCIONES DE FORMA CUALQUIERA A PARTIR DE LA DESCOMPOSICION EN SECCIONES SIMPLES DE INERCIAS CONOCIDAS

EJEMPLO 1:

Calcular el momento de inercia de una sección triangular como la indicada en la figura, respecto del eje baricéntrico y un eje pasante por su base.



1.- Se elige un sistema de ejes con origen arbitrario, en este caso el sistema $z1,y$ con origen en el vértice del triángulo y se calcula el momento de inercia J_{z1} :

El ancho $b(y)$ a una distancia y del origen es:

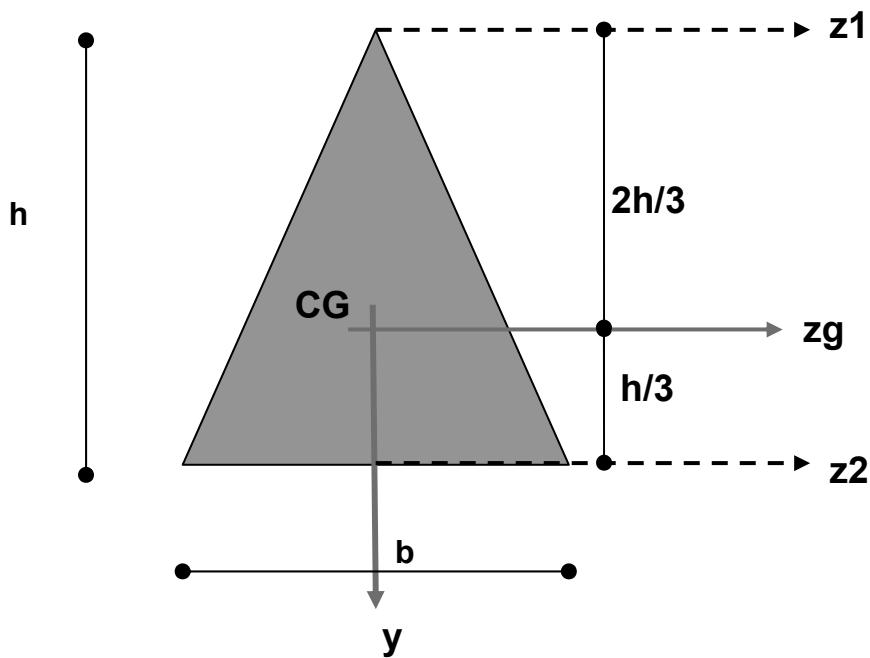
$$b(y) = \frac{b}{h}y$$

Aplicando la definición:

$$J_{z1} = \int_0^h \frac{b}{h}y dy y^2 = \int_0^h \frac{b}{h}y^3 dy$$

$$J_{z1} = \frac{bh^3}{4}$$

2) Por aplicación del teorema de Steiner se calcula el momento de inercia baricéntrico sabiendo que el eje zg baricéntrico está a una distancia de $1/3$ de la altura medida desde la base:



Sabiendo por Steiner que:

$$J_{z1} = J_{zg} + Ad^2$$

$$J_{zg} = J_{z1} - Ad^2$$

Siendo

$$A = \frac{bh}{2} \quad y \quad d = \frac{2h}{3}$$

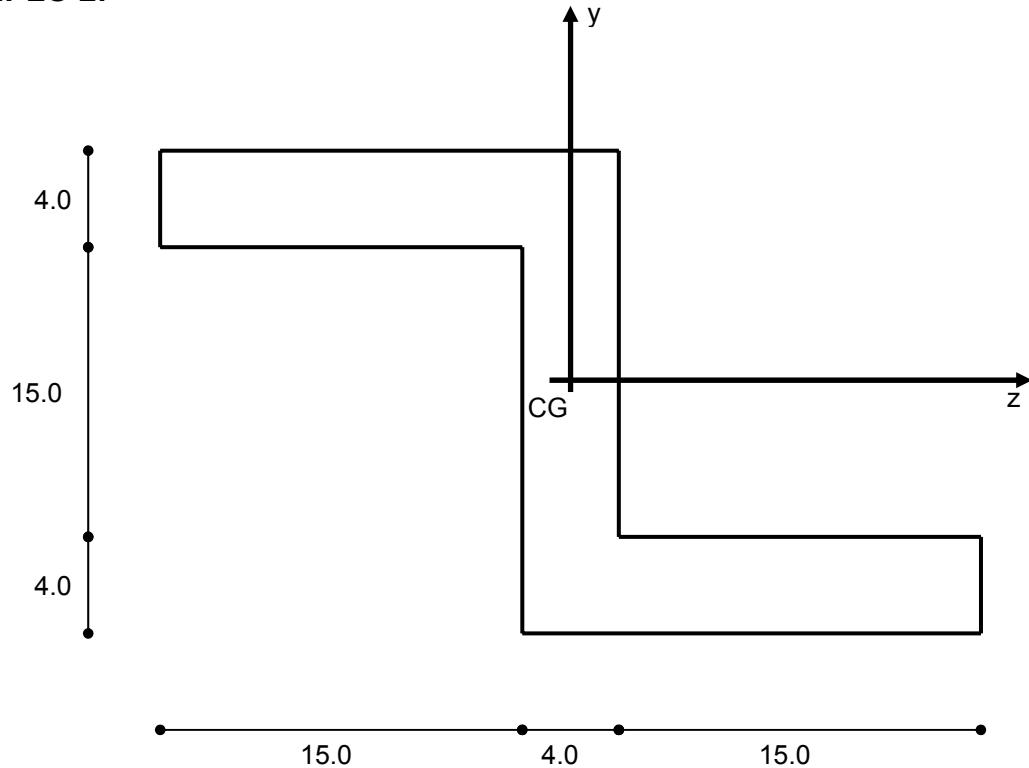
$$J_{zg} = \frac{bh^3}{36}$$

3) El momento de inercia respecto de un eje pasando por la base J_{z2} se calcula mediante la fórmula de Steiner conocido ahora J_{zg} y la distancia igual a $h/3$:

$$J_{z2} = J_{zg} + A \left(\frac{h}{3} \right)^2$$

$$J_{z2} = \frac{bh^3}{12}$$

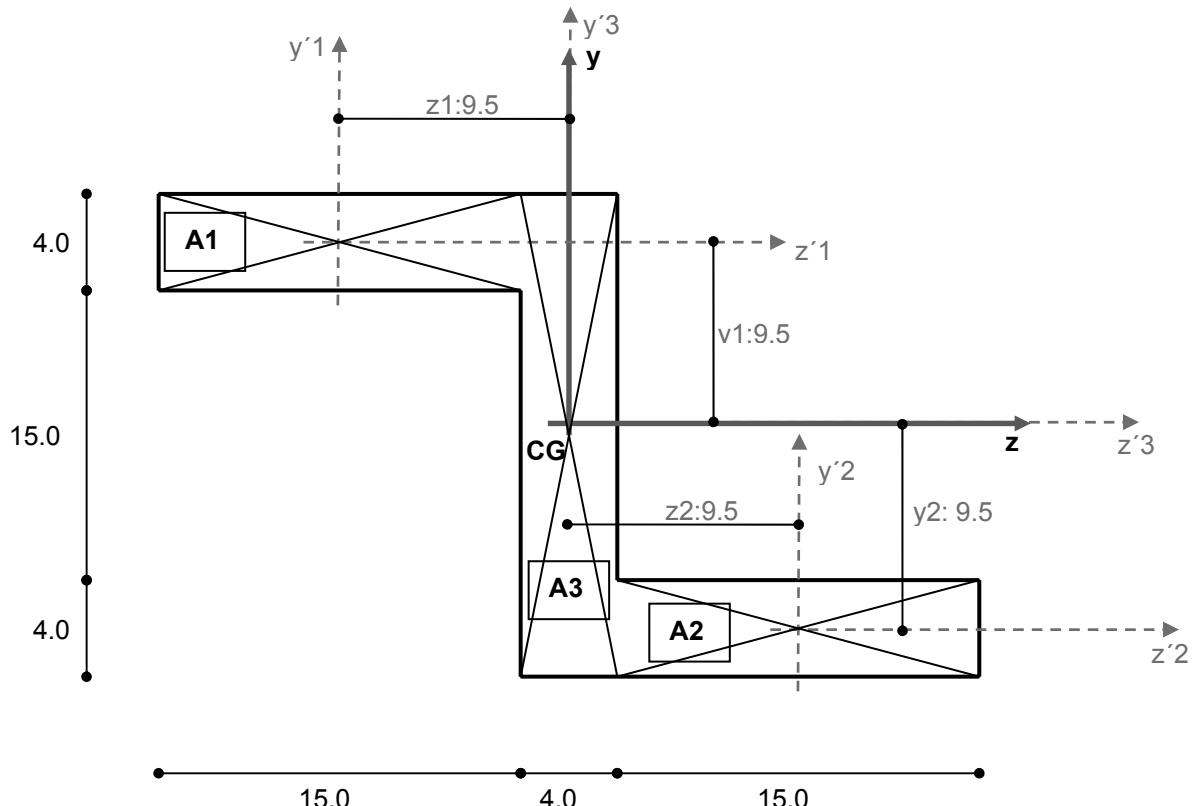
EJEMPLO 2:



Se desea calcular el momento de inercia de la sección Z de la figura:

Paso 1: Se calcula la posición de los ejes **z** e **y** baricéntricos, que en este caso por razones de simetría resultan muy fácil ubicar

Paso 2: Se divide a la sección en secciones de forma conocida, en este caso en tres rectángulos 1, 2 y 3, y se ubican en cada una de esas secciones los ejes baricéntricos propios, en este caso los sistemas $z'_i-y'_i$, con origen en cada uno de los baricentros de esas secciones.



Paso 3: Se determina para cada una de las secciones en que se dividió el área total los siguientes parámetros:

- a) A_i : Área de cada sección

$$\begin{array}{lll} A_1:A_2: & 15 \times 4: & 60.0 \text{ cm}^2 \\ A_3: & 23 \times 4: & 92.0 \text{ cm}^2 \end{array}$$

- b) Las coordenadas y_i y z_i de los baricentros propios de cada sección en que se dividió el área respecto del sistema de ejes baricéntrico $z-y$:

$$\begin{array}{lll} z_1: & -9.5 \text{ cm} & z_2: & +9.5 \text{ cm} & z_3: & 0.0 \\ y_1: & +9.5 \text{ cm} & y_2: & -9.5 \text{ cm} & y_3: & 0.0 \end{array}$$

- c) Los momentos de inercia de cada sección individual respecto a sus propios ejes baricéntricos:

$$\begin{array}{lll} J_{z1}:J_{z2}: & 15 \times 4^3/12: & 80.0 \text{ cm}^4 \\ J_{z3}: & 4 \times 23^3/12: & 4055.6 \text{ cm}^4 \\ J_{y1}:J_{y2}: & 4 \times 15^3/12: & 1125.0 \text{ cm}^4 \\ J_{y3}: & 23 \times 4^3/12: & 122.6 \text{ cm}^4 \end{array}$$

Paso 4: Se calculan los momentos de inercia **Jz** y **Jy** de la sección completa por aplicación directa del teorema de Steiner:

$$Jz = \sum (Jz_i + A_i y_i^2)$$

Elemento	Jz_i (cm ⁴)	A_i (cm ²)	y_i (cm)	$A_i y_i^2$ (cm ⁴)	$Jz_i + A_i y_i^2$ (cm ⁴)
A1	80.0	60.0	9.5	5415.0	5495.0
A2	80.0	60.0	-9.5	5415.0	5495.0
A3	4055.6	92.0	0.0	0.0	4055.6
$Jz(cm^4)$					15045.6

Se puede observar en la tabla la influencia relativa de cada uno de los términos de la sumatoria según el lado mayor del elemento considerado sea paralelo o perpendicular respecto al eje según el cual se calcula la inercia

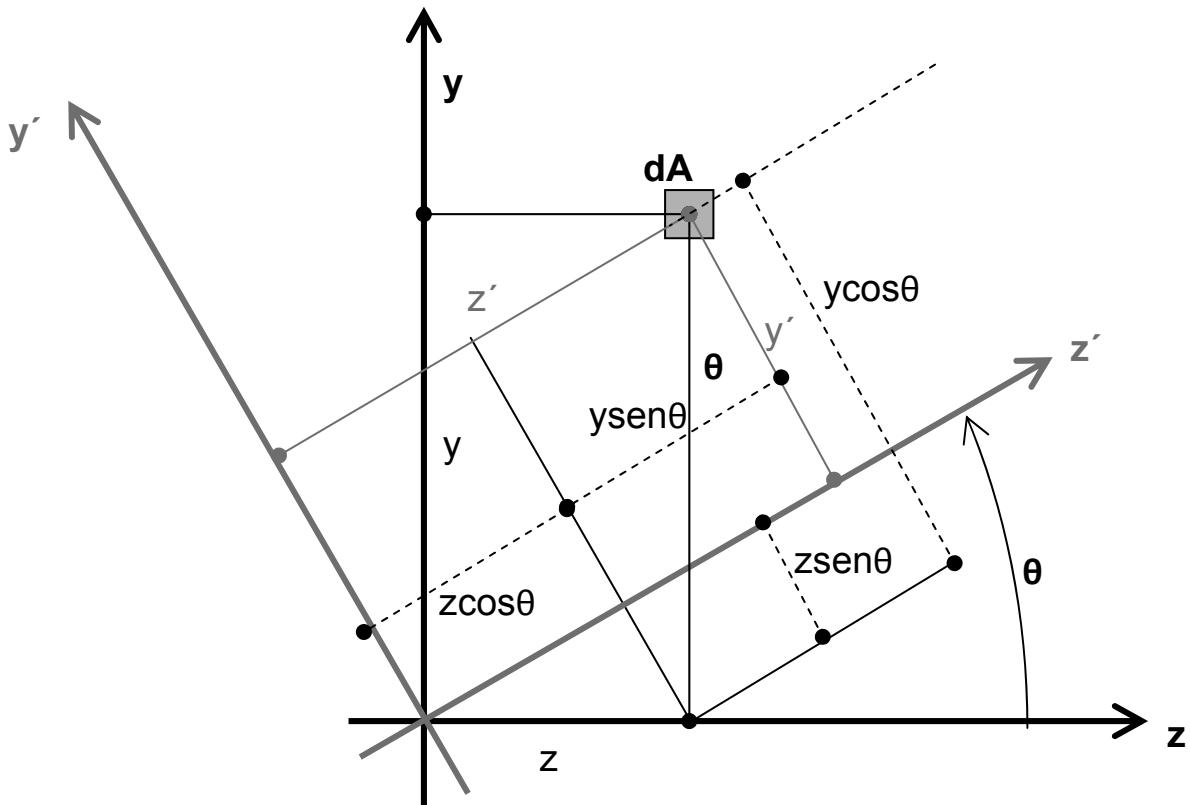
$$Jy = \sum (Jy_i + A_i z_i^2)$$

Elemento	Jy_i (cm ⁴)	A_i (cm ²)	z_i (cm)	$A_i z_i^2$ (cm ⁴)	$Jy_i + A_i z_i^2$ (cm ⁴)
A1	1125.0	60.0	-9.5	5415.0	6540.0
A2	1125.0	60.0	9.5	5415.0	6540.0
A3	122.6	92.0	0.0	0.0	122.6
$Jy(cm^4)$					13202.6

$$Jzy = \sum (Jzy_i + A_i y_i z_i)$$

Elemento	Jzy_i (cm ⁴)	A_i (cm ²)	z_i (cm)	y_i (cm)	$A_i z_i y_i$ (cm ⁴)	$Jzy_i + A_i z_i y_i$ (cm ⁴)
A1	0.0	60.0	-9.5	9.5	-5415.0	-5415.0
A2	0.0	60.0	9.5	-9.5	-5415.0	-5415.0
A3	0.0	92.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$Jzy(cm^4)$					-10830.0	

3. EJES PRINCIPALES DE INERCIA



Se desea relacionar el momento de inercia respecto de los ejes rotados z' - y' con relación a los momentos de inercia respecto de los ejes z - y conocidos

TRANSFORMACION DE COORDENADAS:

$$z' = +z \cdot \cos \theta + y \cdot \sin \theta$$

$$y' = -z \cdot \sin \theta + y \cdot \cos \theta$$

Aplicando la definición:

$$J_{z'} = \int_A y'^2 dA = \int_A (y \cdot \cos \theta - z \cdot \sin \theta)^2 dA$$

$$J_{z'} = \cos^2 \theta \int_A y^2 dA + \sin^2 \theta \int_A z^2 dA - 2\cos \theta \sin \theta \int_A yz dA$$

$$J_{z'} = J_z \cdot \cos^2 \theta + J_y \cdot \sin^2 \theta - 2\cos \theta \sin \theta \cdot J_{yz}$$

$$\sin 2\theta = 2 \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta$$

$$\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$$

$$J_{z'} = \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right) J_z + \left(\frac{1 - \cos 2\theta}{2} \right) J_y - J_{yz} \cdot \sin 2\theta$$

$$J_{z'} = \frac{J_z + J_y}{2} + \frac{J_z - J_y}{2} \cdot \cos 2\theta - J_{yz} \cdot \sin 2\theta \quad (1)$$

$$Jy' = \int_A z'^2 dA = \int_A (z \cos\theta + y \sin\theta)^2 dA$$

$$Jy' = \cos^2\theta \int_A z^2 dA + \sin^2\theta \int_A y^2 dA - 2\cos\theta\sin\theta \int_A yz dA$$

$$Jy' = Jy \cos^2\theta + Jz \sin^2\theta + 2\cos\theta\sin\theta \cdot Jyz$$

$$Jy' = \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right) Jy + \left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right) Jz + Jyz \cdot \sin 2\theta$$

$$Jy' = \frac{Jz+Jy}{2} - \frac{Jz-Jy}{2} \cdot \cos 2\theta + Jyz \cdot \sin 2\theta \quad (2)$$

$$Jz'y' = \int_A z'y' dA = \int_A (z \cos\theta + y \sin\theta)(y \cos\theta - z \sin\theta) dA$$

$$Jz'y' = \cos^2\theta \cdot Jzy - \sin\theta\cos\theta \cdot Jy + \sin\theta\cos\theta \cdot Jz - \sin^2\theta \cdot Jzy$$

$$Jz'y' = Jzy(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + (Jz - Jy)\sin\theta\cos\theta$$

$$Jz'y' = \frac{Jz-Jy}{2} \cdot \sin 2\theta + Jzy \cdot \cos 2\theta \quad (3)$$

LAS FORMULAS (1), (2) Y (3) PERMITEN CALCULAR LOS MOMENTOS DE INERCIA SEGÚN LOS EJES Z'-Y' ROTADOS UN ANGULO θ CON LOS EJES Z-Y, CONOCIDOS LOS MOMENTOS DE INERCIA SEGÚN ESTOS ULTIMOS.

OBJETIVO: ENCONTRAR EL ANGULO θ QUE EXTREMIZA Jz' y Jy'



$$\frac{dJz'}{d\theta} = 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{dJy'}{d\theta} = 0$$

$$\frac{dJz'}{d\theta} = -(Jz - Jy) \cdot \sin 2\theta - 2Jyz \cdot \cos 2\theta$$

$$-(Jz - Jy) \cdot \sin 2\theta_0 - 2Jyz \cdot \cos 2\theta_0 = 0$$

$$\boxed{\tan 2\theta_{o1} = \frac{-2J_{yz}}{(J_z - J_y)}} \quad (4)$$

$$\frac{dJy'}{d\theta} = (Jz - Jy) \cdot \sin 2\theta + 2Jyz \cdot \cos 2\theta$$

$$(Jz - Jy) \cdot \sin 2\theta_0 + 2Jyz \cdot \cos 2\theta_0 = 0$$

$$\boxed{\tan 2\theta_{o2} = \frac{-2J_{yz}}{(J_z - J_y)}}$$

$$\boxed{\theta_{o1} = \theta_{o2} + \frac{\pi}{2}}$$

LOS EJES QUE EXTREMIZAN LOS MOMENTOS DE INERCIA FORMAN ENTRE SI UN ANGULO IGUAL A $\pi/2$ Y SE DENOMINAN EJES PRINCIPALES DE LA SECCION.

LOS MOMENTOS DE INERCIA EXTREMOS SE DENOMINAN MOMENTOS DE INERCIA PRINCIPALES

De la ecuación (4) se puede despejar $Jz - Jy$ en función de θ_0 :

$$\frac{Jz - Jy}{2} = -\frac{Jzy}{\tan 2\theta_0}$$

Reemplazando en (1) y (2), teniendo en cuenta que $\theta = \theta_0$

$$Jz' = \frac{Jz+Jy}{2} - \frac{Jzy}{\operatorname{tg}2\theta_0} \cos 2\theta_0 - Jz \operatorname{sen} 2\theta_0$$

$$Jz' = \frac{Jz+Jy}{2} - \frac{Jz-Jy}{\operatorname{sen}2\theta_0} \quad (1')$$

Análogamente:

$$Jy' = \frac{Jz+Jy}{2} + \frac{Jzy}{\operatorname{tg}2\theta_0} \cos 2\theta_0 + Jz \operatorname{sen} 2\theta_0$$

$$Jz' = \frac{Jz+Jy}{2} + \frac{Jz-Jy}{\operatorname{sen}2\theta_0} \quad (2')$$

Teniendo en cuenta que:

$$\operatorname{sen}2\theta_0 = \frac{\operatorname{tg}2\theta_0}{\sqrt{1+(\operatorname{tg}2\theta_0)^2}} \quad y \quad \operatorname{tg}2\theta_0 = \frac{-2Jzy}{Jz-Jy}$$

$$\frac{1}{\operatorname{sen}2\theta_0} = -\frac{1}{2}\sqrt{(Jz - Jy)^2 + 2Jzy^2}$$

Reemplazando en (1') y (2') se llega a la ecuación que define los momentos de inercias respecto a los ejes principales conocidos los momentos de inercia respectivo de un sistema de ejes cualquiera, llamando al eje principal z'=eje 1 y al eje principal y'=eje 2:

MOMENTOS PRINCIPALES

$$J_1 = \frac{J_z + J_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{J_z - J_y}{2}\right)^2 + J_{zy}^2} \quad (5)$$

$$J_2 = \frac{J_z + J_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{J_z - J_y}{2}\right)^2 + J_{zy}^2} \quad (6)$$

OBJETIVO: ENCONTRAR EL ANGULO θ QUE ANULA $J_{z'y'}$

$$\frac{J_z - J_y}{2} \cdot \sin 2\theta + J_{zy} \cdot \cos 2\theta = 0$$

$$\operatorname{tg} 2\theta_o = \frac{-2J_{yz}}{(J_z - J_y)}$$



EN CORRESPONDENCIA DE LOS EJES PRINCIPALES EL PRODUCTO DE INERCIA ES NULO

$$J_{12} = 0$$



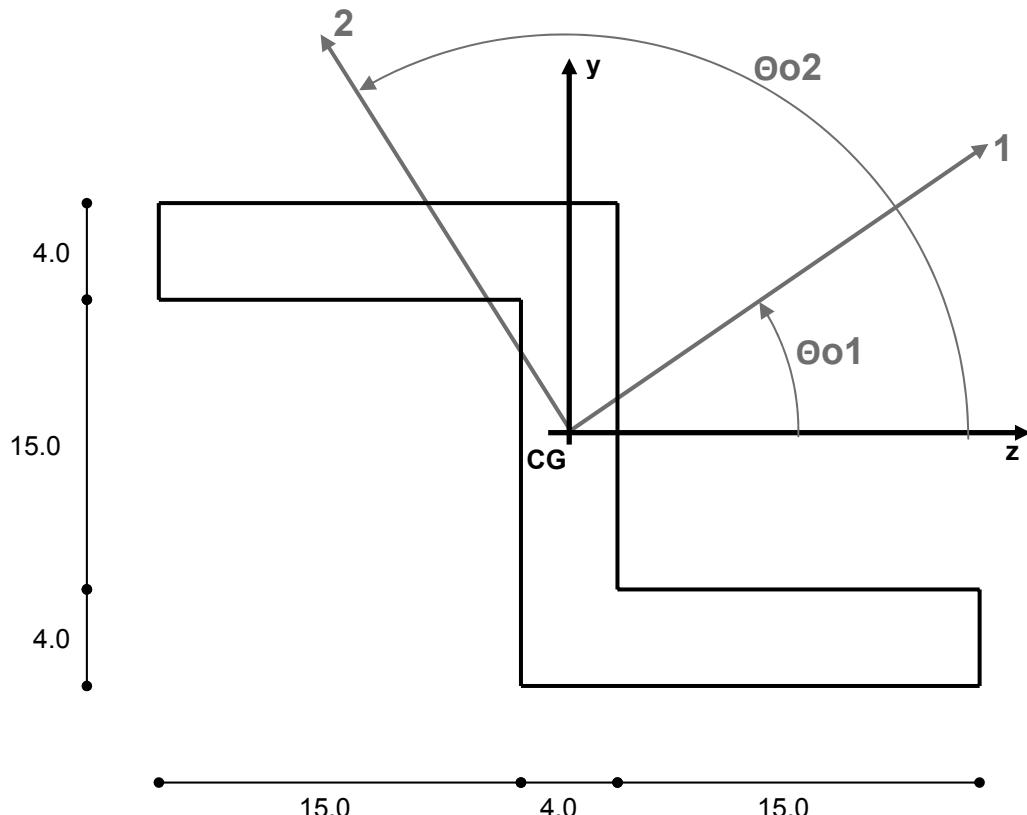
EL PRODUCTO DE INERCIA RESPECTO DE LOS EJES DE SIMETRIA ES NULO.



LOS EJES DE SIMETRIA SON EJES PRINCIPALES DE INERCIA

EJEMPLO 3:

Calcular la inclinación de los ejes principales y los momentos de inercia J_1 y J_2 del ejemplo del punto 2:



Datos $J_z = 15046 \text{ cm}^4$
 $J_y = 13203 \text{ cm}^4$
 $J_{zy} = -10830 \text{ cm}^4$

Aplicando la fórmula (4) $\tan 2\theta_o = 11.75$ entonces $2\theta_o = 85.1^\circ$ y $2\theta_o = 265.1^\circ$

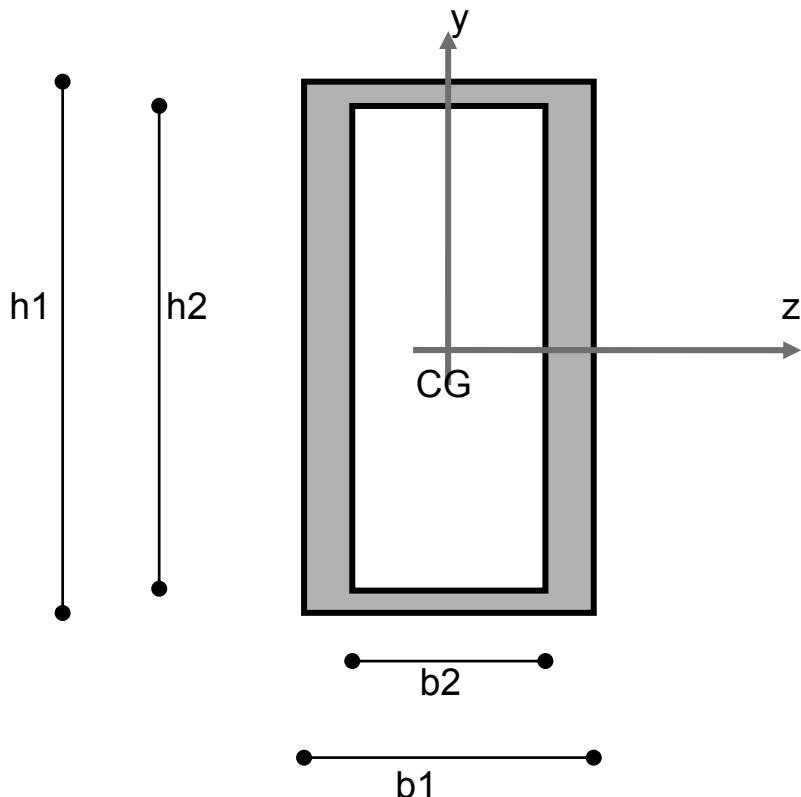
Se obtienen las direcciones principales: $\theta_o = 42.6^\circ$ y $\theta_o = 132.5^\circ$ medidos respecto eje z

Luego por aplicación de las fórmulas de J_1 y J_2 se obtienen los momentos de inercia respecto de los ejes principales 1 y 2:

$$J_1 = 24993 \text{ cm}^4 \quad y \quad J_2 = 3255 \text{ cm}^4$$

EJEMPLO 4:

Calcular el momento de inercia de la siguiente sección hueca con dos ejes de simetría:



El problema se puede interpretar como un sección maciza de dimensiones $b_1 \times h_1$ a la que se le sustrae una sección maciza de dimensiones $b_2 \times h_2$.

Como ambas secciones tienen el mismo CG porque la sección hueca tiene simetría biaxial, directamente se puede escribir:

$$J_z = J_z \text{ exterior} - J_z \text{ interior}$$

$$J_y = J_y \text{ exterior} - J_y \text{ interior}$$

Como los ejes z e y son ejes de simetría entonces también son principales de inercia.

ESTRUCTURAS IA

APUNTE DE CLASE

ESFUERZOS CARACTERISTICOS
EN EL PLANO
3RA EDICION

Henryk Berlewi
1894-1967
Mecanofacturas,
Composición en Rojo, Negro y Blanco, 1924.
Tempera sobre papel, 98x81 cm

ING. ASDRÚBAL E. BOTTANI
AÑO 2016

INDICE

1. Objetivo	2
2. Presentación del problema	
2.1. Esquema estructural – Terna global y local	3
2.2. Determinación de esfuerzos	4
2.3. Convención de signos	12
2.4. Diagramas de Esfuerzos	16
3. Ecuaciones Diferenciales de los Esfuerzos Característicos	
3.1. En el plano local x-y	17
3.2. En el plano local x-z	22
4. Ejemplos Estructuras de Tramo Recto	
<i>Ejemplo 4.1: Carga inclinada – Barra horizontal</i>	27
<i>Ejemplo 4.2: Cargas transversales al eje de la viga</i>	30
<i>Ejemplo 4.3: Carga distribuida transversal</i>	36
<i>Ejemplo 4.4: Momento exterior aplicado en un extremo</i>	40
<i>Ejemplo 4.5: Momento exterior aplicado en el tramo</i>	42
<i>Ejemplo 4.6: Carga triangular</i>	44
<i>Ejemplo 4.7: Ejemplo numérico</i>	48
<i>Ejemplo 4.8: Eje de la barra inclinado respecto a las cargas</i>	50
5. Estructuras de Tramo Quebrado	
<i>Ejemplo 5.1</i>	54

1.- OBJETIVO:

Objeto de una estructura:

La estructura tiene por objeto “llover” las cargas desde los puntos de aplicación a los apoyos en condiciones adecuadas de seguridad y uso.

- Los márgenes de seguridad respecto al colapso deben ser igual o mayores que los mínimos requeridos
- Las deformaciones que se produzcan como consecuencia de las cargas actuantes y las vibraciones eventualmente inducidas deben estar dentro de los valores tolerables de acuerdo a la función que va a cumplir la estructura durante su vida útil.

El proceso de análisis tiene las siguientes etapas:

- ***A partir del caso real establecer el esquema estructural a resolver.***
- ***Determinar todas las fuerzas actuantes en la estructura: activas y reactivas***
- ***Determinar qué efectos producen a lo largo de toda la estructura el sistema de fuerzas activo y reactivo. En otras palabras, determinar de qué manera las cargas activas aplicadas “viajan” hasta los apoyos a través de la estructura***

2.- PRESENTACION DEL PROBLEMA:

Ejemplo 2.1:Ménsula con carga concentrada en el extremo libre

- Viga AB de longitud L y sección transversal doble T empotrada en el extremo B con dos cargas P_1 y P_2 en el extremo A (FIG 1)
- Las cargas P_1 está aplicada en el plano de la sección A y P_2 en su baricentro y dirigida según el eje longitudinal de la viga.
- Se desea conocer de qué manera las cargas actuantes en A llegan al apoyo B y qué efectos producen a lo largo de la viga AB.

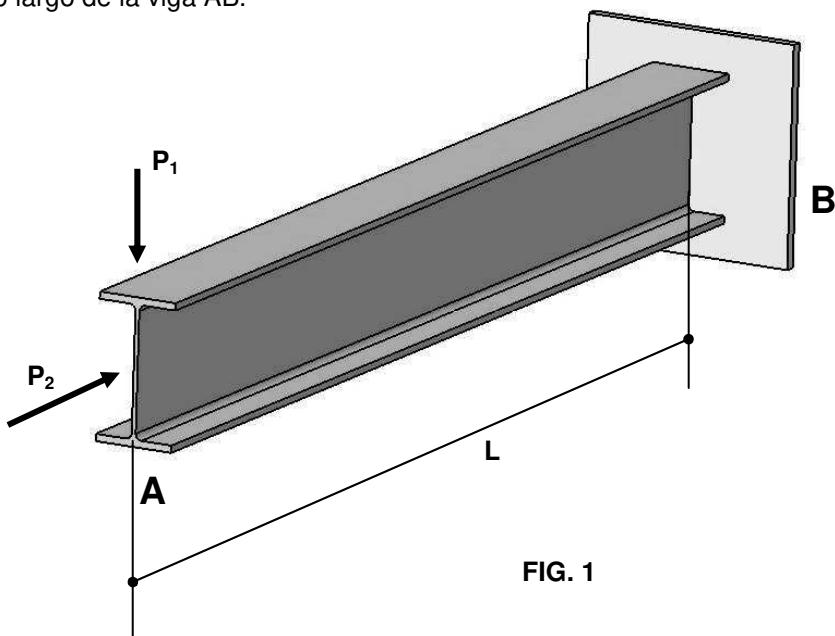


FIG. 1

2.1 Esquema Estructural – Terna global y local:

a) Terna local- orientación de la barra:

Se debe adoptar un sistema de referencia x-y-z solidario a la pieza cuya función es identificar cada punto del elemento estructural y orientar la pieza en el espacio

Definición de la terna local (FIG 2 y FIG 3):

- En la barra se define un **nodo origen** (nodo 1) ubicado en el baricentro una de las secciones normales extrema y un **nodo destino** (nodo 2) ubicado en el baricentro de la otra sección normal extrema
- La **sección normal** es aquella que se obtiene cortando a un elemento con un plano perpendicular al eje longitudinal.
- Para fijar los nodos origen y extremo el **observador** se sitúa **desde abajo y adelante** para el caso de barras horizontales e inclinadas, y **desde la derecha y adelante** en el caso de barras verticales. El nodo 1 es el correspondiente al extremo izquierdo.
- **El origen de la terna local** se ubica en el nodo 1 y el **eje x** es coincidente con el eje longitudinal del elemento y orientado hacia el nodo 2.
- **El eje de mayor inercia de la sección coincide con el eje z** y el **eje y** es el de una terna derecha ($x^y=z$, $y^z=x$, $z^x=y$).
- El **eje y** está dirigido hacia el observador. En consecuencia el **eje z** está dirigido en el sentido del observador

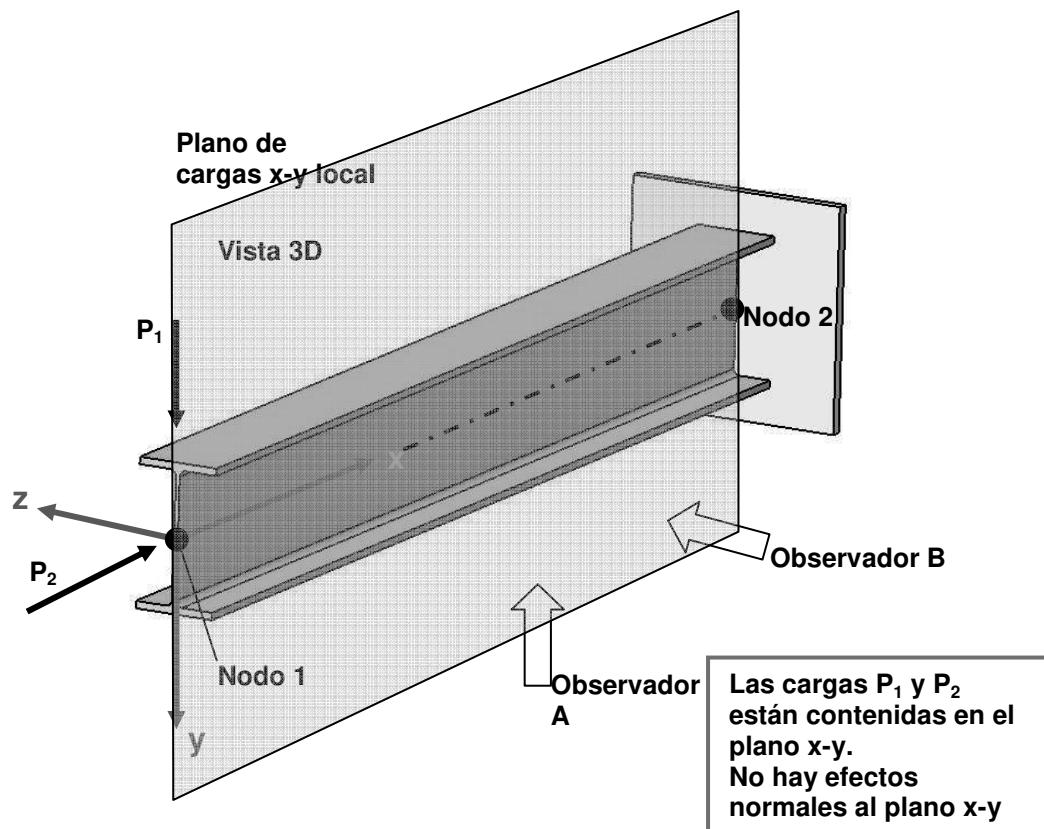


FIG. 2

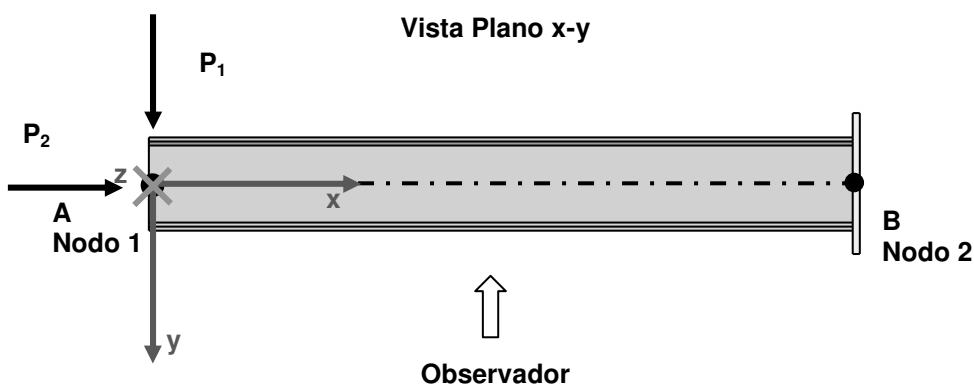


FIG. 3

b) Esquema Estructural a resolver:

La barra se representa por una línea que indica el eje longitudinal del elemento, las cargas activas aplicadas y los vínculos dispuestos. Se agrega la terna y los nodos origen y destino de la barra. El esquema a resolver es un ESQUEMA PLANO DE FUERZAS EN EL PLANO X-Y (FIG 4)

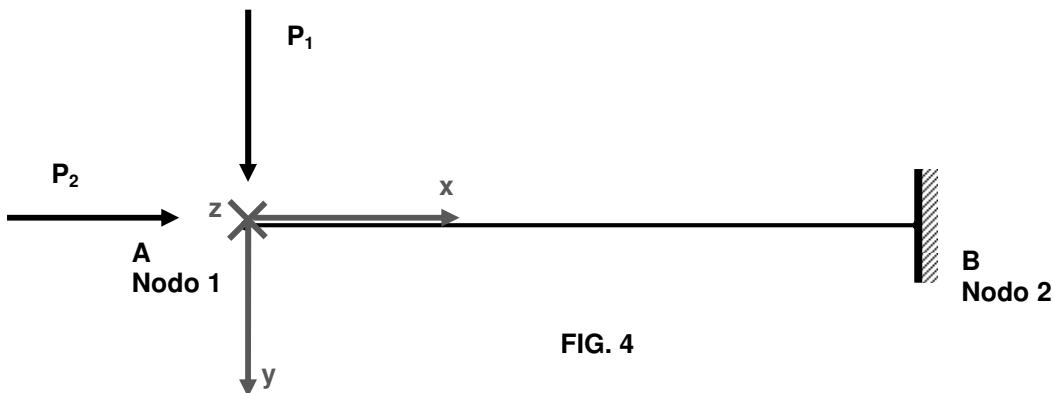


FIG. 4

2.2. Determinación de esfuerzos

a) Cálculo de las Reacciones:

- Sistema Activo: Cargas P₁ y P₂ en A
- Sistema Reactivo: Reacciones en B

SISTEMA ACTIVO + SISTEMA REACTIVO = SISTEMA EQUILIBRADO

PARA UN SISTEMA PLANO (FIG 5 y FIG 6)

- **RESULTANTE NULA**
- **CUPLA NULA**

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum M_B = 0$$

Para el **cálculo de las reacciones** se utiliza una **terna de referencia fija externa de la estructura: Terna global X-Y-Z**.

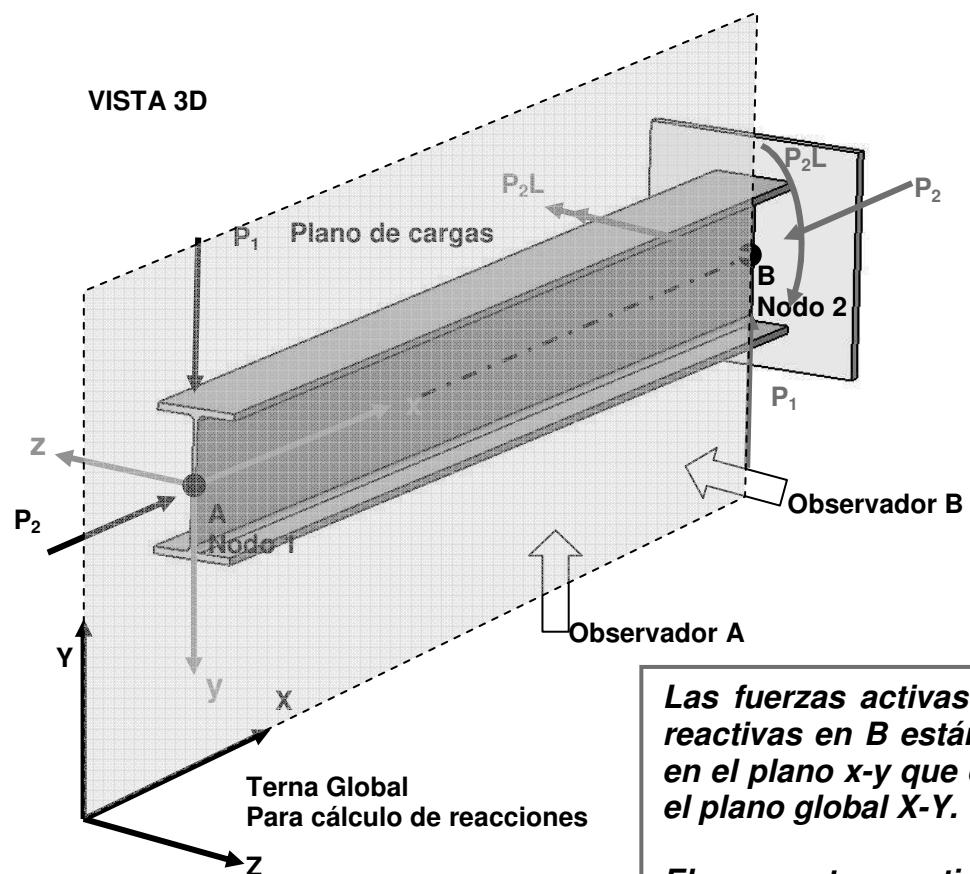


FIG. 5

Las fuerzas activas P_1 , P_2 y las reactivas en B están contenidas en el plano x - y que coincide con el plano global X - Y .

El momento reactivo en B P_2L actúa en el mismo plano x - y / X - Y y su representación vectorial tiene la dirección negativa del eje Z local

ESQUEMA PLANO DE ANALISIS:

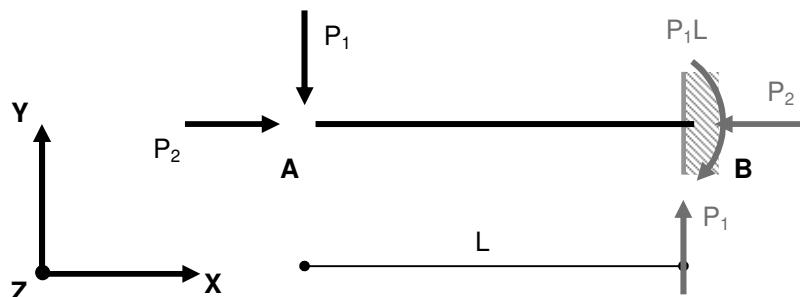


FIG. 6

b) Análisis de los efectos en las distintas secciones de la estructura como consecuencia de las cargas activas y reactivas aplicadas

- Se separa la estructura a través de una sección normal ubicada a una distancia x (sistema local) del origen 1 quedando dividida en dos partes I y II (FIG 7)
- El sistema de fuerzas activas y reactivas en su conjunto equilibrado, ahora queda dividido en dos subsistemas que no están en equilibrio individualmente.

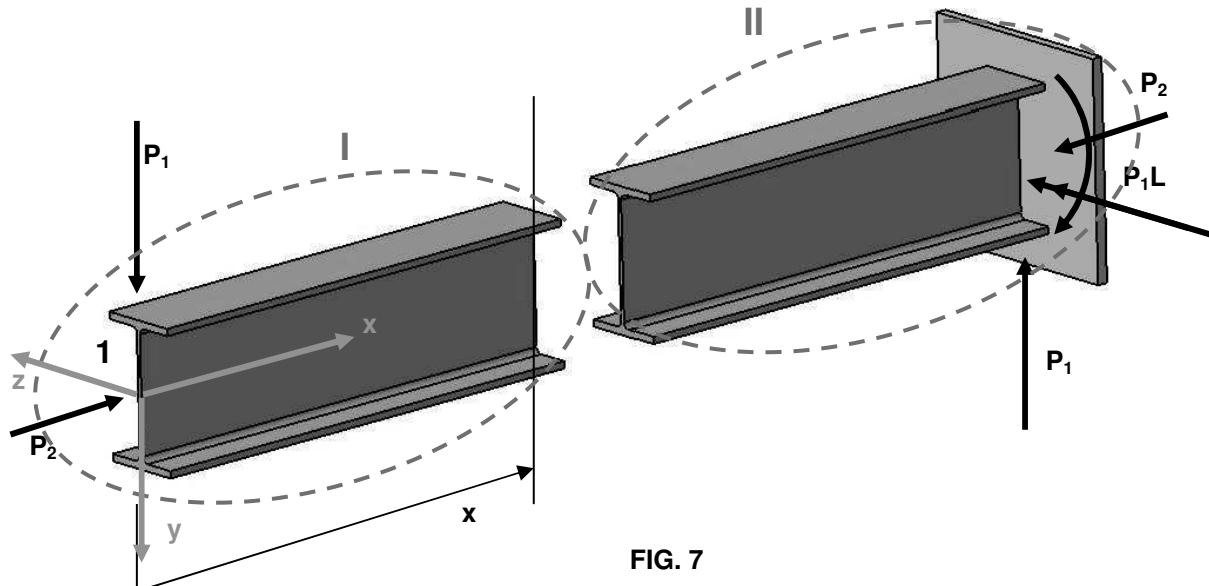


FIG. 7

Opción 1: Planteo del equilibrio de cada subestructura:

- **Si el conjunto de la estructura está en equilibrio cada parte debe estarlo también:**

Para restablecer el equilibrio se debe colocar en la sección de separación las acciones que la parte I le ejerce a la II y viceversa para asegurar el equilibrio de cada parte. Por el principio de acción y reacción, deben ser iguales y opuestas. FIG 8a y 8b.

Desventaja:

Este planteo puede resultar trabajoso cuando la estructura presenta varias fuerzas aplicadas.

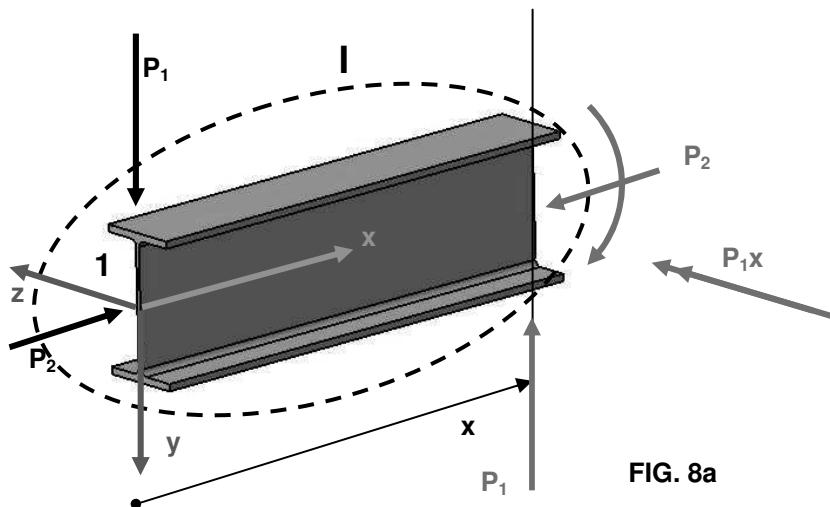


FIG. 8a

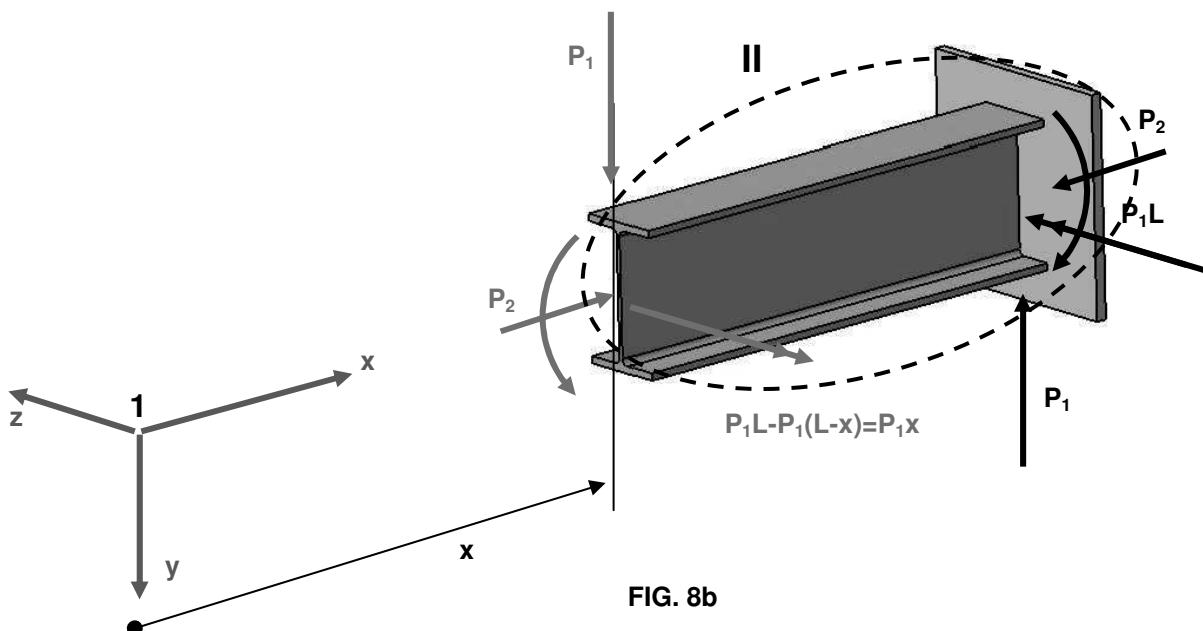


FIG. 8b

- Las fuerzas y pares en la sección a la distancia x son iguales y opuestas según la parte de la estructura que se analice debido al principio de acción y reacción.
- En la sección genérica x aparecen un esfuerzo según el eje longitudinal de la pieza aplicado en su baricentro (en este caso P_2), un esfuerzo contenido en el plano de la sección y dirigido según el eje y (P_1) y un momento dirigido según el eje z (en este caso P_{1x})
- Todos estos esfuerzos están contenidos en el plano $x-y$, coincidente con el plano global $X-Y$. (Caso de solicitud plana)
- En las FIG 9 se muestra la vista en el plano $x-y / X-Y$

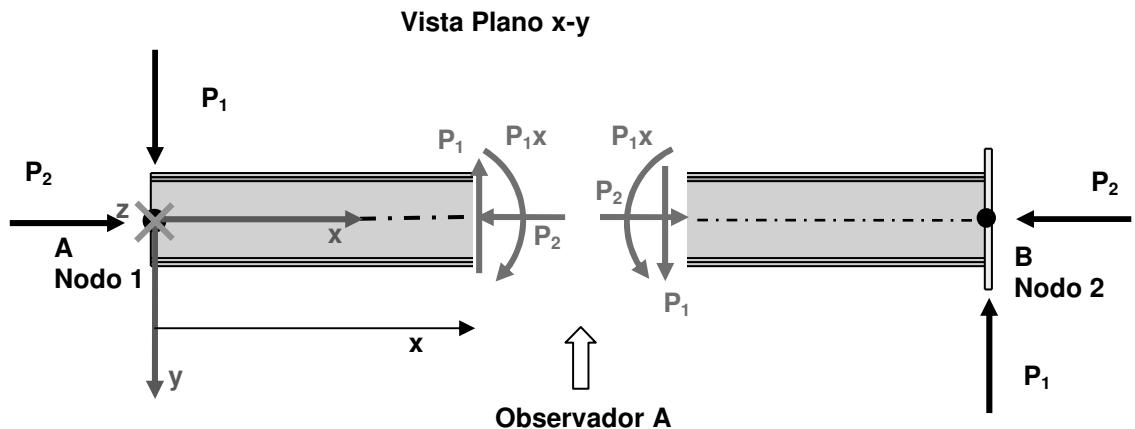


FIG. 9

Opción 2: Planteo por traslación de fuerzas:

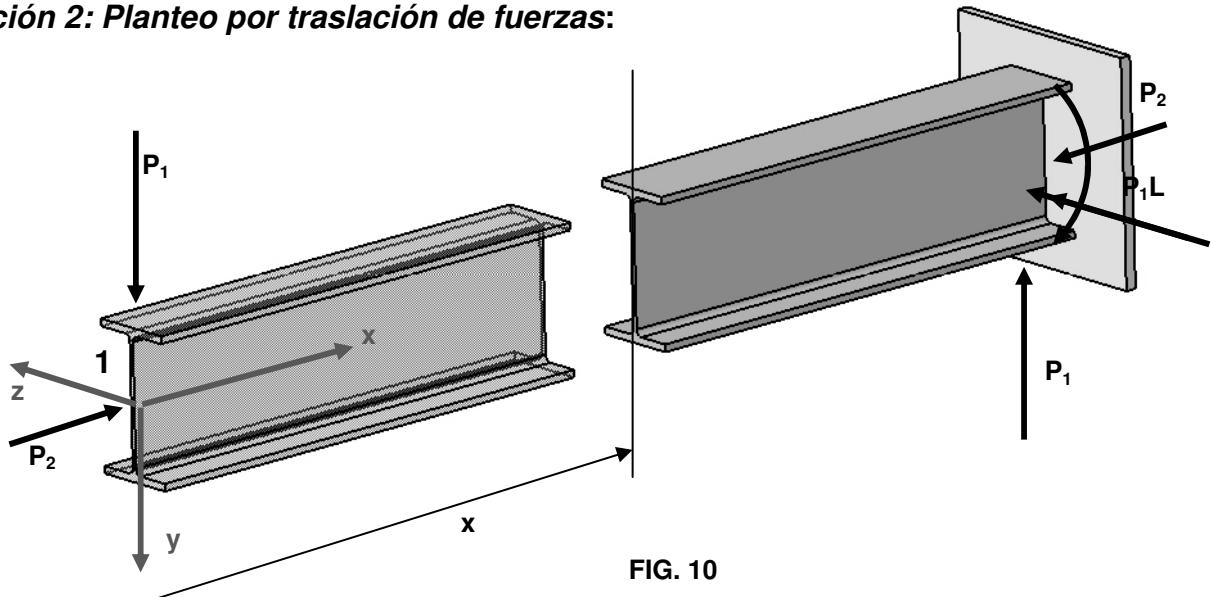


FIG. 10

- Se corta la estructura en una sección genérica donde se desean calcular los efectos de las cargas activas y reactivas
- Queda la estructura dividida en dos partes FIG 10
- El sistema de fuerzas activas y reactivas actuante en ambas está en equilibrio
- Se elimina una de las partes de la estructura, en este caso la parte izquierda, pero se mantienen las fuerzas actuantes en la misma en sus posiciones originales (FIG 11)

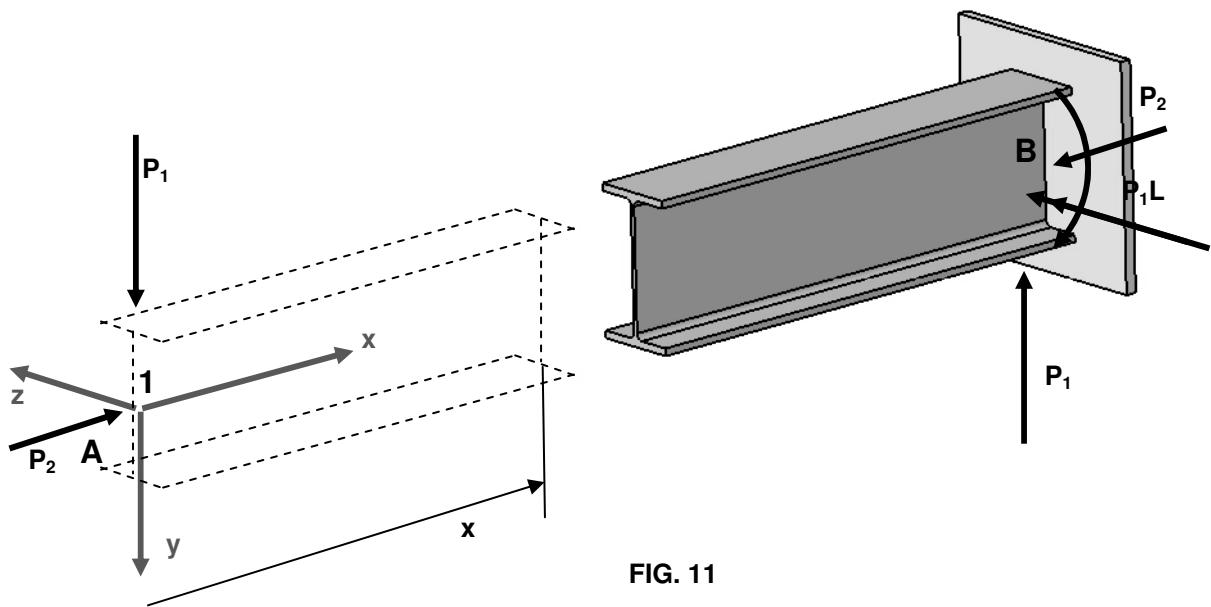


FIG. 11

- El sistema de fuerzas está en equilibrio, pero P_1 y P_2 en A actúan fuera de la estructura remanente
- Las fuerzas P_1 y P_2 que quedaron fuera (línea de puntos de la FIG 11) deben trasladarse a la sección a la distancia x sobre la cara de la estructura remanente, siguiendo la ley de traslación de fuerzas:
 - Las que se trasladan a lo largo de su recta de acción lo hacen directamente
 - Las que se trasladan paralelamente a sí mismas, debe agregarse el momento que la fuerza produce en su posición original, respecto del punto donde se traslada.
- Se obtienen así las fuerzas equivalentes en la sección a la distancia x (FIG 12), idénticas a las encontradas en el análisis anterior

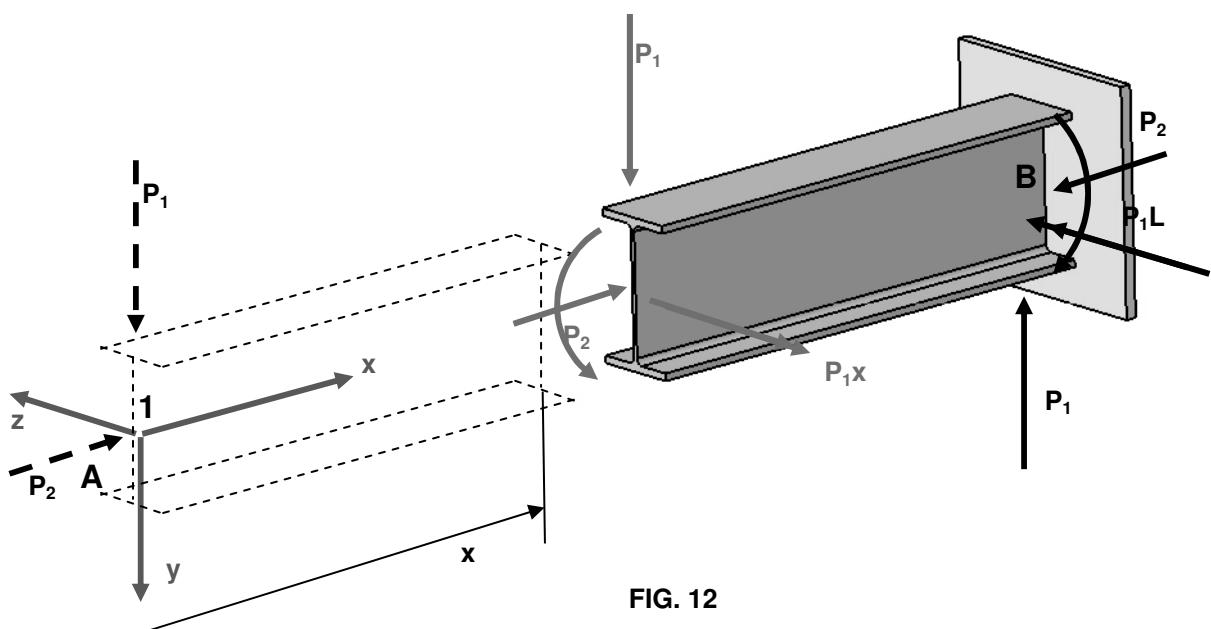


FIG. 12

En la FIG 13 se muestra en el plano x-y/X-Y toda la METODOLOGIA DE ANALISIS:

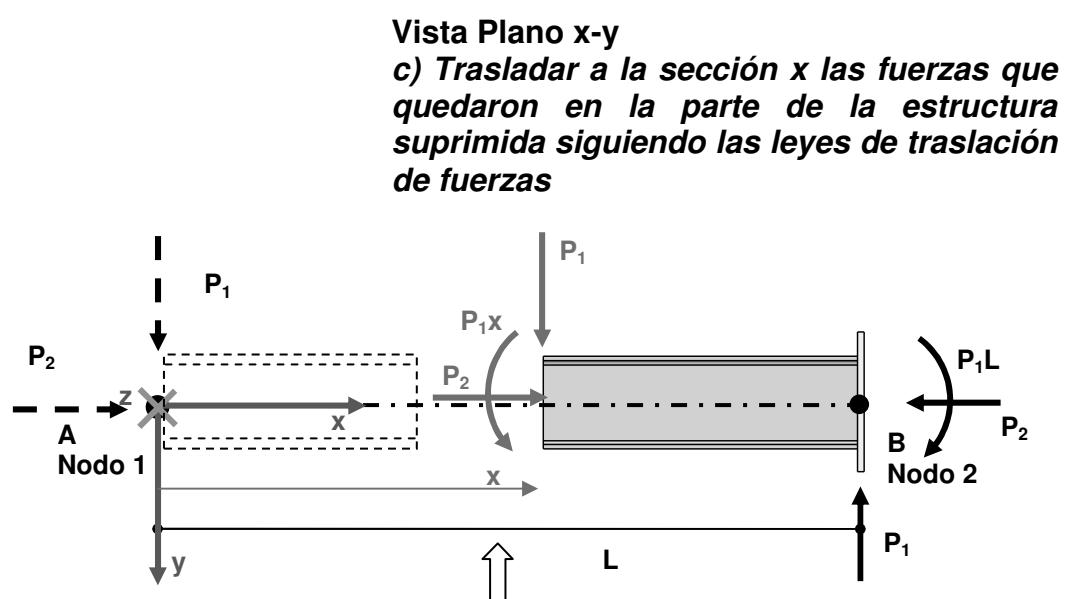
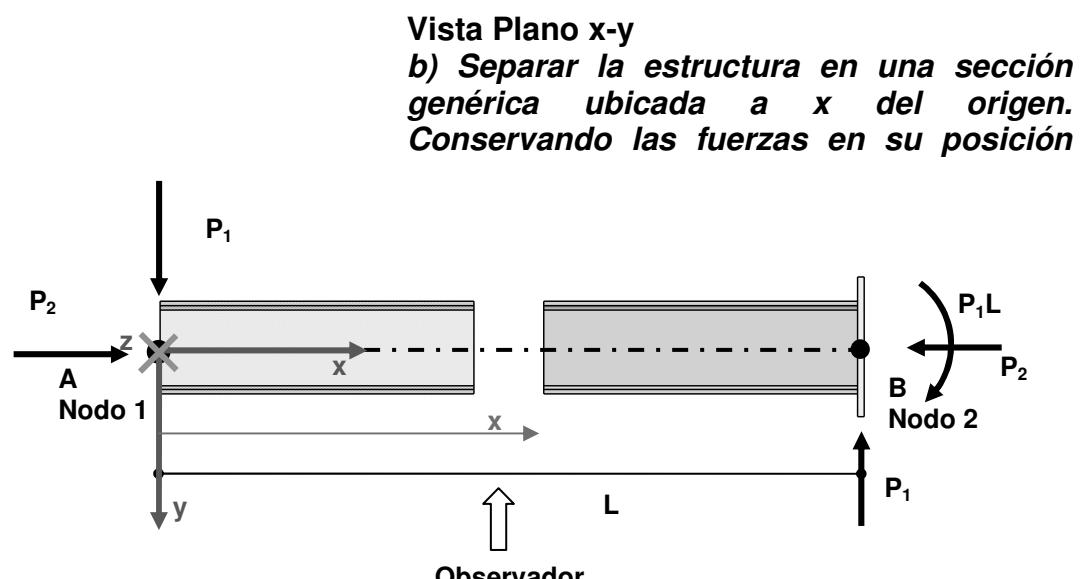
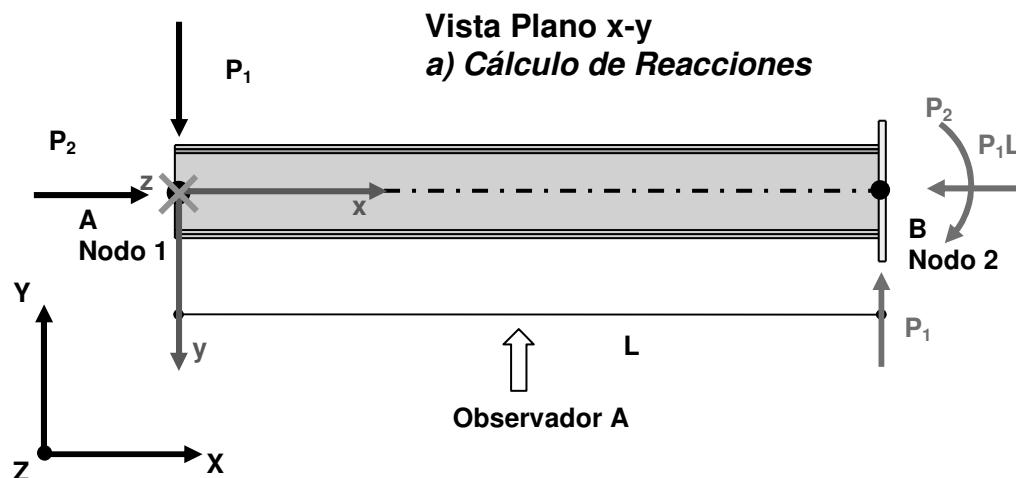
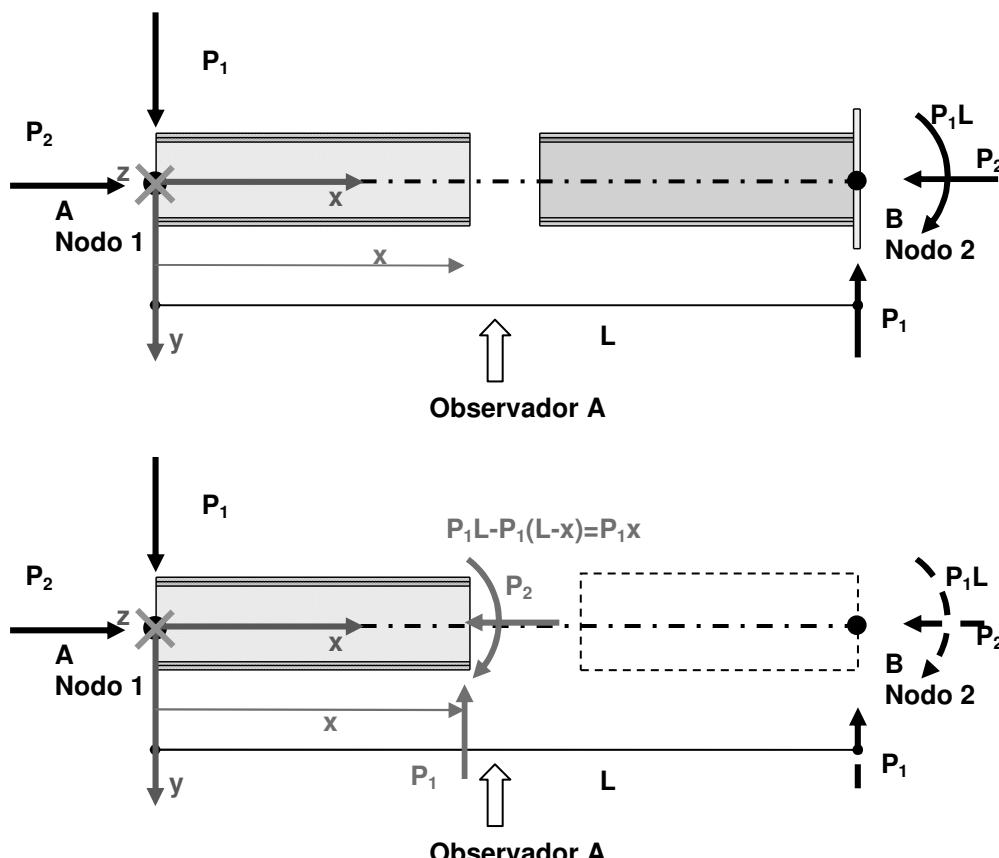


FIG. 13

En la FIG 14 se repite al análisis, pero suprimiendo el lado izquierdo, llegando nuevamente a ver que en ambas caras de la sección de separación los esfuerzos obtenidos son iguales y opuestos en razón del principio de acción y reacción.

Metodología de análisis (opción b: traslación de fuerzas):

Separar la estructura en una sección genérica ubicada a x del origen, Conservando las fuerzas en su posición original y luego trasladarlas a la sección de separación de la parte remanente



CONCLUSIONES – ESFUERZOS CARACTERISTICOS:

- Las cargas aplicadas “viajan” a los apoyos generando esfuerzos en las distintas secciones que componen el elemento estructural.
- Los efectos que esos esfuerzos provocan dependen de su orientación respecto a la sección.
- En el caso PLANO DE SOLICITACION coincidente con el plano x-y local, aparecen TRES ESFUERZOS CARACTERISTICOS:
 - Una fuerza dirigida según el eje longitudinal x que se denomina **ESFUERZO AXIL** y se indicará por la letra N, en este caso de valor P_2 .
 - Una fuerza contenida en el plano de la sección y dirigida según el eje local y, que se denomina **ESFUERZO DE CORTE** y se indicará por la letra Q o V con un subíndice según la orientación en el eje local: Q_y o V_y , que en este caso es igual P_1 .
 - Un momento, cuyo vector tiene la orientación del eje local z, que produce una curvatura del elemento en el plano de carga y que se denomina **MOMENTO FLECTOR M_z** , que en este caso es igual a P_1x

2.3. Convención de signos

Observando las FIGS 13 y 14 se ve que **según sobre cuál de las dos partes en las que se subdivide la estructura se realice el análisis, se obtienen sentidos absolutos opuestos de los esfuerzos como consecuencia que los mismos son acción y reacción de una parte sobre la otra.**

La convención de signos debe atender a la orientación del esfuerzo respecto de la sección en la que actúa. De acuerdo al signo del esfuerzo el analista debe poder interpretar claramente el sentido del esfuerzo respecto a la sección, para evaluar correctamente los efectos que se producen en la sección.

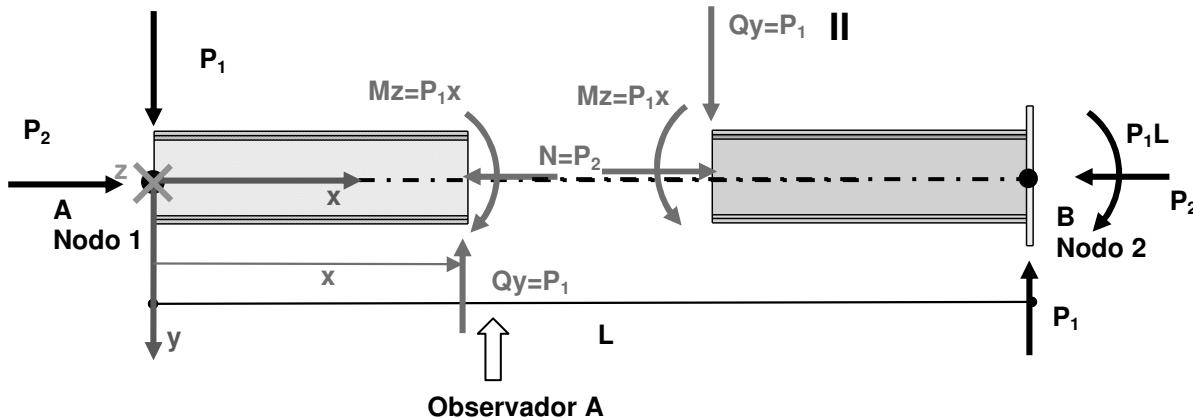


FIG.15

a) Elección de la terna local de la barra (FIG 16):

- **Nodo origen – nodo destino:** Para fijar los nodos origen y extremo el **observador se sitúa desde abajo y adelante** para el caso de barras horizontales e inclinadas, y **desde la derecha y adelante** en el caso de barras verticales.
- **El nodo 1 es el correspondiente al baricentro de la sección normal extrema izquierda.**
- **Eje x: eje dirigido del nodo origen al nodo destino.**
- **Eje y: eje de menor inercia de la sección dirigido al observador**

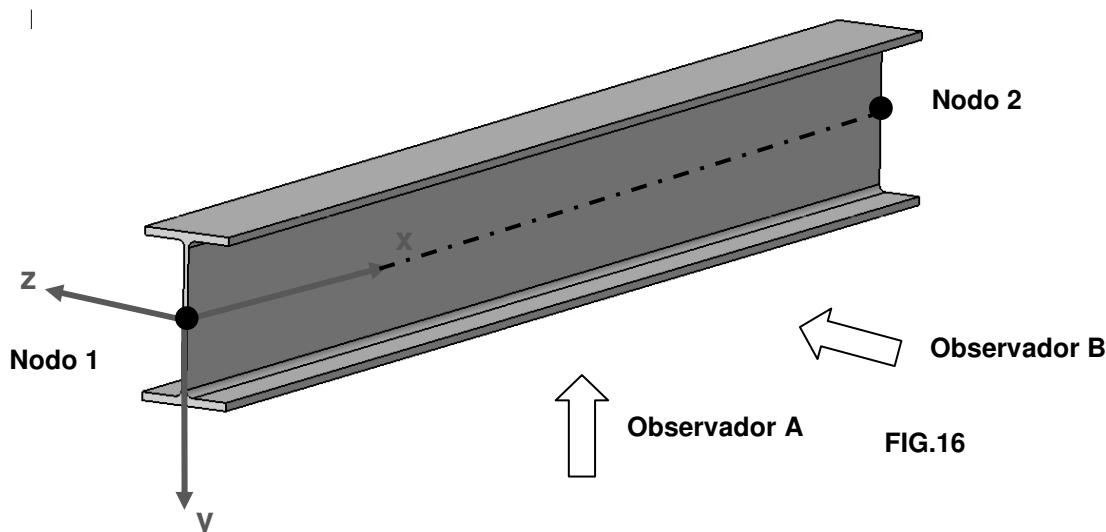


FIG.16

b) Sección normal - Cara derecha – Cara izquierda (FIG 17 y FIG 18):

- **Sección normal:** sección transversal al cortar el elemento con un plano perpendicular al eje longitudinal.
- **Cara derecha:** Cuando a una distancia x del origen se corta al elemento es dos partes a través de una sección normal, la cara derecha es la sección de corte del elemento que está a derecha en el sentido creciente de las x , desde el punto de vista del observador.
- **Cara izquierda:** es la sección de corte del elemento que está a la izquierda en el sentido de las x crecientes desde el punto de vista del observador.
- **Fibra superior:** la cara superior del elemento estructural (coordenada y negativa / z negativa).
- **Fibra inferior:** la cara inferior del elemento estructural (coordenada y positiva / z positiva).

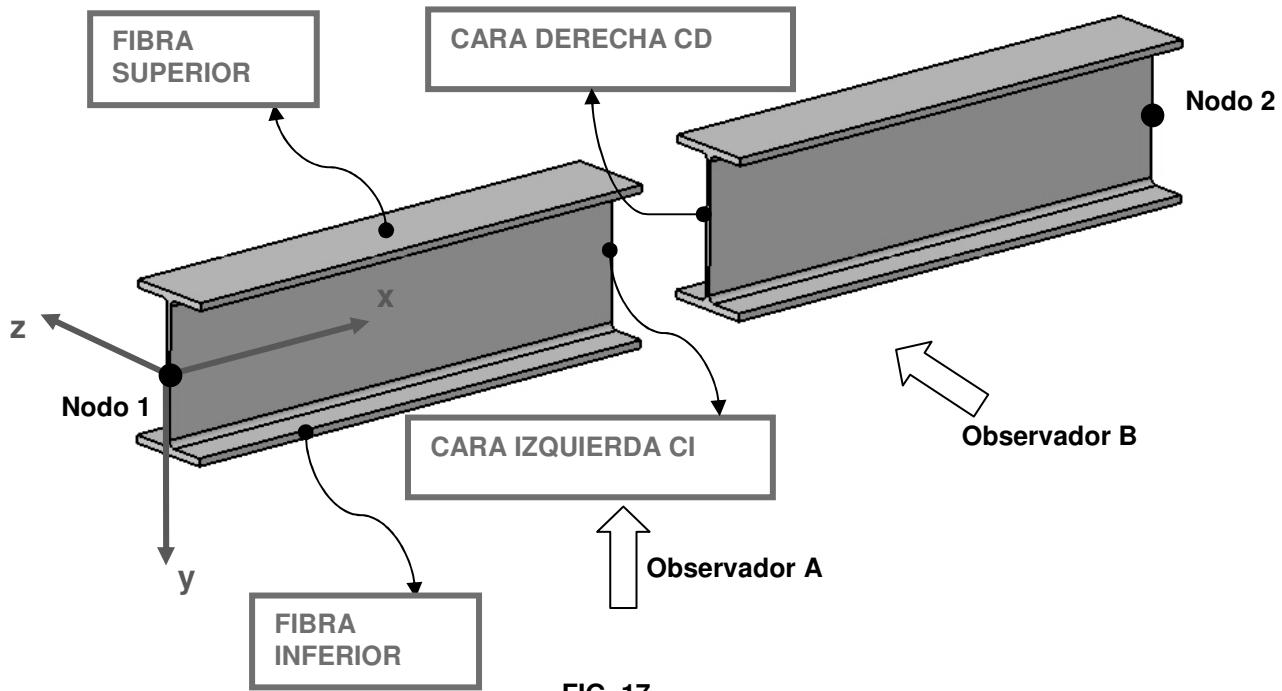


FIG. 17

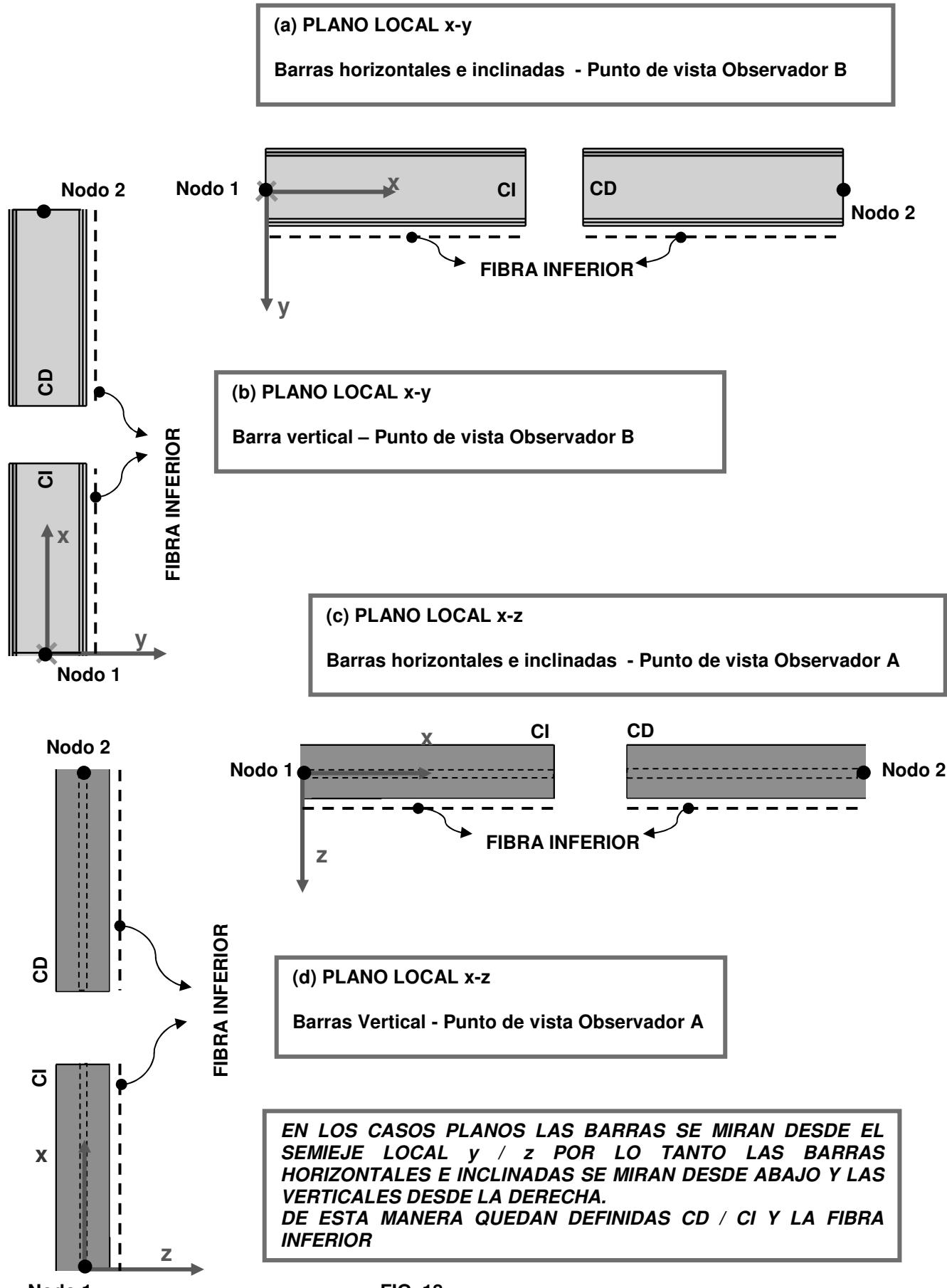
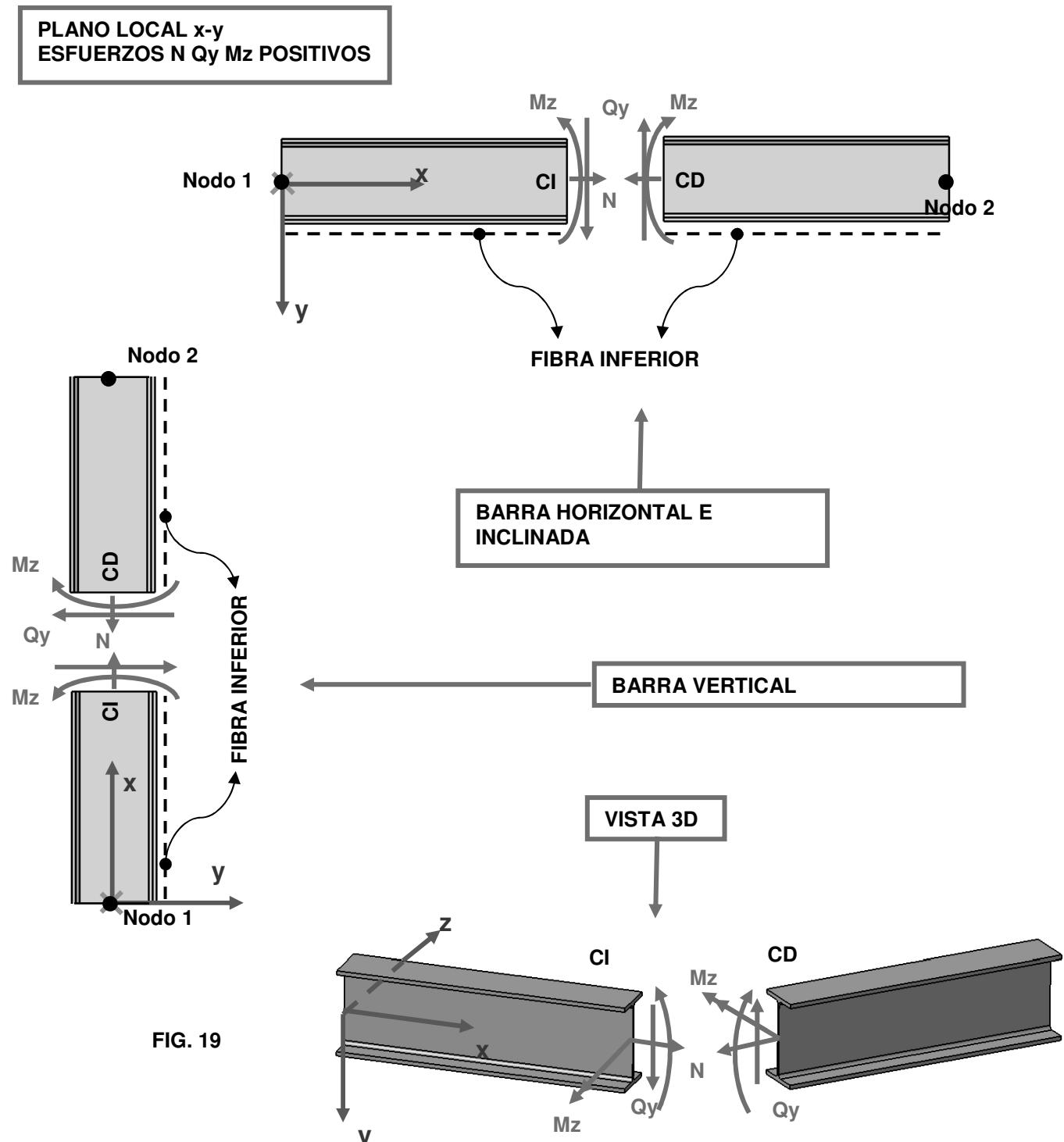


FIG. 18

c) Convención de signos de los esfuerzos característicos:



RESUMEN DE LA CONVENCION PLANO LOCAL x-y:

Esfuerzo axil $N > 0$: *Tracción en la sección*

Momento Flector $M_z > 0$: *Traciona fibras inferiores (coordenada y positiva)*

Corte $Q_y > 0$: *En el sentido de avance de x provoca M_z positivo*

2.4. Diagramas de Esfuerzos – Aplicación al Ejemplo 1

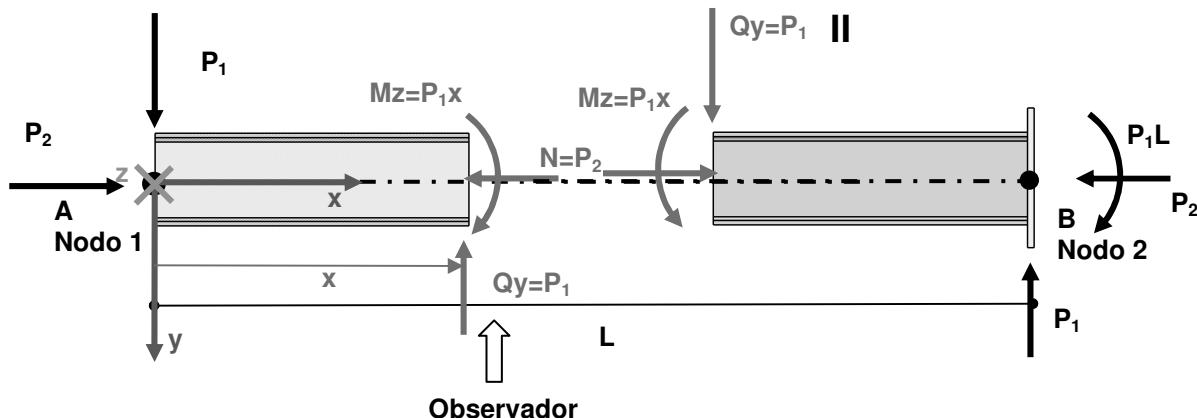


FIG. 20

Resultados del análisis para una sección genérica a la distancia x (FIG 20):

$N(x) = -P_2$	(constante en toda la longitud de la barra)
$Q_y(x) = -P_1$	idem
$M_z(x) = -P_1 \cdot x$	Función lineal

REGLAS PARA GRAFICAR LOS ESFUERZOS:

- Axil N y corte Q_y positivos se grafican hacia arriba
- Momento flector M_z positivo se grafica hacia abajo (pendientes positivas en el sentido de avance de x son hacia abajo)

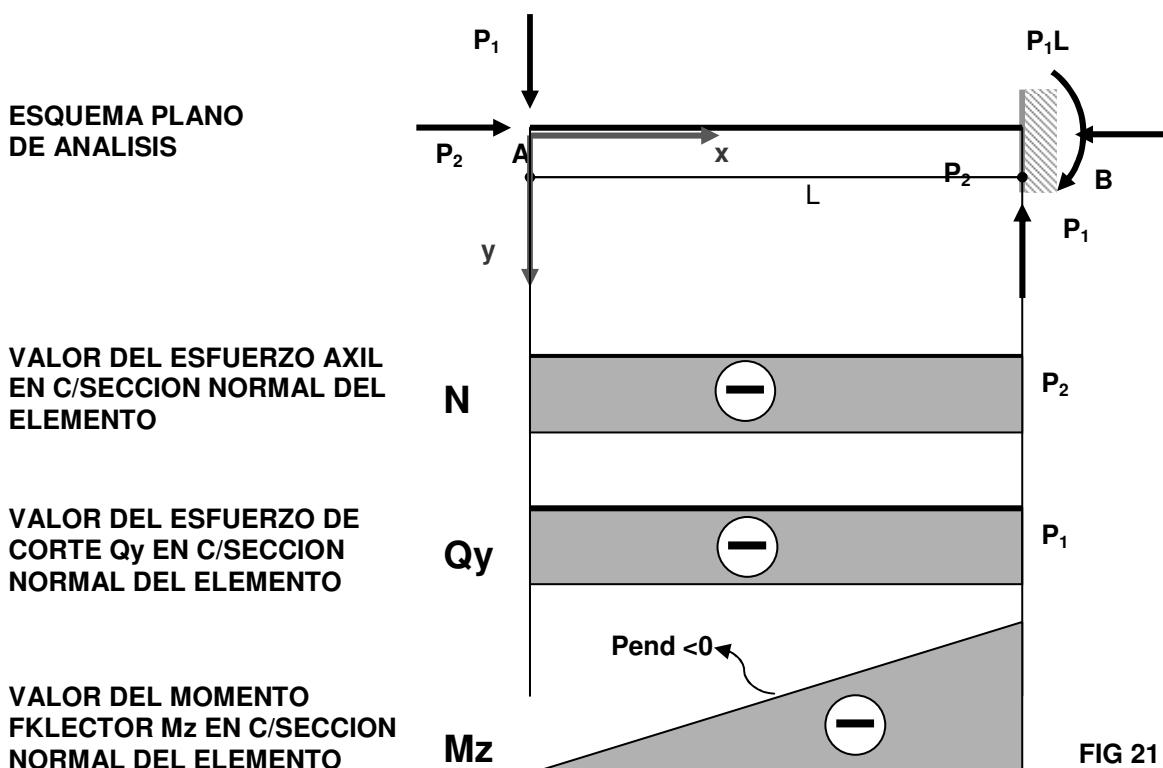


FIG 21

3. ECUACIONES DIFERENCIALES DE LOS ESFUERZOS CARACTERISTICOS:

3.1. Aplicación al Plano local x-y

Ejemplo 3.1: Ménnsula con carga repartida en el plano x-y

- Viga AB de longitud L y sección transversal doble T empotrada en el extremo B con dos cargas P_1 y P_2 en el extremo A idem al ejemplo 1 (FIG 22)
- La viga está sometida a la acción de una carga distribuida contenida en plano local x-y y dirigida según y q_y
- Se desea conocer de qué manera las cargas actuantes en A llegan al apoyo B y qué efectos producen a lo largo de la viga AB.

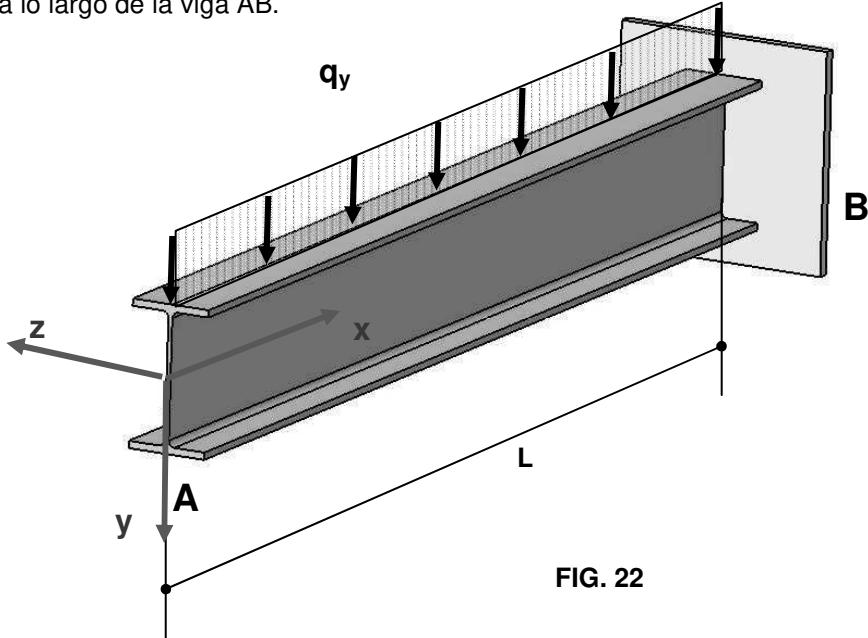


FIG. 22

Metodología de análisis:

1. Elección del nodo origen – nodo destino y terna local.
2. Esquematización del problema en el plano de carga.
3. Cálculo de las reacciones

ESQUEMA PLANO DE ANALISIS:

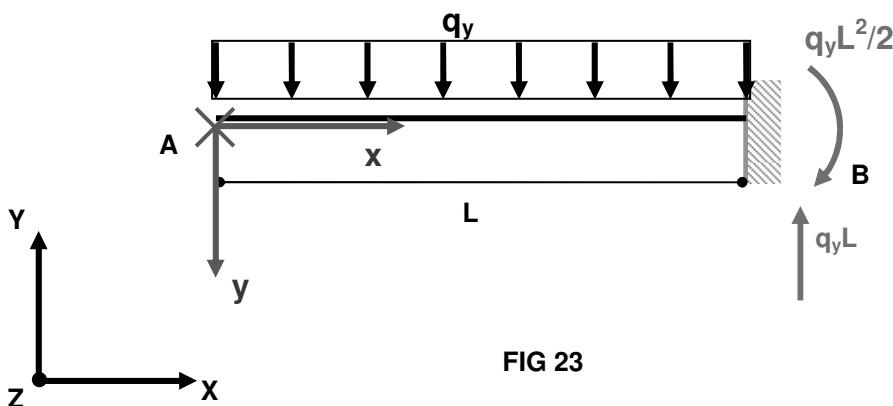
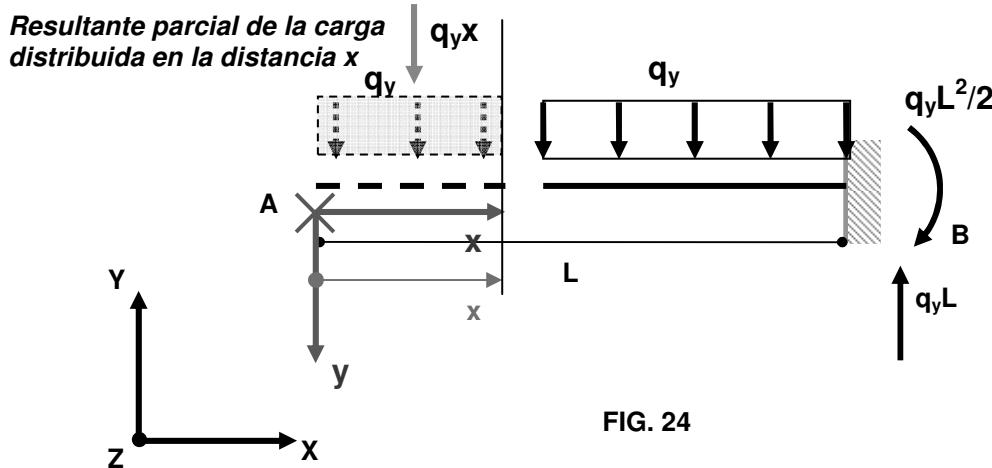
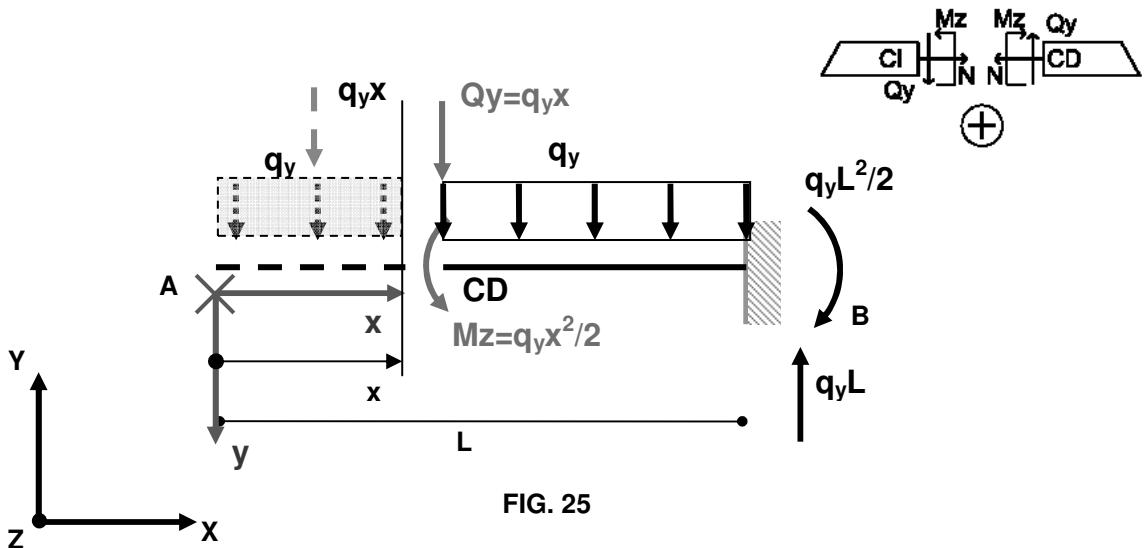


FIG 23

4. Separar la barra en una sección normal genérica a distancia x:



5. Trasladar a la sección bajo análisis, aplicando las reglas de traslación, las fuerzas que quedaron actuando en la parte de la estructura que se suprime. Se determinan así los esfuerzos característicos en la sección aplicando la convención de signos ya descripta.



$$N(x) = 0$$

$$Q_y(x) = -q_yx \quad (1)$$

$$M_z(x) = -q_yx^2/2$$

6. Graficar los resultados obtenidos.

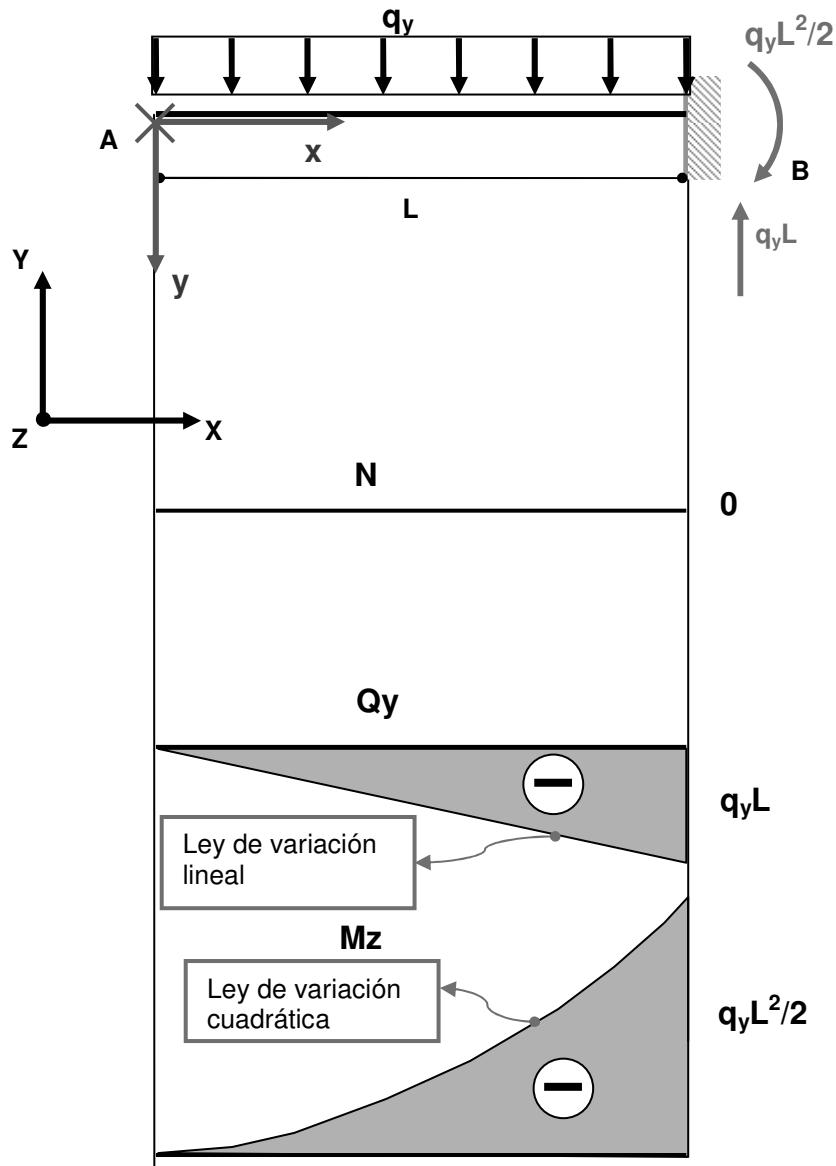


FIG. 26

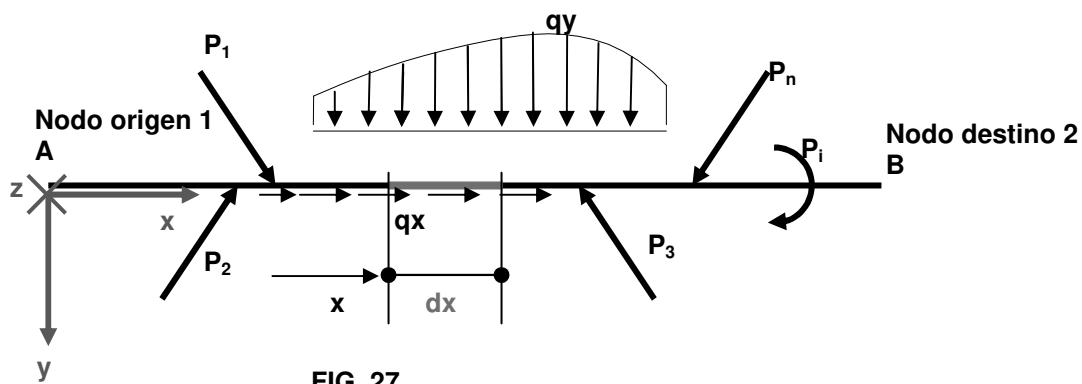
De la observación de los diagramas de la FIG 26 y las leyes de variación de los esfuerzos de las ecuaciones (1) se deduce:

- El corte Q_y tiene una ley de variación lineal
- El momento flector M_z tiene una ley de variación cuadrática
- La pendiente del diagrama de momento M_z es el corte Q_y

OBJETIVO:

Se desea establecer una correlación entre las cargas actuantes y los esfuerzos característicos con el fin de poder anticipar la forma de los diagramas, de manera de facilitar el cálculo de los esfuerzos sin necesidad de calcular sus leyes de variación tramo a tramo de la estructura.

En la FIG.27 se ve una estructura plana de eje recto constituido por una barra AB sometida a un sistema de **fuerzas generalizadas (fuerzas y pares)**, **concentradas y distribuidas**, en equilibrio. La terna local tiene origen en el nodo A de acuerdo a la convención descripta,



Equilibrio de un elemento de longitud dx colocando en cada una de sus caras los esfuerzos característicos que le transmite el resto de la estructura suprimida y las fuerzas exteriores que actúan en él (FIG 28):

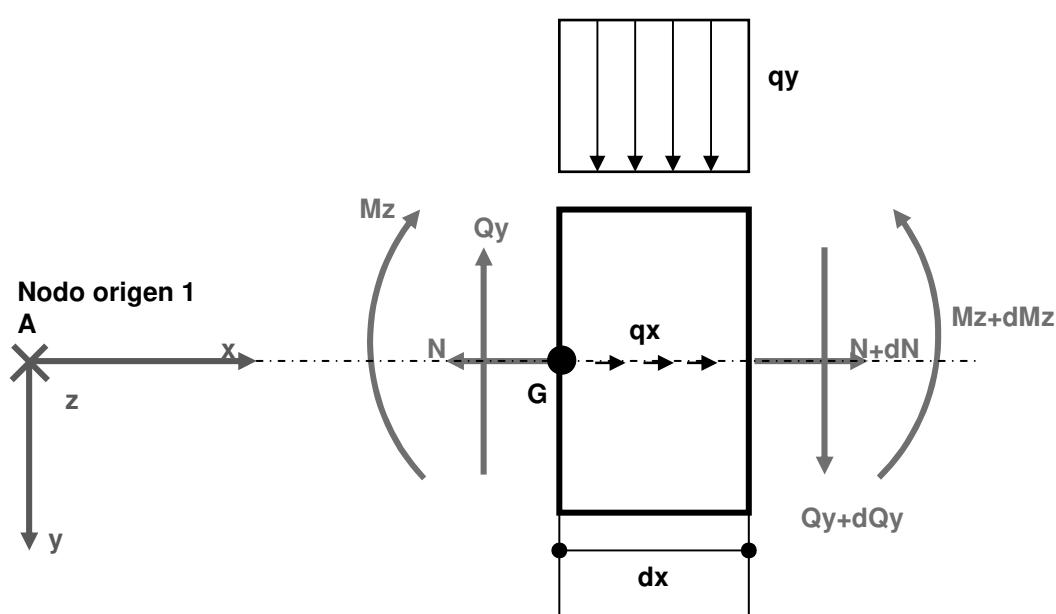


FIG. 28

Equilibrio en x-x: $-N + N + dN + q_x dx = 0$

Equilibrio en y-y: $Qy - (Qy + dQy) - q_y dx = 0$

Equilibrio de momentos Mz respecto de G: $Mz - (Mz + dMz) + (Qy + dQy)dx + q_y \frac{dx^2}{2} = 0$

ECUACIONES DIFERENCIALES DE LOS ESFUERZOS CARACTERISTICOS EN EL PLANO x-y

$$\frac{dN}{dx} = -q_x \quad (1)$$

$$\frac{dQy}{dx} = -q_y \quad (2)$$

$$\frac{dMz}{dx} = Qy \quad (3)$$

N: Esfuerzo axil

Qy: Esfuerzo de corte en la dirección del eje local y

Mz: Momento flector en el plano local x-y

qx: Carga distribuida en la dirección longitudinal

qy: Carga distribuida en la dirección del eje local y

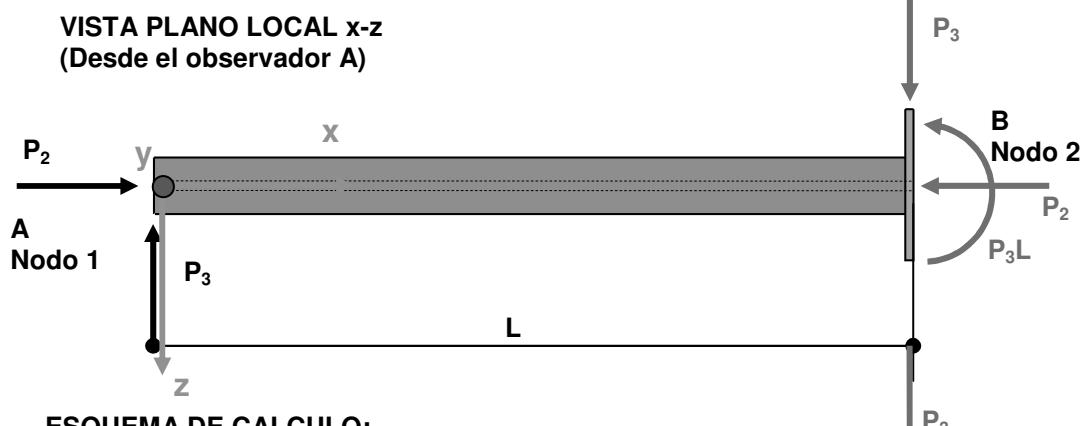
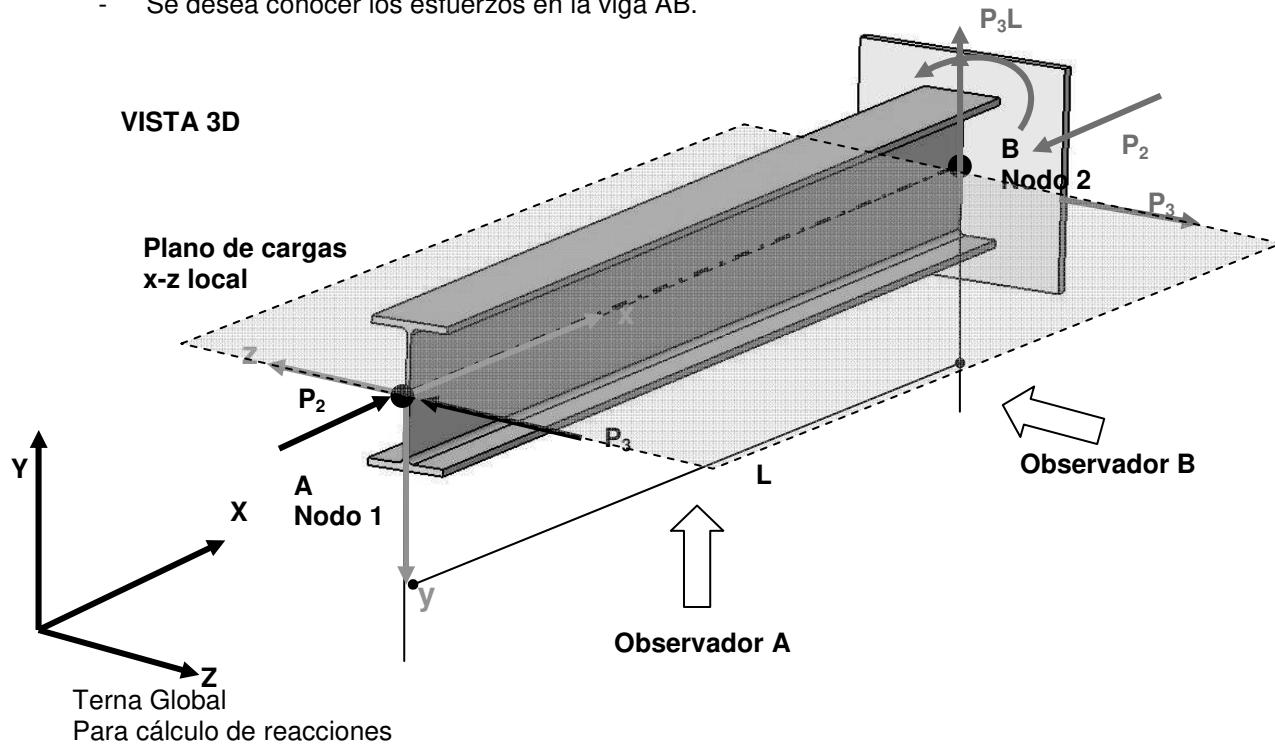
CONCLUSIONES:

1. Si no hay cargas distribuidas axiales o transversales, los respectivos esfuerzos característicos N y Qy son constantes en los tramos de integración.
2. Si en un tramo hay esfuerzo de corte Qy no nulo entonces necesariamente hay variación del momento flector Mz. Es decir es el esfuerzo de corte el que al desplazarse paralelamente a sí mismo provoca la variación del momento flector Mz. Siempre que hay corte hay momento flector variable en un grado más.
3. La pendiente de la gráfica del momento flector Mz coincide en signo y valor con el esfuerzo de corte Qy.
4. Dónde el esfuerzo de corte Qy se anula el momento flector Mz tiene un valor extremo (máximo o mínimo).
5. La información que dan las tres ecuaciones diferenciales permiten trazar los diagramas sin necesidad de encontrar las leyes de variación.
6. A su vez se utilizan para controlar los resultados obtenidos de los esfuerzos característicos, observando los gráficos se puede detectar fácilmente si se ha cometido algún error en la determinación de los mismos, o en el caso de trabajar con programas de resolución por computadora, si la forma de los diagramas no coincide con lo esperado puede alertar errores en la introducción de datos o hipótesis de funcionamiento del modelo matemático utilizado.

3.2. Aplicación al Plano local x-z

Ejemplo 3.2: Ménsula con cargas concentradas en el extremo libre

- Viga AB de longitud L y sección transversal doble T empotrada en el extremo B con dos cargas P_2 y P_3 en el extremo A (FIG 29)
- Las cargas P_3 está aplicada en el plano de la sección A y dirigida según el eje local z y P_2 en su baricentro y dirigida según el eje longitudinal de la viga.
- Se desea conocer los esfuerzos en la viga AB.



ESQUEMA DE CALCULO:

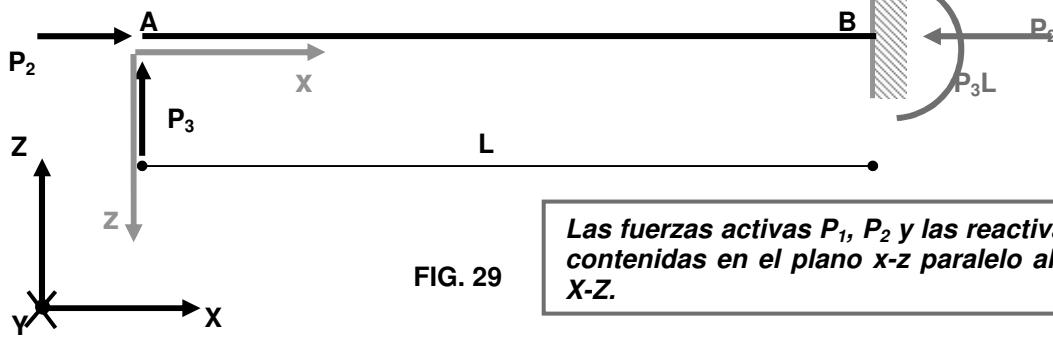


FIG. 29

Las fuerzas activas P_1 , P_2 y las reactivas en B están contenidas en el plano x-z paralelo al plano global X-Z.

Convención de signos para los esfuerzos en el plano x-z (FIG 30):

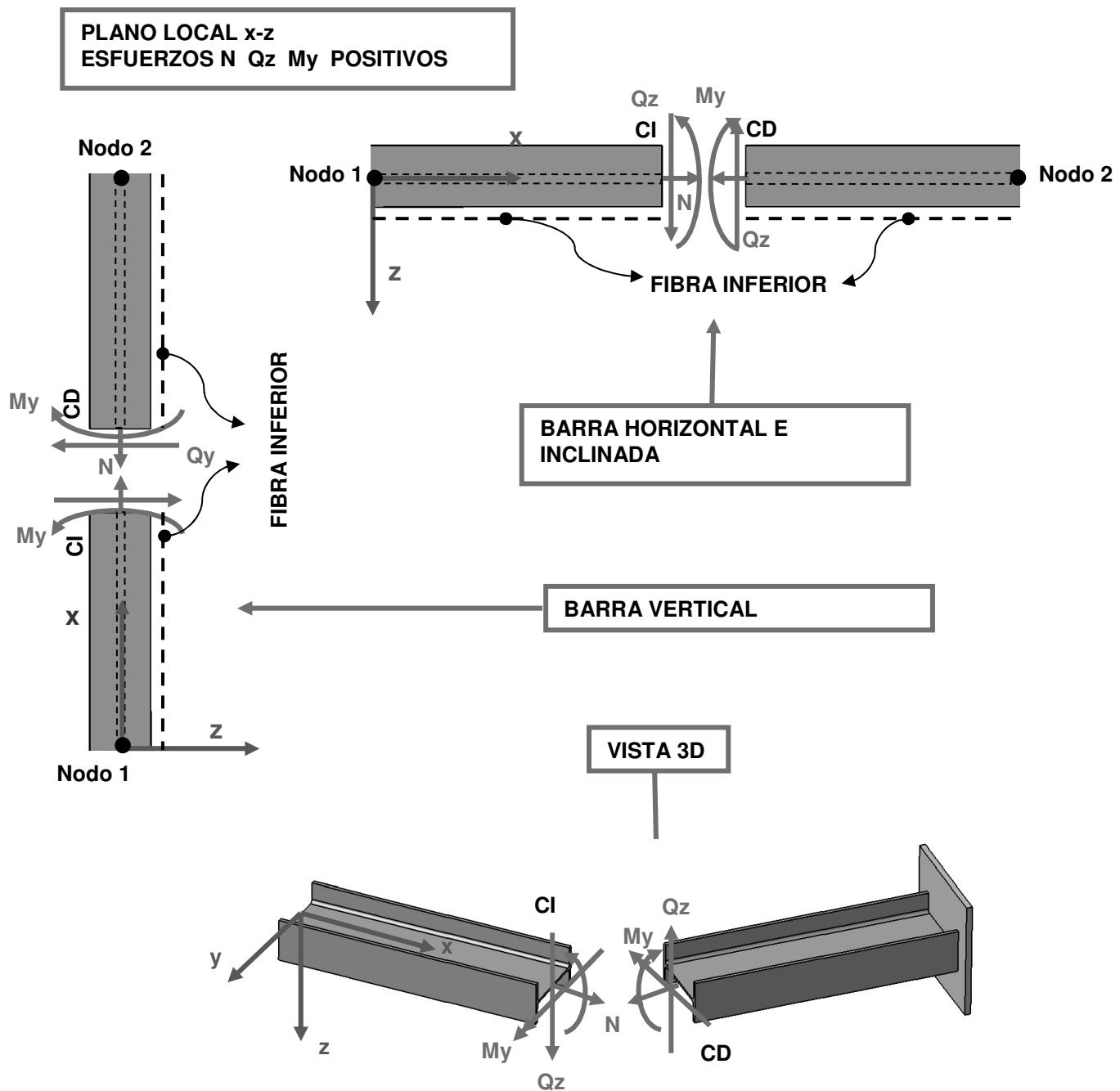


FIG. 30

RESUMEN DE LA CONVENCION PLANO LOCAL x-z:

Esfuerzo axil $N>0$: Tracción en la sección

Momento Flector $My >0$: Traciona fibras inferiores (coordenada z positiva)

Corte $Qz >0$: En el sentido de avance de x provoca My positivo

Ecuaciones diferenciales en el plano x-z (FIG 31)

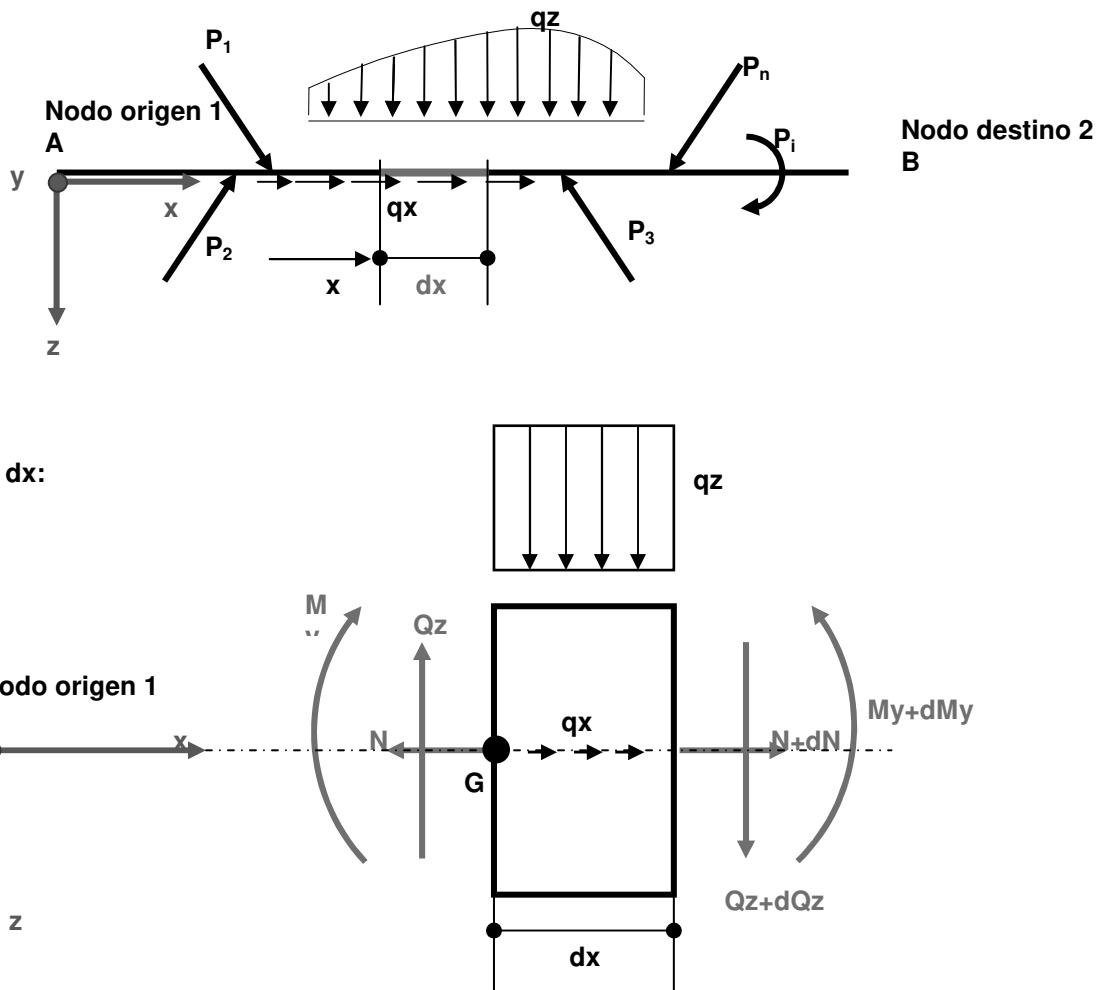


FIG. 31

**ECUACIONES DIFERENCIALES DE LOS
ESFUERZOS CARACTERISTICOS EN EL PLANO x-z**

$$\frac{dN}{dx} = -q_x \quad (4) \equiv (1)$$

$$\frac{dQ_z}{dx} = -q_z \quad (5)$$

$$\frac{dM_y}{dx} = Q_z \quad (6)$$

- N: Esfuerzo axil
 Qz: Esfuerzo de corte en la dirección del eje local z
 My: Momento flector en el plano local x-z
 qx: Carga distribuida en la dirección longitudinal
 qz: Carga distribuida en la dirección del eje local z

Diagramas de esfuerzos característicos (FIG 32 / FIG 33):

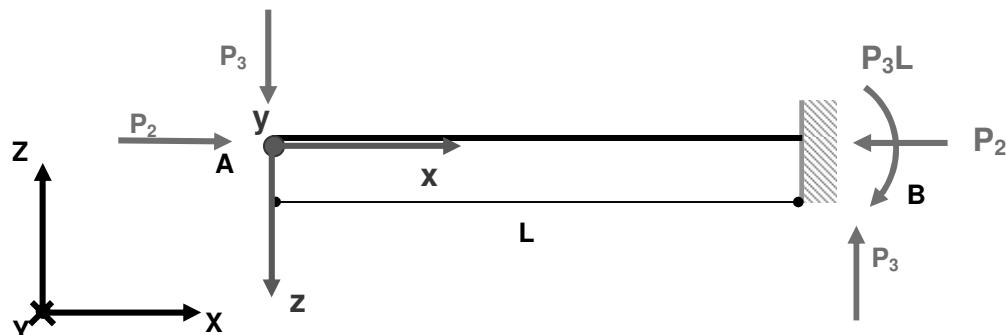


FIG.32

Se pueden trazar los diagramas con la información que dan las ecuaciones diferenciales sin necesidad de determinar las leyes de variación de los esfuerzos en la barra.

Axil N:

- Cómo q_x (carga distribuida longitudinal) es 0, entonces por (4) N es constante.
- Se conoce su valor en el origen $N = -P_2$, por lo tanto queda definido el diagrama

Corte Qz:

- Como q_z (carga distribuida transversal) es 0, entonces por (5) Q_z es constante.
- Como no hay carga transversal aplicada entre A y B, no hay salto de la función.
- Se conoce el corte Q_z en A igual a $-P_3$, que será constante en toda la barra.

Momento flector My:

- Como el corte es constante por la (6), el momento es lineal.
- Como el corte es negativo, la pendiente debe ser negativa y constante, porque no hay salto en el valor del corte en toda la barra.
- Se conoce el valor del momento en los extremos A y B, $M_A=0$ y $M_B=-P_3L$

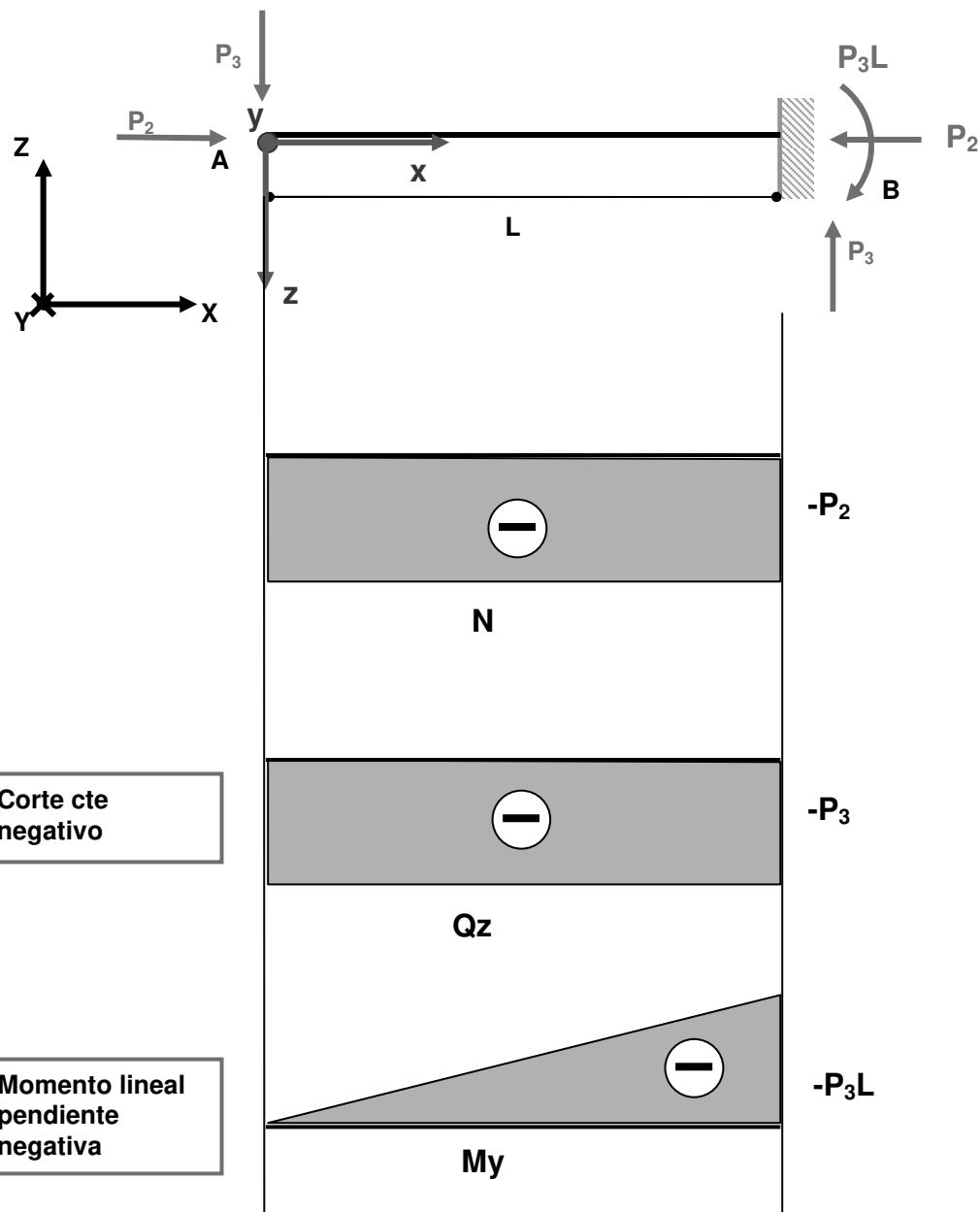


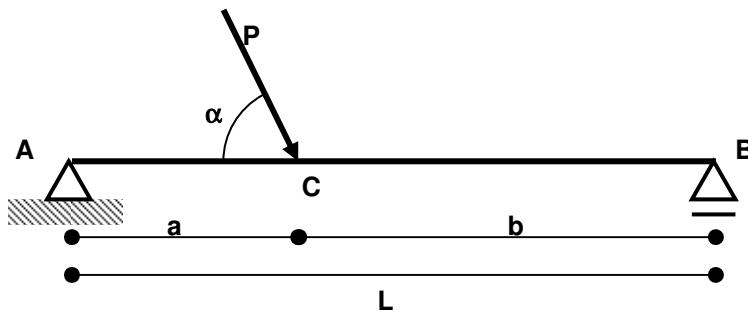
FIG 33

El diagrama de corte da información de la forma del diagrama de momento flector.

4. EJEMPLOS ESTRUCTURAS DE TRAMO RECTO

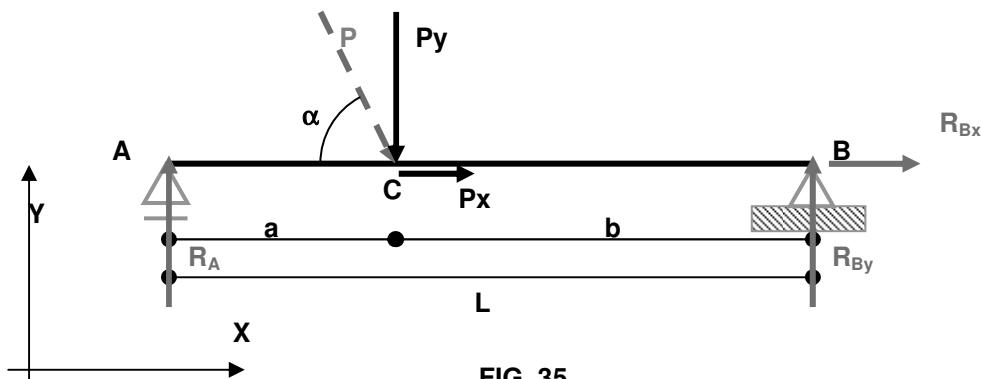
Ejemplo 4.1: Carga inclinada – Barra horizontal

Viga de longitud L simplemente apoyada en sus extremos A y B y con una carga P a la distancia a del extremo 1 actuando con un ángulo de inclinación α , cuyo esquema de cálculo se ve en la FIG 34.



a) Paso 1: Cálculo de las reacciones (FIG 35 / FIG 36):

- i) Se descomponen las cargas actuantes según un sistema de ejes global X-Y
- ii) Se eliminan los vínculos externos colocando en su lugar las reacciones sobre la estructura adoptando sentidos arbitrarios.
- iii) Se plantearán las ecuaciones de equilibrio para determinar el valor de las reacciones, si el resultado es positivo significa que el sentido supuesto coincide con el sentido real y viceversa.

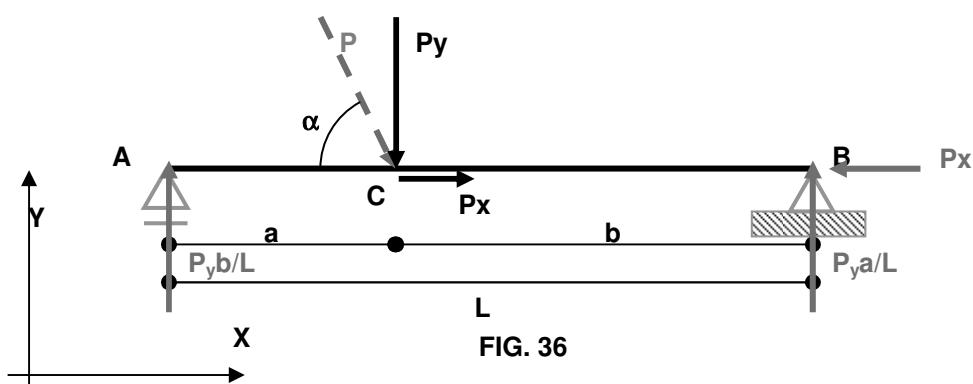


$$\text{En X-X: } R_{Bx} + P_x = 0$$

$$\text{En Y-Y: } R_{AY} + R_{BY} - P_y = 0$$

$$\Sigma M_A: R_{BY} \cdot L - P_y \cdot a = 0$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtienen las reacciones que se grafican en la FIG 33, ya con su sentido real.



b) Paso 2: Determinación de los esfuerzos característicos:

- i) Se adopta la terna local x-y con nodo origen en A y nodo destino B lo que define cara derecha y cara izquierda para aplicar la convención de signos durante el análisis (FIG 37).

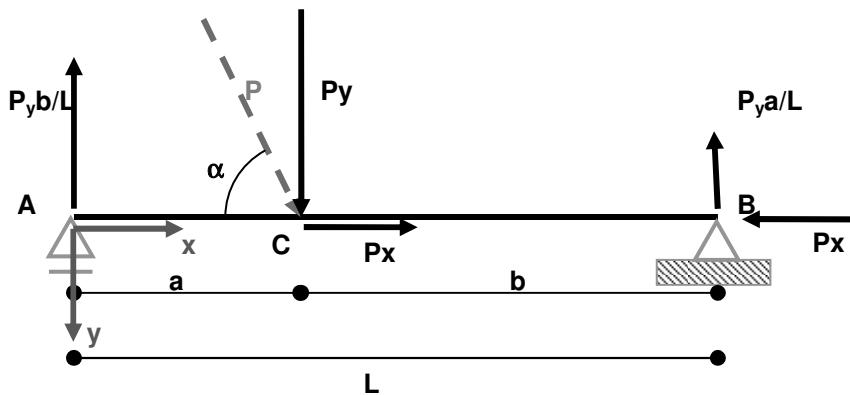


FIG. 37

- ii) Aplicación de la información de las ecuaciones diferenciales para poder graficar los esfuerzos característicos.

$$\frac{dN}{dx} = -q_x \quad (1)$$

$$\frac{dQy}{dx} = -q_y \quad (2)$$

$$\frac{dMz}{dx} = Qy \quad (3)$$

Esfuerzo axil N:

- Cómo $q_x = 0$, por la ec (1) N es constante.
- Al haber una carga externa aplicada según x en C (P_x), hay un salto en el diagrama en C
- Se necesita conocer el axil en alguna sección del tramo AB y del tramo CB
- En A no hay fuerza axil aplicada, por lo tanto $N_A=0$ y constante en el tramo AC
- En B $N_B=-P_x$ y constante en el tramo CB

Esfuerzo de corte Qy:

- $q_y=0$, por lo tanto por la ec(2) Qy es constante de a tramos.
- Donde hay carga transversal a la barra aplicada hay una discontinuidad (salto) en la función
- Se debe conocer el esfuerzo de corte en una sección del tramo AC y una sección del tramo CB
- $Qy_A=+P_yb/L$ y es constante en AC (La sección A es una CD)
- $Qy_B=-P_yb/L$ y es constante en el tramo CA (La sección B es una cara izquierda CI)

Momento flector Mz:

- Como el corte es constante de a tramos el momento flector es lineal (ec (3)). Por lo tanto en AC y CD se deben conocer dos valores de Mz para poder trazar las rectas.
- En AC el corte es positivo por lo tanto la pendiente de Mz debe ser positiva (pendiente hacia abajo).
- En CB la pendiente es positiva
- Como no hay momento exterior aplicado el diagrama de Mz no tiene salto
- Se conoce $Mz_A=0$ y $Mz_B=0$.
- Para poder trazar las rectas sólo resta conocer Mz_C

Se debe trasladar paralelamente a sí misma la fuerza P_yb/L la distancia a:

$$Mz_c = \frac{P_y b}{L} a$$

Según la convención Mz_A es positivo

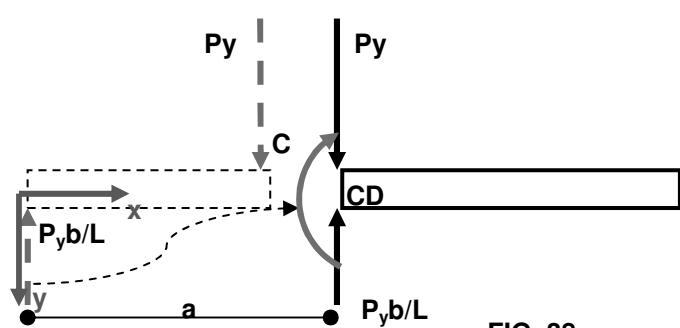
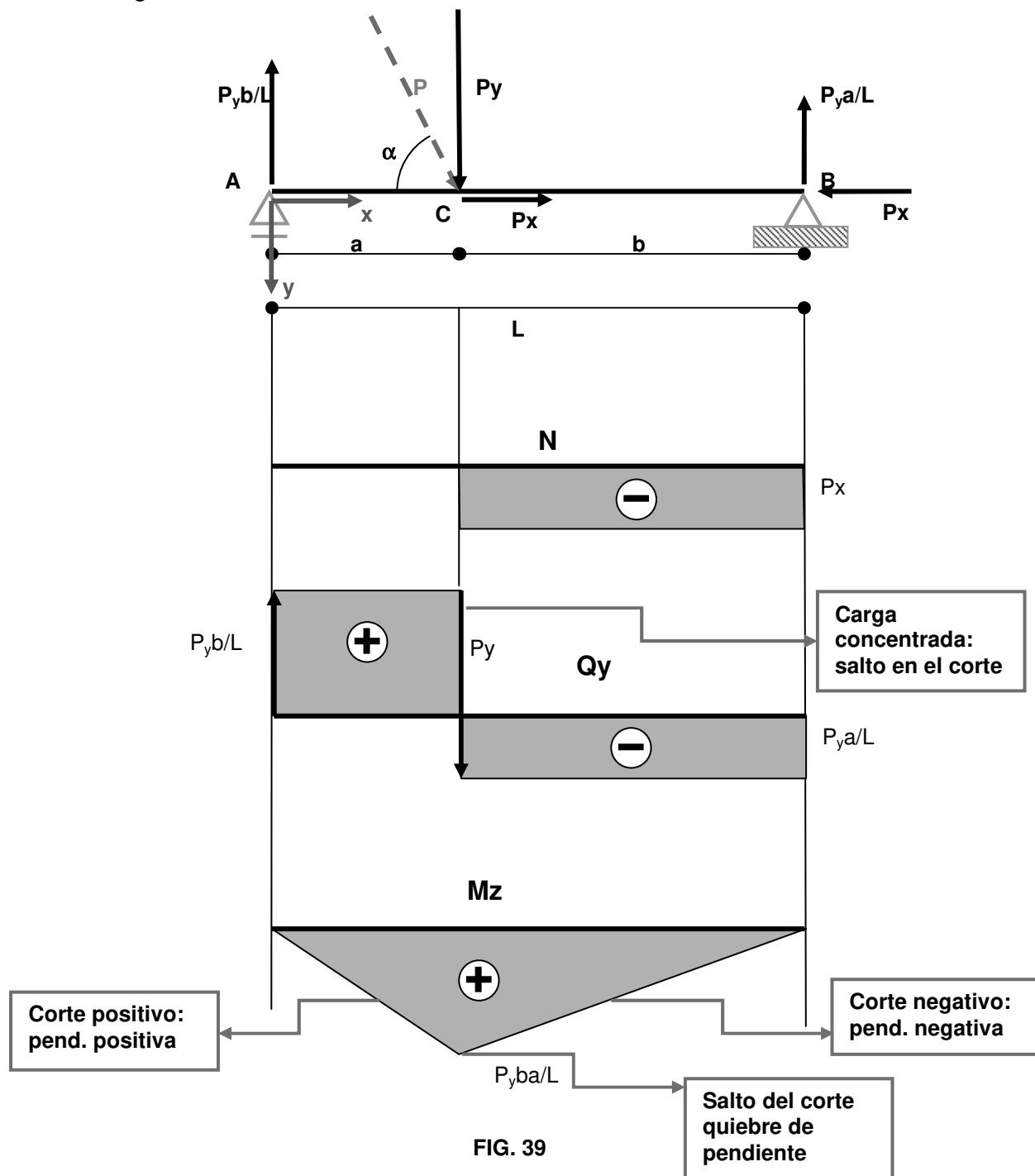


FIG. 38

Diagramas:



En el caso particular que $a=b=L/2$, y P actúa perpendicular al eje de la viga se tiene

$$R_A = R_{BY} = P/2$$

$$M_{Z\text{MÁX}} = PL/4$$

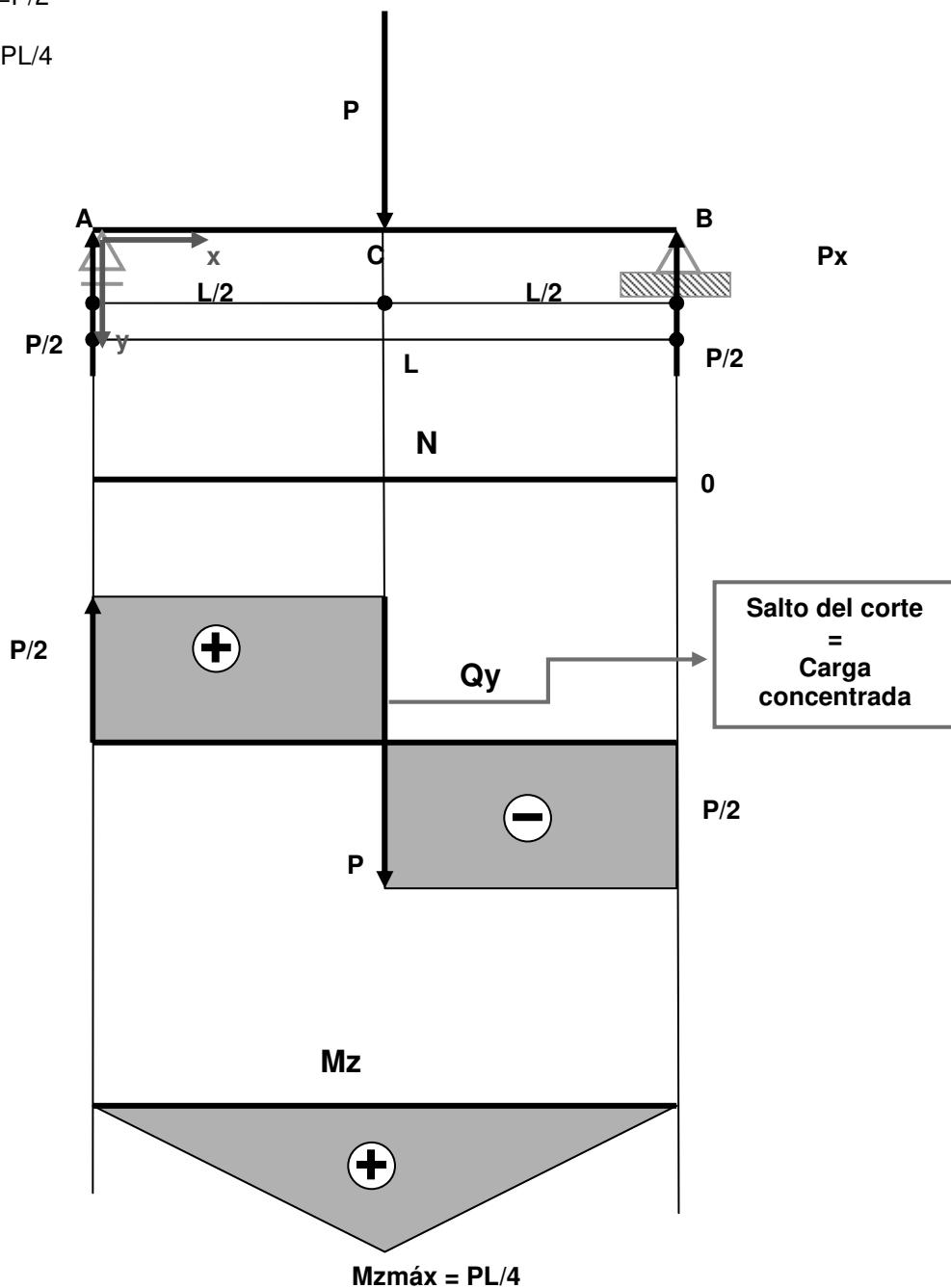


FIG. 40

Ejemplo 4.2: Cargas transversales al eje de la viga

Trazar los diagramas característicos del esquema de la viga de la FIG 41

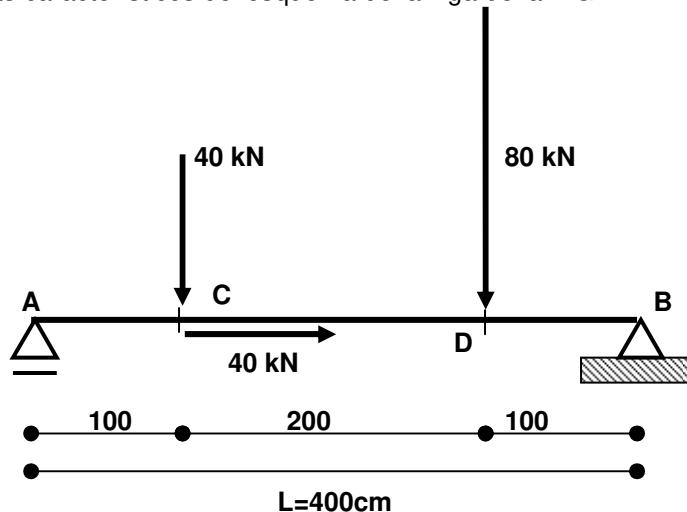
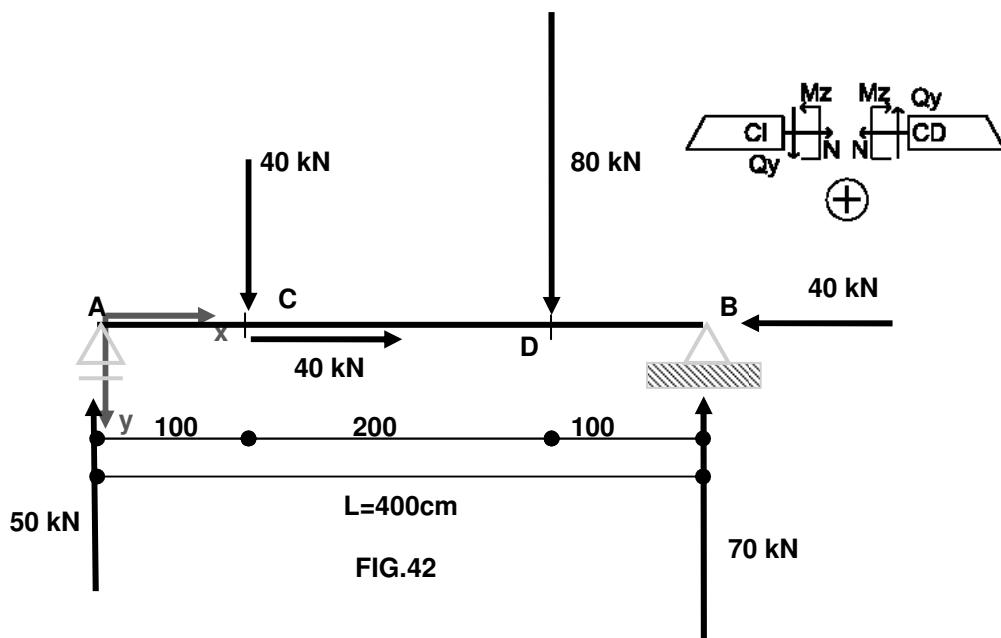


FIG.41

a) Reacciones - terna local – convención de signos (FIG 42):



b) Esfuerzos característicos y diagramas:

- Como no hay cargas distribuidas aplicadas los diagramas de axil y corte serán constantes de a tramos con las discontinuidades en los puntos de aplicación de las cargas concentradas. Es decir que sólo basta hallar tres valores, uno en cada uno de los tramos AC, CD y DB respectivamente:

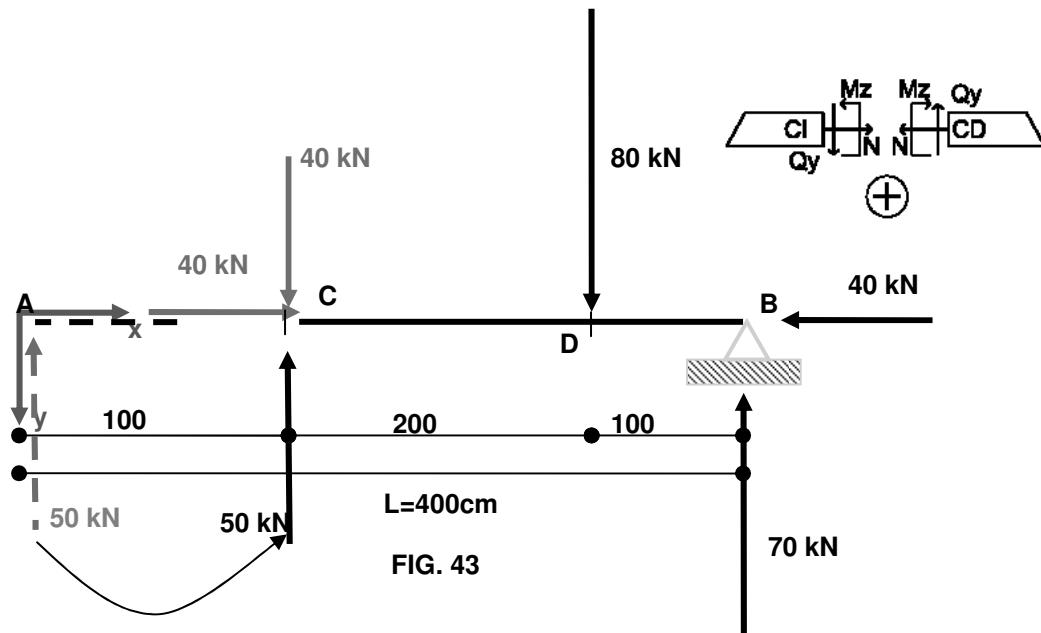
Esfuerzo axil N y de corte Qy:

Tramo AC:

En A es $N_A=0$ cte en todo el tramo AC
En A es $Q_{yA}=+50\text{ kN}$ cte en todo el tramo AC

Tramo CD:

Se corta la estructura en la sección C a la derecha de las cargas aplicadas y se suprime el tramo izquierdo (FIG 43), observando entonces una **cara derecha**



El tramo AC trae $N=0$ y salta a $N_c=-40 \text{ kN}$ cte hasta B porque no hay otra carga longitudinal aplicada.

El tramo AC trae un corte de $+50 \text{ kN}$ y se produce un salto de -40 kN por la carga transversal aplicada en C resultando $Q_{yc}=+50-40=+10 \text{ kN}$ cte hasta D

Tramo DB:

En el tramo DB se conoce el axil y el corte en la sección B, que es una **cara izquierda**
 $N_B=-40 \text{ kN}$
 $Q_{yb}=-70 \text{ kN}$

Observar que el corte salta en D de $+10 \text{ kN}$ a -70 kN que es el valor de la carga transversal aplicada igual a 80 kN

Si se analizara la sección D a derecha de la carga, se observaría una cara derecha y esa fuerza introduce un corte negativo igual -80 kN

El diagrama de corte y las cargas exteriores dan información acerca de la forma del diagrama de momento flector a través de las ecuaciones (3) y (6). Siempre es conveniente dibujar antes el diagrama de corte.

Diagrama de Axil N y corte Qy (FIG 44):

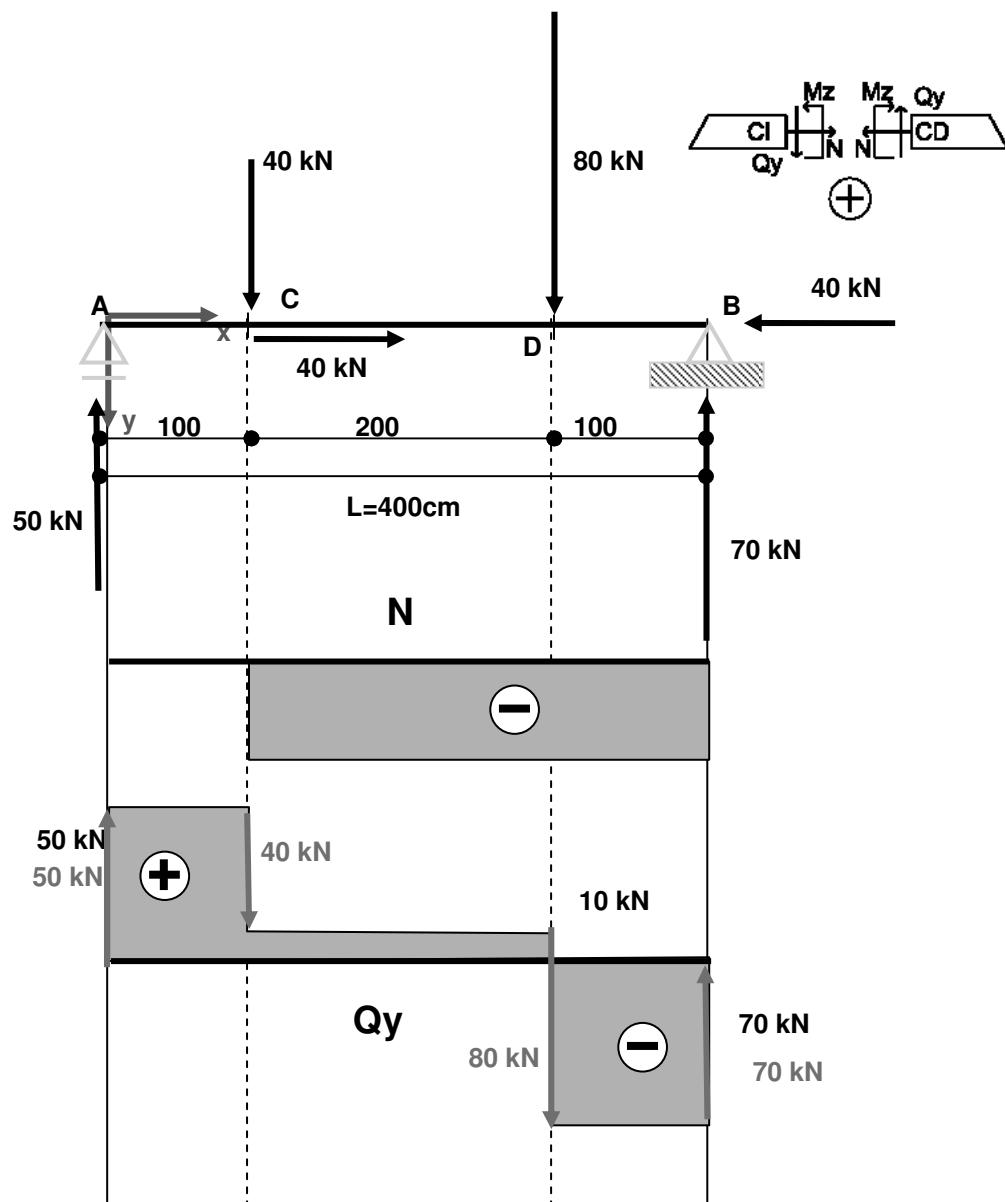


FIG. 44

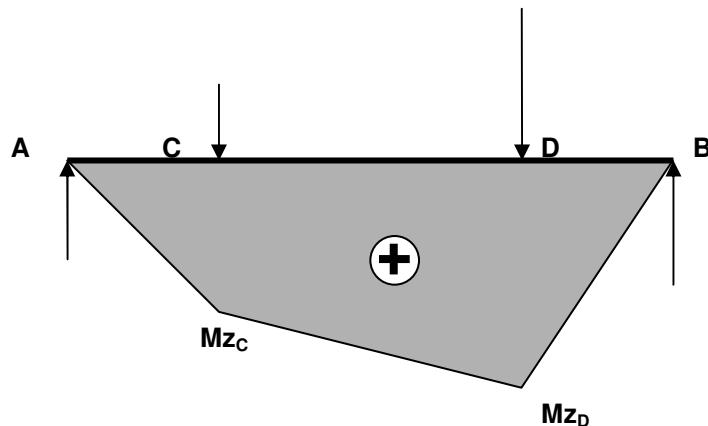
Cuando se analiza el corte en el sentido de las x locales crecientes las fuerzas transversales van entrando en cada sección con su orientación definiendo el signo del diagrama.

En el ejemplo inicia con el valor de la fuerza extrema izquierda (+50 kN) y cierra con la fuerza extrema derecha (-70 kN) en 0

Momento flector M_z :

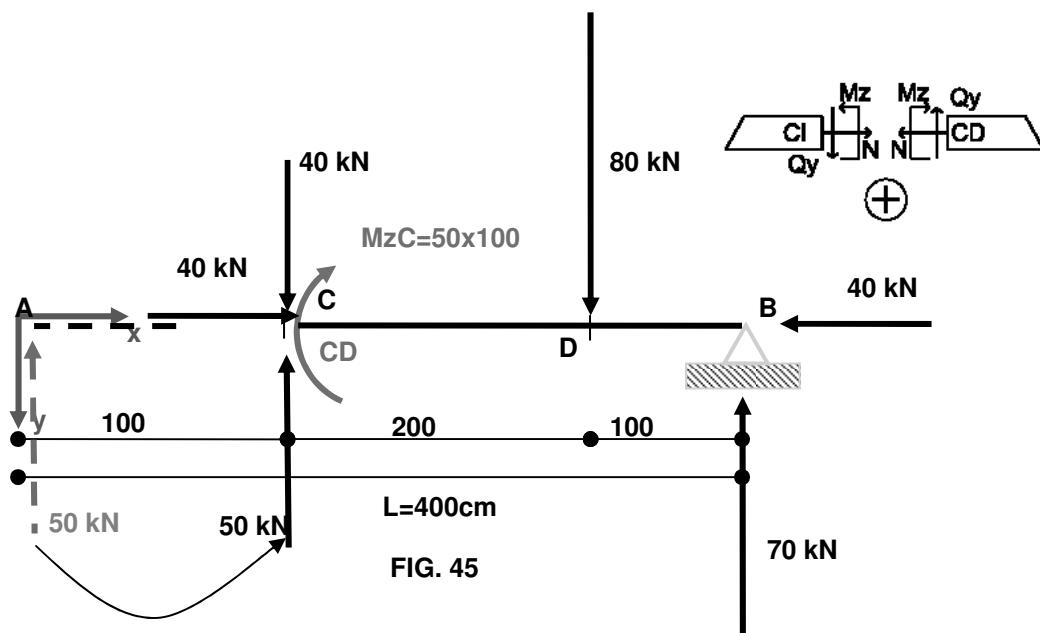
- La función que describe el momento flector debe ser lineal
- Se conocen los valores en la sección A y B: $M_{zA/B}=0$
- En el tramo AC y CD las pendientes son positivas, pend. AC > pend. CD
- En el tramo DB la pend. es negativa, y en módulo es mayor que AC (El corte es mayor)
- En C y D en correspondencia de la carga aplicada y en virtud del salto en el corte hay quiebre de las pendientes.

Se puede intuir con ese análisis la forma del diagrama:



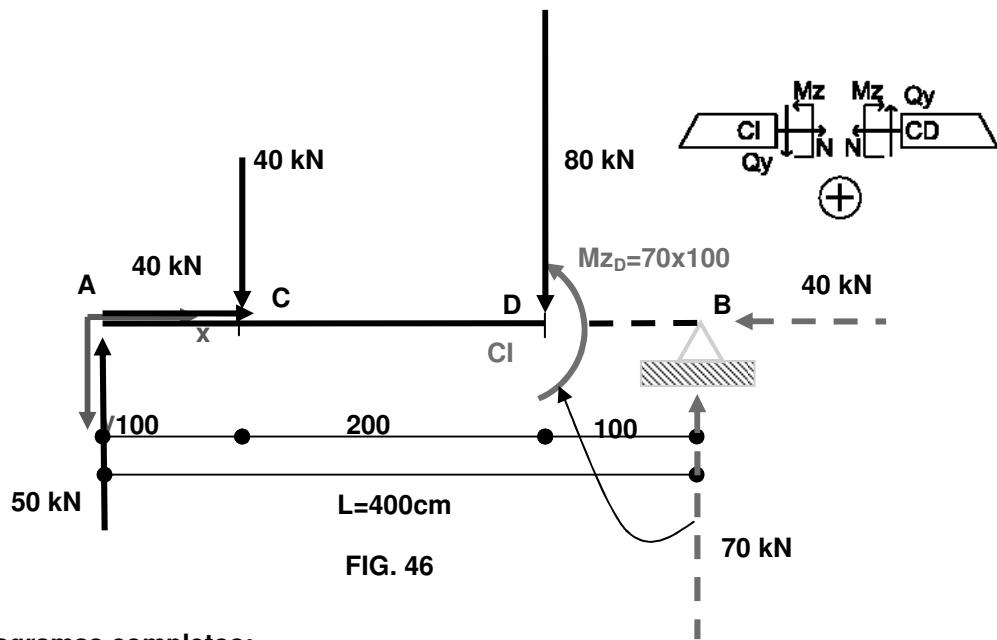
- Para definir el diagrama sólo resta conocer los valores de M_{zC} y M_{zD}
- **M_{zC} :**

Se suprime la parte de estructura entre A y C y se trasladan las fuerzas de la parte suprimida a C (FIG 45), obteniendo $M_{zC}=5000 \text{ kN.cm}$ positivo teniendo en cuenta que se analiza una cara derecha CD:

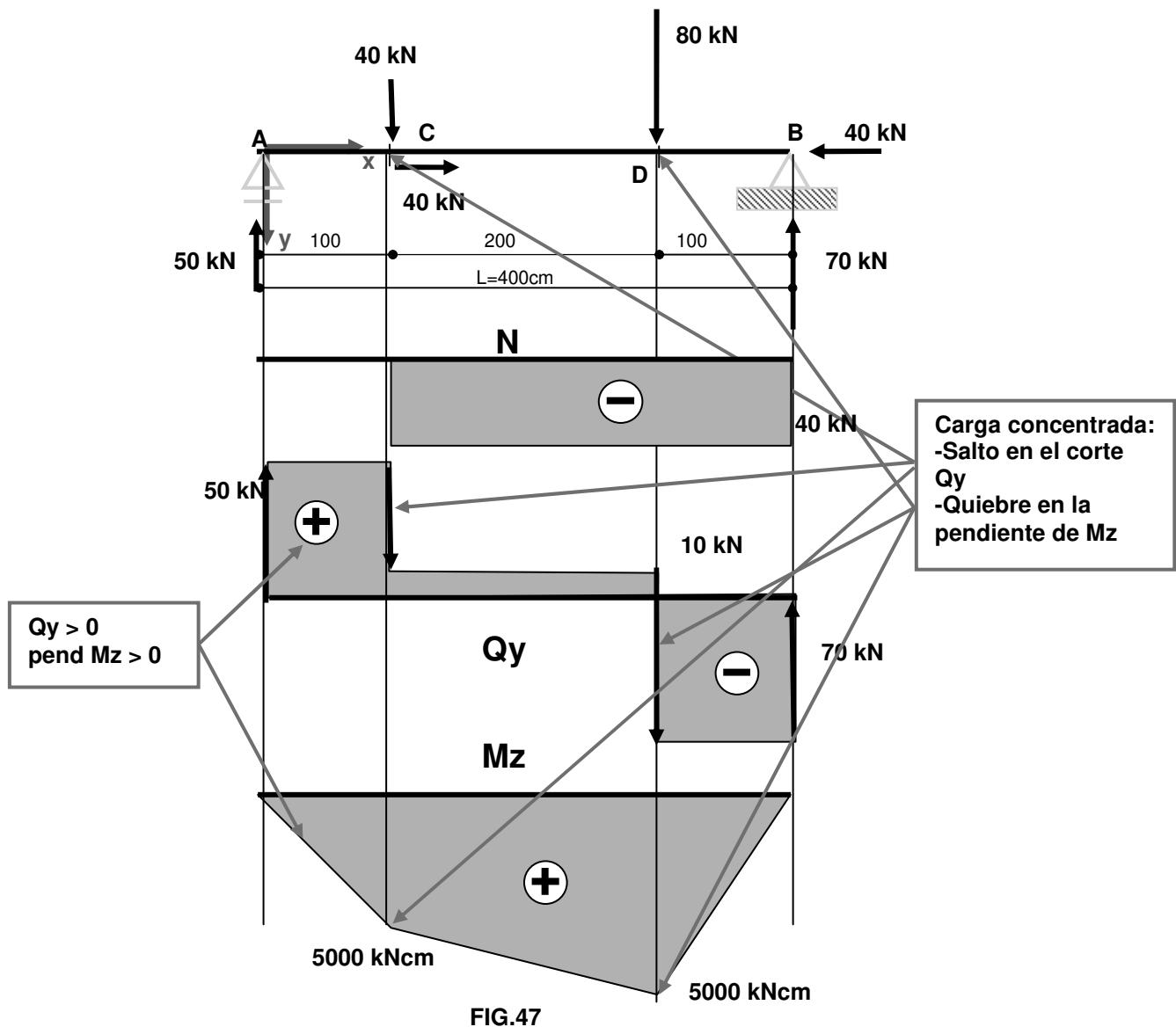


- **M_{zD} :**

Conviene iniciar el análisis desde la derecha, suprimiendo el tramo DB y trasladando la fuerza en B a la sección D (FIG 42), obteniendo $M_{zD}=7000 \text{ kN.cm}$, positivo según la convención analizando una cara izquierda



Resumen: Diagramas completos:



Ejemplo 4.3: Carga distribuida transversal

Se analizarán ahora los esfuerzos característicos en la viga simplemente apoyada sometida a la acción de una carga uniformemente repartida en toda su longitud $q_y(x) = \text{constante}$ dirigida según el eje y local cuyo esquema estructural se reproduce en la FIG 48

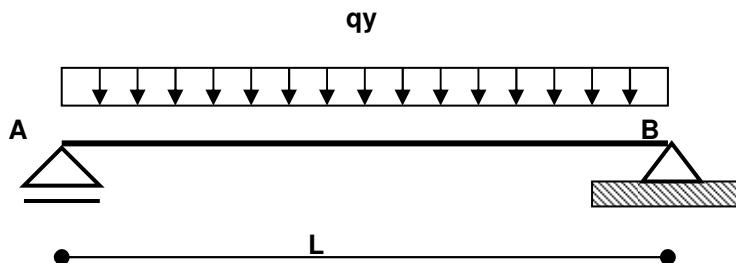


FIG. 48

a) **Paso 1: Cálculo de las reacciones:**

Para el cálculo de reacciones y por tratarse de una sola chapa, la carga repartida (dibujada en gris en la figura) se puede reemplazar por su resultante, ubicada en el baricentro de la superficie de carga. Se han asignado sentidos arbitrarios a las reacciones en los vínculos.(FIG 49)

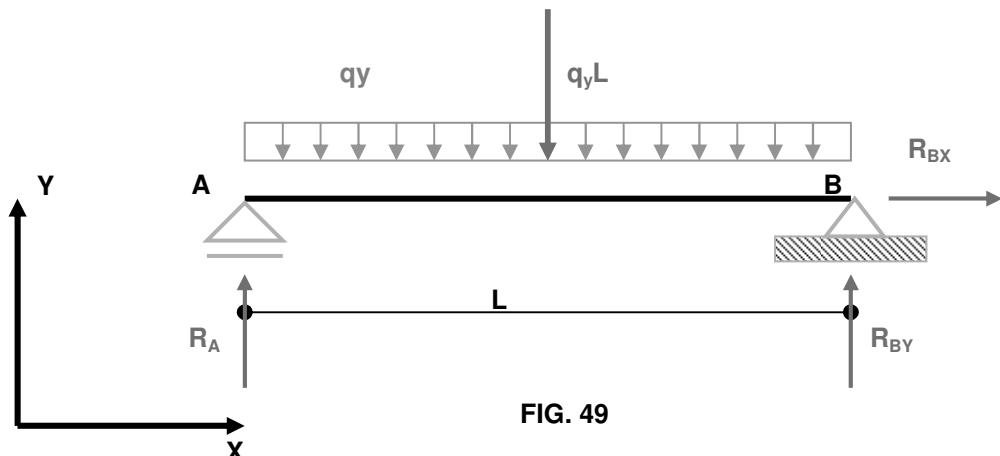


FIG. 49

Planteando el equilibrio de las fuerzas activas y reactivas:

$$\text{En } X-X: \quad R_{BX} = 0$$

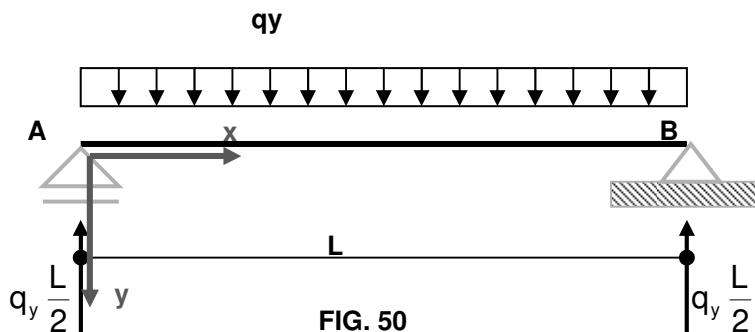
$$\text{En } Y-Y: \quad R_{AY} + R_{BY} - qL = 0$$

$$\Sigma M_A: \quad R_{BY}L - qL\frac{L}{2} = 0$$

$$R_A = R_{BY} = qL/2; \quad R_{BX} = 0$$

b) Paso 2: Determinación de los esfuerzos característicos:

Esquema de análisis - terna local (FIG 50):



PARA EL ANALISIS DE LOS ESFUERZOS CARACTERISTICOS NO SE PUEDE REEMPLAZAR LA CARGA REPARTIDA POR SU RESULTANTE

Información previa para el trazado:

- Como no hay carga distribuida en x local, y no hay fuerzas concentradas longitudinales, el esfuerzo axil es nulo en toda la barra. $N=0$
- Dado que q_y es constante, el esfuerzo de corte Q_y tendrá variación lineal.
- Como no hay cargas transversales concentradas en el tramo AB, no habrá saltos en la función Q_y .
- Se conoce el valor del corte en las secciones A y B: $Q_{yA}=+q_yL/2$, $Q_{yB}=-q_yL/2$

Diagrama de axil N y corte Qy (FIG 51):

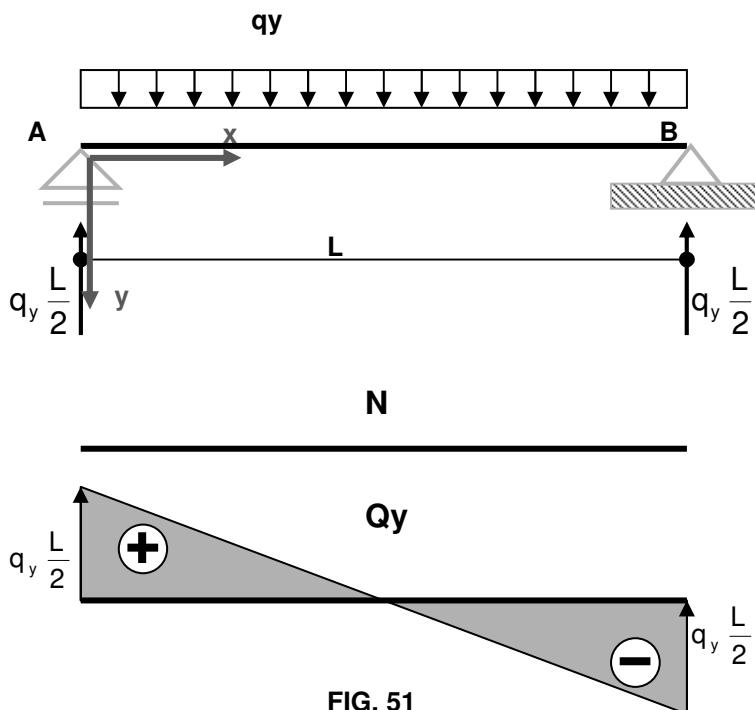


Diagrama de momento flector M_z (FIG 52):

- Como el **corte tiene variación lineal**, la ley de variación del **momento flector será cuadrática** (parabólica).
- Como el corte no tiene saltos, el momento flector no tendrá quiebres en su pendiente.
- En la **sección A** el **corte** toma su valor **máximo positivo**, por lo tanto la **pendiente** del diagrama de momento flector será **máxima positiva** (hacia abajo).
- En la **sección B** sucede lo contrario y la pendiente será **máxima negativa**.
- Se conoce $M_{zA}=M_{zB}=0$.
- **En $L/2$, el corte $Q_y=0$, por lo tanto M_z tendrá un valor máximo.**
- Se puede intuir ya la forma del diagrama:

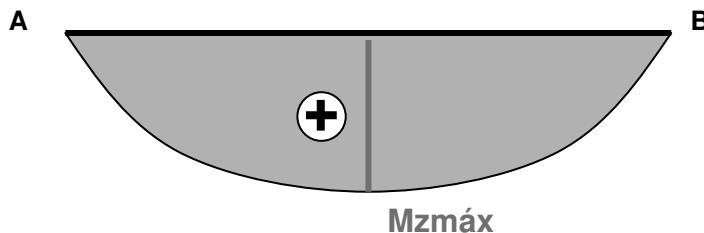
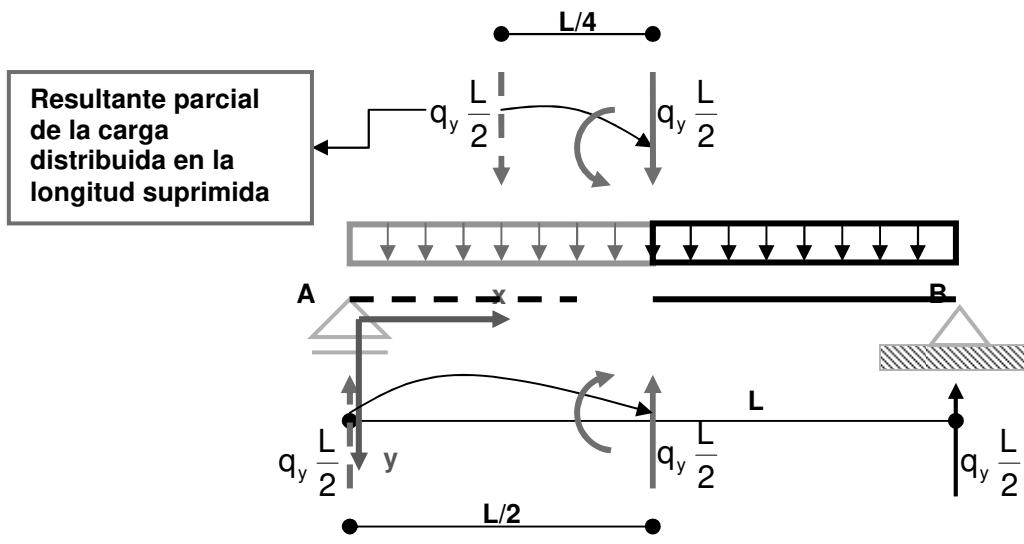


FIG. 52

- El valor de $M_{zmáx}$ se puede calcular suprimiendo la mitad izquierda de la estructura y trasladando las fuerzas a dicha sección que será en este caso una cara derecha CD (FIG 53):



$$M_{zmáx} = q_y \frac{L L}{2 2} - q_y \frac{L L}{2 4}$$

$$M_{zmáx} = q_y \frac{L^2}{8}$$

FIG. 53

Diagramas completos (FIG 54):

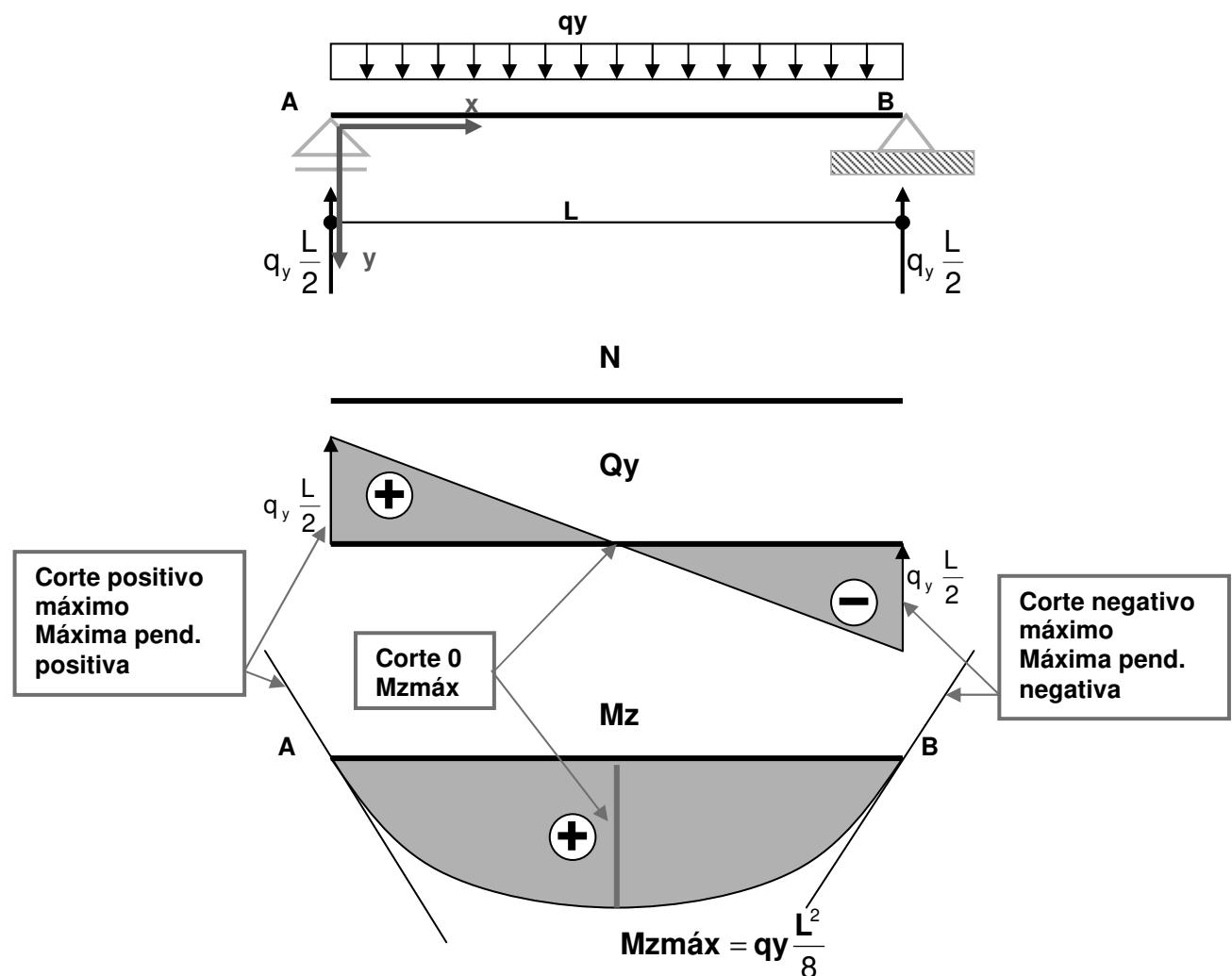


FIG. 54

Expresiones de los esfuerzos en una distancia x genérica:

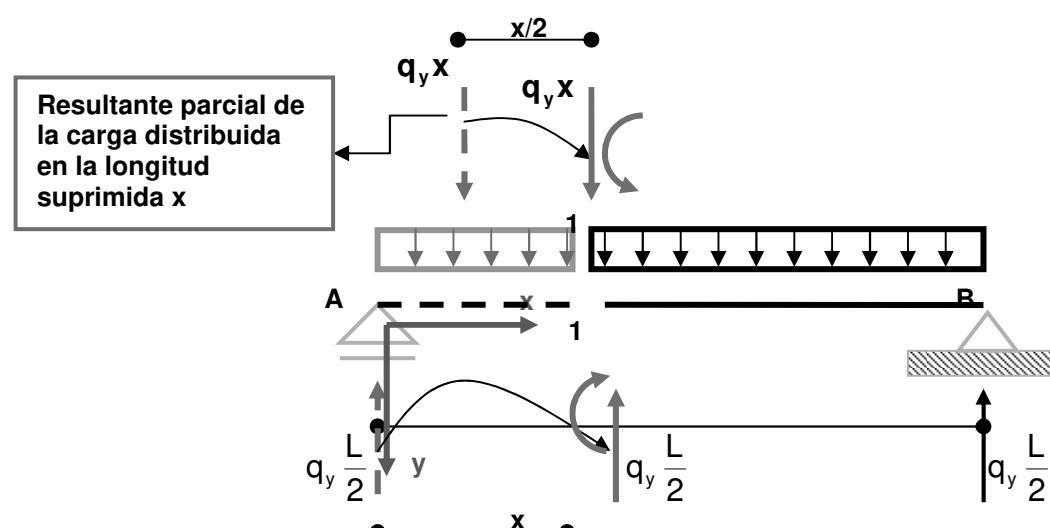


FIG. 55

Los esfuerzos característicos en la sección 1-1 genérica se obtienen:

- i) **Trasladando todas las fuerzas actuantes en de la parte suprimida a la sección 1-1**
- ii) **Sumar respectivamente las componentes en x para obtener el esfuerzo axil N si lo hubiera ($N=0$ en el ejemplo), y las componentes según y para obtener el esfuerzo de corte Q_y**
- iii) **Sumar los momentos que se obtuvieron por cada fuerza que se desplazó paralelamente a sí misma para obtener el momento flector M_z .**

Así se tiene, de acuerdo a la convención ya adoptada:

$$\left. \begin{aligned} N &= 0 \\ Q_y &= q \frac{L}{2} - qx \\ M_z &= q \frac{L}{2}x - qx \frac{x}{2} \longrightarrow M_z = q \frac{L}{2}x - q \frac{x^2}{2} \end{aligned} \right\} \quad (\text{Ley de variación de los esfuerzos})$$

Ejemplo 4.4: Momento exterior aplicado en un extremo

La misma viga simplemente apoyada de los ejemplos anteriores, está sometida ahora a la acción de un par M_{z0} en el extremo A como se ve en la FIG 56:

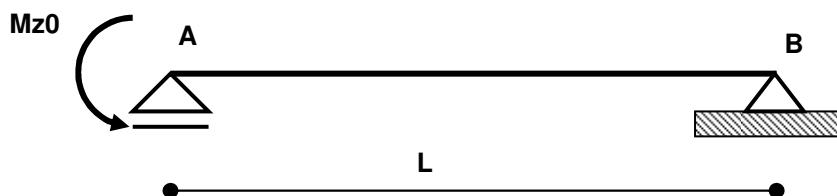


FIG. 56

- a) **Paso 1: Cálculo de las reacciones:**

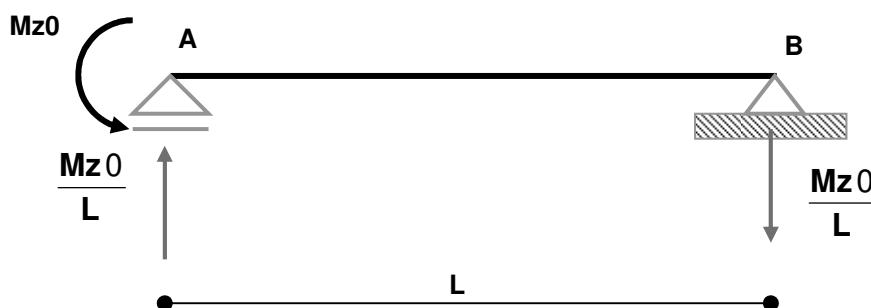


FIG. 57

a) Paso 2: Determinación de los esfuerzos característicos:

Esquema de análisis - terna local (FIG 58):

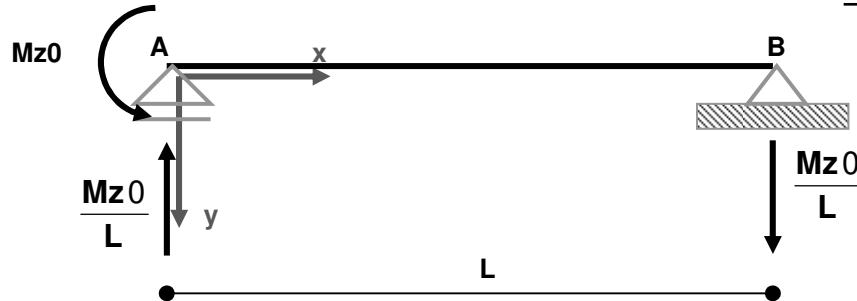


FIG. 58

Información previa para el trazado:

- No hay esfuerzo axil en toda la barra $N=0$
- Como $q_y=0$ el esfuerzo de corte es constante $Q_y=\text{cte}$, y como no hay carga transversal aplicada en el tramo, no hay salto del diagrama.
- Se concibe el corte en la sección A o B $Q_{yA}=Q_{yB}=+Mz_0/L$
- El diagrama de M_z es lineal y la pendiente es positiva (hacia abajo)
- Se conoce $M_{zA}=-M_{z0}$ y $M_{zB}=0$
- Esta información es suficiente para trazar el diagrama (FIG 59)

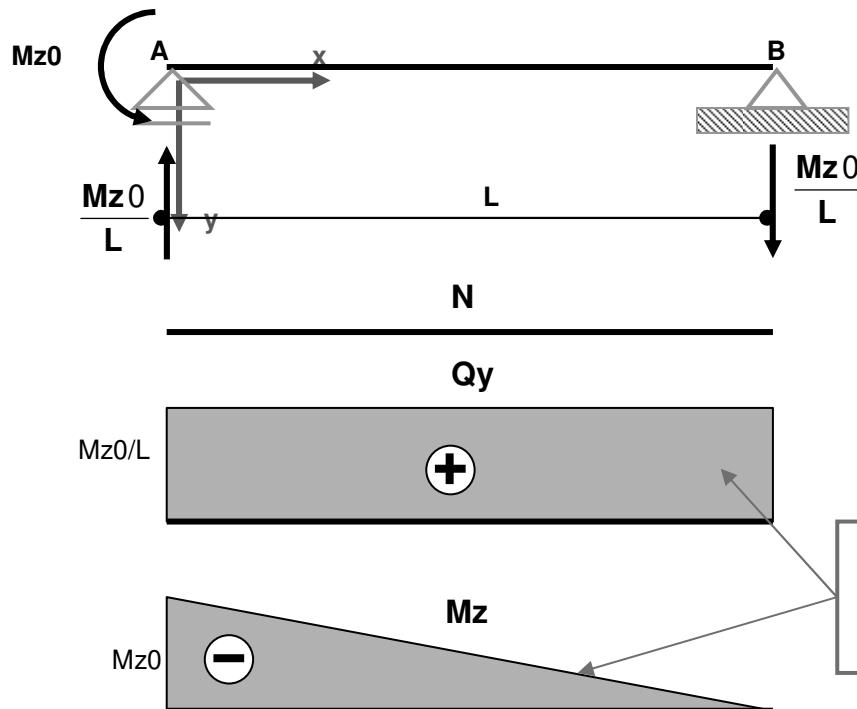


FIG. 59

Ejemplo 4.5: Momento exterior aplicado en el tramo

Viga simplemente apoyada en A y B de longitud 60cm con un momento de 2400 kgcm aplicado en el tramo a una distancia de 20 cm del apoyo A como se ve en la FIG 60.

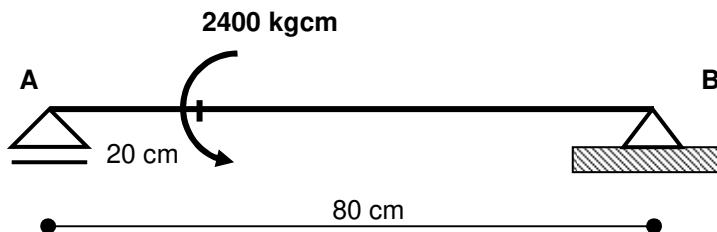


FIG. 60

Paso 1: cálculo de reacciones:

Las reacciones en A y B están constituidas por un par de fuerzas que den como resultante un momento igual y contrario al actuante de 2400 kgcm.

$$R_A = 2400/80: 30 \text{ kg} \quad \text{y} \quad R_B = -30 \text{ kg}$$

Paso 2: Cálculo de los esfuerzos característicos:

Esquema de análisis - terna local (FIG 61):

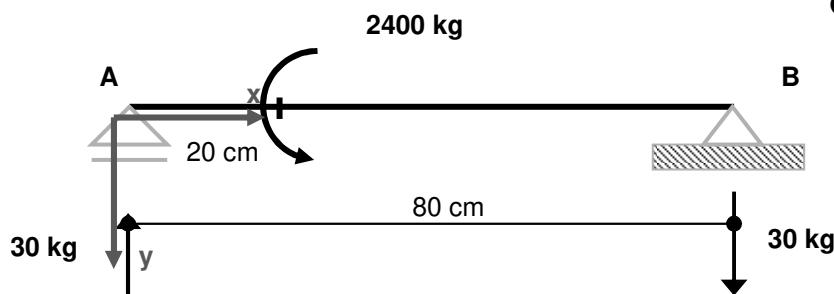
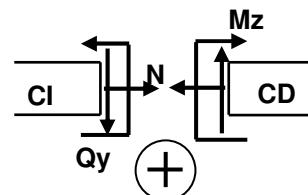
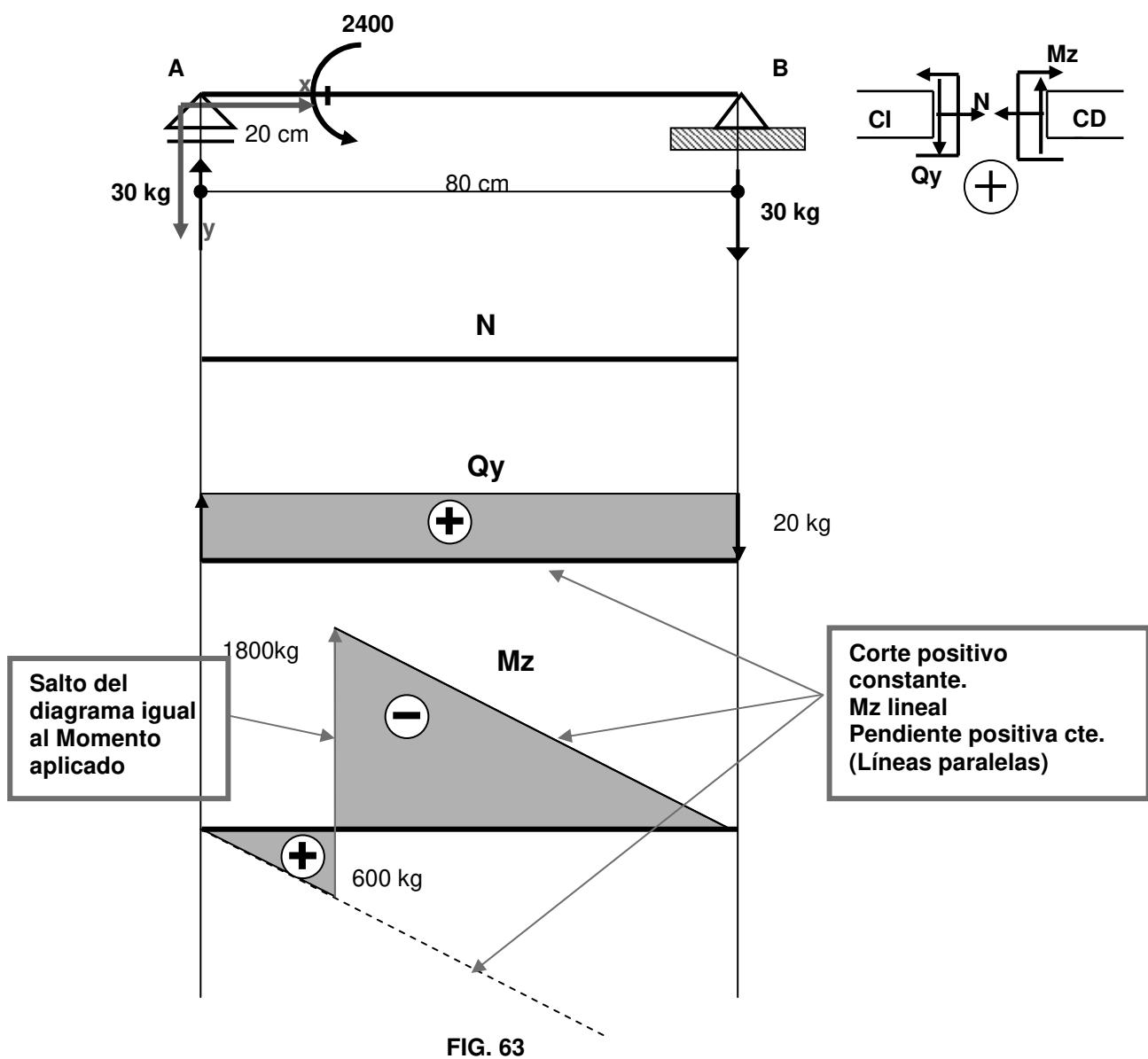
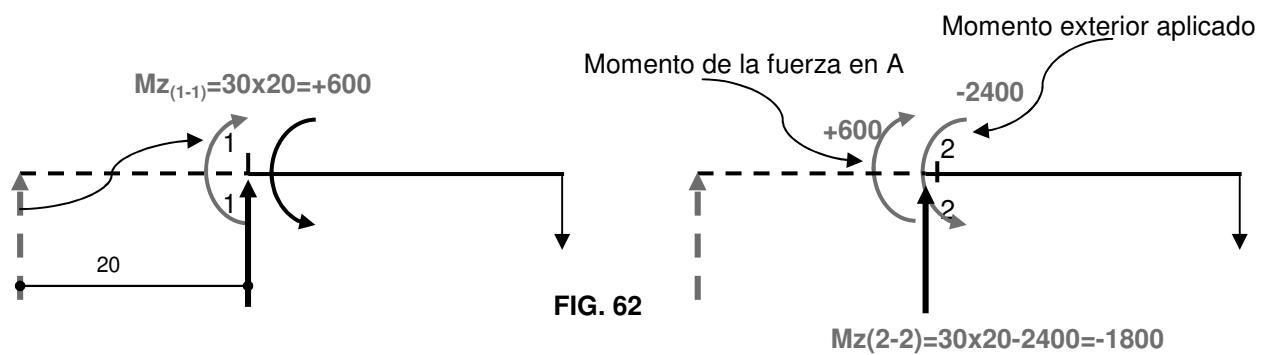


FIG. 61

Información previa para el trazado:

- El esfuerzo axil es nulo en el tramo AB. $N=0$
- Como la carga transversal en el tramo es nula el esfuerzo de corte Q_y es constante en todo el tramo AB. $Q_y=+30 \text{ kg}$.
- Al ser el esfuerzo de corte constante en todo el tramo y positivo, el diagrama de momento M_z es lineal con pendiente positiva en todo el tramo, por lo tanto para poder trazarlo se necesitan dos puntos conocidos. Sin embargo al haber un par aplicado a los 20 cm, en esa sección habrá una discontinuidad (salto) de la función. Por lo tanto habrá que conocer el momento M_z un infinitésimo antes y después de dicha sección, porque en los extremos se sabe que $M_{z_A}=M_{z_B}=0$
- En la FIG 56 se calculan los momentos en las secciones 1-1 y 2-2 un infinitésimo antes y después del punto de aplicación del par 2400 kgcm.
- El diagrama se obtiene uniendo el punto $M_{z_A}=0$ con $M_{z_{1-1}}$ y $M_{z(B)}=0$ con $M_{z_{2-2}}$



Ejemplo 4.6: Carga triangular

Obtener los esfuerzos característicos de una viga simplemente apoyada sometida ahora a la acción de una carga repartida de variación lineal como se ve en la FIG 64:

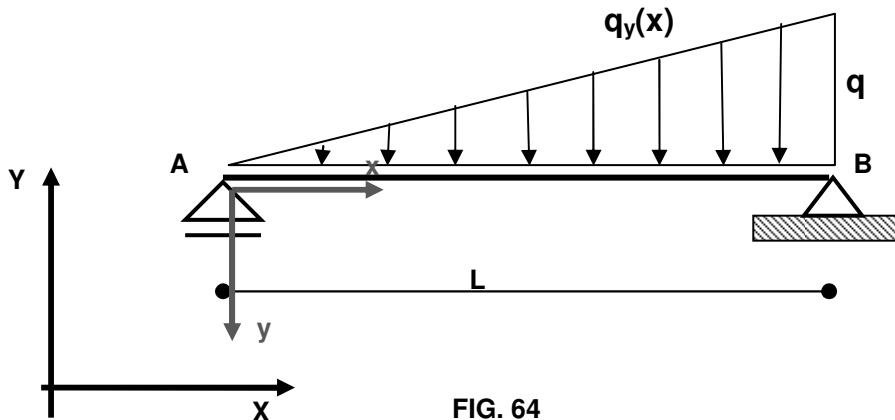


FIG. 64

Referido al sistema de eje local x-y, la ley de variación de la carga distribuida es la siguiente:

$$q(x) = \frac{q}{L} x \quad (4.1)$$

Paso 1: Reacciones de vínculo (FIG 65):

Resultante carga distribuida: $P = \int_0^L q(x) dx = \int_0^L \frac{q}{L} x dx$

$$P = q \frac{L}{2} \quad (4.2)$$

Ubicación de la resultante respecto del origen A:

$$P \cdot x_p = \int_0^L q(x) x dx$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones (4.1) y (4.2) se obtiene el valor de x_p :

$$x_p = \frac{2}{3} L \quad (4.3)$$

Para el cálculo de la reacción se puede trabajar con la resultante de la carga distribuida

Para el cálculo de la reacción se puede trabajar con la resultante de la carga distribuida.

$$\sum MA: P \frac{2}{3}L - R_B L = 0 \quad R_B = \frac{q}{3}L$$

$$\sum MB: P \frac{2}{3}L - R_A L = 0 \quad R_A = \frac{q}{6}L$$

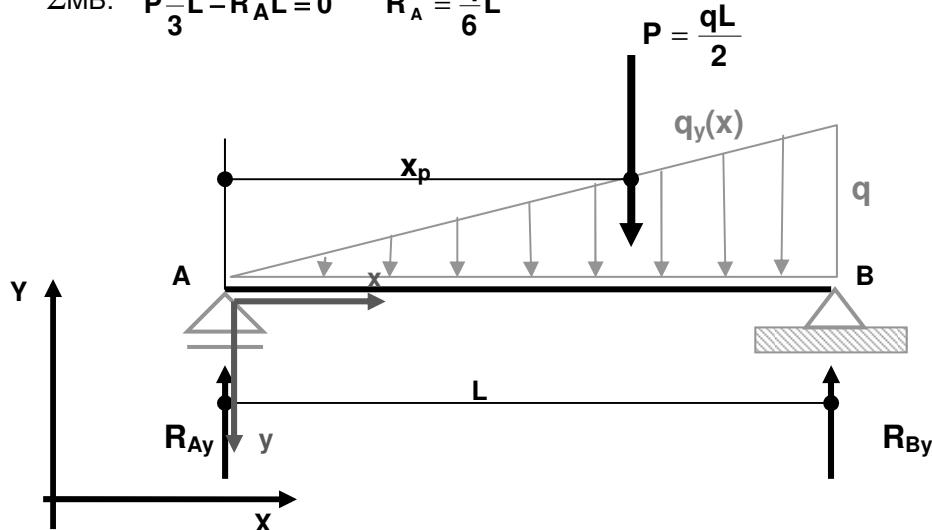


FIG. 65

Paso 2: Esfuerzos característicos:

Esquema de análisis - terna local (FIG 66):

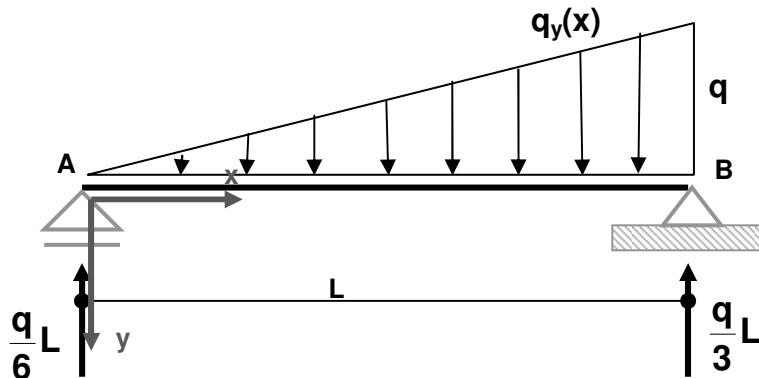


FIG. 66

Información previa para el trazado:

- Como no hay cargas axiales aplicadas y las reacciones según x local son nulas $N=0$
- La carga repartida $q_y(x)$ tiene variación lineal por lo tanto el corte Q_y será cuadrático.
- $Q_{yA}=+qL/6$ y $Q_{yB}=-qL/3$
- Como $q_y(x)=0$ en $x=0$ la pendiente del diagrama de corte es nula en A y máxima en B por la misma razón. Además como $q_y(x)$ no cambia de signo la pendiente de Q_y tampoco.
- El diagrama de momento M_z será cúbico siendo los momentos extremos 0.
- **Para el trazado debe cortarse la estructura en una sección genérica a distancia x y trasladar las fuerzas de la parte suprimida a la sección en estudio tal la metodología general propuesta, o integrando las ecuaciones diferenciales:**

Esfuerzo de corte:

$$\frac{dQ_y}{dx} = -q(x)$$

$$Q_y(x) = \int_0^x -q(x)dx = \int_0^L -\frac{q}{L}xdx$$

$$Q_y(x) = Q_y(0) - \frac{q}{L} \frac{x^2}{2} \quad \text{con } Q(0) = +qL/6$$

$$Q_y(x) = q \frac{L}{6} - \frac{q}{L} \frac{x^2}{2} \quad (4.4)$$

Momento flector:

$$\frac{dM_z}{dx} = Q_y$$

$$M_z = \int_0^x Q_y dx = \int_0^x \left(q \frac{L}{6} - \frac{qx^2}{2L}\right) dx$$

$$M_z = \frac{qL}{6}x - \frac{q}{2L} \frac{x^3}{3} - M_z(0) \quad \text{con } M_z(0) = 0$$

$$M_z = \frac{qL}{6}x - \frac{qx^3}{6L} \quad (4.5)$$

Las ecuaciones (4.5) y (4.6) describen los esfuerzos característicos a lo largo de la barra AB, teniendo en cuenta además que el esfuerzo axil es nulo a lo largo de toda la barra.

El momento máximo se obtiene para la distancia x en la que se anula el esfuerzo de corte, por lo tanto igualando a 0 la ecuación (4.5) se obtiene x_{\max} :

$$x_{\max} = \frac{L}{\sqrt{3}} \approx 0.58L$$

$$M_{zmáx} = \frac{qL}{6} \frac{L}{\sqrt{3}} - \frac{q}{6L} \frac{L^3}{(\sqrt{3})^3} \quad y \quad M_{zmáx} = \frac{qL}{9\sqrt{3}}$$

Diagramas (FIG 67)

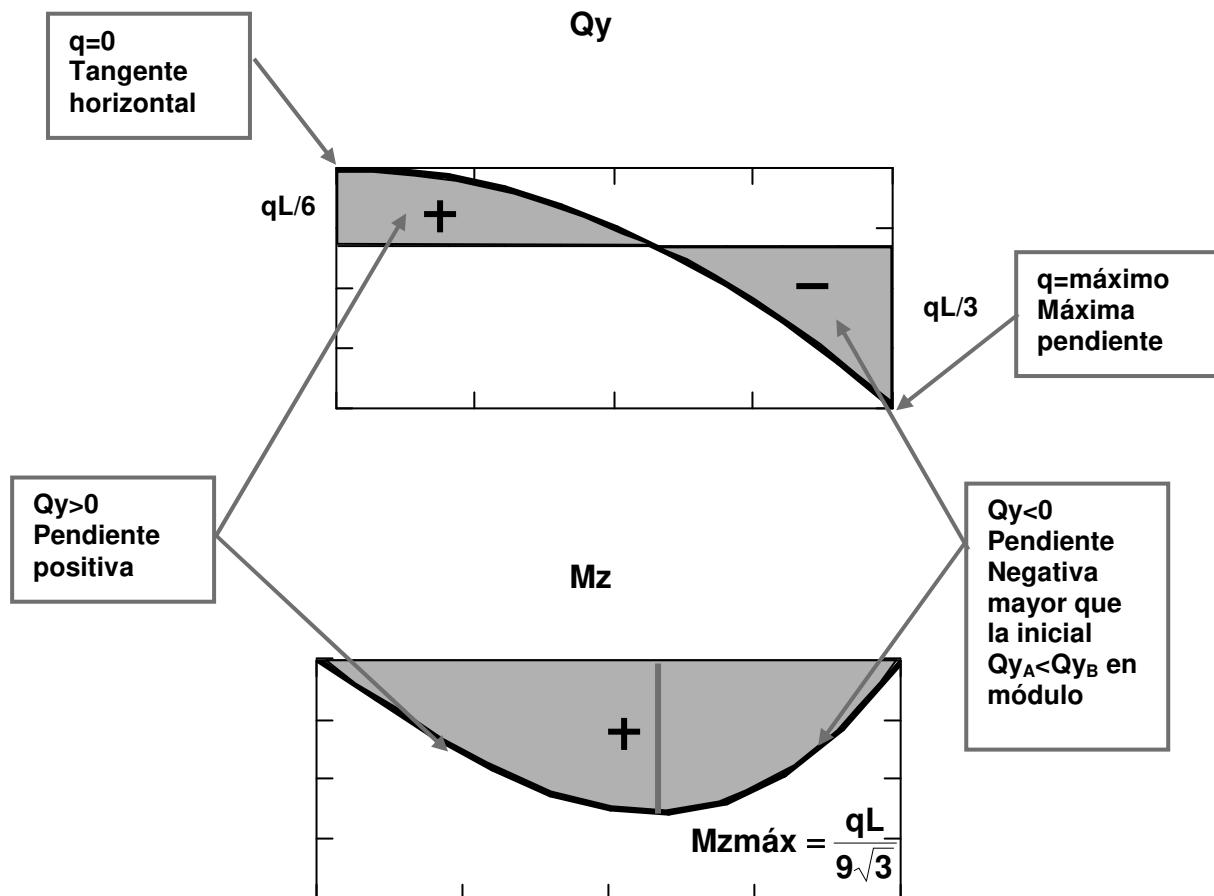


FIG. 67

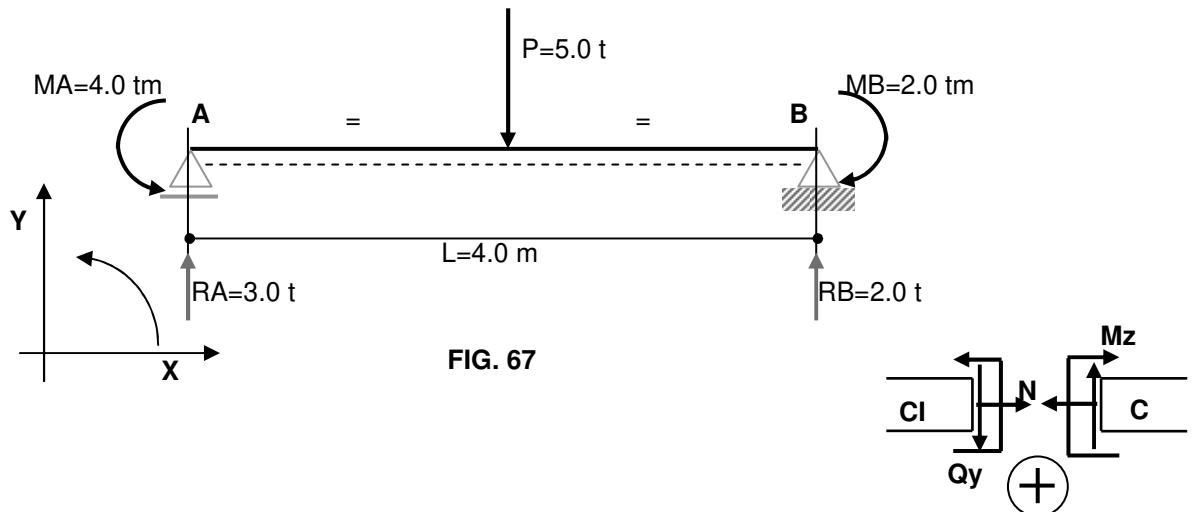
Observaciones:

Cómo la carga repartida tiene variación lineal, el esfuerzo de corte Q_y tiene variación cuadrática, tomando una pendiente horizontal en el extremo A donde $q=0$ y crece hasta un valor máximo en el extremo B. Dado el signo de la carga q , que es coincidente con el valor positivo utilizado para la deducción de la ecuación $dQ/dx=-q$, la pendiente del diagrama es cada vez más negativa.

El diagrama de momento flector M_z tiene variación cúbica, arrancando con pendiente positiva y pasando por su máximo valor donde el corte Q_y se anula, y luego decrece hasta 0 en el apoyo B.

Ejemplo 4.7: Ejemplo numérico

Ejemplo numérico: viga simplemente apoyada con las cargas y apoyos que se indican en la FIG 67



Paso 1: Cálculo de las reacciones:

$$\sum M_A : -5.0 \times 2.0 + 4.0 - 2.0 + R_B \times 4.0 = 0 \quad R_B = 2.0 \text{ tn}$$

$$\sum M_B : +5.0 \times 2.0 + 4.0 - 2.0 - R_A \times 4.0 = 0 \quad R_A = 3.0 \text{ tn}$$

Paso 2: Cálculo de los esfuerzos característicos:

Esquema de análisis - terna local (FIG 68):

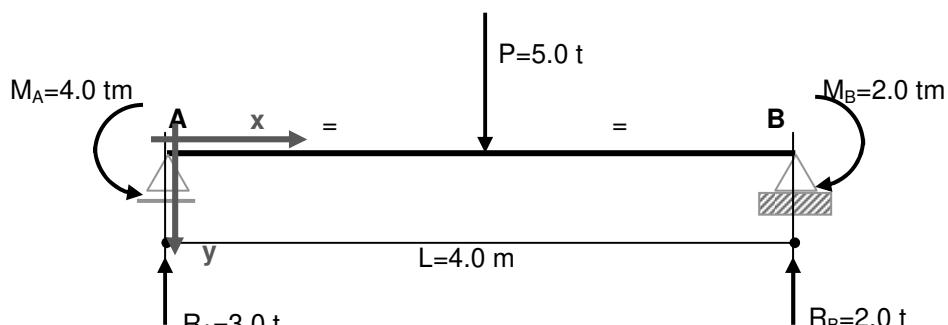


FIG. 68

Información previa para el trazado:

- El esfuerzo axil es nulo en todo el tramo AB.
- Como no hay carga repartida q_y el esfuerzo de corte es constante con un discontinuidad en el valor de la constante en el punto de aplicación de la carga de 5.0 t.
- Entre A y el punto de aplicación de la carga $P=5.0 \text{ t}$ $Q_y = +5.0 \text{ tn}$
- Siguiendo el avance en dirección A-B reduciendo las fuerzas a una sección ubicada un infinitésimo después del punto de aplicación de la carga, el corte toma el valor $R_A - P = 3.0 - 5.0 = -2.0 \text{ t}$ (FIG 69)

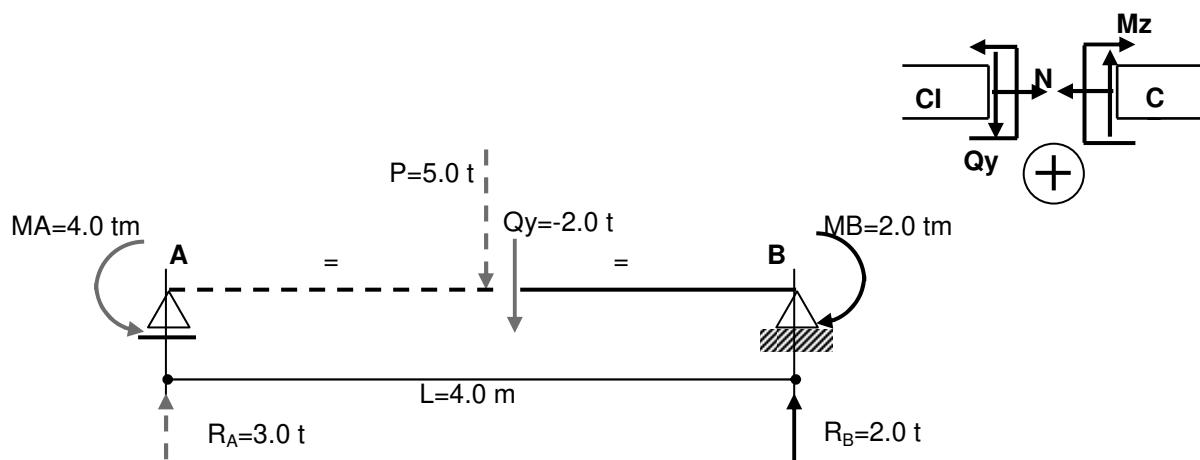


FIG. 69

- Como el corte Q_y es constante de a tramos el momento fletor M_z será lineal con quiebre de pendiente donde se produce el salto del corte, es decir en el punto de aplicación de $P= 5.0 \text{ t}$. Por lo tanto como se conoce el valor de M_z en A y B respectivamente sólo hay que calcular M_z en el punto de aplicación de P.

$$M_{zA} = -4.0 \text{ tm}$$

$$M_{zB} = -2.0 \text{ tm}$$

$M_{zP} = -4.0 \text{ tm} + R_A x 2.0 \text{ m} = 2.0 \text{ tm}$ con sentido positivo según convención (FIG 70)

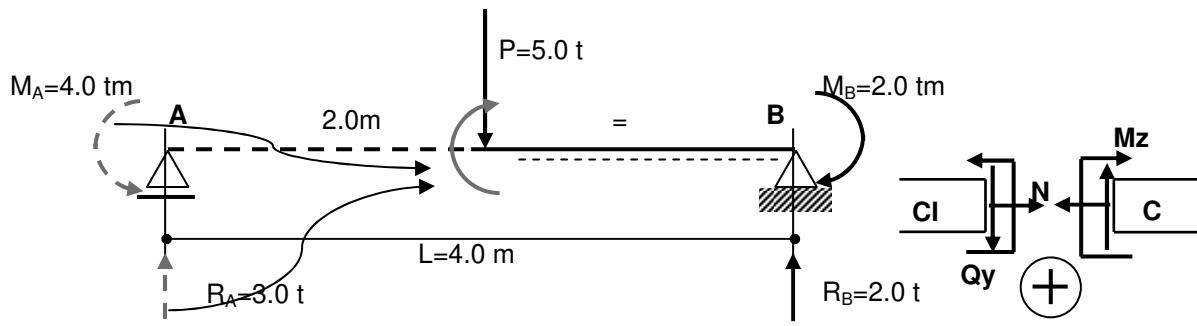


FIG. 70

Diagramas (FIG 71)

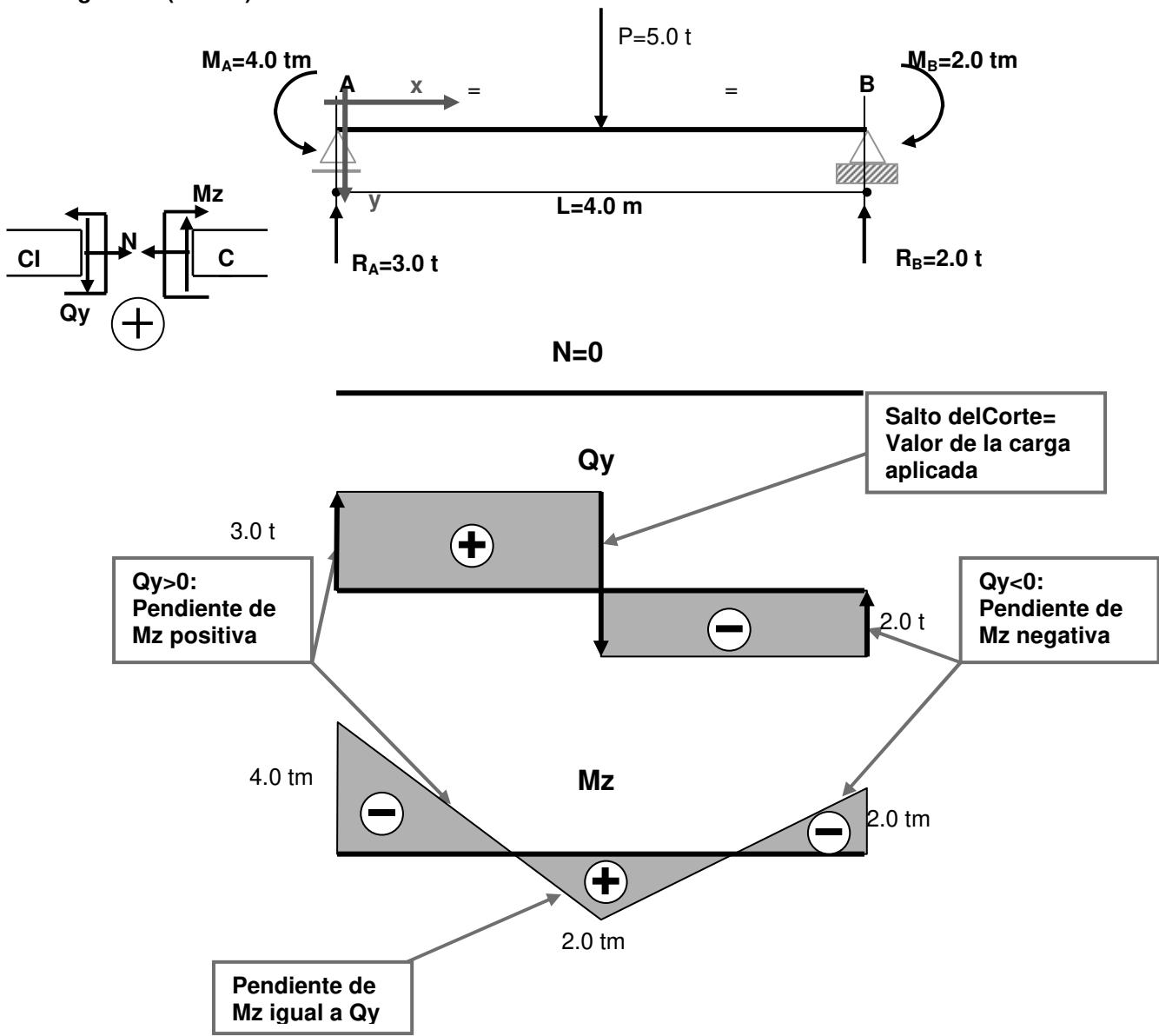


FIG. 71

Ejemplo 4.8: Eje de la barra inclinado respecto a las cargas

Calcular los esfuerzos de la viga inclinada de la FIG 72 en la cual actúa una carga concentrada P en la mitad de su vano.

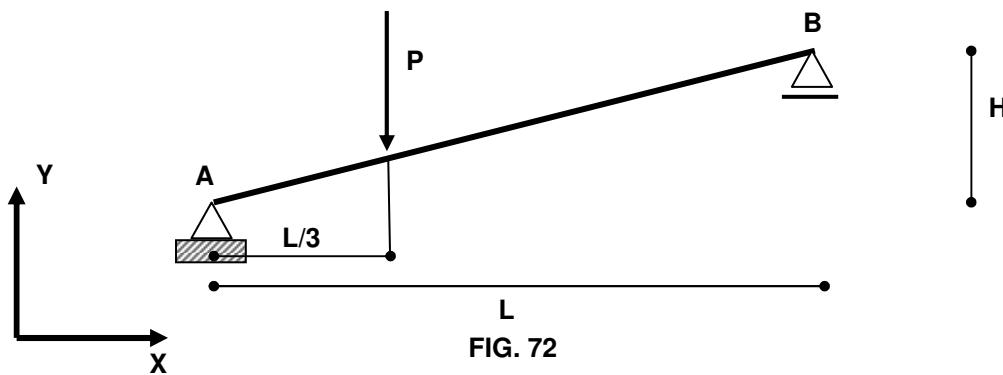


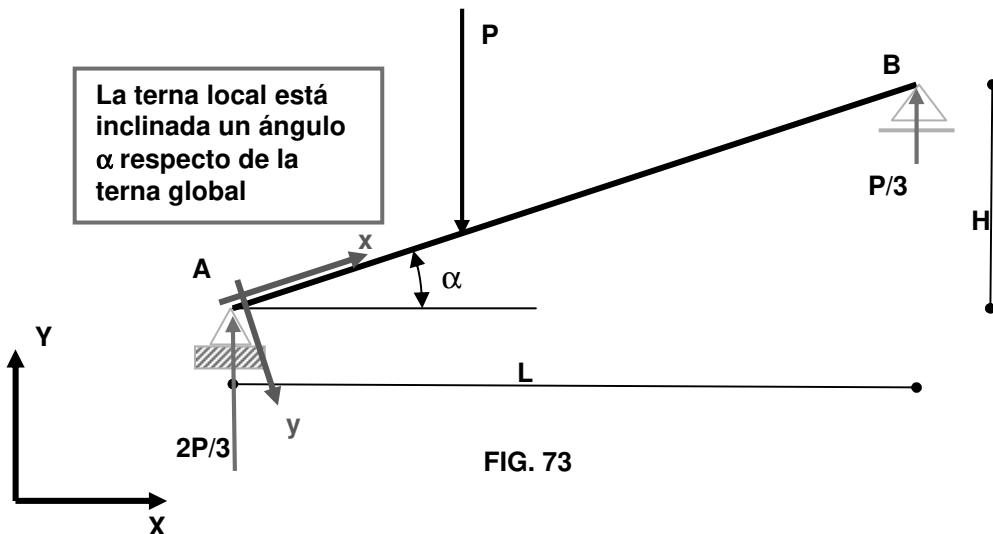
FIG. 72

Paso 1: Cálculo de las reacciones:

$$R_{AY}=R_B=P/2 \quad (\text{referidas a la terna global X-Y})$$

Paso 2: Cálculo de los esfuerzos característicos:

Esquema de análisis - terna local (FIG 73):



Información previa para el trazado:

- Como no hay cargas distribuidas transversales y longitudinales, tanto el esfuerzo axil N y el corte Qy son constantes con discontinuidades en los puntos de aplicación de carga.
- Para conocer el axil y el corte en la sección A hay que descomponer la reacción 2P/3 según los ejes x e y locales. Lo mismo respecto de la P para calcular el salto del esfuerzo en L/3 (FIG74 75)

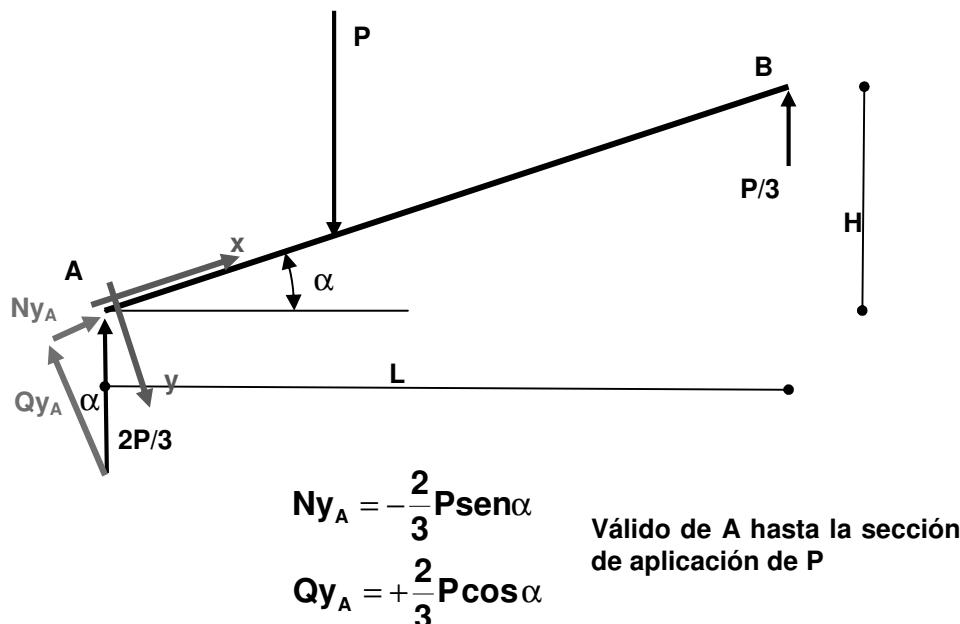
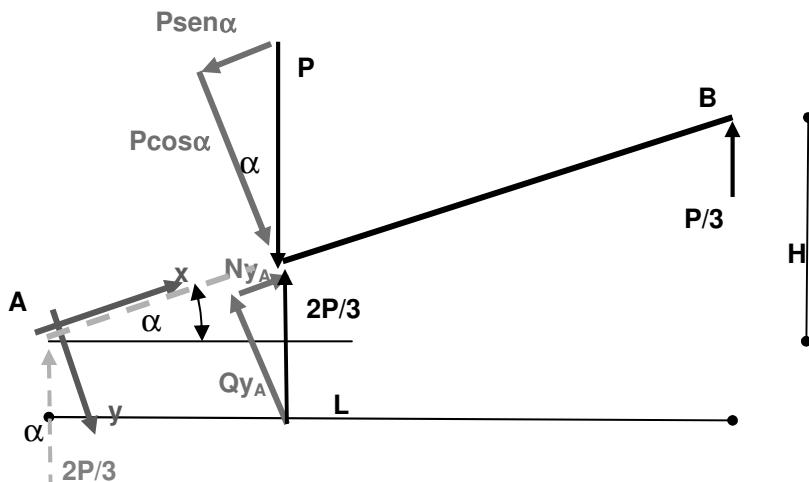


FIG. 74



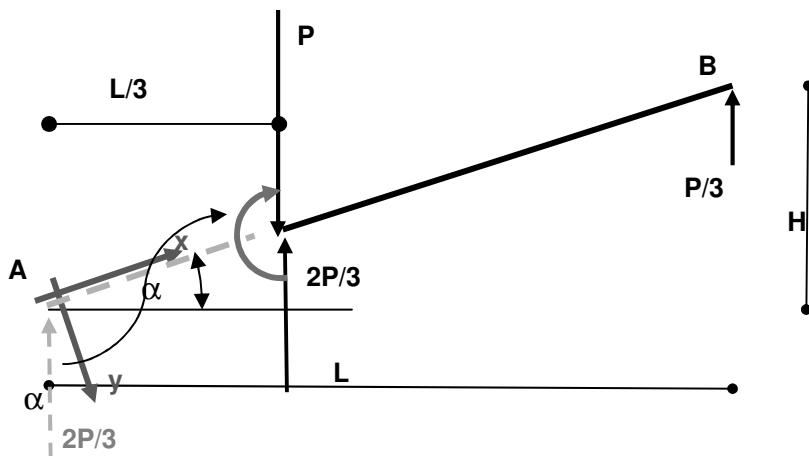
$$N_y_P = -\frac{2}{3}P \operatorname{sen} \alpha + P \operatorname{sen} \alpha = +P \operatorname{sen} \alpha$$

Válido de P hasta la sección de aplicación de B

$$Q_y_A = +\frac{2}{3}P \cos \alpha - P \cos \alpha = -P \cos \alpha$$

FIG. 75

- Entre A y P el corte es positivo, y entra P y B es negativo
- $Mz_A = Mz_B = 0$
- La pendiente entre A y P es positiva y entre P y B es negativa
- Sólo hay que calcular Mz en P (FIG 75)



$$Mz_P = +\frac{2}{3}P \frac{L}{3} = +\frac{2}{9}PL$$

Momento Máximo de Tramo

FIG. 76

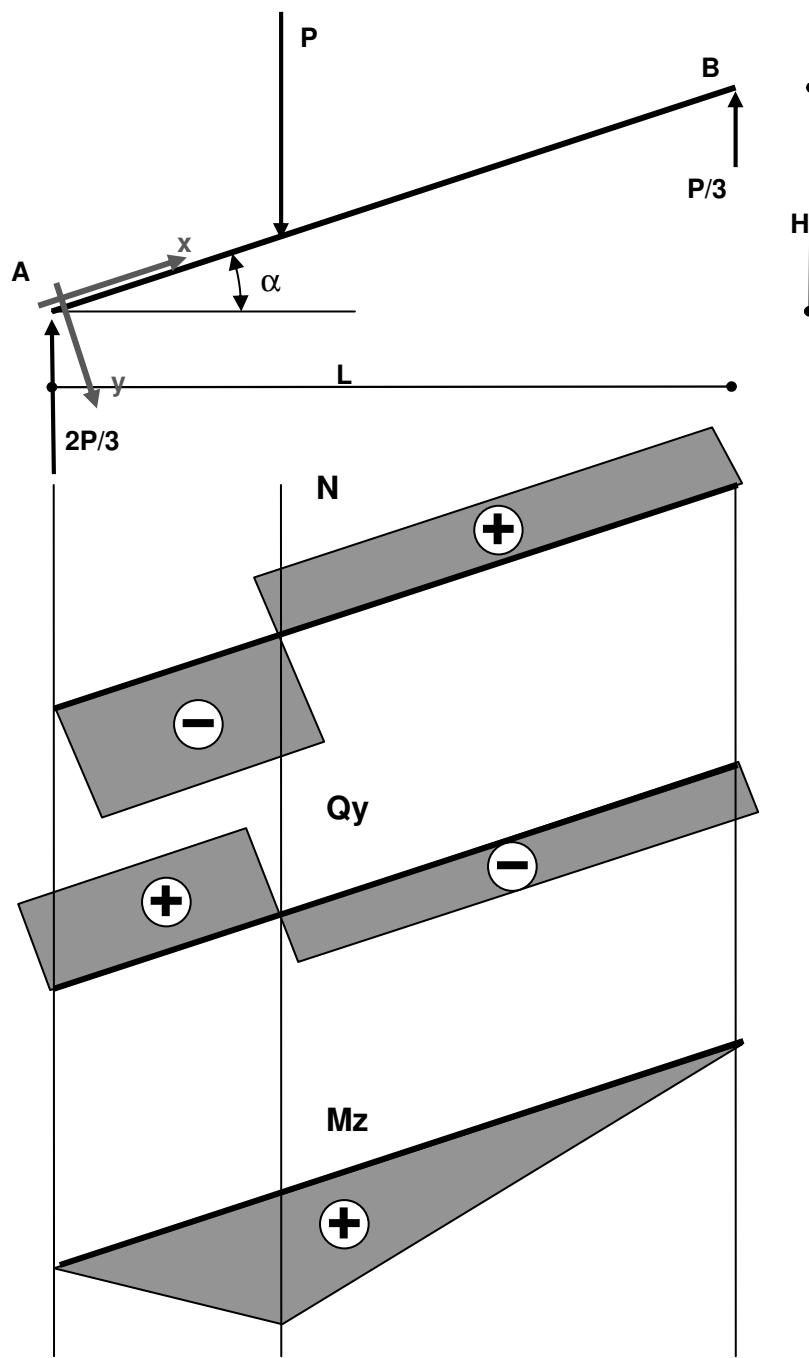


FIG. 77

5 . ESTRUCTURAS DE TRAMO QUEBRADO

En los ejemplos desarrollados se ha visto para estructuras de barras de un solo tramo, como trazar los diagramas de esfuerzos característicos sin necesidad de encontrar la ley de variación, con ayuda de la información que dan las ecuaciones diferenciales que relacionan los esfuerzos con las cargas exteriores y entre sí, y conociendo los esfuerzos en los extremos de la barra. En este punto se analizará la metodología a emplear para el trazado de los diagramas de esfuerzos característicos para el caso de estructuras compuestas por más de una barra.

Ejemplo 5.1:

Determinar los esfuerzos característicos en el esquema estructural de la FIG 78

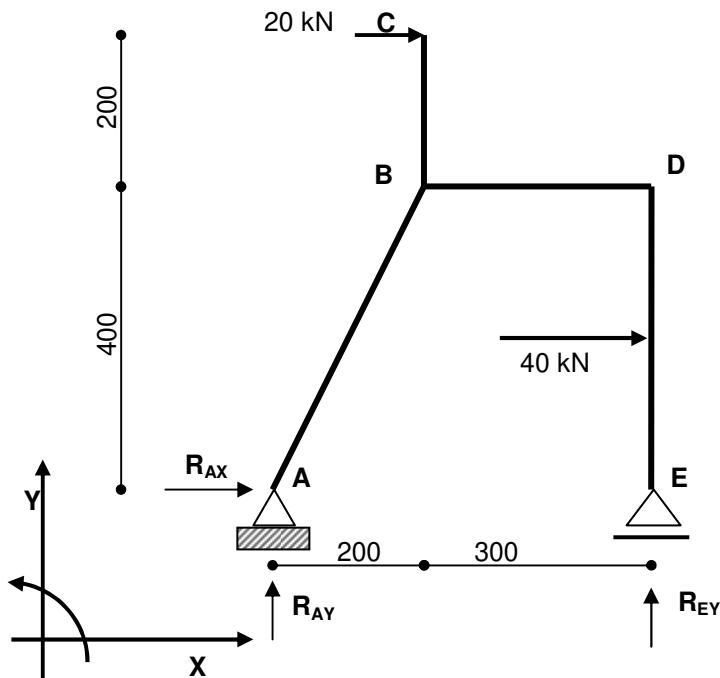


FIG. 78

Paso 1: Cálculo de reacciones

Asumiendo sentido positivo de las reacciones y **utilizando la terna global** de la figura:

$$\begin{aligned}\Sigma F_x: \quad & R_{Ax} + 40.0 + 20.0 = 0 \\ \Sigma F_y: \quad & R_{Ay} + R_E = 0 \\ \Sigma M_A: \quad & 500 \times R_E - 20.0 \times 600 - 40.0 \times 200 = 0 \\ R_{Ax} = -60.0 \quad & R_{Ay} = -40.0 \quad R_E = 40.0\end{aligned}$$

Paso 2: Cálculo de los esfuerzos característicos:

2.1. Esquema estructural – Ternas locales (FIG 79):

- En cada barra de la estructura se elige la **terna local** respectiva con las pautas que se describen en los puntos 2.1 a 2.3 que se sintetizan a continuación:
 - o Se observa la estructura desde abajo, desde la derecha y desde adelante
 - o En cada barra se elige como nodo origen el baricentro de la sección extrema izquierda, y como nodo destino el baricentro de la sección extrema derecha
 - o Se establece la terna local derecha de la siguiente manera:
 - Eje x longitudinal desde nodo origen a nodo destino.
 - Eje y: eje de menor inercia dirigido al observador.
 - Eje z: eje de mayor inercia tal que sea terna derecha.
 - o La terna así referida sirve a la convención de signos de las hojas 15 y 23 que se reproduce en la FIG 75 orientada con cargas en el plano x-y local

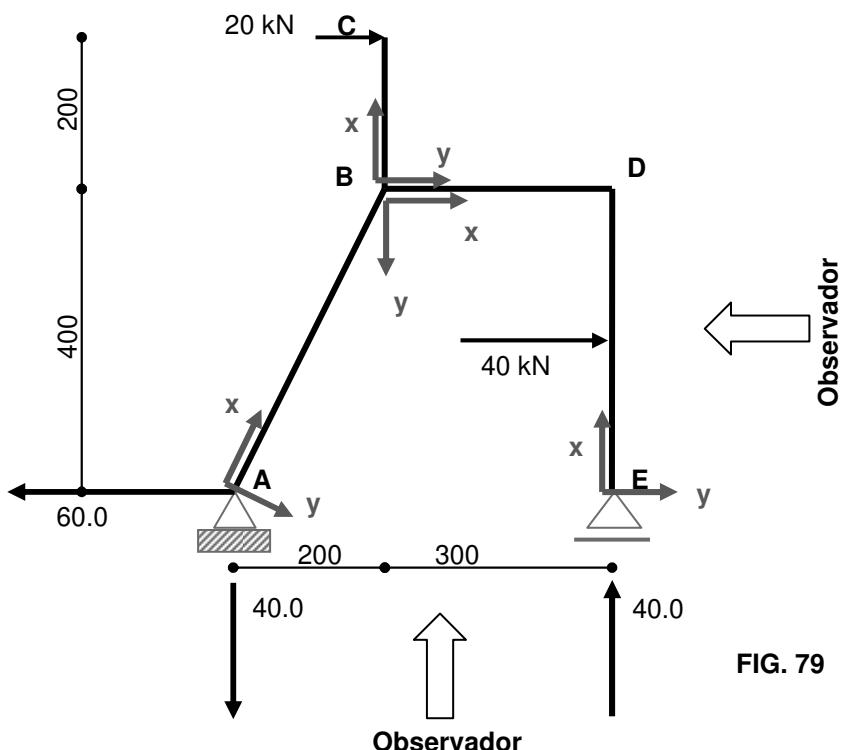


FIG. 79

2.2. Convención de signos (FIG 80):

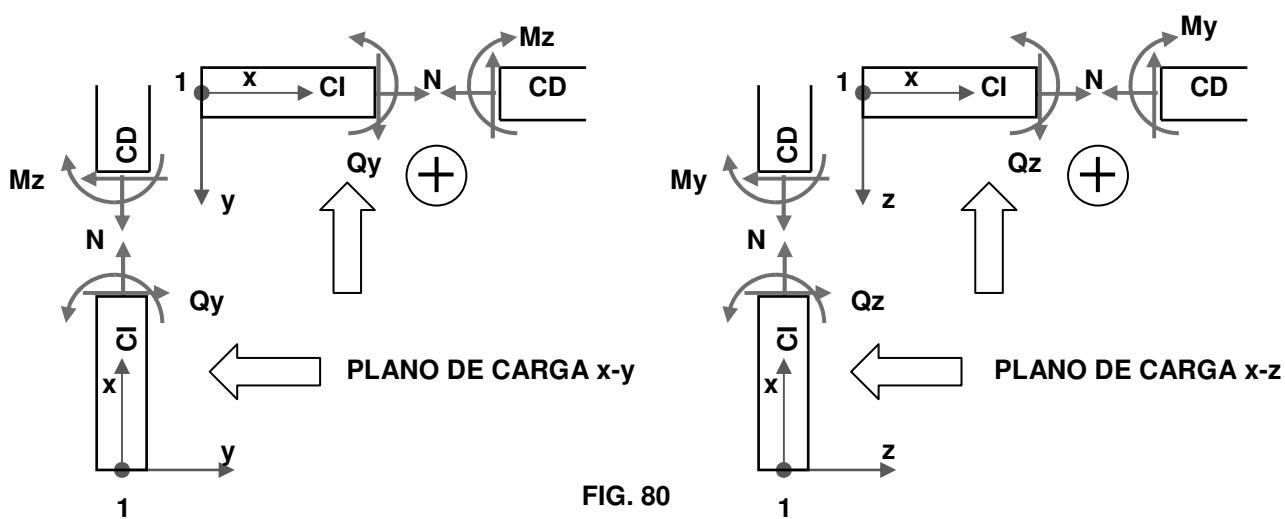


FIG. 80

2.3. Diagramas de esfuerzos

Las ecuaciones que vinculan los esfuerzos característicos con las cargas exteriores y los esfuerzos entre sí se reproducen a continuación para casos de carga en el plano x-y o x-z:

PLANO x-y LOCAL	$\frac{dN}{dx} = -q_x \quad (1)$	$\frac{dQy}{dx} = -q_y \quad (2)$	$\frac{dMz}{dx} = Qy \quad (3)$
PLANO x-z LOCAL	$\frac{dN}{dx} = -q_x \quad (1)$	$\frac{dQz}{dx} = -q_z \quad (5)$	$\frac{dMy}{dx} = Qz \quad (6)$

- Aplicando en cada barra las ecuaciones (1) y (2) o (1) y (5) se puede intuir la forma de los diagramas de N, Qy o Qz según el plano de cargas observando las cargas que actúan sobre la misma. Las ecuaciones (3) y (6) permiten intuir el diagrama de momento flector Mz o My conocido el diagrama de corte Qy o Qz respectivamente.

- En general debe tenerse en cuenta que:

- o Si en las barras no hay cargas qx repartidas el esfuerzo axil será constante, y la función tendrá discontinuidades en correspondencia de cargas exteriores con componente axil, por lo tanto para determinar el N en cada barra sólo hay que calcularlo al inicio de la barra y en correspondencia de las cargas aplicadas
- o Si en las barras no hay cargas repartidas transversales qy o qz, los esfuerzos de corte Qy o Qz serán constantes con discontinuidades en correspondencia de las cargas transversales exteriores aplicadas. Por lo tanto sólo bastará calcular el corte en los extremos y en las secciones de aplicación de las cargas.
- o Conocido el diagrama de corte Qy o Qz, se puede intuir la forma del diagrama de momento Mz o My. En general se puede determinar el diagrama calculando los momentos en los extremos de barras y en las secciones donde hay discontinuidades en el corte (secciones de aplicación de cargas exteriores) porque en esas secciones están los cambios de pendiente del corte.
- o En el caso de cargas transversales distribuidas, para determinar el diagrama de momentos se necesita calcularlos en los extremos de barras y en la sección del tramo donde el momento flector Mz o My sea máximo, o sea donde Qy o Qz se anule.

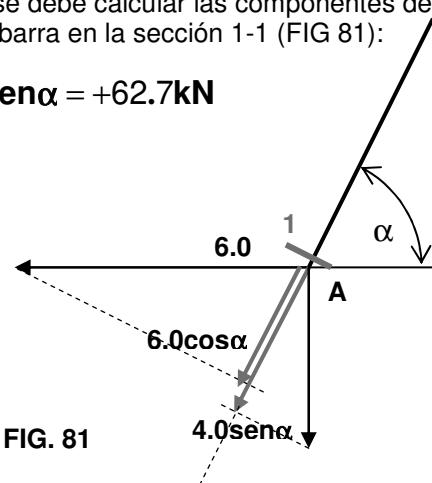
- Aplicación al ejemplo:

Pautas para el Esfuerzo axil N:

Barra AB:

- N es constante en toda la barra
- Como la barra es inclinada se debe calcular las componentes de la reacción en A en la dirección del eje de la barra en la sección 1-1 (FIG 81):

$$N_A = 60.0 \cos \alpha + 40.0 \operatorname{sen} \alpha = +62.7 \text{kN}$$



Barra BC:

- $N_c=0$ constante en toda la barra

Barra BD:

- N es constante en toda la barra por lo tanto sólo basta determinar N en la sección 2-2 ubicada en la barra BD sobre el nudo B, suprimiendo la estructura a izquierda y trasladando a las fuerzas de la parte suprimida a esa sección (FIG 82)

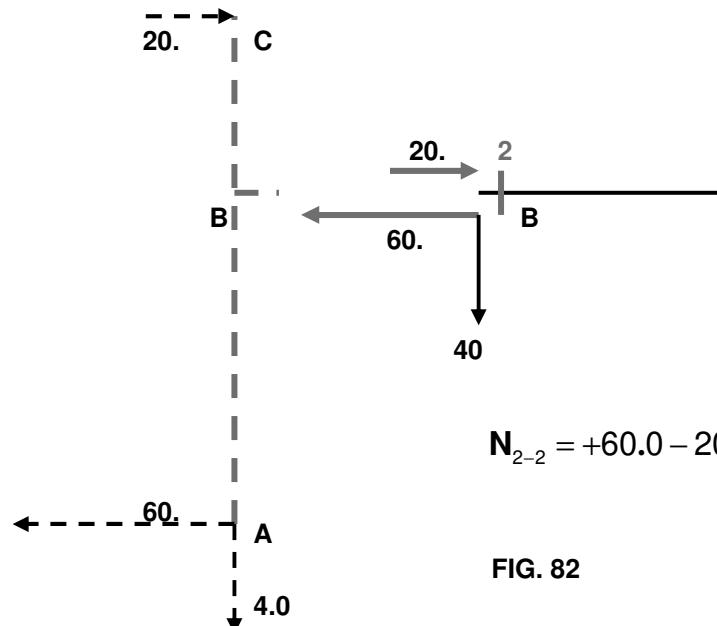


FIG. 82

Barra ED:

- N es constante en toda la barra porque la Fuerza aplicada en el tramo es transversal.
- $N_E=-40 \text{ kN}$

Diagrama de Axil N Resultante (FIG 83):

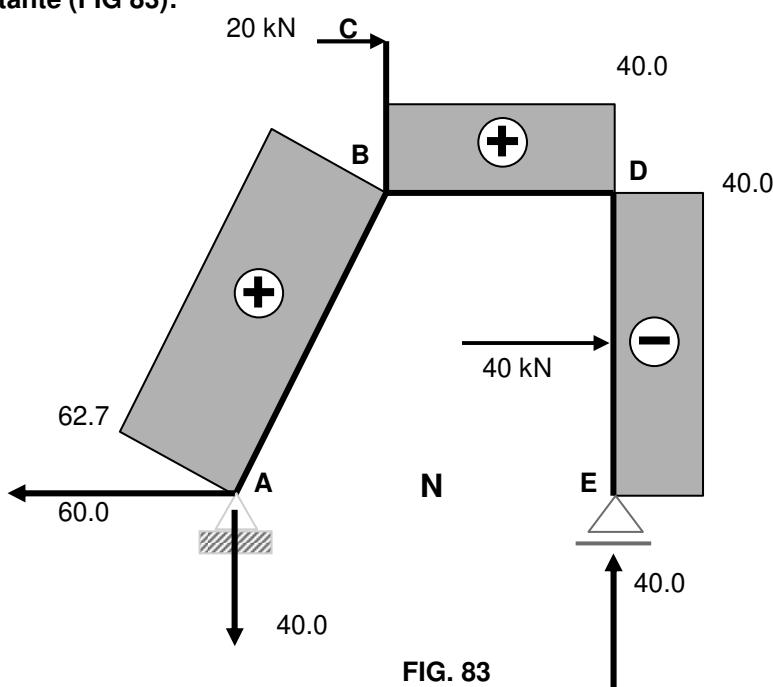


FIG. 83

Pautas para trazar el diagrama de Qy:

Barra AB:

- La carga distribuida qy es nula y no hay carga en el tramo, por lo tanto Qy es constante en toda la barra.
- Basta calcular Qy en la sección 1-1 (FIG 84)

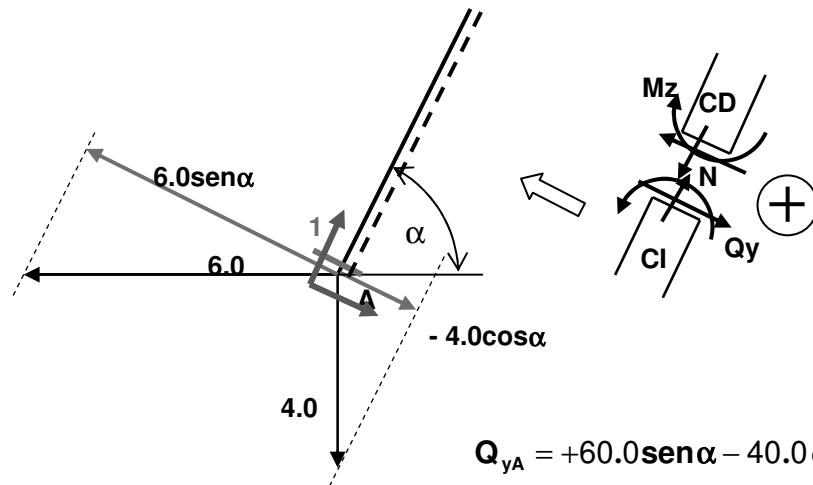


FIG. 55

FIG. 84

Barra BC:

- Qy es constante en toda la barra
- **Qyc=+20 kN** (es una cara izquierda para la barra BC) (FIG 85)

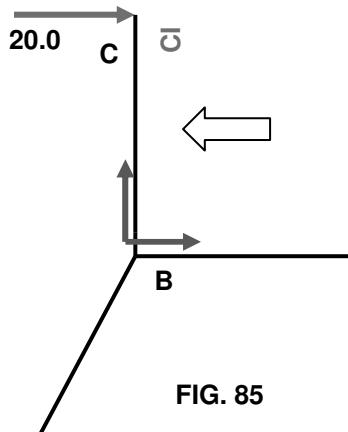


FIG. 85

Barra BD:

- Qy es constante en toda la barra
- Se debe calcular en la sección 2-2 de la misma manera que el axil (FIG 86)
- **Qy=-40 kN**

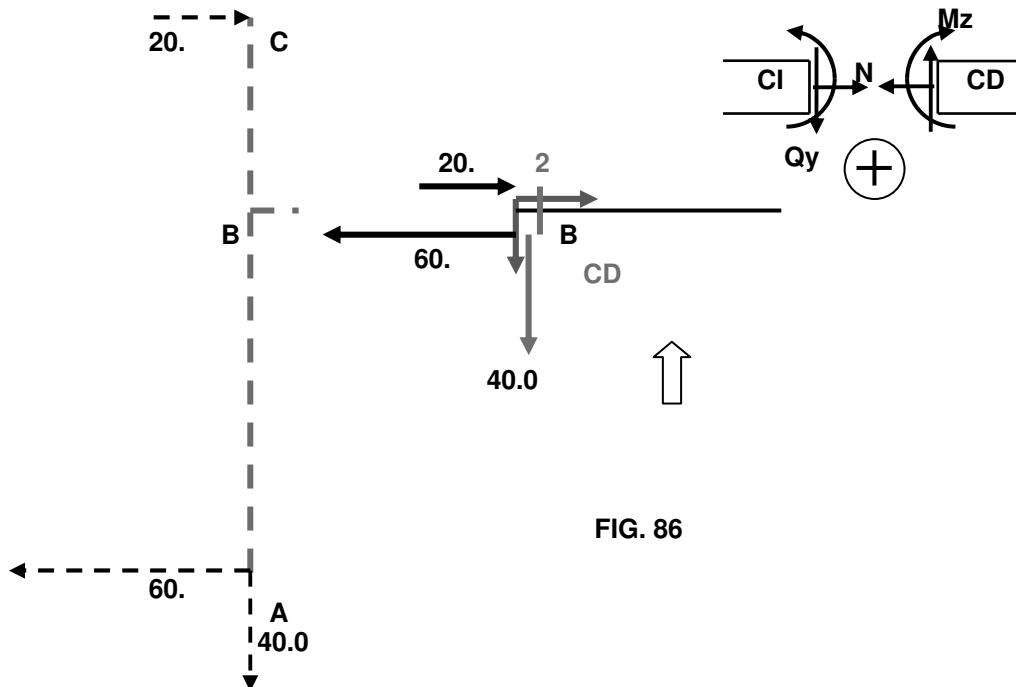


FIG. 86

Barra ED:

- El corte es constante de a tramos porque la carga transversal introduce una discontinuidad.
- Se debe calcular el corte en dos secciones: En 4-4: $Q_{yE}=0$, y en la sección 5-5 $Q_{y5-5}=-40 \text{ kN}$ (es Cara derecha para la barra ED)(FIG 87).

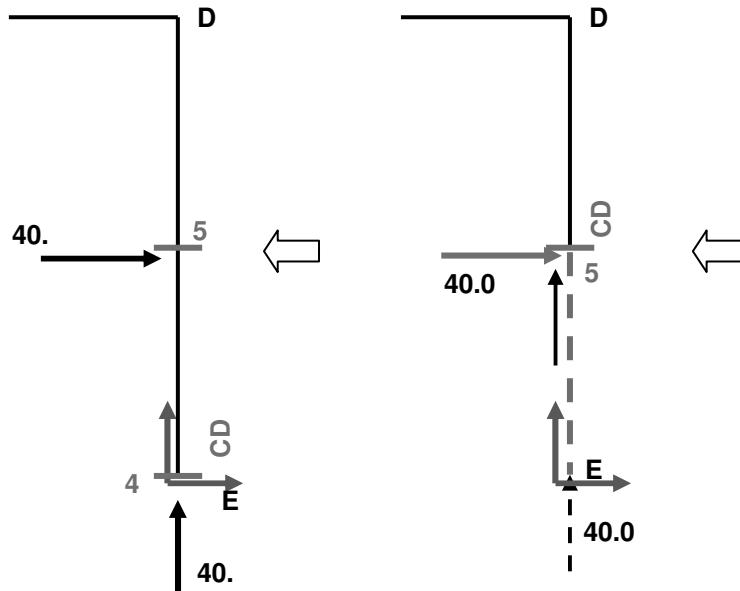


FIG. 87

**Diagrama de Corte Qy
Resultante (FIG 88):**

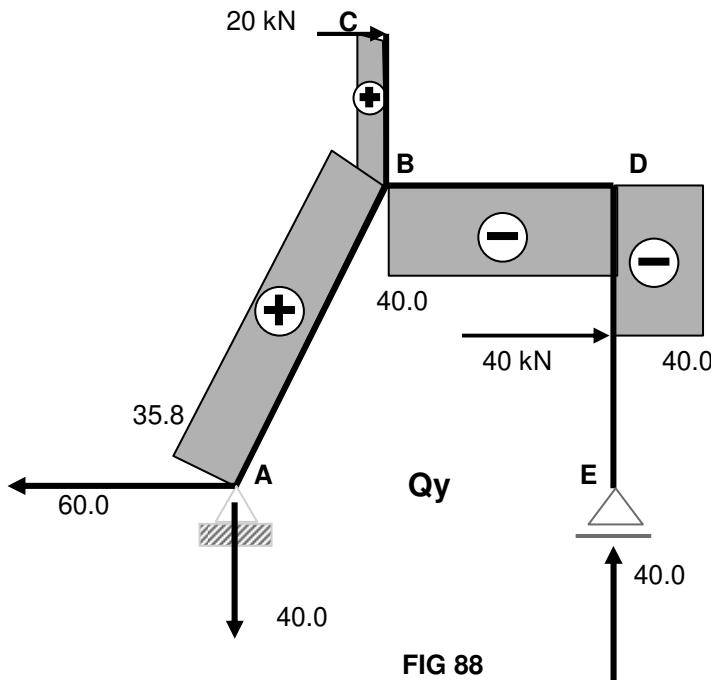


FIG 88

Pautas para trazar el diagrama de Mz:

Barra AB (FIG 89):

- Qy constante positivo, entonces Mz es lineal y pend. positiva, como no hay momento exterior aplicado, no hay salto del diagrama. Se necesitan conocer los valores en los extremos de barra
- Sección 1-1 $Mz_A=0$
- Extremo B de la barra AB Sección 6-6 $Mz_{6-6} = -40 \times 200 + 60 \times 400 = +16000$
- La longitud AB es 447.20, la pendiente es $16000/447.2 = 35.8$ igual a Qy

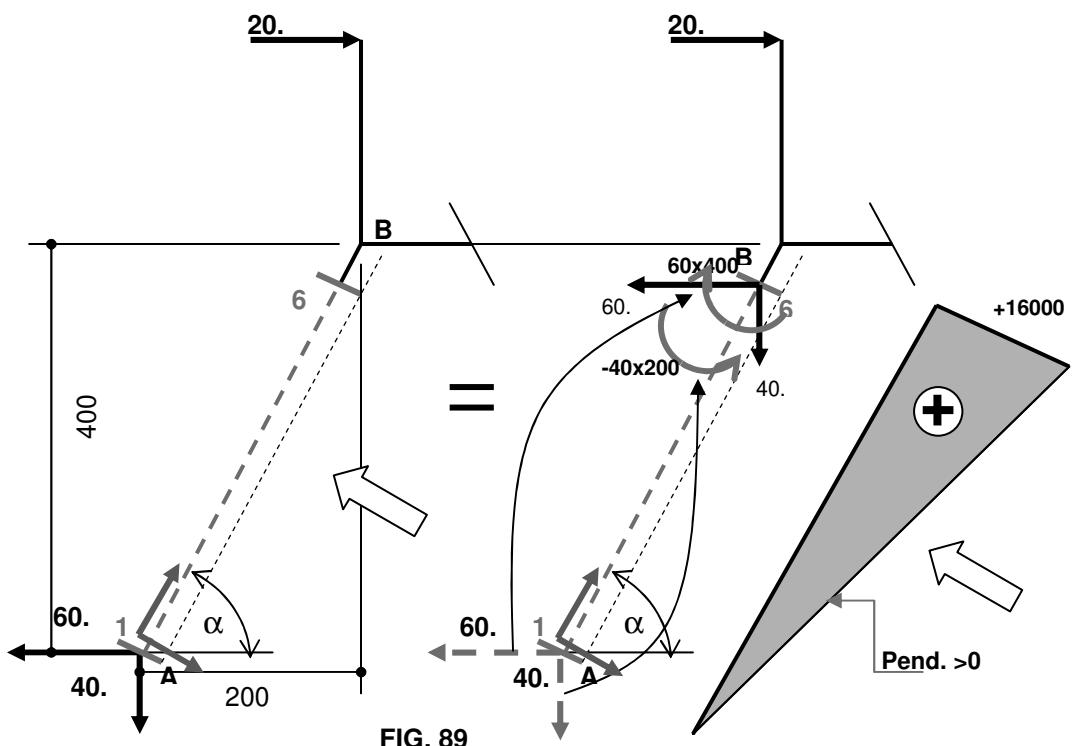


FIG. 89

Barra BC (FIG 90):

- Qy es constante positivo, entonces Mz es lineal con pend. positiva. Se necesitan conocer los valores en los extremos de barra.
- Extremo C $Mz_C=0$
- Extremo B de la barra BC Sección 3-3 $Mz_{3-3} = -20 \times 200 = -4000$

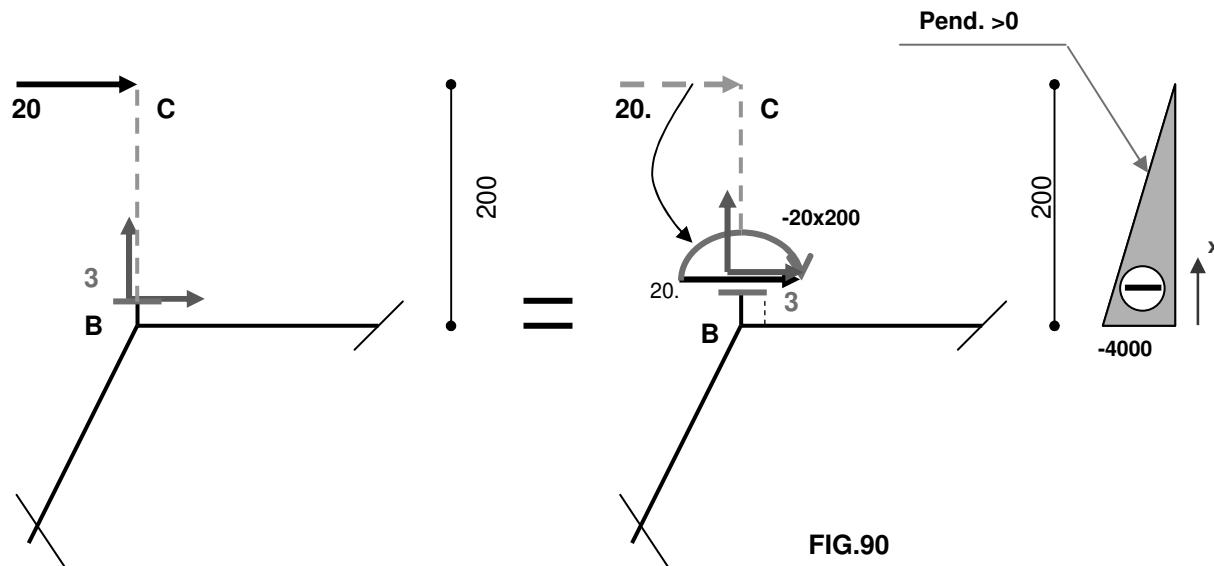


FIG.90

Barra BD ():

- Qy es constante positivo, entonces Mz es lineal con pend. positiva. Se necesitan conocer los valores en los extremos de barra.
- Extremo B de la barra BD Sección 2-2 (FIG 91):
 $Mz_{2-2} = 20 \times 200 + 60 \times 400 - 40 \times 200 = +20000$

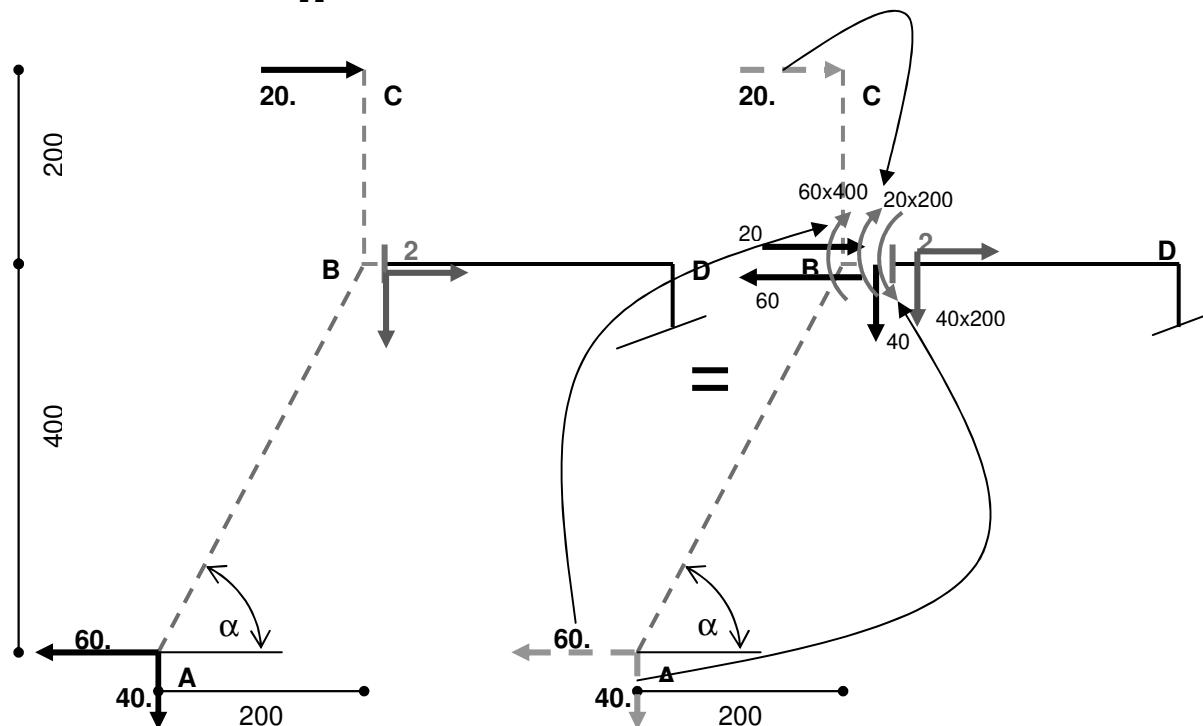


FIG. 91

- Extremo D barra BD Sección 7-7
 $Mz_{7-7} = 20 \times 200 + 60 \times 400 - 40 \times 500 = +8000$

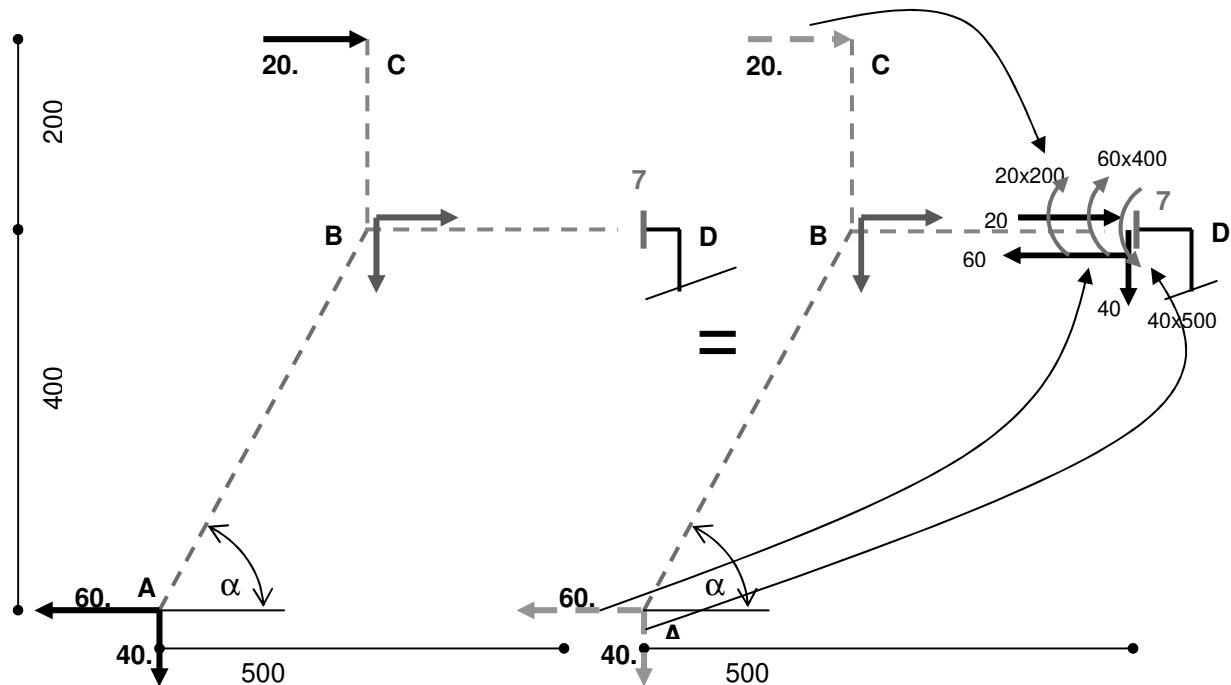


FIG. 92

- Diagrama de la barra (FIG 93):

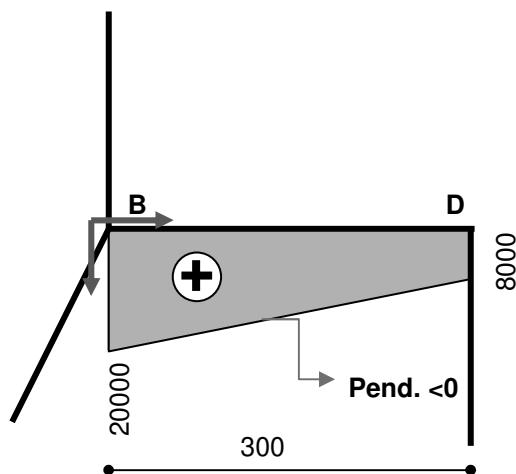


FIG. 93

Barra ED (FIG 94)

- El diagrama de corte tiene un salto por lo tanto el diagrama de momento tendrá un quiebre en la pendiente. Se necesitan tres secciones para determinar el mismo.
- Extremo E Sección 4-4 $Mz_E=0$
- Sección 5-5 $Mz_{5-5}=0$
- Extremo D barra ED Sección 8-8 $Mz_{8-8}=-40 \times 200 = -8000$

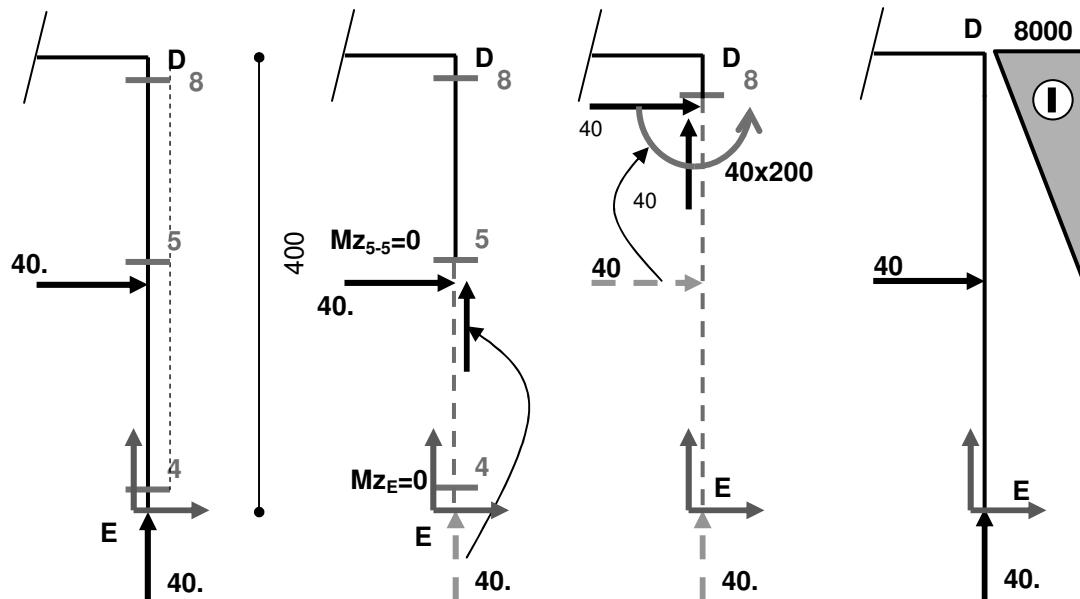


FIG. 94

Diagrama de Momento Mz resultante (FIG.95):

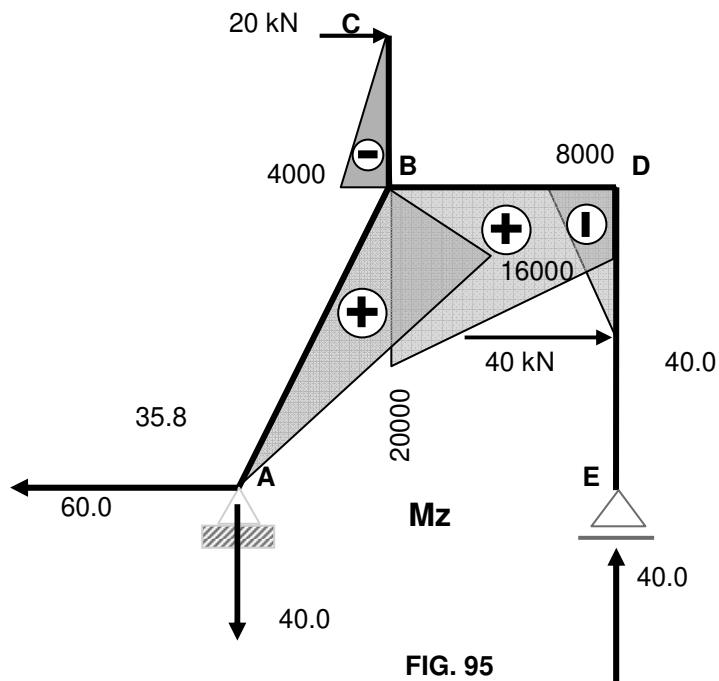
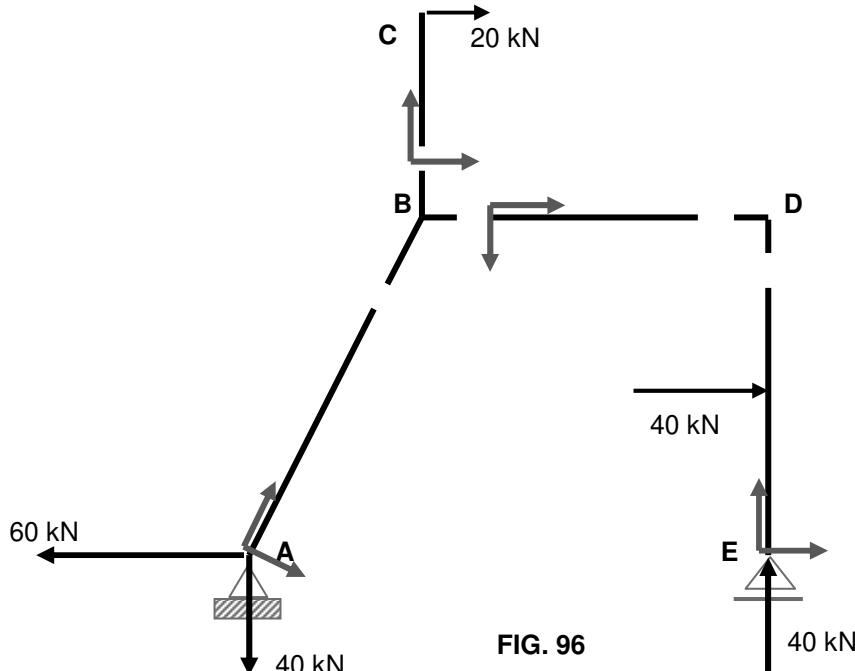


FIG. 95

2.4. Verificación: Equilibrio de nudos:

SI LA ESTRUCTURA EN SU CONJUNTO ESTA EN EQUILIBRIO ENTONCES UNA PARTE DE LA MISMA TAMBIEN LO ESTA.

- Se separa la estructura en extremos de barras y nudos FIG. 96



- En cada nudo se vuelcan los esfuerzos de los extremos de barra calculados, tomando en cuenta que por el principio de acción y reacción sobre el nudo tienen sentidos contrarios al que da el signo en el extremo de barra. Luego se plantea equilibrio según la terna global. En la FIG 97 se muestra el caso del nudo B.

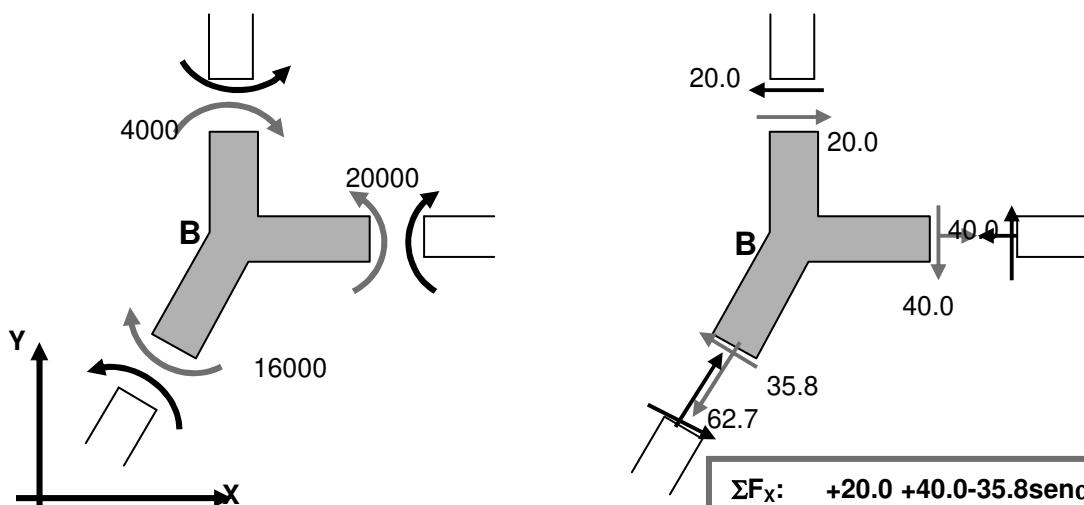


FIG. 97

I N G E N I E R I A
U N L P

ESTRUCTURAS IA

APUNTE DE CLASE

ESFUERZO AXIAL

(Publicación ampliada)

ING. ASDRÚBAL E. BOTTANI
2014

KOSICE, Gyula

Pintura Madera - 3, 1946

Técnica/ Material: Esmalte, Soporte: Tabla
64 x 39 cm Marco: 73 x 49 x 1,5 x 4 cm
Museo Nacional de Bellas Artes

SI NTESI S TEMATI CA DE LA UNI DAD I V

ESFUERZO AXI L

I NDI CE

1. Objetivo.....	2
2. Elemento estructural a analizar	5
3.- Hipótesis Fundamentales	6
4.- Desplazamiento y Deformación.....	7
5.- Estado tensional – Ley Tensión -Solicitud.....	9
6. Materiales	11
7. Verificaciones y/o dimensionado	14
8. Energía de deformación.....	17
9. Ejemplos.....	25

1. Objetivo

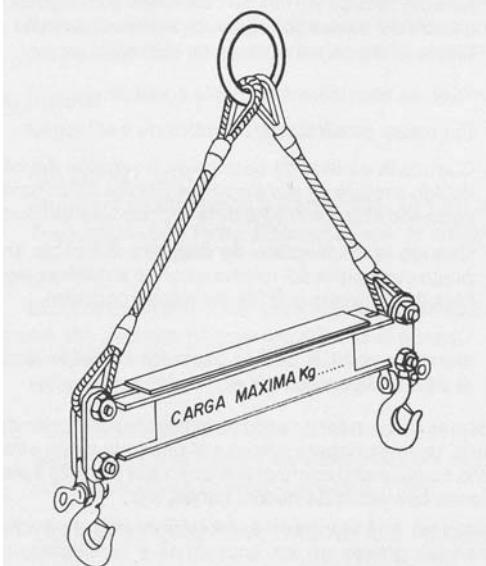
Analizar el comportamiento de estructuras cuyos elementos componentes están sometidos a esfuerzo axial puro., es decir todos los elementos componentes de la estructura son tipo barra y soportan esfuerzos que tienen la dirección del eje longitudinal del elemento y son coincidentes con el eje que une los baricentros de las secciones normales del elemento.



Criquet



Eslinga 1



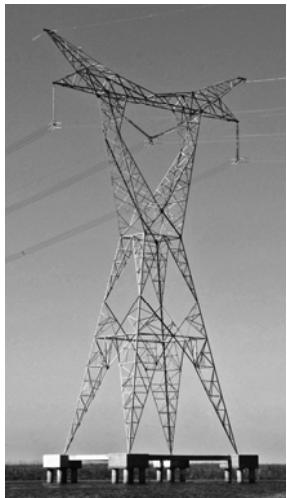
Eslinga 2



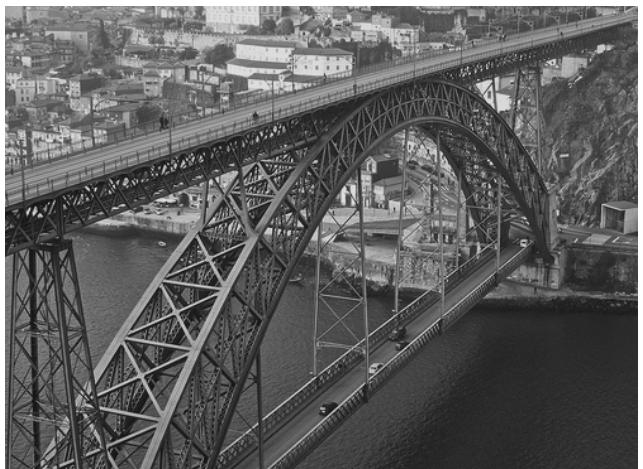
Eslinga 3



Puntal de ala



Torre de alta tensión - Reticulado



Puente en arco



Grúa Pórtico – Vigas Reticuladas



Grúa derrick – Tensores y Puntales

DOS NIVELES DE EVALUACION:

A) Estado Límite Ultimo:

- Los valores de las solicitudes alcanzadas en los diferentes elementos estructurales no deben poner en riesgo de colapso a la estructura ni parcial ni globalmente.

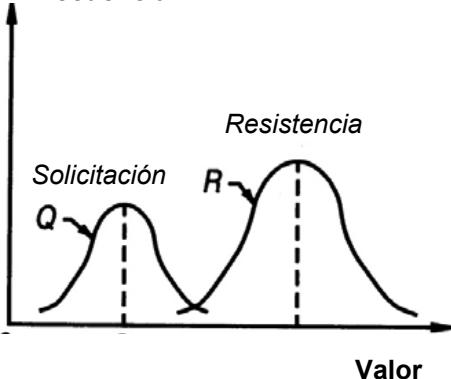
- Factor de seguridad FS: Contempla todas las incertidumbres presentes en el análisis:
 - Determinación de las cargas actuantes.
 - Métodos de cálculo.
 - Características resistentes del material.
 - Procesos de fabricación

- El FS establece la "distancia" entre la situación de colapso y el nivel de solicitudes esperado en la estructura.

- La distribución estadística de Resistencia y Solicitud tienen la forma de Gauss

- A mayores "incertidumbres" mayor será el FS adoptado

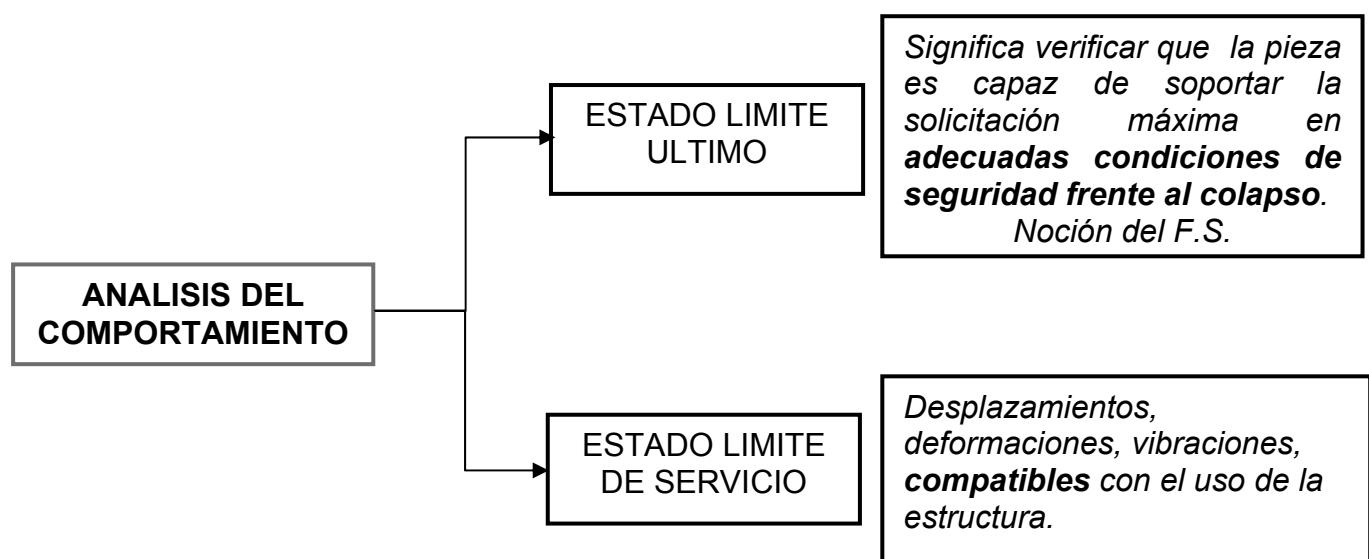
Frecuencia



$$Q \leq R / FS$$

B) Estado Límite de Servicio:

- Los desplazamientos de los nudos de la estructura, las deformaciones de los elementos componentes, las vibraciones, etc, se deben mantener dentro de los valores permisibles cuando se alcancen los niveles de solicitud previstos en el diseño.

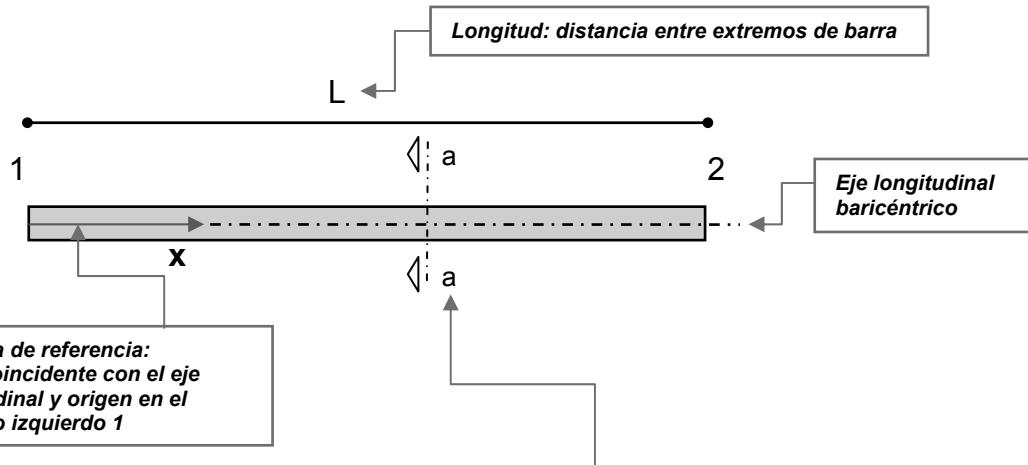


2. Elemento estructural a analizar

Elemento barra: Tiene una dimensión (Longitud L) mucho mayor respecto de las otras dos.

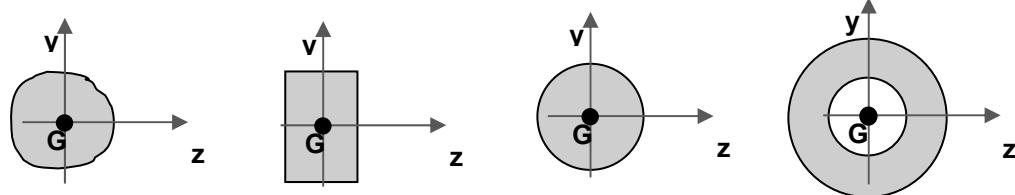
Propiedades geométricas que lo caracterizan:

Longitud: L
Sección normal o transversal: A

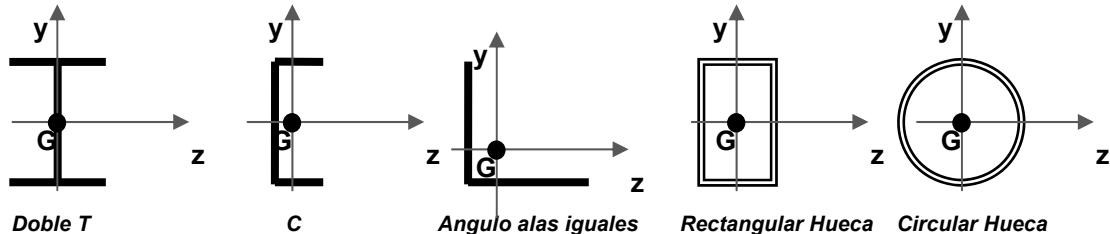


La SECCION NORMAL o transversal se obtiene cortando con un plano a-a perpendicular al eje longitudinal de la barra:

Secciones macizas y huecas gruesas:

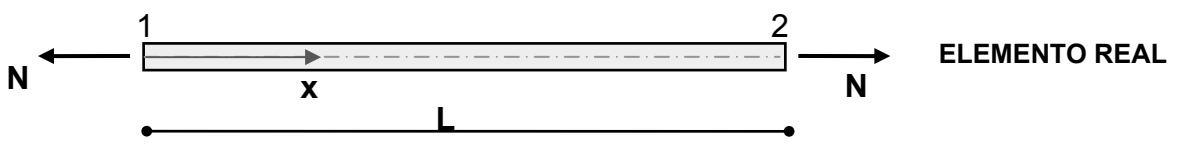


Secciones de espesor delgado abiertas y cerradas:



Solicitudación axial:

La carga N está aplicada en el baricentro de la sección normal en la dirección del eje longitudinal



3.- Hipótesis Fundamentales

a) Materiales Elásticos:

Los materiales constitutivos del elemento estructural tienen comportamiento elástico, es decir se deformarán bajo carga y una vez que cesa la carga que provoca la deformación el elemento recupera sus dimensiones originales.

Desde un punto de vista energético tratar con materiales elásticos significa tratar con sistemas conservativos:

La energía entregada al cuerpo durante la deformación es acumulada por éste en forma de energía potencial elástica (U) y es la que hace que el cuerpo recupere sus dimensiones originales cuando cesa la carga que provocó la deformación.

Trabajo de las fuerzas exteriores en la deformación (W) = Energía potencial de deformación (U).

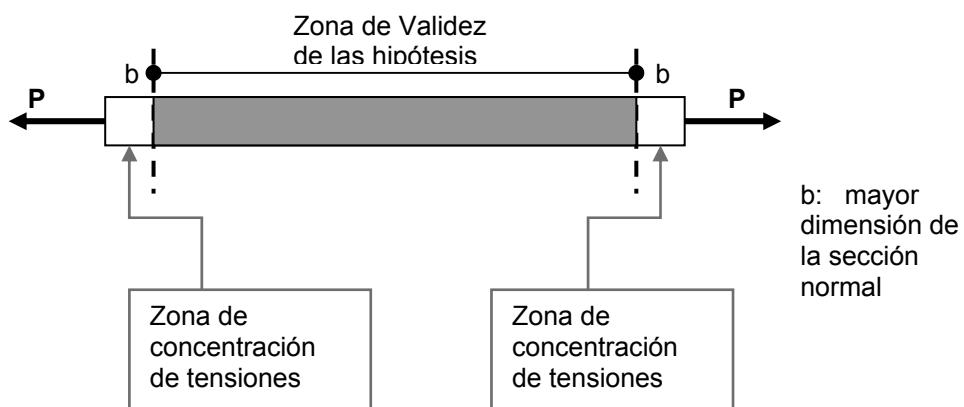
$$W = U$$

b) Velocidad de aplicación de las cargas:

Las cargas se aplican lo suficientemente lento como para no poner en juego las fuerzas de inercia del sistema ni ningún otro efecto dinámico. Desde un punto de vista energético no se pone de manifiesto energía cinética significativa

c) Principio de Saint Venant:

La sección donde se analizarán los efectos de la solicitudón estará lo suficientemente alejada de los puntos de aplicación de las cargas, entendiendo por distancia suficiente a la mayor dimensión transversal del elemento

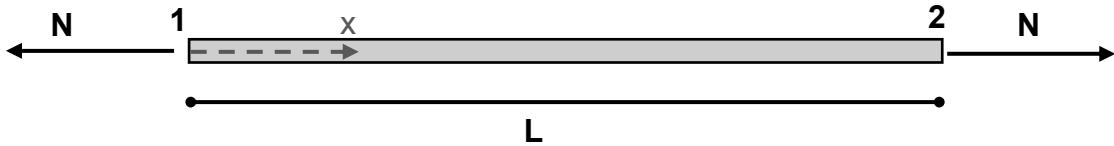


d) Punto de aplicación de la carga

La carga axial está aplicada en el baricentro de la sección normal y en la dirección longitudinal del elemento.

4.- Desplazamiento y Deformación

Barra de longitud L sometida a un esfuerzo axil N – Eje x longitudinal con origen en el extremo 1 de la barra:



- Los puntos que componen la barra sufren un desplazamiento o corrimiento u en la dirección longitudinal x
- **HIPÓTESIS DE COMPORTAMIENTO DE BERNOULLI-NAVIER:**
Todos los puntos de una misma sección normal tienen el mismo desplazamiento longitudinal u , es decir la sección plana antes de la aplicación del esfuerzo, permanece plana luego de la aplicación del mismo. Esta hipótesis tiene validez en el marco del Principio de Saint Venant, es decir no es válida en las zonas próximas a las secciones de aplicación de las cargas.
- Los corrimientos de los puntos de cada sección normal son función de la distancia x de la sección al origen de la barra

$$u = u(x)$$

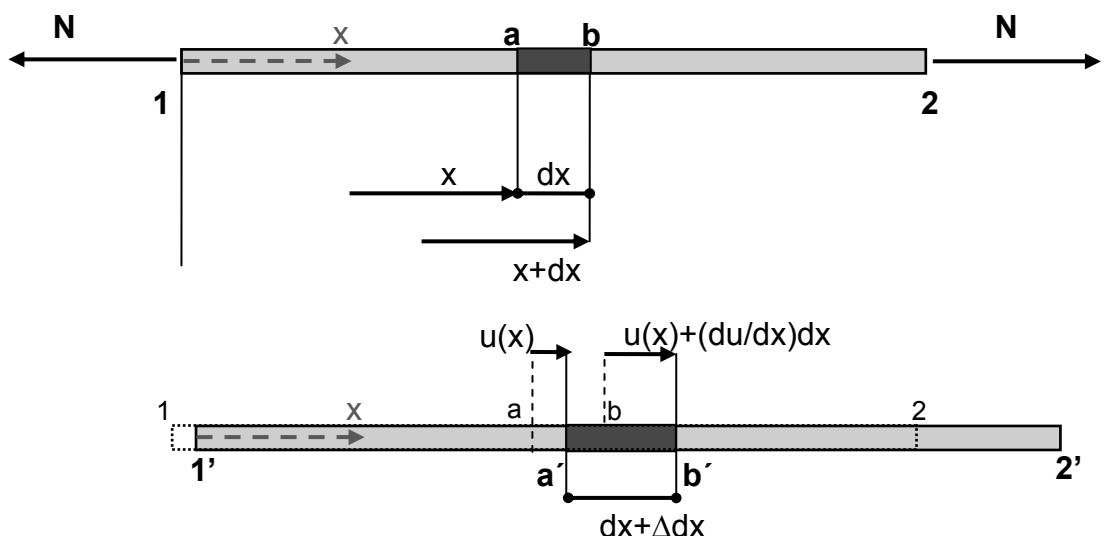
Sean: Un elemento de la barra 1-2 comprendido entre dos secciones **a** y **b** a las distancias x y $x+dx$, con longitud inicial dx

$u(x)$: desplazamiento longitudinal de los puntos de la sección **a** a la posición a'

$u(x)+(du/dx) dx$: desplazamiento longitudinal de los puntos de la sección **b** a la posición b'

DEFORMACION LONGITUDINAL DEL ELEMENTO DIFERENCIAL:

La diferencia entre el corrimiento de los puntos de la sección **b con el corrimiento de los puntos de la sección **a** constituye el alargamiento o deformación Δx del elemento de longitud inicial dx .**



Alargamiento del elemento dx:

$$\Delta dx = u + \frac{du}{dx} dx - u = \frac{du}{dx} dx$$

DEFORMACION ESPECIFICA LONGITUDINAL:

Se define la deformación específica longitudinal ε a la deformación longitudinal por unidad de longitud. Es adimensional y generalmente se mide en 1/100

$$\begin{aligned}\frac{\Delta dx}{dx} &= \varepsilon_x \\ \frac{\Delta dx}{dx} &= \frac{du}{dx}\end{aligned}\quad \rightarrow \quad \varepsilon_x = \frac{du}{dx} \quad (1)$$

Si todos los puntos del elemento estructural tienen el mismo corrimiento u entonces la barra se desplaza sin deformarse, es decir se mueve como un cuerpo rígido:

CONCLUSION:

PARA QUE EXISTA DEFORMACION LOS DESPLAZAMIENTOS DE LOS DISTINTOS PUNTOS DE UN ELEMENTO ESTRUCTURAL DEBEN SER DIFERENTES

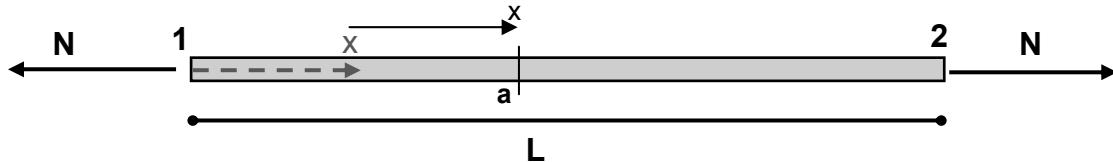
La deformación longitudinal de toda la barra ΔL se calcula por integración de la ecuación diferencial (1) extendida a toda la longitud de la barra:

$$\Delta L = \int_1^2 \varepsilon_x dx = u_2 - u_1 \quad (2)$$

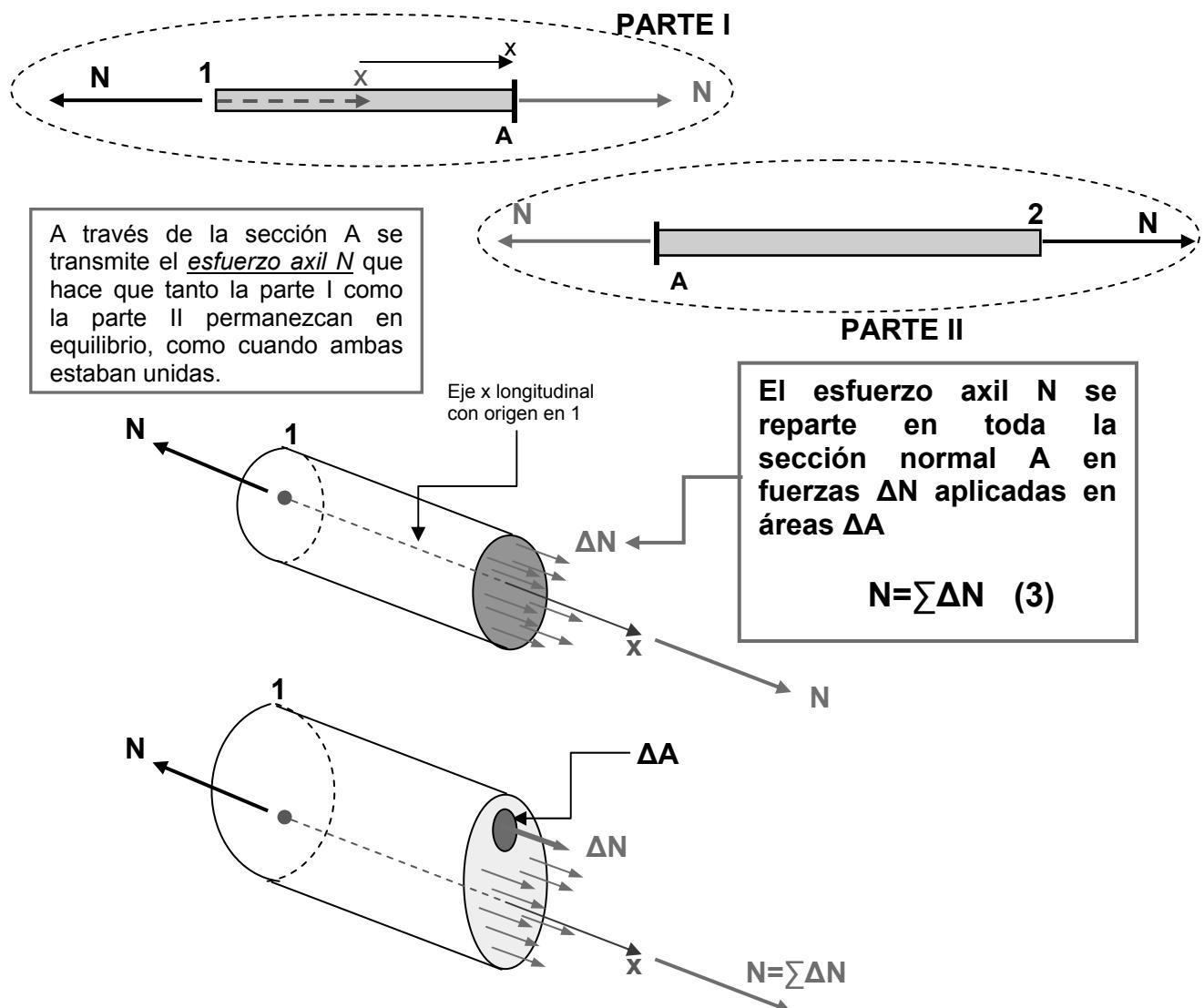
EL ALARGAMIENTO LONGITUDINAL O DEFORMACION LONGITUDINAL TOTAL DE LA BARRA ES IGUAL AL DESPLAZAMIENTO O CORRIMIENTO RELATIVO ENTRE EL EXTREMO FINAL E INICIAL DE LA MISMA

5.- Estado tensional – Ley Tensión -Solicitud

Barra de longitud L, sección normal A sometida a la acción de un esfuerzo longitudinal N aplicado en sus extremos 1 y 2, en el baricentro de la sección normal.



Se corta la barra a través de una sección normal a ubicada a una distancia x lo suficientemente alejada de los extremos como para asegurar el cumplimiento del principio de Saint Venant:



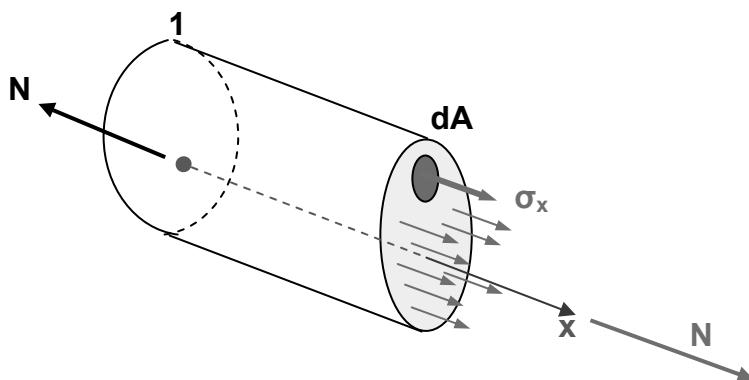
SE DEFINE LA TENSION NORMAL COMO EL COCIENTE $\Delta N / \Delta A$ CUANDO $\Delta A \rightarrow 0$

$$\sigma_x = \frac{dN}{dA} \quad (4)$$

DISTRIBUCION DE LA TENSIÓN NORMAL σ_x EN LA SECCIÓN NORMAL A:

- En cada dA existe una fuerza $dN = \sigma_x dA$.
- La suma de todas las fuerzas dN en la sección A debe ser igual a N:

$$N = \int_A \sigma_x dA$$



- Se puede suponer el elemento estructural como un conjunto de infinitos tubos de área normal dA todos del mismo material, cada uno soportando la fuerza $dN = \sigma_x dA$
- En función de la hipótesis de Bernoulli-Navier cada uno de estos tubos diferenciales tiene el mismo alargamiento ΔL , por lo tanto todos soportan la misma dN .
- **CONCLUSION:**

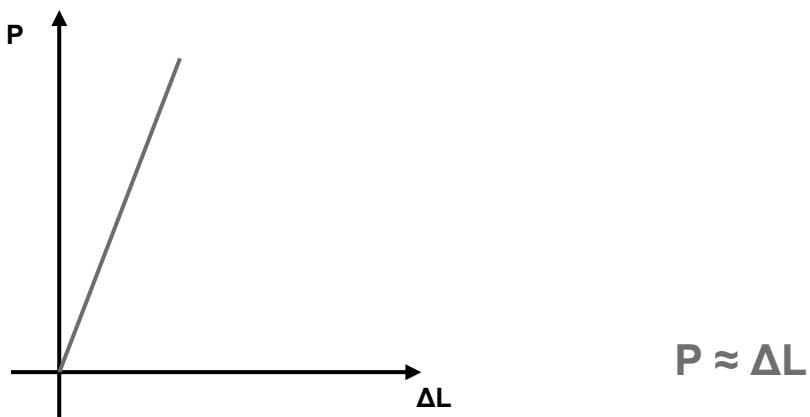
σ_x ES CONSTANTE EN LA SECCIÓN NORMAL

$$\sigma_x = \frac{N}{A} \quad (5)$$

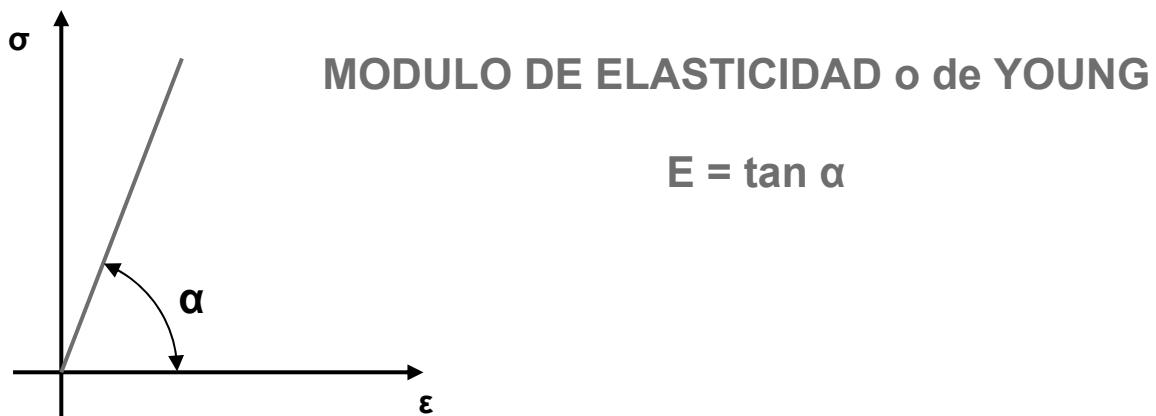
6. Materiales

Comportamiento lineal elástico:

- Los alargamientos ΔL son linealmente proporcionales a las cargas aplicadas.
- Cuando cesa la carga que provocó la deformación el elemento recupera sus dimensiones originales



En término de Tensiones:



LEY DE HOOKE:

LAS TENSIONES SON LINEALMENTE PROPORCIONALES A LAS DEFORMACIONES

CONSECUENCIA:

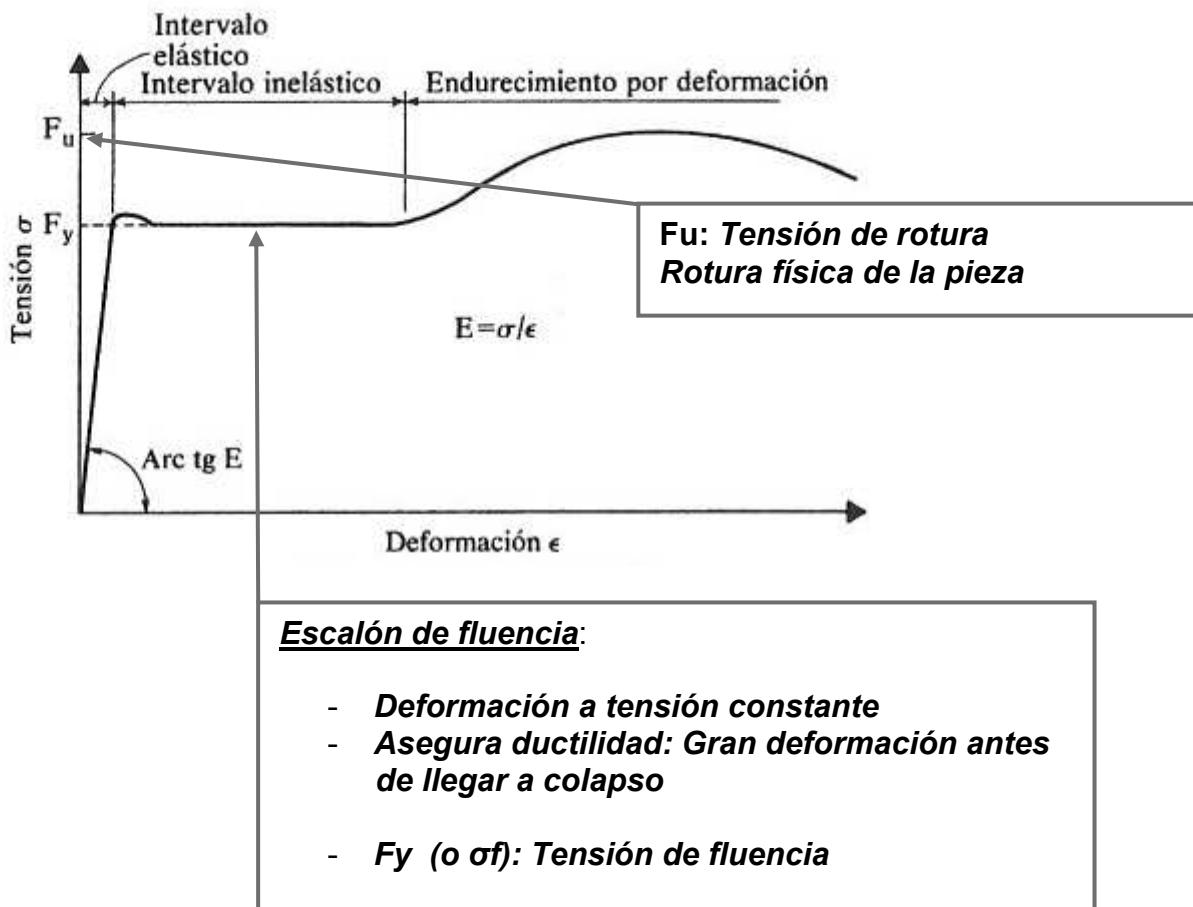
LA LINEALIDAD TENSIONES-DEFORMACIONES PERMITE SUPERPONER EFECTOS

PRINCIPIO DE SUPERPOSICION:

"EL EFECTO DE VARIAS ACCIONES ACTUANDO SIMULTANEAMENTE ES IGUAL A LA SUMA DE LOS EFECTOS DE CADA UNA ACTUANDO POR SEPARADO"

Comportamiento real de los materiales:

a) Con escalón de fluencia:



b) Sin escalón de fluencia:

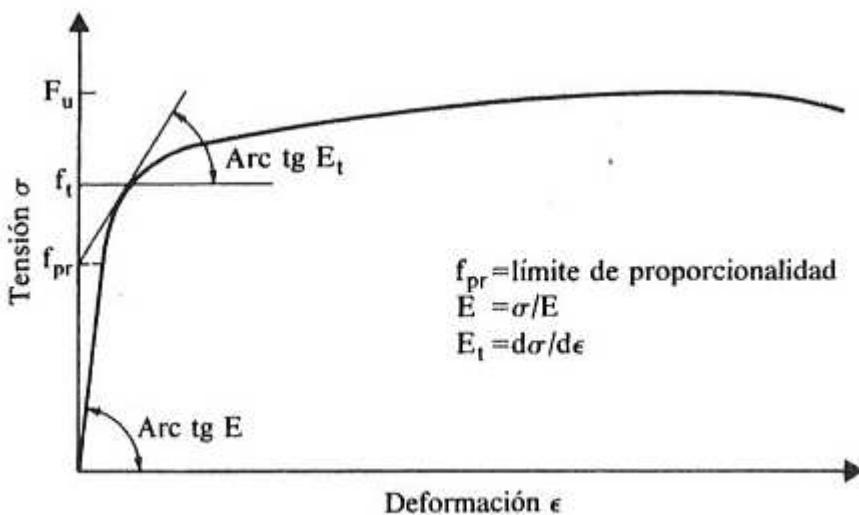


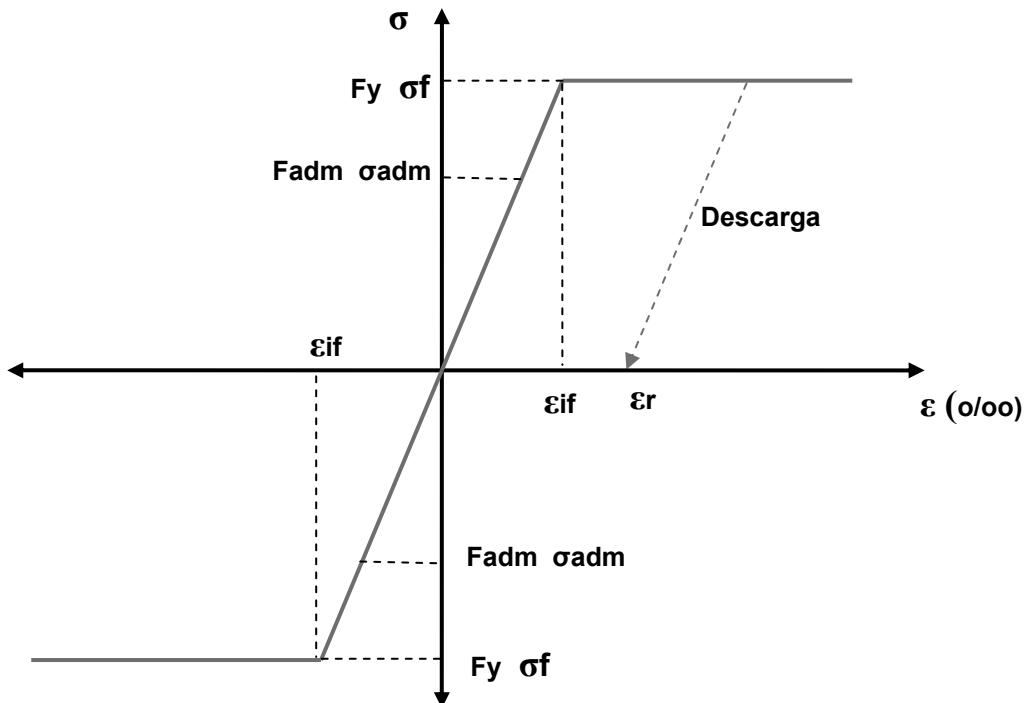
DIAGRAMA σ - ϵ IDEALIZADO:

- Comportamiento elasto-plástico perfecto
- Comportamiento idéntico a tracción (+) y compresión (-)
- F_y (o σ_f): Tensión de fluencia
- F_{adm} (o σ_{adm}): Tensión admisible

Tensión de Fluencia / FS

Es el límite máximo permisible a llegar sin poner en riesgo de colapso a la estructura

- ϵ_{if} : Deformación específica longitudinal inicio de las fluencia en por mil
- Sobrepasada la deformación ϵ_{if} una posterior descarga de la pieza se realiza según una paralela a la recta de carga elástica quedando una deformación residual permanente ϵ_r



7. Verificaciones y/o dimensionado

DIMENSIONADO:

CASO 1:

Datos:

Geometría de la estructura
Cargas actuantes
Solicitudación axial en cada elemento
Material adoptado
Factor de seguridad FS

Incógnitas:

Areas necesarias de los elementos constitutivos

CASO 2:

Datos:

Geometría de la estructura
Secciones de los elementos constitutivos
Material adoptado
Factor de seguridad FS

Incógnitas:

Capacidad portante: acciones permisibles que es capaz de soportar con el FS estipulado

VERIFICACION:

Datos:

Geometría del problema
Cargas actuantes
Solicitudación axial en cada elemento
Secciones normales
Material constitutivo
Factor de seguridad FS

Verificación:

Colapso:

$\sigma_{máx} \leq \sigma_{adm}$

Desplazamientos:

$u_{máx} \leq u_{adm}$

EN GENERAL SIEMPRE SE PUEDE LLEVAR A UN PROBLEMA DE VERIFICACION ADOPTANDO VALORES INICIALES PARA LAS DISTINTAS INCÓGNITAS DEL PROBLEMA Y COMPROBANDO LAS DOS ECUACIONES DE VERIFICACION

a) VERIFICACION FRENT AL COLAPSO

LA TENSION ALCANZADA EN CADA SECCION DE CADA ELEMENTO ESTRUCTURAL COMPONENTE DEL SISTEMA DEBE ESTAR POR DEBAJO DE LA TENSION ADMISIBLE DETERMINADA EN FUNCION DE LA TENSION DE FLUENCIA DEL MATERIAL Y DEL FACTOR DE SEGURIDAD ADOPTADO.

$$\sigma_{\text{max}} \leq \sigma_{\text{adm}} = \frac{\sigma_{\text{fl}}}{FS} \quad (6)$$

$$\sigma_{\text{x}_i} = \frac{N_i}{A_i} \leq \sigma_{\text{adm}} \quad (7)$$

σ_{max} :	Tensión normal longitudinal máxima en la estructura
σ_{adm} :	Tensión normal admisible
σ_{fl} :	Tensión de fluencia del material
FS:	Factor de seguridad
σ_{x_i} :	Tensión normal longitudinal máxima en el elemento i
N_i :	Esfuerzo axil del elemento i
A_i :	Area de la sección normal del elemento i donde se hace la verificación

b) CÁLCULO DE DESPLAZAMIENTOS Y DEFORMACIONES EN FUNCIÓN DE LA SOLICITACIÓN

El alargamiento o acortamiento de un elemento estructural de extremos 1 y 2 sometido a la acción de un esfuerzo axil N viene dado por la ecuación (2):

$$\Delta L = \int_1^2 \varepsilon_x dx = u_2 - u_1$$

Según Ley de Hooke: $\sigma_x = E\varepsilon_x$ y $\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$

Según ecuación (5): $\sigma_x = \frac{N}{A}$

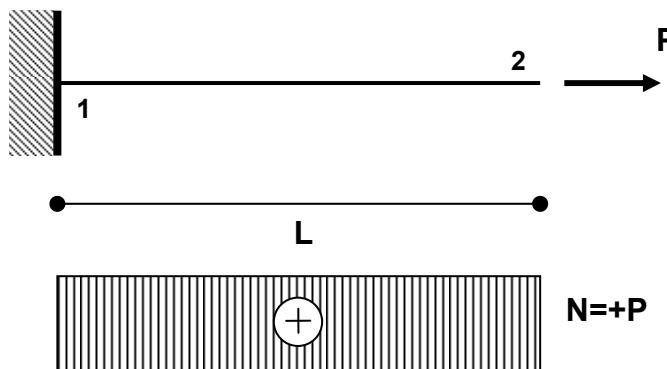
Entonces:

$$\Delta L = \int_1^2 \frac{Ndx}{EA} = u_2 - u_1 \quad (8)$$

CONCLUSION:

LA DEFORMACION LONGITUDINAL DE LA BARRA ESTA DADO POR EL DESPLAZAMIENTO RELATIVO DE SUS EXTREMOS

En el caso de una barra de longitud L y sección normal A , empotrada en el extremo 1 y libre en 2 con una carga axil $N=P$ constante:



Las condiciones de borde del problema para aplicar la ecuación (8) son:

$$\begin{aligned} u_1 &= 0 \\ u_2 &= \Delta L \end{aligned}$$

Entonces por aplicación de (8):

$$\boxed{\Delta L = \frac{PL}{EA} = \frac{P}{EA} \frac{L}{L}} \quad (9)$$

RIGIDEZ AXIL DEL ELEMENTO:

- **(EA) / L ES LA RIGIDEZ AXIL K_N DEL ELEMENTO.**
- **CUANTO MAYOR ES K_N MENOR ES EL ALARGAMIENTO DE LA BARRA ΔL**

$$\Delta L = \frac{P}{K_N} \quad (10)$$

$$P = K_N \Delta L$$

- **LA RIGIDEZ MIDE LA “OPOSICION” DE UN ELEMENTO ESTRUCTURAL A EXPERIMENTAR UNA DEFORMACION BAJO UNA DADA SOLICITACION**
- **EN EL DISEÑO ESTRUCTURAL LO QUE SE BUSCA ES PROVEER RIGIDEZ EN FUNCION DE LAS SOLICITACIONES QUE TENDRA LA ESTRUCTURA DURANTE SU VIDA EN SERVICIO**
- **COMPARESE LA SEGUNDA DE LAS (10) CON LA ECUACION DEL RESORTE $F=kx$**
- **LA RIGIDEZ ES LA FUERZA P NECESARIA A APlicar PARA PRODUCIR UN ALARGAMIENTO $\Delta L = 1$**

8. Energía de deformación

TRABAJO DE DEFORMACION - ENERGIA POTENCIAL ELASTICA:

- EN LOS CUERPOS DEFORMABLES LOS PUNTOS DE APlicACIÓN DE LAS CARGAS SE DESPLAZAN DURANTE LA DEFORMACION Y CONSEGUENTEMENTE LAS FUERZAS APlicadas EN DICHOS PUNTOS REALIZAN UN TRABAJO "W".
- SI EL CUERPO ES ELASTICO ESE TRABAJO REALIZADO POR LAS CARGAS APlicadas ES ALMACENADO EN EL CUERPO EN FORMA DE ENERGIA POTENCIAL ELASTICA Y ES LA QUE EL SISTEMA DEVUELVE CUANDO CESAN LAS CARGAS Y EL CUERPO RECUPERA SUS DIMENSIONES ORIGINALES. SE LA DENOMINA ENERGIA INTERNA DE DEFORMACION "U".

$$W = U \quad (11)$$

Caso de estudio:

Barra de Longitud inicial L empotrada en 1 y libre en 2

Carga axial P a aplicar en 2 en forma lenta

Material linealmente elástico

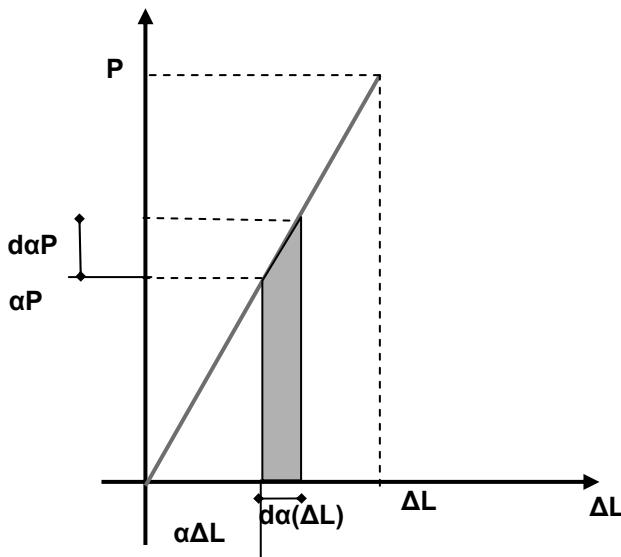
ANTES DE LA DEFORMACION



LUEGO DE LA DEFORMACION

LA FUERZA P REALIZA UN TRABAJO EN LA DEFORMACION ΔL .

FUERZA Y DEFORMACION CRECEN SIMULTANEAMENTE



- **Carga varía de 0 a P**
- **Alargamiento varía de 0 a ΔL**
- **αP valor intermedio de P**
- **α varía de 0 a 1**
- **$\alpha \Delta L$ valor correspondiente del alargamiento**
- **$d\alpha P$ incremento diferencial de la fuerza**
- **$d\alpha(\Delta L)$ incremento correspondiente de la deformación**
- **La carga αP realiza un trabajo dW en el alargamiento $d\alpha(\Delta L)$ despreciando el diferencial de segundo orden.**
- **$dW = \alpha P \cdot d\alpha(\Delta L)$**
- **El trabajo W para el total de la carga aplicada es:**

$$W = \int_0^1 P \Delta L \alpha d\alpha$$

CONCLUSION:

- **EL TRABAJO TOTAL DE DEFORMACION W ES EL AREA BAJO LA CURVA $P-\Delta L$:**

$$W = \frac{P \Delta L}{2} \quad (11)$$

- **EL TRABAJO DE DEFORMACION DE UNA FUERZA APLICADA EN FORMA LENTA CUANDO EL MATERIAL TIENE COMPORTAMIENTO LINEALMENTE ELASTICO ES IGUAL A LA MITAD DEL PRODUCTO DE LA FUERZA POR SU PROPIA DEFORMACION.**
- **LA ENERGIA POTENCIAL ELASTICA ES IGUAL AL TRABAJO DE DEFORMACION**

$$U = \frac{P \Delta L}{2} = \frac{P^2 L}{2EA} = \frac{EA \Delta L^2}{2L} \quad (12)$$

- **COMPÁRESE LA TERCERA DE LAS (12) CON LA ENERGÍA DE UN RESORTE $\frac{1}{2} k x^2$**
- **PARA EL CÁLCULO DE LA ENERGÍA POTENCIAL ELÁSTICA NO ES VÁLIDO EL PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN.**

ENERGIA POTENCIAL POR UNIDAD DE VOLUMEN U*:

- **Volumen del elemento AL**

- **La energía almacenada por unidad de volumen es** $U^* = \frac{U}{AL} = \frac{PAL}{2AL}$

- **Considerando que** $\sigma_x = \frac{P}{A}$ y $\varepsilon_x = \frac{\Delta L}{L}$

$$U^* = \frac{\sigma_x \varepsilon_x}{2} = \frac{\sigma_x^2}{2E} \quad (13)$$

- **Cuanto más rígido es el material ($>E$) menor es la energía interna almacenada por unidad de volumen, es decir al haber menos deformación para una dada tensión, el trabajo involucrado es menor.**

ENERGIA POTENCIAL EN UN SISTEMA DE n BARRAS:

- **LA ENERGIA POTENCIAL DE DEFORMACION TOTAL ACUMULADA ES LA SUMA DE LAS ENERGIAS ACUMULADAS EN CADA UNA DE LAS BARRAS COMPONENTES DEL SISTEMA**

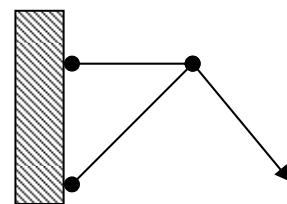
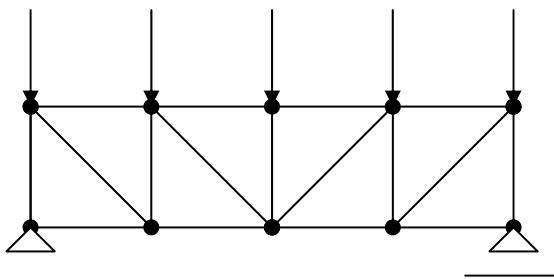
$$U = \sum_{i=1}^n U_i = \sum_{i=1}^n \frac{S_i^2 l_i}{2E_i A_i} \quad (14)$$

- S_i : Esfuerzo axial en la barra *i*
- l_i : Longitud de la barra *i*
- E_i : Módulo de elasticidad del material de la barra *i*
- A_i : Área de la sección normal de la barra *i*
- n : Número de barras.

EJEMPLOS:

RETICULADOS

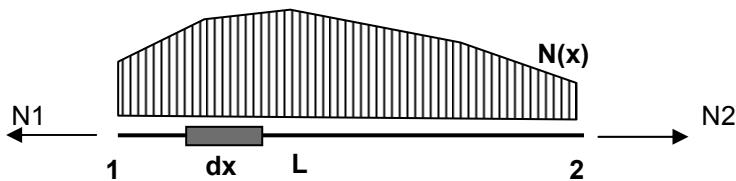
SISTEMA DE BIELAS



ENERGIA POTENCIAL ELASTICA PARA N VARIABLE:

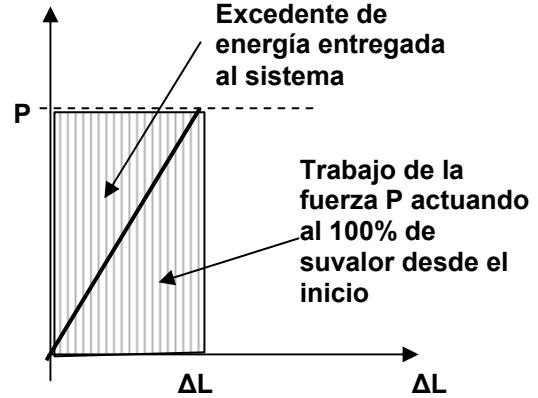
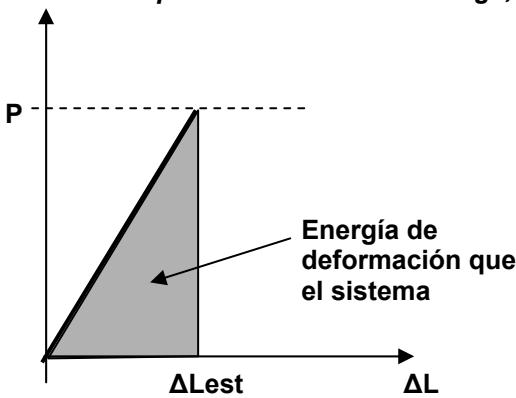
- Si el esfuerzo axil $N=N(x)$ en la barra es variable
- La energía almacenada en un elemento de longitud dx es $dU = \frac{N\Delta dx}{2} = \frac{N^2 dx}{2EA}$
- Para el total de la barra:

$$U = \int_0^L \frac{N^2(x)dx}{EA} \quad (15)$$

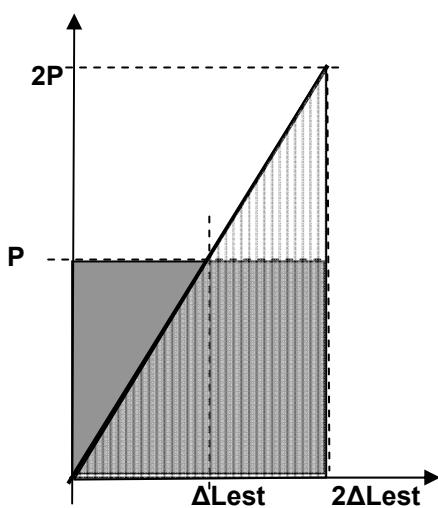


ENERGIA POTENCIAL ELASTICA NOCION DE IMPACTO:

- En caso de aplicación súbita de la carga, ésta actúa al 100% de su valor desde el inicio



- Para que la pieza pueda almacenar el excedente de energía entregada en forma de energía potencial de deformación debe continuar deformándose más allá de la deformación por aplicación lenta de la carga ΔL_{est}



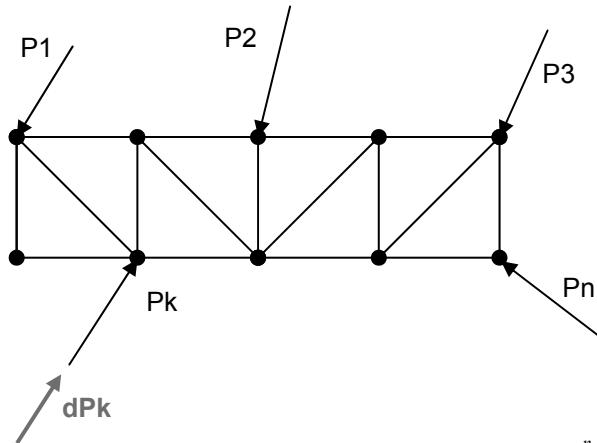
CONCLUSION:

EL SISTEMA DEBE ALCANZAR EL DOBLE DE LA DEFORMACION ESTATICA PARA QUE EL TRABAJO REALIZADO POR LA FUERZA SUBITA (AREA GRISADA) IGUALA LA ENERGIA POTENCIAL DE DEFORMACION (AREA RAYADA BAJO LA CURVA).
ES COMO SI SE HUBIERA APLICADO EN FORMA ESTATICA UNA FUERZA IGUAL AL DOBLE DEL VALOR DE LA FUERZA SUBITA APLICADA

SEGUNDO TEOREMA DE CASTIGLIANO:

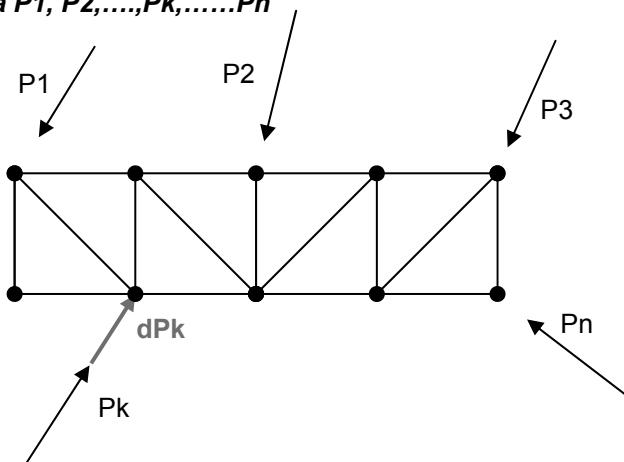
La demostración aplicada para una estructura que solo tiene esfuerzo axil, se puede generalizar para cualquier sistema estructural dentro del régimen elástico.

- Sea una estructura cuyos elementos en este caso sólo tienen solicitudón axil, en la que actúa un sistema de cargas $P_1, P_2, P_3, \dots, P_k, \dots, P_n$ en los nudos respectivos que se encuentra en equilibrio:



- La energía interna acumulada es según (14):
$$U = \sum_{i=1}^n U_i = \sum_{i=1}^n \frac{S_i^2 l_i}{2E_i A_i}$$
- Incrementando la carga P_k en dP_k la energía se incrementa en $dU = \frac{\partial U}{\partial P_k} dP_k$
- La energía acumulada en el sistema es $U + dU = U + \frac{\partial U}{\partial P_k} dP_k$ (15)
- Invirtiendo la secuencia de aplicación de las cargas:

Dado que el sistema es conservativo la energía interna acumulada depende de la posición inicial y final del sistema y ésta última es independiente del orden de aplicación de las cargas (rige el principio de superposición), por lo tanto en esta segunda instancia se aplica primero dP_k y luego el sistema $P_1, P_2, \dots, P_k, \dots, P_n$



- El trabajo W que realiza dP_k es igual a la mitad del producto de la fuerza dP_k por el desplazamiento del punto de aplicación en la dirección de la fuerza $d\delta_k$
- Cuando se aplica el sistema P_1 a P_n aparece el trabajo de todas las fuerzas en su deformación y se agrega el trabajo de la fuerza dP_k que ya actúa al 100% de su valor desde el inicio en el corrimiento δ_k del punto de aplicación de la carga P_k en la dirección de esa carga.

- En esta segunda instancia la energía interna del sistema es la suma de estos tres trabajos exteriores:

$$U = \frac{dPk \cdot d\delta k}{2} + U + dPk \cdot \delta k \quad (16)$$

- Dado que al ser el sistema conservativo la energía no depende del orden de aplicación de las cargas sino de la posición inicial y final que es la misma en ambos casos, igualando la expresión (15) con la (16) y despreciando el diferencial de segundo orden se obtiene la expresión de Castigliano para el desplazamiento δk del punto de aplicación de la carga P_k en la dirección en que actúa dicha carga:

ENUNCIADO DEL SEGUNDO TEOREMA DE CASTIGLIANO:

EL DESPLAZAMIENTO DE UN PUNTO k EN EL QUE ACTUA UNA CARGA P_k , CALCULADO EN LA DIRECCION EN LA QUE ACTUA LA CARGA, ES IGUAL A LA DERIVADA PARCIAL DE LA ENERGIA POTENCIAL ELASTICA RESPECTO A LA CARGA P_k

$$\delta k = \frac{\partial U}{\partial P_k} \quad (17)$$

EN EL CASO DE UNA ESTRUCTURA DE BARRAS SOMETIDA A ESFUERZO AXIL CONSTANTE EN CADA BARRA LA (17) RESULTA:

$$\delta k = \sum_1^n \frac{S_i \frac{\partial S_i}{\partial P_k}}{E_i A_i} l_i \quad (18)$$

- S_i : Esfuerzo en la barra i para el sistema de cargas $P_1, P_2, \dots, P_k, \dots, P_n$
- $\frac{\partial S_i}{\partial P_k}$: Significa cómo varían los esfuerzos S_i en las barras i cuando la carga P_k se incrementa en una unidad $\Delta P_k=1$.

Se calculan colocando sólo un incremento de carga unitario en el punto k donde actúa la carga P_k , y obteniendo para este incremento los valores en las barras i , a estos esfuerzos se los simbolizan como \bar{S}_i y la (18) resulta:

$$\delta k = \sum_1^n \frac{S_i \bar{S}_i}{E_i A_i} l_i \quad (19)$$

- l_i, A_i y E_i : Longitud, área y módulo de elasticidad de cada barra i componente del sistema

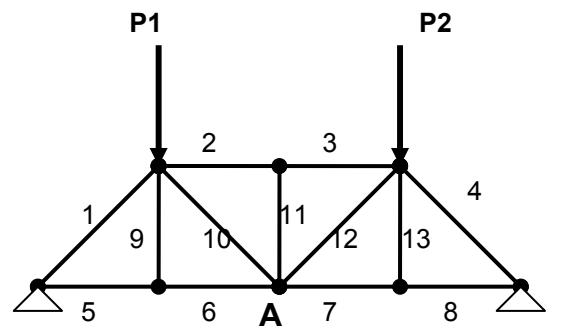
CONSIDERACIONES SOBRE EL SEGUNDO TEOREMA DE CASTIGLIANO:

- MEDIANTE EL TEOREMA DE CASTIGLIANO SE CALCULAN DESPLAZAMIENTOS DE PUNTOS O NODOS DE LA ESTRUCTURA Y NO DEFORMACIONES DE LAS BARRAS QUE CONSTITUYEN EL SISTEMA
- LA DIRECCION DEL DESPLAZAMIENTO CALCULADO COINCIDE CON LA DIRECCION DE LA CARGA APLICADA EN EL NODO.
- SI NO HUBIERA CARGA APLICADA EN EL NODO EN EL CUAL SE QUIERE CALCULAR EL DESPLAZAMIENTO, O SE QUISIERA CALCULAR EL DESPLAZAMIENTO EN OTRA DIRECCION QUE NO SEA LA DE LA CARGA APLICADA; SIMPLEMENTE BASTA SUPONER APLICADA EN ESE NODO, Y EN LA DIRECCION DESEADA UNA CARGA INFINTAMENTE PEQUEÑA DE MANERA DE NO ALTERAR SIGNIFICATIVAMENTE LA ENERGIA POTENCIAL DE TODO EL CONJUNTO Y APlicar la ecuacion (19), EN DONDE LOS ESFUERZOS "SI" SON LOS DEBIDOS AL SISTEMA DE CARGAS ACTUANTE Y *Si* LOS QUE SE OBTIENEN DE CALCULAR LA ESTRUCTURA CON UN INCREMENTO $\Delta P_k=1$ DE ESA CARGA VIRTUAL.

APLICACIÓN DEL SEGUNDO TEOREMA DE CASTIGLIANO AL CALCULO DE DESPLAZAMIENTOS:

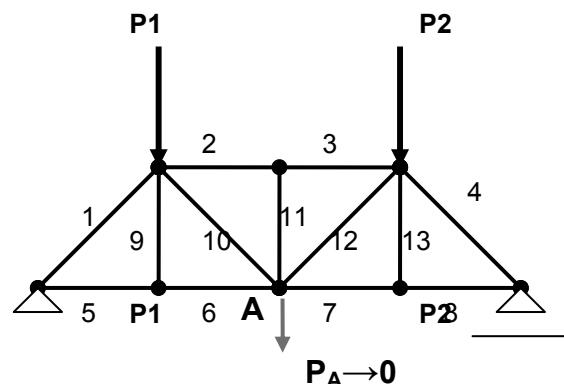
CASO 1:

Calcular δA en dirección Vertical:



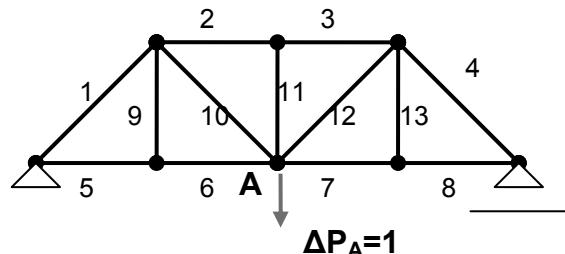
Paso 1)

Se supone una carga infinitamente pequeña en la A con dirección vertical y sentido arbitrario. Se calculan los esfuerzos Si suponiendo P_A tendiendo a 0. Es decir para el cálculo de Si no se considera P_A .



Paso 2)

Se calculan los esfuerzos Si aplicando en la dirección vertical por A y con sentido arbitrario un incremento $\Delta P_A = 1$



Paso 3)

Se calcula el desplazamiento buscado por aplicación de la ecuación (19).

SI $\delta A > 0$ ENTONCES COINCIDE CON EL SENTIDO ADOPTADO DE ΔP_A .

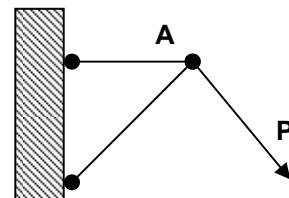
SI $\delta A < 0$ ENTONCES EL SENTIDO ES CONTRARIO A ΔP_A

CASO 2:

Calcular δA total:

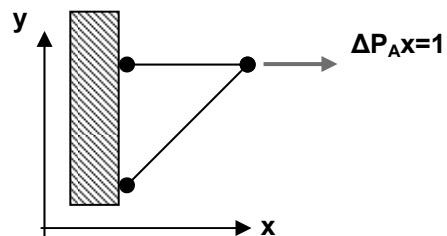
Paso 1)

Se calculan los esfuerzos en las barras S1 y S2 debidos a la carga P en A.



Paso 2)

Se calculan los esfuerzos en las barras 1 y 2 debidos a un incremento unitario $\Delta P_A=1$ en la dirección horizontal x

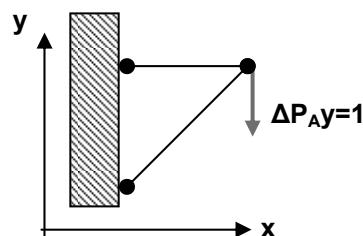


Paso 3)

Se calcula el desplazamiento en x del nodo A uA por aplicación de la ecuación (19) tomando en consideración el signo obtenido para individualizar el sentido de uA

Paso 4)

Se calculan los esfuerzos en las barras 1 y 2 debidos a un incremento unitario $\Delta P_A=1$ en la dirección vertical y



Paso 5)

Se calcula el desplazamiento en y del nodo A vA por aplicación de la ecuación (19) tomando en consideración el signo obtenido para individualizar el sentido de vA

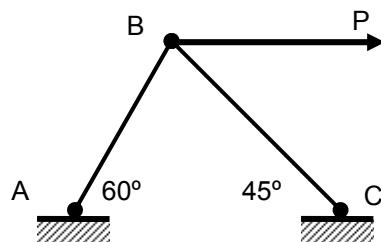
Paso 6)

El resultado buscado es $\delta A = \sqrt{u_A^2 + v_A^2}$

9. Ejemplos

9.1. Ejemplo 1: Capacidad portante

Las dos barras AB y BC de la figura deben soportar un peso P. Sabiendo que la barra AB tiene una sección igual a 2.0 cm² y la barra BC tiene una sección igual a 3.0 cm², calcular la Padm del sistema si el material que las compone tiene una tensión de fluencia igual a 2400 kg/cm² y el factor de seguridad deseado es FS=2.0

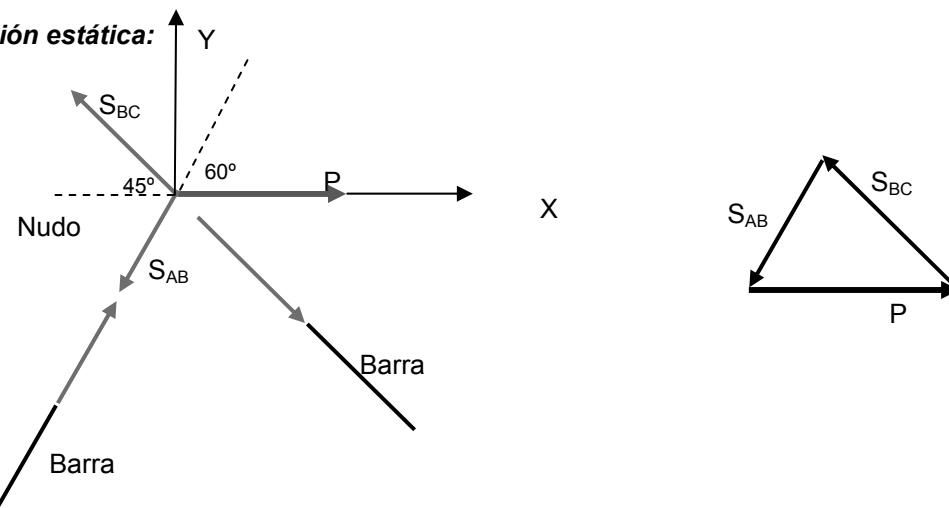


Objetivo: Calcular la carga P tal que ni la barra AB ni BC superen el esfuerzo permisible que según la sección y el material son capaces de soportar.

Esquema de cálculo:

- 1.- Determinar los esfuerzos en las barras S_{AB} y S_{BC} en función de P de acuerdo a las condiciones estáticas del problema
- 2.- Condicionar que ninguna de las dos barras superen las tensiones admisibles del material.

1.- Resolución estática:



Se plantea el equilibrio en el nudo B:

$$\sum F_x : -S_{AB} \cos 60 - S_{BC} \cos 45 = P$$

$$\sum F_y : -S_{AB} \sin 60 + S_{BC} \sin 45 = 0$$

Se obtiene de este sistema:

$$S_{AB} = 0.73P \quad (\text{Tracción en la barra})$$

$$S_{BC} = 0.89P \quad (\text{Compresión en la barra})$$

2. Determinación de la P_{adm} :

Tensión admisible del material:

$$\sigma_{adm} = \frac{\sigma_{fl}}{FS} = 1200 \text{ kg/cm}^2$$

Comparación en barra AB: $\frac{S_{AB}}{A_{AB}} \leq \sigma_{adm}$ (1)

Comparación en barra BC: $\frac{S_{BC}}{A_{BC}} \leq \sigma_{adm}$ (2)

Teniendo en cuenta los valores hallados para S_{AB} y S_{BC} en función de P y las áreas A_{AB} y A_{BC} las ecuaciones 1 y 2 resultan:

$$0.365P \leq 1200 \quad (1)$$

$$0.297P \leq 1200 \quad (2)$$

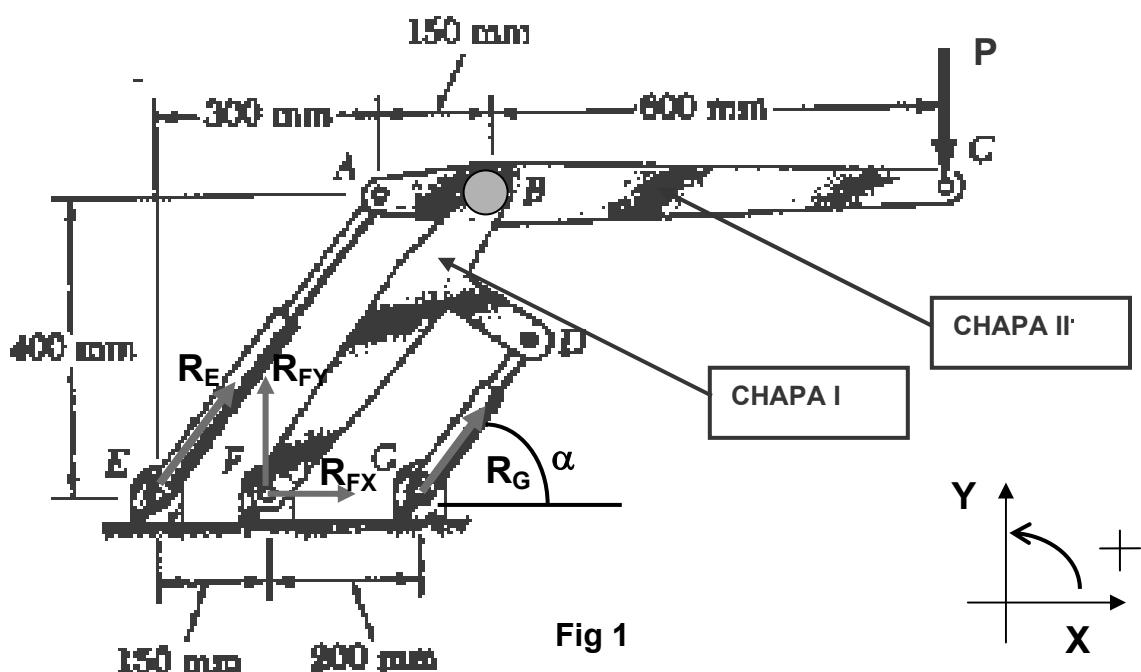
Se obtienen dos valores de P : $P(1)=3287 \text{ kg}$
 $P(2)=4040 \text{ kg}$

Se concluye que las dos barras en este caso no alcanzan simultáneamente la tensión admisible.

La carga admisible está dada por la menor de ambas: $P_{adm}=3287 \text{ kg}$

EJEMPLO 2: Capacidad portante

Se utilizan dos cilindros hidráulicos para posicionar el brazo robótico ABC. Si las varillas que toman los puntos A y D son de un acero que tiene una tensión admisible igual a 1400 kg/cm^2 y tienen un diámetro igual a 20 mm determinar la carga admisible P que es capaz de tomar dicho brazo en la posición indicada en la figura 1.



Paso 1: Cálculo de las reacciones en los Vínculos:

Se trata de dos chapas I y II articuladas en B con cuatro apoyos externos: dos bielas AE y GD y un apoyo doble en F.

Para calcular las reacciones se asume un sentido arbitrario de las mismas y se plantean cuatro ecuaciones de equilibrio independientes:

$$\Sigma F_x = 0 \quad R_E \cos \alpha + R_G \cos \alpha + R_{FX} = 0 \quad (1)$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad R_E \operatorname{sen} \alpha + R_G \operatorname{sen} \alpha + R_{FY} - P = 0 \quad (2)$$

$$\Sigma M_F = 0 \quad -R_E \operatorname{sen} \alpha \times 15 + R_G \operatorname{sen} \alpha \times 20 - P \times 90 = 0 \quad (3)$$

$$\Sigma M_B^{\text{II}} = 0 \quad -R_E \operatorname{sen} \alpha \times 15 - P \times 60 = 0 \quad (4)$$

$$\operatorname{sen} \alpha = 0.80 \quad \cos \alpha = 0.60$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones (1)-(4) se obtienen los siguientes valores para las reacciones:

$$R_E: -5P$$

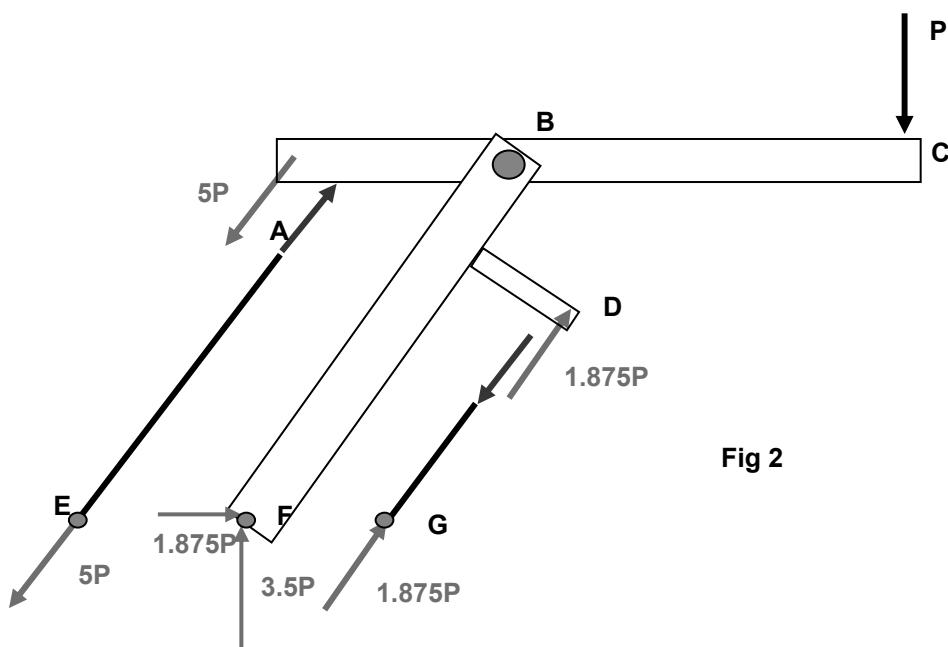
$$R_G: +1.875P$$

$$R_{FX}: +1.875P$$

$$R_{FY}: +3.5P$$

Se concluye que la reacción R_E tiene sentido contrario al supuesto. En la figura 2 se indican en forma esquemática las reacciones y como actúan en las bielas AE y DG teniendo en consideración el principio de acción y reacción

Paso 2: Determinación de la carga P_{adm} :



Los esfuerzos en las bielas AE y DG que no son otra cosa que las reacciones determinadas en el punto anterior y valen:

$$\begin{array}{ll} R_E: & 5P \\ R_G: & 1.875P \end{array}$$

tracción
compresión

Se trata que la carga P sea tal que en ninguna de las dos bielas se supere el valor de la tensión admisible, por lo tanto un procedimiento válido consiste en determinar la Padm suponiendo que sucesivamente cada biela llega al valor admisible de la tensión, siendo finalmente el valor buscado el menor de ambos.

Area de la biela AE:

$$\text{Esfuerzo admisible en la biela AE: } 1400 \text{ kg/cm}^2 \times 3.14 \text{ cm}^2: \quad 3.14 \text{ cm}^2$$

Valor del esfuerzo:

$$\text{Padm1: } 4396/5: \quad 4396 \text{ kg}$$

5P

879 kg

Area de la biela DG:

$$\text{Esfuerzo admisible en la biela AE: } 1400 \text{ kg/cm}^2 \times 3.14 \text{ cm}^2: \quad 3.14 \text{ cm}^2$$

Valor del esfuerzo:

$$\text{Padm1: } 4396/1.875: \quad 4396 \text{ kg}$$

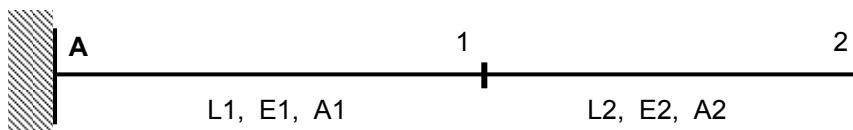
1.875P

2344 kg

EL VALOR Padm BUSCADO ES 879 kg

Bibliografía: Mechanics of Material Solution Manual, Beer- Johnston – Dewolf 3rd edition

EJEMPLO 3: Rigidez axial



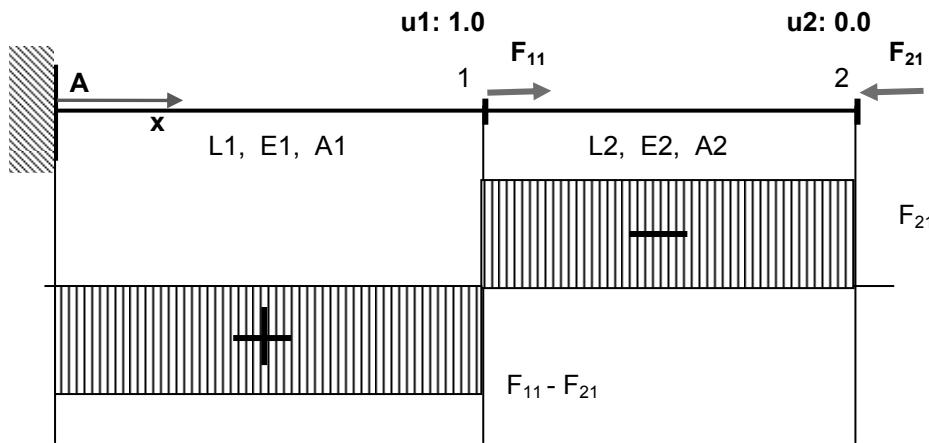
En el sistema de la figura, calcular las fuerzas a colocar en los nudos 1 y 2 de manera que:

- 1) $u_1=1.0$ y $u_2=0.0$
- 2) $u_1=0.0$ y $u_2=1.0$
- 3) Generalizar los resultados para desplazamientos u_1 y u_2 cualquiera.

Se adopta un sistema de referencia con el eje x coincidente con el eje longitudinal del sistema y origen en el empotramiento A.

Sean $k_1 = \frac{E_1 A_1}{L_1}$ y $k_2 = \frac{E_2 A_2}{L_2}$ las respectivas rigideces axiales de las barras 1 y 2.

Caso 1:



Se plantean las ecuaciones que representan las condiciones impuestas para los desplazamientos en el caso 1:

$$u_1 = \frac{F_{11} - F_{21}}{K_1} = 1.0$$

$$u_2 = \frac{F_{11} - F_{21}}{K_1} - \frac{F_{21}}{K_2} = 0$$

Las incógnitas del problema son F_{11} y F_{21}

$$F_{11} = k_1 + k_2$$

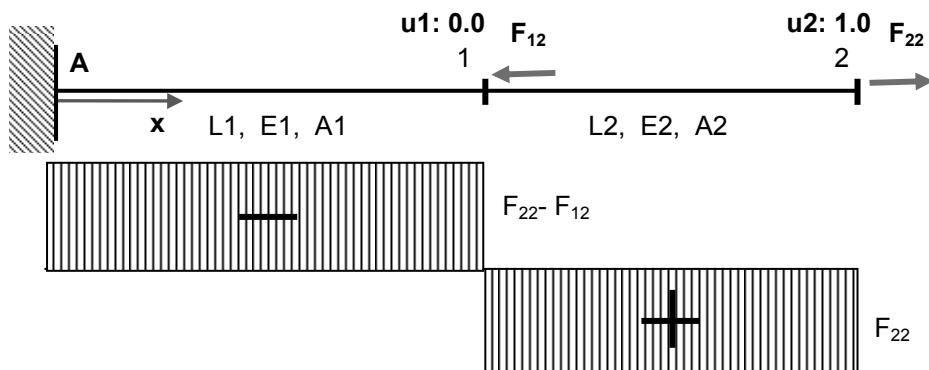
$$F_{21} = k_2$$

Teniendo en cuenta el sentido positivo adoptado para el eje x y refiriendo el signo de las fuerzas a ese eje:

$$F_{11} = k_1 + k_2$$

$$F_{21} = -k_2$$

Caso 2:



Los desplazamientos en cada nudo en este caso valen:

$$u_1 = \frac{F_{22} - F_{12}}{k_1}$$

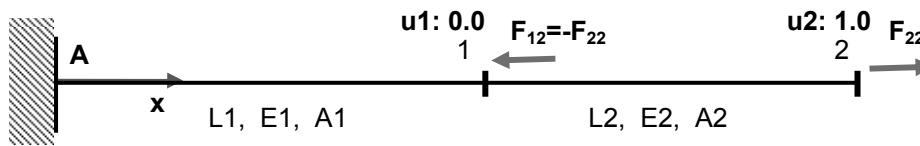
$$u_2 = \frac{F_{22}}{k_2} - \frac{F_{22} - F_{12}}{k_1}$$

Evidentemente como el desplazamiento en el nudo 1 debe ser $u_1=0$, el esfuerzo axil entre A y el nudo 1 debe ser 0, de manera que $F_{12}=F_{22}$ con los sentidos adoptados

Resolviendo el sistema se obtiene para $F_{22}=k_2$, y por lo tanto según el sistema de referencia adoptado se tiene:

$$\begin{aligned} F_{12} &= -k_2 \\ F_{22} &= k_2 \end{aligned}$$

El diagrama de axiles para este caso resulta:



Caso 3:

El caso 3 constituye la generalización de los casos 1 y 2 y se resuelve aplicando el principio de superposición de los efectos aprovechando la linealidad existente entre fuerzas y desplazamientos.

Cuando se aplica en 1 un desplazamiento $u_1 \neq 1$ se tienen en 1 y 2 las siguientes fuerzas:

$$\begin{aligned} F_{1'} &= F_{11} u_1 \\ F_{2'} &= F_{21} u_1 \end{aligned}$$

Análogamente cuando se aplica en 2 un desplazamiento $u_2 \neq 1$, se tienen en 1 y 2 las siguientes fuerzas:

$$\begin{aligned} F_{1''} &= F_{12} u_2 \\ F_{2''} &= F_{22} u_2 \end{aligned}$$

Entonces cuando se aplican simultáneamente un desplazamiento u_1 y u_2 cualesquiera en forma simultánea tenemos en 1 y 2 las siguientes fuerzas:

$$\begin{aligned} F_1 &= F_{11} u_1 + F_{12} u_2 \\ F_2 &= F_{21} u_1 + F_{22} u_2 \end{aligned}$$

Esta expresión se puede escribir en forma matricial del siguiente modo:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{11} & \mathbf{F}_{12} \\ \mathbf{F}_{21} & \mathbf{F}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{Bmatrix}$$

Reemplazando los valores hallados para los F_{ij} se obtiene:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 & -\mathbf{k}_2 \\ -\mathbf{k}_2 & \mathbf{k}_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{Bmatrix}$$

El vector de la izquierda es el vector de las fuerzas nodales $\{\mathbf{F}\}$. En el segundo miembro se tiene el producto de la matriz de los coeficientes F_{ij} que es la matriz rigidez del sistema $[\mathbf{K}]$, y el vector de los desplazamientos $\{\mathbf{u}\}$.

La ecuación se escribe en forma simplificada:

$$\{\mathbf{F}\} = [\mathbf{K}] \{\mathbf{u}\}$$

Nótese la similitud formal con la ecuación del resorte $F = kx$.

Ilustración de tapa:

KOSICE, Gyula : (Košice, Checoslovaquia, 1924) es un escultor, teórico y poeta radicado en la Argentina desde 1928, cofundador del movimiento Madí, es considerado uno de los precursores mundiales del arte cinético y lumínico.

Fragmento del manifiesto Madí:

"Se reconocerá por arte Madí la organización de elementos propios de cada arte en su continuo. En ello está contenida la presencia, la ordenación dinámica móvil, el desarrollo del tema propio, la ludicidad y pluralidad como valores absolutos, quedando por lo tanto abolida toda injerencia de los fenómenos de expresión, representación y significación.

El dibujo Madí es una disposición de puntos y líneas sobre una superficie. La pintura Madí, color y bidimensionalidad. Marco recortado e irregular, superficie plana y superficie curva o cóncava. Planos articulados, con movimiento lineal, rotativo y de traslación..."

FACULTAD DE INGENIERIA - UNLP

ÁREA VERTICAL ESTRUCTURAS A

C-1151 ESTRUCTURAS I

MATERIAL DIDÁCTICO COMPLEMENTARIO

UNIDAD 1

PRINCIPIOS FUNDAMENTALES

**SISTEMAS PLANOS
DE FUERZAS**

ING. ASDRÚBAL E. BOTTANI - 2021

UNIDAD 1

Principios fundamentales

Asdrubal E. Bottani

En este capítulo trataremos los principios fundamentales de la estática que nos servirán de base conceptual al análisis de los cuerpos en equilibrio, comenzando desde la noción de fuerza, las operaciones con fuerzas (composición, descomposición, resultante, traslación de fuerzas a lo largo y paralelamente a su recta de acción, etc), siguiendo con los sistemas planos de fuerzas, concurrentes y no concurrentes, cálculo y ubicación de la resultante de un sistema plano de fuerzas, momento de una fuerza respecto a un punto. Finalmente se analizaremos las condiciones de equilibrio de los sistemas planos de fuerzas.

1.1 Noción de fuerza

Si intentáramos dar una definición de estructura, podríamos decir que son aquellos elementos que se disponen en un objeto (una aeronave, un edificio, un puente, un vehículo, una máquina, etc), con el fin de transferir las fuerzas desde los puntos donde ellas estén aplicadas a los puntos que sirven de apoyo de ese objeto, y agregaríamos *en condiciones adecuadas de seguridad y uso*. Si bien en capítulos posteriores ahondaremos sobre este concepto, por ahora nos basta decir que, por *condiciones adecuadas de seguridad*, queremos decir que la situación que produce el colapso de la estructura está suficientemente lejos de la que la estructura afrontará a lo largo de su vida útil (sugerimos ver el ejemplo 5 al final del capítulo). Por otro lado, por *condiciones adecuadas de uso* entendemos que, bajo la acción de las fuerzas que actuarán en la estructura en su vida útil, no experimentará deformaciones, vibraciones, etc, que, si bien no provoquen el colapso, no permitan que cumpla con la función para la cual la hemos diseñado. Un ejemplo sencillo de comprender sería el diseño de la estructura soporte de un puente grúa para una nave industrial: la fuerza que produce el colapso de ese soporte debe ser mayor que la que le transmite el puente grúa con su carga plena (seguramente dos a cuatro veces mayor según las reglamentaciones), pero también con la grúa a plena capacidad, en ese soporte no se deben producir deformaciones que impidan el normal desplazamiento del puente para llevar la carga de un lugar a otro de la nave.

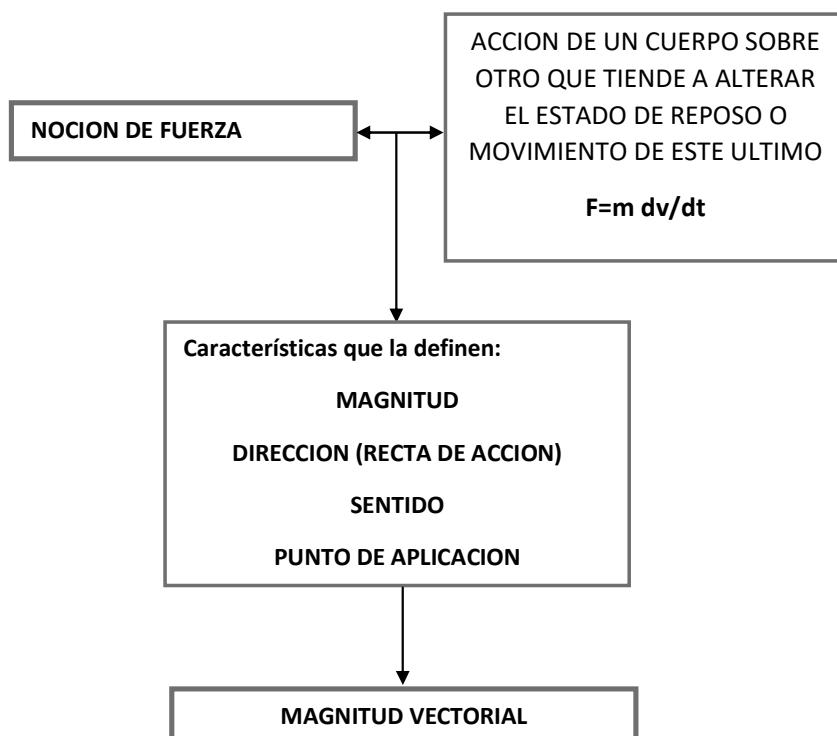
Vemos entonces que en el análisis estructural debemos trabajar principalmente con fuerzas, por lo tanto debemos tener claro lo que significa una fuerza y como operar con ellas. Más que una definición rigurosa intentemos una definición conceptual, diciendo que, fuerza es “aquella

acción que tienda a modificar el estado de reposo de un cuerpo" (Fliess, 1976, p.2), a lo que agregaremos de *reposo o movimiento*, es decir que si el cuerpo se está moviendo con movimiento uniforme rectilíneo, seguirá en esa situación mientras no actúe una fuerza que provoque una variación del mismo (una aceleración), y si está en reposo, continuará en reposo.

Para caracterizar una fuerza importa no sólo su magnitud o valor absoluto, si no también, su dirección, su sentido y el punto del cuerpo donde esa fuerza se aplica. En otras palabras, la fuerza es una magnitud vectorial y como tal debe ser tratada. El cuadro de la

Figura 1 se resume lo enunciado hasta aquí.

Figura 1 Noción de fuerza



Las unidades en que se miden las fuerzas varían según los sistemas:

- En el Sistema internacional (SI) la unidad es el Newton (N). Es muy común la utilización del kilonewton (kN) que equivale a 1000 N.
- En el Sistema técnico, la unidad es el kilogramo fuerza (kgf) y es común la utilización de la tonelada métrica, igual a 1000 kgf.
- En el Sistema americano la unidad es la libra (lb), y es común la utilización de la kilolibra (kip), equivalente a 1000 lb.

Las equivalencias entre sistemas son las siguientes redondeando al tercer decimal:

N	Kg	lb
1	0.102	0.010
9.807	1	2.205
4.452	0.454	1

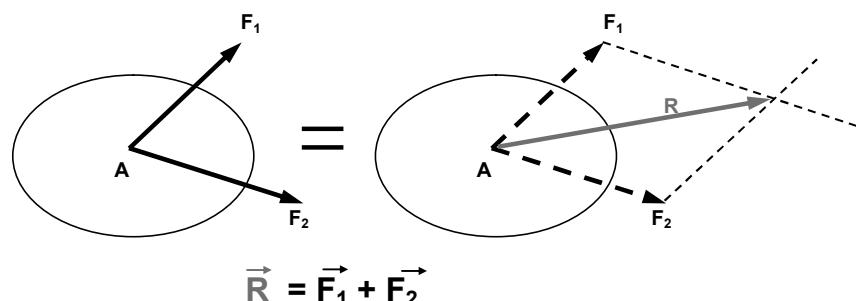
1.2 Principio de la resultante

El principio de la resultante puede enunciarse del siguiente modo: “*La acción de dos fuerzas F_1 y F_2 aplicadas en un punto A de un cuerpo rígido es equivalente a la acción de una única fuerza llamada resultante R de F_1 y F_2 , aplicada en el mismo punto A y que se obtiene como la diagonal del paralelogramo que tiene como lados adyacentes a F_1 y F_2 .*”

Este principio, en realidad, más que indicarnos como calcular la resultante de dos vectores, nos está señalando algo más importante, y es que la acción de dos fuerzas es equivalente a la acción de una única fuerza, resultante de las otras dos. Es importante remarcar que esto es cierto en el caso de los cuerpos rígidos, lo que nos lleva a tener que definir cuerpo rígido. Un cuerpo es rígido cuando sometido a la acción de cualquier fuerza, no se producen variaciones en las distancias entre sus puntos; es decir no se deforma.

La Figura 2 conceptualiza el significado de este principio.

Figura 2 Primer principio de la estática



1.3 Composición y descomposición de fuerzas en el plano

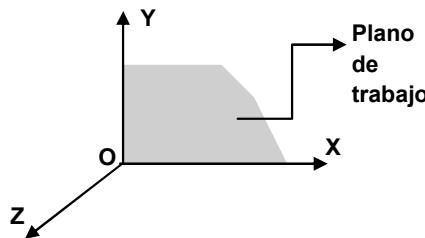
Una aplicación del primer principio es la composición y descomposición de fuerzas. Comenzaremos nuestro estudio con los sistemas planos de fuerzas, introduciendo todos los conceptos básicos, y una vez que los mismos hayan sido comprendidos para el plano su generalización al espacio resultará muy sencilla. Los sistemas planos de fuerzas son aquellos en los cuales todas las rectas de acción de las fuerzas que intervienen en el sistema están contenidas en un mismo plano.

Cuando se trata de encontrar la resultante de un sistema plano de fuerzas debemos tratar con la complejidad de sumar vectores. Recordemos que cuando dos vectores tienen una misma dirección la suma se transforma en la suma algebraica de sus módulos, entonces si al sistema original de fuerzas lo transformamos en dos subsistemas, cada uno con dos direcciones ortogonales, podríamos hallar la resultante de cada uno de estos subsistemas por sumas algebraicas de sus módulos, y luego sumar estos dos vectores perpendiculares entre sí para obtener la resultante del sistema original. El procedimiento lleva entonces una primera

operación de descomposición de fuerzas en dos direcciones y luego una composición de dos fuerzas ortogonales para obtener la resultante.

A los fines de la composición y descomposición en un sistema ortogonal, elegiremos una terna derecha de ejes X-Y-Z para orientarnos en el espacio, y en particular trabajaremos con fuerzas contenidas en el plano X-Y. En adelante llamaremos a esta terna de referencia *terna fija* o *terna global* (ver Figura 3).

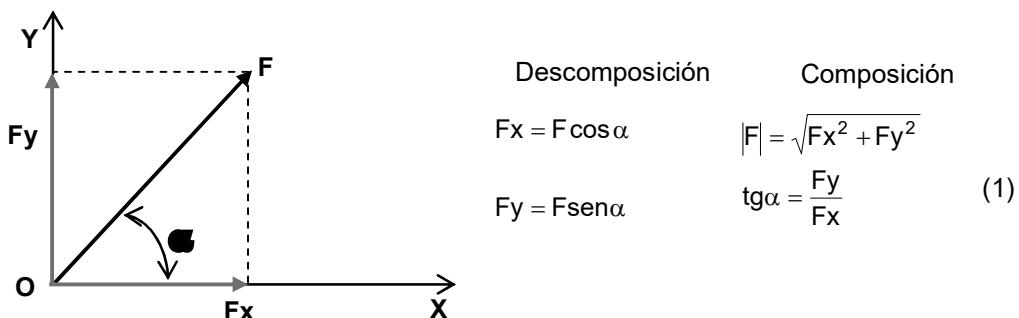
Figura 3 Terna global



Veamos en primer lugar cómo descomponer la fuerza F de la Figura 4, aplicada en un punto O en dos direcciones ortogonales X-Y. La fuerza actúa sobre una recta de acción que forma un ángulo α entre el semieje positivo X y la recta de acción de la fuerza en el sentido del vector (en este caso el primer cuadrante). Mediante la construcción del paralelogramo, podemos interpretar que esa fuerza F es la resultante de otras dos F_x y F_y dirigidas según cada uno de los semiejes X e Y respectivamente. De manera inversa, dadas dos fuerzas F_x y F_y según los ejes ortogonales X e Y respectivamente se puede obtener su resultante aplicando el primer principio de la estática. En la

Figura 4 se muestra el resultado de esta descomposición o composición según se proceda como en el primer o segundo caso.

Figura 4 Descomposición y Composición de una fuerza

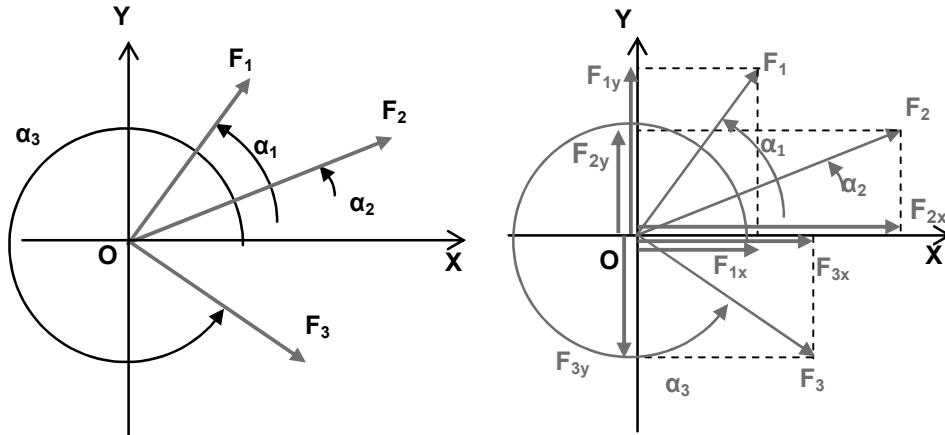


Como ya dijimos la descomposición y composición en dos subsistemas ortogonales, nos permite fácilmente calcular la resultante de un sistema plano de fuerzas aplicadas en un punto O al que elegiremos como origen del sistema de coordenadas global X-Y como mostramos en la Figura 5 de la izquierda.

En un primer paso, descomponemos el sistema de fuerzas en sus componentes en X e Y, teniendo el ángulo α_i que forma el semieje positivo X con el vector que representa cada una de las fuerzas F_i , según la Figura 5 derecha. De esta manera el sistema de fuerzas F_1, F_2, F_3 ha sido reemplazado por dos sistemas de fuerzas colineales F_{1x}, F_{2x} y F_{3x} por un lado, y F_{1y}, F_{2y} y F_{3y} por el otro. Cada una de éstas se puede calcular con la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} F_{xi} &= F_i \cos \alpha_i \\ F_{yi} &= F_i \sin \alpha_i \end{aligned} \quad (2)$$

Figura 5 Descomposición de un sistema plano de fuerzas

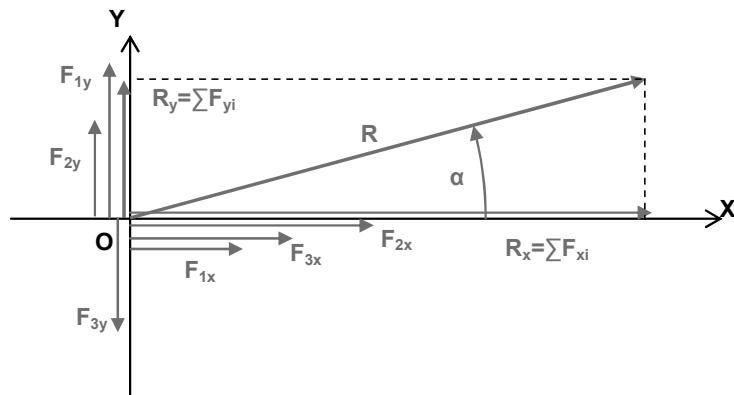


Obtenemos la resultante de cada subsistema efectuando la suma algebraica de cada componente, así obtenemos una resultante R_x y una Resultante R_y que reemplazan a las fuerzas F_{xi} y F_{yi} respectivamente.

Luego aplicando la composición de estas dos fuerzas obtenemos la resultante R del sistema y su orientación según se indica en la Figura 6.

$$\begin{aligned} R_x &= \sum F_{xi} & R &= \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \\ R_y &= \sum F_{yi} & \tan \alpha &= \frac{R_y}{R_x} \end{aligned} \quad (3)$$

Figura 6 Composición R_x y R_y



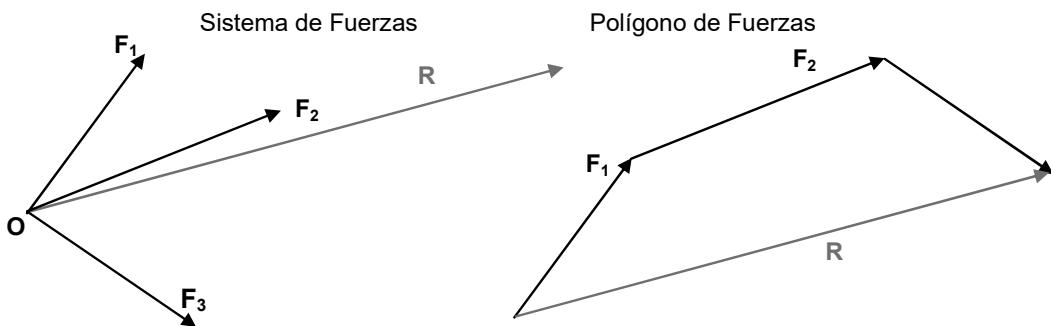
Si bien los métodos gráficos han ido perdiendo vigencia como métodos de análisis estructural, resultan útiles para visualizar cuestiones conceptuales del funcionamiento estructural, y/o verificaciones de cálculos analíticos previos. En este texto utilizaremos los métodos gráficos cuando nos ayuden a comprender algunas de estas cuestiones.

Un método gráfico para encontrar el módulo, dirección y sentido de la resultante de un sistema de fuerzas en el plano es la construcción del *polígono de fuerzas*.

El polígono de fuerzas es una construcción auxiliar que consiste en ubicar cada una de las fuerzas que componen el sistema cuya resultante se quiere encontrar, una a continuación de la otra y paralelas a las fuerzas originales. La fuerza resultante es aquella que tiene como origen al origen de la primera fuerza dibujada y como extremo, el extremo de la última fuerza dibujada. La resultante tiene el mismo punto de aplicación que las fuerzas que la originaron. En la

Figura 7 vemos la construcción del polígono de fuerzas para el sistema analizado.

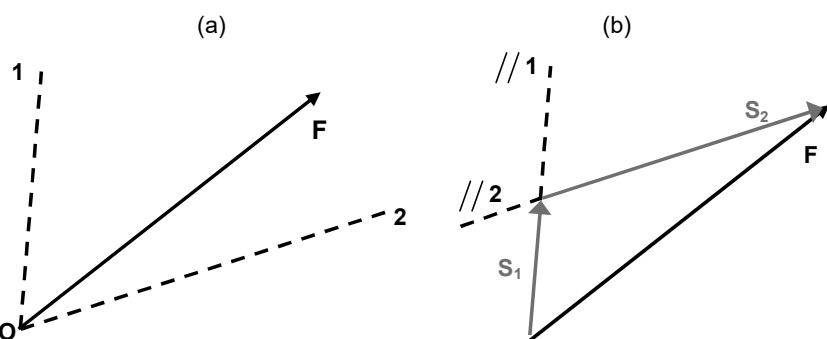
Figura 7 Polígono de Fuerzas



Veamos ahora el caso en que se quiera descomponer una fuerza en dos direcciones cualesquiera indicadas como 1 y 2 en la Figura 8.

En la parte (b) de la Figura 8 mostramos la solución gráfica del problema mediante la construcción del polígono de fuerzas consistente en trazar las paralelas a la dirección 1 y 2 por el origen y extremo de F respectivamente obteniendo así los vectores S_1 y S_2 representativos de las fuerzas componentes de F según las direcciones 1 y 2.

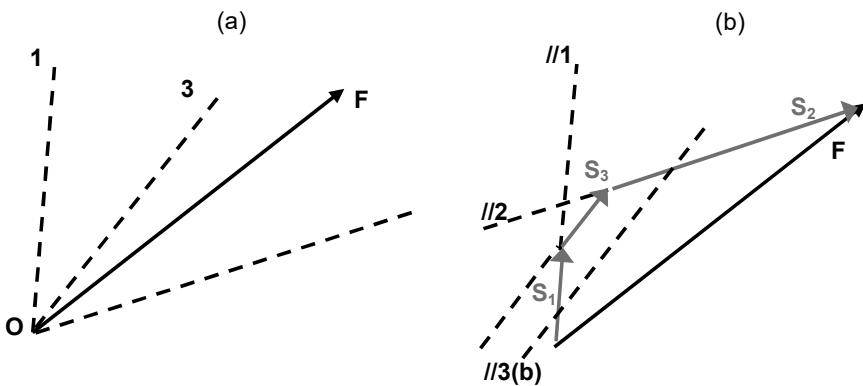
Figura 8 Descomposición de una fuerza en dos direcciones – Solución gráfica



Observando la solución gráfica, vemos que si hubiéramos querido descomponer F en tres direcciones pasantes por el punto O, el problema hubiera tenido infinitas soluciones porque no tendríamos una referencia en el polígono para trazar la paralela a la dirección 3. En la Figura 9

(b) vemos que para cada posición posible de la paralela a la dirección 3 obtenemos distintas soluciones del problema.

Figura 9 Descomposición en tres direcciones - Indeterminada



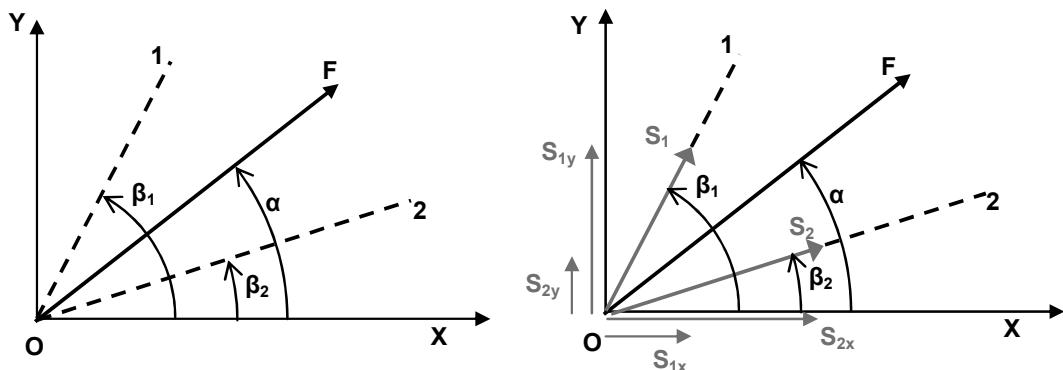
La solución analítica del problema se encuentra siguiendo los siguientes pasos graficados en la Figura 10:

- Elegimos un sistema ortogonal X-Y con origen en O, siendo los datos del problema los ángulos α , β_1 y β_2 , que forman la fuerza F, y las direcciones 1 y 2 con el semi-eje positivo X por un lado, y el módulo y sentido de F por el otro.
- Adoptamos sentidos arbitrarios para las fuerzas S_1 y S_2 según las direcciones 1 y 2 respectivamente
- Planteamos en cada dirección la ecuación que indica que la suma de las componentes es igual a la componente de la resultante en esa dirección, obteniendo así dos ecuaciones con dos incógnitas S_1 y S_2 .

$$\begin{aligned} S_1 \cos \alpha_1 + S_2 \cos \alpha_2 &= F \cos \alpha \\ S_1 \operatorname{sen} \alpha_1 + S_2 \operatorname{sen} \alpha_2 &= F \operatorname{sen} \alpha \end{aligned} \quad (4)$$

- Si quisiéramos descomponer a F en tres direcciones pasantes por O, obtendríamos un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas, S_1 , S_2 y S_3 que tendría infinitas soluciones posibles.
- *Concluimos que descomponer una fuerza en tres direcciones todas pasantes por un punto es un problema indeterminado desde el punto de vista estático.*

Figura 10 Descomposición en dos direcciones - Solución analítica

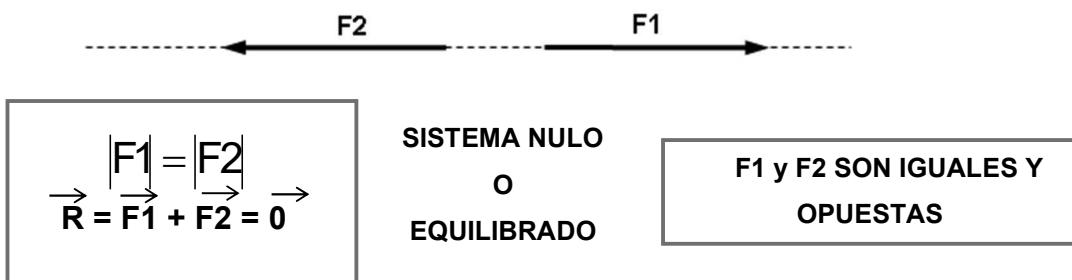


1.4 Fuerzas equilibradas

1.4.1 Definición

El segundo principio de la estática se refiere a las fuerzas en equilibrio y se puede enunciar así: “*Dos fuerzas F_1 y F_2 están en equilibrio únicamente si tienen la misma magnitud, la misma recta de acción y sentido contrario*”. Dos fuerzas que cumplan esta condición se dicen que son *iguales y opuestas*. El sistema esas dos fuerzas se llama *Sistema Nulo o Sistema Equilibrado* (SE). La Figura 11 resume lo enunciado en el párrafo anterior.

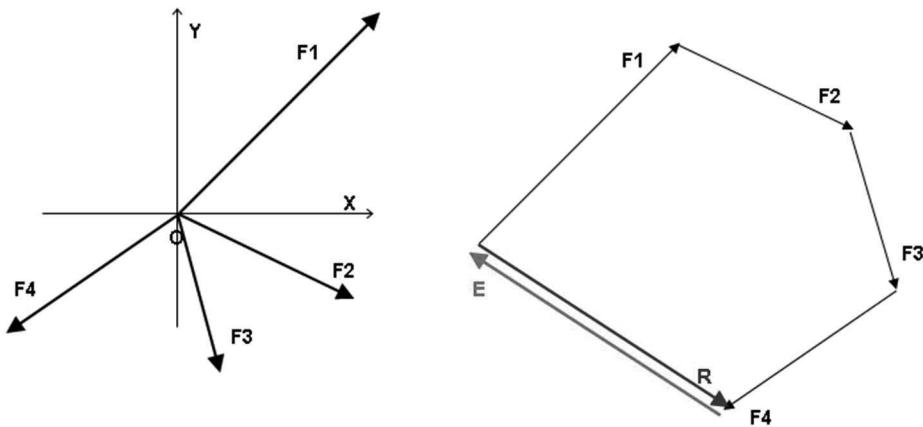
Figura 11 Sistema Equilibrado



1.4.2. Equilibrante de un sistema de fuerzas aplicadas en un punto

Una consecuencia de este principio es el concepto de *fuerza equilibrante*. Si tenemos un sistema de fuerzas aplicada en un punto O , por los mecanismos enunciados en los puntos anteriores podemos hallar su resultante. La fuerza igual y opuesta a esta resultante es la equilibrante del sistema.

Figura 12 Equilibrante



Solución gráfica para encontrar la equilibrante:

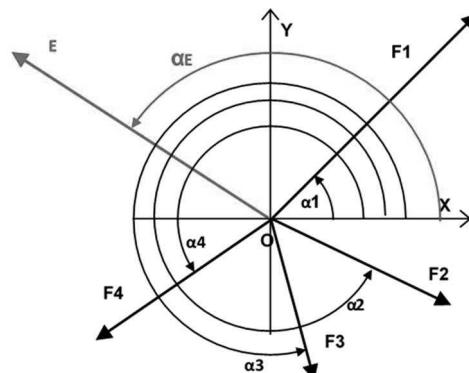
En la Figura 12 izquierda observamos el sistema de fuerzas F_1 a F_4 aplicadas en O , en la izquierda se observa el polígono de fuerzas, donde R es la resultante del sistema y E (igual y opuesta a R) es la equilibrante. Observemos que el polígono de fuerzas formado por F_1 , F_2 , F_3 , F_4 y E es un *polígono cerrado*, caracterizado porque el extremo de la última fuerza coincide con el origen de la primera. Entonces, *la condición gráfica para que un sistema de fuerzas aplicado en un punto O sea un sistema equilibrado es que su polígono de fuerzas sea cerrado*.

Solución analítica para encontrar la equilibrante:

Si la resultante del sistema es nula, entonces también lo serán sus componentes. Así deducimos la condición analítica para obtener la equilibrante de un sistema de fuerzas planteando dos ecuaciones algebraicas, similares a la utilizadas para calcular la resultante, pero igualadas a 0, donde las incógnitas serán las componentes de esa fuerza equilibrante buscada, que indicamos en la

Figura 13 y en las ecuaciones (5).

Figura 13 Cálculo analítico de la equilibrante

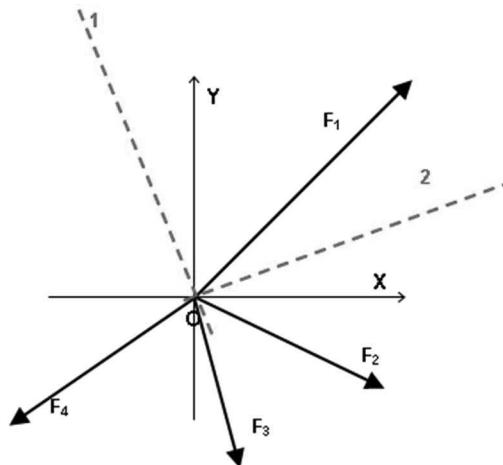


$$\begin{aligned}
 \sum F_x + E_x &= 0 & \sum F_i \cos \alpha_i + E_x &= 0 & E &= \sqrt{E_x^2 + E_y^2} \\
 \sum F_y + E_y &= 0 & \sum F_i \sin \alpha_i + E_y &= 0 & \tan \alpha_E &= \frac{E_y}{E_x}
 \end{aligned} \tag{5}$$

Observemos que si algunas de las fuerzas F_1 a F_4 cambian su magnitud, o su inclinación, lo mismo pasaría con la equilibrante E del sistema.

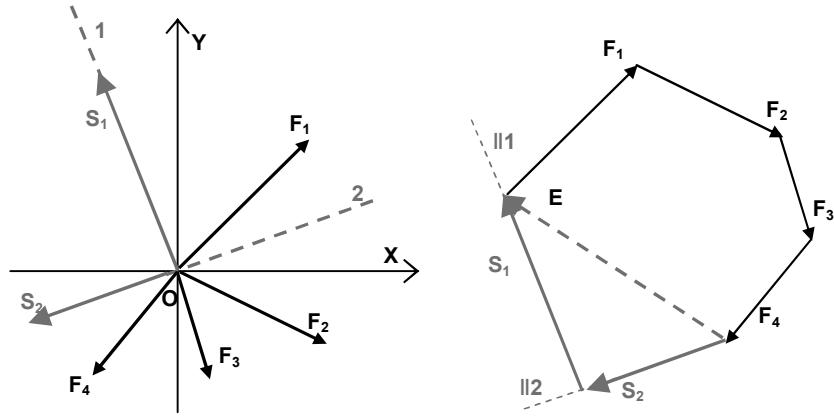
Analicemos el siguiente problema: dado un sistema de fuerzas F_1 a F_4 aplicadas en un punto O , y dos direcciones 1 y 2, con un ángulo de inclinación α_1 y α_2 respectivamente, respecto al semieje positivo $+X$, encontremos las componentes de la equilibrante en esas direcciones 1 y 2 como se plantea en la Figura 14.

Figura 14 Equilibrio de un sistema de fuerzas aplicadas en un punto O con dos direcciones pasantes por el punto



La solución gráfica de la Figura 15 se encuentra teniendo en cuenta que la condición de equilibrio es que el polígono de fuerzas F_1, F_2, F_3, F_4, S_1 y S_2 , debe ser un polígono cerrado. Por lo tanto por el origen de F_1 (primera fuerza del sistema) se traza una paralela a la dirección 1, y por el extremo de F_4 (última fuerza del sistema) una paralela a la dirección 2, quedando así determinadas las fuerzas S_1 y S_2 que cierran el polígono y por lo tanto equilibran al sistema. Vale la pena resaltar que la resultante de S_1 y S_2 es la equilibrante E del sistema. En este caso, si algunas de las fuerzas F_i cambia de magnitud u orientación, siempre va a ser posible encontrar con las direcciones 1 y 2 otro conjunto de fuerzas S_1 y S_2 que cierren el nuevo polígono.

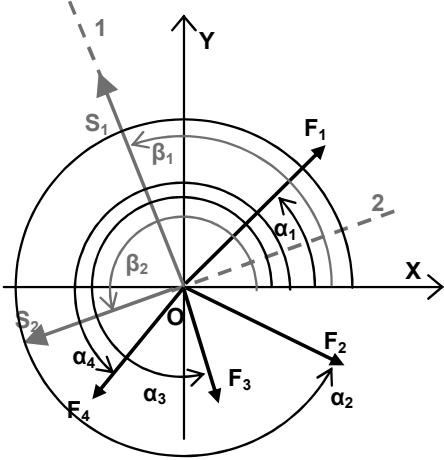
Figura 15 Equilibrio con dos direcciones - Solución gráfica



Para resolver analíticamente el problema planteado, debemos tener en cuenta que si el sistema de fuerzas tiene resultante nula, también lo serán las componentes de esta resultante en nuestro sistema de referencia X-Y. Para ello procedemos de la siguiente manera:

- Asumimos sentidos arbitrarios de las fuerzas S_1 y S_2 , quedando así definidos sus ángulos β_1 y β_2 que forman con el semieje X positivo (Figura 16).
-

Figura 16 Equilibrio con dos direcciones - Solución analítica



- Con los sentidos de las fuerzas supuestos se planteamos las ecuaciones (6), que expresan la nulidad de la componente de la resultante en X y en Y respectivamente, obteniendo un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas S_1 y S_2 . Si alguno de estos valores resultara negativo al resolver el sistema, significa que el sentido real de la fuerza es contrario al que supusimos al inicio del cálculo:

$$\begin{aligned} \sum F_{xi} + \sum S_{xi} &= 0 & \sum F_i \cos \alpha_i + S_1 \cos \beta_1 + S_2 \cos \beta_2 &= 0 \\ \sum F_{yi} + \sum S_{yi} &= 0 & \sum F_i \sin \alpha_i + S_1 \sin \beta_1 + S_2 \sin \beta_2 &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

- Como son sólo dos las ecuaciones (6) que se pueden plantear, si quisieramos equilibrar el sistema con tres fuerzas o más en O, el problema no tendría solución única desde un

punto de vista estático, porque tendríamos un sistema de dos ecuaciones con más de dos incógnitas.

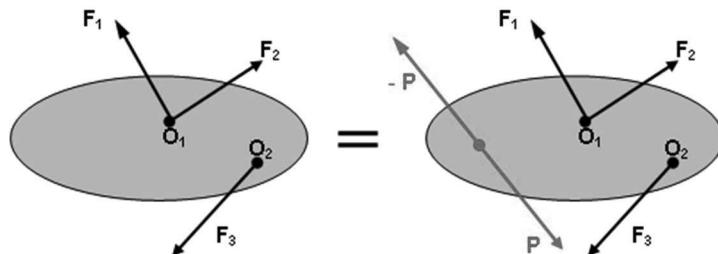
- Si alguna de las fuerzas F_i cambiara de magnitud o dirección, el sistema tendría otra solución pero siempre posible. Concluimos que *con dos direcciones dadas siempre podremos equilibrar cualquier conjunto de fuerzas F_i aplicadas en el punto intersección de esas dos direcciones*. Sobre este concepto volveremos en párrafos posteriores, y en oportunidad de tratar los sistemas planos vinculados.

El concepto de sistema equilibrado constituye uno de los pilares del diseño estructural: dado un cuerpo sometido a la acción de un sistema de fuerzas, que tiene una resultante determinada, debemos adicionar los elementos necesarios para que puedan dar por resultante una fuerza igual y opuesta a la primera de manera que el conjunto esté en situación de equilibrio.

1.4.3 Adición y sustracción de sistemas equilibrados

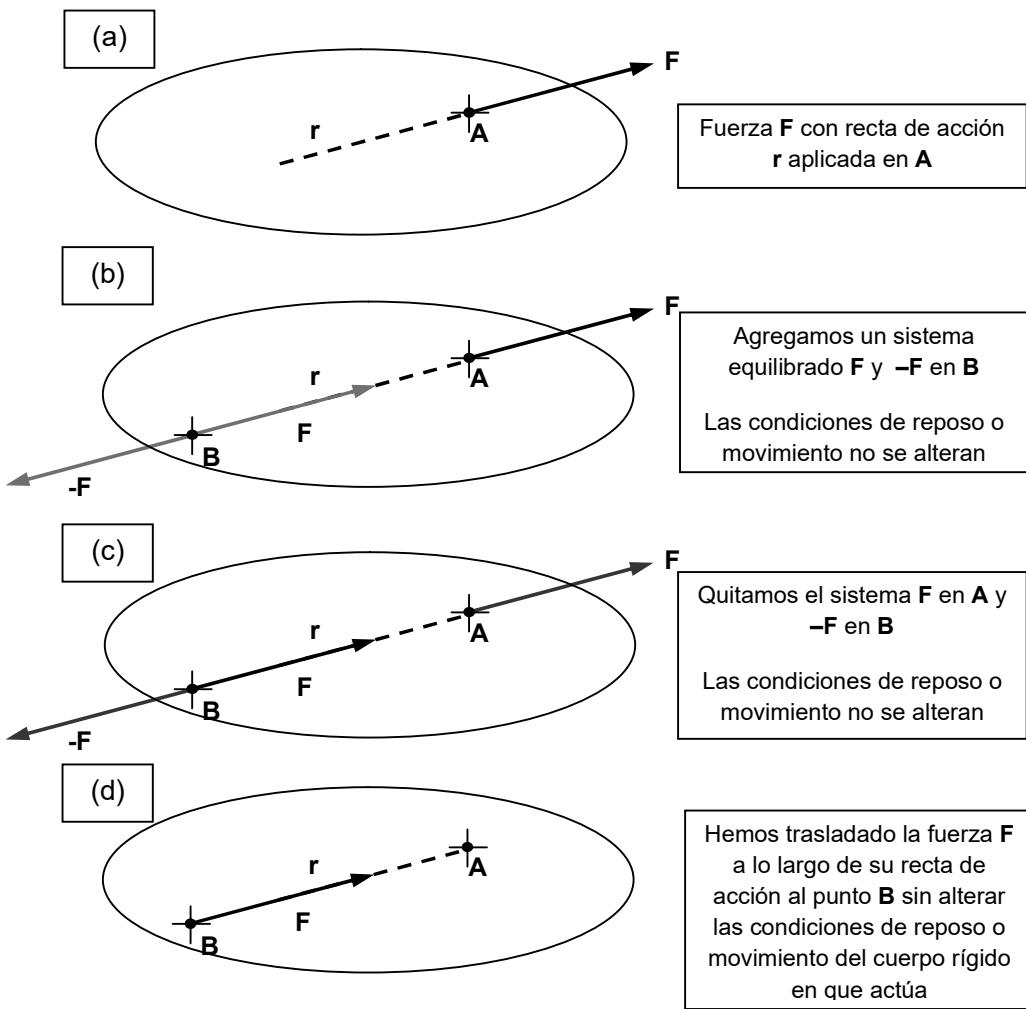
El tercer principio de la estática se puede enunciar de este modo: “*Las condiciones de reposo o movimiento de un cuerpo rígido sometido a la acción de un sistema de fuerzas no se alteran si se agrega sobre el cuerpo un sistema de fuerzas equilibrado*”.(Figura 17)

Figura 17 Tercer principio de la estática



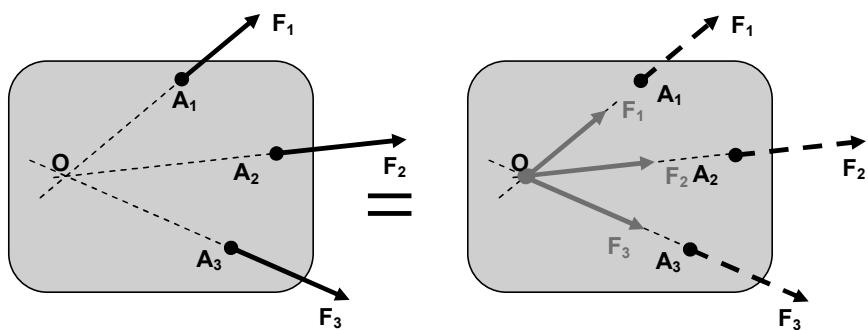
Una primera aplicación, consiste en el *teorema de transmisibilidad* de fuerzas, que se puede enunciar así: “*Las condiciones de reposo o movimiento de un cuerpo rígido bajo la acción de una fuerza no se alteran si se desplaza el punto de aplicación de la misma a lo largo de su recta de acción*”. La Figura 18 muestra la demostración de este teorema.

Figura 18 Teorema de transmisibilidad



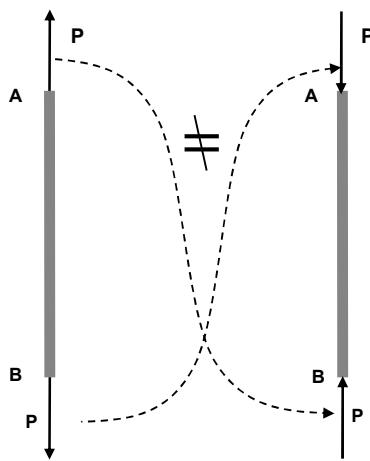
Una segunda aplicación, y consecuente con el teorema de transmisibilidad, es la que se refiere a *fuerzas concurrentes*, entendiendo que un *cuerpo rígido* está sometido a un *sistema de fuerzas concurrentes* cuando las rectas de acción de cada una de las fuerzas se cortan en un único punto O . La Figura 19 ilustra esta situación. De esta manera todo lo escrito hasta aquí referente a sistemas de fuerzas aplicadas en un punto vale también para el caso de fuerzas concurrentes.

Figura 19 Fuerzas concurrentes



Esto es válido para el caso de cuerpos rígidos, digamos a esta altura que la situación real en el caso de la Figura 19 es que los puntos materiales donde están aplicadas las fuerzas F_i , son los puntos A_i . Lo que expresa el teorema es que las condiciones de reposo o movimiento del cuerpo no cambian si las fuerzas estuvieran aplicadas en O, siempre y cuando sea un cuerpo rígido. En el caso que esta condición no se cumpla, es decir que el cuerpo sea deformable, lo que le suceda internamente en uno u otro caso será bien diferente. Sobre esta cuestión volveremos a ocuparnos en capítulos posteriores. Por ahora tratemos de visualizar esta limitación con el ejemplo de la Figura 20: en el caso de la izquierda tenemos una barra AB con dos fuerzas iguales y opuestas en A y B que tienden a alargar la barra si esta fuera deformable. Aplicando el teorema de transmisibilidad, podríamos llevar la carga P en A al extremo B a lo largo de su recta de acción, y lo mismo con la carga originalmente aplicada en B, al extremo A. El teorema nos dice que las condiciones de equilibrio de la barra no se alteran, pero si ésta es deformable, su comportamiento cambia porque ahora trata de acortarse. Si fuera un cable, esta segunda situación no se podría lograr.

Figura 20 Limitaciones del teorema de transmisibilidad



1.5 Momento de una fuerza

1.5.1 Definición

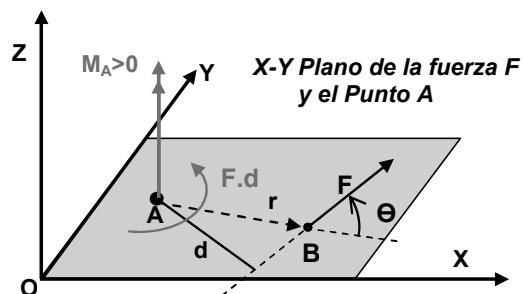
Definiremos el momento de una fuerza aplicada en un punto B del plano X-Y, con respecto a un punto A del mismo plano, al producto del módulo de dicha fuerza, por la distancia d, entre la recta de acción de la fuerza F y el punto A. La distancia d se mide sobre la perpendicular que pasa por el punto A, a la recta de acción de la fuerza F.

Una definición con más rigurosidad matemática define el momento de la fuerza F aplicada en B, con respecto al punto A como el producto vectorial del radio vector r con origen en A y extremo en B, con el vector F. El resultado es un vector M_A perpendicular al plano donde se

encuentran r y F (en este caso el plano X-Y), cuyo sentido se obtiene mediante la regla de la mano derecha cuando el radio vector r gira posicionándose en la dirección de F el ángulo Θ . El módulo de ese vector es el producto de los módulos de r , F y el seno del ángulo Θ . Observemos en la Figura 21 que las dos definiciones son coincidentes, ya que $r \sin \Theta$ es d :

$$M_A = r \wedge F = r \cdot F \cdot \sin \theta = Fd \quad (7)$$

Figura 21 Momento de una fuerza respecto a un punto



M es positivo si produce giro antihorario

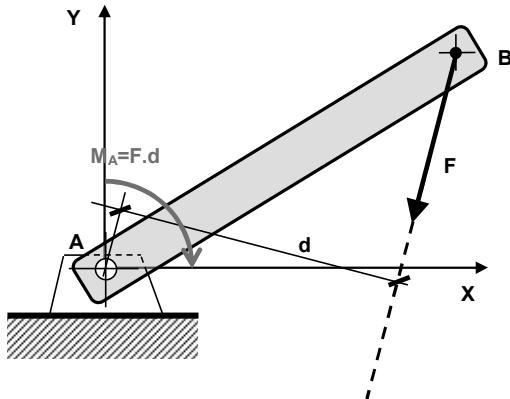


M es negativo si produce giro horario



En lo que sigue del texto nos quedaremos con la primera definición más conceptual, pero teniendo en cuenta que se trata de una magnitud vectorial, debemos definir su signo. Para ello veamos el significado físico del momento de una fuerza. En la Figura 22 se muestra una barra plana que está vinculada mediante un bulón en su extremo A a una chapa fija, y en el extremo B se aplica una fuerza F. Si la recta de acción de la fuerza F no pasa por el punto A la chapa girará en el sentido que se indica en la figura, cuanto mayor sea la distancia d, mayor será este efecto. Entonces el momento de una fuerza respecto a un punto mide la capacidad de la fuerza de hacer girar el objeto alrededor del punto aunque con más rigurosidad debiéramos decir que gira alrededor de un eje pasante por O y normal al plano X-Y. Ese giro está representado por un vector normal al plano en el que actúa el momento (en este caso el eje global Z), y su sentido surge de considerar la regla de la mano derecha. Volviendo a la Figura 21 se ve que el momento indicado es positivo porque M_A tiene la orientación del semieje positivo Z, o lo que es lo mismo la fuerza F tiende a provocar un giro alrededor de A en sentido contrario a las agujas del reloj. En el caso de la Figura 22, el momento M_A es negativo, esto es en el sentido de las agujas del reloj.

Figura 22 Significado físico del momento de una fuerza



1.5.2 Teorema de Varignon

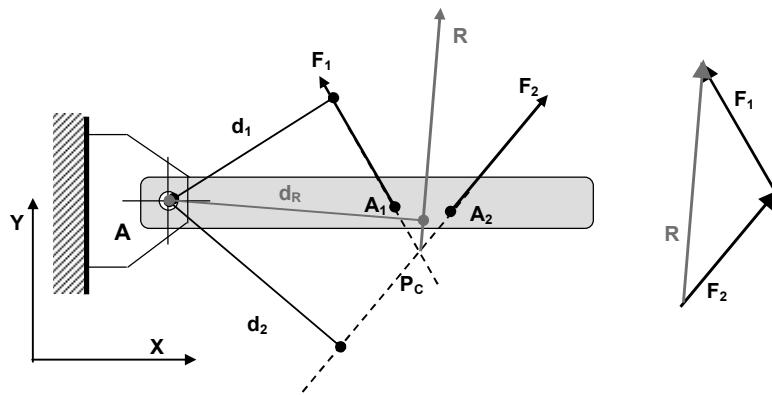
El teorema de Varignon de gran aplicación en el campo de la estática puede enunciarse del siguiente modo para el caso de los sistemas de fuerzas contenidos en el plano: *“El momento de dos o más fuerzas contenidas en un mismo plano, respecto de un punto de ese plano es igual al momento de la resultante de dichas fuerzas respecto del mismo punto del plano”.*

Mo: Momento de la resultante respecto de O

$$M_O = \sum_1^n M_{O_i}^{F_i} \quad (8) \quad \sum_1^n M_{O_i}^{F_i} \text{ Momento de c/u de las fuerzas respecto de O}$$

No intentaremos la demostración rigurosa del teorema, pero si tenemos en cuenta que el momento es una magnitud vectorial, representado por un vector normal al plano determinado por la fuerza y el punto considerado, como todas las fuerzas están contenidas en el plano XY, entonces todos los vectores son perpendiculares a ese plano y por lo tanto colineales, con lo cual la suma de los mismos se transforma en la suma algebraica de sus módulos.

Figura 23 Teorema de Varignon en el plano

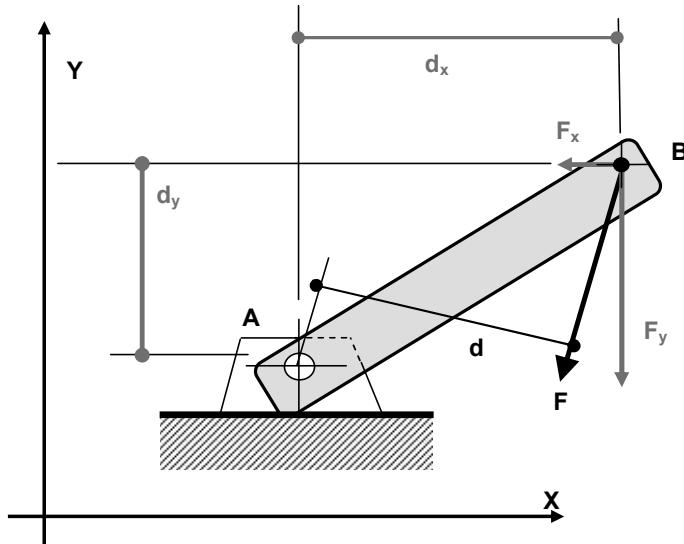


En el caso de la Figura 23, tenemos un elemento plano que por ahora denominaremos “chapa”, que se encuentra vinculada mediante una unión con bulón pasante a una placa fija a través del punto A (en capítulos posteriores volveremos sobre esta cuestión con más detenimiento). En esta chapa actúan dos fuerzas F_1 y F_2 en los puntos A_1 y A_2 respectivamente.

Las dos fuerzas F_1 y F_2 concurren al punto de concurrencia P_c , por el cual pasa la resultante del sistema R que se obtiene en el polígono de fuerzas de la derecha. Aplicando el Teorema de Varignon (ecuación (8), podemos calcular el momento de la resultante como la suma de los momentos de cada una de las fuerzas F_1 y F_2 .

$$M_A = Rd_R = F_1d_1 + F_2d_2 \quad (9)$$

Figura 24 Momento respecto de un punto de las componentes de una fuerza



En la Figura 24 vemos una chapa de similares características de la anterior bajo la acción de una fuerza F aplicada en el punto B . En este caso el momento de la fuerza F respecto al punto A , por aplicación del teorema de Varignon, es igual al momento de las componentes ortogonales de F en el sistema XY , F_x y F_y

$$M_A = Fd = -F_xd_y + F_yd_x \quad (10)$$

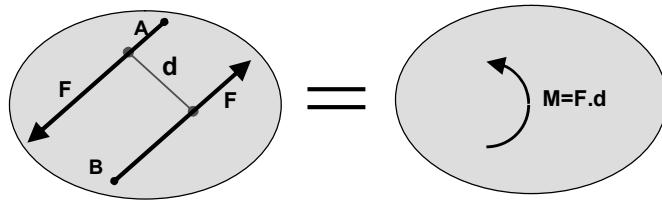
Es muy importante tener en cuenta que tanto d_x como d_y son distancias según los ejes X e Y respectivamente y como tales son siempre positivas. El signo en la ecuación de momento debe introducirse teniendo en cuenta el sentido de giro que impone la fuerza respecto al punto a que se toma momento.

1.6 Pares de fuerzas o cuplas

1.6.1. Definición y propiedades

Dos fuerzas actuantes en un cuerpo rígido, de igual magnitud, sentido contrario y rectas de acción paralelas, no coincidentes de denominan una pareja o par de fuerzas.

Figura 25 Par de fuerzas

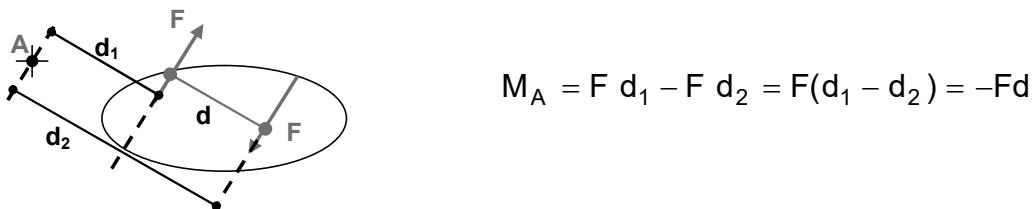


Así en el cuerpo rígido de la Figura 25, la fuerza F aplicada en el punto A, y la fuerza F de sentido contrario y paralela aplicada en el punto B, constituyen un par de fuerzas, y el efecto sobre el cuerpo rígido es producir una rotación. Como el momento, el par es una magnitud vectorial, y el vector es normal al plano en el que actúa el par, valiendo entonces la misma convención de signos que para el momento: sentido horario negativo, y antihorario positivo.

Las cuplas tienen las siguientes propiedades:

- La cupla está caracterizada por el producto de la fuerza F y la distancia d entre las rectas de acción de ambas. Si varían simultáneamente ambos pero manteniendo constante el producto, el efecto sobre el cuerpo rígido es el mismo.
- El momento de ambas fuerzas respecto de cualquier punto del plano en la que la misma actúa, es el mismo y es igual al producto $F.d$. como se observa en la Figura 26, donde el signo menos indica que este par tiene sentido horario

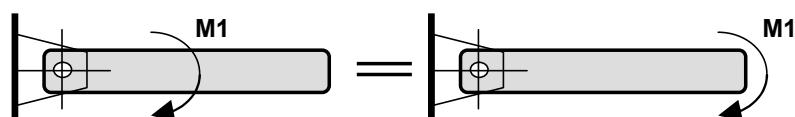
Figura 26 Momento constante respecto a cualquier punto



Cuando se trata de cuerpos rígidos planos, las cuplas pueden desplazarse a cualquier punto del plano en el que actúa sin que cambie su efecto, en analogía con el teorema de traslación de fuerzas a lo largo de su recta de acción. Ver

Figura 27.

Figura 27 Traslación de cuplas

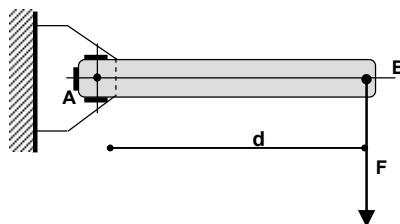


- Las cuplas que actúan en un mismo plano se pueden sumar algebraicamente, en razón que los vectores que las definen son todos colineales y normales al plano que las contienen.

1.6.2. Aplicación a la traslación de fuerzas en el plano

Consideremos el esquema estructural elemental de la Figura 28, consistente en una chapa plana rígida AB, imposibilitada de moverse por encontrarse en su extremo A soldada a una placa fija, y en su extremo libre B sometida a la acción de una fuerza F vertical. Como señaláramos al inicio del capítulo, la función de la estructura es llevar las cargas desde sus puntos de aplicación a los apoyos. Tratemos de analizar como “viaja” la carga F desde el punto de aplicación B hasta el apoyo en A.

Figura 28 Traslación de fuerzas en el plano



Observemos que la recta de acción de F no pasa por A, con lo cual no podemos aplicar el teorema de transmisibilidad. Debemos trasladar la fuerza paralelamente a sí misma y no según su recta de acción.

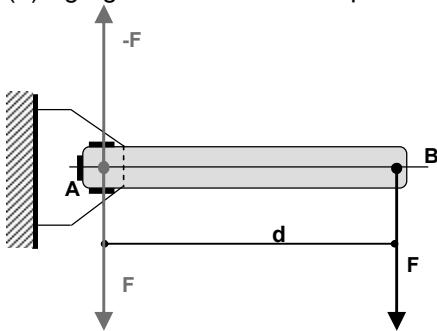
Para resolver esto procedemos del siguiente modo:

Agregamos un sistema equilibrado (las condiciones estáticas no se alteran), $-F$ en A como mostramos en la Figura 29a.

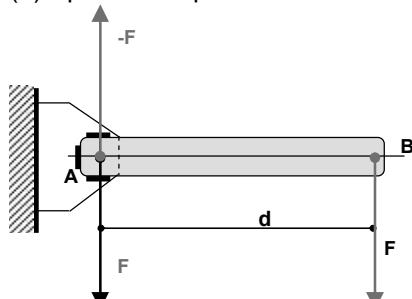
Las fuerzas F en B, y $-F$ en A constituyen un par de valor $F.d$ (Figura 29b) que se puede aplicar en cualquier punto del plano. El sistema original resulta equivalente a la fuerza en A, más el par $F.d$ en sentido horario que vemos en la Figura 29c

Figura 29 Traslación de fuerzas

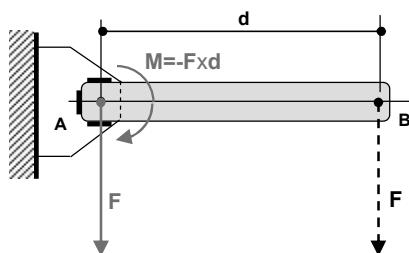
(a) Agregamos un sistema equilibrado:



(b) Aparece un par:



(c) Sistema equivalente:



En resumen para trasladar la carga F de B a A, hay que agregar un par que se obtiene como el producto de la carga, por la distancia que existe entre la recta de acción de la fuerza en su posición original y el punto al cual se traslada la fuerza. El sentido se obtiene observando el sentido de giro que produce la fuerza en su posición original, con respecto al punto al cual se traslada.

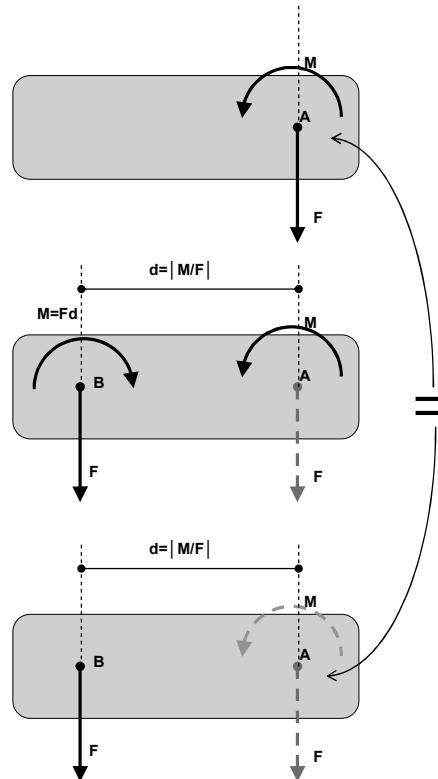
En capítulos posteriores veremos que el apoyo deberá en consecuencia impedir la translación vertical de la barra, y también deberá impedir el giro provocado por este par.

Consideremos el problema inverso, es decir si en un cuerpo plano o chapa, están actuando simultáneamente una fuerza F en A y un par M. Si trasladamos la fuerza F una distancia d igual a $|M/d|$, debemos agregar un par como consecuencia de ese traslado de módulo igual al par actuante. Si elegimos el sentido de traslado de manera que ambos pares tengan sentido contrario se anularán mutuamente.

Por lo tanto el efecto del par es producir un desplazamiento de la fuerza F paralelamente a sí misma en la distancia d que se obtiene dividiendo el módulo del par por el módulo de la fuerza. El sentido del desplazamiento de la fuerza será tal que el nuevo par a agregar como consecuencia de este desplazamiento anule al par preexistente M.

Figura 30 podemos visualizar la secuencia que describimos aquí, indicando con línea de puntos las posiciones que ocuparon las fuerzas antes de su translación. Observemos que la fuerza en A se desplazó a B en el sentido que actúa el par M.

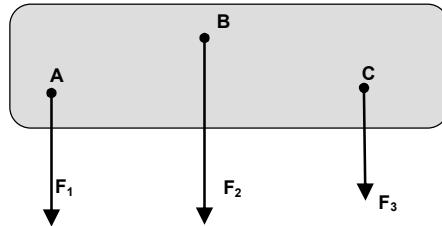
Figura 30 Desplazamiento de una fuerza como consecuencia de un par



1.7. Fuerzas Paralelas

Cuando un cuerpo rígido está sometido a la acción de fuerzas cuyas rectas de acción son paralelas, decimos que el sistema de fuerzas es un sistema de fuerzas paralelas. En el caso que todas las fuerzas estén contenidas en un plano, el sistema de fuerzas paralelas es un sistema plano, y el cuerpo rígido se puede considerar como una “chapa rígida plana”.

Figura 31 Sistema de fuerzas paralelas en el plano



En la

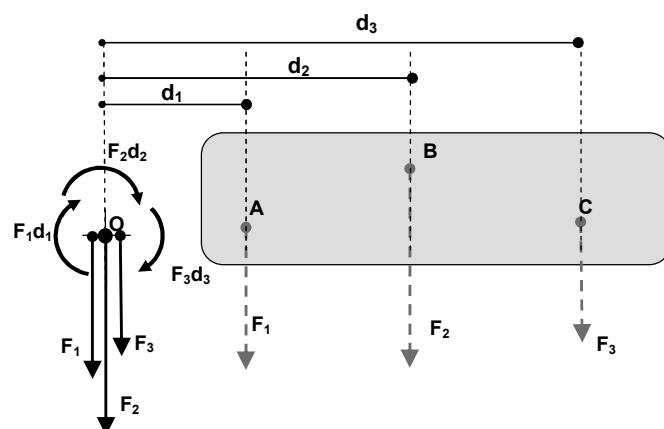
Figura 31 vemos una chapa rígida plana sometida bajo la acción de tres fuerzas paralelas, F_1 , F_2 y F_3 aplicadas en los puntos A, B y C respectivamente. El problema consiste en hallar la fuerza resultante que según el principio homónimo podría reemplazar al conjunto de las F_i .

En este caso, a diferencia del caso de fuerzas concurrentes; no se conoce ningún punto de la recta de acción de la resultante.

Para encontrar la resultante tenemos algunas herramientas disponibles:

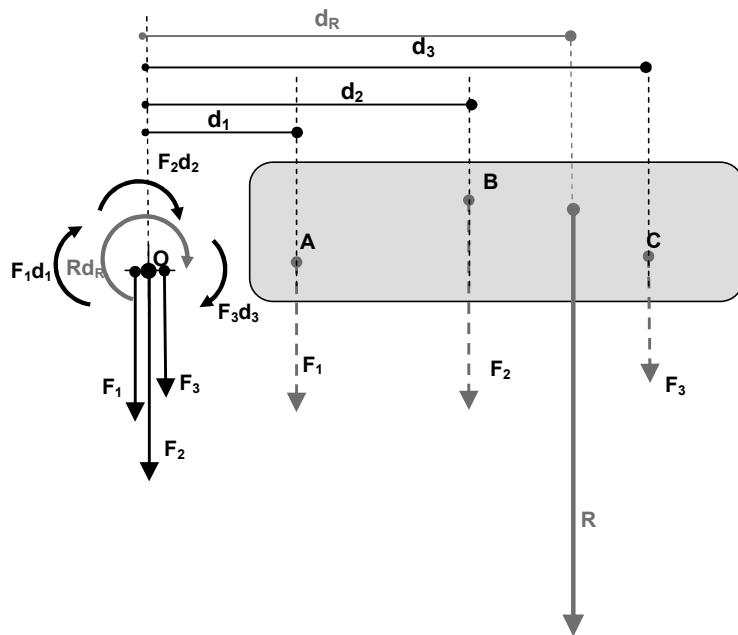
- Podríamos trasladar todas las fuerzas a un punto cualquiera del plano, aplicando la regla de traslación vista.
- A cada traslación se le agregaría la cupla obtenida calculando el momento respecto del punto elegido de la fuerza F_i en su posición original $M_i = F_i d_i$.
- En ese caso las fuerzas F_i serían colineales y su resultante es la suma algebraica de cada una de ellas $R = \sum F_i$, y habría una cupla resultante igual a la suma algebraica de cada cupla $M_R = \sum M_i = \sum F_i d_i$ como vemos en la Figura 32.

Figura 32 Traslación de las fuerzas a O



- Según el teorema de Varignon, el momento de las fuerzas F_i respecto del punto O debe ser igual al momento de la resultante respecto al mismo punto, con lo cual podemos establecer la distancia desde O a la que pasa la resultante según la Figura 33.

Figura 33 Ubicación de la resultante de fuerzas paralelas



- Resumiendo, en un sistema de fuerzas paralelas la resultante y su ubicación se obtienen con las siguientes dos expresiones:

$$R = \sum_{i=1}^n F_i \quad (11)$$

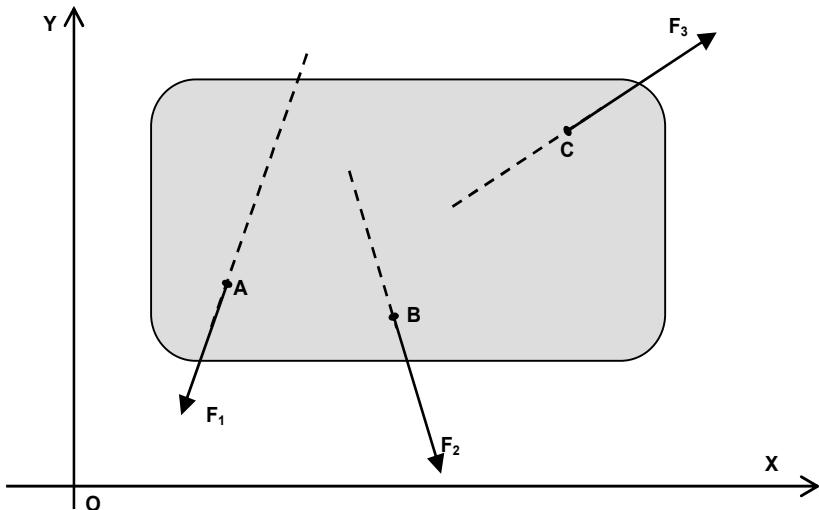
$$|d_R| = \left| \frac{\sum_{i=1}^n F_i d_i}{R} \right|$$

- En la segunda de las expresiones (11) por tratarse de una distancia, el valor de d_R que se obtiene es en módulo, y en el denominador interviene el módulo de R .
- *Para terminar de ubicar la resultante, es decir si d_R se mide hacia la izquierda o la derecha de O debe tenerse en cuenta que el sentido del par Rd_R de la resultante debe coincidir con el sentido de la suma de los pares $F_i d_i$. En el caso analizado, como todos los pares son en sentido horario, y la resultante es hacia abajo, entonces la resultante debe pasar a derecha del punto O.*

1.9. Fuerzas no concurrentes en el plano

El caso general de sistemas planos de fuerzas consiste en un conjunto de fuerzas no concurrentes, que puede o no incluir pares, como por ejemplo las tres fuerzas F_1 , F_2 y F_3 en la Figura 34, actuando en los puntos A, B y C de una chapa contenida en el plano XY.

Figura 34 Fuerzas no concurrentes



En este caso no se conoce ningún punto de la recta de acción de la resultante lo que dificulta el problema.

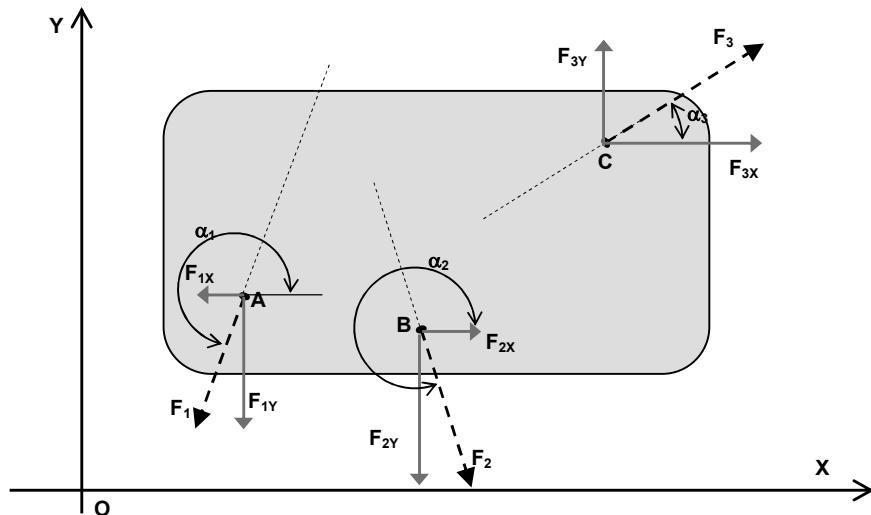
A esta altura, debemos hacer una aclaración importante, las fuerzas F_1 , F_2 y F_3 tiene sus puntos de aplicación materiales A, B y C. El significado de la resultante es que el cuerpo se comporta como si actuara esa única fuerza R , pero las fuerzas materialmente aplicadas son las fuerzas F_i . Por lo tanto carece de sentido hablar de un punto de aplicación de la resultante, porque tal punto materialmente no existe; sí tiene sentido hablar de recta de acción porque hemos demostrado antes que una fuerza se puede trasladar a lo largo de su recta de acción sin que su efecto sobre el cuerpo rígido varíe.

Entonces lo que estamos buscando es la ubicación de una recta y no un punto de coordenadas X e Y determinada. En consecuencia según los diferentes planteos que formulemos, encontraremos diferentes puntos que estarán sobre la recta de acción de la resultante.

Primer Planteo:

En el inciso anterior vimos como calcular la ubicación de la resultante de fuerzas paralelas, entonces si reemplazamos las fuerzas F_1 , F_2 , F_3 por sus componentes en X e Y respectivamente, tendremos dos sistemas de fuerzas paralelas, F_{1x} , F_{2x} y F_{3x} por un lado, y F_{1y} , F_{2y} , F_{3y} por el otro, según vemos en la Figura 35. Luego podemos encontrar la ubicación de las resultante R_x y R_y de las fuerzas en X y en Y respectivamente aplicando lo visto para fuerzas paralelas. El sistema queda reducido a dos fuerzas R_x y R_y , que concurren a un punto, por donde pasará la resultante general del sistema.

Figura 35 Descomposición del sistema no concurrente en dos sistemas de fuerzas paralelas

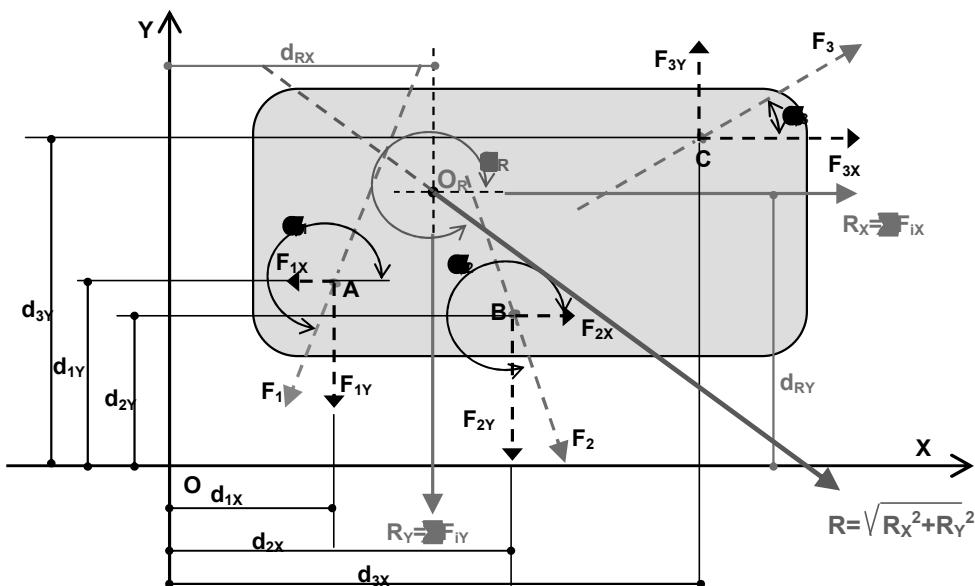


Recordemos que,

$$\begin{aligned} F_{iX} &= F_i \cos \alpha_i & (12) \\ F_{iY} &= F_i \operatorname{sen} \alpha_i \end{aligned}$$

En la Figura 35, el sistema original quedó reemplazado por dos sistemas de fuerzas paralelas en X e Y, respectivamente de los que sabemos calcular su resultante, y la ubicación de la recta de acción de ambas con lo visto en el inciso anterior, tomando momentos respecto a un punto cualquiera O del plano.

Figura 36 Ubicación de las resultantes R_x y R_y y recomposición



Tomando momentos respecto de O, o de cualquier otro punto del plano, para cada uno de los sistemas podemos obtener la ubicación de las rectas de acción de R_x y R_y , dibujadas en rojo en la Figura 36. Es decir el sistema se ha reducido a dos fuerzas ortogonales R_x y R_y . Estas dos fuerzas concurren al punto O_R , por donde pasa entonces la resultante R del sistema.

Resumimos los pasos realizados,

- Con las ecuaciones (12) calculamos las componentes F_{ix} y F_{iy}
- Calculamos luego las resultantes R_x y R_y y su orientación por las ecuaciones (13):

$$\begin{aligned} R_x &= \sum_1^n F_{ix} = \sum_1^n F_i \cos \alpha_i \\ R_y &= \sum_1^n F_{iy} = \sum_1^n F_i \operatorname{sen} \alpha_i \\ \alpha_R &= \arctan \frac{R_y}{R_x} \\ R &= \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \end{aligned} \quad (13)$$

- Finalmente ubicamos las resultantes R_x y R_y de la manera vista en el caso de fuerzas paralelas (ecuaciones (14))

$$d_{Rx} = \left| \frac{\sum_1^n F_{iy} d_{ix}}{R_y} \right| \quad (14)$$

$$d_{Ry} = \left| \frac{\sum_1^n F_{ix} d_{iy}}{R_x} \right|$$

Volvemos a resaltar que lo que calculamos con las ecuaciones (14) son distancias, por lo tanto son en valor absoluto. La ubicación de las rectas de acción de R_x y R_y se obtendrá de manera que el sentido de rotación que estas resultantes provoquen sea igual al sentido de rotación que imprime la suma de los momentos de cada componente en cada eje.

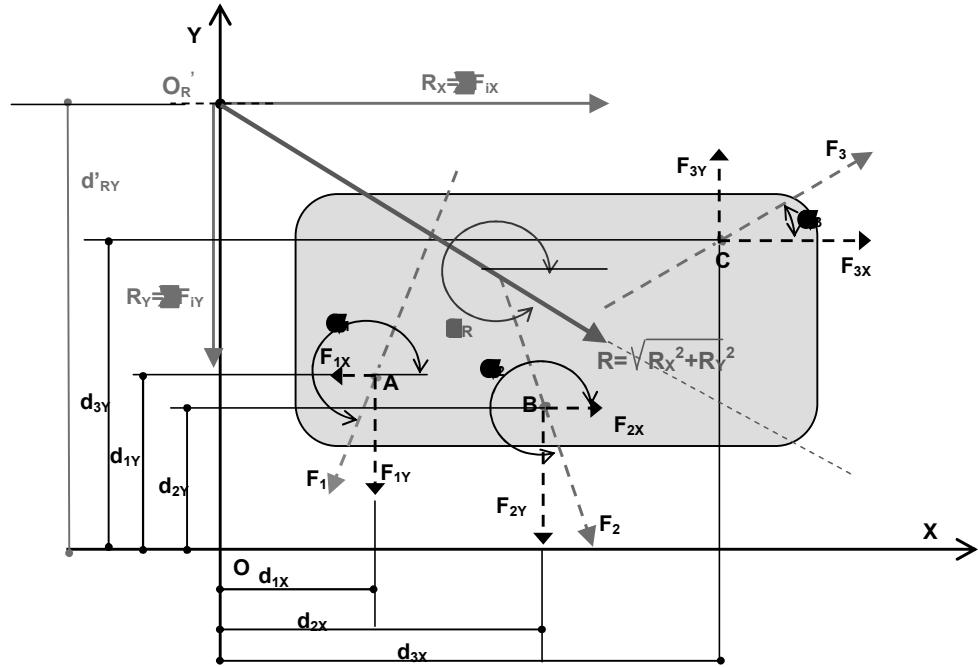
En el caso que hemos elegido como testigo, hemos supuesto que el balance de momentos respecto de O de las fuerzas F_{ix} , es de sentido horario, y como también hemos supuesto que el balance de la suma de las fuerzas F_{ix} es positivo (hacia derecha), concluimos que R_x debe pasar por arriba de O en la distancia d_{Ry} , para que su momento también sea en sentido horario. De manera similar podemos seguir el razonamiento para deducir que R_y debe pasar a derecha de O.

Una vez obtenidas las distancias d_{Rx} y d_{Ry} y su ubicación, pueden transformarse en coordenadas, aplicando el signo correspondiente (en el caso testigo son ambas positivas). Así obtenemos un punto O_R , que es un punto de la recta de acción de la resultante R.

Un segundo planteo posible:

Sabemos que la resultante se puede desplazar a lo largo de su recta de acción, sin que su efecto sobre la chapa rígida se altere. Por lo tanto, podríamos elegir como punto de aplicación de la resultante el punto O'_R en el que la resultante corta al eje y, ubicado a la distancia d'_{Ry} del origen como vemos en la Figura 37.

Figura 37 Cálculo de resultante – Segunda opción



Igual que en la opción anterior, descomponemos cada una de las fuerzas actuantes en sus componentes F_{ix} y F_{iy} porque resulta más sencillo trabajar con un sistema ortogonal de fuerzas.

De la recta de acción de R elegimos el punto donde corta al eje Y y aplicamos el teorema de Varignon a la totalidad de las fuerzas.

El momento de la resultante es igual a la suma del momento de las componentes R_x y R_y , pero la componente R_y pasa por el punto O , por lo tanto no produce momento.

Para el cálculo de la resultante, su módulo, dirección y sentido son de aplicación las ecuaciones (13). El valor de la distancia d'_{RY} se obtiene de igualar el momento total respecto de O de las fuerzas F_{ix} y F_{iy} con el momento de la componente R_x , respecto al mismo punto porque como dijimos recién R_y no produce momento en O , obteniendo la ecuación (15).

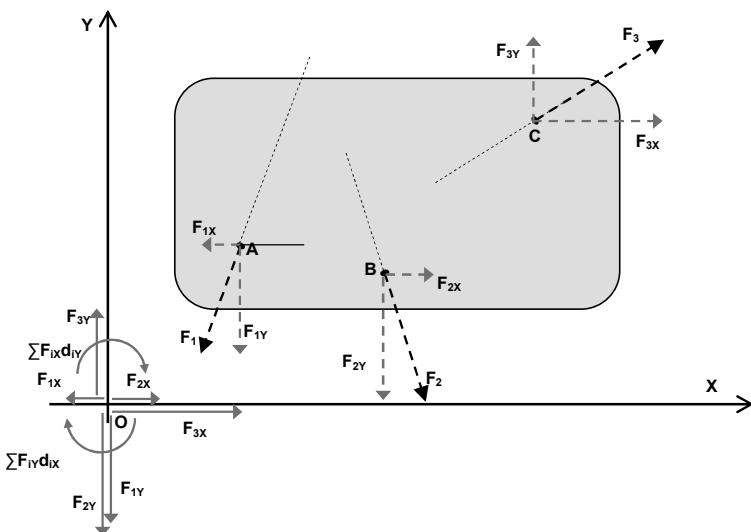
$$|d'_{RY}| = \left| \frac{\sum_{i=1}^n F_{ix} d_{iy} + \sum_{i=1}^n F_{iy} d_{ix}}{R_x} \right| \quad (15)$$

Conceptualmente podríamos resumir el procedimiento así:

- *Reducción del sistema al punto O : La operación de tomar momento de todas las fuerzas respecto de un punto O , es conceptualmente trasladar todas las fuerzas a ese punto adicionando los pares respectivos producto de esas traslación (Figura 38).*
- *Como ahora las fuerzas están aplicadas en un mismo punto se puede calcular la resultante R_x , la resultante R_y de las fuerzas en X e Y , y luego componerlas para hallar la resultante R del sistema con las ecuaciones (13).*

- Luego o trasladamos la resultante paralelamente a sí misma por efecto del par, o trasladamos una de sus componentes si queremos encontrar donde corta a cada eje la recta de acción de R con las ecuaciones (14) o (15) respectivamente. El sistema queda reducido a una única fuerza R .

Figura 38 Reducción del sistema a O



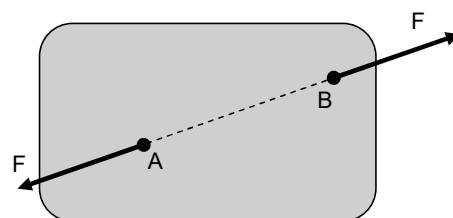
1.9 Sistemas equilibrados

1.9.1 Introducción

Habiendo visto ya los sistemas planos de fuerzas, el cálculo del módulo dirección y sentido de su resultante, la ubicación de su recta de acción, la traslación de fuerzas a lo largo y perpendicularmente respecto de su recta de acción, y lo referente cuplas y momentos de una fuerza, podemos establecer las condiciones analíticas que deben cumplirse para que un sistema de fuerzas esté en equilibrio o no.

Lo primero que debemos recordar es el punto 1.4, donde se estableció que dos fuerzas están en equilibrio solamente si son iguales y opuestas, es decir comparten la misma recta de acción, tienen el mismo módulo y sentido contrario tal como ocurre con las fuerzas F y $-F$ que actúan en los puntos A y B de la chapa plana de la Figura 39.

Figura 39 Sistema equilibrado



Estableceremos las condiciones analíticas que deben verificarse para que un sistema plano de fuerzas, ya sea todas conocidas, o algunas desconocidas, se puede reducir a un sistema equilibrado como el de la Figura 39. Buscamos las expresiones analíticas que aseguren que el sistema plano de fuerzas no sólo tenga resultante nula, si no también que no exista una cupla resultante, como sería el caso si las fuerzas F y $-F$ tuvieran rectas de acción paralelas no coincidentes.

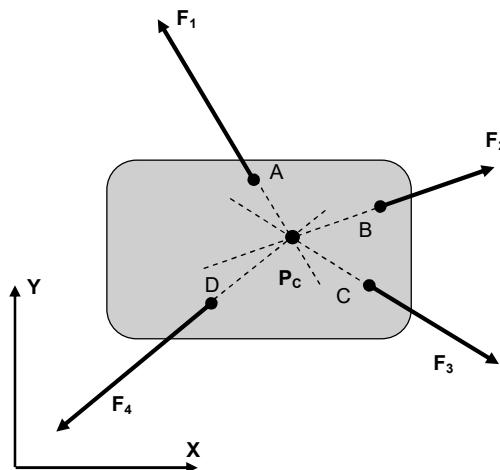
Veremos a continuación estas condiciones para sistemas concurrentes, sistemas paralelos y sistemas no concurrentes.

1.9.2 Sistemas equilibrados de fuerzas concurrentes en el plano

Consideremos la chapa plana de la Figura 40 en la que actúan las fuerzas F_1 , F_2 , F_3 y F_4 aplicadas en los puntos A, B, C y D respectivamente y con rectas de acción concurrentes al punto de concurrencia P_c . Dado que todas las fuerzas concurren a un punto no existe la posibilidad de la existencia de una cupla.

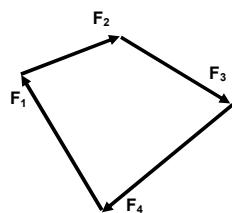
La condición que asegura el equilibrio del sistema es que la resultante de todas las fuerzas sea nula.

Figura 40 Sistema de fuerzas concurrentes en equilibrio



La condición gráfica para que la resultante sea nula y el sistema de fuerzas concurrentes esté en equilibrio es que el polígono de fuerzas sea cerrado.

Figura 41 Polígono de fuerzas cerrado



Para establecer las condiciones analíticas tenemos varias opciones:

La primera es plantear la nulidad de la resultante planteando directamente la nulidad de sus componentes RX y Ry en un sistema X-Y,

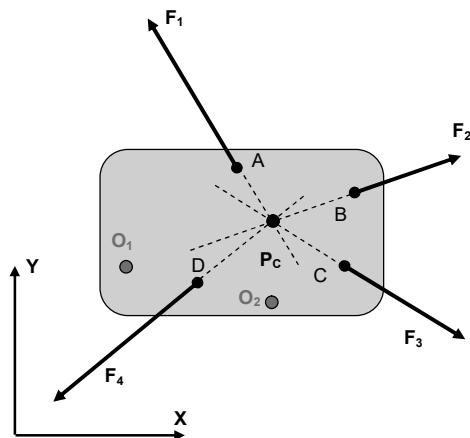
$$\begin{aligned} R_X &= \sum_1^n F_{IX} = 0 \\ R_Y &= \sum_1^n F_{IY} = 0 \end{aligned} \quad (16a)$$

Una segunda opción podría ser tomando momentos respecto a un punto cualquiera del plano O₁ no coincidente con el punto de concurrencia P_c, si ese momento resulta nulo hay dos posibilidades: o la resultante es nula, o además de pasar por P_c pasa también por O₁. Si ahora elegimos un segundo punto O₂, no alineado con O₁ y P_c, y el momento de todas las fuerzas vuelve a resultar nulo, la única alternativa posible es que la resultante sea nula, porque obviamente no puede pasar simultáneamente por tres puntos no alineados (ver Figura 42).

Entonces la condición de equilibrio se asegura si el momento de todas las fuerzas respecto de dos puntos no alineados con el punto de concurrencia es igual a 0 (ecuación 16b).

$$\begin{aligned} \sum M_{O_1} &= 0 \\ \sum M_{O_2} &= 0 \end{aligned} \quad (16b)$$

Figura 42 Momento respecto a dos puntos no alineados con el punto de concurrencia

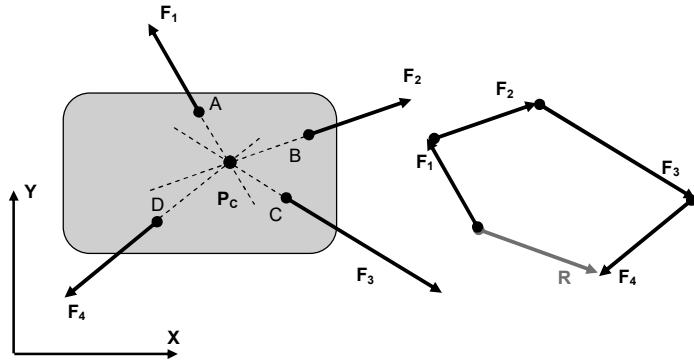


Existen otras expresiones alternativas, que pueden ser combinación de las vistas, por ejemplo si se plantea nulidad de la suma de fuerzas en X, la resultante o es nula o pasa por P_c y tiene la dirección del eje Y, por lo tanto para asegurar la nulidad, se puede tomar momento respecto de un punto O₁ que no esté sobre la paralela al eje y pasando por P_c.

En el inciso 1.4 introdujimos el concepto de equilibrante para el caso de fuerzas aplicadas en un punto, este mismo concepto se aplica a fuerzas concurrentes en virtud del teorema de transmisibilidad como veremos en los párrafos que siguen.

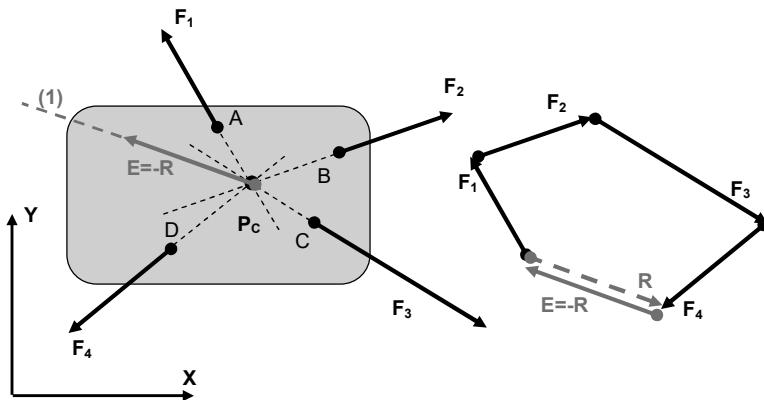
Consideremos una chapa como la de la Figura 43 donde actúa un sistema de fuerzas F₁, F₂, F₃ y F₄, concurrentes a un punto P_c, con resultante R no nula según el polígono de la derecha.

Figura 43. Sistema concurrente no equilibrado



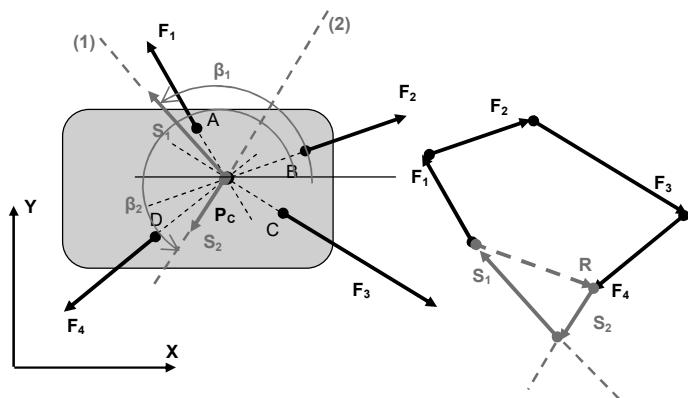
Adicionando al sistema una fuerza $E = -R$ con la dirección de R y sentido contrario a la misma lograría el equilibrio, eligiendo la dirección 1 como recta soporte de esta fuerza pasando por P_c como vemos en la Figura 44.

Figura 44 Equilibrante del sistema



Sin embargo, si algunas de las fuerzas F_1 a F_4 , cambiaran su magnitud o dirección, este cambio afectaría R y la fuerza E ya no sería la equilibrante del sistema. Para asegurar el equilibrio para cualquier valor de las F_i , debemos contar otra dirección (2) pasante por el punto de concurrencia P_c , de manera que las fuerzas, que llamaremos S_1 y S_2 , según esas dos direcciones siempre puedan dar una fuerza igual y contraria a cualquier resultante de las F_i como mostramos en la Figura 45.

Figura 45 Equilibrio con dos direcciones concurrentes



Para calcular los valores de S_1 y S_2 aplicamos cualquiera de las ecuaciones (16) donde las incógnitas en general son S_1 y S_2 y conocidos β_1 y β_2 . Notemos que los ángulos β_1 y β_2 se obtienen como el ángulo que forma el semieje positivo X con la orientación del vector Si. Por lo tanto como ya mencionáramos en 1.4 se supone un sentido para las fuerzas S_1 y S_2 y se plantea por ejemplo la sumatoria de fuerzas en X y en E igual a 0, obteniendo S_1 y S_2 . Si alguna de ellas resultara negativa, significa que el sentido real es contrario al supuesto. La aplicación de las ecuaciones (16 a) conduce a las ecuaciones (6) ya vistas y que repetimos a continuación, en las que los signos quedan determinados por el cuadrante en que se encuentran los ángulos respectivos.

$$\begin{aligned}\sum F_{xi} + \sum S_{xi} &= 0 \\ \sum F_{yi} + \sum S_{yi} &= 0 \\ \sum F_i \cos \alpha_i + S_1 \cos \beta_1 + S_2 \cos \beta_2 &= 0 \\ \sum F_i \sin \alpha_i + S_1 \sin \beta_1 + S_2 \sin \beta_2 &= 0\end{aligned}\tag{6}$$

En las ecuaciones (6) las incógnitas en el caso más general son las fuerzas S_1 y S_2 , pero en algunas ocasiones, cuando se conoce la dirección y magnitud de una de las fuerzas las incógnitas son la dirección y magnitud de la otra, o cuando se conoce el módulo de ambas fuerzas las incógnitas son las dos direcciones. En el caso que las incógnitas sean S_1 y S_2 el problema siempre tiene solución, pero en los otros casos puede no tener solución. Esto último se visualiza fácilmente si se recurre a procedimientos gráficos.

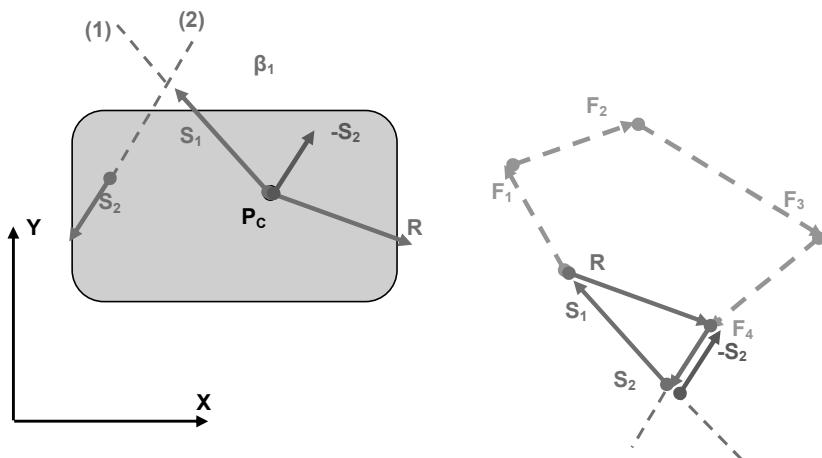
Vamos a formular algunas conclusiones importantes respecto a lo que hemos resuelto:

- El problema que hemos resuelto consiste en *equilibrar una fuerza, en este caso R, con dos direcciones (1) y (2)*, porque en definitiva las F_i equivalen a la fuerza R por el principio de la resultante.

En este esquema de tres fuerzas, R , S_1 y S_2 , la condición de equilibrio es que el polígono de fuerzas sea cerrado y las tres fuerzas sean concurrentes al punto P_C . Si esto no se cumpliera el polígono cerrado definiría que la resultante es nula, pero habría una pareja no equilibrada en el sistema. En la

- Figura 46 observamos que cada una de las fuerzas es igual y opuesta a las otras dos, por la propiedad del polígono de fuerzas cerrado. Pero si la dirección (2) no concurre al punto P_C de concurrencia de S_1 y R , lo que se obtiene es un par de fuerzas S_2 y $-S_2$, y el sistema no está en equilibrio. *Concluimos que tres fuerzas están en equilibrio si y sólo si, el polígono de fuerzas es cerrado (resultante nula) y las tres fuerzas son concurrentes.*

Figura 46 Sistema de tres fuerzas no concurrentes de resultante nula



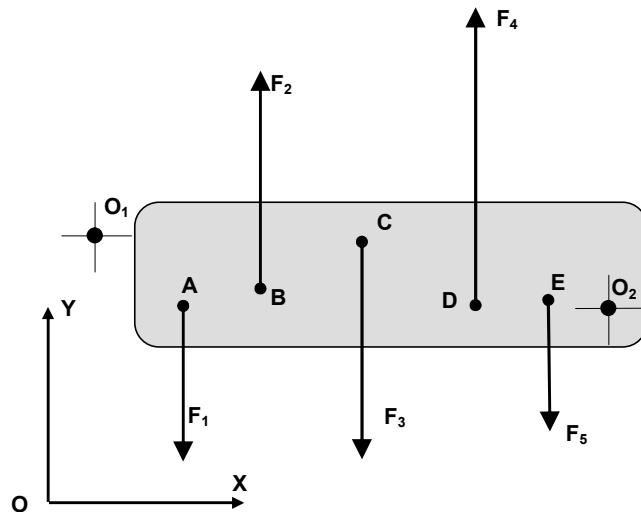
- Si en vez de dos direcciones, hubiéramos tenido tres direcciones (1), (2) y (3) concurrentes el problema no tendría una solución única porque sólo disponemos de dos ecuaciones para su resolución. *Por lo tanto podemos afirmar que no es posible resolver con ecuaciones de la estática solamente el equilibrio de una fuerza en tres direcciones concurrentes.*

1.10.3. Sistemas planos equilibrados de fuerzas paralelas

Siguiendo los razonamientos anteriores, para que un sistema de fuerzas paralelas esté en equilibrio, debemos asegurar dos cosas: por un lado que la resultante sea nula, y por el otro que el sistema no constituya una copla. Sin embargo, teniendo en cuenta que todas las fuerzas tienen la misma dirección, con asegurar que la suma algebraica de las fuerzas en esa dirección es nula, basta para asegurar que no hay resultante.

En el caso del sistema de fuerzas paralelas F_1 a F_5 que actúan en la chapa plana de la Figura 47, se puede asegurar el equilibrio con diferentes ecuaciones que representen las dos condiciones explicitadas: copla y resultante nulas:

Figura 47 Sistema equilibrado de fuerzas paralelas



Para que no haya cupla resultante, el momento de todas las fuerzas respecto de un punto cualquiera del plano, que puede o no pertenecer a la chapa, por ejemplo O_1 , debe ser nulo, porque si hubiera cupla, el momento respecto de cualquier punto es constante e igual al valor de la cupla.

Para que no haya resultante, dado que las fuerzas en este caso tienen la dirección del eje Y, debe cumplirse que la suma de las fuerzas en esa dirección es nula.

$$\begin{aligned}\sum_1^n F_{iY} &= 0 \\ \sum M_{O_1} &= 0\end{aligned}\tag{17a}$$

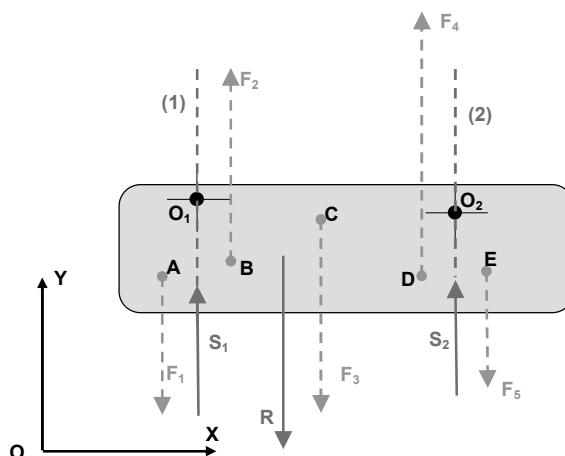
Otra manera de expresar estas dos condiciones es con dos ecuaciones de momentos: si el momento respecto de un punto O_1 , es cero significa, por un lado, que no hay cupla, y por el otro, que la resultante es nula o pasa por O_1 . Si además se cumple que el momento de las fuerzas respecto a otro punto O_2 también es nulo, significa que la resultante es nula si O_1 y O_2 no están sobre una recta paralela a la dirección de las fuerzas del sistema. Las ecuaciones (17b) reflejan este planteo.

$$\begin{aligned}\sum M_{O_1} &= 0 \\ \sum M_{O_2} &= 0\end{aligned}\tag{17b}$$

Supongamos, como en el inciso anterior, que el sistema de fuerzas, F_1 a F_5 no estuviera en equilibrio, y tuviera una resultante cuya magnitud, dirección, sentido y ubicación de su recta de acción ya sabemos calcular aplicando el principio de la resultante y el teorema de Varignon.

Si alguna de las fuerzas F_i variara su magnitud, o ubicación, la posición de la resultante también variaría. Entonces para obtener un sistema equilibrado para cualquier posición de la resultante, necesitamos dos direcciones (1) y (2) tales que provean dos fuerzas S_1 y S_2 , las que sumadas den como resultante una fuerza igual y opuesta a R como vemos en la Figura 48. *Para determinar el módulo y sentido de esas dos fuerzas (porque la dirección no es una incógnita del problema), nuevamente suponemos un sentido para cada fuerza S_1 y S_2 y con las ecuaciones (17b), tomando momentos respecto a puntos O_1 y O_2 , sobre cada una de las rectas (1) y (2) podemos obtener los valores buscados.*

Figura 48 Sistema equilibrado de fuerzas paralelas



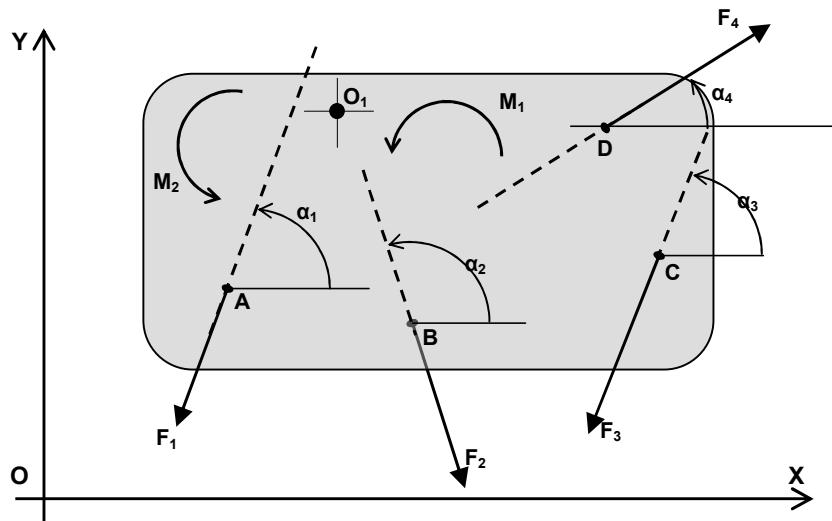
Aquí también podemos extraer algunas conclusiones:

- Si tuviéramos tres direcciones y tres incógnitas S_1 , S_2 y S_3 el problema no tendría una única solución porque disponemos de sólo dos ecuaciones (las (17a) o (17b)).
- Si alguna de las direcciones, por ejemplo la (2), no fuera paralela a la dirección del conjunto de las fuerzas, el problema tampoco tendría solución porque la fuerza S_2 debería ser en ese caso nula (si no daría componente en la dirección normal al sistema y no estaría equilibrado).
- Las fuerzas S_1 , S_2 y R se podrían interpretar como tres fuerzas concurrentes, con el punto de concurrencia en el infinito, en la dirección de las fuerzas. *Por lo tanto vale la condición encontrada anteriormente respecto de que tres fuerzas están en equilibrio si su resultante es nula y son concurrentes.*

1.9.4 Sistemas planos de fuerzas no concurrentes equilibrados

En el caso de sistemas planos de fuerzas no concurrentes estará en equilibrio si el sistema tiene resultante y cupla nulas. Veremos a continuación las diferentes formas de expresar analíticamente esta condición.

Figura 49 Sistema plano de fuerzas no concurrentes



Consideremos el sistema de fuerzas F_1 a F_4 y las cuplas M_1 a M_2 aplicadas en la chapa plana de la Figura 49. En el inciso 1.9 vimos la manera de calcular la magnitud, dirección y sentido de la resultante de este sistema si fuera no nula, y la ubicación de su recta de acción. Esa resultante puede pasar por cualquier punto del plano con cualquier dirección y sentido. Por lo tanto para que la resultante sea nula, deben ser nulas sus componentes en X e Y. Por otra parte para asegurar que no haya una cupla resultante, debemos verificar que la suma de los

momentos de todas las fuerzas, incluidos los pares aplicados M₁ y M₂, respecto de cualquier punto del plano sea nula, pues si hubiera cupla resultante, su valor sería independiente del punto al que se toma momento.

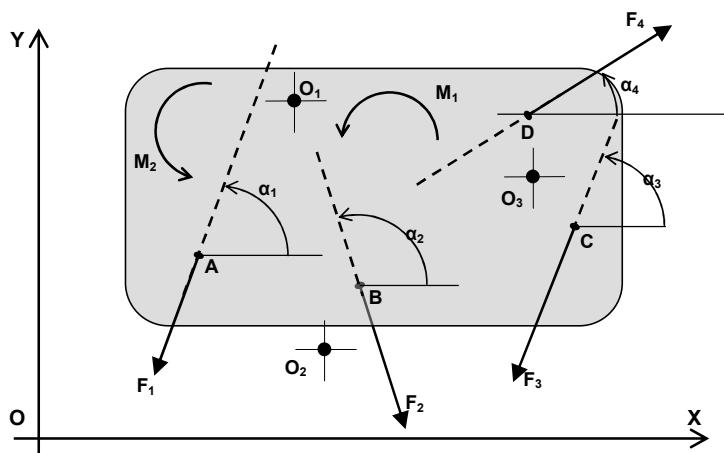
Entonces las expresiones que se deben verificar para asegurar que el sistema está en equilibrio son las siguientes:

$$\begin{aligned} R_X &= \sum_1^n F_{ix} = \sum_1^n F_i \cos \alpha_i = 0 \\ R_Y &= \sum_1^n F_{iy} = \sum_1^n F_i \operatorname{sen} \alpha_i = 0 \\ \sum_1^n M_{O_1} &= \sum_1^n F_{ix} d_{iy} + \sum_1^n F_{iy} d_{ix} + \sum_1^n M_j = 0 \end{aligned} \quad (18a)$$

Análogamente a los casos anteriores busquemos expresiones algebraicas alternativas que expresen la condición física enunciada.

Comencemos tomando momento de todas las fuerzas y cuplas que componen el sistema respecto de un punto O₁. Si ese momento es cero, podemos asegurar que el sistema reducido no es una cupla. Con respecto a la resultante, caben dos posibilidades: o el sistema tiene resultante nula, o pasa por el punto O₁. Si ahora elegimos otro punto O₂ cualquiera del plano, y el momento total respecto de ese punto también resulta cero, caben otras dos posibilidades, o la resultante es nula o ésta pasa por O₁ y O₂. Finalmente podemos acotar el problema, si elegimos un punto O₃, no alineado con O₁ y O₂ como vemos en la Figura 50. Si el momento respecto a O₃ también resulta nulo, entonces no queda otra opción que el sistema esté en equilibrio. Resumiendo *una condición alternativa para asegurar el equilibrio de un sistema plano de fuerzas no concurrentes es que la suma de los momentos de todas las fuerzas que componen el sistema respecto de tres puntos no alineados del plano sea cero*. Las expresiones (18b) sintetizan este razonamiento.

Figura 50 Suma de momentos respecto a tres puntos no alineados



$$\begin{aligned} \sum M_{O_1} &= 0 \\ \sum M_{O_2} &= 0 \\ \sum M_{O_3} &= 0 \end{aligned} \quad (18b)$$

Consideremos que el sistema de fuerzas aplicado en la chapa, no está en equilibrio, y que podemos agregar fuerzas de valor por ahora desconocido, según unas direcciones dadas, para restablecer el equilibrio.

La pregunta es cuántas direcciones debemos agregar, qué condición deben cumplir y cómo determinar el valor de las fuerzas correspondientes con esas direcciones para que el sistema ampliado resulte equilibrado.

Supongamos que no se verifican las dos primeras de las (18a), pero sí la última. Esto significa que *el sistema posee una resultante con una ubicación que se puede determinar aplicando el teorema de Varignon*.

Veamos con las herramientas conceptuales que disponemos cómo contestar la pregunta:

- *Para obtener un sistema equilibrado deberíamos lograr una fuerza igual y contraria a la resultante (Figura 51)*

Figura 51. La Fuerza $-R$ restituye el equilibrio

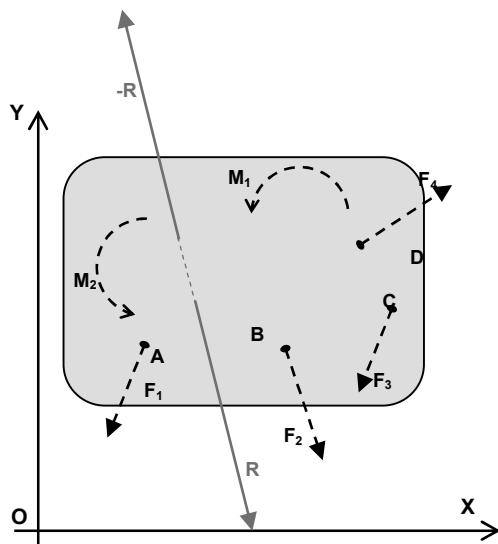
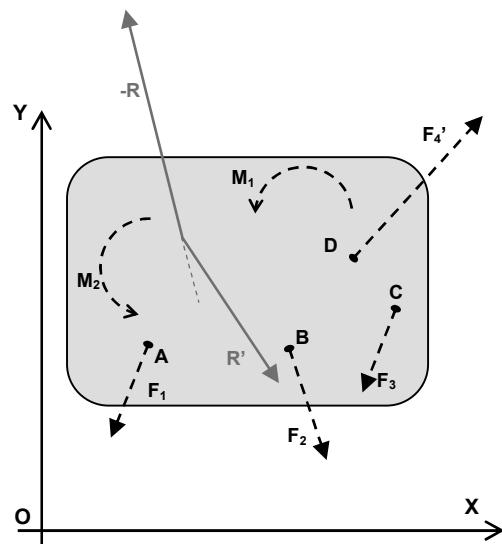


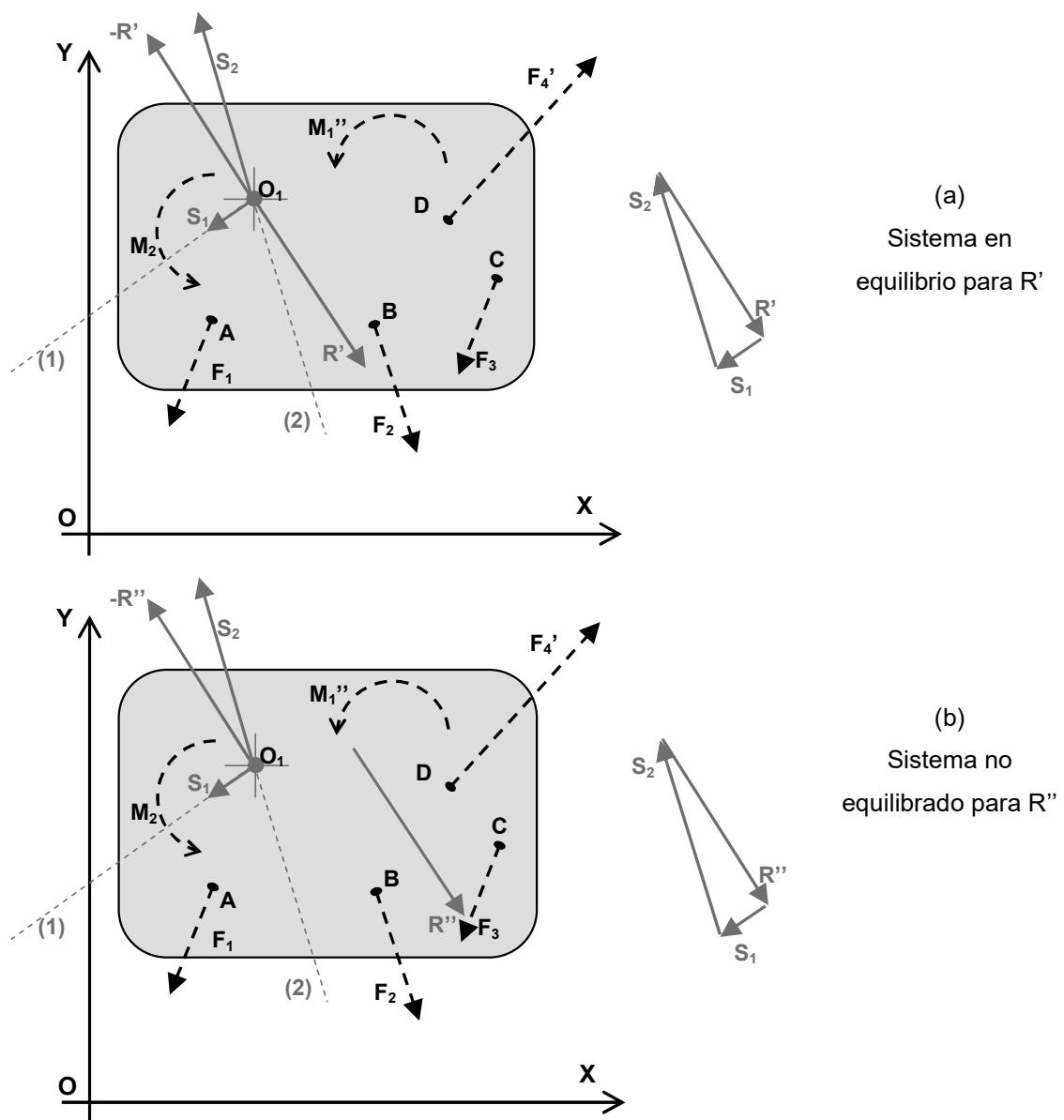
Figura 52 Sistema desequilibrado



Si algunas de las fuerzas actuantes variaran (por ejemplo F_4 cambia a F'_4), la resultante también variaría en magnitud, dirección, y sentido, por lo tanto la nueva resultante R' y la fuerza agregada $-R$ ya no serían un sistema equilibrado (Figura 52).

Si agregamos dos direcciones (1) y (2) que se crucen en algún punto O_1 de la recta de acción de la resultante R' como vemos en la Figura 53(a), obtenemos dos fuerzas S_1 y S_2 que dan una fuerza igual y opuesta a R' . Sin embargo, una nueva variación en las componentes del sistema, por ejemplo si M_1 disminuyera a M''_1 , la nueva resultante se desplazaría paralelamente a sí misma hasta la posición R'' y ahora la resultante de S_1 y S_2 , es igual a $-R''$, pero forma un par con R'' . El sistema en este caso queda reducido a un par (Figura 53b).

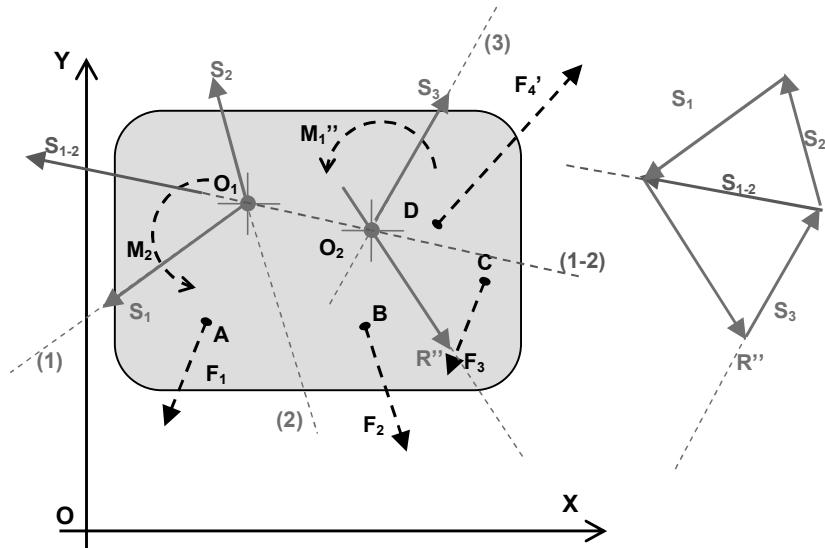
Figura 53 Posibilidades con sólo dos direcciones (1) y (2)



Recordemos que debemos poder reducir siempre el sistema a tres fuerzas concurrentes, porque en tal caso un polígono cerrado, o sea resultante nula, nos asegura el equilibrio.

Entonces agreguemos una tercera dirección (3) cuya única condición es que no concurre al punto O_1 donde concurren (1) y (2), para evitar el inconveniente anterior, y sigamos el siguiente razonamiento que explicitamos en la Figura 54.

Figura 54 Siempre se puede equilibrar el sistema con (1) (2) y (3)



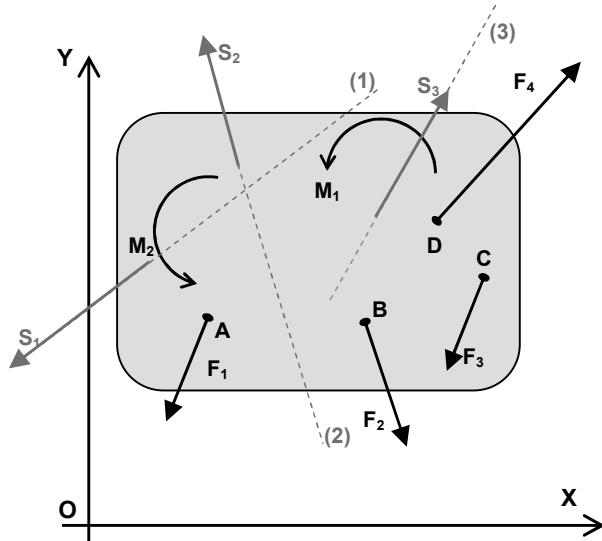
- Las direcciones (1), (2) y (3) no concurren a un punto
- La dirección (3) concurre al punto O_2 con la resultante R''
- Podemos reducir el sistema a tres fuerzas: La resultante R'' , la incógnita S_3 y la resultante de las incógnitas S_1 y S_2 , que llamaremos S_{1-2} que se obtuvieron al cerrar el polígono de R'' con la dirección (3) y la dirección O_1O_2 , o sea tres fuerzas concurrentes en O_2 .
- En el polígono de fuerzas vemos que S_3 y S_{1-2} equilibran a R'' , y luego S_{1-2} es una fuerza resultante de S_1 y S_2 , es decir se obtiene descomponiendo S_{1-2} en las direcciones (1) y (2).
- Si se produjera una variación en la ubicación de R , O_2 cambiaría su ubicación y la recta (1-2) pivotaría alrededor de O_1 , pero siempre podríamos hallar la solución del problema.

Concluimos que para equilibrar un sistema de fuerzas no concurrentes, necesitamos como mínimo tres direcciones no concurrentes entre sí, y vimos una forma gráfica de visualizar los módulos direcciones y sentidos de las fuerzas S_1 , S_2 y S_3 que equilibran al sistema, si antes reducimos a este a una única resultante.

Para encontrar la solución analítica haremos uso de las ecuaciones (18) que son las que aseguran que un sistema plano de fuerzas no concurrentes está en equilibrio.

Consideremos nuevamente la chapa plana en la cual actúan las fuerzas F_i y los pares M_j , con i variando de 1 a 4 y j de 1 a 2, en este caso. Supongamos que este sistema por sí solo no verifica las ecuaciones (18), es decir no se trata de un sistema equilibrado. Agreguemos entonces tres direcciones (1) a (3), no concurrentes entre sí, que sirvan de soporte a las fuerzas S_1 , S_2 y S_3 respectivamente, y que en conjunto con las anteriores aseguren las condiciones de equilibrio (resultante de fuerza y cupla nulas).

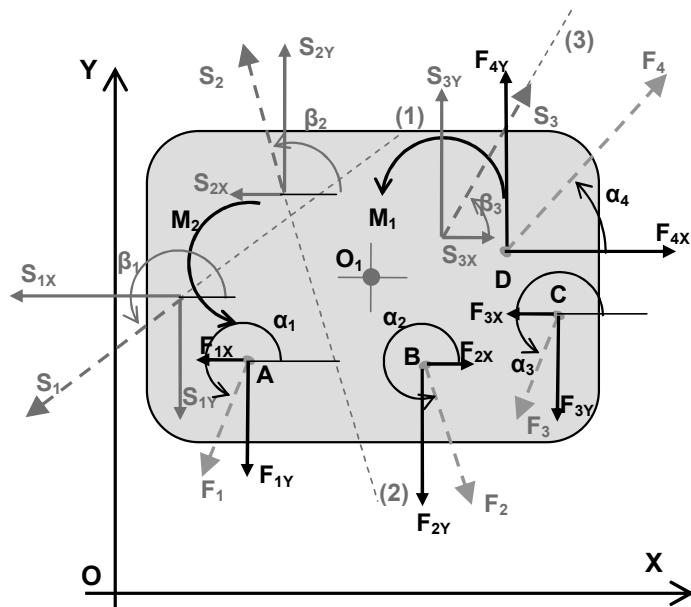
Figura 55 Sistema de fuerzas F_i , M_j y S_k equilibrado



Para resolver el problema sigamos los siguientes pasos:

- A las fuerzas incógnitas S_i les asignamos un sentido arbitrario según las direcciones dado del problema (Figura 55)
- Llevamos el sistema a un sistema equivalente ortogonal, descomponiendo las fuerzas F_i y S_k , (con i variando de 1 a 4 y k de 1 a 3) en las direcciones X e Y. Recordemos que los ángulos para descomponer las fuerzas, toman como origen el semieje positivo X. (Figura 56)

Figura 56. Sistema ortogonal equivalente



- A ese sistema equivalente, con fuerzas F_{ix} , F_{iy} , S_{kx} , S_{ky} y M_j aplicamos las ecuaciones (18a) o (18b) según convenga para determinar las incógnitas S_1 , S_2 y S_3 .

$$\begin{aligned}
 R_X &= \sum_1^n F_i \cos \alpha_i + \sum_1^3 S_k \cos \beta_k = 0 \\
 R_Y &= \sum_1^n F_i \operatorname{sen} \alpha_i + \sum_1^3 S_k \operatorname{sen} \beta_k = 0 \\
 \sum M_{O1} &= 0
 \end{aligned} \tag{18b}$$

Como vemos en las ecuaciones (18b) aquí planteadas las incógnitas son S_1 , S_2 y S_3 . Si alguna de ellas diera resultado negativo, significaría que esa fuerza tiene un sentido real contrario al supuesto. El punto O_1 del plano respecto del cual se toma momento, puede ser cualquiera.

Aquí vemos que si las tres direcciones (1), (2) y (3) fuesen concurrentes a un punto, y tomásemos momento respecto de ese punto, en esa ecuación no intervendría ninguna de las incógnitas, y si además el momento diera distinto de cero, estaríamos en presencia de una cupla resultante, y en tal caso las tres fuerzas concurrentes S_1 , S_2 y S_3 , nunca podrían contrarrestar esa cupla.

Volvemos a demostrar que el número mínimo de direcciones capaces de proveer fuerzas, para equilibrar un sistema de fuerzas general en el plano son tres y no deben ser concurrentes a un punto. Sobre este punto se volverá en el capítulo siguiente cuando tratemos sistemas planos vinculados.

Otra manera de resolver el problema es mediante la utilización de la ecuación (18b), eligiendo convenientemente los tres puntos respecto de los cuales tomar momentos, se puede trabajar con tres ecuaciones desacopladas, de manera que las incógnitas se eliminan de a dos en cada expresión de momentos respecto de cada punto.

1.11 Ejemplos

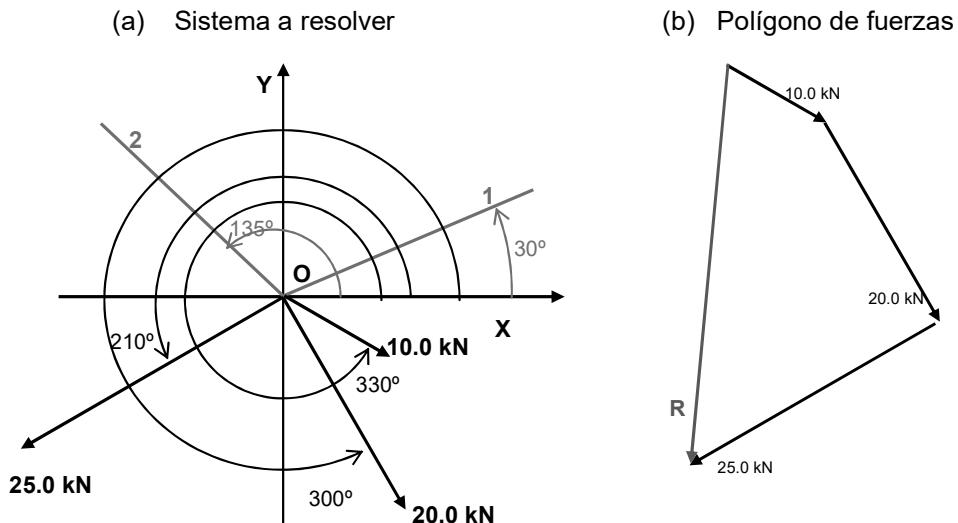
Aclaramos que este libro cátedra se complementa con la ejercitación a resolver durante el dictado del curso regular al cual sirve de apoyo. Por lo tanto los ejemplos aquí propuestos son a los fines de familiarizar al lector y asistente al curso en la forma de plantear y resolver los problemas que se planteen en el curso.

Ejemplo 1

Dado el sistema de fuerzas aplicado en el punto O de la Figura 57 (a), determinar:

- La magnitud, dirección y sentido de la resultante del sistema
- Las fuerzas S_1 y S_2 de direcciones conocidas que equilibran al sistema.

Figura 57



Resolución parte (a):

Para encontrar la resultante, primeramente utilizamos la construcción gráfica del polígono de fuerzas, la que nos da una idea bastante aproximada del resultado si somos cuidadosos con la escala del dibujo.

En este texto utilizaremos los procedimientos gráficos en la medida que los mismos ayuden a comprender la física del fenómeno y tener una estimación de los resultados analíticos a encontrar. En este caso ya tenemos una idea aproximada del módulo de la resultante, y su orientación en el plano (dirigida al tercer cuadrante y con un módulo aproximado de 35 kN) como vemos en la Figura 57 (b).

Para la resolución analítica aplicamos los métodos de *descomposición y composición* de fuerzas:

Descomponemos cada una de las fuerzas en X e Y y hallamos las resultantes R_x y R_y respectivamente, luego volvemos a componer estas resultantes utilizando las ecuaciones (3):

$$R_x = 10.0 \cos 330 + 20.0 \cos 300 + 25.0 \cos 210 = 8.7 + 10.0 - 21.6 = -2.9 \text{ kN}$$

$$R_y = 10.0 \sin 330 + 20.0 \sin 300 + 25.0 \sin 210 = -5.0 - 17.3 - 12.5 = -34.8 \text{ kN}$$

$$R = \sqrt{2.9^2 + 34.8^2} = 34.9 \text{ kN}$$

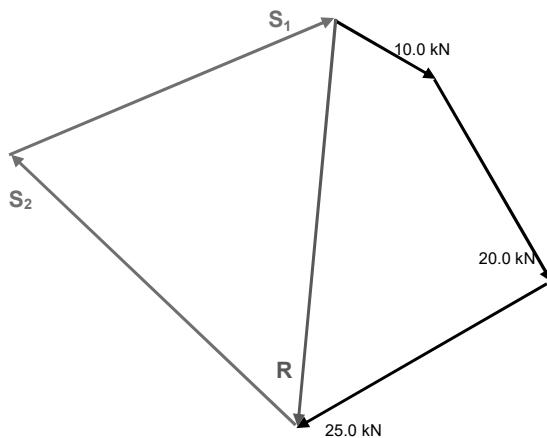
$$\alpha = \text{ATAN} \frac{-34.8}{-2.9} = 85.2^\circ$$

Teniendo en cuenta que R_x y R_y son negativos, el ángulo es del tercer cuadrante igual a 265.2°.

Resolución parte (b):

Nuevamente para conceptualizar el problema utilizaremos el método gráfico que consiste en cerrar el polígono de la Figura 57 (b) con las fuerzas S_1 y S_2 según las direcciones (1) y (2) conocidas. Vemos que la fuerza S_1 está dirigida hacia el primer cuadrante y S_2 hacia el segundo (Figura 58).

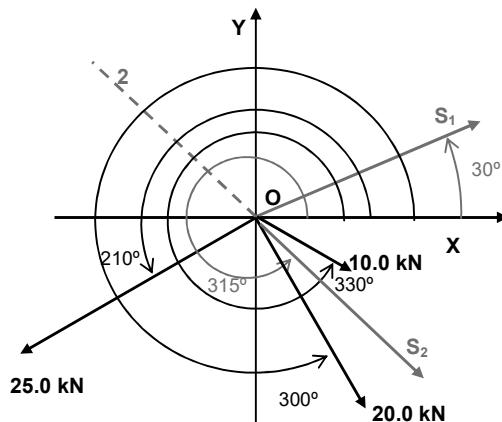
Figura 58 Polígono cerrado con S_1 y S_2



Resolución analítica:

Asignemos a S_1 y S_2 sentido arbitrario (Figura 59)

Figura 59 Sentidos arbitrarios de S_1 y S_2



Como el sistema de fuerzas es concurrente sólo basta que la resultante de las fuerzas actuantes más S_1 y S_2 sea nula para asegurar el equilibrio. Apliquemos la ecuación (16a):

$$R_X = S_1 \cos 30 + S_2 \cos 315 + 10.0 \cos 330 + 20.0 \cos 300 + 25.0 \cos 210 = 0$$

$$R_Y = S_1 \sin 30 + S_2 \sin 315 + 10.0 \sin 330 + 20.0 \sin 300 + 25.0 \sin 210 = 0$$

Resulta un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que simplificado resulta:

$$0.866S_1 + 0.707S_2 - 2.9 = 0$$

$$0.500S_1 - 0.707S_2 - 34.8 = 0$$

Encontramos entonces que $S_1=27.6$ kN y $S_2=-29.07$ kN

El signo negativo encontrado para S_2 nos advierte que el sentido correcto de esta fuerza es contrario al supuesto. Vemos así la coincidencia entre el análisis gráfico y los resultados analíticos.

Ejemplo 2

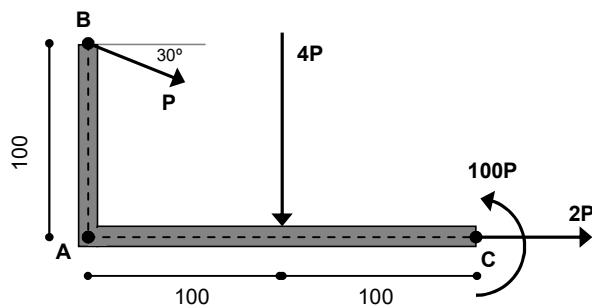
Dada la chapa rígida plana de la Figura 60 sometida a la acción de las fuerzas y pares que se indican, calcular:

- Magnitud, dirección y sentido de la resultante del sistema de fuerzas
- Ubicación de la recta de acción de la resultante

Las fuerzas están parametrizadas en función del parámetro P , el que tendrá unidades de fuerza (N, kg o lb). A su vez el par está expresado en las unidades de P y la distancia en cm.

En este caso, la fuerza $4P$ está aplicada sobre la chapa donde indica la punta de su flecha (hasta ahora veníamos indicando los puntos de aplicación de la fuerza en el origen del vector), esta es otra forma posible que utilizaremos para indicar los puntos de aplicación de las fuerzas

Figura 60

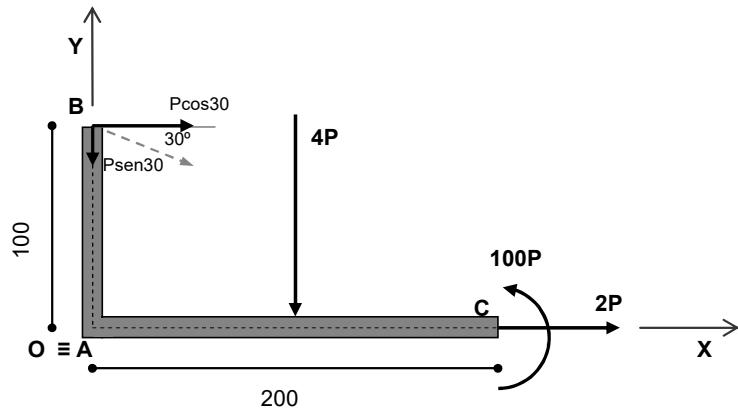


Resolución parte (a):

Elegimos un sistema de referencia X-Y cualquiera del plano, en este caso el origen O coincidente con A.

Descomponemos todas las fuerzas en un sistema ortogonal.

Figura 61 Sistema ortogonal y terna global



Calculamos la resultante como suma vectorial de las resultantes R_x y R_y

$$R_x = P \cos 30 + 2P = 2.87P$$

$$R_y = -P \sin 30 - 4P = -4.50P$$

$$R = \sqrt{(2.87P)^2 + (4.50P)^2} = 5.34P$$

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{-4.50P}{2.87P} = 302.5^\circ$$

La fuerza resultante está ubicada en el cuarto cuadrante ($R_x > 0$ y $R_y < 0$), el ángulo es 57.5° en sentido negativo.

Resolución parte (b):

Para ello utilizamos el teorema de Varignon visto en el punto 1.9 que nos permite ubicar la resultante. Tenemos distintas alternativas que nos llevan a encontrar distintos puntos de la recta de acción de la resultante.

Una primera opción es tratar la ubicación de la resultante R_x de las fuerzas horizontales, por un lado, y la ubicación de la resultante R_y de las fuerzas verticales por el otro. El punto de concurrencia de estas dos fuerzas es un punto de la recta de acción de la resultante R .

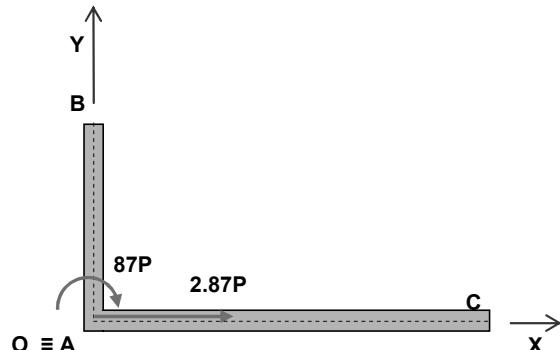
En la Figura 62 mostramos los pasos conceptuales seguidos para la ubicar R_x :

Figura 62 Ubicación de R_x

Paso 1:

Trasladar todas las fuerzas en X a O, calculando la resultante y agregando los correspondientes pares:

$$\sum M_O(F_x) = -0.87P * 100 = -87P$$



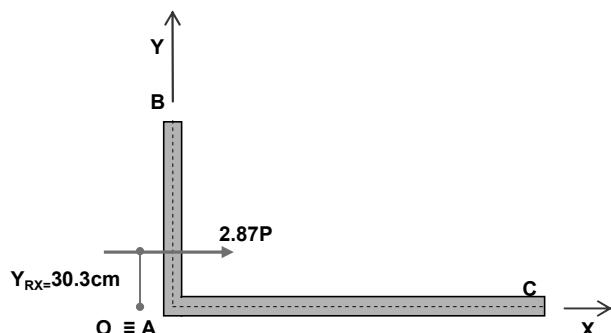
Paso 2:

Ubicación de la recta de acción de la resultante en X

La resultante R_x produce un momento respecto de O igual a $87P$ en sentido horario.

R_x está dirigida en sentido positivo de X, por lo tanto debe pasar por encima de O una distancia que la obtenemos del teorema de Varignon con la segunda de las ecuaciones (14):

$$|Y_{Rx}| = \left| \frac{-87P}{2.87P} \right| = 30.3\text{cm}$$



En la

Figura 63 mostramos los pasos para ubicar R_y

Figura 63 Ubicación de R_y

Paso 1:

Trasladar todas las fuerzas en Y a O agregando los correspondientes pares:

$$\sum M_O(F_Y) = -4P * 100 + 100P = -300P$$

Hemos incorporado el par aplicado $100P$ antihorario en C. Lo podríamos haber hecho en el paso anterior, pero no en ambos, lo que hubiéramos obtenido es otro punto de la recta de acción de la resultante. Considerarlo en ambas ecuaciones es un error, porque significa considerar el par dos veces.

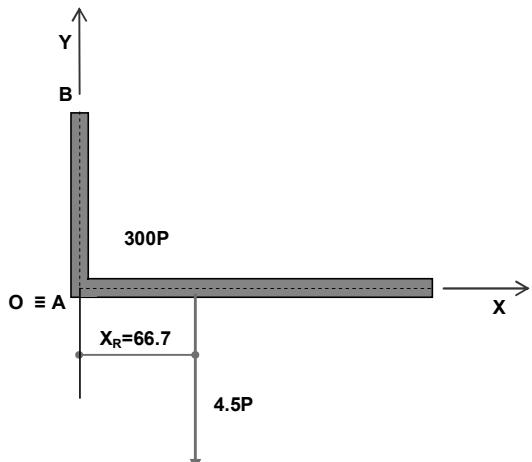
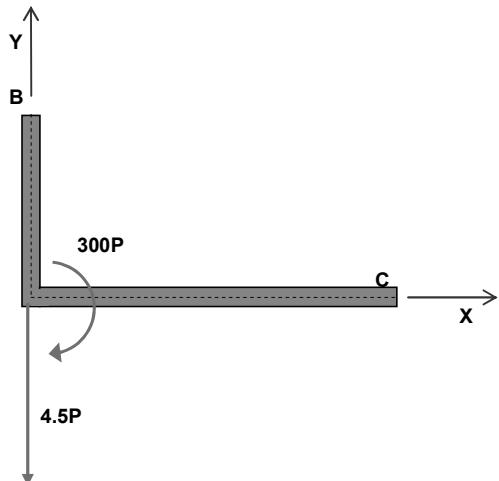
Paso 2:

Ubicación de la recta de acción de la resultante en Y

La resultante R_x debe producir un momento respecto de O igual a $87P$ en sentido horario.

R_x está dirigida en sentido positivo de X, por lo tanto debe pasar por encima de O una distancia que la obtenemos del teorema de Varignon con la primera de las ecuaciones (14):

$$|X_{RY}| = \left| \frac{-300P}{4.50P} \right| = 66.7\text{cm}$$

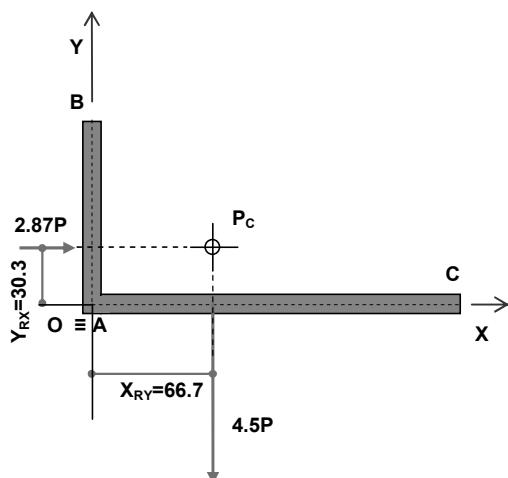


El sistema que mostramos en la

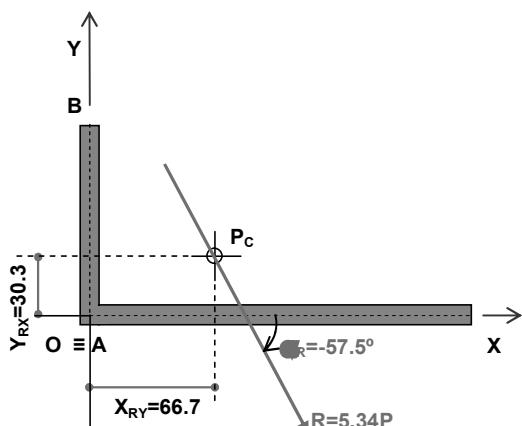
Figura 64 (a) y (b) se redujo a dos fuerzas R_x y R_y , la resultante de ambas es la resultante del sistema y pasa por el punto donde R_x y R_y concurren, que es el punto de coordenadas $(+66.7, +30.3)$

Figura 64 Ubicación de la resultante

(a) Sistema reducido a R_x y R_y



(b) Ubicación de la resultante



Otra posibilidad para determinar la ubicación de la recta de acción de la resultante consiste en encontrar dónde corta al eje X o al eje Y. Encontremos dónde corta al eje X.

Si suponemos la resultante aplicada en el punto en que corta al eje X, sólo la componente Y de la resultante produce momento, y ese momento debe ser igual al momento de todas las fuerzas actuantes en el sistema, porque lo que estamos calculando es el momento de la resultante total.

Viendo la Figura 61, el momento de todas las fuerzas respecto de O es:

$$\sum M_O = -(P \cos 30^\circ) * 100 - 4P * 100 + 100P = -387P$$

En la

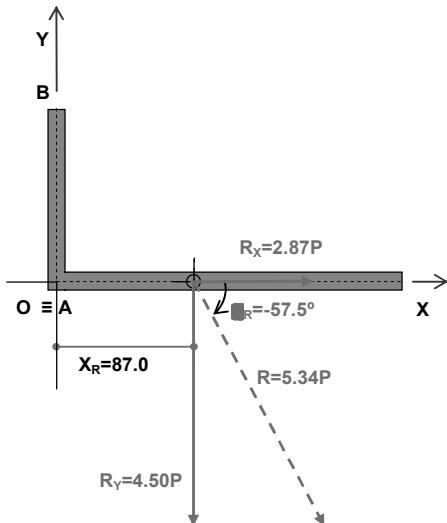
Figura 65 vemos como determinar el punto buscado aplicando el teorema de Varignon

Figura 65 Ubicación donde R corta eje X

Como el momento es negativo (sentido horario), y la resultante tiene componente en Y hacia abajo, el punto donde corta al eje X debe estar ubicado a derecha de O, calculando la distancia $|X_R|$ con la siguiente ecuación:

$$|X_R| = \left| \frac{\sum M_O}{R_Y} \right| = \left| \frac{-387P}{-4.5P} \right| = 86.0\text{cm}$$

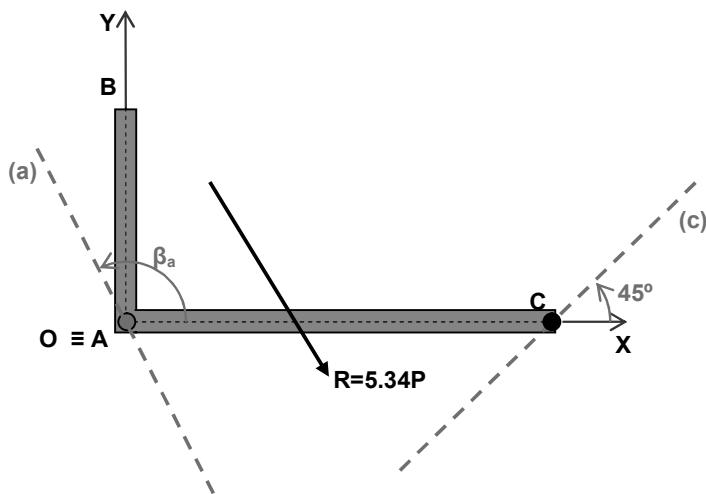
El punto (+87.0,0,0) pertenece a la recta de acción de la resultante R



Ejemplo 3

Se desea equilibrar el sistema de fuerzas que actúa en la chapa plana del ejemplo anterior, mediante dos fuerzas, una de ellas debe pasar por el punto A con una dirección y sentido cualquiera, y la otra debe pasar por el punto C, según una recta de acción (c) que forma un ángulo de 45 grados respecto del semieje positivo X (ver Figura 66). Encontrar la magnitud, dirección y sentido de ambas fuerzas. Resolver gráfica y analíticamente el problema.

Figura 66



Los datos del problema son:

- El sistema de fuerzas actuante que tiene por resultante la fuerza R ya calculada en el ejemplo 2
- La dirección (c) de una de las fuerzas que equilibran al sistema.
- Un punto de la recta de acción de la otra fuerza equilibrante, punto A.

Las incógnitas:

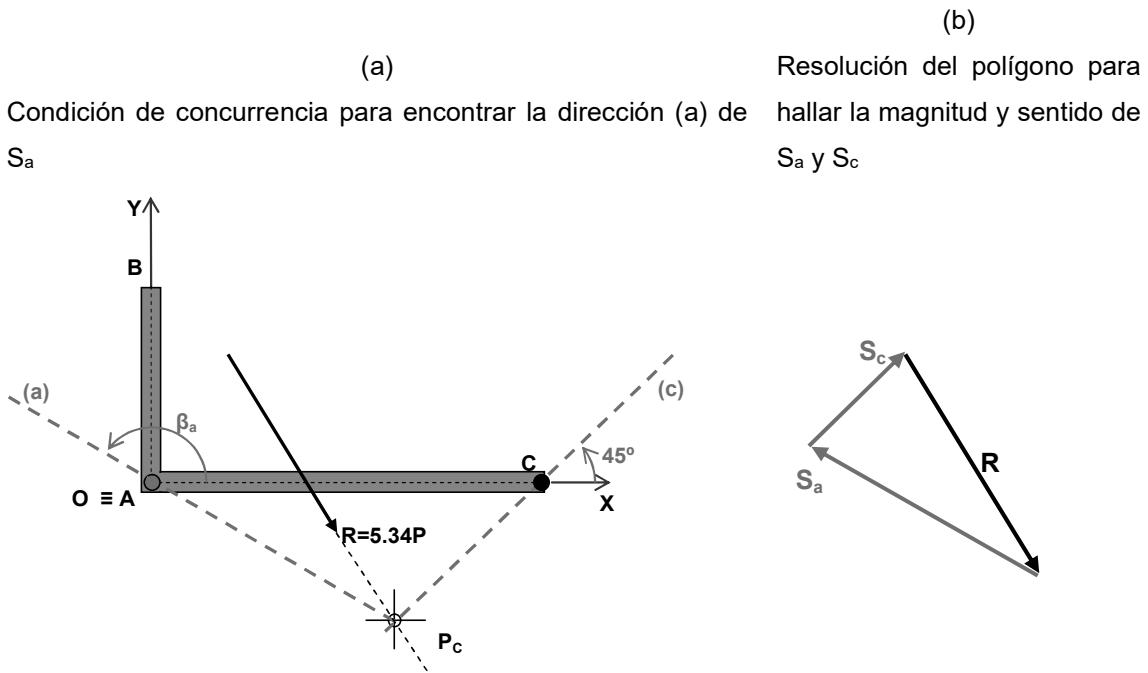
- Magnitud y sentido de la fuerza en C que equilibra al sistema.
- Magnitud de la fuerza en A.
- Dirección β_a de la fuerza en A.

Resolución gráfica: nuevamente recurrimos a la solución gráfica para visualizar los conceptos intervenientes:

- El problema se reduce al equilibrio de tres fuerzas: la resultante del sistema actuante R, la fuerza S_c aplicada en C y la fuerza S_a de magnitud y dirección desconocida aplicada en A.
- *Tres fuerzas están en equilibrio si el polígono de fuerzas es cerrado y son concurrentes a un punto.*

Esta condición de concurrencia es la que nos permite encontrar la recta de acción de la fuerza S_a , dado que además de pasar por A, debe pasar por el punto P_c donde concurren las otras dos fuerzas intervenientes. Una vez determinada la dirección (a), mediante la construcción del polígono de fuerzas resolvemos S_a y S_c , como vemos en la Figura 67.

Figura 67 Resolución gráfica



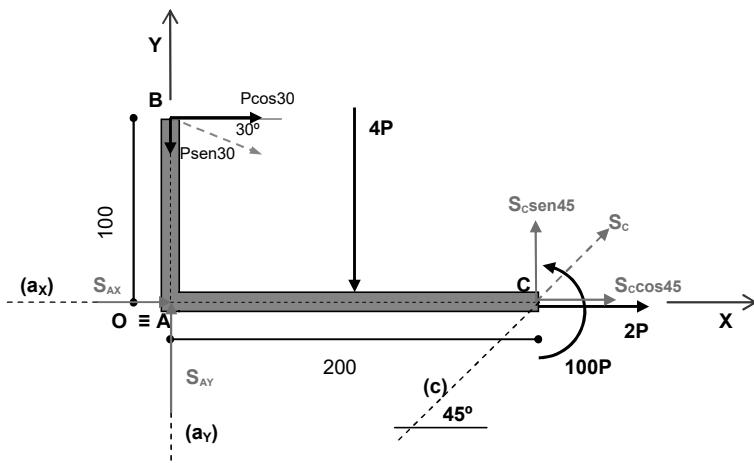
Resolución analítica:

Como señalamos tenemos tres incógnitas: El módulo y sentido de S_c , el módulo y sentido de S_a , y la dirección de S_a , dada por el ángulo β_a . No resulta conveniente trabajar con incógnitas de distinta especie. Para evitar esta situación, pensemos que S_a es la resultante de otras dos fuerzas que concurren al punto A, y tienen dirección conocida, por ejemplo la dirección X y la dirección Y.

De esta manera seguimos teniendo tres incógnitas S_{AX} , S_{AY} y S_c . Este planteo es equivalente a decir que reemplazamos la dirección (a), por dos direcciones pasantes por A, una según X (ax) y otra según Y, (ay).

Retomamos así el concepto antes ya enunciado que para equilibrar un sistema de fuerzas plano no concurrente, se necesitan al menos tres direcciones no concurrentes entre sí.

Figura 68 Resolución analítica



En la Figura 68 vemos el esquema de fuerzas descrito, donde se han descompuesto las fuerzas inclinadas según sus componentes en X e Y. A esta altura conviene aclarar, que en el punto C, no se agregan dos incógnitas independientes porque el ángulo de la dirección (c) es conocido. Entonces el número de incógnitas independientes sigue siendo tres: S_{AX} , S_{AY} y S_c .

Los sentidos asignados a las fuerzas S_i son arbitrarios, los sentidos reales surgirán de la resolución del sistema de ecuaciones.

Las ecuaciones a plantear son las correspondientes a las condiciones de equilibrio de un sistema de fuerzas no concurrente (ecuaciones 18a o 18b).

Para estar en equilibrio el sistema debe tener fuerza y cupla resultantes nulas, es decir no hay aceleraciones lineales y angulares.

$$\begin{aligned} R_X &= \sum F_X = S_{AX} + S_C \cos 45^\circ + P \cos 30^\circ + 2P = 0 \\ R_Y &= \sum F_Y = S_{AY} + S_C \sin 45^\circ - P \sin 30^\circ - 4P = 0 \\ \sum M_A &= S_C \sin 45^\circ * 200 - 4P * 100 - P \cos 30^\circ * 100 + 100P = 0 \end{aligned}$$

Operando encontramos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} S_{AX} + 0.707S_C + 2.87P &= 0 \\ S_{AY} + 0.707S_C - 4.5P &= 0 \\ 141.4S_C - 386.6P &= 0 \end{aligned}$$

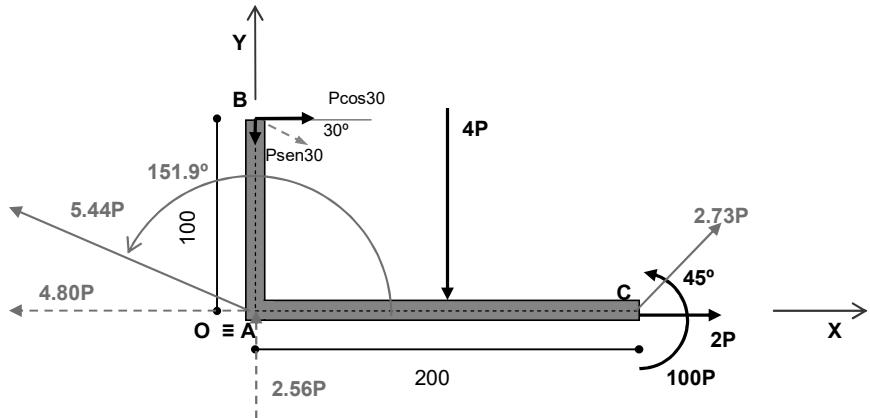
Resuelto el sistema, encontramos:

$$\begin{aligned} S_{AX} &= -4.80P \\ S_{AY} &= +2.56P \\ S_C &= +2.73P \\ S_A &= \sqrt{S_{AX}^2 + S_{AY}^2} = 5.44P \\ \beta_a &= \tan^{-1} \frac{2.56P}{-4.80P} = 151.9^\circ \end{aligned}$$

Los sentidos correctos de las fuerzas y sus módulos se muestran en la Figura 69, si comparamos el valor de la fuerza S_A total y S_C con aquellos obtenidos gráficamente vemos la coincidencia de ambos resultados. Observemos también que para resolver analíticamente el

problema, no es necesario calcular previamente la resultante, si no que se puede trabajar directamente con las fuerzas actuantes en las ecuaciones de equilibrio.

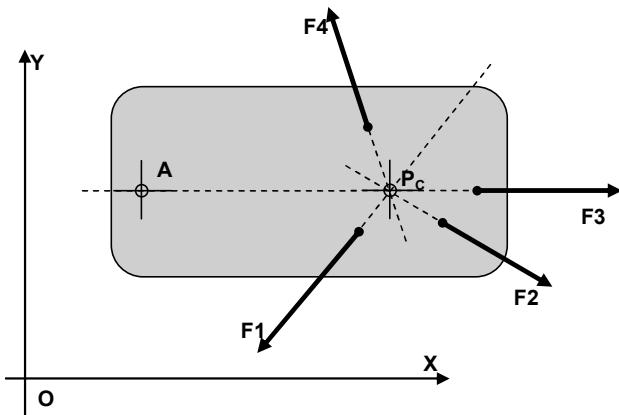
Figura 69 Resolución analítica



Ejemplo 4

En la chapa plana de la Figura 70 actúan las fuerza F_1 , F_2 , F_3 y F_4 , y se ha determinado que $\Sigma M_A = 0$ y $\Sigma F_{iy} = 0$. Indicar si estas dos condiciones permiten asegurar que el sistema está en equilibrio.

Figura 70



Como observamos, el sistema actuante es un sistema plano de fuerzas concurrentes

Para asegurar el equilibrio sólo basta asegurar que la resultante sea nula.

Si hubiera resultante no nula pasa por el punto de concurrencia

La ecuación $\Sigma M_A = 0$ implica dos posibilidades: La resultante es nula o la resultante además de pasar por P_G , pasa por A, es decir tiene la dirección X.

La ecuación $\Sigma F_{iy} = 0$ nos está diciendo que si existe la resultante, tiene la dirección X, porque no hay componente de R en Y.

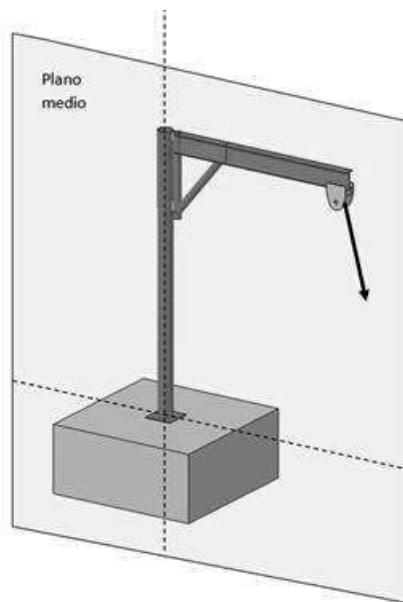
Es decir ninguna de las dos ecuaciones puede asegurar que no hay resultante en X, por lo tanto no se puede asegurar con estas dos condiciones que el sistema está en equilibrio. Lo correcto hubiera sido que además de $\Sigma MA=0$ se cumpliera que $\Sigma F_{ix}=0$.

Ejemplo 5

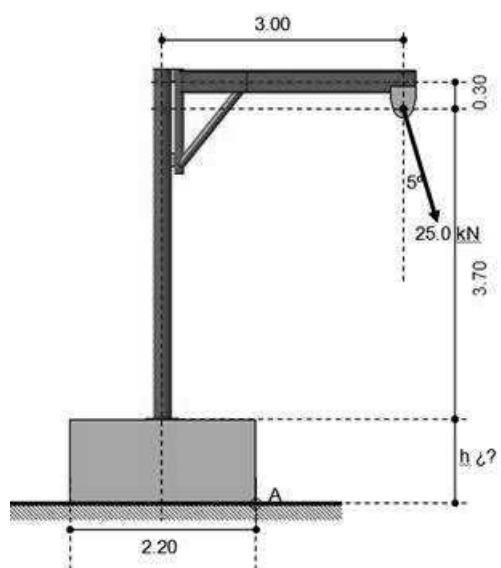
Se desea determinar la altura h que debe tener la base de apoyo del guinche de la Figura 71 a los efectos de obtener una seguridad al vuelco $FS=1.5$ cuando la dirección de la carga tiene una inclinación de 5° con respecto a la vertical. La capacidad portante del guinche es de 25 kN. Todas las medidas están indicadas en metros. El peso de la unidad de volumen del hormigón con el que se hace la base es 24.0 kN/m³

Figura 71 Guinche 25 kN

(a) Vista general



(b) Dimensiones



Resolución:

Lo que se trata es determinar las dimensiones del macizo (en este caso la altura), de manera de asegurar que bajo la carga de 25 kN con la inclinación indicada, el guinche no vuelque. Este es un problema de lo que normalmente se denomina “volcamiento”.

Si observamos la Figura 71b, el efecto de la fuerza de 25 kN, es hacer volcar el guinche y su macizo de anclaje alrededor del punto A si reducimos el problema a un problema plano, suponiendo que todas las fuerzas están contenidas en el plano medio que contiene al guinche y la fuerza de 25 kN (Figura 71a). Estrictamente hablando el guinche vuelca alrededor de un eje que pasa por el punto A y es perpendicular al plano de carga.

Modelización:

El primer paso consiste en lo que denominaremos *modelar el problema* para realizar el análisis:

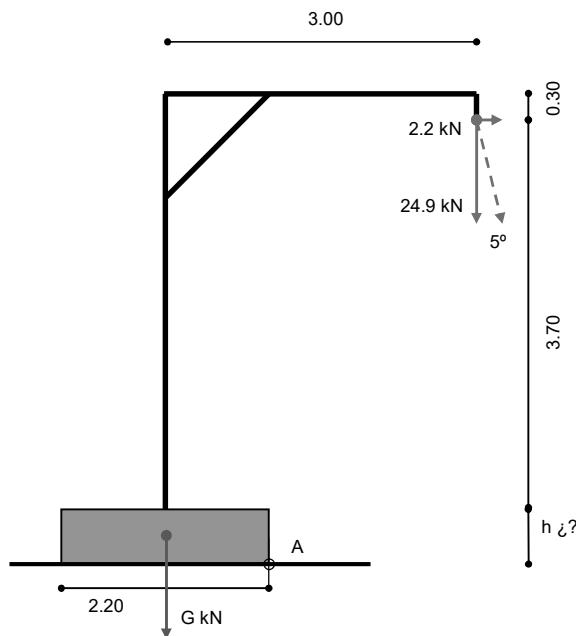
Podemos distinguir elementos lineales, en los cuales hay una dimensión preponderante respecto de las otras dos (la columna y la barra horizontal del guinche) que llamaremos barras, y un elemento volumétrico que es la base de apoyo que como hemos reducido el problema al plano medio se transforma en un elemento superficial con dos dimensiones de similares magnitud (que denominaremos chapa). Representando las barras por líneas y las chapas por superficies, en la

Figura 72 vemos el esquema de análisis.

A ese modelo le debemos *incorporar las fuerzas actuantes*:

Por una lado descomponemos la fuerza de 25 kN aplicada en el agarre del guinche en sus dos componentes X e Y para trabajar con un sistema ortogonal en el que resulta más sencillo determinar distancias cuando tengamos que calcular momentos. Por otro lado tenemos la fuerza G que representa el peso del macizo de la base aplicada en su centro de gravedad.

Figura 72 Esquema de análisis



Análisis de funcionamiento:

- La fuerza de 25 kN o sus componentes tienden a volcar el guinche alrededor de A.
- La fuerza G que representa el peso del macizo tiende a impedir ese vuelco.
- Como estamos analizando la posibilidad de giro alrededor de un punto, evidentemente debemos estudiar los momentos de las respectivas fuerzas alrededor de ese punto.
- El momento respecto del punto de vuelco, de las fuerzas que tienden a producir el volcamiento lo llamaremos *momento volcador* M_{VA} .
- El momento de las fuerzas que tienden a impedir ese vuelco lo denominaremos *momento estabilizador* M_{EA} .

- El sistema no volcará si $M_{EA} > M_{VA}$
- Al cociente M_{EA}/M_{VA} lo llamaremos *factor de seguridad al vuelco*. En estructuras civiles generalmente se establece que FS debe ser mayor o igual a 1.50. Este factor es lo que nos hace estar “suficientemente alejado de la situación de colapso” de la que hablábamos al inicio del capítulo.

- Por lo tanto la verificación de la seguridad al vuelco es un balance de momentos.

Cálculo:

$$\text{Momento volcador (kNm)} \quad M_{VA} = 24.9 * 3.00 + 2.2 * (3.70 + h)$$

$$\text{Momento estabilizante (kNm)} \quad M_{EA} = G * 1.10$$

$$\text{Peso del macizo G (kN)} \quad G = 2.20^2 * h * 24$$

La incógnita del problema es h (m)

$$\text{La ecuación a resolver es} \quad M_{EA} = 1.50 * M_{VA}$$

$$\text{La altura mínima del macizo } h(\text{m}) \quad h = 0.998 \cong 1.00$$

Conclusiones:

Observemos que la suma de M_{VA} y M_{EA} es el momento total de las fuerzas actuantes en el sistema.

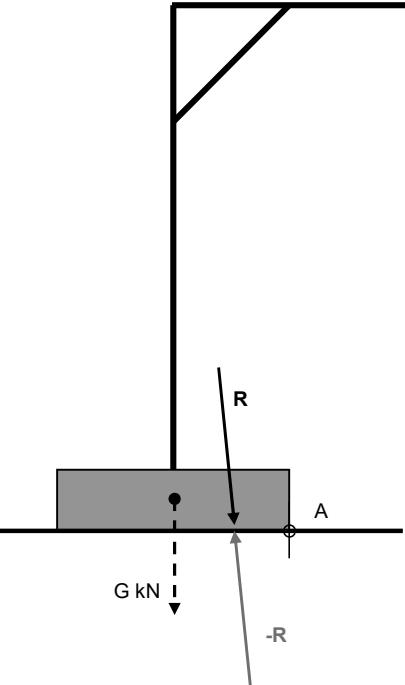
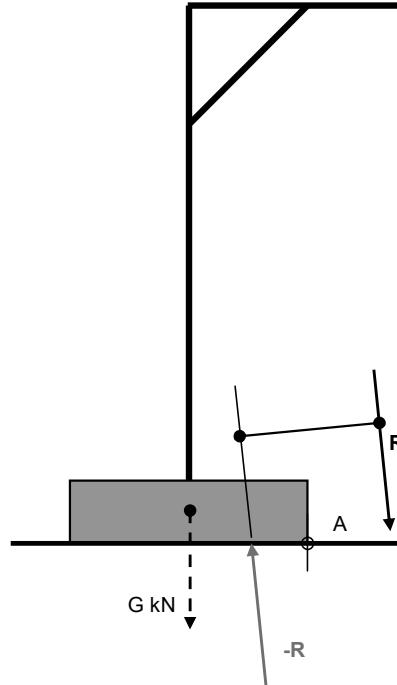
Si $M_{VA} > M_{EA}$ significa que el momento de la resultante respecto de A tiene el sentido de M_{VA} , o sea está pasando a derecha del punto A. Si sucede lo contrario está pasando a izquierda de A.

Si la resultante pasa a izquierda de A, el piso es capaz de generar la fuerza opuesta a la resultante que equilibra al sistema, si la resultante pasa a derecha se genera un par que no se puede equilibrar y el conjunto vuelca.

La situación límite es cuando $M_{VA} = M_{EA}$, lo que significa que el momento de todas las fuerzas respecto de A es cero, es decir la resultante pasa por A.

En la Figura 73 podemos ver estas conclusiones

Figura 73 Conclusiones

(a) $M_{EA} > M_{VA}$ No hay vuelco	(b) $M_{EA} < M_{VA}$ Hay vuelco
	

FACULTAD DE INGENIERIA - UNLP

ÁREA VERTICAL ESTRUCTURAS A

C-1151 ESTRUCTURAS I

MATERIAL DIDÁCTICO COMPLEMENTARIO

UNIDAD 2

SISTEMAS PLANOS VINCULADOS

ING. ASDRÚBAL E. BOTTANI - 2021

Unidad 2

Cuerpos vinculados en el plano

Asdrubal E. Bottani

En este capítulo abordaremos el concepto de vínculos, entendiendo como tales los elementos que se agregan a un cuerpo sometido a la acción de un conjunto de fuerzas con la función de servir de apoyo, o de conectar dos cuerpos entre sí. Circunscribiremos el problema al plano. El problema lo abordaremos desde dos aristas, por un lado, las limitaciones que los vínculos introducen la cinemática del cuerpo introduciendo la noción de grados de libertad, y por el otro las fuerzas que generan sobre el cuerpo para equilibrar al conjunto de fuerzas aplicadas al sistema. Tendremos entonces que analizar el comportamiento de los elementos que interactúan entre sí, por lo tanto, iniciaremos el estudio enunciando el *principio de acción y reacción* y su aplicación según la naturaleza de cada vínculo analizado. Distinguiremos al conjunto de fuerzas actuante en un cuerpo rígido plano a las *fuerzas activas* que serán las ejercidas por causas exteriores al sistema (las cargas gravitatorias, las fuerzas aplicadas debidas al uso, etc) y las *fuerzas reactivas* que son las resultantes de la interacción entre los vínculos y el cuerpo con el cual interactúan. Dado que la situación buscada es el equilibrio, el conjunto de ambas fuerzas deberán cumplir con los principios fundamentales enunciados en el capítulo anterior

Por último, analizaremos el comportamiento sistemas estructurales compuestos por varios elementos vinculados entre sí, analizando las fuerzas mutuas o de interacción entre ellos y los grados de libertad relativos que tienen esos sistemas.

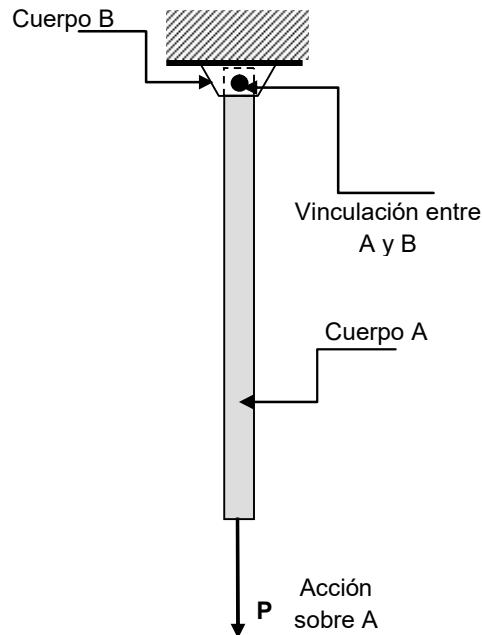
Haremos particular hincapié en la manera de disponer los vínculos para que efectivamente cumplan con su objetivo y no se presenten situaciones de vinculación aparente.

2.1 Principio de acción y reacción

El principio de acción y reacción nos describe desde un punto de vista de las fuerzas en juego cómo es esta interacción entre los cuerpos.

Podemos enunciar el principio de acción como sigue: “*Si un cuerpo A ejerce una fuerza sobre otro cuerpo B, éste ejerce una fuerza de igual magnitud, la misma recta de acción y sentido contrario sobre el primero. Estas dos fuerzas se denominan acción y reacción respectivamente*”.

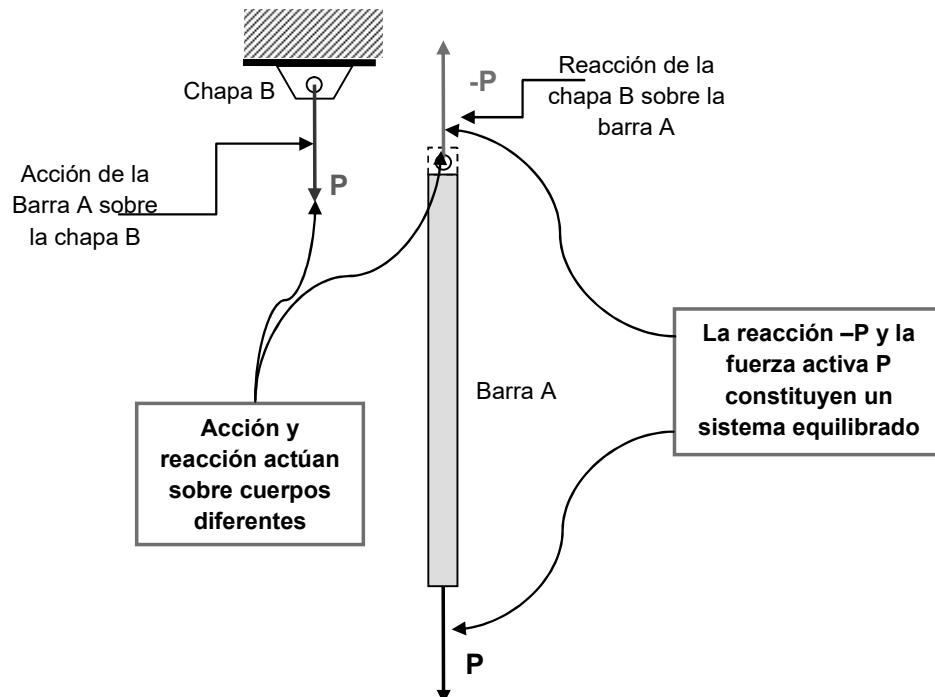
Figura 1 Cuerpos vinculados – Acción y reacción



En la Figura 1 vemos dos cuerpos vinculados entre sí: una barra A vinculada de alguna manera que veremos más adelante con una chapa B fija. La barra A está sometida a una fuerza P en su extremo inferior originada por ejemplo en el peso de una masa que cuelga de dicho extremo. A esta fuerza P la llamaremos *fuerza activa*. Esa fuerza P se puede trasladar a lo largo de su recta de acción hasta llegar al punto de vinculación entre A y B.

Según el principio de acción y reacción la barra A ejerce entonces una fuerza en el sentido de P sobre la chapa B y ésta ejerce sobre la barra A una fuerza igual y contraria de magnitud P , pero dirigida hacia arriba

Figura 2 Acción y reacción

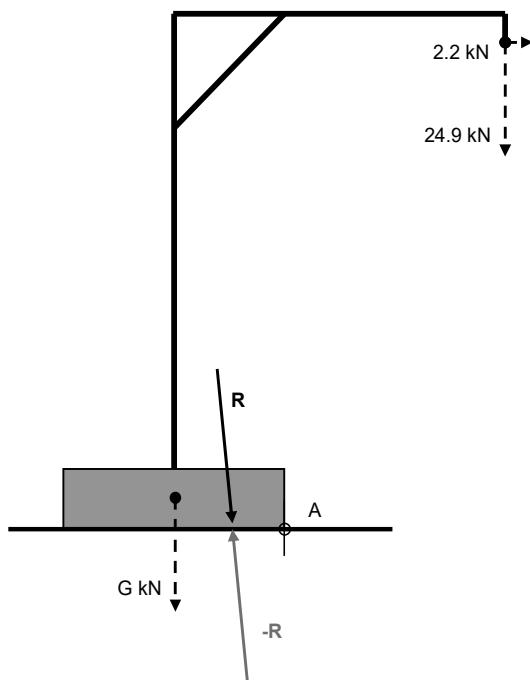


En la Figura 2 vemos una vez separados ambos cuerpos las fuerzas que se estaban transmitiendo de uno a otro a través del vínculo común:

- Por un lado, la chapa B ejerce sobre la barra A una fuerza que equilibra a la fuerza activa P (dibujada en rojo en la figura).
- Por el otro, la fuerza que la barra A ejerce sobre la chapa B (dibujada en azul en la figura).
- Ambas fuerzas constituyen la acción y reacción que establece el principio. A cuál de ellas atribuir el nombre de acción y a cuál el de reacción es arbitrario. En adelante, como nosotros vamos a centrar el estudio en el cuerpo sobre el que actúan las fuerzas activas P, llamaremos a las fuerzas aplicadas a este cuerpo a través del vínculo como fuerzas reactivas (la fuerza roja de la figura).
- La fuerza reactiva $-P$ (que se aplica a través del vínculo) y la fuerza reactiva P (aplicada en el otro extremo) constituyen un sistema equilibrado.

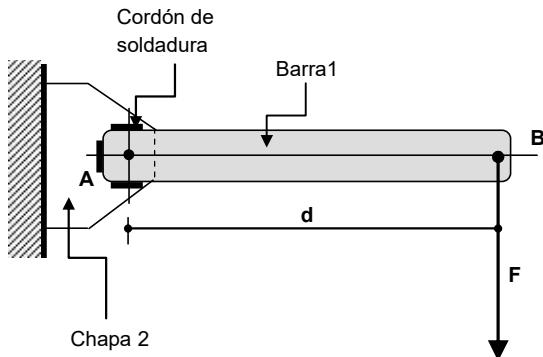
Retomando el análisis de estabilidad al vuelco del ejemplo 5 del capítulo anterior, la fuerza $-R$ que se ve en la Figura 1 es la reacción del terreno sobre la base y es la que equilibra al sistema. El conjunto es estable y no vuelca si la reacción está aplicada dentro de la base (a izquierda del punto A).

Figura 3 Estabilidad del guinche – Reacción del terreno



Analicemos ahora el caso de una barra como la barra 1 de la Figura 4 que tiene el extremo A soldado en todo su contorno a una chapa 2 fija y una fuerza F aplicada en el extremo opuesto B según la Figura 4.

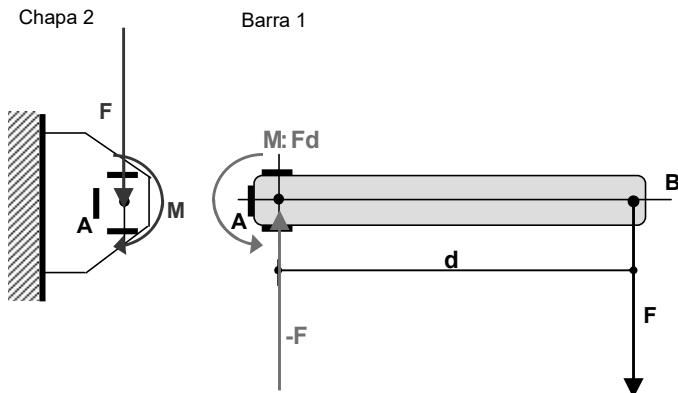
Figura 4 Barra fija en un extremo



El conjunto de ambas chapas vinculadas es un sistema que no tiene posibilidades de movimiento en el plano, en consecuencia, desde un punto de vista de las fuerzas que actúan sobre el mismo, es un sistema equilibrado.

Entonces si sepáramos la chapa A de la barra B, es decir *eliminamos el vínculo que servía de nexo entre ambas chapas*, debemos colocar las fuerzas mutuas entre ambas que son las que hace referencia el principio de acción y reacción, indicadas en la Figura 5 y que se transmitían por ese vínculo.

Figura 5 Acción y reacción en A



Enfoquemos el análisis en la barra 1, por lo tanto, las fuerzas que le aplica la chapa 2 a la barra 1 las llamaremos reacciones de la chapa 2, y las fuerzas iguales y contrarias según el principio que actúan sobre la chapa 2 las llamaremos acciones de la barra 1.

Para calcular las reacciones incógnitas tengamos presente que, *si el conjunto está en equilibrio, una parte de aislada de ese conjunto también lo estará si en esa parte colocamos todas las fuerzas intervenientes, las fuerzas actuantes originales sobre esa parte que llamaremos fuerzas activas, más las fuerzas que le aplican las partes suprimidas y que denominaremos fuerzas reactivas*.

Con ese criterio, podemos calcular las fuerzas en A de la barra 1 teniendo en cuenta que el sistema de fuerzas activas (conocidas) y reactivas (desconocidas) es un sistema equilibrado, planteando las condiciones analíticas vistas en el capítulo anterior podemos determinar esas fuerzas reactivas:

El equilibrio en la dirección vertical queda asegurado si en A actúa una fuerza F igual y contraria a la fuerza F aplicada en A. Estas dos fuerzas forman un par Fd que debe ser

contrarrestado por un par igual y contrario en B. Así determinamos las reacciones de la chapa 2 en la barra 1 (fuerzas en rojo en la Figura 5). Las acciones de la barra 1 sobre la chapa 2 son iguales y contrarias (fuerzas azules de la Figura 5).

En estos casos que hemos analizado para exemplificar el principio de acción y reacción hemos aludido a algunos conceptos y definiciones que desarrollaremos en los puntos que siguen, tales como chapa, barra, posibilidades de movimiento, reacciones y vínculos.

2.2 Definiciones previas

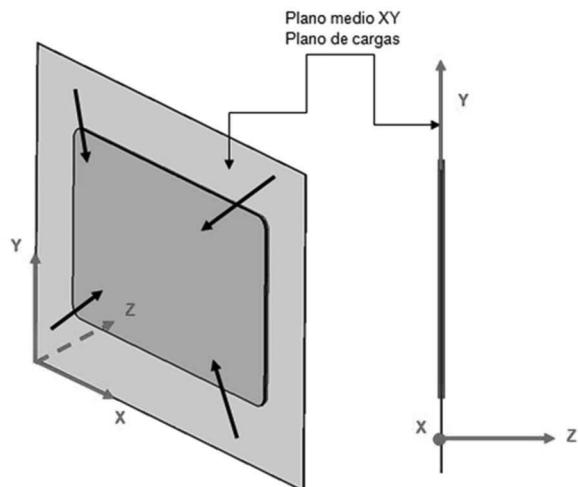
Aunque ya nos hemos referido a ellos anteriormente vamos a definir los elementos con los que vamos a trabajar para modelizar un sistema estructural y analizar su funcionamiento.

a) Chapa:

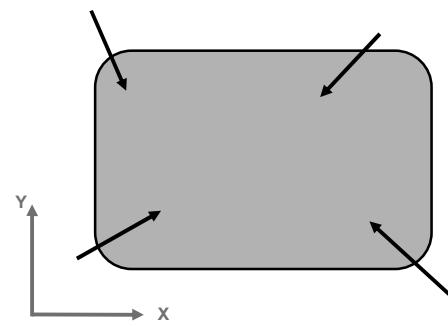
Definimos una chapa a un cuerpo como el que mostramos en la Figura 6 con una dimensión denominada espesor de magnitud mucho menor a las otras dos, y las fuerzas actuantes están todas contenidas en su plano medio, en general coincidente con el plano XY. En la modelización estructural la chapa se representa como una figura plana de contorno idéntico a la chapa original.

Figura 6 Chapa plana

Situación física



Modelo da análise

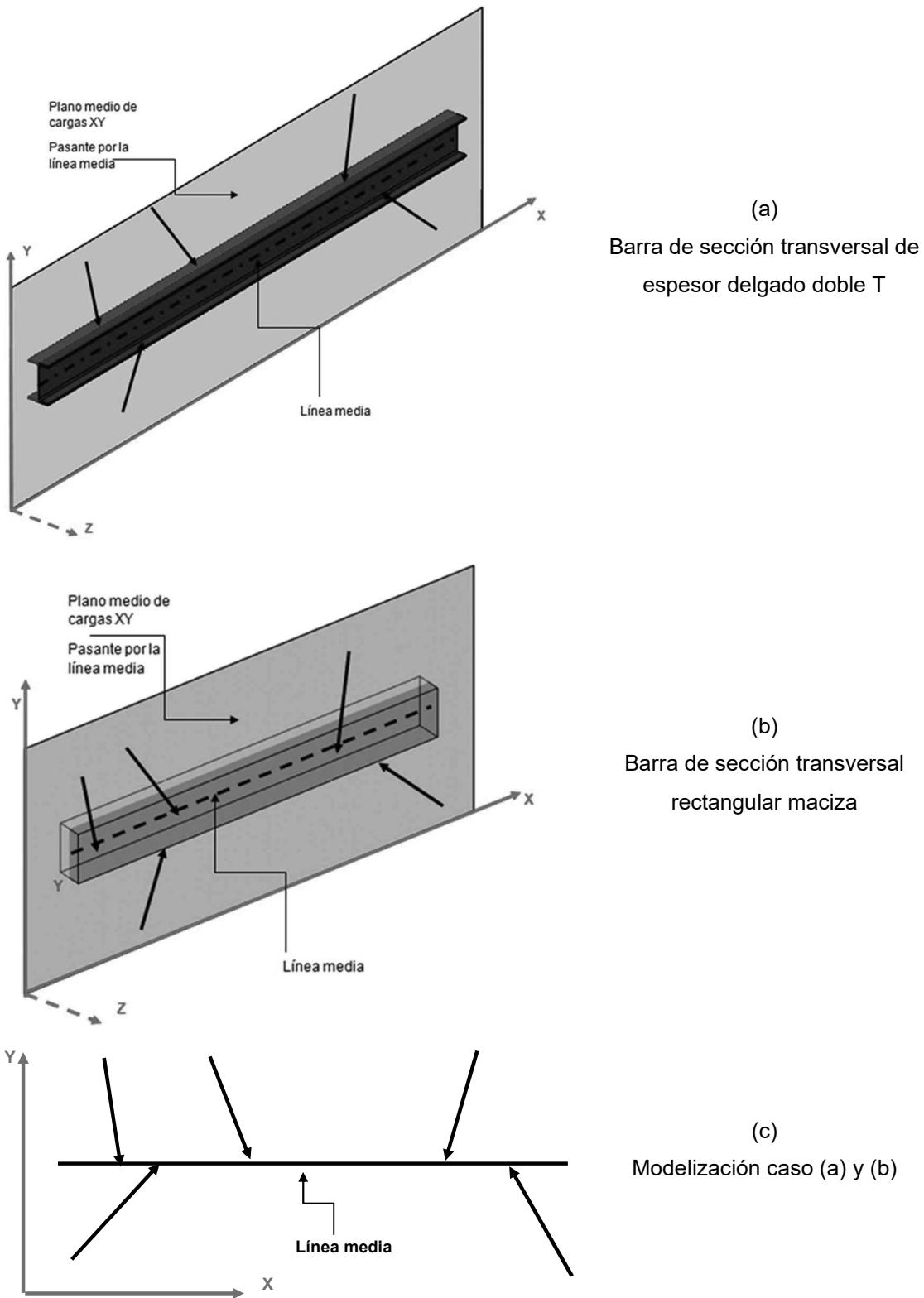


b) Barra:

Una barra es un cuerpo donde una magnitud, la longitud, es mucho mayor que las otras dos. En la modelización estructural, la barra se representa por una línea que une los baricentros de las diferentes secciones de la barra. En capítulos posteriores nos ocuparemos más en detalle de las características geométricas de las barras. En la Figura 7 (a) y (b) mostramos dos barras con diferentes secciones transversales, pero ambas con las cargas en

un plano que contiene a la línea media de la barra, que es el plano de cargas. Ambas barras se modelan de la misma forma por medio de su línea media como vemos en la Figura 7 (c)

Figura 7 Barras

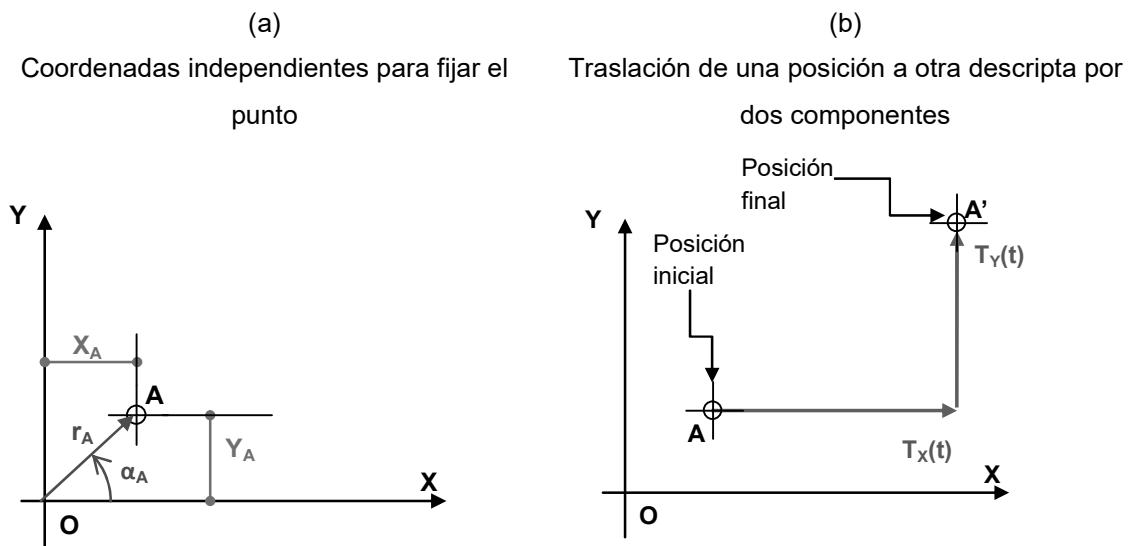


c) *Grados de libertad:*

Consideremos un punto A en el plano XY (Figura 8). La posición del punto queda perfectamente definida por sus coordenadas cartesianas independientes X_A e Y_A , o por sus coordenadas polares r_A y α_A . Es decir que, si establecemos que esos pares de valores no pueden cambiar, el punto A no se puede mover en el plano XY.

Si ahora consideramos al punto A *libre de moverse* en el plano XY, el movimiento puede ser una traslación cualquiera que puede describirse por una traslación en X y una traslación en Y, que en general serán funciones del tiempo (si fueran constantes, el movimiento del punto sería rectilíneo uniforme, y el punto estaría en situación de equilibrio). *Decimos entonces que el punto en el plano tiene dos grados de libertad.*

Figura 8 Grados de libertad de un punto en el plano



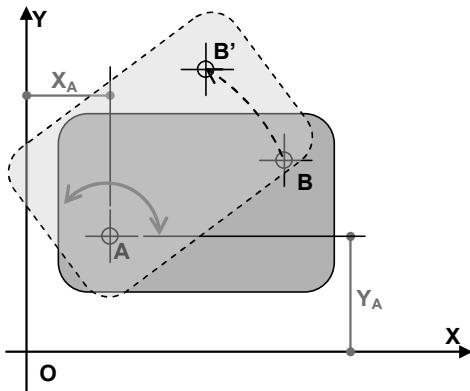
Ahora consideremos una chapa rígida en el plano, recordando que la condición de rigidez viene dada porque la posición relativa de los puntos que componen la chapa se mantiene constante, en otras palabras, la chapa no se deforma.

Si fijamos las coordenadas X_A e Y_A de un punto A de la chapa (Figura 9a), la chapa podrá cambiar de una posición a otra únicamente girando alrededor del punto A, y un punto B pasará a ocupar la posición B'.

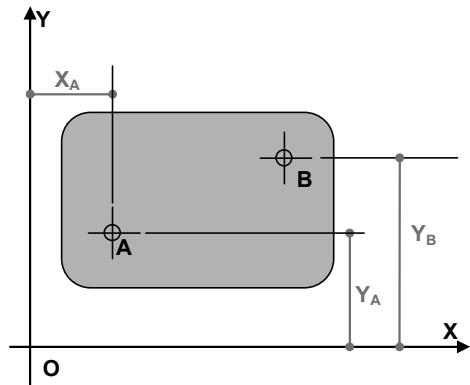
Si además de fijar las coordenadas X_A e Y_A , fijamos la coordenada Y_B del punto B, la chapa ya no podrá moverse porque para poder rotar alrededor de A la coordenada Y_B debe variar y esto no es posible (Figura 9b). Observemos que no fue necesario fijar las dos coordenadas de B si no sólo una (podría haber sido X_B , en vez de Y_B).

Figura 9Grados de libertad chapa rígida en el plano

(a) Con un punto fijo: puede rotar

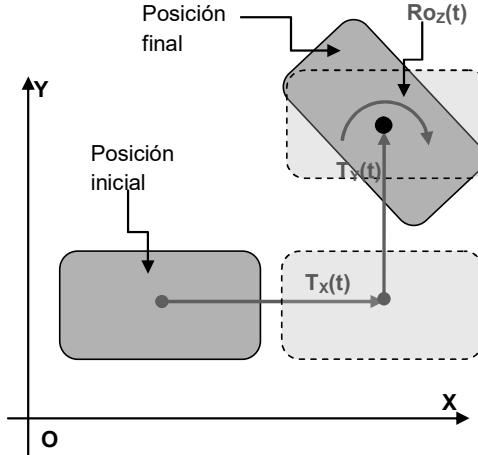


(b) Con un punto fijo y una coordenada fija de otro punto: no se puede mover



Si, como hicimos en el caso del punto en el plano, consideramos a la chapa rígida libre de moverse en el plano XY, y la movemos desde una posición inicial a una posición final, vemos que ese movimiento que en general es una traslación cualquiera y una rotación cualquiera se puede describir, describiendo las dos componentes de la traslación en X e Y, y una rotación alrededor de un eje perpendicular al plano XY, T_x , T_y y R_{xz} , respectivamente que en general serán función del tiempo (**¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**). Decimos entonces que *la chapa rígida en el plano tiene tres grados de libertad*.

Figura10Movimientos posibles de una chapa rígida en el plano



Entonces por grados de libertad entendemos el número de coordenadas independientes que hay que fijar para limitar toda posibilidad de movimiento de ellos. Los elementos que agreguemos para materializar estas limitaciones es lo que denominaremos vínculos.

En el caso que esos vínculos se utilicen para limitar el movimiento respecto de un sistema de ejes fijo, se denominarán *vínculos absolutos* y la chapa estará imposibilitada de moverse. Cuando los vínculos relacionen dos chapas entre sí, y limiten sólo el movimiento relativo de una respecto a otra, pero no impidan el movimiento de todo el conjunto respecto a un sistema fijo, se denominarán *vínculos relativos*.

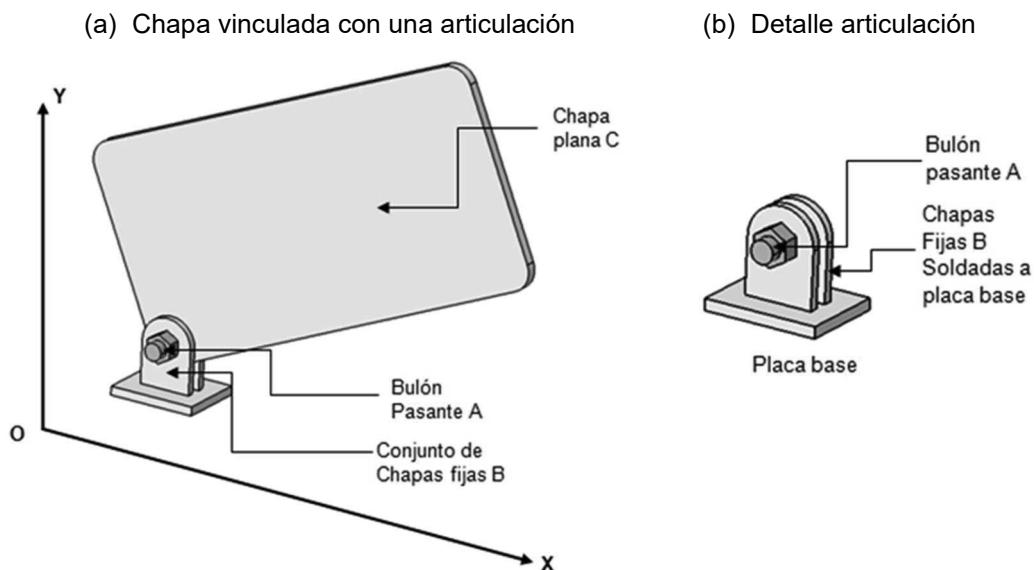
2.3. Vínculos absolutos

a) La articulación

Comenzaremos nuestro estudio por este vínculo porque es el más sencillo de comprender su funcionamiento, y luego lo utilizaremos para definir otros que se basan en él.

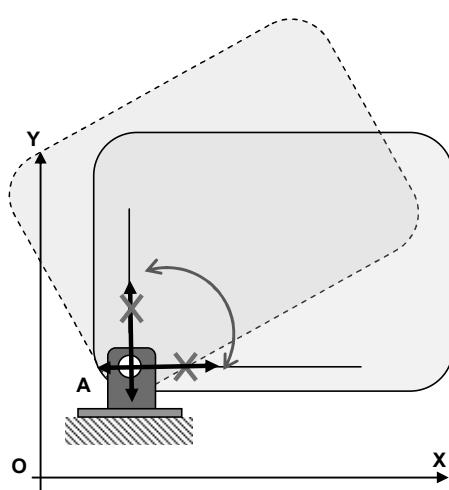
Consideremos una chapa plana C unida mediante un bulón pasante A a un conjunto de chapas fijas B. En la Figura 11 (a) mostramos el conjunto y en la (b) un detalle del apoyo

Figura 11 Articulación



Desde un punto de vista cinemático la chapa C así vinculada sólo puede rotar alrededor del bulón pasante según un eje normal al plano XY, es decir de los tres grados de libertad que disponía la chapa libre en el plano, por efecto del vínculo ha perdido dos de ellos: las dos componentes necesarias para definir cualquier traslación en el plano XY, y sólo posee un grado de libertad remanente que es la rotación alrededor del bulón pasante A (Figura 12).

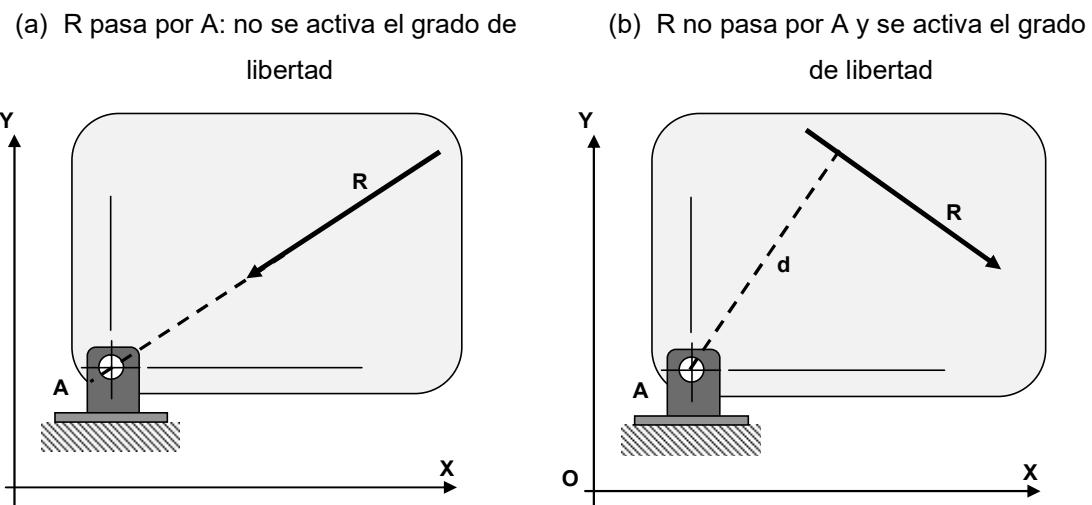
Figura 12 Articulación – Grado de libertad remanente



A este vínculo lo denominaremos *articulación*, porque el único grado de libertad que no restringe es el giro de la chapa alrededor del eje del bulón pasante perpendicular al plano de cargas. Es un apoyo doble o de segunda especie porque restringe dos grados de libertad a la chapa que está vinculada a él.

Desde un punto de vista de las fuerzas, resulta evidente que mientras la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre la chapa pase por el eje perpendicular al plano de cargas del bulón pasante A, la chapa no experimentará ningún movimiento, mientras que si, por el contrario, la resultante no pasa por el eje del bulón pasante, la chapa rotará con una aceleración angular producida por el momento de las fuerzas respecto de ese eje activando el grado de libertad que posee la chapa (Figura 13).

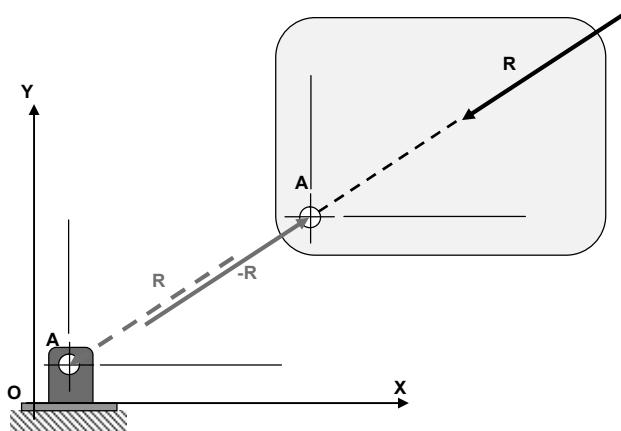
Figura 13 Condición de la resultante para no activar el grado de libertad



Recordando el principio de acción y reacción, el vínculo y la chapa son dos cuerpos que interactúan, por lo tanto, se ponen en juego la acción y reacción de cada uno sobre el otro. En particular como nosotros estamos estudiando el comportamiento de la chapa, *a la fuerza que el vínculo le aplica a la chapa la llamaremos reacción del vínculo*.

Así en la Figura 14 vemos, separando el conjunto vínculo y chapa, la reacción sobre la chapa ($-R$ indicada en rojo continuo) y la acción sobre el vínculo (R indicada en rojo punteado).

Figura 14 Acción y reacción



Como la chapa está impedida de trasladarse, evidentemente la reacción del vínculo sobre la chapa debe ser igual y contraria a la resultante de las fuerzas actuantes en ella.

Entonces, podemos definir dos tipos de fuerzas exteriores actuantes en la chapa, o en general en un cuerpo vinculado:

Fuerzas activas: son todo el conjunto de fuerzas exteriores que actúan sobre la chapa (o en el caso más general sobre el cuerpo) causadas por agentes externos (por ejemplo, la gravedad, el viento, los pesos aplicados, etc).

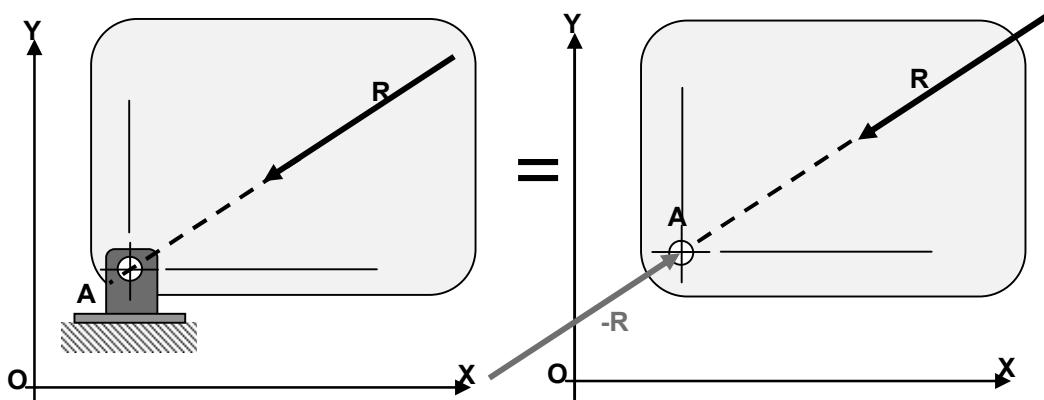
Fuerzas reactivas: son el conjunto de fuerzas exteriores actuantes sobre la chapa (o en el caso más general sobre el cuerpo), y que se aplican a través de los vínculos exteriores que tengan dicha chapa o cuerpo.

En general sólo representaremos las reacciones del vínculo sobre la chapa, obviando la acción de la chapa sobre el vínculo.

Entonces el esquema de la chapa con las fuerzas activas y el vínculo es equivalente a la chapa con las fuerzas activas y la fuerza reactiva que le está aplicando el vínculo (Figura 15).

Este proceso de eliminar el vínculo y colocar la reacción que ejerce sobre la chapa lo denominaremos poner en evidencia la reacción.

Figura 15 Poner en evidencia la reacción de vínculo



Si la resultante del sistema de fuerzas activas cambia de magnitud, o de sentido, o de recta de acción, pero siempre pasa por el vínculo, la chapa siempre estará en equilibrio porque no se manifiesta el grado de libertad de la misma, que es la rotación alrededor de un eje pasante por A normal al plano XY. En la Figura 16(a) vemos para distintas resultantes R , R' o R'' , como cambian las reacciones en el vínculo, pero siempre dando una fuerza igual y opuesta a la resultante de las fuerzas activas, que es la esencia de un sistema equilibrado.

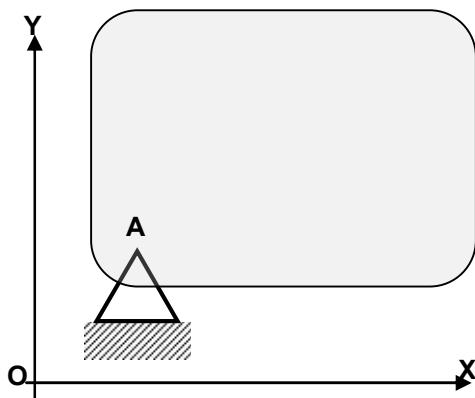
En consecuencia, el apoyo articulado es capaz de reaccionar con una fuerza pasante por el mismo pero que puede tener cualquier dirección del plano y puede analizarse como la suma de dos componentes R_x y R_y según los ejes del sistema fijo XY, que serán dos variables independientes en un análisis de equilibrio (Figura 16 (b)).

Figura16 Características de la reacción en la articulación

(a) La reacción en A es capaz de equilibrar cualquier fuerza que pase por A	(b) La reacción en A se puede analizar como la suma de dos componentes independientes una de la otra

Por último, diremos que la manera de esquematizar un vínculo doble articulación será la que mostramos en la Figura 17

Figura 17 Esquematización de apoyo articulado

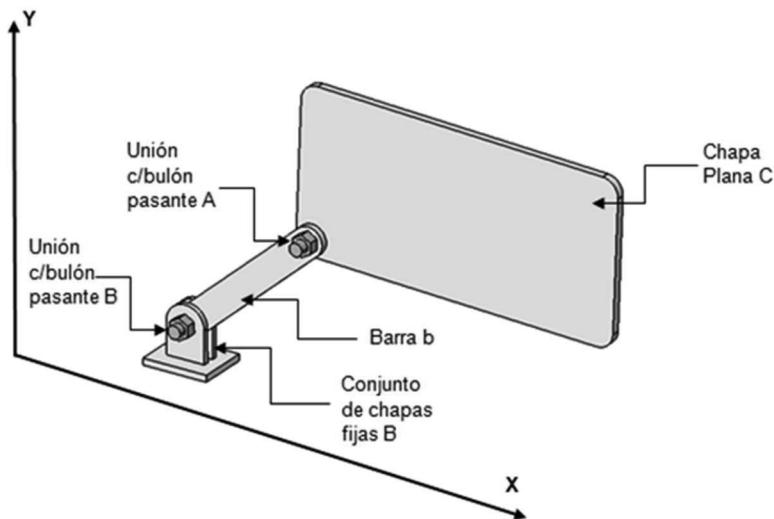


b) *La biela*

Consideremos ahora el esquema de la Figura 18, donde vemos una chapa plana C, vinculada en A mediante una unión con bulón pasante a una barra b, la que en su otro extremo está unida con otro bulón pasante a un conjunto de chapas fijas B.

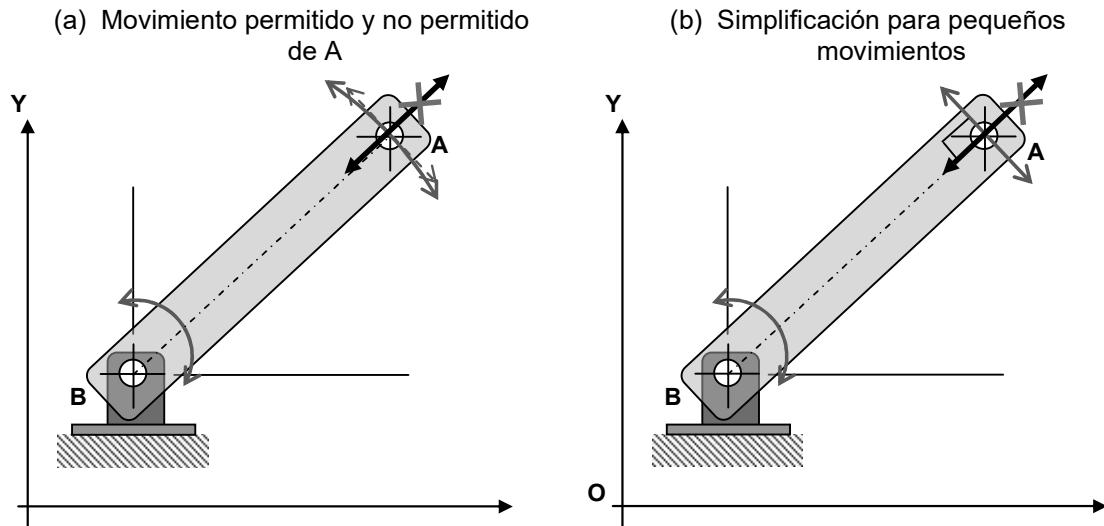
Vamos a ver mediante un análisis cinemático que restricciones impone la barra b a la chapa C, en su movimiento en el plano XY. Para ello consideraremos sólo la barra b, articulada en su extremo B al conjunto de chapas fijas. Este sistema se trata de una chapa (en este caso la barra b) vinculada en un extremo (el B) a una chapa fija mediante una articulación como la descripta en el inciso anterior.

Figura 18 Chapa vinculada con una biela



Como observamos en la Figura 19a, la barra b sólo puede rotar alrededor del punto B, por lo tanto, el extremo A se mueve en el plano XY sobre un arco con radio AB. Para pequeños movimientos, el arco se confunde con la tangente, por lo tanto, para pequeños movimientos, podemos decir que *el punto A sólo se puede mover en el plano XY según una perpendicular al radio AB y no puede moverse en la dirección de AB* tal como vemos en la Figura 19b

Figura 19 Movimiento permitido del extremo A



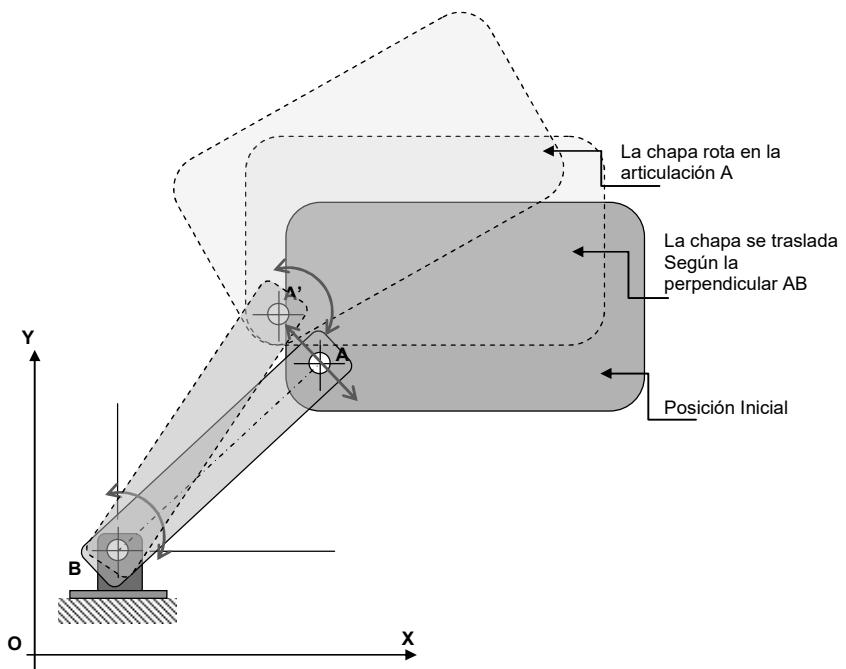
Sabiendo ahora la posibilidad de movimiento que tiene el punto A por pertenecer a la barra b, analicemos las posibilidades de movimiento de la chapa C en la Figura 20.

Por un lado, la chapa se puede mover en la dirección perpendicular a la línea AB, acompañando el movimiento permitido del punto A y no puede moverse en la dirección AB.

Además, como la unión de la chapa C con la barra AB es una articulación la chapa puede rotar alrededor del punto A.

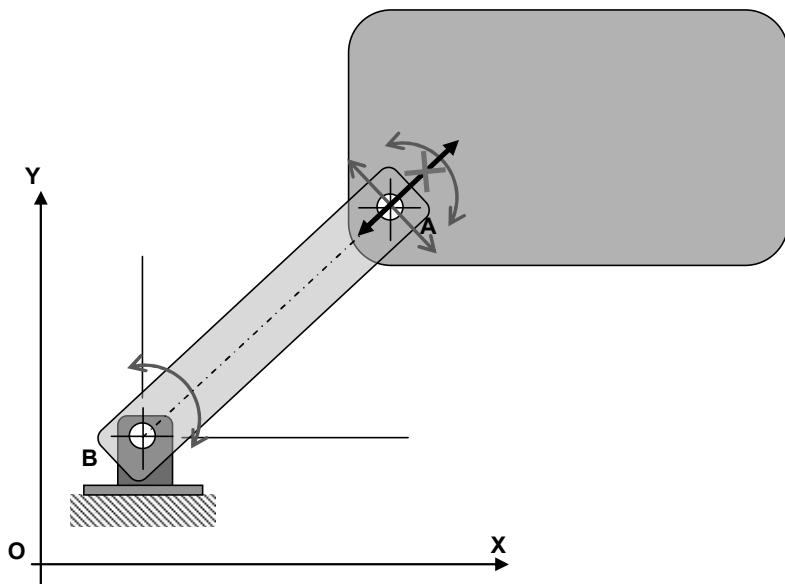
Por lo tanto, la chapa tiene sólo un movimiento no permitido, que es en la dirección AB.

Figura20 Posibilidades de movimiento de la chapa C



En la Figura 21 resumimos los movimientos permitidos y no permitidos de la chapa C vinculada a la barra b

Figura21 Grados de libertad remanentes

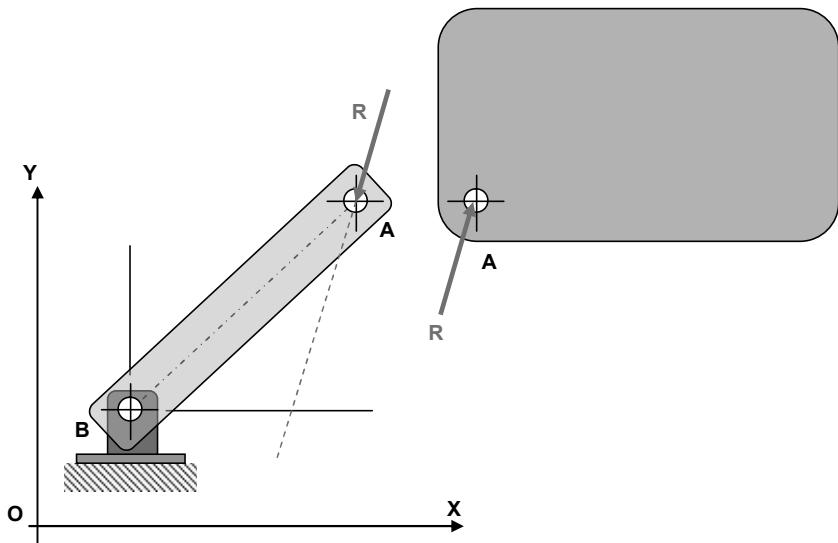


En conclusión, de las tres posibilidades de movimiento que tiene una chapa en el plano, la barra b, articulada en un extremo a la chapa y en el otro a un punto fijo, le limita una posibilidad, que es el movimiento en la dirección que une los dos extremos articulados de la barra.

La chapa así vinculada conserva dos grados de libertad, que son el movimiento en la dirección perpendicular a la recta que une los dos extremos de la barra, y la rotación alrededor de la articulación de la chapa con la barra. La barra b limita sólo un grado de libertad y se denomina vínculo simple.

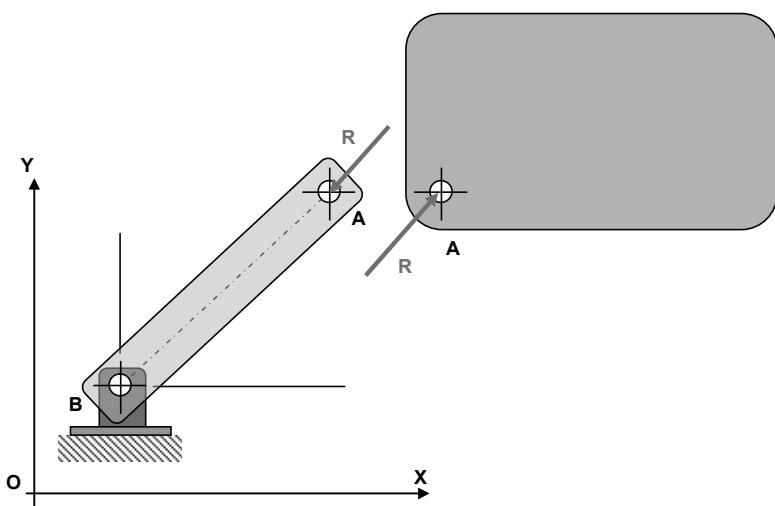
Analicemos ahora qué fuerzas se ponen en juego en la interacción entre la barra y la chapa plana. Para ello sepáremos la barra de la chapa en su punto de unión A, y coloquemos las fuerzas que según el principio de acción y reacción están en juego en esa vinculación, denominando particularmente reacción a la fuerza de la barra sobre la chapa. En la Figura 22, se dibujan la acción de la chapa sobre la barra y la reacción de ésta sobre la primera. Se ve claramente, que esta situación no es posible porque al no pasar la fuerza R en la barra por la articulación en B, habría un momento y su consiguiente aceleración angular y el sistema no estaría en equilibrio.

Figura 22 Situación no posible si hubiera equilibrio



La única dirección posible para las fuerzas mutuas entre la barra y la chapa es la que une el extremo B de la barra con el extremo A de unión con la chapa, tal como vemos en la Figura 23. Observemos que la dirección de la fuerza es coincidente con el grado de libertad que impide la barra (Figura 21)

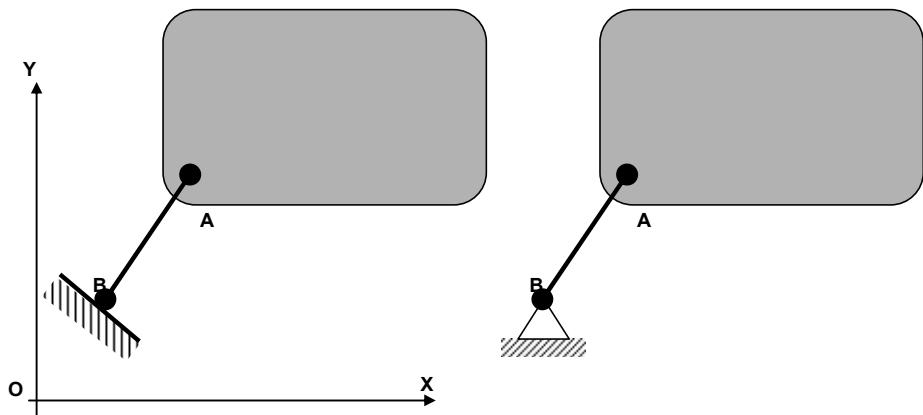
Figura 23 Dirección posible de la reacción de la barra sobre la chapa



Este vínculo simple constituido por una barra articulado en un extremo a un punto fijo y en el otro extremo a la chapa plana se la denomina biela. La biela restringe un grado de libertad que es el desplazamiento en la dirección de la recta que pasa por ambos extremos de la biela. La reacción de la biela sobre la chapa es una fuerza que tiene esta dirección.

En la Figura 24 mostramos cómo se simboliza la biela en un modelo estructural

Figura 24 Modo de simbolizar una biela



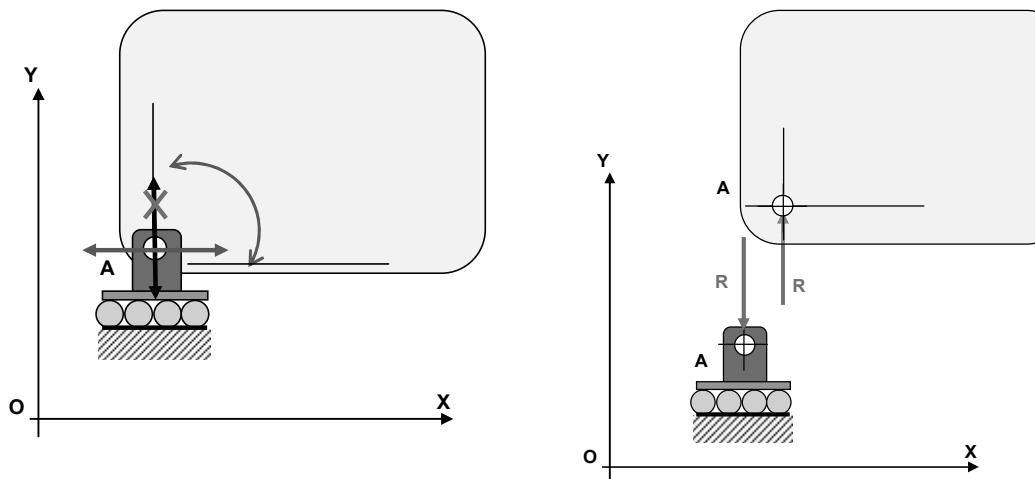
c) *El apoyo deslizante*

El apoyo deslizante es otro vínculo simple que impone las mismas restricciones que la biela, pero su materialización consiste en una unión con bulón pasante, pero en vez de a una chapa fija, se une a una chapa montada sobre rodamientos. En la Figura 25a observamos los grados de libertad restringidos y no restringidos, donde vemos que sólo impide la traslación en la dirección perpendicular al movimiento que permiten los rodamientos, y en la Figura 25b la reacción que es capaz de generar sobre la chapa consistente con el grado de libertad restringido

Figura 25 Apoyo deslizante

(a) Grados de libertad impedidos y no impedidos

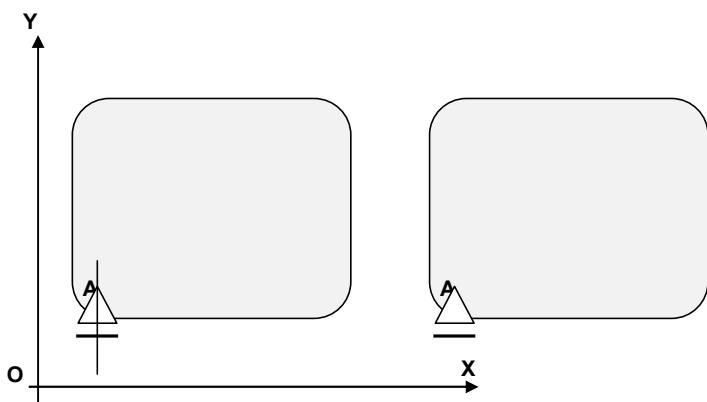
(b) Reacción puesta en juego



Conviene aquí que distinguimos claramente que la articulación y el apoyo deslizante, si bien ambos reaccionan con una fuerza sobre la chapa a la que se vinculan, en el caso de la articulación la dirección de esa fuerza puede ser cualquiera y por ese motivo se representa por dos componentes (en general según los ejes globales X e Y) independientes, mientras que la fuerza reactiva del apoyo deslizante tiene una dirección determinada y fija que es la normal a la dirección del movimiento permitido.

En la modelización simbolizaremos un apoyo deslizante como mostramos en la Figura 26 donde se indican la línea de movimiento permitido y la no permitida, aunque a veces ésta última se suele obviar.

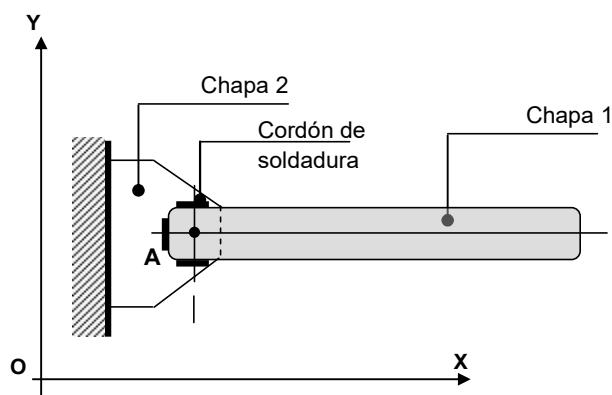
Figura 26 Modo de simbolizar un apoyo deslizante



d) El empotramiento

Consideremos una chapa plana 1 vinculada a otra chapa 2 fija, mediante un cordón de soldadura a lo largo del perímetro de contacto de ambas chapas como nos ilustra la Figura 27

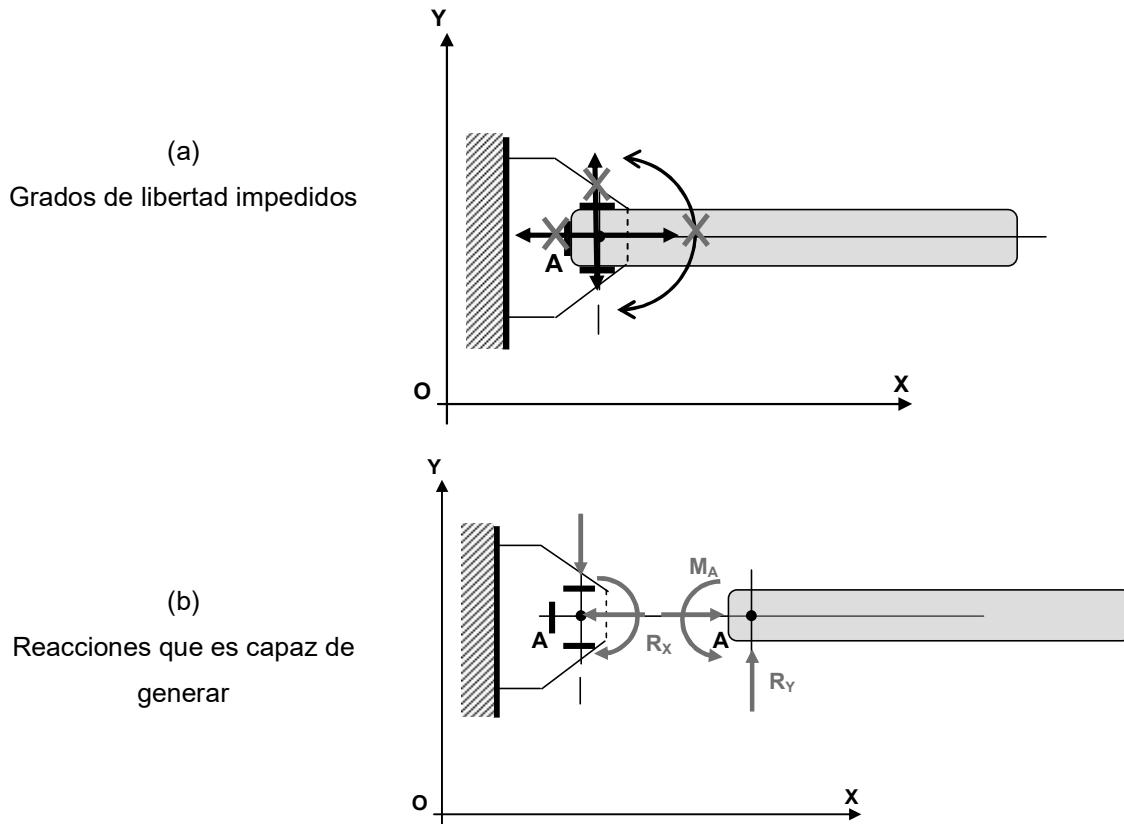
Figura 27 Chapa soldada a una chapa fija



En este caso resulta evidente que la chapa 1 tiene imposibilitados sus tres posibilidades de movimiento, tanto sus dos traslaciones, como su rotación. Este tipo de vinculación que restringe simultáneamente los tres grados de libertad de la chapa es un vínculo triple y se denomina empotramiento.

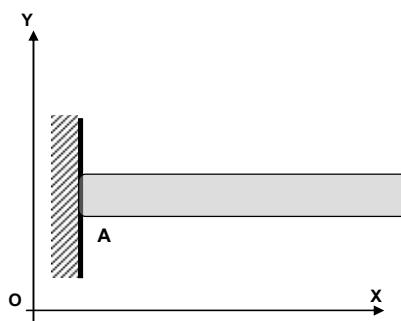
En la Figura 28 a y b vemos los movimientos restringidos, y las reacciones consecuentes con esos grados de libertad restringidos.

Figura 28 Empotramiento: restricciones y reacciones



En la modelización estructural el empotramiento se suele representar como mostramos en la Figura 29.

Figura 29 Modelización del empotramiento

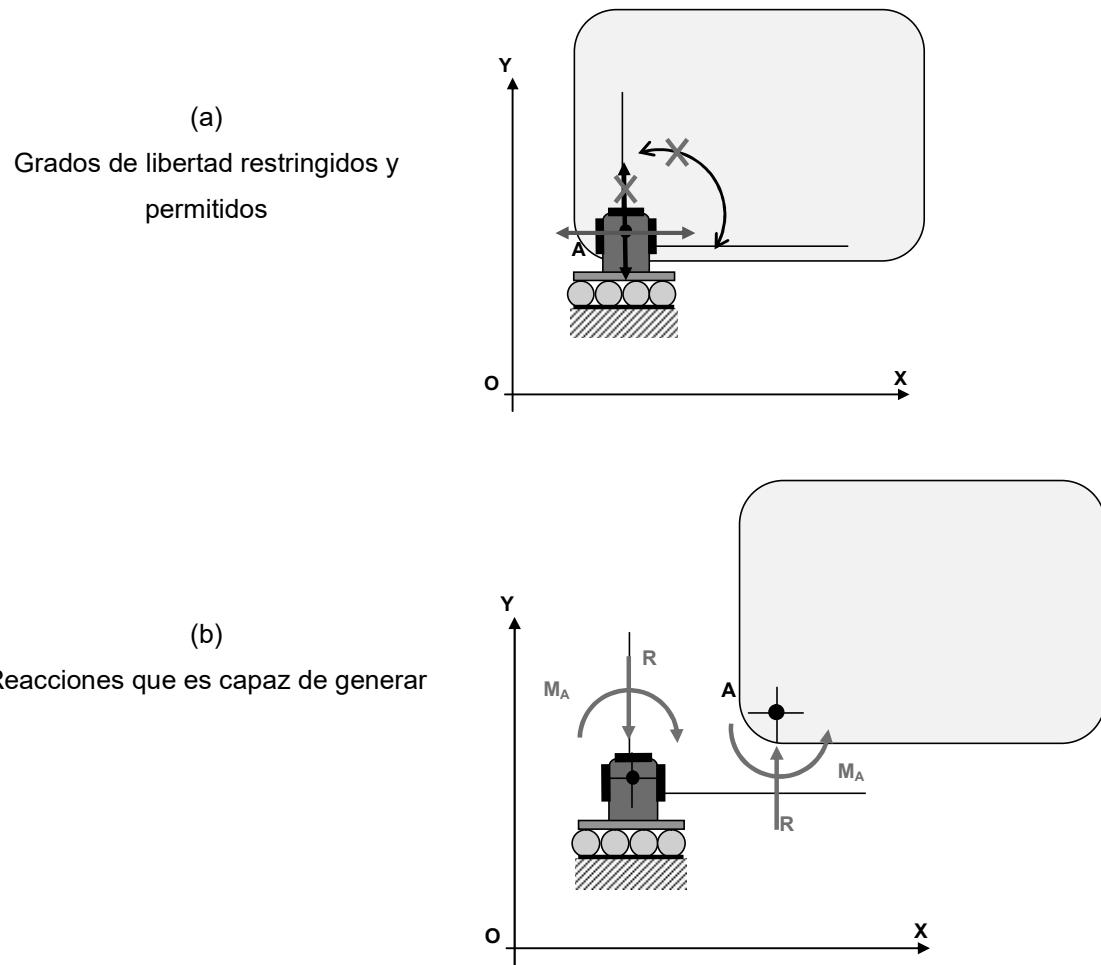


e) *El empotramiento guiado*

El último de los vínculos absolutos que veremos es una variante del apoyo deslizante, en la cual, en vez de vincularse a la chapa con una unión con bulón pasante, la chapa que contiene al conjunto de los rodamientos se vincula a la chapa plana mediante una unión soldada en todo su contorno. En este caso, el único movimiento posible es en la dirección de los rodamientos,

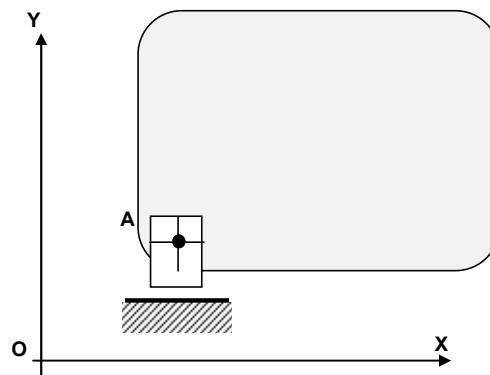
mientras que el movimiento en la dirección perpendicular a los mismos, y la rotación de la chapa están restringidos. Se trata de un vínculo doble que restringe dos grados de libertad, y se denomina empotramiento guiado. La Figura 30 nos muestra los grados de libertad permitidos y restringidos y las reacciones posibles correspondientes con los mismos.

Figura 30 Empotramiento guiado



En la modelización estructural, el empotramiento guiado se simboliza como indicamos en la Figura 31.

Figura 31 Modelización empotramiento guiado



2.4 La chapa vinculada en el plano

En los incisos anteriores hemos estudiado los grados de libertad que tiene una chapa rígida en el plano y los elementos que se le pueden agregar con el fin de restringir esos grados de libertad. En este punto estudiaremos las posibles configuraciones de sustentación de una chapa en el plano, en función de la cantidad y disposición que se adopte para sus elementos de vinculación, y la forma de calcular las reacciones que esos vínculos generan sobre la chapa.

a) Sistema activo y sistema reactivo

En lo que sigue distinguiremos dos grupos de fuerzas actuantes sobre la chapa o conjunto de chapas, en el primer grupo se encontrarán todas las fuerzas exteriores que actúan sobre la chapa, cuyos orígenes pueden ser los más diversos (fuerzas gravitatorias, aerodinámicas, fuerzas debidas al uso como por ejemplo pesos a levantar en el caso de grúas, vehiculares en el caso de puentes, cargas de temperatura, etc), no estando incluidas las fuerzas que se transmiten a través de los vínculos. A este grupo lo denominaremos *sistema activo*.

El segundo grupo está formado por las fuerzas exteriores, pero que se aplican a través de los vínculos, y lo denominaremos *sistema reactivo*.

Ambos sistemas, el reactivo y el activo, son considerados sistemas de fuerzas exteriores actuantes sobre la chapa o conjunto de chapas.

Como nos vamos a ocupar de chapas o conjunto de chapas en equilibrio, la condición fundamental del análisis de sistemas equilibrados es que el conjunto del sistema activo más el reactivo sea un sistema equilibrado, condición que expresaremos conceptualmente así:

$$\text{SISTEMA ACTIVO} + \text{SISTEMA REACTIVO} = \text{SISTEMA EQUILIBRADO}$$

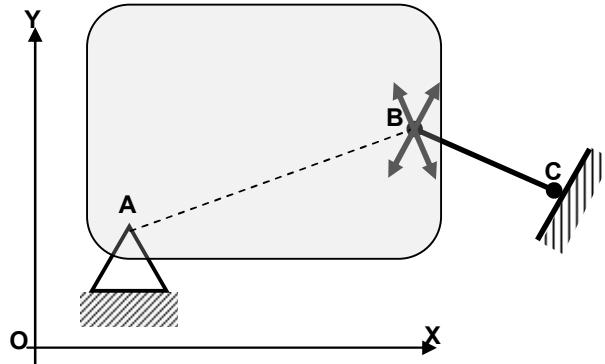
En otras palabras, *el sistema reactivo debe dar una resultante igual y opuesta a la resultante del sistema activo*.

b) Tipos de vinculación de una chapa rígida en el plano

Ya hemos señalado antes que una chapa en el plano tiene tres grados de libertad que son las tres posibilidades de movimiento que tiene: una translación en cualquier dirección, que se describe mediante dos componentes (según los ejes globales X e Y) y una rotación alrededor de un eje paralelo al eje global Z, normal al plano XY. Como se mostró en el punto anterior, cada vínculo que se agrega restringe uno, dos o los tres grados de libertad de la chapa. Analizaremos entonces cómo funciona el sistema chapa-vínculo a medida que le vamos agregando restricciones. Veremos también que hay situaciones en las que pese a agregar vínculos, no imponen más restricciones al sistema. Simultáneamente veremos cómo la presencia de estas restricciones hace que la chapa pueda entonces admitir sistemas activos no equilibrados, porque como señalamos en la ecuación fundamental, el sistema reactivo se encarga de equilibrar al activo.

Comencemos el estudio por una chapa a la cual la hemos vinculado con una articulación en A como la que ya analizamos en la Figura 12. La articulación es un vínculo doble, que restringe toda traslación de la chapa, y el grado de libertad remanente es una rotación alrededor de esa articulación. Agreguemos a la chapa una biela (vínculo simple) en el punto B como mostramos en la Figura 32 y analicemos las posibilidades de movimiento:

Figura 32 Chapa sustentada con articulación y biela – Vínculo bien dispuesto



El punto A de la chapa está fijo, por la definición de la articulación

El punto B, por pertenecer a la chapa podría moverse sobre un arco de circunferencia con centro en A, que para pequeños movimientos se confunde con la tangente, perpendicular al radio AB, pero por pertenecer también a la biela debería moverse en la dirección perpendicular a BC, que es la dirección no restringida de la biela. En consecuencia, el punto B tampoco puede moverse, y por lo tanto la chapa tiene totalmente restringidas sus posibilidades de movimiento.

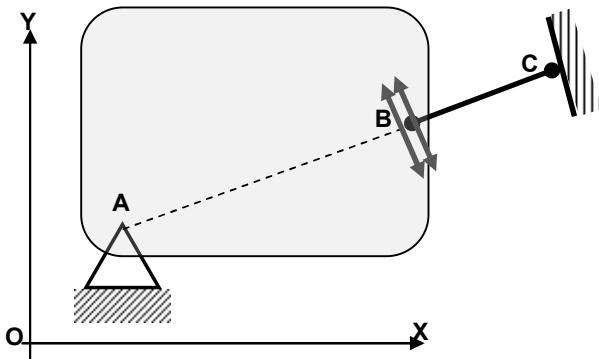
Hemos necesitado entonces tres vínculos, para asegurar que la chapa no puede moverse porque no le queda remanente ningún grado de libertad.

Podríamos hacer el siguiente balance:

1 chapa.....	3 GL
1 articulación.....	-2 GL
1 biela.....	<u>-1GL</u>
Remanente	0 GL

Si hubiésemos colocado la biela de manera que su eje (línea BC) pase por el punto A, como vemos en la Figura 33, no estaría impedido el movimiento del punto B en la dirección perpendicular a AB, y a la chapa le quedaría remanente ese grado de libertad, pese a que el balance de vínculos sería como en el caso anterior.

Figura 33 Chapa sustentada con articulación y biela – Vínculo mal dispuesto

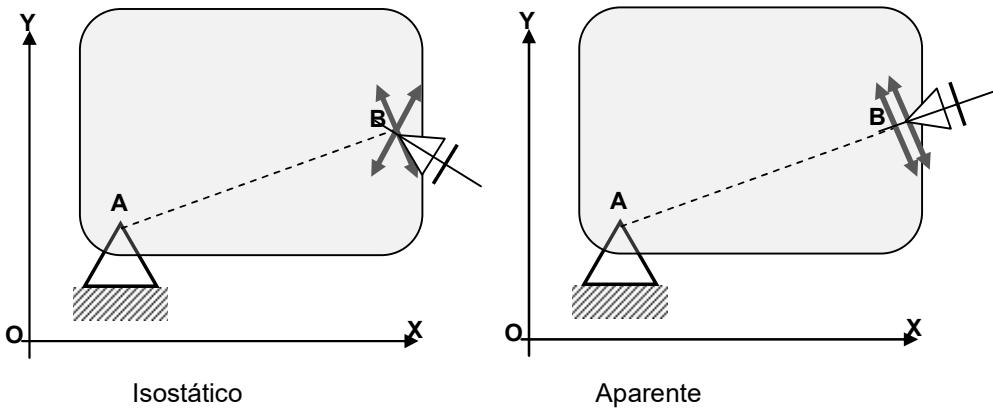


En consecuencia, no sólo la cantidad de vínculos es importante a los fines de lograr la restricción de todos los grados de libertad de la chapa, sino también la forma en que esos vínculos están dispuestos.

Diremos que una chapa está isostáticamente sustentada cuando se le agrega el mismo número de vínculos que sus grados de libertad, y esos vínculos están convenientemente dispuestos. En el caso que alguno de esos vínculos esté mal dispuesto, y a la chapa le quede un grado de libertad no restringido, diremos que la vinculación es aparente.

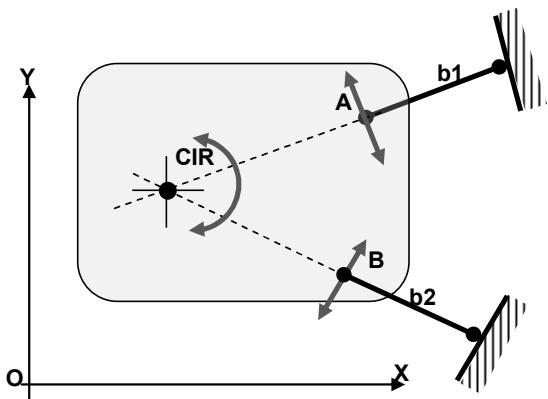
Lo expresado en los párrafos anteriores se aplica igual para el caso que en vez de la biela, agreguemos un apoyo deslizante según la Figura 34.

Figura 34 Vinculación isostática y aparente



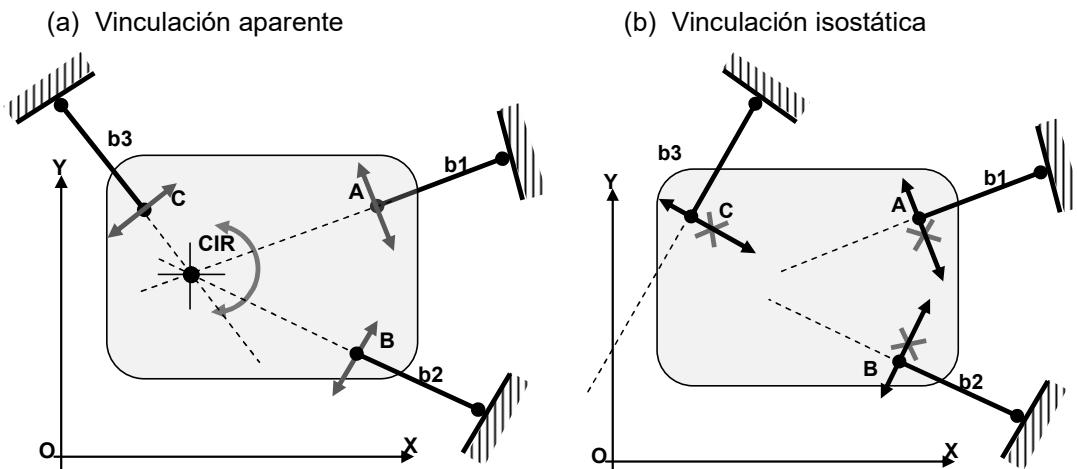
Analicemos otras posibilidades de sustentación de la chapa, viendo cómo se comporta una chapa si la vinculamos con dos bielas b_1 y b_2 en los puntos A y B respectivamente como mostramos en la Figura 35. Considerando el movimiento posible del punto A, por efecto de la biela b_1 , puede moverse en la dirección perpendicular a esa biela. Por otro lado, el punto B, por efecto de la biela b_2 , sólo puede moverse en la dirección perpendicular a b_2 . De esto deducimos que para que esos dos puntos se muevan simultáneamente según las direcciones indicadas, la chapa en su conjunto está rotando alrededor del punto donde se cruzan ambas bielas, que denominaremos Centro Instantáneo de Rotación (CIR). Es decir, le queda un grado de libertad remanente que es la rotación señalada.

Figura 35 Chapa vinculada por dos bielas, con un GL remanente



Si ahora a esa chapa le agregamos una tercera biela b_3 en C , existen dos posibilidades: la primera es que la dirección de la biela b_3 pase por el punto intersección de las otras dos como vemos en la Figura 36a, en tal caso, los movimientos posibles de A , B y C son compatibles con una rotación de la chapa alrededor del CIR, con lo cual el sistema sigue teniendo un grado de libertad remanente. Pero si la dirección de la biela b_3 , no concurre al punto donde concurren las otras dos bielas, ya no es posible el movimiento simultáneo de los puntos A , B y C y por lo tanto la chapa no se mueve (Figura 36b).

Figura 36 Vinculación con tres bielas



En ambos casos se cumple el siguiente balance de vínculos:

1 chapa.....	3 GL
Biela b_1	-1 GL
Biela b_2	-1 GL
Biela b_3	<u>-1 GL</u>
Remanente	0 GL

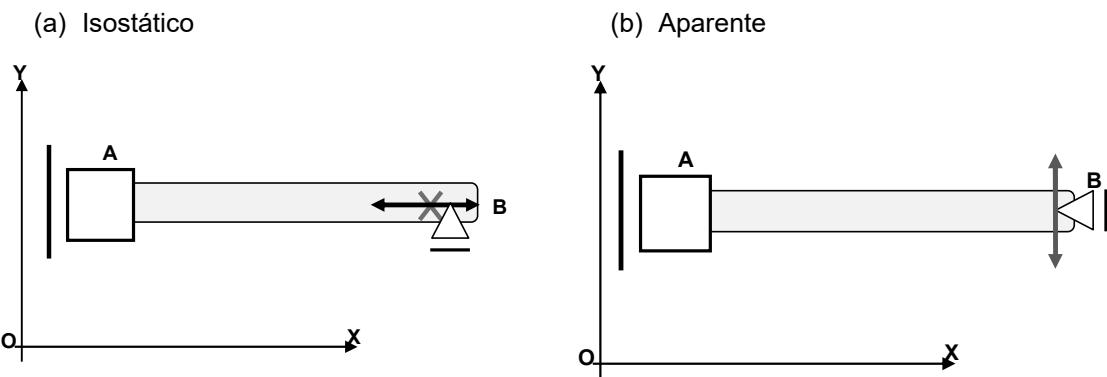
En el caso de la Figura 36a diremos que la vinculación es aparente, porque pese a contar con el número mínimo de vínculos necesario, éstos están mal dispuestos; mientras que en el caso de la Figura 36b la vinculación es isostática.

Otra combinación posible es utilizar un empotramiento guiado (vínculo doble) y una biela, o un apoyo deslizante, como por ejemplo las dos disposiciones de la Figura 37, donde en el caso (a) como la dirección permitida del empotramiento y el vínculo no coinciden, la chapa no se puede mover, pero en el caso (b), como ambas direcciones son coincidentes, el grado de libertad correspondiente al desplazamiento en Y, no está impedido.

En ambos casos el balance da cero:

Chapa.....	3 GL
Empotram. guiado.....	-2 GL
Apoyo deslizante.....	<u>-1 GL</u>
Remanente	0 GL

Figura 37 Empotramiento guiado y apoyo deslizante



Finalmente el caso de la chapa empotrada, dado que el vínculo restringe toda posibilidad de movimiento, se trata de un sistema isostático y no cabe la posibilidad de vinculación aparente.

c) Cálculo de las reacciones:

Según lo que vimos en los párrafos anteriores, en los vínculos existen fuerzas mutuas entre el vínculo y la chapa que, en base al principio de acción y reacción, son iguales y contrarias. Dado que vamos a poner como objeto de análisis a la chapa y las fuerzas que actúan sobre ella, las fuerzas que los vínculos aplican a la chapa las denominaremos reacciones de vínculo y el sistema de fuerzas que componen será el sistema reactivo como ya señalamos en el inciso (a) de este punto. Todas las demás fuerzas exteriores que actúan sobre la chapa pertenecen al sistema activo.

El objeto es poder determinar el conjunto de fuerzas que compone el sistema reactivo teniendo en cuenta que sistema activo y sistema reactivo en conjunto constituyen un sistema equilibrado. En otras palabras, la resultante del sistema reactivo debe ser igual y opuesta a la resultante del sistema activo, constituyendo la ecuación fundamental del cálculo de reacciones ya vista y que volvemos a transcribir aquí:

$$\text{SISTEMA ACTIVO} + \text{SISTEMA REACTIVO} = \text{SISTEMA EQUILIBRADO}$$

El procedimiento conceptual que seguiremos para calcular las reacciones se puede resumir en los siguientes pasos:

- Se realiza el análisis de isostaticidad, evaluando los grados de libertad, los vínculos dispuestos y la forma en que están dispuestos para evitar vinculación aparente (que queden grados de libertad remanente)
- Se eliminan los vínculos reemplazándolos por las reacciones que estos vínculos le aplican a la chapa. En razón de que no se conocen los sentidos de las fuerzas, se adoptan sentidos arbitrarios para las reacciones
- Identificados convenientemente los sistemas de fuerzas activas y reactivas, para asegurar que en conjunto constituyen un sistema equilibrado, se plantean las condiciones analíticas que aseguran esa condición, adoptando a tal fin un sistema de ejes de referencia X-Y, y planteando algunas de las ecuaciones vistas en el capítulo 1 y que reproducimos aquí, respetando para los signos los sentidos previamente adoptados para las reacciones:

$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0 & \sum M_{O1} &= 0 \\ \sum F_y &= 0 \text{ ó } \sum M_{O2} = 0 & (1) \\ \sum M_o &= 0 & \sum M_{O3} &= 0\end{aligned}$$

- Resuelto el sistema de ecuaciones, que en general será de 3 ecuaciones con tres incógnitas, quedan definidas las reacciones en los vínculos. Si el signo de alguna de las fuerzas incógnitas resulta negativo, significa que el sentido correcto de la reacción es contrario al supuesto.

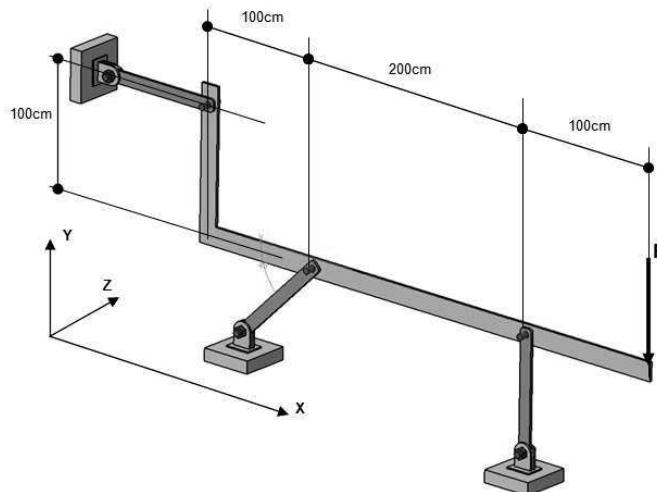
Veamos con algunos ejemplos, el procedimiento indicado.

Ejemplo 2-1:

Calcular las reacciones en el esquema estructural que se muestra en la

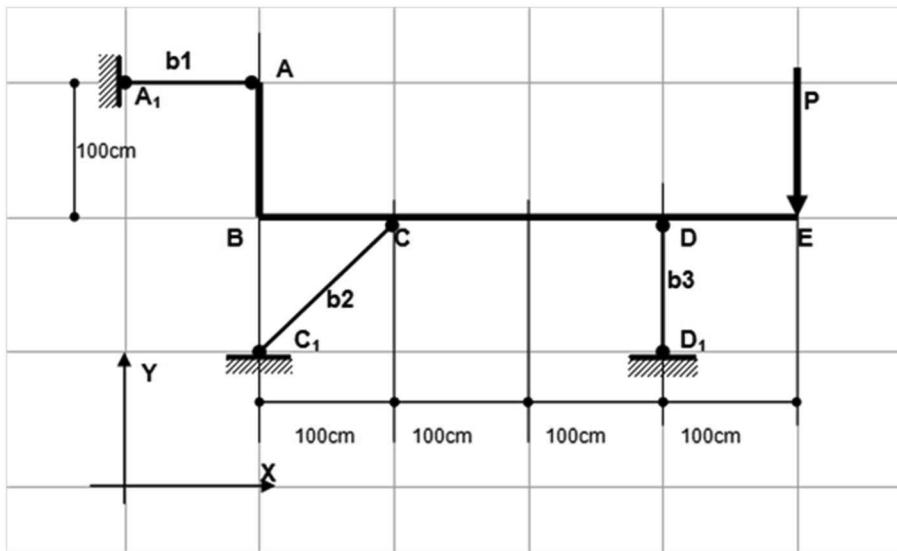
Figura 38

Figura 38 Modelo físico: Estructura a resolver



En primer lugar, debemos modelizar el problema: tenemos una barra sustentada por tres bielas, ya que las barras celestes de la Figura 38 responden a las características de una biela, en un extremo están vinculadas a la estructura mediante una articulación, y en el otro a una chapa fija mediante otra articulación, no teniendo cargas transversales en su tramo. En la Figura 39 vemos el modelo de análisis, con la barra, los nodos, los vínculos, las cargas activas y el sistema de referencia X-Y.

Figura 39 Modelo de análisis



En segundo lugar, debemos analizar el tipo de sustentación haciendo el balance entre vínculos y grados de libertad:

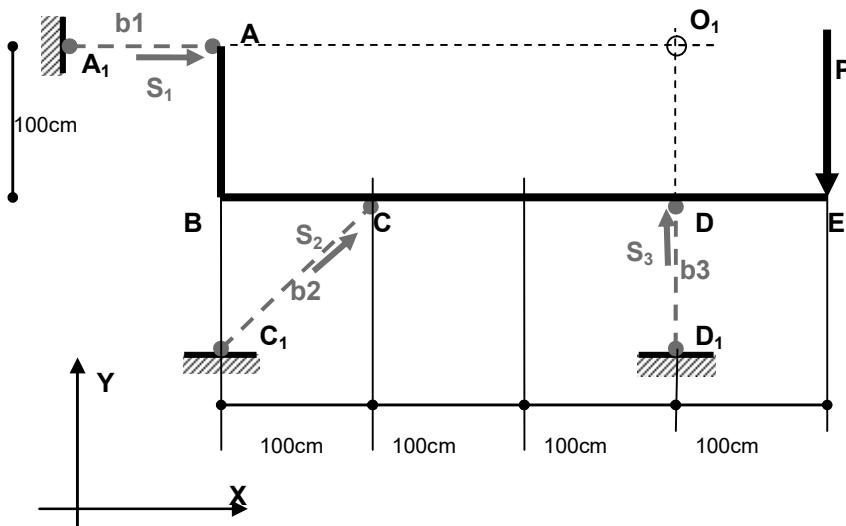
1 chapa	3GL
3 bielas	<u>-3GL</u>
Balance	0GL

Dado que el número de vínculos es el correcto, y están convenientemente ubicados (los tres no concurren a un punto), concluimos que el sistema es isostático.

Para determinar las reacciones se retiran las bielas b_1 , b_2 y b_3 , colocando en su lugar las reacciones de esas bielas sobre la estructura, y dado que aún no conocemos su sentido, adoptamos para las mismas un sentido arbitrario (ver

Figura 40). El sistema recupera sus tres grados de libertad, estando sometido a un sistema de cargas activo (en este caso la fuerza P en E), y un sistema reactivo formado por las reacciones S_1 , S_2 y S_3 de las bielas respectivas. Este conjunto de los dos sistemas debe cumplir la ecuación fundamental, es decir en conjunto debe ser un sistema equilibrado.

Figura 40 Reacciones de vínculo con sentido arbitrario



Aplicamos entonces las expresiones matemáticas vistas en el capítulo 1 que aseguren que el sistema completo no tenga resultante ni copla en el plano X-Y.

$$\sum F_x : S_1 + S_2 \cos(45) = 0$$

$$\sum F_y : S_2 \sin(45) + S_3 - P = 0$$

$$\sum M_{O_1} : S_2 \cos(45).100 + S_2 \sin(45).100 - P.100 = 0$$

Este conjunto de ecuaciones es un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas independientes S_1 , S_2 y S_3 .

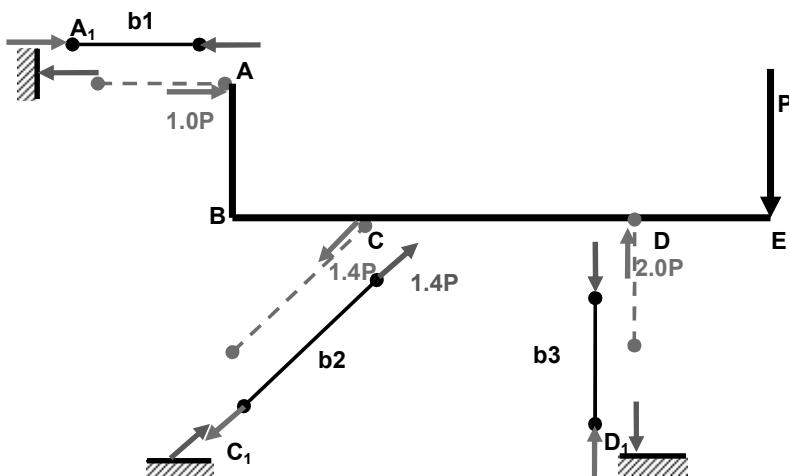
Resuelto el sistema se obtienen los valores de las reacciones buscadas:

$$S_1 = +1.0P \quad S_2 = -1.4P \quad y \quad S_3 = +2.0P$$

El signo menos obtenido en el valor de S_2 , nos indica que el sentido correcto de S_2 es contrario al inicialmente supuesto.

En la Figura 41 se han volteado los sentidos correctos de las reacciones de las bielas sobre la estructura, y adicionalmente, aplicando el principio de acción y reacción, se dibujan las acciones de la estructura sobre las bielas, que son de igual módulo y sentido contrario (indicadas en azul en la figura). Como las bielas forman parte de un sistema que está en equilibrio, éstas deben estar en equilibrio. Por lo tanto en los extremos A_1 , C_1 y D_1 , las chapas fijas le aplican a las bielas fuerzas (dibujadas en rojo en dichos extremos), que equilibraran a las acciones que le pasa la estructura, y las bielas por acción y reacción le aplican a las chapas las fuerzas dibujadas en azul. *Diremos que la biela b_1 y b_2 están traccionadas (las fuerzas que actúan sobre ellas tienden a alargar la biela), y la biela b_3 está comprimida (la fuerza que actúa sobre ella tiende a acortar la biela).*

Figura 41 Fuerzas reactivas resultantes



En general dibujaremos las fuerzas sobre la estructura, y sobre las chapas fijas, omitiendo las fuerzas sobre las bielas, que sabemos tienen sentido contrario.

Este problema se podría haber resuelto mediante consideraciones conceptuales y gráficas, siguiendo los siguientes razonamientos, complementados con la Figura 42:

- En el sistema tenemos cuatro fuerzas interviniéntes: las tres reactivas y la activa P (la que podría ser la resultante de un conjunto de fuerzas)
- De una fuerza conocemos todos sus parámetros (la fuerza P) y del resto sus direcciones.
- Si pudiésemos reducir el sistema a tres fuerzas, sabemos que para que estén en equilibrio deben ser concurrentes y su polígono de fuerzas cerrado.
- Entonces debemos trabajar con la resultante de dos de ellas y las dos restantes.
- Sabemos que la resultante de la biela b_2 y la biela b_3 pasa por el punto $P_{C(2-3)}$ donde dichas direcciones se cortan.
- A su vez la resultante de la fuerza P y la biela b_1 , pasa por el punto P_c .
- Por lo tanto, para que la resultante S_{2-3} de b_2 y b_3 esté en equilibrio con P y S_1 , debe concurrir a P_c .
- Queda así definida, la dirección de la fuerza S_{2-3} , pudiendo construir el polígono cerrado de la Figura 43 con P , S_{2-3} y S_1 .
- Pero S_{2-3} , es la suma (no la equilibrante) de S_2 y S_3 , con lo que nos queda definido el problema.

Figura 42 Solución gráfico-conceptual

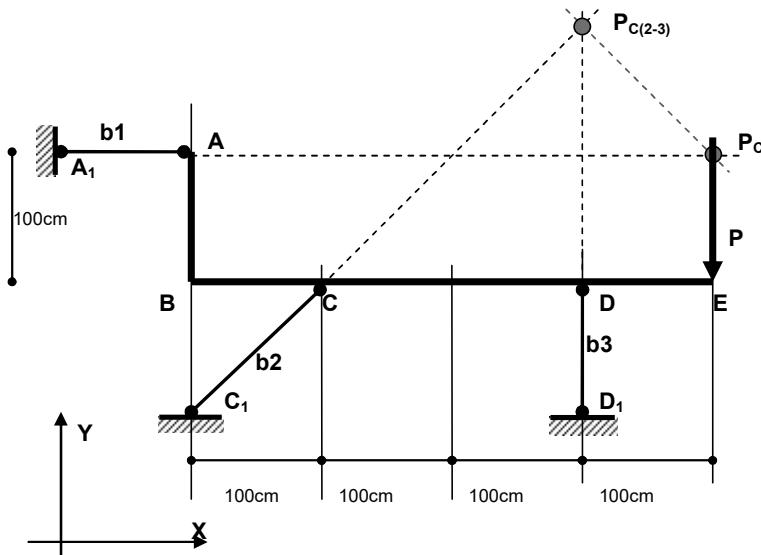
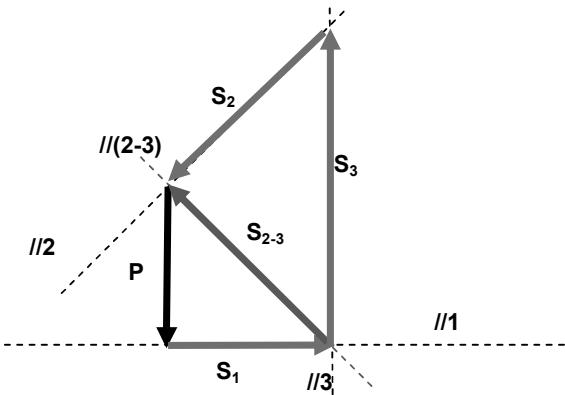


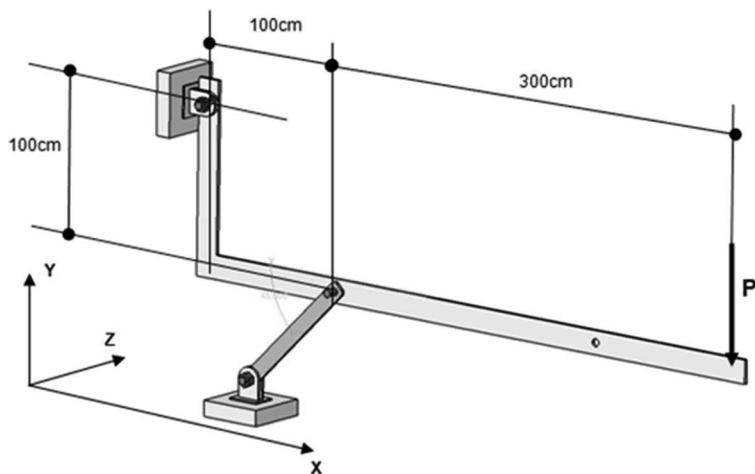
Figura 43 Polígono de fuerzas



Ejemplo 2-2

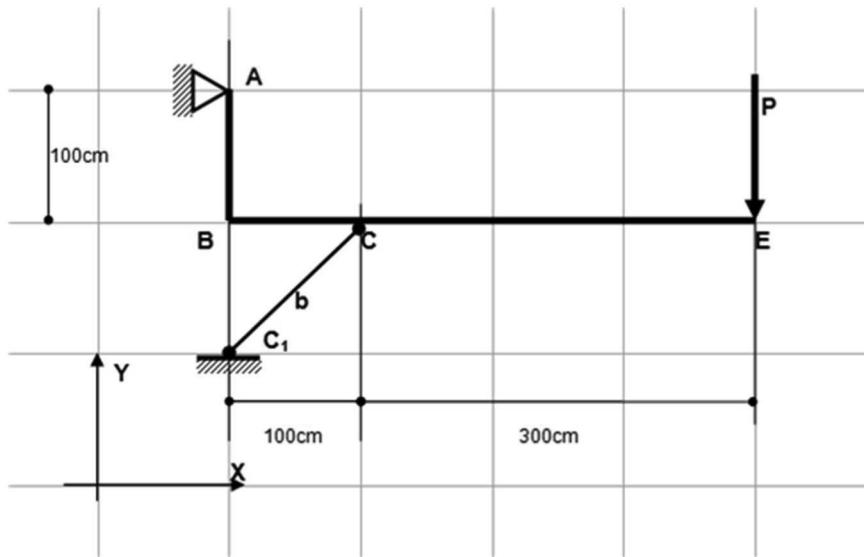
Calcular las reacciones en la estructura de la Figura 44 donde se ha sustituido una biela del ejemplo anterior por un apoyo doble, tipo articulación, y se ha suprimido la biela extrema.

Figura 44 Modelo físico: estructura a resolver



En la Figura 45 mostramos la modelización del problema.

Figura 45 Modelo de análisis



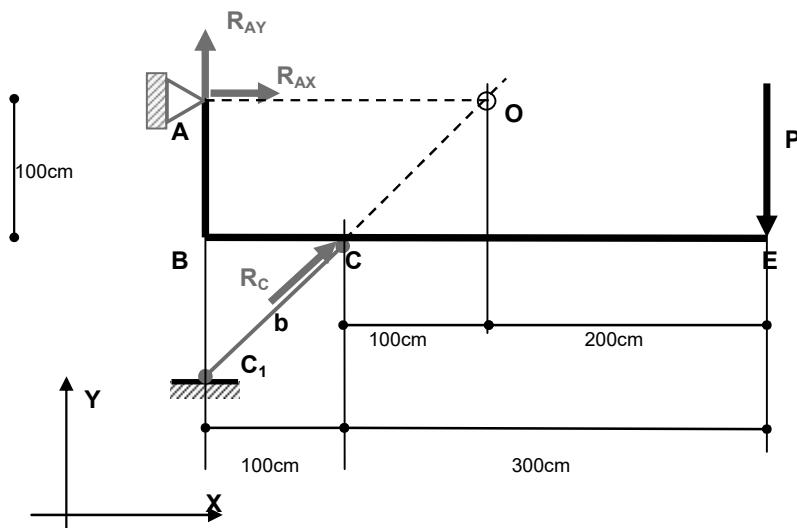
Análisis de sustentación:

1 chapa	3GL
1 V. Doble	-2GL
1 biela	<u>-1GL</u>
Remanente	0GL

Como la dirección de la biela no pasa por la articulación A, la disposición de vínculos es correcta y el sistema está isostáticamente sustentado.

Sustitución de los vínculos por reacciones con sentido arbitrario (Figura 46), recordemos que los que se considera son las reacciones de los vínculos sobre la estructura.:

Figura 46 Eliminación de vínculos y exteriorización de reacciones



Planteo de las ecuaciones de equilibrio del sistema:

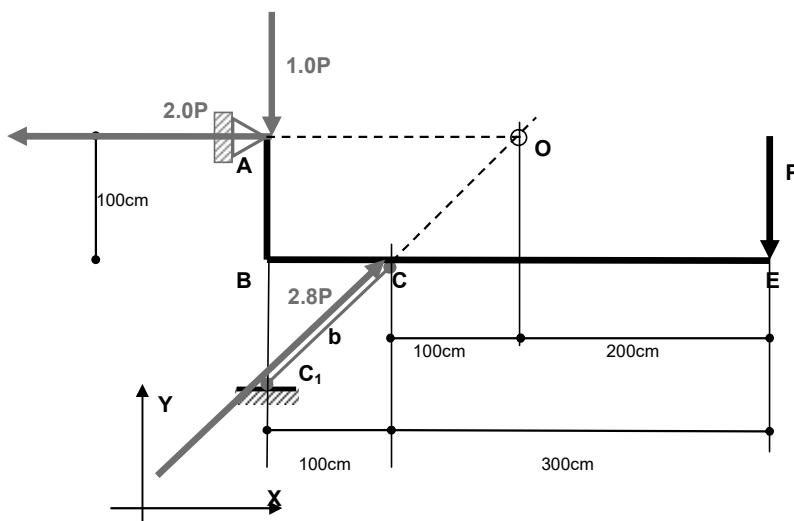
$$\begin{aligned}\sum F_x : R_{AX} + R_C \cos(45) &= 0 \\ \sum F_y : R_{AY} + R_C \sin(45) - P &= 0 \\ \sum M_O : -R_{AY} \cdot 200 - P \cdot 200 &= 0\end{aligned}$$

El sistema resuelto es:

$$R_{AX} = -2.0P \quad R_{AY} = -1.0P \quad R_C = +2.8P$$

El sentido correcto de las reacciones lo vemos en la Figura 47 donde también se han dibujado las reacciones en verdadera magnitud para visualizar el rol que juega cada uno de los vínculos para esta condición de carga.

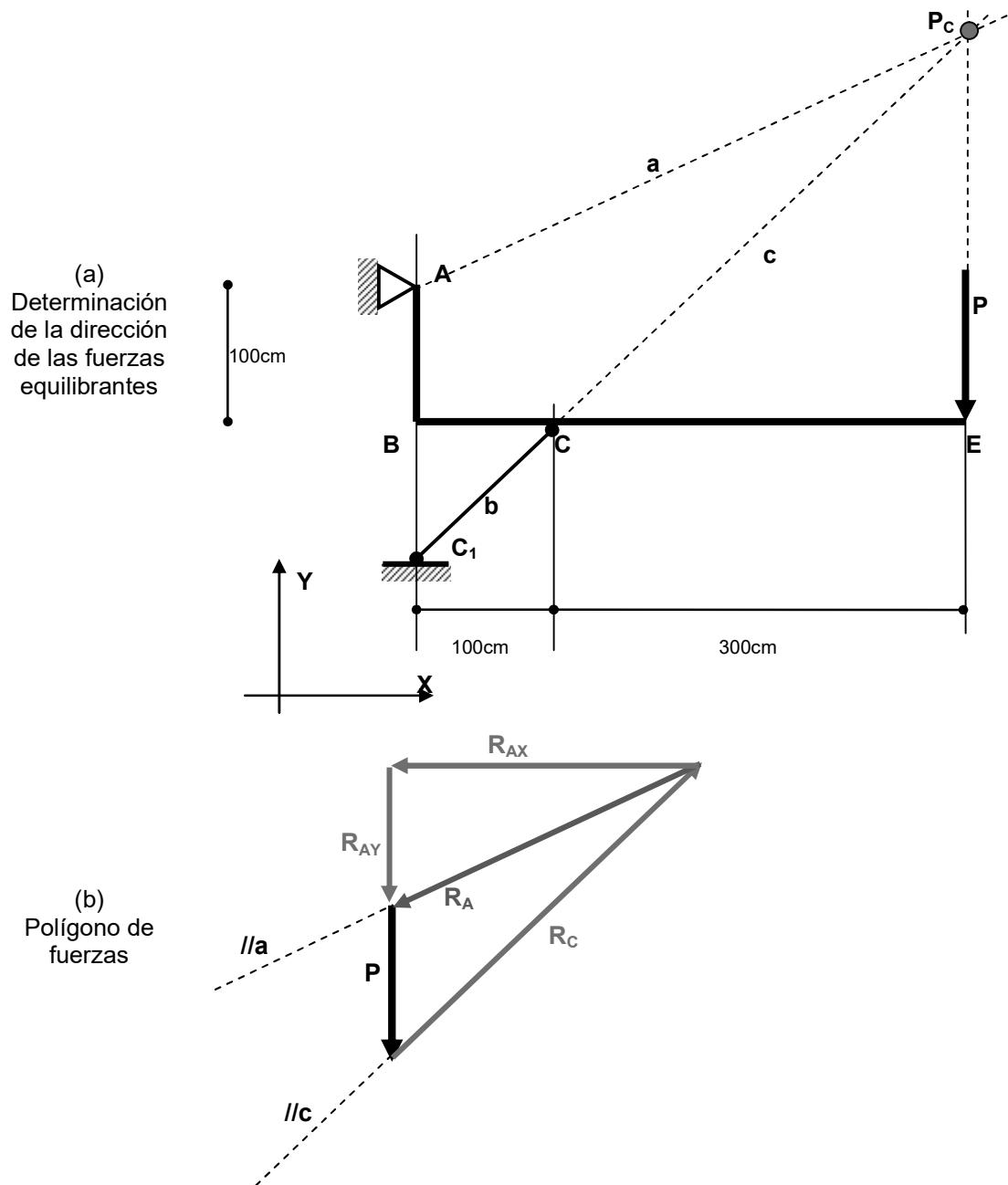
Figura 47 Reacciones correctas



La resolución gráfico-conceptual la podemos obtener siguiendo los siguientes razonamientos observando la Figura 48 a y b:

- En el problema intervienen tres fuerzas: la fuerza activa P (que puede ser la resultante de un conjunto de fuerzas activas), y las dos fuerzas reactivas en A y en C.
- El problema se reduce al equilibrio de tres fuerzas, por lo tanto el polígono debe ser cerrado y las fuerzas concurrentes a un punto.
- La fuerza activa P está definida totalmente. De la fuerza en C, R_C conocemos su dirección c (la dirección de la biela b).
- La fuerza R_C y la fuerza P concurren al punto P_C .
- La fuerza en A puede tener cualquier dirección pasante por A, pero además debe pasar por el punto de concurrencia P_C de las otras dos fuerzas, quedando determinada entonces la dirección a de la fuerza R_A .
- Con las direcciones a y b podemos construir el polígono de fuerzas determinando las fuerzas R_A y R_C que equilibrarán a P. Finalmente R_A es la resultante (no la equilibrante) de las fuerzas R_{AX} y R_{AY} . El polígono R_{AX}, R_{AY}, P y R_C resulta un polígono cerrado.
- Observemos la coincidencia entre estos resultados y los obtenidos mediante el cálculo analítico.
- Este análisis conceptual sirve para validar los resultados obtenidos previamente en el análisis numérico.
-

Figura 48 Resolución gráfico-conceptual

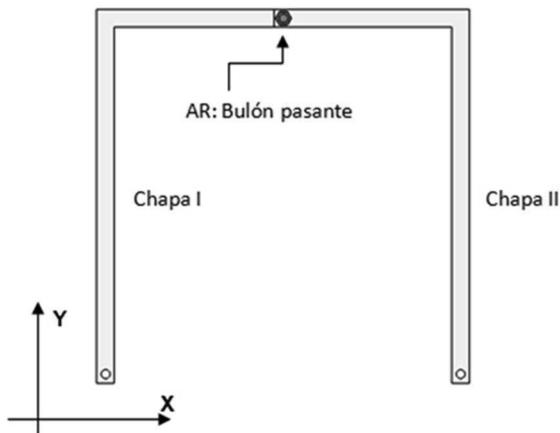


2.5. Vínculos relativos

a) La articulación relativa

Consideraremos dos o más chapas vinculadas entre sí por medio de lo que llamaremos vínculos relativos, estudiando en primer término el caso de dos chapas, I y II vinculadas entre sí por medio de una unión con bulón pasante en AR como vemos en la Figura49.

Figura49 Dos chapas vinculadas por una articulación relativa

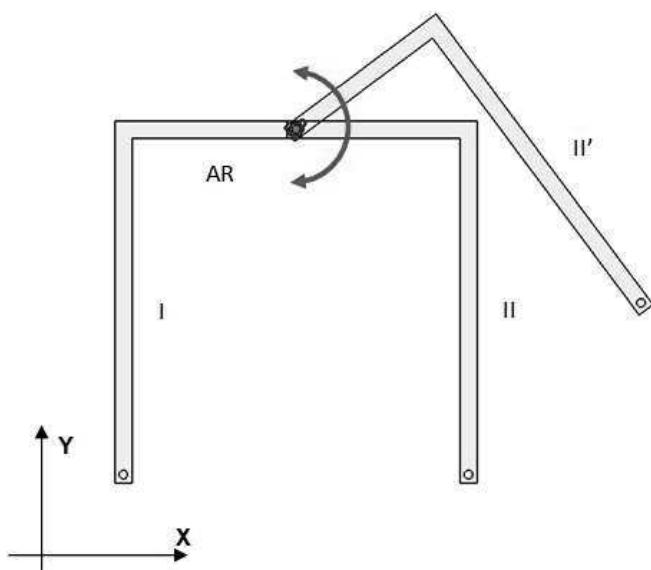


Analizando los grados de libertad del conjunto, vemos en primera instancia que el sistema en el plano XY tiene los tres grados de libertad como si fuera una única chapa rígida, grados de libertad que en adelante llamaremos *grados de libertad de cuerpo rígido (GLCR)*.

Sin embargo, el conjunto de ambas chapas vinculadas por un bulón pasante, no es un conjunto rígido, porque una chapa puede moverse respecto de la otra. Para estudiar este movimiento relativo entre chapas, consideraremos a una de ellas fija, por ejemplo, la chapa I.

Vemos en la Figura 50, que la chapa II puede rotar respecto de la chapa I, alrededor del bulón pasante de vinculación entre ambas, pasando a ocupar la posición II' por ejemplo. *Esta vinculación entre ambas chapas constituidas por un bulón pasante la denominaremos articulación relativa (AR).*

Figura 50 Dos chapas articuladas: grado de libertad relativo



El sistema de ambas chapas vinculadas por medio de una articulación relativa posee entonces cuatro grados de libertad: los tres grados de libertad de cuerpo rígido, y la rotación de una chapa respecto de la otra alrededor de la articulación relativa AR. A este último lo denominaremos grado de libertad relativo (GLR).

Podríamos hacer entonces el siguiente análisis:

- Las dos chapas en el plano XY, si no tuvieran vinculación alguna entre ellas, tendrían seis grados de libertad en total, los tres GLCR de la chapa I y los tres GLCR de la chapa II, los tres primeros independientes de los tres segundos, es decir cada chapa se podría mover independiente una de otra.
- La presencia de la unión entre ambas con un bulón pasante, que llamamos articulación relativa, hace que ambas chapas no se puedan mover independientemente una de otra. El único movimiento posible de una respecto de la otra es la rotación alrededor de AR, impidiendo toda traslación relativa entre ambas.
- Concluimos entonces que la articulación relativa entre dos chapas restringe dos grados de libertad a los seis que tendría el sistema si AR no estuviera.

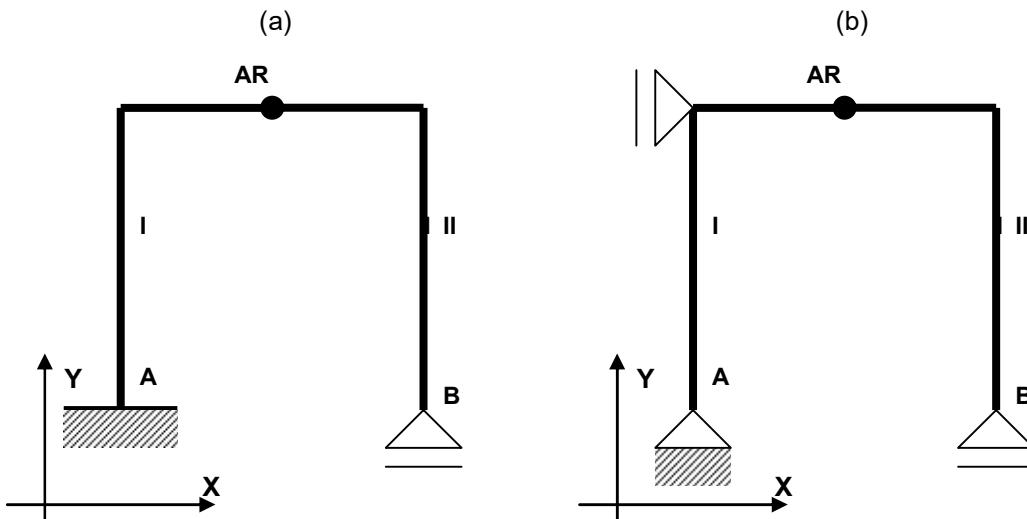
Lo expresado en el párrafo anterior lo podemos resumir en el siguiente balance de grados de libertad del conjunto:

2 chapas.....	6 GL
(AR) ¹	<u>-2 GL</u>
GL remanentes.....	4 GL

Dado que el conjunto tiene cuatro grados de libertad necesita cuatro vínculos para lograr una sustentación isostática.

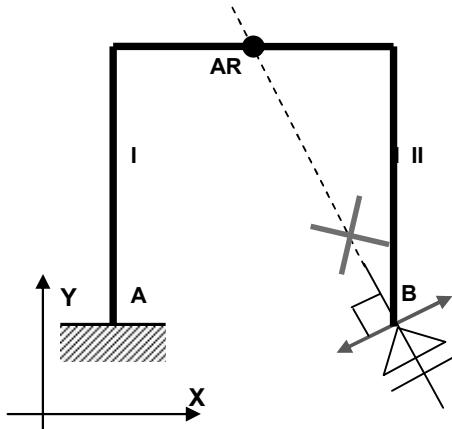
En la Figura 51 vemos dos casos de sustentación isostática en los cuales, la chapa I es isostática tiene tres vínculos (un empotramiento en el caso (a) y una articulación y un vínculo simple en el caso (b)), y la chapa II con la articulación relativa AR le queda el grado de libertad relativo consistente en el giro respecto de I alrededor de AR, el cual está finalmente impedido con el vínculo simple en B. Para que este último vínculo sea realmente efectivo, su dirección de movimiento impedido no debe pasar por la articulación relativa AR como vemos en la Figura 52

Figura 51 Vinculación isostática entre dos chapas articuladas



¹El subíndice 2 indica que la articulación vincula dos chapas

Figura 52 Vinculación aparente



Desde un análisis cinemático, en la Figura 52, vemos que los grados de libertad de cuerpo rígido (GLCR) están impedidos por el empotramiento en A, es decir la chapa I claramente no puede moverse. El grado de libertad relativo (GLR) es el giro de la chapa II respecto de la chapa I alrededor de AR. El punto B entonces se mueve sobre la perpendicular a AR-B², que coincide con el movimiento permitido por el vínculo simple en B.

Para calcular las reacciones en los vínculos, el procedimiento es análogo a lo visto para una sola chapa. Debemos seguir el siguiente procedimiento:

- Se quitan los vínculos externos, y se reemplazan por las reacciones que éstos están aplicando al sistema, para lo cual se les asigna un sentido arbitrario-
- El sistema recupera los cuatro grados de libertad originales
- Se plantean las ecuaciones de equilibrio que aseguren que entre las fuerzas activas y reactivas el sistema esté en equilibrio, es decir no deberá haber resultante correspondiente con los grados de libertad del sistema.
- Obtenemos entonces tres ecuaciones referidas a la totalidad de las fuerzas activas y reactivas actuantes, para asegurar el equilibrio según los grados de libertad de cuerpo rígido, y una cuarta ecuación, en donde intervienen sólo las fuerzas activas y reactivas actuantes sobre una de las chapas, que debe expresar la condición para que no se active el grado de libertad relativo. En este caso, como se trata de una rotación alrededor de AR, el momento de esas fuerzas respecto de ese punto debe ser nulo.
- Para calcular la fuerza que pasa a través del vínculo relativo se separan ambas chapas, se colocan las fuerzas que pasan a través de ese vínculo con sentido arbitrario sobre una de las chapas³ y se plantea el equilibrio de esta parte del sistema, porque si el todo estaba en equilibrio, la parte también debe estarlo. Estas fuerzas que pasan a través del vínculo relativo las denominaremos fuerzas mutuas.

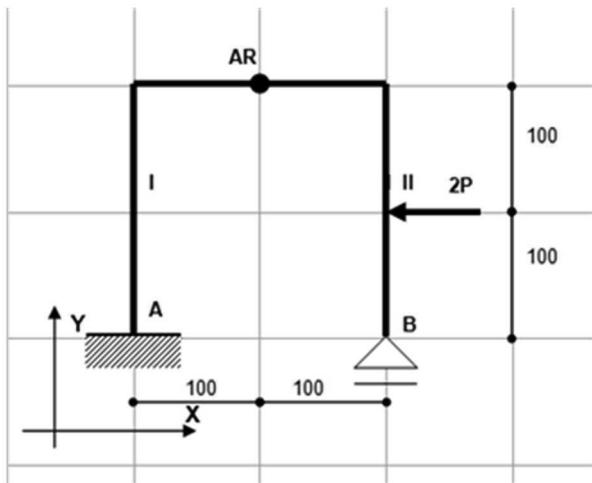
Ejemplo 2-3

Calcular las reacciones de los vínculos externos y la fuerza que se transmite a través de la articulación relativa AR en el esquema estructural de la Figura 53.

²Para pequeños movimientos el arco se confunde con la tangente

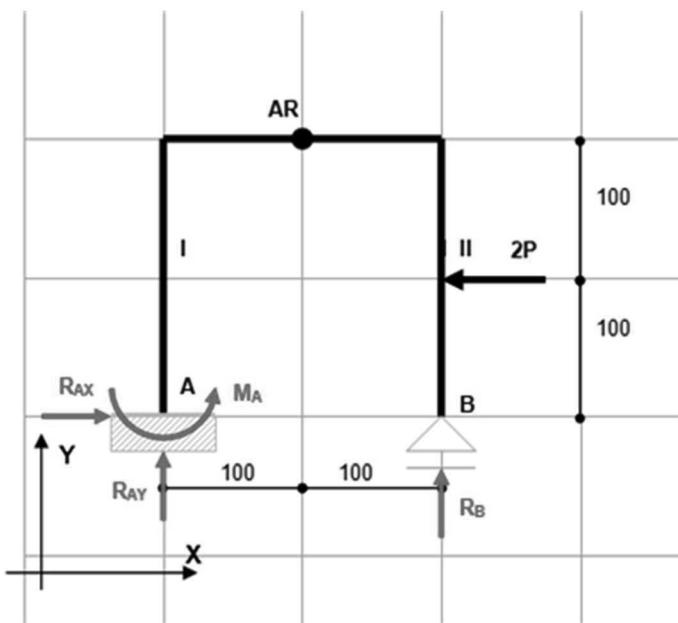
³Sobre la otra actúan con sentido contrario por el principio de acción y reacción

Figura 53 Esquema estructural



En primer lugar, se eliminan los vínculos externos, y se colocan en su lugar las reacciones de los mismos, adoptando un sentido arbitrario para ellas (Figura 54).

Figura 54 Puesta en evidencia de las reacciones con sentido arbitrario



El sistema recupera los cuatro grados de libertad:

3 GLCR: dos traslaciones (según X e Y) y una rotación (s/Z)

1 GLR: giro alrededor de AR de I respecto de II o viceversa

Planteamos el equilibrio según estos cuatro grados de libertad:

$$\sum F_X : R_{AX} - 2P = 0$$

$$\sum F_Y : R_{AY} + R_B = 0$$

$$\sum M_A : M_A + R_B \cdot 200 + 2P \cdot 100 = 0$$

$$\sum M_{AR} : R_B \cdot 100 - 2P \cdot 100 = 0$$

Las primeras tres de las ecuaciones aseguran el equilibrio respecto de los grados de libertad de cuerpo rígido (ausencia de resultante y ausencia de cupla).

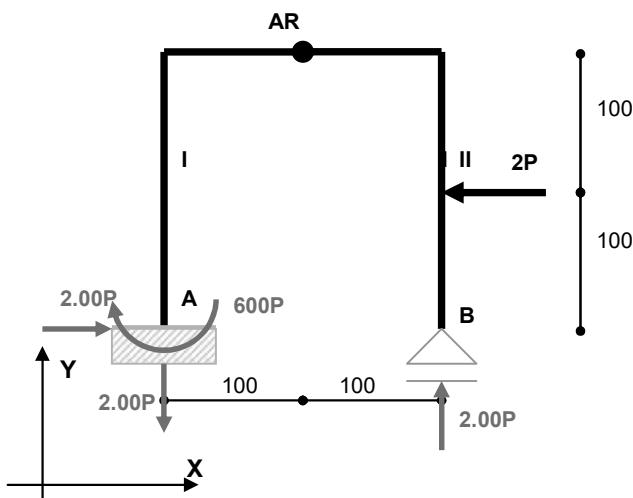
La cuarta ecuación está relacionada con el grado de libertad relativo: como el grado de libertad relativo es una rotación relativa de ambas chapas alrededor de la articulación AR, es necesario asegurar que la resultante de las fuerzas activas y reactivas actuantes sobre una de las chapas no produzca momento respecto de AR para que no se active esta rotación.

Resuelto el sistema de ecuaciones obtenemos:

$$R_{AX}=+2.00P \quad R_{AY}=-2.00P \quad R_B=+2.00P \quad M_A=-600P$$

En la Figura 55 mostramos las fuerzas reactivas con sus sentidos correctos

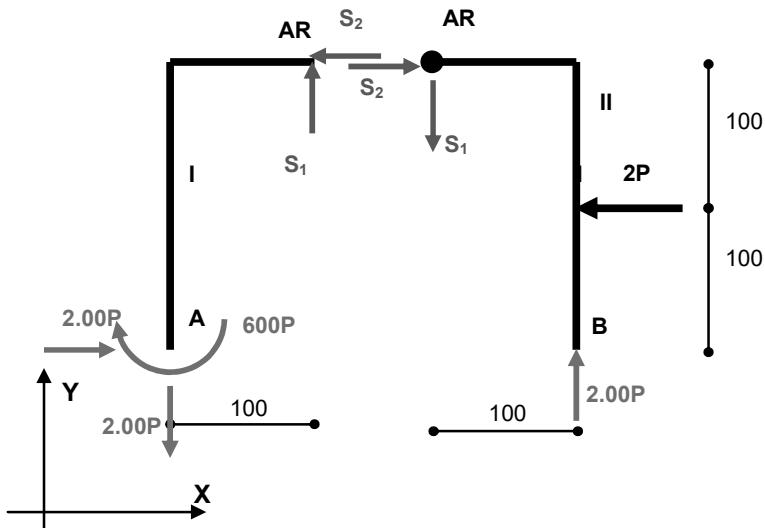
Figura 55 Reacciones con sentido correcto



Si observamos la cuarta ecuación, podemos notar lo que señalamos en el caso de la vinculación aparente: si la dirección de la reacción en B pasase por la articulación AR, esta reacción no sería incapaz de impedir el giro que alrededor de ese punto le imprime la fuerza activa 2P a la chapa II.

Finalmente, para calcular la fuerza que transmite el bulón pasante de una chapa a la otra, que llamamos fuerza mutua, quitamos ese vínculo y colocamos la fuerza que pasa a través del mismo. En este caso por tratarse de una articulación, el bulón pasante es capaz de transmitir una fuerza en cualquier dirección, por lo tanto, en vez de tratar con una incógnita fuerza y una incógnita ángulo, tratamos con dos componentes ortogonales a las que les asignamos en primera instancia un sentido arbitrario. Tengamos en cuenta que, por el principio de acción y reacción, en cada chapa actúan con sentido contrario.

Figura 56 Fuerzas mutuas

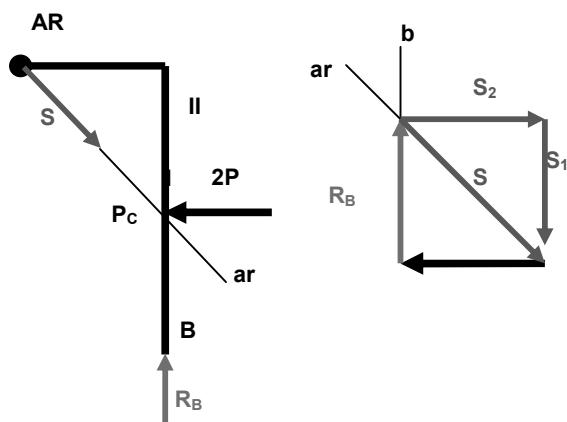


En la Figura 56 vemos que con sendas sumatorias de fuerzas en X e Y en cualquiera de las dos chapas I y II, obtenemos los valores de S_1 y S_2 , en este caso $2.00P$ para ambas con los sentidos indicados.

Análisis de funcionamiento del conjunto:

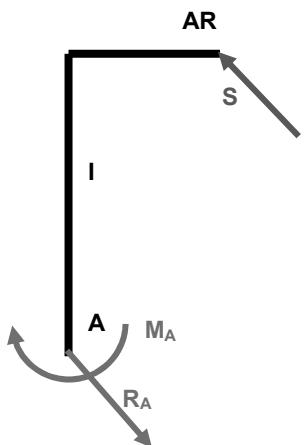
- El sistema está constituido por dos chapas, de las cuales una es isostática por sí misma (la chapa I), y la otra, la chapa II, se apoya en la primera por una articulación y cuenta con un vínculo externo simple bien dispuesto.
- Las fuerzas activas aplicadas sobre la chapa II, se van a descargar en parte a través de la chapa I
- Si uno quisiera desarmar este conjunto, debería primero desmontar la chapa II, y luego la I, y no al revés.
- Comenzando nuestro análisis en la chapa II, según la Figura 57, vemos que sobre la misma actúan tres fuerzas: la fuerza activa $2.00P$, la reacción externa R_B , cuya dirección b conocemos, y la fuerza mutua entre las chapas S , que sabemos que pasa por AR . Estas tres fuerzas deben ser concurrentes al punto P_c donde se corta la dirección b con la recta de acción de la fuerza $2.00P$, y además el polígono de fuerzas cerrado.

Figura 57 Análisis de equilibrio chapa II



- En la chapa I (Figura 58) actúa la fuerza mutua S con sentido contrario al hallado por el principio de acción y reacción. Esta fuerza debe estar equilibrada por la reacción en el empotramiento A que es igual y contraria. La cupla que se forma en sentido antihorario se equilibra con el par con el que es capaz de reaccionar el empotramiento.

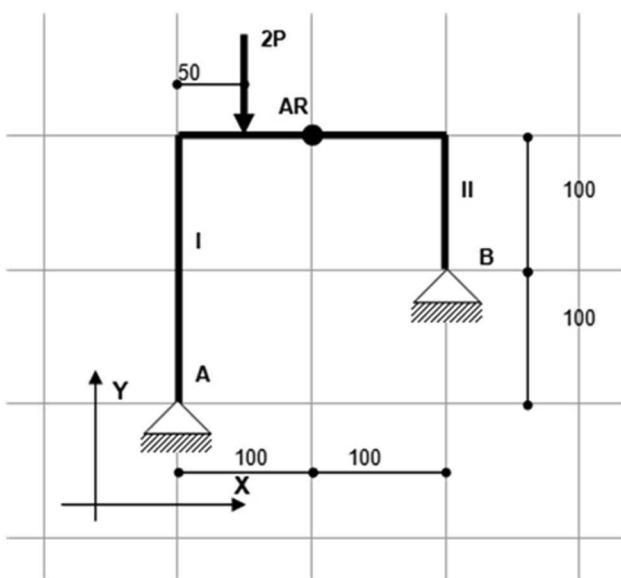
Figura 58 Equilibrio de la chapa I



Ejemplo 2-4

La Figura 59 nos ilustra el caso de dos chapas articuladas entre sí, pero sustentada con dos vínculos dobles (articulaciones) ubicados uno en cada una de las chapas. Tal esquema se denomina triarticulado.

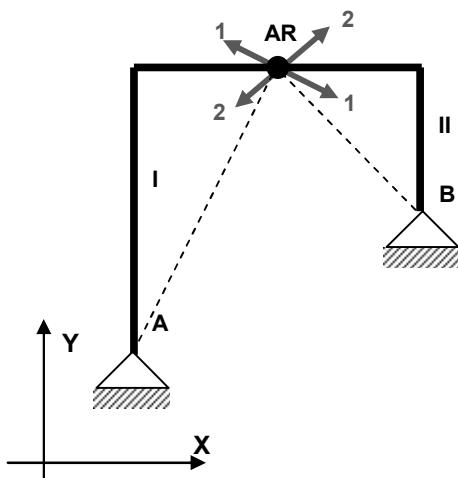
Figura 59 Triarticulado



En ese esquema se ve claramente que ninguna de las dos chapas es isostática por sí misma, pero si hacemos el balance de vínculos obtenemos que el sistema tiene la cantidad de vínculos necesaria para anular los cuatro grados de libertad que ya vimos que el sistema tiene en el plano.

Analicemos si los vínculos están bien dispuestos para asegurar la isostaticidad del conjunto, viendo los movimientos que permiten cada uno de los vínculos externos indicados en la Figura 60.

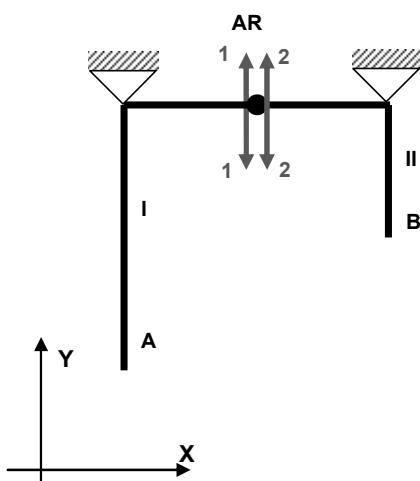
Figura 60 Análisis de isostaticidad



El apoyo articulado en A le permite a la chapa I rotar alrededor de este punto, es decir que el punto AR por pertenecer a la chapa I se puede mover según la dirección 1-1 perpendicular al radio A-AR⁴. La articulación externa en B permite que la chapa II gire alrededor de B, o sea el punto AR se puede mover según la dirección 2-2 normal al radio B-AR. Es evidente que el punto AR entonces no se puede mover porque no puede cumplir ambas condiciones simultáneamente.

Si las dos articulaciones exteriores estuvieran sobre una misma línea con la articulación interna AR, como vemos en la Figura 61, el movimiento de este punto no estaría impedido y el sistema tendría vinculación aparente

Figura 61 Tres articulaciones alineadas: vinculación aparente

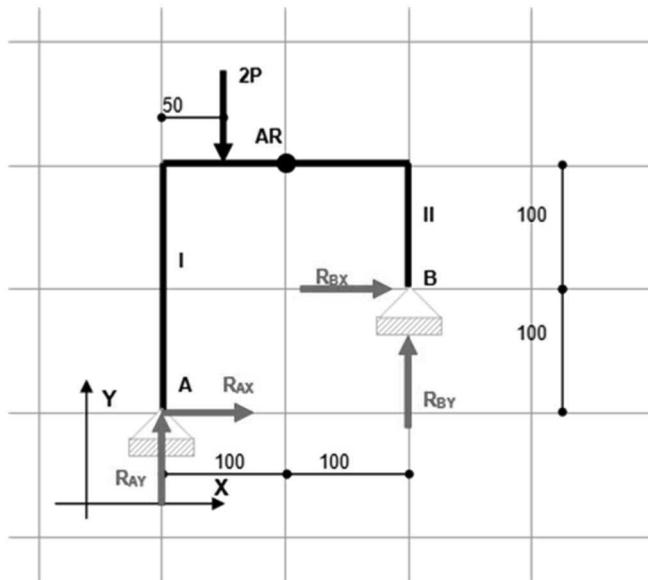


Concluimos que tres articulaciones en línea aplicadas en dos chapas sucesivas constituyen un caso típico de vinculación aparente.

⁴Para pequeños movimientos el arco se confunde con la tangente

Volviendo a la resolución analítica del problema, procedemos como en el ejemplo anterior, a eliminar los vínculos externos haciendo que el sistema recobre los grados de libertad originales y colocando las reacciones desconocidas hasta el momento que esos vínculos aplican sobre el sistema (Figura 62). Luego planteamos las ecuaciones que garantizan el equilibrio según esos grados de libertad.

Figura 62 Sistema sin los vínculos externos



Balance de grados de libertad:

Grados de libertad del sistema sin los vínculos externos:

2 chapas	6 GL
$(AR)_2$	<u>-2 GL</u>
Remanente	4 GL

Identificación de esos GL

3 GLCR: dos traslaciones (según X e Y) y una rotación (s/Z)

1 GLR: giro alrededor de AR de I respecto de II o viceversa.

Ecuaciones de equilibrio:

$$\sum F_x : R_{AX} + R_{BX} = 0$$

$$\sum F_y : R_{AY} + R_{BY} - 2.00P = 0$$

$$\sum M_A : -R_{BX} \cdot 100 + R_{BY} \cdot 200 - 2.00P \cdot 50 = 0$$

$$\sum M_{AR}^{\text{II}} : R_{BX} \cdot 100 + R_{BY} \cdot 100 = 0$$

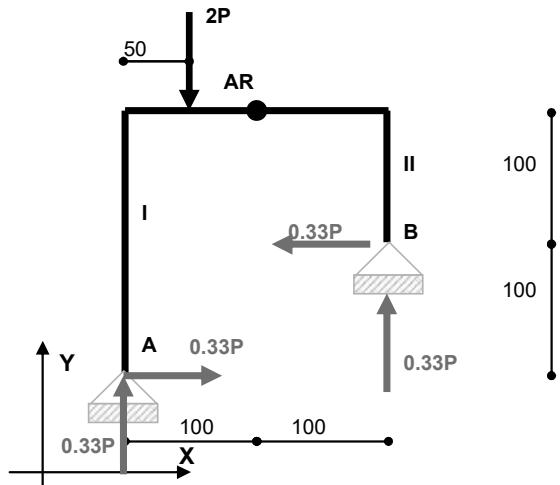
Observemos que al haber tomado momento de todo el sistema respecto de A (tercera ecuación) y simultáneamente momento de las fuerzas de la chapa II respecto de AR (ecuación de equilibrio relativo relacionada con el GLR), del sistema original de 4x4 obtenemos un subsistema de 2x2 muy fácil de resolver manualmente.

El sistema resuelto arroja los siguientes valores (Figura 63):

$$R_{AX}=+0.33P \quad R_{AY}=+1.67P \quad R_{BX}=-0.33P \quad R_{BY}=+0.33P$$

El sentido de la reacción R_{BX} es contrario al supuesto.

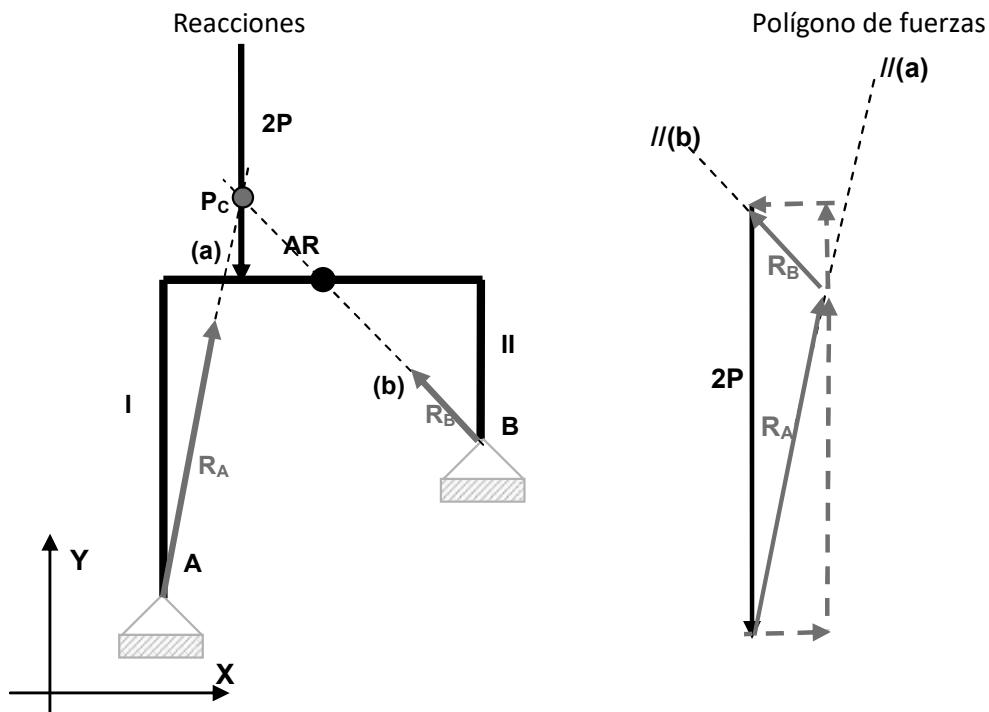
Figura 63 Sentido correcto de las reacciones



Análisis de funcionamiento:

- En el sistema (Figura 64) actúan tres fuerzas: la fuerza activa $2.00P$ y las dos reacciones en A y B, R_A y R_B respectivamente, de las que sólo conocemos que pasan por esos dos puntos, pero no conocemos su dirección.
- La fuerza en B, por ser la única fuerza que actúa en la chapa II, debe pasar además de por A, por la articulación relativa AR para no activar el GLR (giro de la chapa alrededor de AR). Esto nos permite conocer la dirección de la fuerza en B.
- La fuerza en A debe concurrir al punto P_c donde concurre la fuerza en B con la fuerza activa $2P$. Nos quedan determinadas las dos direcciones (a) y (b).
- El polígono de fuerzas debe ser cerrado, lo que nos determina las reacciones R_A y R_B y sus respectivas componentes R_{Ax} , R_{Ay} , R_{Bx} y R_{By} .

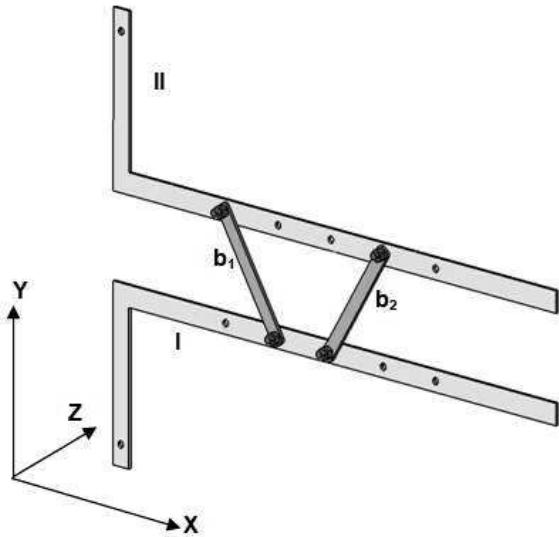
Figura 64 Dos chapas articuladas: Análisis de funcionamiento



b) Vinculación relativa con bielas que se cruzan

Consideremos ahora la Figura 65 que nos muestra dos chapas I y II, contenidas en el plano X-Y, vinculadas entre sí por medio de dos bielas b_1 y b_2

Figura 65 Dos chapas vinculadas por dos bielas

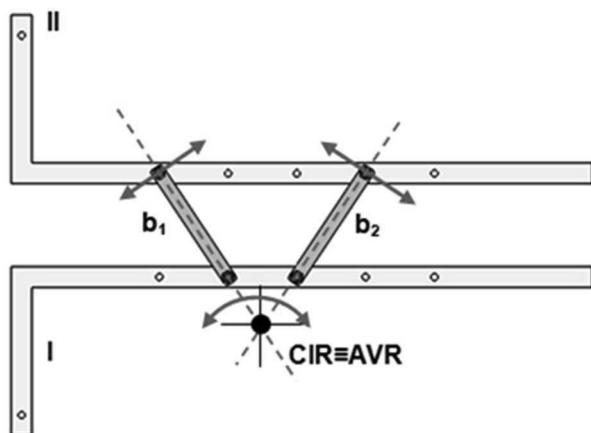


Analicemos los grados de libertad del sistema en el plano X-Y:

Por un lado, tenemos los tres grados de libertad de cuerpo rígido (GLCR) como si no existiera la posibilidad de movimiento relativo entre ambas chapas.

Para individualizar el grado de libertad relativo (GLR), supongamos que la chapa I está fija y analicemos en la Figura 66 el movimiento posible de la chapa II respecto de la I.

Figura 66 Grado de libertad relativo



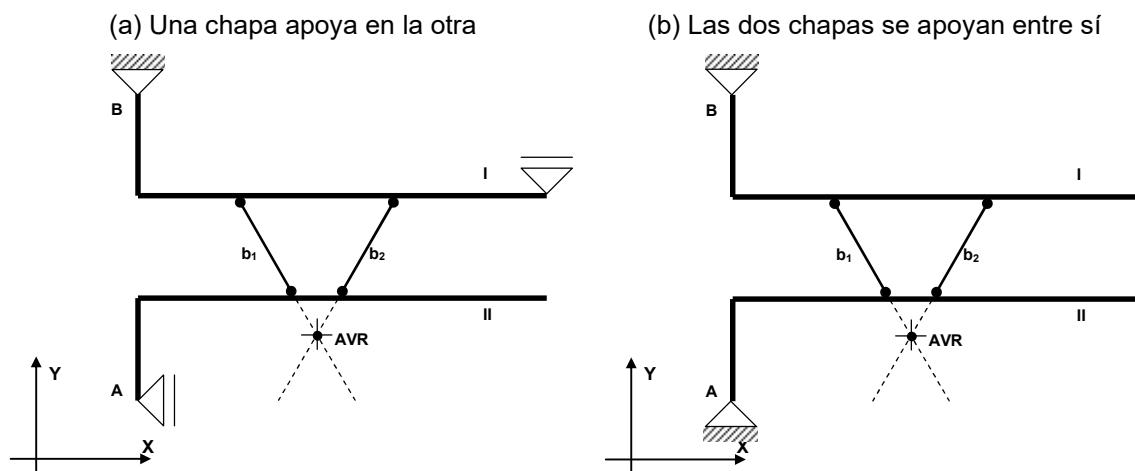
Considerando la chapa I fija, el extremo de la biela b_1 unido a la chapa II puede moverse en la perpendicular a la dirección de la biela, y el extremo de la biela b_2 unido a la chapa II según la perpendicular a ésta última. Para que ambos movimientos puedan producirse

simultáneamente, la chapa II debe girar respecto de la I alrededor del punto donde se cruzan las direcciones de ambas bielas, que será el centro instantáneo de rotación (CIR)⁵. El movimiento relativo entre la chapa I y II es entonces una rotación, o sea las chapas se comportan como si estuvieran vinculadas por una articulación relativa en el CIR, lo denominaremos Articulación Virtual Relativa (AVR).

Resumiendo, el sistema de dos chapas vinculadas con dos bielas que se cortan en un punto tiene los mismos grados de libertad que dos chapas articuladas, con la diferencia que ahora la articulación es virtual y se encuentra donde ambas bielas se cortan.

Nuevamente para vincular el sistema se necesitan cuatro vínculos adecuadamente puestos de manera de evitar una vinculación aparente.

Figura 67 Vinculación isostática



En la Figura 67 vemos dos casos de vinculación isostática, en el caso (a) la chapa I posee tres vínculos externos adecuadamente dispuestos que la convierten en una chapa isostática y a ella se vincula la II con las dos bielas y el vínculo simple, mientras que en el caso (b), ambas chapas se apoyan mutuamente una en la otra, y si bien el conjunto es isostático, cada una por separado no lo es.

En ambos casos el balance de isostaticidad es el siguiente

2 chapas	6 GL
2 bielas	<u>-2 GL</u>
Remanente	4 GL
4 V.externos	<u>-4 GL</u>
Total	0 GL

Para la resolución de este sistema procedemos de la misma manera que en el caso de las chapas articuladas:

- Liberamos los vínculos externos recuperando el sistema sus cuatro GL.
- Asignamos sentido arbitrario a las reacciones de los vínculos externos.
- Planteamos las ecuaciones de equilibrio según los cuatro grados de libertad: los tres GCLR y el GLR (giro de I o II alrededor de AVR).

⁵Analizando la cinemática la posición del CIR cambia con el cambio de inclinación de las bielas.

$$\begin{aligned}
 \sum F_x &= 0 \\
 \sum F_y &= 0 \\
 \sum M_A &= 0 \\
 \sum M_{AVR}^{I\text{ o }II} &= 0
 \end{aligned} \tag{3}$$

Las tres primeras se refieren al equilibrio del sistema como cuerpo rígido, y la cuarta se refiere al grado de libertad relativo, expresando que el momento de las fuerzas exteriores (activas y reactivas) en la chapa I o II respecto a la articulación virtual relativa debe ser igual a cero.

- Finalmente para hallar las fuerzas mutuas que se transmiten por los vínculos internos, separamos ambas chapas y planteamos el equilibrio de cualquiera de ellas encontrando las fuerzas S_1 y S_2 en las bielas b_1 y b_2 respectivamente.

Análisis de funcionamiento:

Si bien en ambos casos (a) y (b) de la Figura 67 podemos proceder de la manera indicada para resolverlos, ambos casos conceptualmente son diferentes uno del otro:

En el caso de la Figura 67 (a) observemos que, si quitamos la chapa II, la chapa I es una chapa isostática por sí misma porque dispone de tres vínculos adecuadamente colocados. Podemos decir que la chapa II se apoya sobre la chapa I.

Podríamos resolver entonces este problema en dos pasos:

- Calculamos primero la chapa II como una chapa con tres vínculos simples, las dos bielas b_1 y b_2 , y el vínculo simple en A para las fuerzas activas que actúen en esa chapa.
- Las reacciones de las bielas las aplicamos sobre la chapa I con signo contrario⁶ junto con las fuerzas activas que actúan sobre la chapa I, y resolvemos las reacciones de los vínculos externos de esta chapa.
- Deducimos así que las fuerzas que actúan en la chapa I no influyen en las reacciones de la II, porque la primera no necesita de la segunda para su sustentación.

En el caso de la Figura 67 (b), si quitamos cualquiera de las dos chapas, la otra restante queda en una situación de sustentación hipostática, por lo tanto, las fuerzas activas que actúen en cualquiera de ellas influyen sobre las reacciones de todo el conjunto, porque sólo en conjunto el sistema alcanza la isostática.

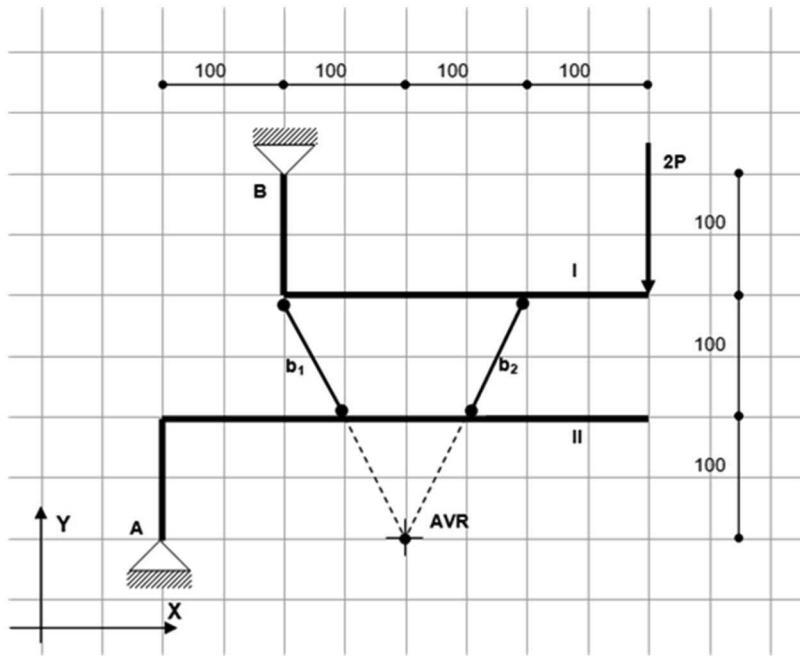
En este caso también debemos tener en cuenta que si las dos articulaciones exteriores (los vínculos dobles en A y B estuvieran sobre la misma línea que la articulación virtual relativa AVR estaríamos en un caso de vinculación aparente por lo ya señalado en el caso de las dos barras articuladas entre sí.

Ejemplo 2-4

Calcular las reacciones en los vínculos externos e internos del sistema estructural de la Figura 68

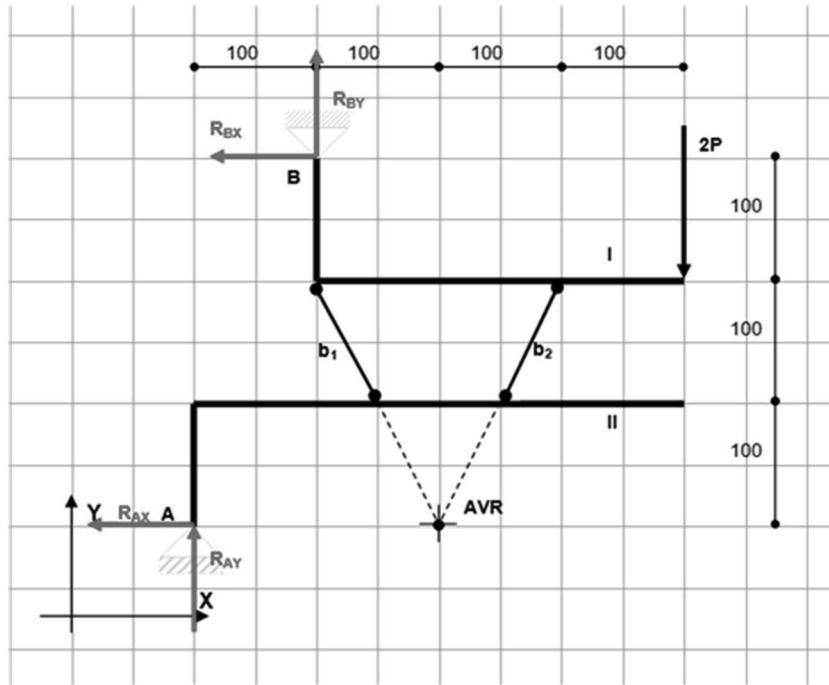
⁶Teniendo en cuenta el principio de acción y reacción

Figura 68 Sistema a resolver



Eliminamos los vínculos externos y los reemplazamos por las reacciones asumiendo sentido arbitrario para las mismas:

Figura 69 Sentido arbitrario de las reacciones



Ecuaciones de equilibrio según los cuatro grados de libertad con las ecuaciones (3):

$$\sum F_x : -R_{AX} - R_{BX} = 0$$

$$\sum F_y : R_{AY} + R_{BY} - 2.00P = 0$$

$$\sum M_A : R_{BX}300 + R_{BY}100 - 2.00P400 = 0$$

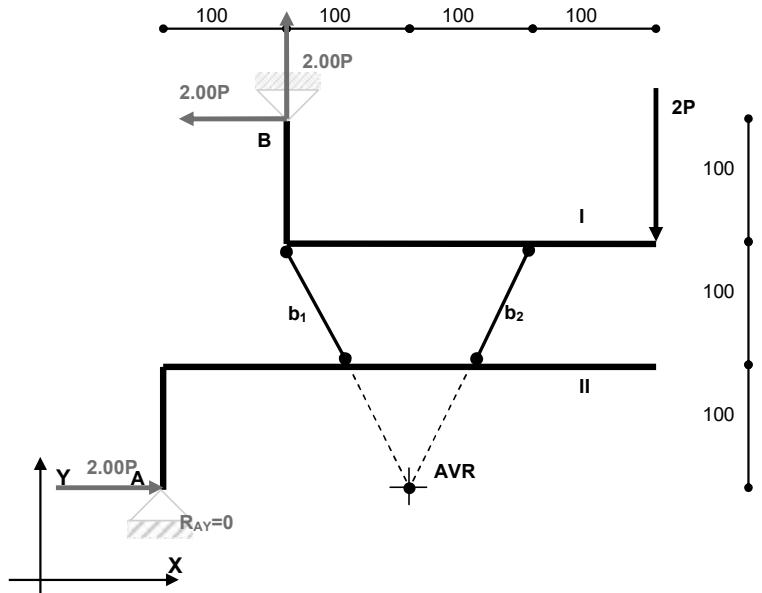
$$\sum M_{AVR}^{\parallel} : R_{BX}300 - R_{BY}100 - 2.00P200 = 0$$

Observemos que las dos últimas, al haber tomado en la tercera el punto A eliminando las reacciones R_{AX} y R_{AY} , y en la cuarta el equilibrio relativo sobre la chapa II (donde no intervienen R_{AX} y R_{AY}) constituyen un sistema de 2x2 fácil de resolver, y luego con las dos primeras calcular R_{AX} y R_{AY} :

$$R_{AX}=-2.00P \quad R_{AY}=0 \quad R_{BX}=2.00P \quad R_{BY}=2.00P$$

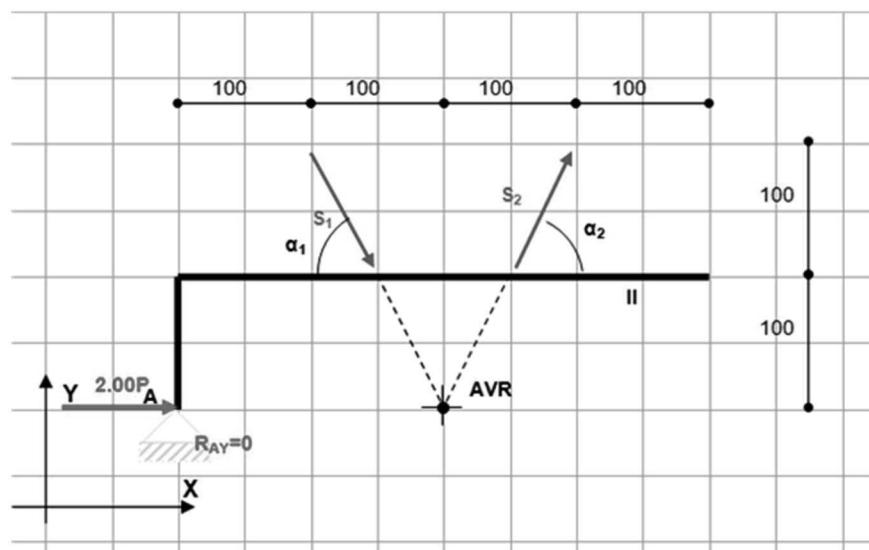
El signo (-) en R_{AX} indica que el valor verdadero es contrario al supuesto (Figura 70).

Figura 70 Reacciones calculadas



Para calcular las fuerzas en los vínculos internos, también denominadas fuerzas mutuas,aislamos por ejemplo la chapa II y planteamos el equilibrio de fuerzas (Figura 71):

Figura 71 Equilibrio Chapa II



$$\sum F_x = S_1 \cos \alpha_1 + S_2 \cos \alpha_2 + 2.00P = 0$$

$$\sum F_y = -S_1 \sin \alpha_1 + S_2 \sin \alpha_2 = 0$$

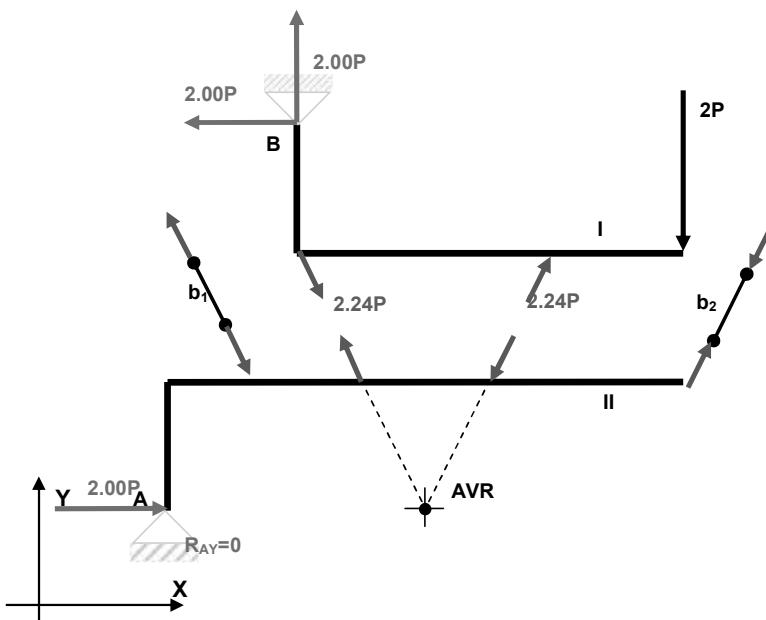
Teniendo en cuenta que $\alpha_1=\alpha_2=\tan(2.00)=63.43^\circ$, obtenemos:

$$S_1 = -2.24P \quad S_2 = -2.24P$$

Nuevamente los signos negativos indican que los sentidos verdaderos son contrarios a los supuestos. El sistema completo resuelto lo vemos en la

Figura 72.

Figura 72 Sistema resuelto



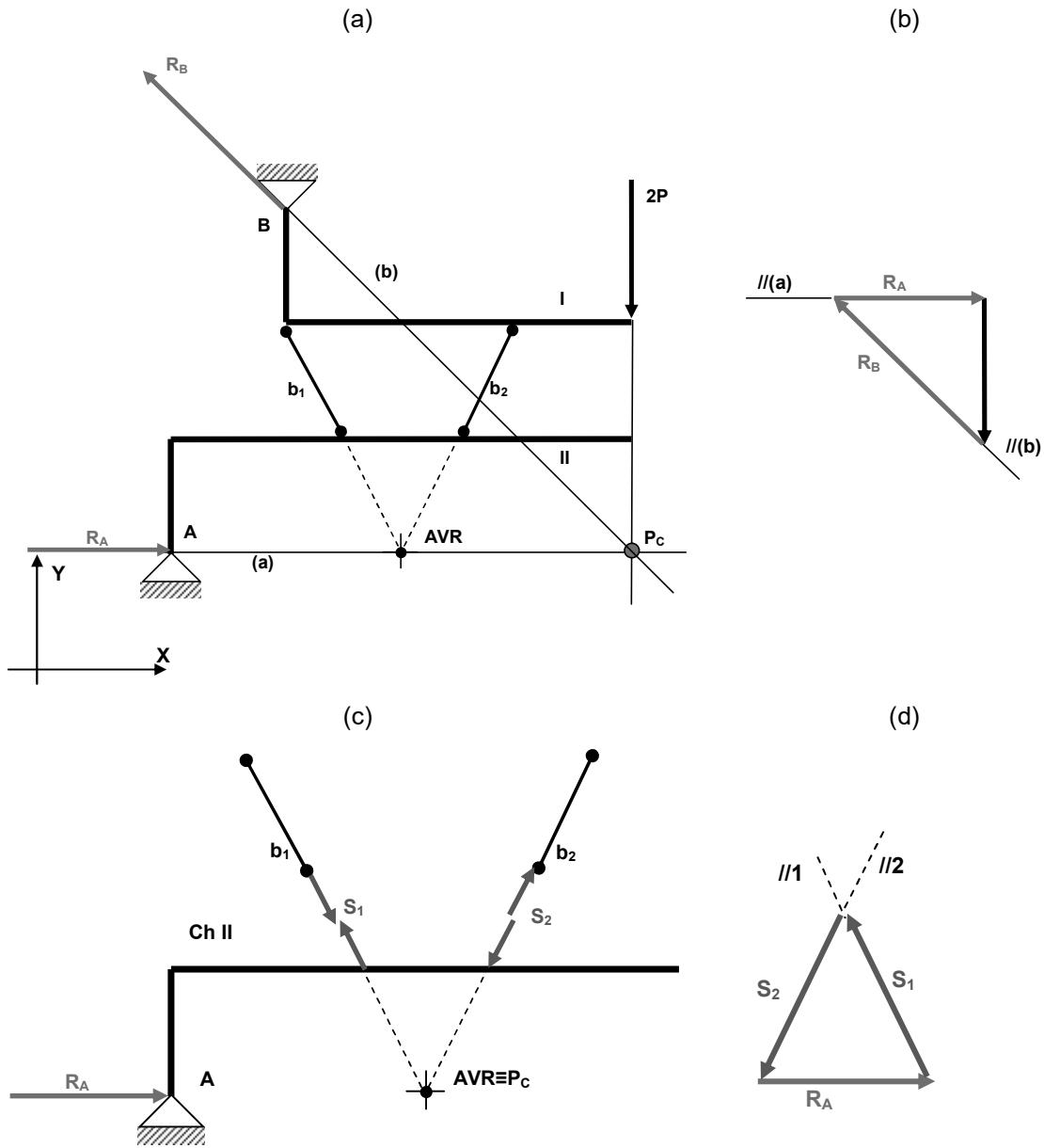
Las fuerzas S_1 y S_2 calculadas son las que las bielas b_1 y b_2 ejercen sobre cada una de las chapas, y por el principio de acción y reacción las fuerzas sobre las bielas son iguales y contrarias a las calculadas. En este caso la fuerza sobre la biela b_1 , tiende a acortar la biela, mientras que la fuerza en la biela b_2 la tiende a alargar. Decimos entonces que la biela b_1 está comprimida y la biela b_2 está traccionada.

Análisis de funcionamiento:

- En la chapa II sólo actúa una fuerza externa: la reacción R_A en A que puede tener cualquier dirección.
- Para no activar el GLR, R_A , debe pasar por la articulación virtual relativa AVR, lo que nos da la dirección (a) de la fuerza en A. La fuerza en A de dirección (a), la fuerza activa 2P y la reacción en B, deben ser concurrentes por lo tanto obtenemos la dirección (b) de la reacción R_B . (Figura73a)
- Dado que el sistema está en equilibrio el polígono RA, RB y 2P debe ser cerrado (Figura73b). Obtenemos R_A y R_B .
- La Chapa II, aislada del resto, debe estar en equilibrio bajo la acción de la fuerza reactiva R_A y las fuerzas que le aplican las dos bielas b_1 y b_2 . El polígono de las fuerzas S_1 y S_2 que las bielas aplican a la chapa y R_A debe ser cerrado. Así, obtenemos dichas

fuerzas observando que la biela b_1 está traccionada y la biela b_2 comprimida (Figura73 c y d)

Figura73 Análisis de funcionamiento



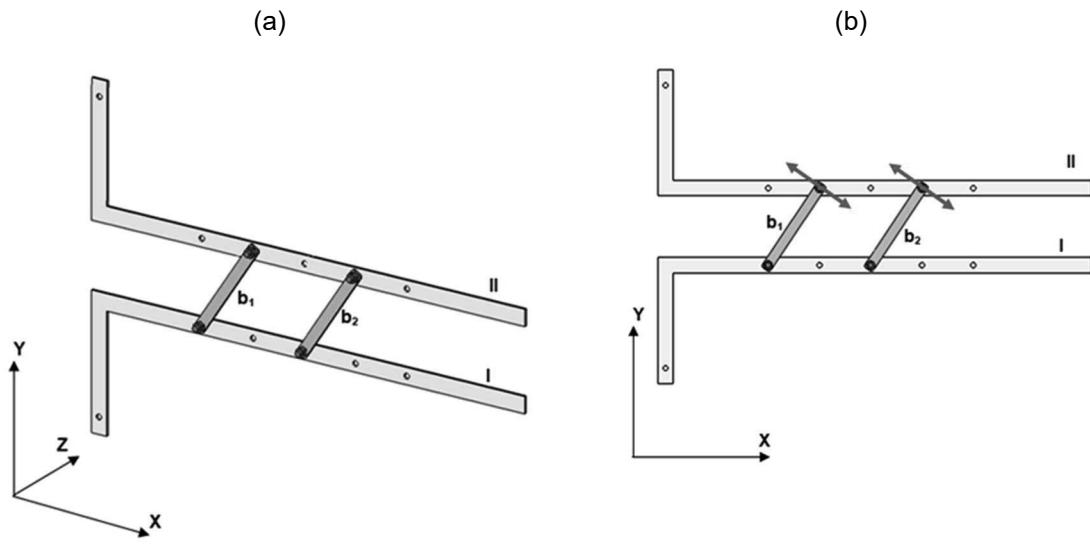
c) Vinculación relativa con dos bielas paralelas:

Analicemos el sistema de dos chapas de la Figura 74a vinculadas entre sí con dos bielas paralelas.

Los grados de libertad que tiene este sistema son cuatro: los tres grados de libertad de cuerpo rígido y el grado de libertad relativo que es el movimiento de una chapa respecto de la otra en la dirección perpendicular a las bielas⁷ como vemos en la Figura 74b.

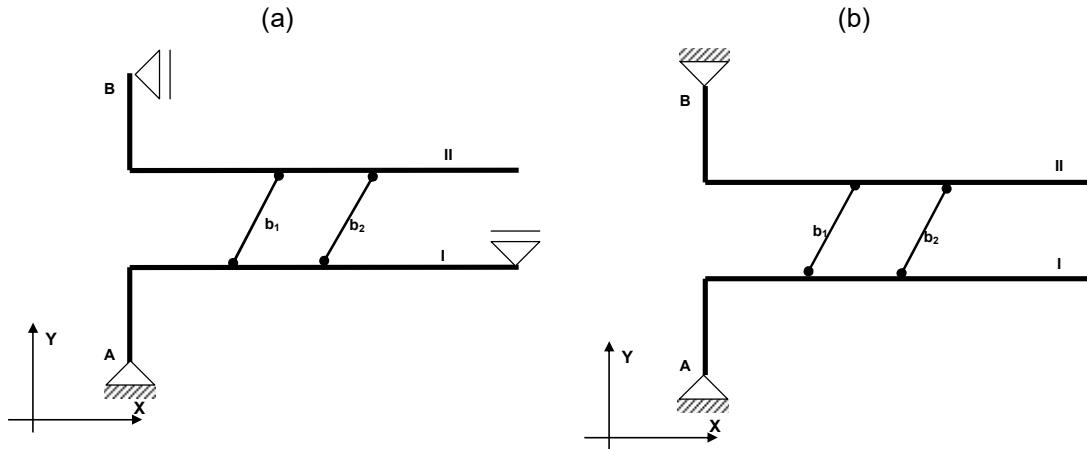
⁷ Para pequeños movimientos

Figura 74 Dos bielas paralelas



Nuevamente para vincular isostáticamente esta chapa necesitamos cuatro vínculos adecuadamente dispuestos.

Figura 75 Sustentación isostática de dedos chapas con bielas paralelas



La Figura 75 nos muestra dos casos de sustentación: en el caso (a) la chapa I es isostática por sí misma y el vínculo en B de la chapa II impide el desplazamiento relativo entre ambas en la dirección perpendicular a las bielas. En el caso (b) ninguna de las dos chapas es isostática por sí misma, pero el conjunto tiene los cuatro movimientos impididos.

Para el cálculo de las reacciones en los vínculos externos, aplicamos el procedimiento usual consistente en reemplazar los vínculos por las reacciones desconocidas, recuperando el sistema los cuatro grados de libertad originales y planteando las ecuaciones que aseguran que el sistema activo más el reactivo constituyen un sistema equilibrado, no dando resultante en los cuatro grados de libertad.

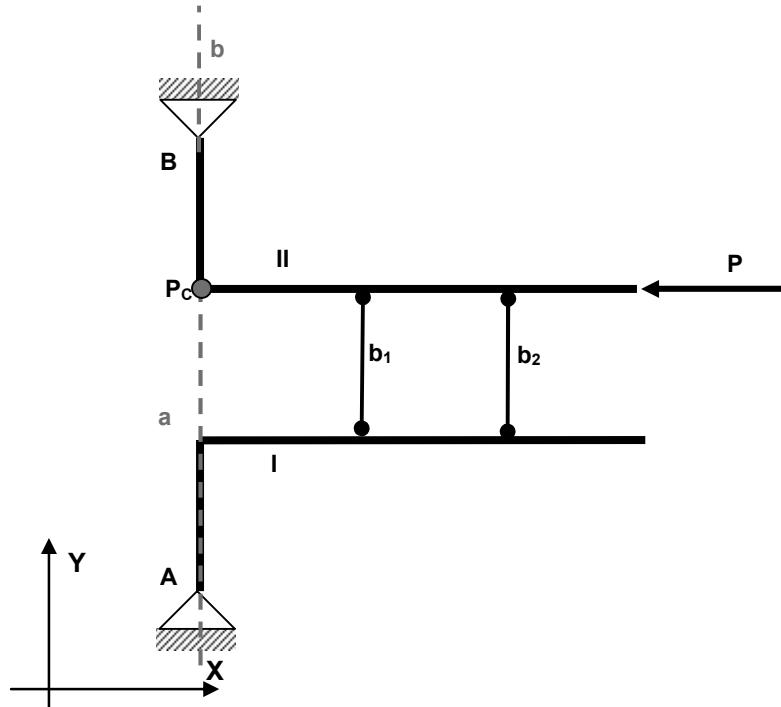
$$\begin{aligned}
 \sum F_x &= 0 \\
 \sum F_y &= 0 \\
 \sum M_A &= 0 \\
 \sum F_{\perp b}^{I/II} &= 0
 \end{aligned} \tag{4}$$

La cuarta de las ecuaciones (4) representa el equilibrio relativo y debe leerse como la sumatoria de las fuerzas actuantes en la chapa I o en la chapa II debe dar igual a 0 en la dirección perpendicular a las bielas.

Una vez calculadas las reacciones en los vínculos externos, podemos calcular las fuerzas mutuas en las bielas considerando sólo una de las chapas y planteando el equilibrio con las incógnitas S_1 y S_2 que las bielas aplican a la chapa.

Analicemos particularmente una condición de vínculo aparente en el caso que los dos vínculos dobles en A y B están sobre una línea paralela a la dirección de las bielas b_1 y b_2 , como mostramos en la Figura 76.

Figura 76 Vinculación aparente en el caso de dos chapas unidas por dos bielas paralelas



Veamos si es posible equilibrar a la fuerza P aplicada en el extremo derecho de la chapa II. En la chapa I la única fuerza externa actuante es la reacción en A, por lo tanto, para no activar el grado de libertad relativo no debe tener componente en la dirección perpendicular a las bielas, siendo su única dirección posible la de la recta (a). Como las tres fuerzas P , R_A y R_B para estar en equilibrio además de tener resultante nula deben ser concurrentes, la reacción R_A debe pasar por A por el punto de concurrencia P_c de P y R_B ; entonces, la reacción R_B debe tener la dirección de la recta (b). Resulta evidente que con las direcciones (a) y (b) es imposible equilibrar a P , y el sistema tiene vinculación aparente.

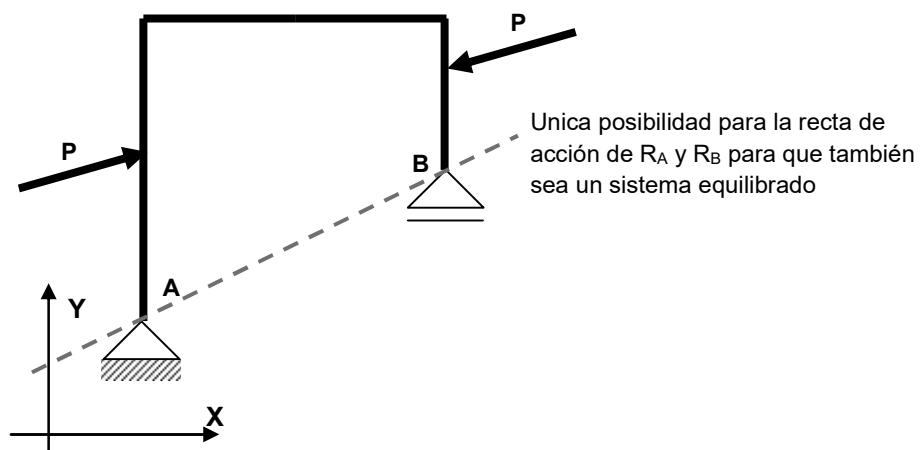
2.6 Algunas particularidades de los sistemas isostáticos

- a) Sistema activo equilibrado en una estructura isostáticamente sustentada

Consideremos la estructura de una única chapa, de la

Figura 77, simplemente apoyada en A y B, sobre la que actúa el sistema equilibrado de fuerzas P y $-P$. La pregunta que cabría hacernos es cuánto valen en este caso las reacciones en los vínculos A y B.

Figura 77 Una única chapa bajo la acción de un sistema equilibrado



Para responder esta pregunta recordemos la ecuación fundamental del cálculo de reacciones:

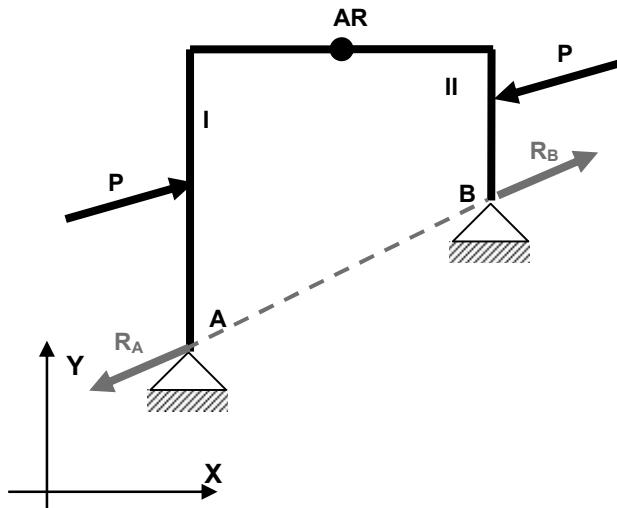
$$\text{SISTEMA ACTIVO} + \text{SISTEMA REACTIVO} = \text{SISTEMA EQUILIBRADO}$$

En este caso particular, si el sistema activo, ya es de por sí un sistema equilibrado, el sistema reactivo también lo debe ser para que la ecuación se siga cumpliendo. Por lo tanto las reacciones en A y B deberían ser dos fuerzas iguales y opuestas, o sea que R_A y R_B deberían compartir la misma recta de acción, el mismo módulo y sentido contrario. Sin embargo la reacción en B en este caso tiene la dirección del eje Y por tratarse de un vínculo simple con esa dirección impuesta, con lo que se ve que es imposible generar un sistema equilibrado reactivo porque la fuerza R_B no está sobre la recta que une A con B. Si R_A tuviera la dirección Y y fuera igual a $-R_B$, habría una copla resultante no equilibrada. Esta circunstancia que hemos probado para un caso particular de sustentación isostática se puede extender a otros tipos, baste como ejemplo pensar que sólo hay en A un empotramiento: ¿cómo podría generar ese empotramiento que reacciona con una fuerza en cualquier dirección y un par, un sistema equilibrado?

Concluimos que una estructura de una única chapa isostáticamente sustentada sometida a la acción de un sistema equilibrado no genera reacciones en los vínculos.

Consideremos ahora el sistema isostático de la Figura 78, compuesto por dos chapas I y II, vinculadas por una articulación relativa AR, y apoyada en A y B mediante dos apoyos dobles (articulaciones fijas), y que tiene como sistema activo el sistema equilibrado P y $-P$ que actúa cada una de ellas en las chapas I y II respectivamente.

Figura 78 Dos chapas isostáticamente sustentadas con un sistema activo equilibrado



En este caso, en los vínculos A y B, las reacciones pueden tener cualquier dirección del plano por tratarse de vínculos dobles, es decir que es posible un sistema reactivo equilibrado, en este caso en la recta que pasa por A y B.

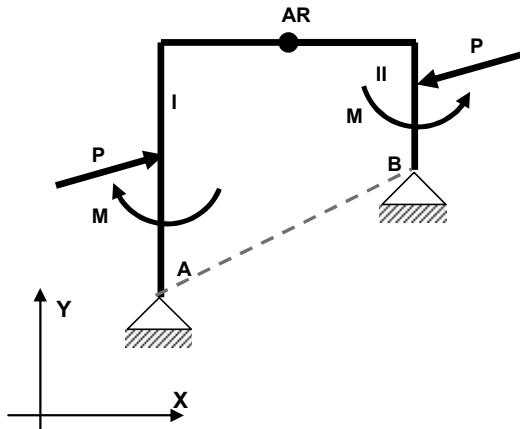
Además, recordemos que al eliminar los vínculos externos el sistema recupera sus grados de libertad originales, los tres de cuerpo rígido y el relativo, que en este caso es el giro de una respecto de la otra alrededor de AR. El sistema activo no provoca aceleraciones en ninguno de los tres grados de libertad de cuerpo rígido, pero sí activa el giro relativo haciendo en este caso que la "tijera" I-II se abra. Para que esto no suceda la fuerza R_A y la fuerza R_B deben tener los sentidos indicados para asegurar que se cumpla que la sumatoria de momentos de las fuerzas actuantes en la chapa I o en la chapa II respecto de la AR sea nula.

Al igual que en el caso anterior, lo visto para esta situación particular se puede generalizar, resultando que:

En un sistema isostático de más de una chapa vinculadas entre sí, sometidas a la acción de un sistema de fuerzas equilibrado, donde las fuerzas activas individuales actúen en chapas diferentes, el sistema reactivo deberá ser también equilibrado y puede ser no nulo.

Decimos que puede ser no nulo, y no que debe ser no nulo porque puede haber un caso particular en el cual haya más de un sistema equilibrado activo, y estos equilibren el grado de libertad relativo.

Figura 79 Sistema de dos chapas con más de un sistema activo equilibrado



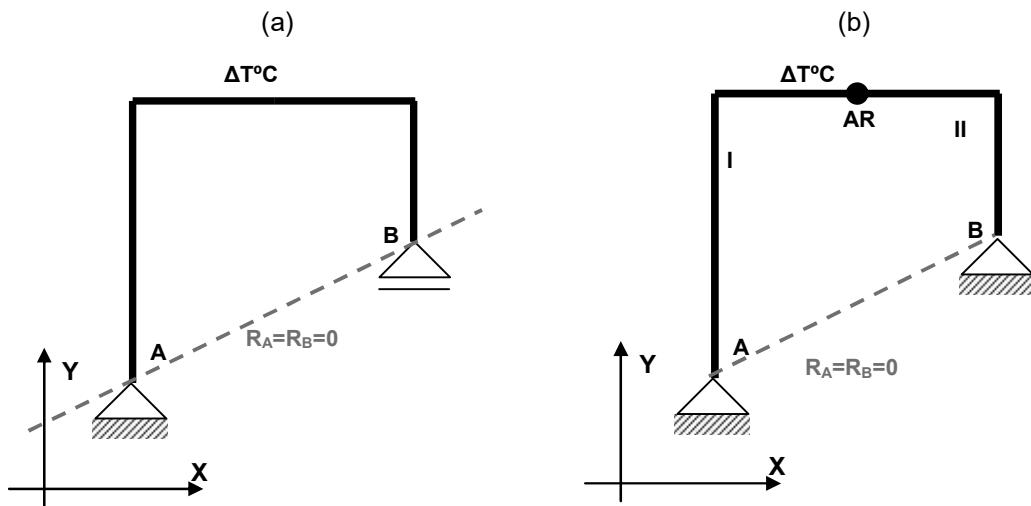
En el caso de la Figura 79, vemos dos sistemas activos equilibrados: P y $-P$, y M y $-M$. Si el módulo de cada M es tal que anula el momento relativo de cada P respecto de AR, entonces el sistema reactivo es nulo.

b) Estructura isostática sometida a un incremento de temperatura

Es fácil ver que cuando alguna de las partes de una estructura isostáticamente sustentada, o en su totalidad, se la somete a un incremento de temperatura, el sistema reactivo resulta nulo se trate de una única chapa, o un sistema de chapas.

Volviendo al ejemplo analizado en la parte (a), podemos ver que las reacciones en los vínculos A y B deben ser necesariamente nulas pues de lo contrario no habría sistema equilibrado posible.

Figura 80 Sistema Isostático con variación de temperatura



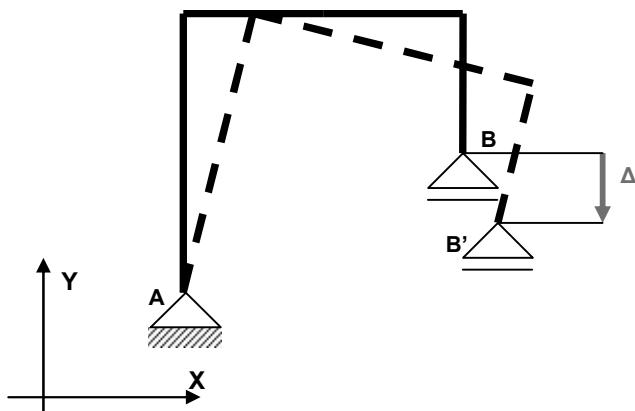
Si observamos la Figura 80 (a) y (b), vemos que en ambos casos es imposible encontrar un sistema equilibrado no nulo que no active algunos de los grados de libertad del sistema. En el caso (a) ya vimos que directamente no puede haber sistema equilibrado no nulo porque es imposible que las reacciones sean colineales. En el caso (b) si hubiera dos fuerzas iguales y contrarias en A y B inmediatamente se activaría el grado de libertad relativo del sistema.

c) Estructura isostática sometida a un cedimento de apoyo

De la misma manera podemos observar que si en la estructura isostáticamente sustentada se produce un cedimento de apoyo, es decir el movimiento de un vínculo, tampoco se generan reacciones en los mismos.

Observemos la estructura de la isostáticamente sustentada en A y B, y supongamos que el vínculo simple en B desciende una cantidad Δ . El apoyo a su vez que desciende se desplaza horizontalmente, pues ese desplazamiento no está impedido por el vínculo, pasando a ocupar la posición B'. La barra vertical en A gira, pues la articulación en A no impide ese giro

Figura 81 Cedimento de apoyo



Nuevamente vemos que es imposible generar un sistema reactivo nulo con las dos fuerzas en A y B.

Igualmente, si se tratara de un conjunto de barras vinculadas entre sí e isostáticamente sustentado, ante un cedimento de apoyo, no se generaría reacciones en los vínculos porque nuevamente sería imposible encontrar un sistema reactivo equilibrado no nulo que no active alguno de los grados de libertad que tiene todo el conjunto.

2.7. Estructuras isostáticas de más de dos chapas

El procedimiento para analizar sistemas estructurales de más de dos chapas vinculadas entre sí y con apoyos absolutos conformando sustentación isostática, sigue el mismo razonamiento que el que describimos para dos chapas, y que resumimos en los pasos siguientes:

Paso 1: Reemplazamos los vínculos externos por sus correspondientes reacciones con sentido arbitrario

Paso 2: Analizamos los grados de libertad del sistema sin los vínculos externos

Paso 3: Planteamos las ecuaciones de equilibrio según cada uno de los grados de libertad del sistema, tanto los tres de cuerpo rígido, como los relativos, respetando para armar estas ecuaciones los sentidos arbitrarios adoptados. Obtenemos un sistema de n ecuaciones con n incógnitas.

Paso 4: resolvemos el sistema de ecuaciones obteniendo así las reacciones buscadas. Si la incógnita determinada tiene signo positivo, significa que el sentido arbitrario adoptado para la misma es el correcto, en cambio si el signo de la incógnita es negativo el sentido correcto es contrario al supuesto.

Paso 5: Las reacciones mutuas las calculamos separando la estructura en los vínculos relativos y planteando el equilibrio de cada una de las partes.

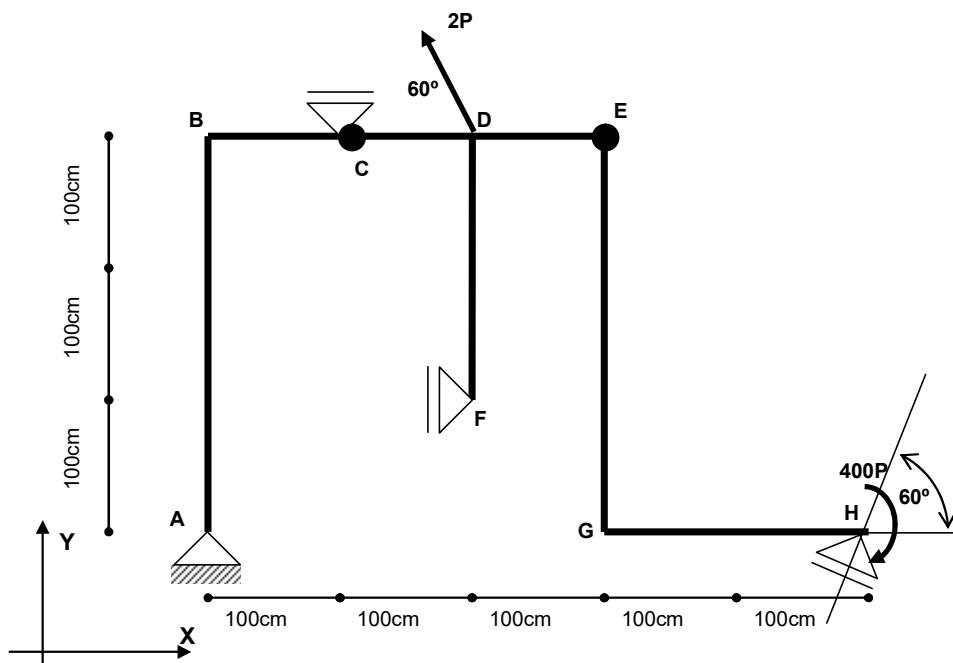
No obstante, el procedimiento descripto, y teniendo en cuenta que uno de los objetivos de este texto es ayudar al lector a comprender el funcionamiento de los sistemas estructurales, entendiendo a éstos como los elementos que se disponen para llevar las cargas desde sus puntos de aplicación a los apoyos, vamos a ver en los párrafos siguientes otra manera de analizar los sistemas estructurales de varias chapas con sustentación isostática haciendo particular hincapié en su funcionamiento.

Con este fin vamos a analizar un caso concreto a través del siguiente ejemplo

Ejemplo 2-5

En el sistema estructural de la Figura 82 calculemos las reacciones en los vínculos externos y las fuerzas mutuas pasantes por los vínculos internos.

Figura 82 Sistema estructural de tres chapas



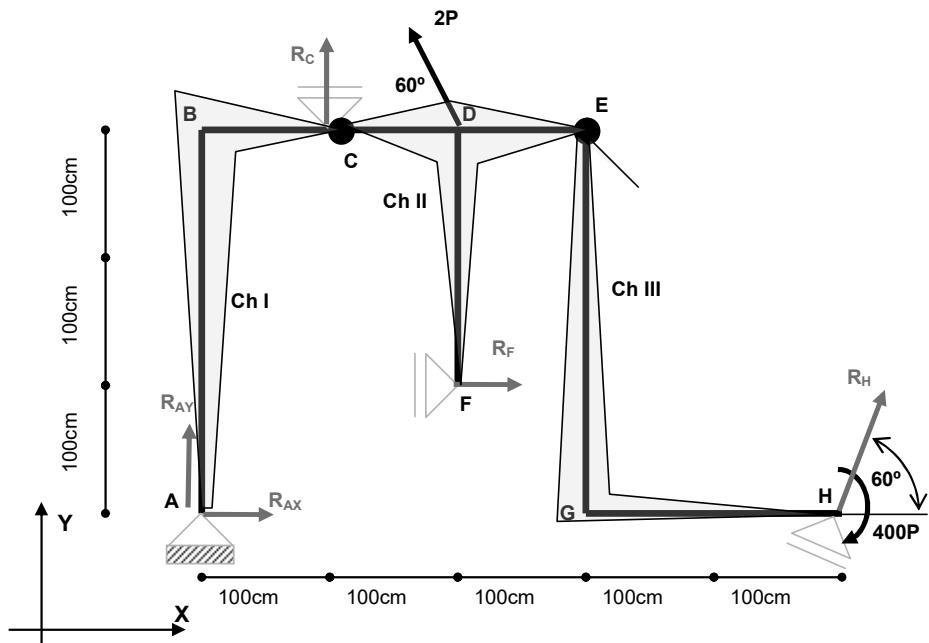
Análisis de sustentación:

Cantidad de chapas 3	9 GL
2 (AR) ₂	<u>-4 GL</u>
Remanente:	5 GL
Vínculos externos: 5	<u>-5 GL</u>
GL sistema vinculado	0 GL

No se observan situaciones de vinculación aparente

Según el procedimiento enunciado, debemos quitar los vínculos y colocar las reacciones correspondientes con sentido arbitrario:

Figura 83 Reacciones con sentido arbitrario



Para plantear las ecuaciones de equilibrio debemos identificar antes los grados de libertad del sistema:

- 3 GLCR Los tres grados de libertad de cuerpo rígido
- 1 GLR El giro relativo de la chapa I respecto al conjunto II-III alrededor de AR en C
- 1 GLR El giro relativo del conjunto I-II respecto de III alrededor de AR en E

Identificados los GL se pueden plantear las cinco ecuaciones que resuelven el problema

$$\sum F_x : R_{AX} + R_F + R_H \cos 60 - 2P \cos 60 = 0$$

$$\sum F_y : R_{AY} + R_C + R_H \sin 60 + 2P \sin 60 = 0$$

$$\sum M_A : 100R_C - 100R_F + (R_H \sin 60)500 + (2P \cos 60)300 + (2P \sin 60)200 - 400P = 0$$

$$\sum M_C^{I-II} : R_F 200 + (R_H \sin 60)400 + (R_H \cos 60)300 + (2P \sin 60)100 - 400P = 0$$

$$\sum M_E^{III} : (R_H \sin 60)200 + (R_H \cos 60)300 - 400P = 0$$

Con estas cinco ecuaciones se resuelven las cinco incógnitas del problema. Es importante aclarar la cuarta y quinta ecuación que se refiere a los equilibrios relativos: estamos tomando momento respecto de la articulación, de las fuerzas activas y reactivas que actúan sobre una de las dos partes que separa la articulación, por eso en el caso de la articulación en C o bien se toma momento de las fuerzas activas y reactivas de la chapa I, o de las fuerzas activas y reactivas del conjunto de chapas II-III, y no sólo de la chapa II. La articulación vincula dos partes: la I con la II-III.

Intentemos ahora resolver el problema analizando el funcionamiento de la estructura:

Una pregunta que podríamos hacernos es cómo armaríamos este conjunto, es decir en qué secuencia montaríamos este conjunto:

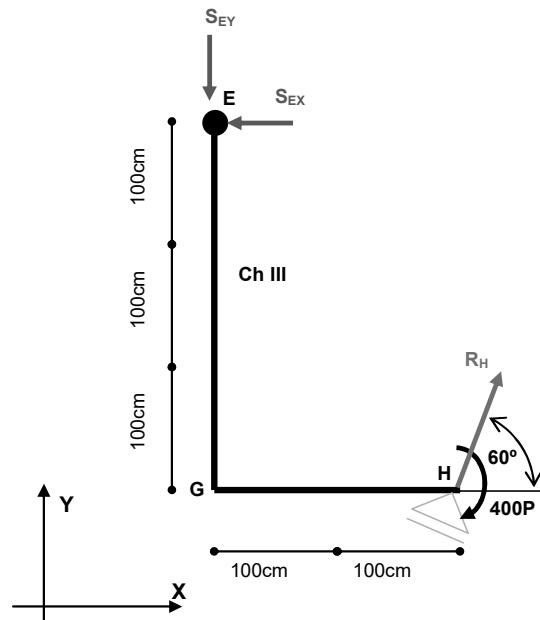
La respuesta a esta pregunta es que primero montaríamos la chapa I, pues es isostática por sí misma. Luego a la chapa I le vincularíamos la II en la articulación relativa C, y con el vínculo en E el conjunto queda isostático. Finalmente colocaríamos la chapa II.

Al revés, si quisieramos desarmar el conjunto primero quitaríamos la III, luego la II y por último la I.

En esto reside la manera de analizarlo, esto es siguiendo la secuencia de desarmado:

Calculamos primero la Chapa III apoyada en H y en la articulación E

Figura 84 Análisis de la chapa III



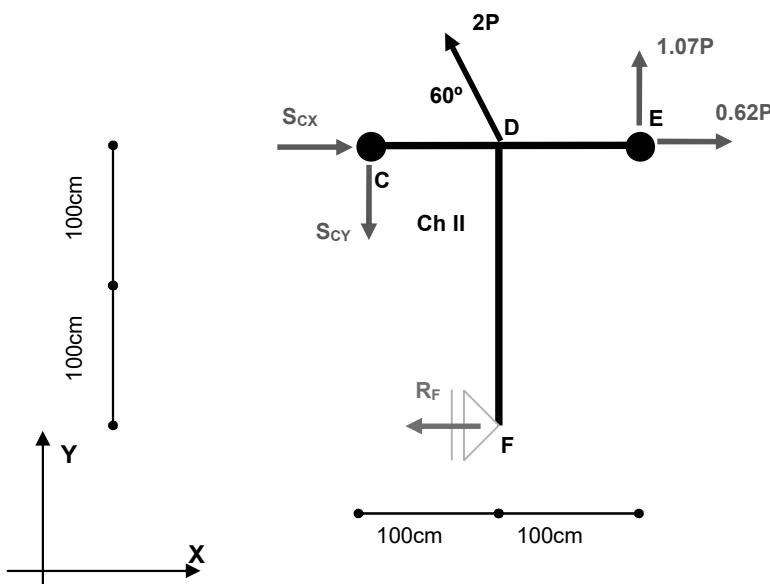
Planteando las tres ecuaciones de equilibrio en la chapa III, encontramos los siguientes valores para las tres incógnitas R_H , S_{EX} y S_{EY} .

$$R_H = +1.24P \quad S_{EX} = +0.62P \quad S_{EY} = +1.07P$$

Las fuerzas S_{EX} y S_{EY} son las fuerzas mutuas que están pasando a través del vínculo relativo en E. Los sentidos calculados son sobre la chapa III, por acción y reacción en la chapa II tienen sentido contrario.

Ahora podemos analizar lo que sucede con la chapa II (Figura 85):

Figura 85 Chapa II

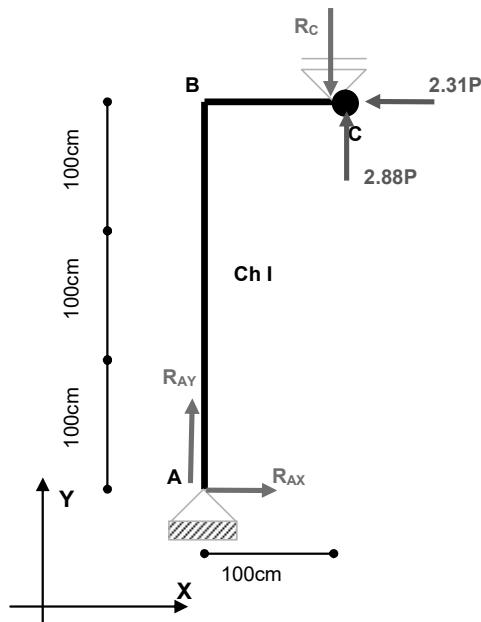


Resolviendo el cálculo para esta chapa se obtiene:

$$R_F = 1.93P \quad S_{Cx} = 2.31P \quad S_{Cy} = 2.88P$$

Finalmente, procediendo como en el caso anterior resolvemos la chapa I con las acciones que le transmite la II.

Figura 86 Chapa I



Resolviendo el equilibrio encontramos que:

$$R_{AX} = 2.31P \quad R_{AY} = 6.93P \quad R_C = 9.81P$$

Hemos resuelto el problema siguiendo el “camino” que siguen las cargas desde sus puntos de aplicación a los apoyos.

Analizado así el problema nos permite extraer algunas conclusiones:

- La chapa que sirve de apoyo a todo el conjunto es la chapa I que está sustentada isostáticamente con tres vínculos externos.
- Observemos que, si se produce una variación en las cargas que actúan en la chapa III, varían todos los resultados del problema. Si se varía la situación de carga en la chapa I, no se producirían variaciones en los resultados en las chapas II y III. Esto se debe a que las chapas II y III se apoyan sobre la I, pero no al revés.
- Si por ejemplo no hubiera estado el vínculo simple en C, y el vínculo en F hubiera sido una articulación, el funcionamiento del sistema sería diferente: La chapa III se apoya sobre el conjunto I-II, que no podría tratarse por separado. Esto es si nos preguntáramos como desarmar el conjunto, la respuesta sería quitar primero la chapa III y luego simultáneamente la I y la II, y este sería el camino de análisis.

FACULTAD DE INGENIERIA - UNLP

ÁREA VERTICAL ESTRUCTURAS A

C-1151 ESTRUCTURAS I

MATERIAL DIDÁCTICO COMPLEMENTARIO

UNIDAD 2

ANEXO A

CARGAS DISTRIBUIDAS

ING. ASDRÚBAL E. BOTTANI - 2021

UNIDAD 2 - ANEXO A

Cargas distribuidas

Asdrubal E. Bottani

Hasta ahora nos hemos ocupados de fuerzas aplicadas en un punto, que llamaremos de aquí en más cargas concentradas. Sin embargo, como veremos más adelante esta es una idealización, porque una carga aplicada en un punto (superficie de aplicación nula) implicaría una tensión de contacto (fuerza aplicada sobre el área en la que se distribuye) infinita, y ningún material es capaz de soportar una tensión infinita. Entonces, siempre las fuerzas se aplican sobre una superficie. En el caso que esta superficie sea suficientemente pequeña con relación a las dimensiones del elemento estructural donde se aplica la fuerza se la puede considerar concentrada a los efectos prácticos sin que se cometa error apreciable en la evaluación del comportamiento de ese elemento.

Por otra parte, hay otras fuerzas que por su naturaleza no pueden considerarse concentradas, como es el caso de fuerzas de origen gravitatorio (peso propio de los elementos que conforman la estructura), las fuerzas de inercia (causadas por una aceleración del sistema), las fuerzas debidas al viento, los empujes debidos a un líquido, etc.

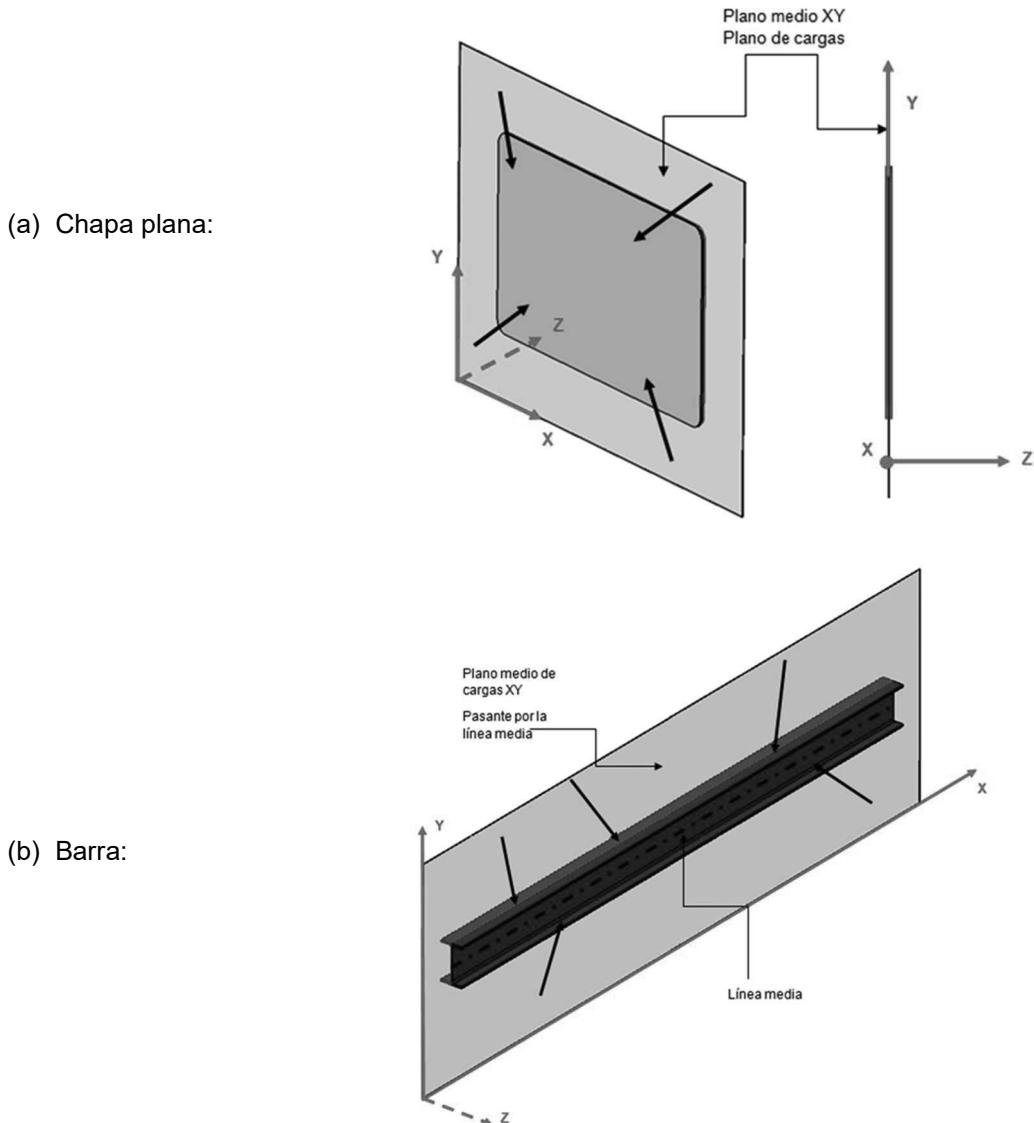
En este capítulo nos ocuparemos del tratamiento de tales fuerzas y en qué casos pueden reemplazarse por una única fuerza concentrada, y dónde debe considerarse el punto de aplicación de dicha fuerza concentrada equivalente.

2A.1 Cargas concentradas: una idealización

En los capítulos anteriores ya hemos introducido el término de chapa y barra, que volvemos a recordar aquí: La chapa plana es un elemento que tiene una dimensión (el espesor) mucho menor que las otras dos, las que resultan comparables entre sí. Todas las cargas se suponen actuando en el plano medio, que es el plano que contiene a la línea media del espesor, y que constituye el plano de cargas. La barra, por el contrario, es un elemento que tiene una dimensión preponderante (la longitud) frente a las otras dos que son a su vez comparables entre sí. A la barra se la modeliza mediante una línea que representa su eje longitudinal. En capítulos subsiguientes utilizaremos como sistema de orientación de la barra una terna derecha en la que el eje **x** representa este eje longitudinal, y los ejes **y** y **z** dos ejes característicos de la sección transversal. Esta terna que es solidaria a la barra se la llamará terna local, en contraposición a

la terna fija X-Y-Z utilizada para el cálculo de reacciones y el análisis de grados de libertad. En la Figura 1 (a) y (b) volvemos a mostrar la chapa plana y la barra vistas en el capítulo 2.

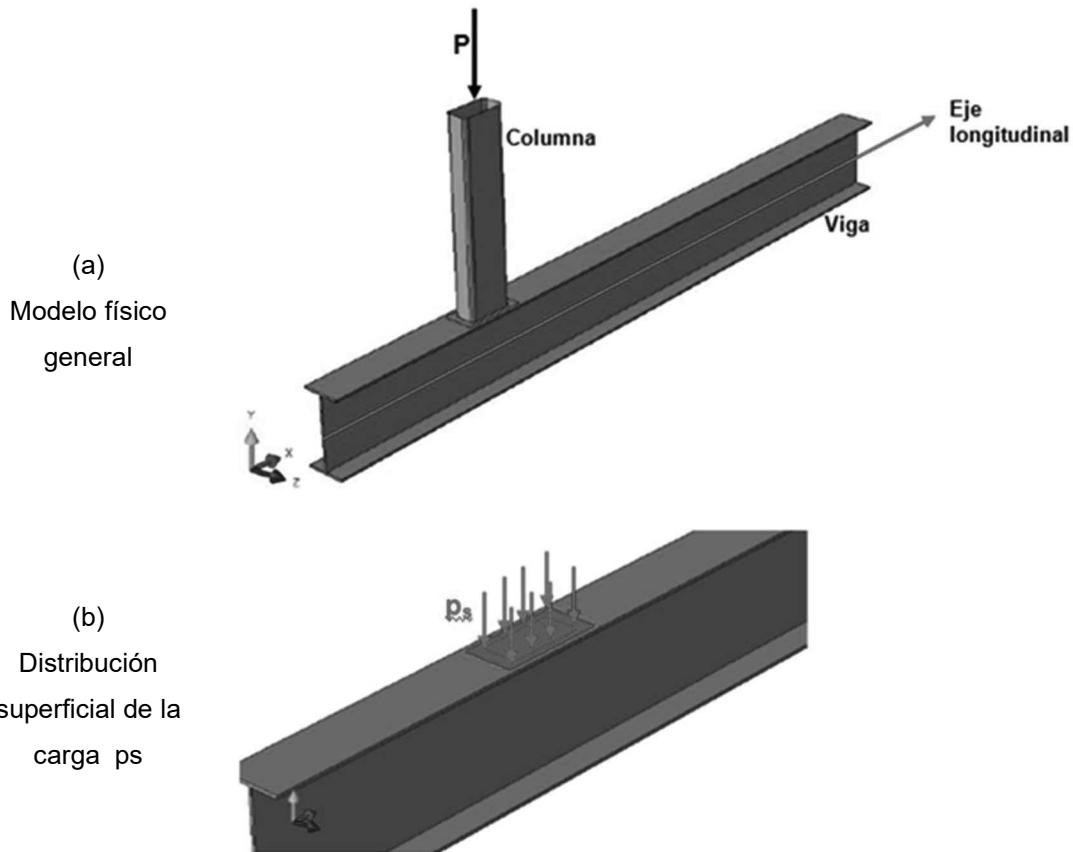
Figura 1 Chapa y barra



Consideremos ahora, un modelo físico constituido por una barra vertical que denominaremos *columna*, que apoya sobre una horizontal transversal que llamaremos *viga*¹. La columna le está aplicando a la viga una carga P dirigida según su eje longitudinal, y esta carga se aplica a través de la superficie de contacto entre ambas barras como mostramos en la Figura 2 (a) y (b). La forma en que la carga P se distribuye en la superficie de contacto depende en general de las dimensiones y espesor de la placa de apoyo. Por ahora y para simplificar la comprensión del concepto diremos que la fuerza P se distribuye uniformemente en el área de contacto A_c resultando una presión $p_s = P/A_c$ en unidades de fuerza sobre longitud cuadrado F/L^2 .

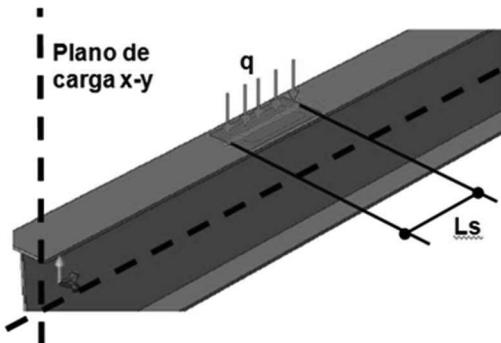
¹ En capítulos posteriores daremos una definición más rigurosa de lo que entendemos por columnas y vigas

Figura 2 Modelo físico de carga concentrada



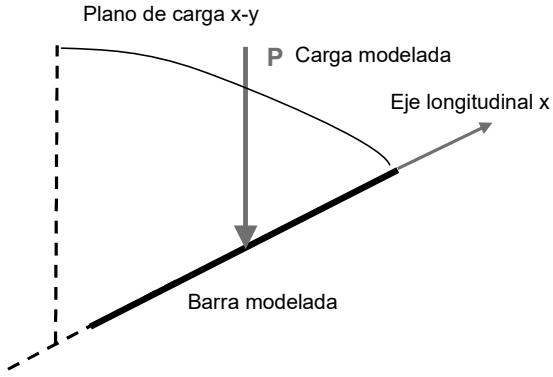
Si multiplicamos la carga repartida por unidad de superficie por el ancho de la superficie de carga obtenemos una carga lineal q en unidades de fuerza por longitud (F/L), y que está aplicada a lo largo de la longitud L_s en el plano de cargas xy como vemos en la Figura 3.

Figura 3 Distribución lineal de la carga



Como la longitud L_s es mucho menor que la longitud total de la barra, podemos suponer que la carga P está aplicada en forma puntual y así llegamos al modelo de análisis de la Figura 4.

Figura 4 Modelo de análisis de la barra



2A.2 Cargas distribuidas

Hay algunos tipos de cargas en las que no se puede hacer la simplificación vista en el punto anterior y deben tratarse como cargas distribuidas.

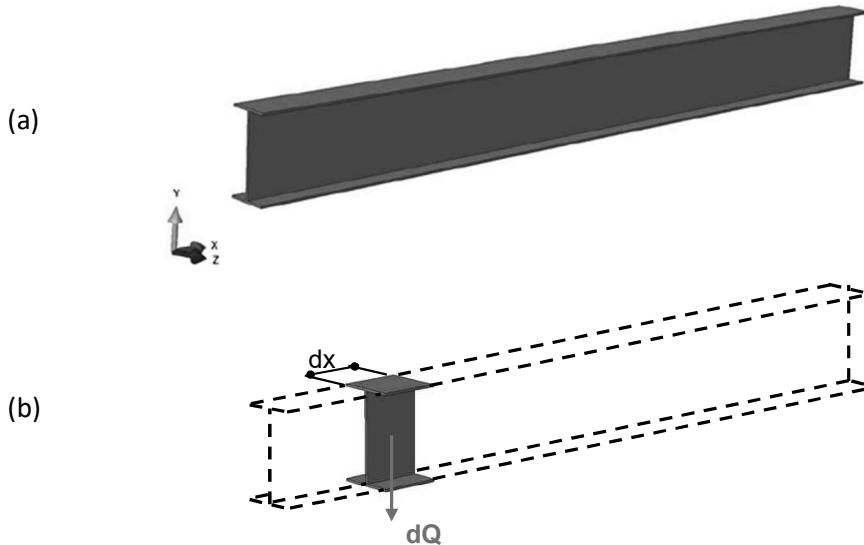
Analicemos el caso del peso propio de una barra, como la vemos en la Figura 5 (a), que tiene una longitud L , y una sección transversal de forma doble T de área A y con un material que tiene una densidad ρ entendiendo por tal la masa por unidad de volumen.

El peso total de la barra es la densidad por la aceleración de la gravedad y por el volumen de acuerdo a:

$$Q = g \cdot \rho \cdot A \cdot L$$

Que según el sistema internacional (SI), si la densidad es en kg/m^3 , la aceleración en m/seg^2 , el área en m^2 y la longitud en m , se obtiene el peso Q en newton (N)

Figura 5 Peso propio de una barra

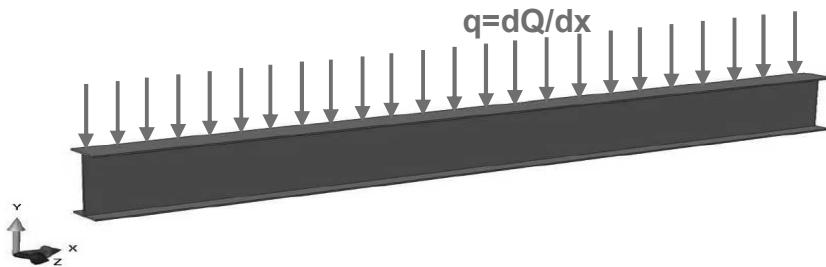


Si ahora consideramos un tramo de longitud dx de esa misma barra (Figura 5 b), ese tramo tendrá un peso dado por:

$$dQ = g \cdot \rho \cdot A \cdot dx$$

Así el peso de la barra estará representado por una sucesión de fuerzas paralelas dQ , y diremos que el peso propio en este caso es una carga distribuida de valor $q = dQ/dx$ en unidades de fuerza por unidad de longitud como vemos en la Figura 6, que en el caso que el área de la sección transversal sea constante la carga q es también constante.

Figura 6 Carga distribuida de peso propio



$$q = \frac{dQ}{dx} = \rho \cdot g \cdot A$$

Si ahora, conocido el valor de q , quisiéramos conocer el peso total de la barra deberíamos proceder a sumar todas las fuerzas dQ , que como son paralelas, su suma vectorial coincide con su suma algebraica, por lo tanto:

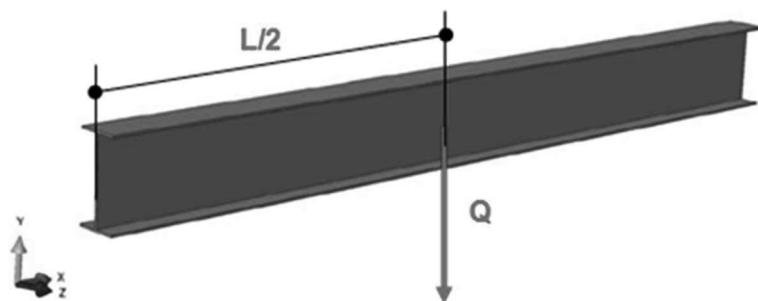
$$Q = \int_0^L dQ = \int_0^L q \cdot dx$$

$$Q = \int_0^L \rho \cdot g \cdot A \cdot dx$$

Dado que en este caso son todas constantes, la integral queda finalmente el peso total de la barra expresado al inicio $Q = \rho \cdot g \cdot A \cdot L$.

En este caso particular resulta evidente que la ubicación de la resultante de todas las fuerzas iguales dQ está ubicada en la mitad de la longitud de la barra (Figura 7).

Figura 7 Peso total de la barra



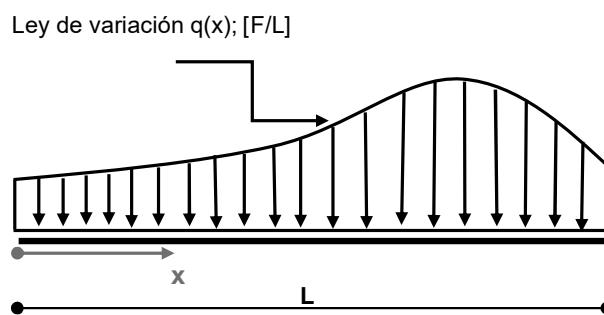
Conviene resaltar que, según el principio de la resultante enunciado en el capítulo 1, el efecto de la carga distribuida q es equivalente al de su resultante Q , porque no hacemos otra cosa que aplicar dicho principio. Pero notemos que:

- Por un lado, la situación real de carga es la carga q y no la carga Q aplicada a $L/2$.*
- Por otra parte, el principio es válido para cuerpos rígidos, quiere decir que podremos reemplazar a q por su resultante Q , sólo para consideraciones que no impliquen evaluar el comportamiento de la barra como un elemento no rígido.*

Sobre este último concepto volveremos en oportunidad de tratar qué sucede internamente en la barra bajo los efectos de esta carga distribuida u otra de cualquier naturaleza.

Analicemos ahora el caso general de una carga distribuida que tiene una ley arbitraria $q(x)$ como mostramos en la Figura 8

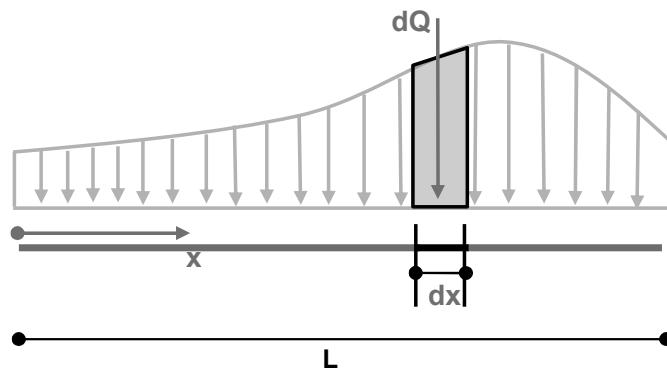
Figura 8 Carga distribuida $q(x)$



Para calcular la resultante y su ubicación procedemos como en el caso particular visto:

- La resultante se obtiene efectuando la suma algebraica de todas las fuerzas elementales $dQ = q(x)dx$ de la Figura 9.

Figura 9 Fuerza elemental dQ

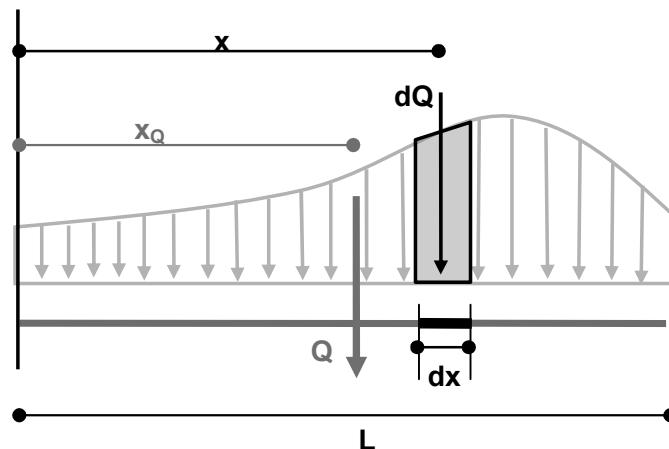


$$Q = \int_0^L q(x)dx \quad (1)$$

La ecuación (1) indica que el módulo de la resultante es el área bajo la curva $q(x)$, es decir es el área del diagrama de carga.

- b) Para calcular la ubicación de esa resultante, hacemos uso del teorema de Varignon, tomando momentos de cada una de las fuerzas elementales dQ e igualando la suma al momento de la resultante Q como mostramos en la Figura 10.

Figura 10 Ubicación de la resultante



$$Q \cdot x_Q = \int_0^L x \cdot dQ$$

$$x_Q = \frac{\int_0^L q(x)x dx}{\int_0^L q(x) dx} \quad (2)$$

La ecuación (2) nos dice que la resultante de la carga distribuida se ubica en el baricentro de la superficie de carga.

Ejemplo 3-1:

Calcular las reacciones en los vínculos de una barra de acero simplemente apoyada si su sección transversal corresponde con un perfil laminado en caliente IPN180 de 8.0m de longitud.

La densidad del acero es ρ : 7850 kg/m³.

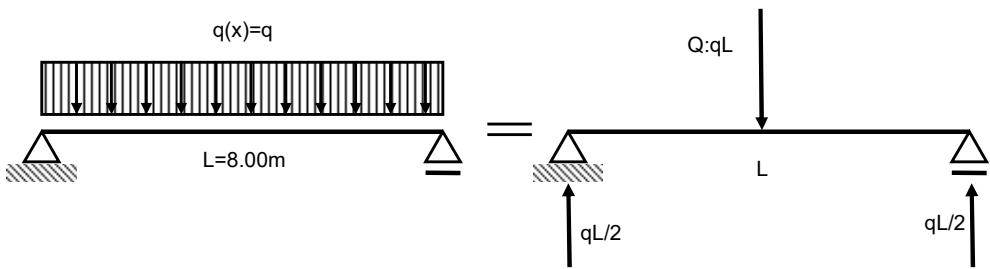
Según los manuales la sección transversal de una barra de acero IPN 160 es A : 22.8 cm²

La carga $q(x)$ distribuida se obtiene según lo visto:

$$q(x) = \rho \cdot g \cdot A = 7850 \text{ kg/m}^3 \cdot 9.810 \text{ m/seg}^2 \cdot 0.000228 \text{ m}^2 = 175.6 \text{ N/m}$$

En la Figura 11 de la izquierda mostramos el modelo de carga real, mientras que, en la derecha, a los efectos del cálculo de reacciones y dado que para ello podemos tratar a la barra como un cuerpo rígido reemplazamos la carga distribuida por su resultante igual al área del diagrama y ubicada en el baricentro del mismo.

Figura 11 Modelo de carga y su simplificación



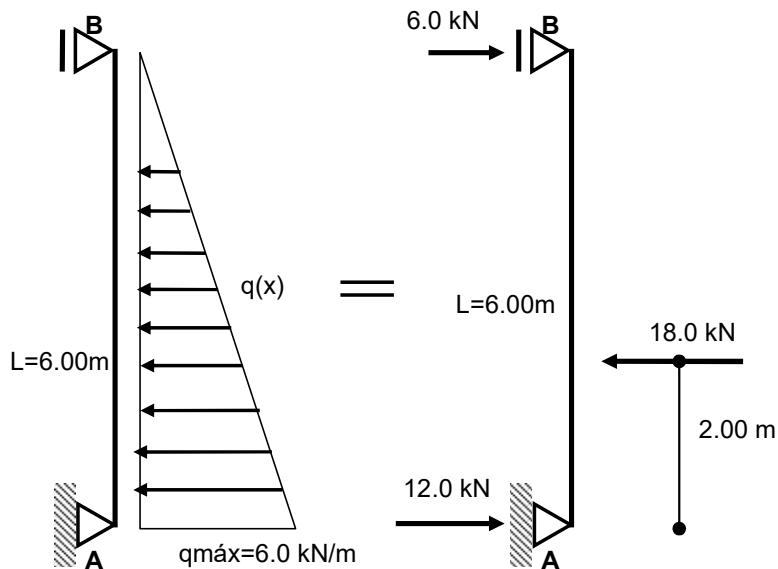
$$Q = qL = 175.6 \text{ N/m} \cdot 8.00 \text{ m} = 1404.8 \text{ N}$$

Las reacciones resultan: $Q/2$ en cada apoyo, es decir 702.4 N

Ejemplo 3-2:

Calcular las reacciones de una barra vertical simplemente apoyada de 6.00m de longitud con una carga triangular con un valor máximo de 6,0 kN/m en su base y 0 kN/m en su extremo superior (Figura 12 izquierda).

Figura 12 Carga triangular



Sabiendo que la resultante de la carga distribuida es igual al área del diagrama de carga obtenemos el valor de la resultante total Q :

$$Q = \frac{q_{\max} L}{2} = \frac{6.0 \text{ kN/m} \cdot 6.00 \text{ m}}{2} = 18.0 \text{ kN}$$

Su ubicación coincide con el baricentro de la superficie de carga que sabemos está a 1/3 de la base, es decir a 2.00m del apoyo A.

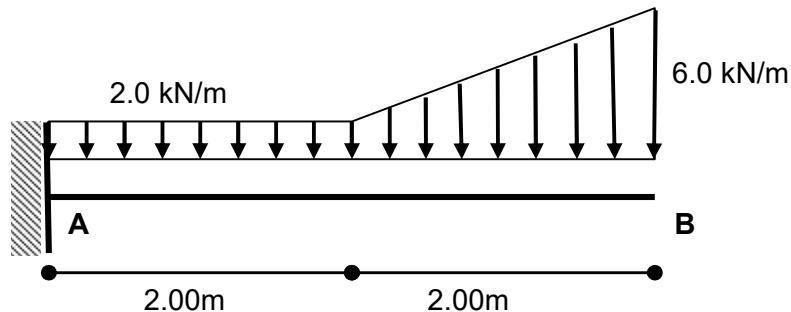
Tomando momentos respecto de A y B, obtenemos R_B y R_A respectivamente, como se muestra en la Figura 12 derecha.

$$R_A = 12.0 \text{ kN} \quad R_B = 6.0 \text{ kN}$$

Ejemplo 3-3:

Calcular la reacción en el empotramiento A de la barra de la Figura 13, que está bajo la acción de una carga distribuida.

Figura 13 Carga distribuida constante-lineal



Para resolver el ejercicio hacemos uso nuevamente del principio de la resultante, tratando la carga distribuida como la superposición de dos cargas: una constante de valor 2.0 kN/m aplicada en toda la longitud de la barra y otra triangular de ordenada máxima 4.0 kN/m aplicada en los 2.00m finales de la barra.

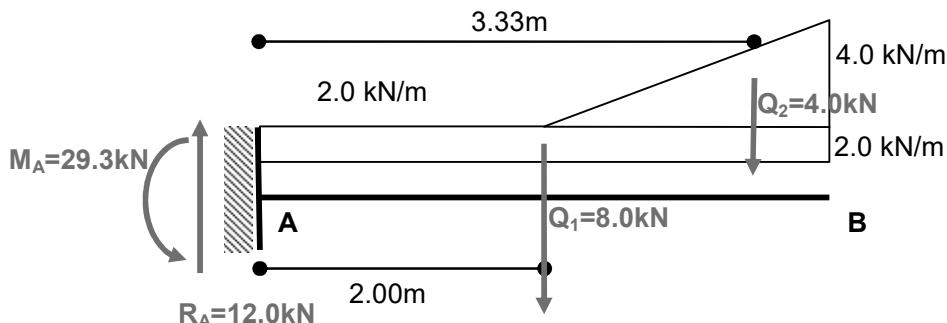
Obtenemos las resultantes Q₁ y Q₂:

$$Q_1 = 2.0 \text{ kN/m} \cdot 4.00 \text{ m} = 8.0 \text{ kN}$$

$$Q_2 = \frac{4.0 \text{ kN/m} \cdot 2.00 \text{ m}}{2} = 4.0 \text{ kN}$$

Las cargas Q₁ y Q₂ se encuentran ubicadas en los respectivos baricentros de las superficies de carga, como vemos en la Figura 14.

Figura 14 Cargas equivalentes y reacciones



Las reacciones en A se obtienen por el procedimiento habitual, en este caso la sumatoria de fuerzas verticales y la suma de momentos respecto de A

$$R_A = 12.0 \text{ kN} \text{ y } M_A = 29.3 \text{ kN}$$

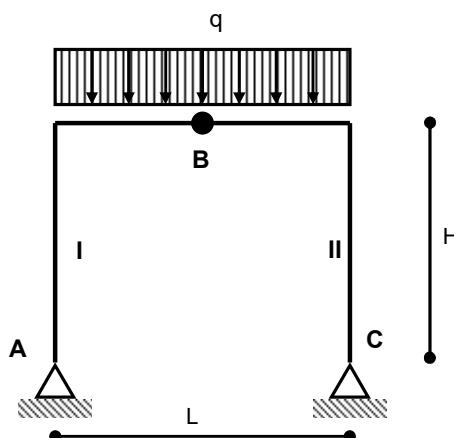
2A.3. Limitaciones al uso del principio de la resultante

En el punto anterior hemos visto que para el cálculo de reacciones en general sustituimos la carga repartida por su resultante ubicada en el baricentro de la superficie de carga, aplicando el principio de la resultante, pues la carga repartida no es otra cosa que una sucesión de fuerzas paralelas, y como tal se las puede reemplazar por su resultante sin que los efectos varíen.

Este principio vale en el caso de cuerpos rígidos, por eso también señalamos, que mientras no estemos evaluando lo que sucede internamente en el cuerpo podíamos proceder como indicamos.

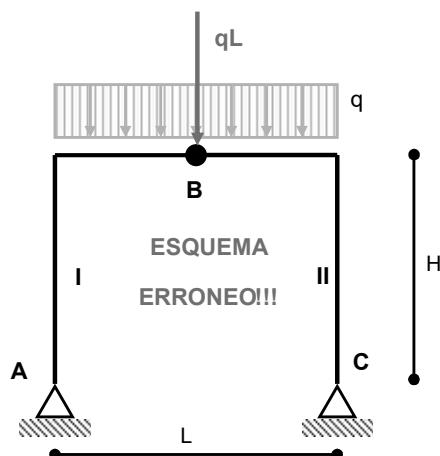
Sin embargo, este procedimiento merece tener ciertos cuidados. Consideraremos el sistema de dos barras vinculadas entre sí en B mediante una articulación relativa, y apoyadas en A y C con sendas articulaciones que se muestra en la Figura 15.

Figura 15 Carga distribuida sobre dos o más chapas



Si no tuviéramos cuidado, para el cálculo de las reacciones reemplazaríamos la carga distribuida por su carga concentrada equivalente, en este caso sobre la articulación relativa en B

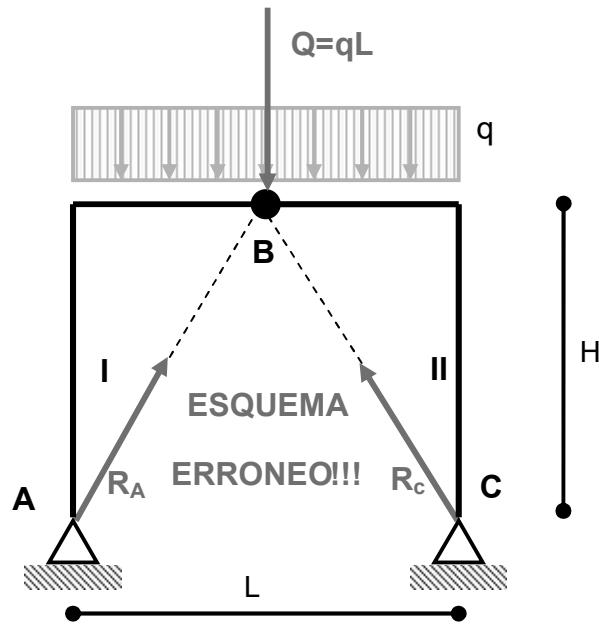
Figura 16 Esquema de cálculo erróneo



Veamos primero por qué esta simplificación conduciría a resultados erróneos y luego justificaremos más precisamente la fuente del error.

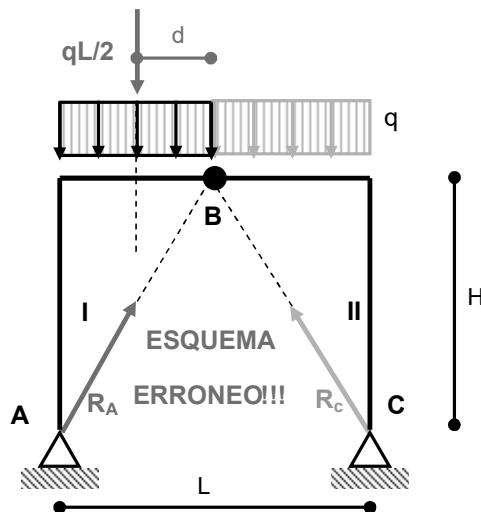
Suponiendo correcta la simplificación, y en función de lo visto en el capítulo anterior, las reacciones en A y C deberían concurrir al punto B donde está aplicada la fuerza $Q=qL$ y cerrar el polígonode estas tres fuerzas (Figura 17).

Figura 17 Esquema erróneo de fuerzas



Si recordamos que cuando sacamos los dos vínculos externos, este sistema tiene cuatro grados de libertad: los tres de cuerpo rígido, más el giro relativo de una chapa respecto de la otra alrededor de B. Veamos si con el esquema de fuerzas que hemos encontrado, se verifica la condición de equilibrio relativo, considerando ahora la carga distribuida en vez de su resultante.

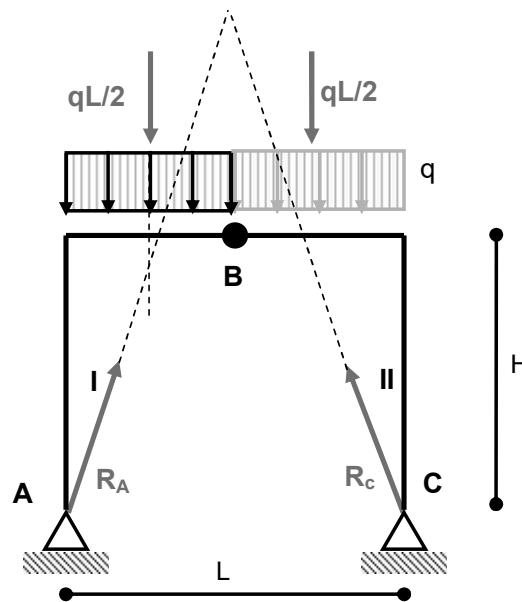
Figura 18 Error de la simplificación



En la Figura 18 se ve claramente que no se cumple la condición del equilibrio relativo, pues la reacción en A no es capaz de equilibrar el momento que genera la resultante parcial de la carga distribuida sobre la chapa I respecto de la articulación en B.

Para que esta condición se cumpla la recta de acción de R_A debiera pasar a la izquierda de B, y lo mismo puede decirse de la reacción R_C , que debe pasar a derecha de B. En la Figura 19 mostramos el esquema correcto, el cual se encuentra, reemplazando la carga distribuida sobre cada chapa por su resultante. Observemos que se sigue cumpliendo que si reducimos el sistema a tres fuerzas: R_A , R_C y la resultante de cada $qL/2$ siguen siendo concurrentes pero ya no en B, si no sobre su vertical.

Figura 19 Esquema correcto



La razón de por qué la suposición inicial era incorrecta es que el sistema de las dos chapas articuladas entre sí *ya no es un sistema rígido*, si no que tiene un grado de libertad relativo adicional a los tres grados de libertad que tiene un cuerpo rígido, entonces ya no vale el principio de la resultante.

En consecuencia, sólo podemos reemplazar cargas distribuidas por su resultante para el cálculo de reacciones en sistemas isostáticos, cuando las cargas distribuidas actúan en su totalidad sobre una chapa. Si actúan sobre más de una chapa se pueden reemplazar por resultantes parciales en cada chapa.

FACULTAD DE INGENIERIA - UNLP

ÁREA VERTICAL ESTRUCTURAS A

C-1151 ESTRUCTURAS I

MATERIAL DIDÁCTICO COMPLEMENTARIO

UNIDAD 2

ANEXO B

**LA BARRA Y SUS CARACTERÍSTICAS
GEOMÉTRICAS**

ING. ASDRÚBAL E. BOTTANI - 2021

UNIDAD 2 – ANEXO B

La barra y sus características geométricas

Asdrubal E. Bottani

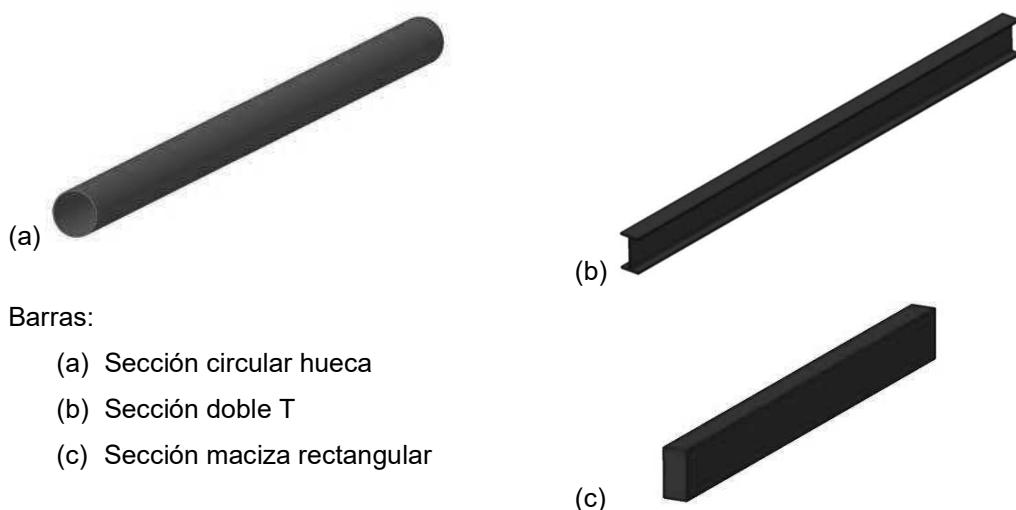
En este capítulo nos vamos a ocupar de definir las principales características de los elementos con los que vamos a trabajar el resto del libro y que son las barras. Definiremos el sistema de coordenadas de referencia que se utiliza para orientar la barra en un caso general en el espacio, y en particular en el plano. También definiremos y mostraremos la manera de calcular las principales características geométricas de su sección transversal, las que se utilizarán más adelante para evaluar el comportamiento de las barras frente a las cargas que actuarán sobre ellas.

2B.1 Principales definiciones

Definiremos a una barra como aquel elemento estructural que posee una dimensión, la longitud, preponderante frente a las otras dos, las que a su vez resultan comparables entre sí.

Lo que caracteriza a una barra es su longitud L , y la forma y dimensiones de su sección normal o transversal A , que definiremos como aquella sección que se obtiene al cortar la barra con un plano perpendicular a su eje longitudinal. En la Figura 1 vemos distintos tipos de secciones

Figura 1 Barras de diferentes secciones transversales



Barras:

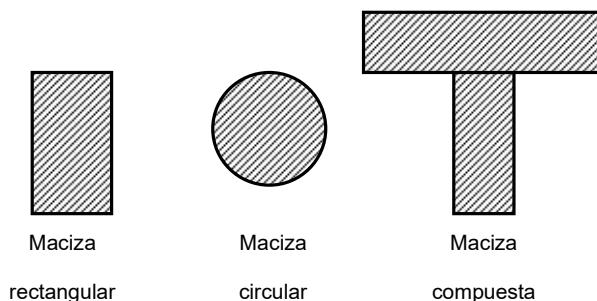
- (a) Sección circular hueca
- (b) Sección doble T
- (c) Sección maciza rectangular

Hay diferentes tipos de secciones transversales que iremos viendo en sucesivos ejemplos a lo largo de los capítulos que siguen.

Entre otras podemos distinguir

- a) secciones macizas (Figura 2): que pueden ser de forma regular o compuestas, este último caso es muy común en maderas

Figura 2 Secciones macizas



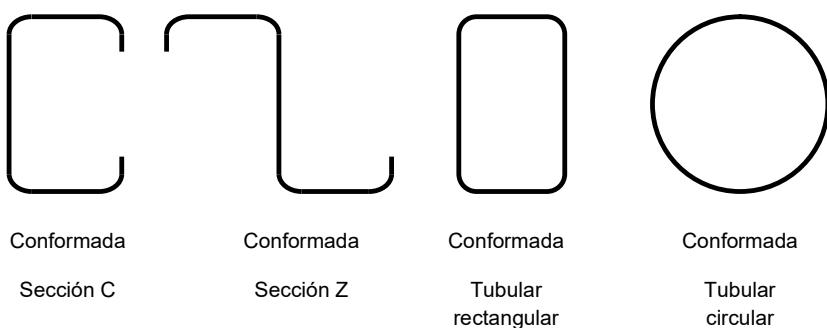
- b) Secciones de acero laminadas en caliente: la barra se moldea a partir de la laminación en caliente de un trozo de acero de sección rectangular (Figura 3)

Figura 3 Secciones laminadas en caliente



- c) Secciones conformadas en frío: se producen a partir del plegado en frío de un fleje plano (Figura 4).

Figura 4 Secciones conformadas en frío

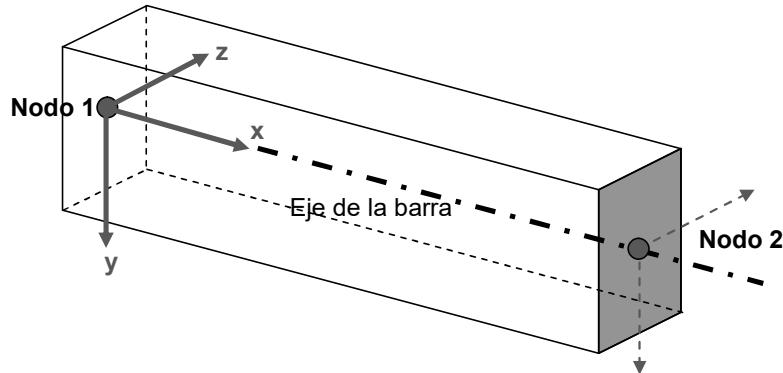


La enumeración de la tipología puede seguir con las secciones armadas que se obtienen soldando chapas planas entre sí de manera de obtener las formas buscadas.

Con los fines de definir la orientación de la barra en el espacio, o en el caso particular del plano, y además definir sus principales características geométricas adoptaremos una terna derecha de ejes **x-y-z**, que la denominaremos con letras minúsculas para diferenciarla de la terna **X-Y-Z** utilizada para el cálculo de reacciones, y que, a diferencia de esta última, es solidaria a la barra. *Esta terna la denominaremos terna local.*

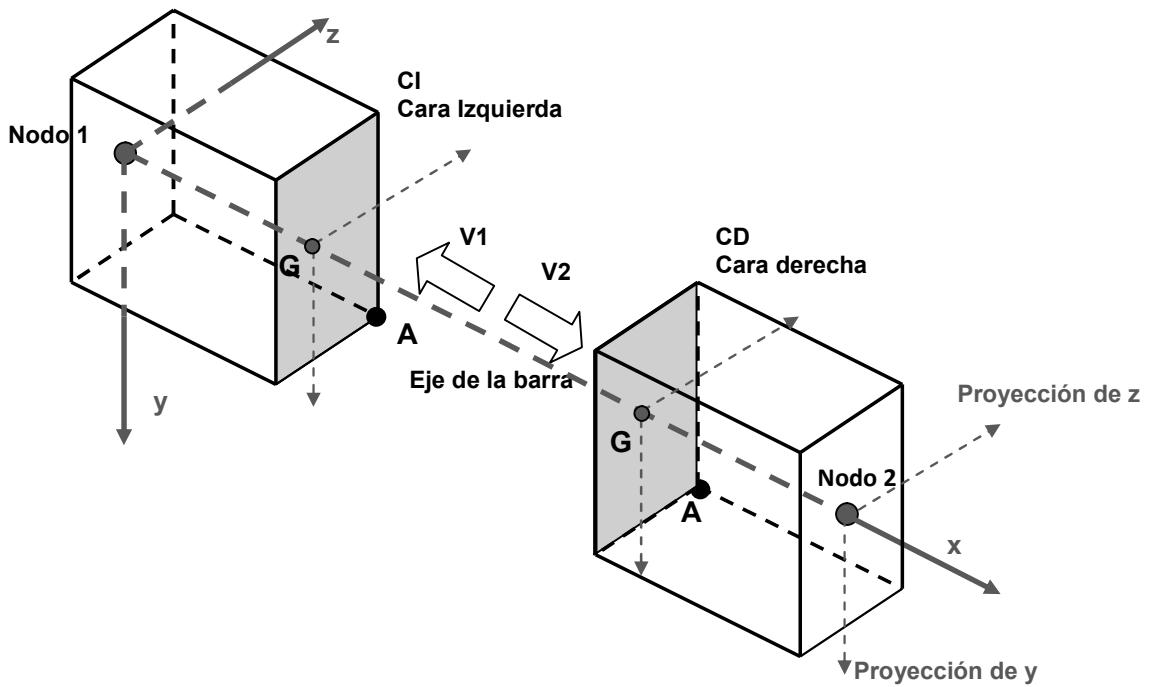
La terna local, según indicamos en la Figura 5, la definimos eligiendo en las secciones de los extremos de la barra, dos puntos que llamaremos *nodo origen 1* y *nodo destino 2*, en general coincidentes con el baricentro de cada una de las respectivas secciones extremas. El origen de la terna coincide con el nodo origen 1, y el eje x coincide con el eje longitudinal de la barra con orientación positiva hacia el nodo destino 2. Los ejes yz están contenidos en el plano de la sección y más adelante en este capítulo definiremos cómo se ubican dentro de la sección.

Figura 5 terna local



Expliquemos la convención para analizar una sección cualquiera de la barra. Para ello supongamos que cortamos la barra a una distancia x genérica del nodo origen, según un plano perpendicular al eje longitudinal, separando la barra en dos. Obtenemos así dos caras que identificaremos como *cara izquierda* y *cara derecha* según vemos en la Figura 6. La cara izquierda es desde la cual sale el semieje positivo x , y la cara derecha en la cual entra el semieje positivo x .

Figura 6 Cara izquierda y cara derecha

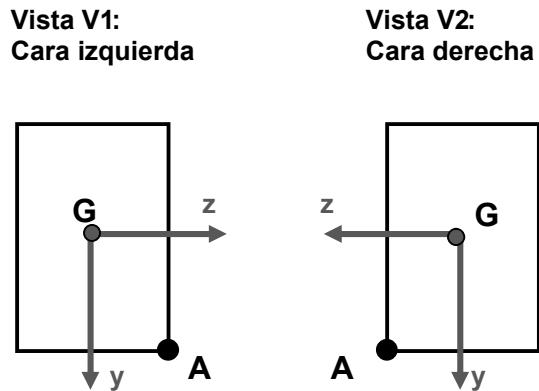


Si ahora rebatimos ambas caras hacia nosotros, es decir las vemos según la vista V1 y la vista V2, obtenemos las secciones normales rebatidas según la Figura 7. Observemos la posición relativa en ambas vistas del punto A que hemos tomado como referencia (en ambos casos y

como era de esperar el punto A tiene las mismas coordenadas locales x,y,z). La proyección del origen de coordenadas en cada sección coincide con el baricentro G de la sección que explicaremos en los puntos que siguen.

De ahora en más y mientras no digamos nada en contrario cada vez que dibujemos la sección normal rebatida lo haremos pensando que es una cara izquierda.

Figura 7 Cara izquierda y cara derecha rebatidas



Seguidamente estudiaremos las distintas características geométricas de la sección transversal que utilizaremos para evaluar su comportamiento frente a las distintas acciones que actúan sobre la barra.

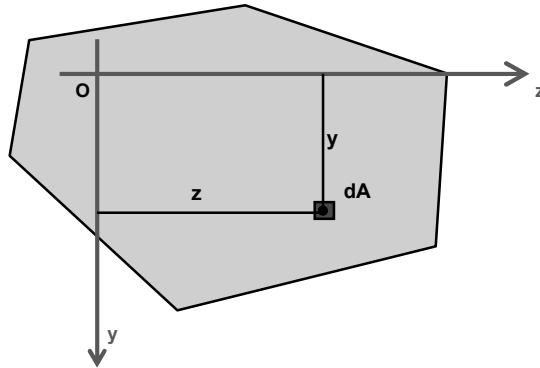
2B.2. Momentos estáticos – Baricentro

Dada una sección cualquiera A de coordenada x respecto al origen local de la barra, y considerando un elemento dA , de coordenadas y,z como el que mostramos en la Figura 8, definiremos al producto de ese dA por sus coordenadas z e y respectivamente como el *momento estático* o *momento primero* del área elemental dA respecto de z e y lo indicaremos como dS_z y dS_y

$$dS_z = ydA$$

$$dS_y = zdA$$

Figura 8 Momento estático o momento primero de superficie



El momento estático del total del área A respecto de los ejes z e y respectivamente viene dado por:

$$\begin{aligned} S_z &= \int_A y dA \\ S_y &= \int_A z dA \end{aligned} \quad (1)$$

Como las y y z están elevadas a la potencia 1, pueden entrar en la integral con signo positivo o negativo, o sea que S_z y S_y pueden resultar tanto positivos, negativos o nulos.

Las unidades de S_z y S_y son de longitud al cubo

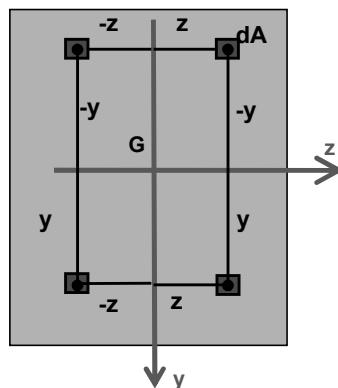
En el caso particular que S_z y S_y den un resultado nulo, diremos que el punto O, y los ejes z e y son los ejes baricéntricos del área A, y al punto O lo llamaremos baricentro de la superficie y lo indicaremos por G.

Entonces la condición para que el sistema z e y sean ejes baricéntricos es:

$$\begin{aligned} S_z &= \int_A y dA = 0 \\ S_y &= \int_A z dA = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Es fácil demostrar observando la Figura 9 que, si la sección tiene ejes de simetría, esos ejes resultarán ser los ejes baricéntricos y el punto donde se crucen el baricentro G de la sección. Esto es así porque por simetría a un área elemental dA de coordenada $y+$, le corresponde un área elemental dA de coordenada $y-$, y lo mismo respecto de la coordenada $z+$ y $z-$

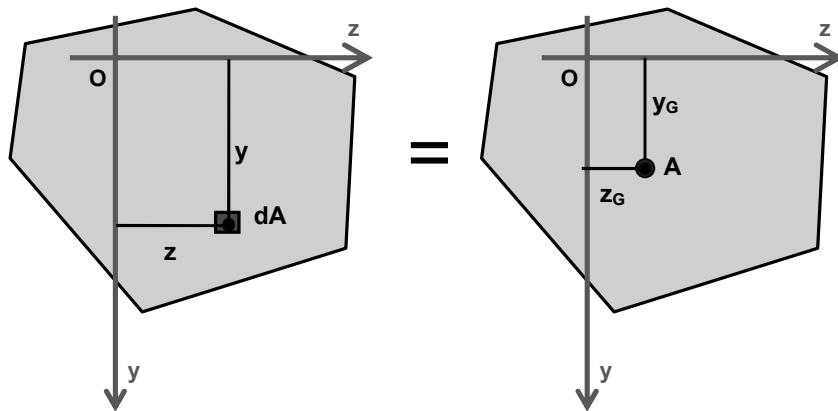
Figura 9 Sección simétrica



Propiedad 1:

El momento estático de una superficie respecto de un eje cualquiera es igual al momento estático suponiendo esa superficie concentrada en su baricentro por la coordenada que tiene el baricentro respecto de ese eje.

Figura 10 Forma de calcular la ubicación de G



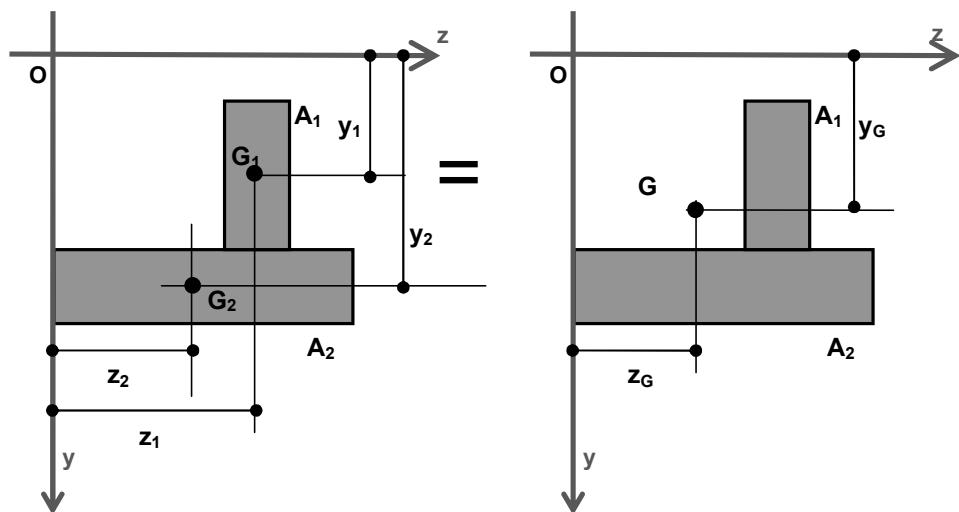
Según lo expresado y teniendo en cuenta la Figura 10 podemos resumir esta propiedad así:

$$\begin{aligned} S_z &= \int_A y dA = A \cdot y_G \\ S_y &= \int_A z dA = A \cdot z_G \end{aligned} \quad (3)$$

Propiedad 2:

El momento estático de una superficie compuesta respecto de un eje es igual a la suma de los momentos estáticos de cada una de las superficies individuales que componen a esa superficie respecto de ese mismo eje.

Figura 11 Cálculo del baricentro de figuras compuestas



Según las propiedades 1 y 2, y tomando como ejemplo la Figura 11, podemos escribir:

$$\begin{aligned} A_1y_1 + A_2y_2 &= (A_1 + A_2)y_G & (4) \\ A_1z_1 + A_2z_2 &= (A_1 + A_2)z_G \end{aligned}$$

Las ecuaciones (4) nos permiten calcular las coordenadas del baricentro y_G , z_G .

Podemos resumir el procedimiento para calcular el baricentro de una figura factible de descomponer en figuras de baricentro conocido del siguiente modo:

- Descomponemos la superficie total en superficies de baricentro conocido A_i .
- Elegimos un sistema de ejes z e y de origen arbitrario.
- Calculamos las coordenadas respecto de ese sistema de los respectivos baricentros de las áreas A_i , obteniendo para cada uno un par de valores z_i e y_i .
- Por aplicación de las ecuaciones (5) obtenemos las coordenadas del baricentro en el sistema con origen en O.

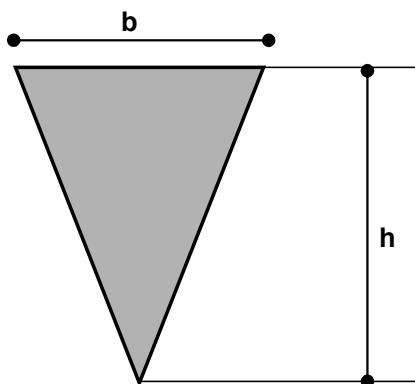
$$\begin{aligned} y_G &= \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i} & (5) \\ z_G &= \frac{\sum A_i z_i}{\sum A_i} \end{aligned}$$

- Debemos tener en cuenta que los productos $A_i y_i$ y $A_i z_i$ se deben computar con el signo de y_i y z_i respectivamente.

Ejemplo 4-1:

Calcular la ubicación del triángulo isósceles de altura h y base b de la Figura 12.

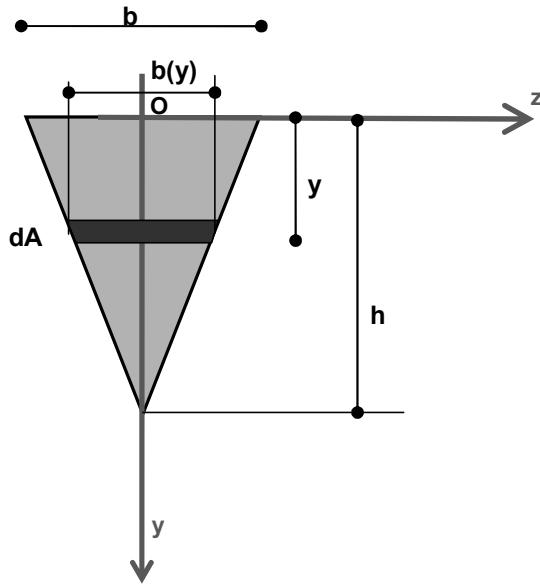
Figura 12 Triángulo isósceles



Para resolver el problema aplicamos la propiedad 1, calculando el momento estático respecto de un sistema arbitrario de ejes $z-y$ e igualando ese momento estático al producto del área del triángulo por la coordenada del baricentro.

Como el triángulo tiene un eje de simetría vertical en este caso, elegimos el sistema arbitrario de manera que el eje y esté sobre esta vertical, porque en ella estará ubicado el baricentro. Sólo nos resta calcular el momento estático respecto del eje arbitrario z y calcular así la coordenada y_G del baricentro.

Figura 13 Cálculo de y_G



$$S_z = \int_A y dA = Ay_G$$

$$y_G = \frac{S_z}{A}$$

$$dA = b(y) dy$$

$$b(y) = \frac{b}{h} (h - y)$$

$$S_z = \int_0^h y \frac{b}{h} (h - y) dy$$

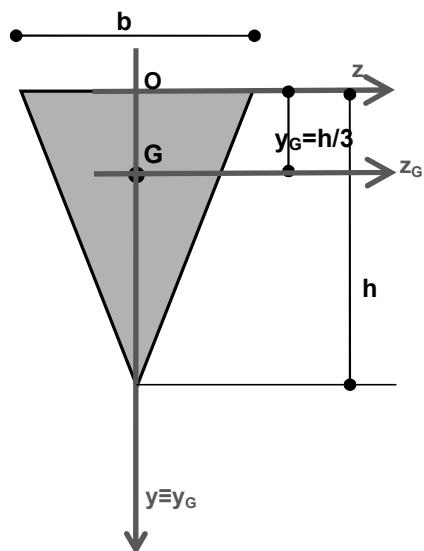
$$S_z = \frac{bh^2}{6}$$

$$A = \frac{bh}{2}$$

Obtenemos así la coordenada y_G del baricentro y el sistema de ejes baricéntrico z_G y g

$$(Figura 14). y_G = \frac{h}{3}$$

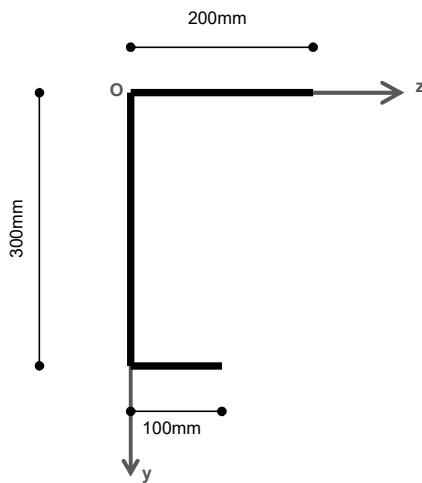
Figura 14 Ubicación de G



Ejemplo 4-2

Calcular el baricentro de la siguiente sección de espesor delgado según se ve en la y que tiene un espesor constante igual a 5.0mm

Figura 15 Sección de espesor delgado



- 1) Calculamos el área de la sección:

$$A = (10.0 + 30.0 + 20.0) \times 0.50 = 30.0 \text{ cm}^2$$

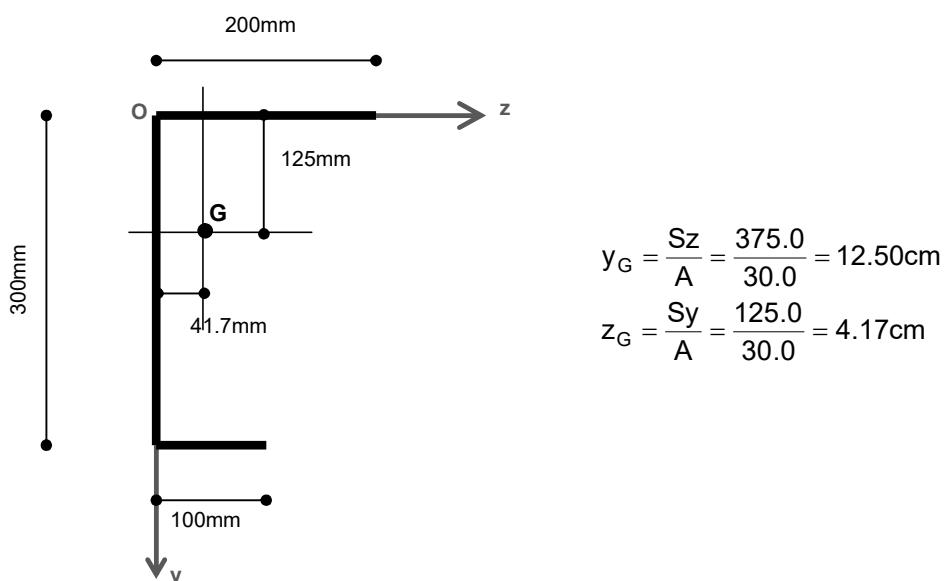
- 2) Elegimos un sistema arbitrario y calculamos los dos momentos estáticos S_z y S_y aplicando la propiedad 2, sumando los momentos estáticos de las áreas rectangulares en la que se divide la sección, y considerando las distancias y y z de cada baricentro individual:

$$S_z = 10.0 \times 0.5 \times 30.0 + 30.0 \times 0.5 \times 15.0 + 20.0 \times 0.5 \times 0.0 = 375.0 \text{ cm}^3$$

$$S_y = 10.0 \times 0.5 \times 5.0 + 30.0 \times 0.5 \times 0.0 + 20.0 \times 0.5 \times 10.0 = 125.0 \text{ cm}^3$$

- 3) Finalmente aplicamos la propiedad 1 sabiendo que el momento estático es igual al área por la respectiva coordenada del baricentro y obtenemos las coordenadas buscadas.

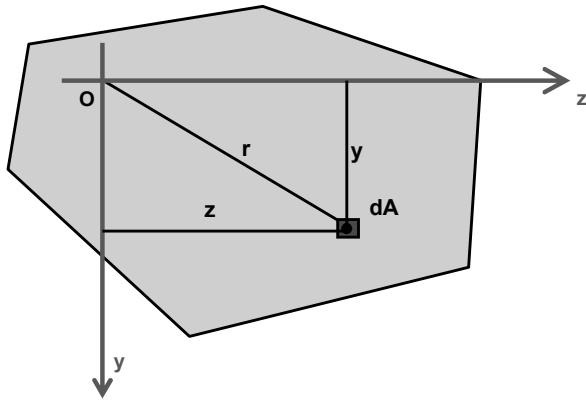
Figura 16 Ubicación de G



2B.3. Momentos segundos de superficie – Momentos de inercia

Nos ocuparemos ahora de estudiar otras características geométricas de la sección y que como dependen del cuadrado de la distancia, se las denomina en general momentos segundos de superficie o momentos de inercia.

Figura 17 Momentos segundos de superficie



Con la notación de la Figura 17 definiremos:

Momentos de inercia de la sección respecto de los ejes z e y respectivamente a las cantidades J_z y J_y dadas por¹:

$$\begin{aligned} J_z &= \int_A y^2 dA & (6) \\ J_y &= \int_A z^2 dA \end{aligned}$$

Momento de inercia polar de la sección respecto de O:

$$J_p = \int_A r^2 dA \quad (7)$$

Momento de inercia centrífugo respecto de z e y:

$$J_{zy} = \int_A zy dA \quad (8)$$

Es fácil observar las propiedades:

- J_z y J_y siempre serán cantidades positivas pues z e y están elevadas al cuadrado.
- Observando la Figura 17 se puede deducir en función de la relación entre r, z e y que $J_p = J_z + J_y$
- El momento de inercia centrífugo puede ser positivo, negativo o nulo.
- Los momentos de inercia J_z , J_y y J_p , nos dan una idea de cómo se distribuye el material alrededor de z, y y O respectivamente. Cuanto mayor es J, el material está más alejado de los ejes de referencia.

¹En alguna literatura también se los encuentra como I_z e I_y

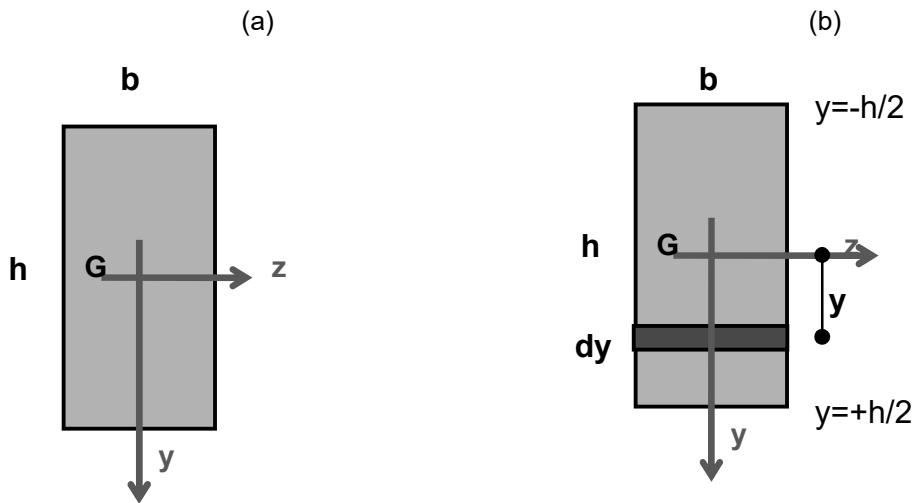
- Si alguno de los ejes z o y son ejes de simetría, el momento centrífugo J_{zy} será nulo porque a una coordenada positiva, le corresponderá otra negativa de igual valor.

Ejemplo 4-3:

Calcular los momentos de inercia del rectángulo de base b y altura h de respecto de los ejes baricéntricos z e y indicados en la Figura 18^a.

Los ejes baricéntricos se encuentran fácilmente por ser una sección con dos ejes de simetría

Figura 18 Sección rectangular



Aplicando la fórmula (6) para J_z tenemos según la Figura 18b:

$$J_z = \int_A y^2 dA = \int_{-h/2}^{+h/2} y^2 b dy = \frac{by^3}{3} \Big|_{-h/2}^{+h/2}$$

$$J_z = \frac{bh^3}{12}$$

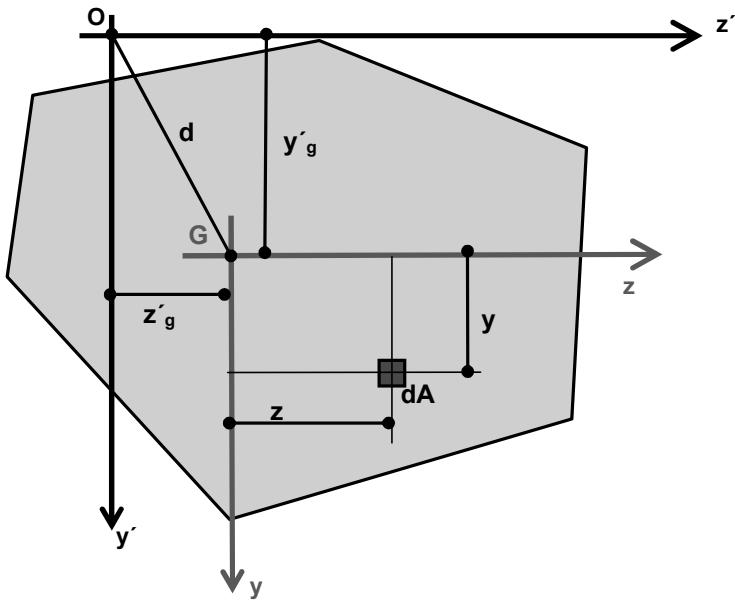
Análogamente

$$J_y = \frac{hb^3}{12}$$

2B.4. Teorema de Steiner

El teorema de Steiner es una herramienta muy importante para el cálculo de los momentos de inercia de secciones que se puedan descomponer en secciones de resolución conocida. El teorema relaciona los momentos de inercia de una sección respecto de dos ejes cualquiera, con los momentos de inercia respecto a dos ejes baricéntricos paralelos a los anteriores.

Figura 19 Teorema de Steiner



Sean según la Figura 19 las siguientes características:

O-z'-y': Un sistema de ejes z y y' con origen O cualquiera

A: Una sección cualquiera

G: Baricentro del Área A

G-z-y: Un sistema de ejes baricéntrico paralelo al O-z'y'

y'g: Coordenada según y' de G

z'g: Coordenada según z' de G

Jz: Momento de inercia respecto al eje z baricéntrico

Jy: Momento de inercia respecto al eje y baricéntrico

Jz': Momento de inercia respecto al eje z'

Jy': Momento de inercia respecto al eje y'

Podemos escribir:

$$J_{z'} = \int_A y'^2 dA = \int_A (y + y'_g)^2 dA = \int_A (y^2 + 2yy'_g + y'^2_g) dA$$

$$J_{z'} = \int_A y^2 dA + y'^2_g \int_A dA + y'^2_g \int_A dA$$

La integral del segundo término del miembro de la derecha es nula por tratarse de un eje baricéntrico, por lo tanto:

$$J_{z'} = J_z + y'^2_g A \quad (9)$$

Por lo tanto, podemos enunciar el resultado de la ecuación (9) que es el teorema de Steiner del siguiente modo

Enunciado del teorema de Steiner:

El momento de inercia de una sección respecto de un eje cualquiera no baricéntrico es igual al momento de inercia de esa sección respecto de un eje baricéntrico, paralelo al primero, más el producto del área de la sección por el cuadrado de la distancia que hay entre ambos ejes.

Generalizando el resultado hallado para el eje y' y para el momento de inercia polar, podemos escribir las siguientes tres relaciones:

$$J_{Z'} = J_Z + y_g'^2 A$$

$$J_{Y'} = J_Y + z_g'^2 A \quad (10)$$

$$J_O = J_G + d^2 A$$

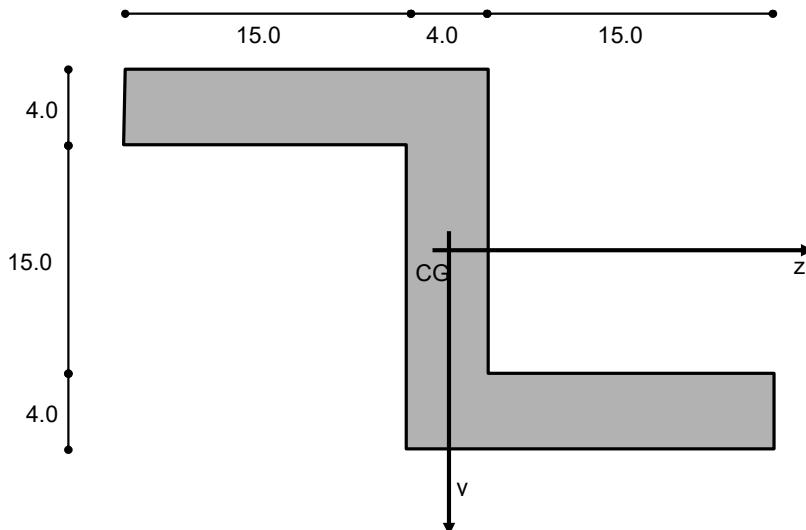
Este teorema nos permite entonces calcular el momento de inercia respecto de cualquier eje, conociendo el momento de inercia baricéntrico y las distancias entre ambos ejes.

Su principal aplicación es el cálculo de momentos de inercia de secciones que se pueden descomponer en formas simples de momentos de inercia conocidos respecto de sus propios baricentros.

Ejemplo 4-4:

Calcular los momentos de inercia J_Z , J_Y y J_{ZY} de la sección indicada en la Figura 20, con las medidas indicadas en cm.

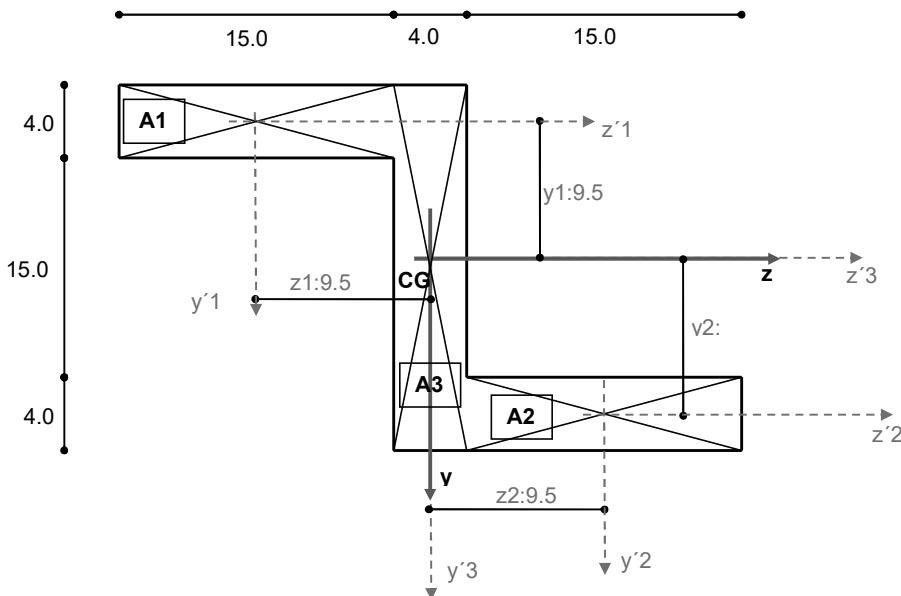
Figura 20 Sección transversal compuesta por formas elementales



El primer paso consiste en obtener los ejes baricéntricos, lo que en esta sección resulta sencillo por la simetría de sus formas.

A continuación, dividimos la sección en formas elementales de inercias y baricentros conocidos, para aplicar el teorema de Steiner, como vemos en la Figura 21.

Figura 21 Descomposición en figuras regulares



Seguidamente calculamos las áreas elementales A_i y los respectivos momentos de inercia J_{zi} y J_{yi} respecto a sus ejes baricéntricos $y_i z_i$:

Se determina para cada una de las secciones en que se dividió el área total los siguientes parámetros:

A_i : Área de cada sección

$A_1:A_2: 15x4: \quad 60.0 \text{ cm}^2$

$A_3: \quad 23x4: \quad 92.0 \text{ cm}^2$

Las coordenadas y_i y z_i de los baricentros propios de cada sección en que se dividió el área respecto del sistema de ejes baricéntrico $z-y$:

$$\begin{array}{lll} z_1: & -9.5 \text{ cm} & z_2: & +9.5 \text{ cm} & z_3: & 0.0 \\ y_1: & +9.5 \text{ cm} & y_2: & -9.5 \text{ cm} & y_3: & 0.0 \end{array}$$

Los momentos de inercia de cada sección individual respecto a sus propios ejes baricéntricos:

$$J_{z1}:J_{z2}: \quad 15x4^3/12: \quad 80.0 \text{ cm}^4$$

$$J_{z3}: \quad 4x23^3/12: \quad 4055.6 \text{ cm}^4$$

$$J_{y1}:J_{y2}: \quad 4x15^3/12: \quad 1125.0 \text{ cm}^4$$

$$J_{y3}: \quad 23x4^3/12: \quad 122.6 \text{ cm}^4$$

Calculamos a continuación los momentos de inercia de cada una de las secciones respecto a los ejes baricéntricos de la sección compuesta $z-y$ aplicando el teorema de Steiner en cada caso, por aplicación de las fórmulas (10) que repetimos aquí para cada eje:

$$J_z = \sum (J_{z_i} + A_i y_i^2)$$

Con esta fórmula construimos la Tabla 1 que nos ayuda para el cálculo:

Tabla 1 Cálculo de Jz

Elemento	Jz _i (cm ⁴)	A _i (cm ²)	y _i (cm)	A _i y _i ² (cm ⁴)	Jz _i +A _i y _i ² (cm ⁴)
A1	80.0	60.0	9.5	5415.0	5495.0
A2	80.0	60.0	-9.5	5415.0	5495.0
A3	4055.6	92.0	0.0	0.0	4055.6
Jz(cm ⁴)					15045.6

Análogamente procedemos para calcular el Jy y el Jzy, teniendo en cuenta que para este último los Jz_iy_i para cada eje propio son nulos porque son ejes de simetría de cada área A_i. Así construimos la Tabla 2 y la Tabla 3.

$$Jy = \sum (Jy_i + A_i z_i^2)$$

Tabla 2 Cálculo de Jy

Elemento	Jy _i (cm ⁴)	A _i (cm ²)	z _i (cm)	A _i z _i ² (cm ⁴)	Jy _i +A _i z _i ² (cm ⁴)
A1	1125.0	60.0	-9.5	5415.0	6540.0
A2	1125.0	60.0	9.5	5415.0	6540.0
A3	122.6	92.0	0.0	0.0	122.6
Jy(cm ⁴)					13202.6

$$Jzy = \sum (Jzy_i + A_i y_i z_i)$$

Tabla 3 Cálculo de Jzy

Elemento	Jzy _i (cm ⁴)	A _i (cm ²)	z _i (cm)	y _i (cm)	A _i z _i y _i (cm ⁴)	Jzy _i +A _i z _i y _i (cm ⁴)
A1	0.0	60.0	-9.5	9.5	-5415.0	-5415.0
A2	0.0	60.0	9.5	-9.5	-5415.0	-5415.0
A3	0.0	92.0	0.0	0.0	0.0	0.0
Jzy(cm ⁴)						-10830.0

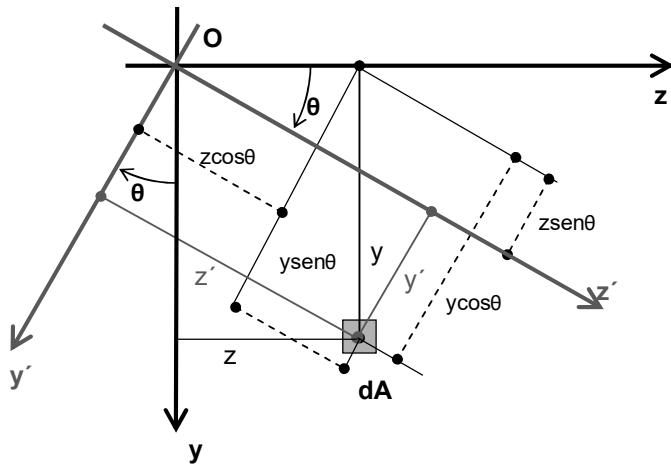
Observando cada tabla podemos ver la influencia de cada término en el valor final de la inercia.

2B.5. Ejes principales de inercia

Supongamos que conocemos los momentos de inercia Jy, Jz y Jzy respecto de dos ejes y-z respectivamente, y deseamos conocer los momentos de inercia Jy', Jz' y Jz'y' respecto de dos ejes y' z' rotados un ángulo Θ respecto de los primeros.

Veamos un elemento dA que coordenadas tiene en el sistema y'z' conocidas las coordenadas en el sistema yz, analizando la Figura 22.

Figura 22 Transformación de coordenadas



$$z' = +z \cdot \cos \theta + y \cdot \sin \theta$$

$$y' = -z \cdot \sin \theta + y \cdot \cos \theta$$

Calculemos ahora $J_{z'}$, J_y y $J_{zy'}$ aplicando la definición y reemplazando las coordenadas y' z' por sus expresiones en el sistema z - y

$$J_{z'} = \int_A y'^2 dA = \int_A (y \cos \theta - z \sin \theta)^2 dA = \cos^2 \theta \int_A y^2 dA + \sin^2 \theta \int_A z^2 dA - 2 \sin \theta \cos \theta \int_A yz dA$$

$$J_{z'} = J_z \cos^2 \theta + J_y \sin^2 \theta - J_{zy} 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$$

$$\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

$$2 \sin \theta \cos \theta = \sin 2\theta$$

$$J_{z'} = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} J_z + \frac{1 - \cos 2\theta}{2} J_y - J_{zy} \sin 2\theta$$

$$J_{z'} = \frac{J_z + J_y}{2} + \frac{J_z - J_y}{2} \cos 2\theta - J_{zy} \sin 2\theta \quad (11)$$

Análogamente se puede obtener para J_y y $J_{zy'}$:

$$J_y' = \frac{J_z + J_y}{2} - \frac{J_z - J_y}{2} \cos 2\theta - J_{zy} \sin 2\theta \quad (12)$$

$$J_{zy'} = \frac{J_z - J_y}{2} \sin 2\theta + J_{zy} \cos 2\theta \quad (13)$$

Las fórmulas (11), (12) y (13) nos permiten calcular los momentos de inercia en un sistema $z'y'$, rotado un ángulo Θ con relación a un sistema zy , conocidos los momentos de inercia respecto a este último sistema.

Encontremos el valor del ángulo Θ , que extremizan los valores de $J_{z'}$ y J_y' . Para esto calculemos los valores que anulan las derivadas de (11) y (12) respecto a Θ .

$$\frac{dJ_{z'}}{d\theta} = -(J_z - J_y) \sin 2\theta_{01} - 2J_{zy} \cos 2\theta_{01} = 0 \quad (14)$$

$$\frac{dJ_y'}{d\theta} = (J_z - J_y) \sin 2\theta_{02} + 2J_{zy} \cos 2\theta_{02} = 0$$

Obtenemos los valores de θ_{01} y θ_{02} :

$$\operatorname{tg}2\theta_{01} = \operatorname{tg}2\theta_{02} = -\frac{2J_{zy}}{J_z - J_y} \quad (15)$$

Como ambas tangentes son iguales, los ángulos dobles difieren en π radianes, en consecuencia, los ejes según los cuales los momentos de inercia pasan por un extremo son perpendiculares entre sí y se denominan ejes principales de inercia.

Los momentos de inercia respecto de los ejes principales se denominan momentos principales de inercia y son los valores extremos que puede tener la sección.

Calculemos ahora esos momentos J_z' y J_y' eliminando la variable Θ , y reemplazándola por lo obtenido en la fórmula (15).

De la ecuación (15):

$$J_z - J_y = -\frac{2J_{zy}}{\operatorname{tg}2\theta_0}$$

Reemplazando en (11) y (12):

$$J_{z'} = \frac{J_z + J_y}{2} - \frac{2J_{zy}}{\operatorname{tg}2\theta_0} \cos 2\theta_0 - J_{zy} \operatorname{sen} 2\theta_0$$

$$J_{y'} = \frac{J_z + J_y}{2} + \frac{2J_{zy}}{\operatorname{tg}2\theta_0} \cos 2\theta_0 + J_{zy} \operatorname{sen} 2\theta_0$$

$$J_{z'} = \frac{J_z + J_y}{2} - \frac{2J_{zy}}{\operatorname{sen} 2\theta_0}$$

$$J_{y'} = \frac{J_z + J_y}{2} + \frac{2J_{zy}}{\operatorname{sen} 2\theta_0}$$

Teniendo en cuenta que:

$$\frac{1}{\operatorname{sen} 2\theta_0} = \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\theta_0}}{\operatorname{tg} 2\theta_0}$$

Reemplazando en esta última la ecuación (15):

$$\frac{1}{\operatorname{sen} 2\theta_0} = \frac{1}{2J_{zy}} \sqrt{(J_z - J_y)^2 + 4J_{zy}^2}$$

Finalmente obtenemos los valores extremos de J_z y J_y principales:

$$\begin{aligned} J_{z\text{ppal}} &= \frac{J_z + J_y}{2} + \sqrt{\frac{(J_z - J_y)^2}{2} + J_{zy}^2} \\ J_{y\text{ppal}} &= \frac{J_z + J_y}{2} - \sqrt{\frac{(J_z - J_y)^2}{2} + J_{zy}^2} \end{aligned} \quad (17)$$

Las ecuaciones (17) nos permiten calcular los momentos principales de inercia conocidos los momentos de inercia respecto a un sistema ortogonal cualquiera. La ecuación (15) nos permite conocer la orientación del sistema de ejes principales respecto al sistema que sirvió de base al cálculo.

Como ya lo hemos señalado, el producto de inercia J_{zy} puede tener signo positivo o negativo pues es el producto de dos coordenadas. Encontremos en particular cuando el producto de inercia se anula, igualando a 0 la ecuación (13):

$$J_{z'y'} = \frac{J_z - J_y}{2} \sin 2\theta_0 + J_{zy} \cos 2\theta_0 = 0 \quad (18)$$

$$\tan 2\theta_0 = -\frac{2J_{zy}}{J_z - J_y}$$

Podemos extraer las siguientes importantes conclusiones:

En coincidencia de los ejes principales el producto de inercia es nulo.

Como el producto de inercia respecto de los ejes de simetría es nulo, los ejes de simetría cuando existen son ejes principales de inercia.

Ejemplo 4-5

Calcular los ejes principales y los momentos de inercia principales del ejercicio 4-4

Datos $J_z = 15046 \text{ cm}^4$

$J_y = 13203 \text{ cm}^4$

$J_{zy} = -10830 \text{ cm}^4$

$\tan 2\theta_0 = 11.75$ entonces $\theta_{o1} = 85.1^\circ$ y $\theta_{o2} = 265.1^\circ$

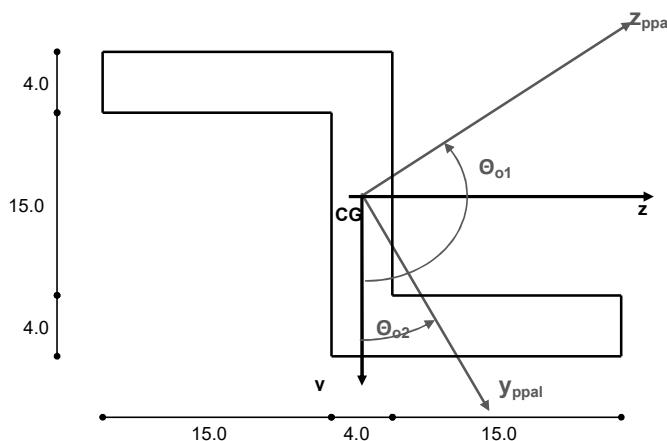
Las direcciones principales son: $\theta_{o1} = 42.6^\circ$ y $\theta_{o2} = 132.5^\circ$ medidas de y a z (terna derecha)

Los momentos principales se obtienen por aplicación de las ecuaciones (17):

$$J_{z\text{ppal}} = 24993 \text{ cm}^4$$

$$J_{y\text{ppal}} = 3255 \text{ cm}^4$$

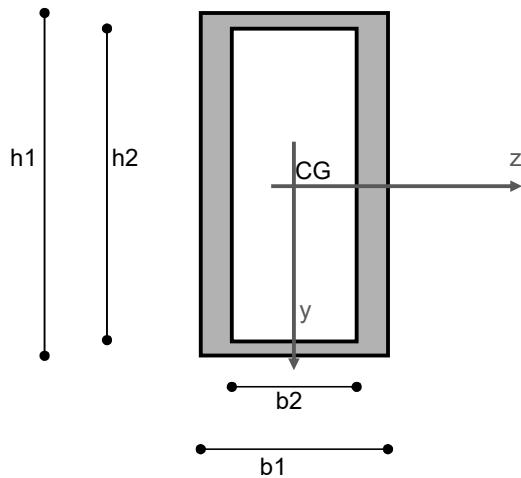
Figura 23 Ejes principales



Ejemplo 4-6

Calcular los momentos de inercia principales de la sección hueca de la Figura 24.

Figura 24 Sección hueca



Como los ejes z e y son ejes de simetría, son entonces ejes principales.

Podemos considerar esta figura como la diferencia de una sección maciza exterior de lados b_1 y h_1 , y una sección maciza interior de lados b_2 y h_2 . Esto es así porque cada una de las dos secciones supuestas comparten los mismos ejes (sus baricentros coinciden).

Entonces en este caso podemos decir que:

$$J_z = J_{z\text{ext}} - J_{z\text{int}}$$

$$J_y = J_{y\text{ext}} - J_{y\text{int}}$$

$$J_z = \frac{b_1 h_1^3}{12} - \frac{b_2 h_2^3}{12}$$

$$J_y = \frac{h_1 b_1^3}{12} - \frac{h_2 b_2^3}{12}$$