UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA MATANZA

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA E INVESTIGACIONES TECNOLÓGICAS

ANÁLISIS MATEMÁTICO I

Guía de Trabajos Prácticos 2022

Coordinadora: Dra. Betina Williner

Datos generales de la asignatura Análisis Matemático I

Código: 1023

Carreras: Ingeniería Informática, Ingeniería Civil, Ingeniería Industrial, Ingeniería Electrónica e Ingeniería Mecánica

Régimen de cursado: cuatrimestral

Carga horaria: 8 horas semanales

Propósitos generales

Se pretende que el alumno logre:

- Comprender definiciones, propiedades, enunciados y demostraciones de teoremas referentes a los temas del Cálculo en una variable.
- Desarrollar estrategias generales para el abordaje de problemas relacionados con el Cálculo, para luego hacerlas extensivas a problemas referidos a otras disciplinas.
- Adquirir habilidades, técnicas, métodos, actitudes y valores que le posibiliten llevar a cabo un estudio independiente con capacidad de reflexionar sobres las fortalezas y debilidades en su aprendizaje.
- Trabajar en equipo, valorando la contribución de todos sus integrantes y la suya propia para el logro del objetivo buscado.
- Conocer y utilizar herramientas informáticas relacionadas con la asignatura y aquellas vinculadas con la búsqueda de información y con la comunicación con los docentes y los demás compañeros de clase.

Programa analítico

Unidad 1: Funciones
Definición de función. Dominio. Imagen. Representación de funciones en diferentes registros. Las funciones como modelos. Ceros. Signo de una función. Funciones par e impar. Función acotada. Funciones algebraicas y trascendentes, sus gráficos y características principales. Álgebra de funciones. Desplazamientos horizontales y verticales. Alargamientos, contracciones y reflexiones. Composición de funciones. Función inversa.

Unidad 2: Límite funcional
Distancia entre dos números reales. Entorno y entorno reducido. Límite finito. Definición. Interpretación gráfica. Límites laterales. Unicidad del límite. Propiedades del límite. Teorema de intercalación.
Infinitésimos. Definición. Álgebra de infinitésimos. Propiedades. Comparación de infinitésimos. Límites infinitos. Límites de variable infinita. Límites infinitos de variable infinita. Cálculo de límites. Indeterminaciones. Ecuaciones de las asíntotas a curva plana.
Continuidad. Función continua en un punto. Continuidad en un intervalo abierto y en un intervalo cerrado. Álgebra de funciones continuas. Propiedades de las funciones

continuas Discontinuidades. Clasificación. Teorema del valor intermedio, Teorema de Bolzano.

<u>Unidad 3:</u> Derivada de una función. Diferencial
Razón media en un intervalo e instantánea en un punto. Significado geométrico y físico. Derivada de una función en un punto. La derivada como una función. Recta tangente y normal. Derivadas laterales. Continuidad de una función derivable. Cálculo de la derivada de funciones elementales. Reglas de derivación. Derivada de una función compuesta. Derivada de funciones inversas. Derivada de funciones definidas en forma implícita. Derivación logarítmica. Derivadas sucesivas.
Aproximación lineal. Diferencial de una función. Definición e interpretación geométrica. Relación con el incremento. Álgebra de funciones diferenciables.

<u>Unidad 4:</u> Aplicaciones del Cálculo Diferencial
Teoremas de funciones derivables. Regla de L`Hopital. Intervalos de crecimiento y de decrecimiento de una función y su relación con el signo de la derivada primera. Máximos y mínimos relativos y absolutos. Condición necesaria de extremo relativo. Determinación de máximos y mínimos. Concavidad positiva o negativa. Condiciones para su determinación. Punto de inflexión. Definición. Condiciones para su existencia. Trazado de curvas.

<u>Unidad 5:</u> Polinomios de Taylor.
Ordenes de contacto entre dos curvas planas. Expresión de un polinomio por sus derivadas en un punto. Polinomio de Taylor y de Mac Laurin. Término complementario.

<u>Unidad 6:</u> Primitivas o integrales indefinidas
Primitiva o integral indefinida de una función. Definición. Constante de integración. Propiedades. Integración inmediata. Integración por sustitución, por partes, por fracciones simples, trigonométricas.

<u>Unidad 7:</u> Integral definida

Noción de área en el plano. La integral definida. Propiedades. Teorema del valor medio del cálculo integral. Teorema Fundamental del Cálculo. Enunciado y justificación. Área entre curvas. Aplicaciones de la integral definida. Definición de integrales impropias de primera y segunda especie. Convergencia.

<u>Unidad 8:</u> Sucesiones y series numéricas
Sucesiones. Definición. Sucesiones convergentes, divergentes y oscilantes. Propiedades. Sucesiones monótonas y acotadas. Serie. Definición. Suma de una serie. Condición necesaria de convergencia. Series geométricas y series p. Criterios para series de términos positivos.

<u>Unidad transversal:</u> Resolución de Actividades
Esta unidad será transversal a las enunciadas anteriormente, ya que sus contenidos provienen de aquellas. Se pretende que el alumno:

- Desarrolle habilidades matemáticas para resolver ejercicios y/o problemas en forma autónoma.

- Trabaje en grupo en la resolución de problemas, fundamentando sus decisiones y aceptando las de los demás miembros con un espíritu crítico y de respeto.

Régimen de acreditación

Según Resolución 01/99 Departamento de Ingeniería e Investigaciones Tecnológicas

1. Se requiere una asistencia a clase no inferior al 75%. El incumplimiento de este requisito coloca al alumno en condición de **ausente**.

2. Durante el cuatrimestre, en algunas de las clases, se trabaja con ejercitación que pertenecen a la Unidad Transversal de Resolución de Actividades (desde ahora UT) que el alumno deberá resolver y entregar al docente en **equipos de 4 personas establecidos por el profesor**. Se establecen tres actividades antes del primer examen parcial y tres posteriores al mismo y anteriores al segundo examen parcial. Cada una de estas actividades tiene su evaluación propia y NO se recuperan. El alumno puede aprobar la UT mediante:

- Las actividades realizadas en clase (**dos actividades deben estar aprobadas por parcial**)
- Dos ejercicios realizados en el momento que rinde el parcial correspondiente. En este caso el alumno deberá tener al menos **uno** bien para poder aprobar la UT. Si los dos ejercicios están desaprobados el parcial se considera **desaprobado**.

3. Parcial: la materia cuenta con dos parciales.

- Primer parcial: abarca las unidades 1,2 y 3 completas junto a los temas "Teoremas de funciones derivables" y, si el tiempo lo permite, "Regla de L'Hopital" de la unidad 4.
- El segundo parcial posee dos partes: abarca los siguientes temas: de la unidad 4 "Estudio de funciones", y en su totalidad unidades 5, 6 y 7, sucesiones numéricas de la unidad 8.
- Cada parcial se considera aprobado si su calificación es mayor o igual a 4 puntos, caso contrario se considera aplazado. El alumno tiene opción de recuperar **un** parcial. La calificación asignada al examen recuperatorio, cualquiera sea el resultado, anula y remplaza a todos los efectos, a la obtenida en el examen parcial que se recupera. La condición de UT aprobada vale también para el recuperatorio.

4. La asignatura se considera:

Aprobada cuando las notas del primer y segundo parcial sean mayores o iguales a 7 puntos. En este caso el alumno promociona la materia y su nota final será el promedio de las notas mencionadas. Si el promedio no es un número entero, el docente, de acuerdo con el rendimiento del alumno en la cursada, sumará o restará 0,5 puntos.

Cursada cuando las notas del primer y/o segundo parcial sean superiores o iguales a 4 puntos e inferiores o iguales a 6 puntos. En este caso la materia se considera cursada y el alumno para acreditarla deberá rendir un examen final.

Reprobada cuando la nota del primer o segundo parcial sean menores a 4 puntos (aplazo). En este caso el alumno deberá recursar la asignatura o rendir Libre.

Ausente cuando el alumno no posea una de las dos notas se considerará ausente.

5. Si el alumno se presenta en condición de **LIBRE**, el examen final contempla TODOS los temas del programa en forma teórica y práctica y la UT.

Bibliografía recomendada

Se recomienda la siguiente bibliografía:

- Williner, B (2016). *Apuntes de clase. Análisis Matemático I.* UNLaM. Disponible en su versión digital en la plataforma MIEL.
- Stewart, J. (2008). *Cálculo. Trascendentes tempranas*. (6ta. edición). Cengage Learning Editores.
- Thomas, G., Weir, M., Hass, J. y Giordano, J. (2005). *Cálculo, una variable.* (11va. edición). Pearson Educación.
- Purcell, E., Varberg, D. y Ringdon, S. (2007). *Cálculo diferencial e integral.* (9na edición). México: Pearson Educación.
- Larson, R., Hostetler, R. y Edwars, B. (2002). *Cálculo I.* (7ma edición). Madrid: Ediciones Pirámide.
- Liethold, L. (1992). *El cálculo con geometría analítica.* México: Harla, Harper y Row. Editorial.
- Piskunov, N. (1977). *Cálculo Diferencial e Integral (3ra. ed.).* Buenos Aires: Fondo Editorial Sudamérica.
- Sadosky, M. y Guber, R. (2004). *Elementos de cálculo diferencial e integral.* (22. Ed). Buenos Aires: Librería y Editorial Alsina.
- Apostol, Tom. (1984). *Calculus. Volumen I.* España: Editorial Reverté.

Guía de Trabajos Prácticos

La guía consta de dos partes:

- **Guía de trabajos prácticos:** con ejercicios para resolver en clase y mediante trabajo independiente por parte del alumno. En cada una de las unidades hay ejercicios de la Unidad Transversal de Resolución de Problemas.
- **Apunte de funciones y fórmulas importantes**.

Materiales en MIEL

En la plataforma MIEL de la Universidad se encuentran los siguientes materiales importantes para este cuatrimestre:

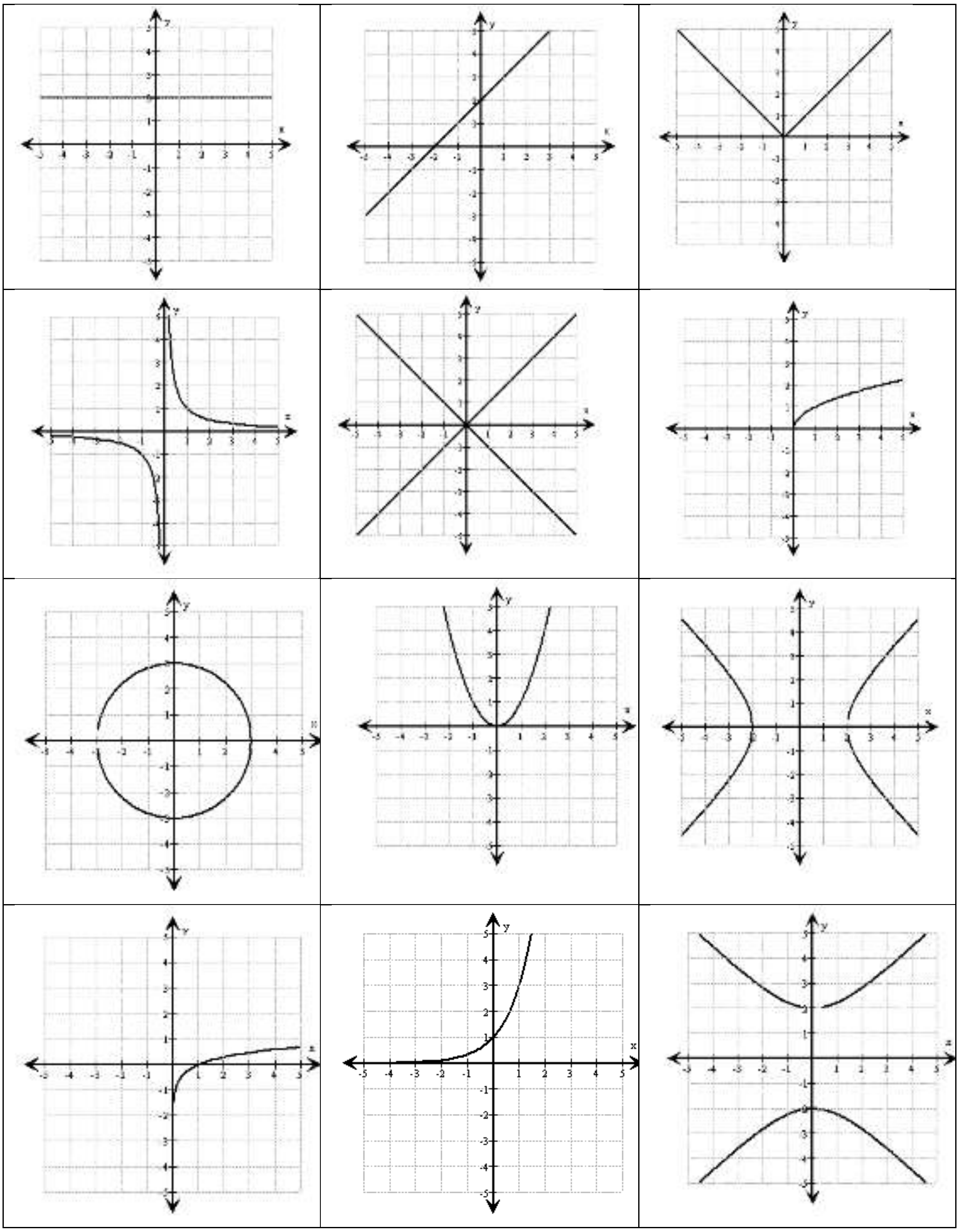
- Guía de Trabajos prácticos y apuntes de clase
- Tareas de cada unidad
- Bibliografía
- Resúmenes de las unidades
- Autoevaluaciones
- Material de repaso
- Exámenes parciales y finales (algunos resueltos)

Equipo docente por orden alfabético

Algieri Claudia
Bentaverri, Pablo
Favieri, Adriana
Hamilton, Carina
Lastra Emmanuel
Lopresti Lucas
López Lucas
Masseroli, Mónica
Perez Villamil, Cristina
Polero, María Laura
Polo, Fabián
Reale, Marcela
Romano, Romina
Ruiz, Alejandro
Sartor, Norma
Scorzo, Roxana
Suelves, Nadia
Williner, Betina

TRABAJO PRÁCTICO Nº 1
FUNCIONES

1. Indicar si cada gráfico es o no función de R en R, en caso de no serlo indicar, cuando sea posible, en qué condiciones sí lo es. Determinar dominio e imagen en cada caso:



2. A partir de una hoja rectangular de metal de 12 cm de ancho y un metro de largo se desea construir una canaleta para desagüe de lluvia, se doblan hacia arriba dos lados de manera que queden perpendiculares a la hoja. Hacer una tabla indicando el volumen de la canaleta cuando se cortan lados de 1,5 cm; 2 cm y 3,5 cm y 4,5 cm. ¿Cuántos cm se deben doblar para que la canaleta tenga capacidad máxima?

3. Para construir una caja sin tapa se cortan cuadrados de x cm de lado en las cuatro esquinas de un cartón de 24cm x 32cm, y se doblan los lados. Expresar el volumen $V(x)$ ¿Cuál es el dominio de la función?

4. Obtener la ecuación de la recta que relaciona la temperatura C en grados Celsius con la temperatura F en grados Farenheit, sabiendo que el agua se hiela a 0º C (32º F) y hierve a 100º C (212º F).

a) ¿Cuántos grados Celsius son -10º F?
b) ¿Cuántos grados Farenheit son -10º C?
c) ¿Cuántos grados Celsius se corresponden con 0º F?
d) Calcular el cambio de temperatura ΔF en los intervalos [0,10], [10,20] (en grados Celsius). Interpretar gráficamente.

5. Encontrar una fórmula para la función descrita y dar su dominio:

a) Un rectángulo tiene un perímetro de 20 m, expresar el área en función de la longitud de uno de sus lados.
b) Un rectángulo tiene un área de 16 m^2, expresar el perímetro en función de la longitud de uno de sus lados.
c) Expresar el área de un triángulo equilátero en función de la longitud de su lado.

6. Calcular el dominio de las siguientes funciones:

a) $y=-\sqrt{2}x^4-3x+\frac{1}{7}x^2-2$	b) $y=(x^2-3)^{-4}$	c) $y=\frac{x^5-2x+5}{x^2-3x+2}$
d) $y=\frac{\lvert x-1\rvert}{x+2}$	e) $y=\sqrt{x+2}$	f) $y=\sqrt{\frac{1}{2x+1}-2}$
g) $y=\frac{2x}{\sqrt{x^2-4}}$	h) $y=\frac{x+3}{\lvert 3x+2\rvert}+\frac{1}{\sqrt[4]{x+1}}$	i) $y=\frac{x^3+5x^2-6x}{x\sqrt[3]{x^2-1}}$
j) $y=\frac{\sqrt{3x-4}}{\sqrt{x+1}}$	k) $y=\sqrt{\frac{3x-4}{x+1}}$	

7. Determinar el dominio, imagen, las intersecciones con los ejes, intervalos de positividad y negatividad. Graficar:

a) $f(x)=x^2+2x-8$	b) $f(x)=\lvert x\rvert-2$	c) $f(x)=x^3-x$

8. Representar las siguientes funciones definidas por partes. Determinar dominio, imagen, y ceros de cada una.

a) $f(x)=\begin{cases} x+2 & x\le -1 \\ -x & -1<x\le 1 \\ 3x-4 & 1<x\le 3 \\ 2 & x>3 \end{cases}$	b) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-6x+9}{x-3} & x\ne 3 \\ 4 & x=3 \end{cases}$
c) $f(x)=\begin{cases} \lvert x+1/2\rvert & x\le 2 \\ \lvert x-4\rvert & x>2 \end{cases}$	d) $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x+4} & x\ge -3 \\ x+3 & -4\le x<-3 \\ \sqrt[3]{x}+3 & x<-4 \end{cases}$

9. El beneficio B esperado por una empresa en los próximos 8 años viene indicado por la siguiente función

$$B(t)=\begin{cases} -t^2+7t & 0\le t\le 5 \\ 10 & 5<t\le 8 \end{cases}$$

El tiempo t está expresado en años y el beneficio B en millones de euros. ¿En qué momento la empresa tiene mayor beneficio? ¿Cuándo se espera un beneficio de 11.25 millones de euros? ¿Qué le sucedió a la empresa, en cuanto a sus beneficios, después del quinto año?

10. La tabla siguiente muestra la distancia (d) de los planetas al sol (la unidad de distancia tomada es la distancia de la Tierra al Sol) y el tiempo de traslación alrededor del sol en años terrestres (T).

Planeta	Venus	Tierra	Marte	Júpiter	Saturno
d	0.723	1	1.523	5.203	9.541
T	0.615	1	1.881	11.861	29.457

a) ¿Cuál es la variable independiente y cuál la dependiente?
b) ¿Qué interpretación se le da, por ejemplo, a los datos que aparecen en la columna del planeta Marte?
c) Indicar si los puntos dados verifican la tercera ley de Kepler: el cuadrado del período de traslación de un planeta es proporcional al cubo de su distancia al sol.
d) Sabiendo que Mercurio tiene un período de traslación de 88 días ¿cuál es su distancia al sol? Verificar el dato obtenido buscando por internet u otra fuente de información.

11. Indicar si cada una de las siguientes funciones es par impar o ninguna de las dos:

a) $y=x^2-4$	b) $y=x^2+x-2$	c) $f(x)=\lvert x+1\rvert-\lvert x-1\rvert$
d) $y=x+1$	e) $y=\sqrt[3]{x}$	f) $y=\sqrt[3]{x^2}$
g) $y=x-3x^3$	h) $y=\dfrac{1-x}{1+x}$	i) $y=\dfrac{1}{\lvert x\rvert}$
j) $y=2^x+2^{-x}$		

12.

a) Si el punto (5;3) está sobre la gráfica de una función par, ¿cuál otro punto debe estar sobre la gráfica?
b) Si el punto (5;3) está sobre la gráfica de una función impar, ¿cuál otro punto debe estar sobre la gráfica?
c) Si f es una función par ¿tienen alguna simetría las siguientes funciones: g(x) = f(x) + c y h(x) = f(x-c)? donde c es un número real cualquiera. Analizar el caso en que f sea impar.

13. Graficar cada una de las siguientes funciones homográficas. Indicar dominio e imagen de cada una.

a) $f(x)=\dfrac{-2x+3}{x+4}$	b) $f(x)=\dfrac{3x+1}{4-x}$	c) $f(x)=\dfrac{x}{x-2}$	d) $f(x)=\dfrac{2x-6}{4x+1}$

14. Dada la función exponencial $f: R \to R \,/\, f(x)=a^x$, graficarla para a = 2, 1/2, 3, 1/3. Extraer principales características para base a > 1 y para base 0 < a < 1

15. ¿Existe una función exponencial de la forma $f(x)=C\,a^x$ tal que pase por los puntos (-1,6) y por (3,3/8)? Si la respuesta es afirmativa hallarla y graficarla.

16. Dada la función logaritmo $f: D_f \to R \,/\, f(x)=\log_a x$ graficarla para a = 2; 1/2; 3; 1/3. Extraer principales características para base a > 1 y para base 0 < a < 1.

17. Una aproximación para la presión p en mm Hg a una altura h en km sobre el nivel del mar, está dada por la ecuación $p = 760\,e^{-0,144h}$. Encontrar la altura para la cual la presión es la mitad de la presión a nivel del mar.

18. Una población de aves cuenta inicialmente con 50 individuos y se triplica cada dos años.

a) ¿Cuál es el tamaño de la población después de 6 años?
b) ¿Cuál es el tamaño de la población después de t años?
c) Graficar la función de población y estimar el tiempo para que la población llegue a 1000 aves.

19. En los años 1996, 1997 y 1998 Chile tenía una población aproximada de 14,419; 14,622 y 14,822 millones de habitantes respectivamente. Según el censo de 2002 tiene una población de aproximadamente 15,5 millones de habitantes y está creciendo a una tasa anual de 1,3%. El crecimiento de una población se modela mediante una función exponencial de la forma:

$P(t)=P_0.e^{k.t}$

Donde P_0 es la población inicial (instante t = 0), k es la tasa de crecimiento en porcentaje anual, t el tiempo medido en años.

a) ¿Qué población había en Chile en 2012 si la tasa de crecimiento se mantenía?
b) ¿Qué población había en Chile en 2012 si la tasa de crecimiento se reducía a la mitad?

c) Buscar en internet la población de Chile en 2012 y decidir cuál modelo fue más aproximado.

20. Dada $f(x)=|x-1|$, grafícala. Usando f representar en un mismo gráfico las funciones $r(x)$; $h(x)$, efectuando las transformaciones necesarias:

a) $\begin{cases} r(x)=f(x)+1 \\ h(x)=f(x)-2 \end{cases}$	b) $\begin{cases} r(x)=f(x+1) \\ h(x)=f(x-2) \end{cases}$	c) $\begin{cases} r(x)=2f(x) \\ h(x)=f(2x) \end{cases}$
d) $\begin{cases} r(x)=f(-x) \\ h(x)=-f(x) \end{cases}$		

21. A partir de la gráfica de $y=f(x)=\ln x$, graficar aproximadamente:

i) $y=\ln(x-2)$	ii) $y=\ln x+2$	iii) $y=-\ln x$
iv) $y=\ln(-x)$	v) $y=\ln\|x\|$	vi) $y=\|\ln x\|$

22. A partir de la gráfica de $y=senx$ encuentra la ecuación de la gráfica que resulta de

a) Desplazarla 3 unidades hacia arriba.
b) Desplazarla $\pi/2$ unidades a la derecha.
c) Disminuir su periodo a la mitad.
d) Aumentar su amplitud al doble.

Explicar por qué todas estas funciones y la original son funciones acotadas. Graficar.

23. La presión P (en milímetros de mercurio) contra las paredes de los vasos sanguíneos de un paciente está modelada por $P(t)=100-20\cos\left(\frac{8\pi}{3}t\right)$ donde t se mide en segundos.

a) ¿Cuál es el período del modelo? ¿Qué nos dice el período acerca de esta situación?
b) ¿Cuál es la amplitud del modelo? ¿Qué nos dice acerca de esta situación?
c) Si un período de este modelo es equivalente a una pulsación cardíaca, ¿cuál es el pulso del paciente?

24. De las funciones graficadas en el ejercicio 1) indica cuáles son biyectivas.

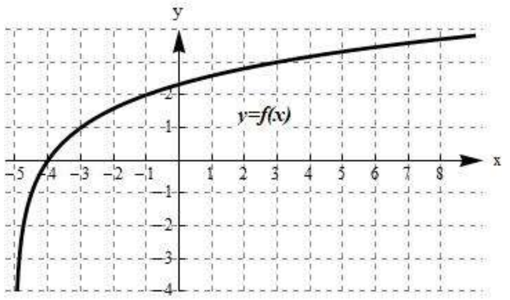
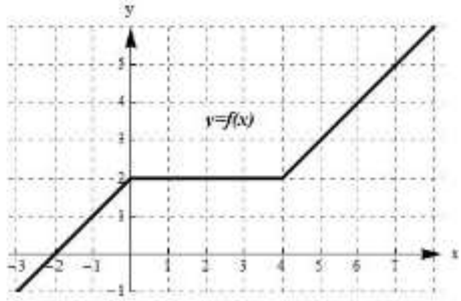
25. Se da una función f por medio de una tabla de valores, una gráfica, una fórmula, o una descripción verbal. Determinar si f es biyectiva en cada caso.

a)

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	1,5	2,1	3,6	5,3	2,8	2,1

b)

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	1	2	4	8	16	32

c) $f: R \to R / y = f(x)$ 	d) $f: R \to R / y = f(x)$ 

e) $f: \Re_0^+ \to \Re_0^+ / f(x) = \sqrt{x}$ f) $g: \Re \to \Re / f(x) = |x|$

g) $f(t)$ es la altura a la que se encuentra una pelota de fútbol americano después de la patada inicial.

h) $f(t)$ es la altura de una persona a la edad t.

26. Hallar la función inversa de las funciones dadas (estudiar primero condición de biyectividad). Hacer un gráfico de la función con su inversa en el mismo sistema de ejes:

a) $f(x) = (x-1)^3 + 8$	b) $f(x) = e^{2x} + 1$	c) $f(x) = 3 - \sqrt{x+5}$
d) $f(x) = \log_3(2x-4)$	e) $f(x) = 2x^2 - 1$	f) $f(x) = 2sen(3x)$
g) $f(x) = \dfrac{3-x}{x-1}$	h) $f(x) = \begin{cases} 2x+3 & x \geq 2 \\ x-1 & x < 2 \end{cases}$	i) $y = \begin{cases} x^2+2 & x \geq 0 \\ -x^2+2 & x < 0 \end{cases}$

27. Si se ingiere una pastilla de 100 mg contra el asma y no hay nada del medicamento en el cuerpo cuando se toma por primera vez, la cantidad total en el torrente sanguíneo después de t minutos está dada por $A(t) = 100(1-(0.9)^t)$ para valores de t entre 0 y 10 minutos (A(t) está dada en mg)

a) ¿Cuál es el dominio y la imagen de la función bajo el contexto del problema?
b) ¿Qué significa A^{-1} en el contexto del problema? Hallarla.
c) Determinar los minutos necesarios para que 50 miligramos del fármaco entren en el torrente sanguíneo

28. Un resorte mide 7 cm cuando colgamos de él 10g, y mide 13 cm cuando colgamos 80 g. Escribe la ecuación lineal que liga la longitud L con el peso P: L = L(P)

a) ¿Cuál es la longitud del resorte cuando no se cuelga peso?
b) ¿Cuál es la variación de longitud cada 10 g?
c) Teniendo en cuenta que el resorte empieza a deformarse y perder elasticidad cuando se alarga 5 veces su longitud inicial, ¿cuál es el dominio de definición de la función L(P)?
d) Hallar la función inversa y explicar qué significa bajo el contexto del problema.

29. Con el objetivo de analizar la variación del volumen de cierto gas al variar su presión, o sea de hallar f tal que V = f (P), se realiza con dicho gas y a temperatura constante una experiencia en la que se obtiene la siguiente tabla de valores.

P(atm)	1	2	4	6	8	10	12
V(lts)	30.00	14.87	7.45	5.00	3.76	3.00	2.5

a) Encontrar una fórmula para una función que aproxime los datos anteriores sabiendo que las variables son inversamente proporcionales. Hallar dominio e imagen.
b) ¿Cuál es el volumen del gas para una presión de 11 atm?
c) ¿Se puede expresar la presión en función del volumen? Si la respuesta es afirmativa realizarlo.

30. Determinar si son iguales los siguientes pares de funciones:

a) $f(x) = x+1$ y $g(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$

b) $f(x) = x+1$ y $h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}$

c) La función que se obtiene de expresar el perímetro de un cuadrado de lado L y la función que se obtiene de expresar el costo de L lámparas sabiendo que cada una cuesta 4$.

d) $f : D_f \to R \,/\, f(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)$ $g : D_g \to R \,/\, g(x) = \ln(x+1) - \ln(x-2)$

31. Dadas $f(x) = \sqrt{1+x}$ y $g(x) = \ln(2-x)$, hallar: f + g; f.g y f/g. Indicar el dominio de cada una.

32. Sea $f(x) = \sqrt{16-x}$ y $g(x) = 1/x$ ¿cuál es el dominio de las siguientes funciones? Hallar también su expresión analítica:
a) $f \circ g$
b) $g \circ f$

33. Dadas las funciones $f(x)$; $g(x)$ determinar dominio e imagen de cada una para que existan $f_0 g$ y $g_0 f$ y obtenerlas.

a) $f(x) = \ln x$ $g(x) = x^2 - 9$

b) $f(x) = senx$ $g(x) = x^2$

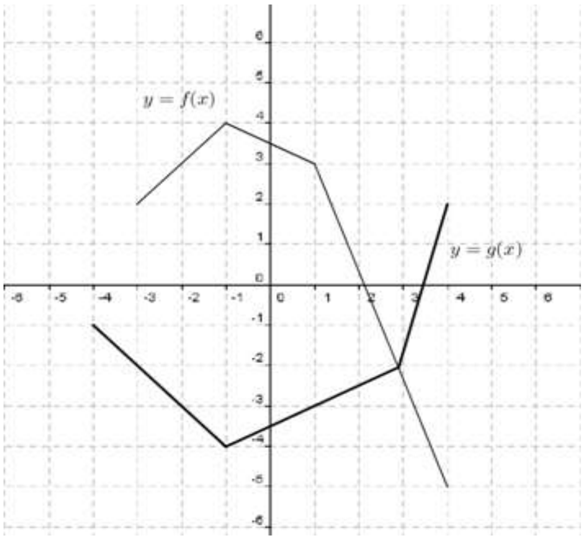
c) $f(x) = \sqrt{x}$ $g(x) = x^2$

d) $f(x) = \sqrt{x-1}$ $g(x) = \ln(4-x)$

34. Sabiendo que el dominio de la función f es [0, 1], hallar el dominio de las siguientes funciones:

$a)\, f(x^2) \qquad b)\, f(\ln x) \qquad c)\, f(2x+3)$

35. Dado el siguiente gráfico evaluar cada una de las expresiones siguientes. Si el resultado no está definido explicar por qué:



$f \circ g(3) \qquad g(f(1)) \qquad g(f(5)) \qquad f \circ g(-3) \qquad g \circ f(-1)$

36. Para algunas de las funciones inversas halladas en el ejercicio 26 verificar que $f \circ f^{-1}(x) = f^{-1} \circ f(x) = x$

37. Representar las relaciones siguientes e indicar qué lugar geométrico representan:

$a)\ \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$	$b)\quad 9x^2+9y^2=36$	$c)\quad \frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y-5)^2}{25}=1$
$d)\frac{(x+2)^2}{4}-(y+4)^2=1$	$e)\ (x-1)^2+(y+1/2)^2=3$	$f)\quad (y-4)^2-\frac{(x+2)^2}{4}+=1$

38. Determinar si las siguientes proposiciones son Verdaderas o Falsas. Justifica:

a) Si $f(x)=mx+b$ entonces Δy = m en intervalos de longitud 1.
b) Si la imagen de una función consta de un solo número, su dominio también consta de un solo número.
c) Si f y g tienen el mismo dominio, entonces f/g tienen también ese dominio.
d) Si cos *s* = cos *t*, entonces s = t.
e) Si f es biyectiva entonces $f^{-1}(x)=\frac{1}{f(x)}$
f) Las rectas $ax+y=c \quad y \quad ax-y=c$ son perpendiculares.

g) La función $f(x)=\dfrac{2x^3+x}{x^2+1}$ es impar.

h) Si $f: R \to R / f(x)=x^2$ y $g: R \to R / g(x)=x^3$ entonces $f_0 g = g_0 f$.

i) Si $x>0$ entonces $(\ln x)^6 = 6.\ln x$

j) La suma de dos funciones pares (con el mismo dominio) es una función par.

k) Si $f(a)=f(b) \Rightarrow a=b$

l) Si f es una función entonces $f(a.x)=a.f(x)$

m) Si f es par entonces $g \circ f$ es par cualquiera sea la función g (si la composición está bien definida)

Respuestas

1.

a) Si es función. $D_f = R; \quad \mathrm{Im}_f = \{2\}$

b) Si es función. $D_f = R; \quad \mathrm{Im}_f = R$

c) Si es función. $D_f = R; \quad \mathrm{Im}_f = [0,+\infty)$

d) No es función. Para que sea función restringimos el conjunto de partida. Es función de la siguiente manera $f : R - \{0\} \to R$. En este caso $\mathrm{Im}_f = R - \{0\}$

e) No es función.

f) No es función. Para que sea función restringimos el conjunto de partida. Es función de tomando $f : [0,+\infty) \to R$. En este caso $\mathrm{Im}_f = [0,+\infty)$

g) No es función

h) Es función. $D_f = R; \quad \mathrm{Im}_f = [0,+\infty)$

i) No es función.

j) No es función. Para que sea función debemos restringir el conjunto de partida y considerar $f : (0,+\infty) \to R$ En este caso $\mathrm{Im}_f = R$

k) Si es función. $D_f = R; \quad \mathrm{Im}_f = (0,+\infty)$

l) No es función

2. Si la canaleta tiene longitud 100 cm tenemos que el volumen está dado por $V(x) = 200x(6-x)$. Se obtiene mayor volumen cuando se cortan 3 cm de cada lado.

3. $V(x) = (24-2x)(32-2x)x = 4(12-x)(16-x)x$ Su dominio es $D_V = (0,12)$

4. $F = \frac{9}{5}C + 32$ a) -23.33°C b) 14°F c) -17.8°C d) 18 °F

5. a) A(x) = x (10-x). $D_A = (0,10)$

b) P (x) = 2 x + 32/ x $D_P = R^{+`}$

c) $A(l) = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2$ $D_A = R^{+`}$

6.

a) $D_f = R$

b) $D_f = R - \{\sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$

c) $D_f = R - \{1,2\}$

d) $D_f = R - \{-2\}$

e) $D_f = [-2,+\infty)$

f) $D_f = (-1/2, -1/4]$

g) $D_f = (-\infty,-2) \cup (2,+\infty)$

h) $D_f = (-1,+\infty) - \{-2/3\}$

i) $D_f = R - \{-1,1,0\}$

j) $D_f = [4/3,+\infty)$

k) $D_f = (-\infty, -1) \cup [4/3, +\infty)$

7. Gráficos ver anexo

a) $D_f = R$; $\operatorname{Im}_f = \left[-9, +\infty\right)$ Intersecciones con los ejes: (0,-8); (-4;0); (2;0);

$I^+ = \left(-\infty, -4\right) \cup (2, +\infty)$ $I^- = (-4, 2)$

b) $D_f = R$, $\operatorname{Im}_f = \left[-2, +\infty\right)$ Intercesiones con los ejes: (0,-2), (-2,0) y (2,0),

$I^+ = \left(-\infty, -2\right) \cup (2, +\infty)$ $I^- = (-2, 2)$

c) $D_f = R$ $\operatorname{Im}_f = R$ Intersecciones con los ejes: (0;0); (1;0); (-1;0).

$I^+ = \left(-1, 0\right) \cup (1, +\infty)$ $I^- = \left(-\infty, -1\right) \cup (0,1)$

8. Ver gráficos en hoja anexo.

a) $D_f = R$ $\operatorname{Im}_f = (-\infty, 5]$ Ceros = {-2, 0, 4/3}

b) $D_f = R$ $\operatorname{Im}_f = R - \{0\}$ Ceros no tiene

c) $D_f = R$ $\operatorname{Im}_f = [0, +\infty)$ Ceros = {-1/2; 4}

d) $D_f = R$ $\operatorname{Im}_f = R$ Cero = {-27}

9. La empresa tiene mayor beneficio en el tercer año. A los dos años y medio y a los cuatro años y medio el beneficio fue de 11.25 millones de euros. A partir del quinto año el beneficio se estabilizó en 10 millones de euros.

10.

a) La variable independiente es la distancia del planeta a la tierra (simbolizada con d) y la variable dependiente el tiempo de traslación alrededor del sol (simbolizada con T)
b) Realizar interpretación
c) Sí la verifican

11. Pares: a) f) i) j) Impares: c) e) g)

12. a) (-5,3) b) (-5,-3)

13.

a) $D_f = R - \left\{-4\right\}$; $\operatorname{Im}_f = R - \left\{-2\right\}$

b) $D_f = R - \left\{4\right\}$; $\operatorname{Im}_f = R - \left\{-3\right\}$

c) $D_f = R - \left\{2\right\}$; $\operatorname{Im}_f = R - \left\{1\right\}$

d) $D_f = R - \left\{-1/4\right\}$; $\operatorname{Im}_f = R - \left\{1/2\right\}$

Ver gráficos en el anexo

15. $y = f(x) = 3.(1/2)^x$

14. 16. Ver anexo

17. 4. 81 km

18.

a) 1350 aves

b) $A : \left[0, +\infty\right) \to R \,/\, A(t) = 50.3^{t/2}$

c) 5 años y 165 días aproximadamente

19. a) 17,652 millones de habitantes b) 16,541 millones de habitantes

20. 21. 22. Ver gráficos en el anexo

23. El período es ¾ segundos, la amplitud es 20 (la presión toma valores entre 80 y 120); el pulso del paciente es de 80 pulsaciones por minuto

24.

a) No inyectiva. Si definimos: $f: R \to \{2\}$ es sobreyectiva.

b) Biyectiva

c) No inyectiva. Si definimos $f: R \to [0, +\infty)$ es sobreyectiva.

d) Inyectiva. Si definimos $f: R-\{0\} \to R-\{0\}$ es sobreyectiva y por lo tanto biyectiva.

e) No es función

f) Inyectiva. Si definimos $f: [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ es sobreyectiva y por lo tanto biyectiva.

g) No es función.

h) No inyectiva. Si definimos $f: R \to [0,+\infty)$ es sobreyectiva.

i) No es función

j) Biyectiva.

k) Inyectiva. Si definimos $f: R \to (0, +\infty)$ es sobreyectiva y por lo tanto biyectiva.

l) no es función

25. No inyectivas: a) d) g) h). Inyectivas: b). Biyectiva: c) e). No inyectiva y no sobreyectiva: f) Sobreyectiva d)

26. Ver en anexo los gráficos.

a) $f: R \to R \,/\, f(x) = (x-1)^3 + 8$ biyectiva. $f^{-1}: R \to R \,/\, f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-8} + 1$

b) $f: R \to (1,+\infty) \,/\, f(x) = e^{2x} + 1$biyectiva. $f^{-1}: (1,+\infty) \to R \,/\, f(x) = \dfrac{\ln(x-1)}{2}$

c) $f: [-5,+\infty) \to (-\infty,3] / f(x) = 3 - \sqrt{x+5}$ biyectiva

$f^{-1}: (-\infty,3] \to [-5,+\infty) / f(x) = (3-x)^2 - 5$

d) $f: (2,+\infty) \to R \,/\, f(x) = \log_3(2x-4)$ biyectiva.

$f^{-1}: R \to (2,+\infty) \,/\, f^{-1}(x) = (3^x + 4)/2$

e) $f: [0,+\infty) \to [-1,+\infty) / f(x) = 2x^2 - 1$ biyectiva

$f^{-1}: [-1,+\infty) \to [0,+\infty) / f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{2}}$

$f: (-\infty,0] \to [-1,+\infty) / f(x) = 2x^2 - 1$ biyect.

$f^{-1}: [-1,+\infty) \to (-\infty,0] / f(x) = -\sqrt{\dfrac{x+1}{2}}$

f) $f: \left[\dfrac{-\pi}{6}, \dfrac{\pi}{6}\right] \to [-2,2] / f(x) = 2sen(3x)$ biyectiva

$f^{-1}: [-2,2] \to \left[\dfrac{-\pi}{6}, \dfrac{\pi}{6}\right] / f(x) = \dfrac{1}{3} arcsen(x/2)$

g) $f: R-\{1\} \to R-\{-1\} \,/\, f(x) = \dfrac{3-x}{x-1}$ biyectiva

$f^{-1}: R-\{-1\} \to R-\{1\} \,/\, f^{-1}(x) = \dfrac{x+3}{x+1}$

h) $f:R\to(-\infty,1)\cup[7,+\infty)$ biyectiva

$$f^{-1}:(-\infty,1)\cup[7,+\infty)\to R\,/\,g^{-1}(x)=\begin{cases}(x-3)/2 & x\geq 7\\ x+1 & x<1\end{cases}$$

i) $h:R\to R\ biyectiva\quad h^{-1}:R\to R\,/\,h^{-1}(x)=\begin{cases}\sqrt{x-2} & x\geq 2\\ -\sqrt{2-x} & x<2\end{cases}$

27. a) El dominio bajo el contexto del problema es [0,10] y la imagen$[0,100(1-0,9^{10})]$

b) $f^{-1}:\left[0,100(1-(0.9)^{10}\right]\to[0,10]\,/\,t(A)=\dfrac{\ln\left(1-\dfrac{A}{100}\right)}{\ln(0.9)}$

La función inversa nos da el tiempo que es necesario que pase para que en el organismo haya t mg de medicamento.
c) $f^{-1}(50)\approx 6.58$ minutos
28. L(P) = 3/35 P + 43/7 a) 43/7 cm b) 6/7 cm c) Dom = [0,860/3] Im=[43/7, 215/7]
29. a) $V:[1,12]\to[2,5;30]\,/\,V(P)=30/P$ b) 2,72 litros c) Si se puede ya que la función es biyectiva. $P:[2,5;30]\to[1,12]\,/\,P=30/V$
30. a) no son iguales, no tienen el mismo dominio. b) son iguales c) no son iguales, no tienen el mismo dominio d) No son iguales porque tienen distinto dominio.
31. $(f+g)(x)=\sqrt{1+x}+\ln(2-x)$ D_{f+g} = [-1,2)

$(f.g)(x)=\sqrt{1+x}.\ln(2-x)$ $D_{f.g}$ = [-1,2)

$$(f/g)(x)=\frac{\sqrt{1+x}}{\ln(2-x)}\qquad D_{f/g}=[-1,2)-\{1\}$$

32. $f\circ g:(-\infty,0)\cup\left[1/16,+\infty\right)\to[0,+\infty)\,/\,f\circ g(x)=\sqrt{16-\dfrac{1}{x}}$

$g\circ f:(-\infty,16)\to R-\{0\}\,/\,g\circ f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{16-x}}$

33.

a) $D_f=R^+\quad I_f=R\quad D_g=R\quad I_g=[-9,+\infty)$

$f\circ g:(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)\to R\,/\,f\circ g(x)=\ln(x^2-9)$

$g\circ f:R^+\to\left[-9,+\infty\right)/\,g\circ f(x)=(\ln x)^2-9$

b) $D_f=R\quad I_f=[-1,1]\quad D_g=R\quad I_g=[0,+\infty)$

$f\circ g:R\to[-1,1]\,/\,f\circ g(x)=sen(x^2)$

$g\circ f:R\to R_0^+\,/\,g\circ f(x)=(senx)^2=sen^2x$

c) $D_f=R_0^+\quad I_f=[0,+\infty)\quad D_g=R\quad I_g=[0,+\infty)\ g\circ f:[0,+\infty)\to R_0^+\,/\,g\circ f(x)=x$

$f\circ g:R\to[0,+\infty)\,/\,f\circ g(x)=|x|$

d) $D_f = [1,+\infty)$ $\quad I_f = [0,+\infty)$ $\quad D_g = (-\infty,4)$ $\quad I_g = R$

$f \circ g : (-\infty, 4-e] \to [0,+\infty) \,/\, f \circ g(x) = \sqrt{\ln(4-x)-1}$

$g \circ f : [1,17) \to R \,/\, g \circ f(x) = \ln(4-\sqrt{x-1})$

34. a) $D = [-1,1]$ b) $D = [1,e]$ c) $D = [-3/2,-1]$

35.

$f \circ g(3) = 3$ $\quad g(f(1)) \cong -2$ $\quad g(f(5))\ no$ $\quad f \circ g(-3) = 3$ $\quad g \circ f(-1) = 2$

37. Ver anexo.

38.

a) V $\Delta y = f(x+1) - f(x) = m(x+1) + b - (mx+b) = m$

b) F. Ejemplo: la recta y =3

c) F Ejemplo: $f : R \to R \,/\, f(x) = x+1$ $\quad g : R \to R \,/\, g(x) = x-2$ $\quad D_{f/g} = R - \{2\}$

d) F. $\cos\frac{\pi}{2} = \cos\frac{3}{2}\pi$ y $\frac{\pi}{2} \neq \frac{3}{2}\pi$

e) F. Ejemplo $f : R \to R \,/\, f(x) = 2x$ $\quad f^{-1} : R \to R \,/\, f^{-1}(x) = \frac{x}{2}$

f) F. Las pendientes de las rectas son: -a y a respectivamente. Salvo en el caso particular en que a=1 o a = -1, las rectas no son perpendiculares.

g) V (Demostrarlo usando la definición de impar)

h) V demostrar;

i) F $(\ln x)^6 \neq \ln x^6$ ya que $\ln x^6 = 6 \ln x$;

j) V demostrar;

k) F Ejemplo: tomemos $f(x) = x^2$; $f(2) = f(-2) \wedge 2 \neq -2$

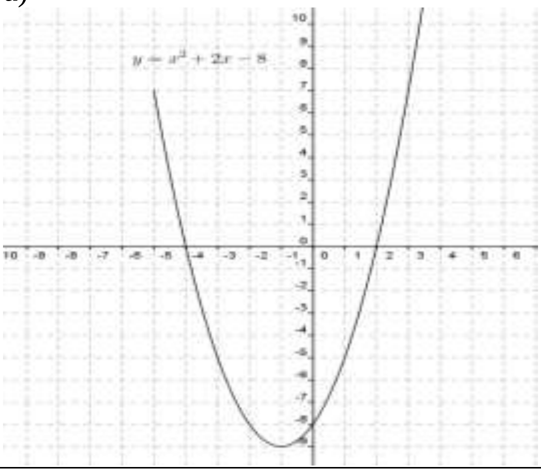
l) F. Ejemplo: $f(x) = senx$
$a \in R\ sen(ax) \neq asenx$

m) Verdadero (demostrar)

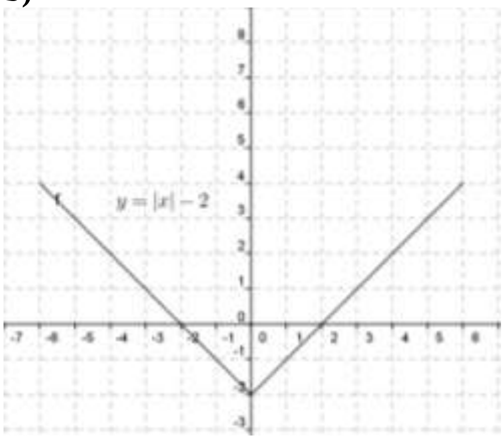
Anexo

Ejercicio 7

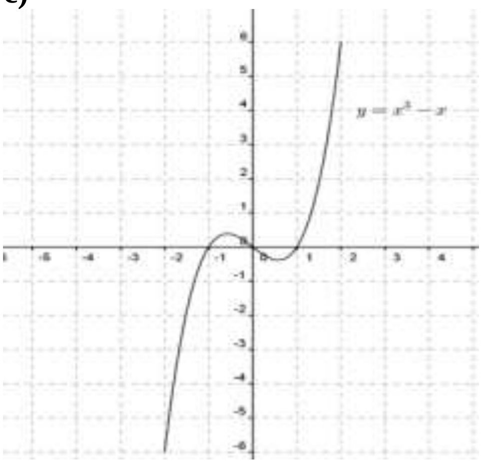
a)



b)

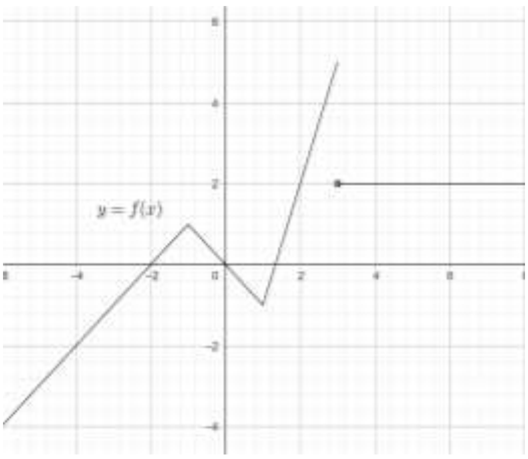


c)

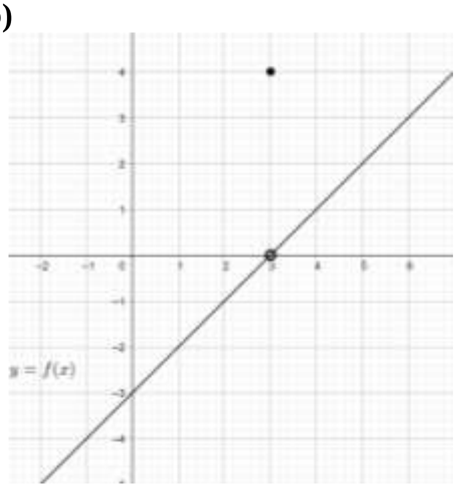


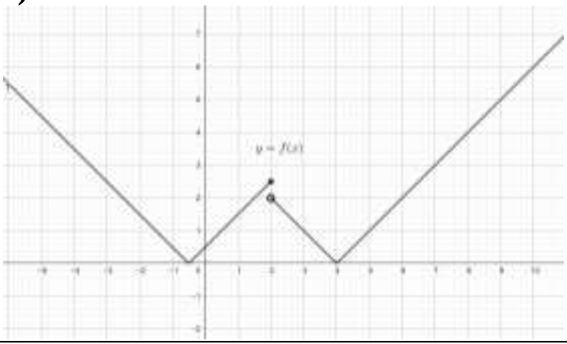
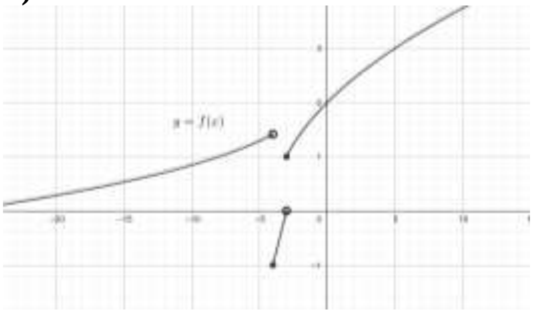
Ejercicio 8

a)

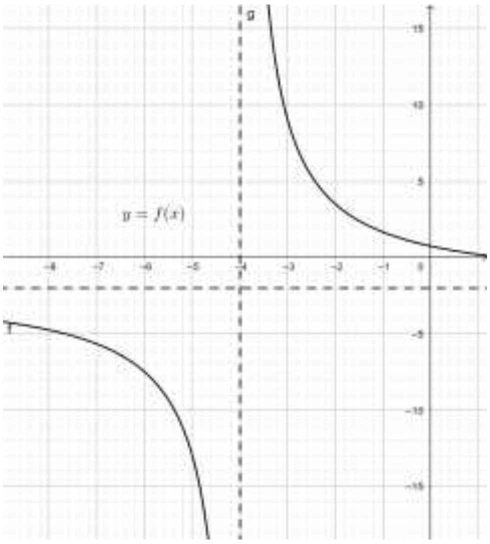
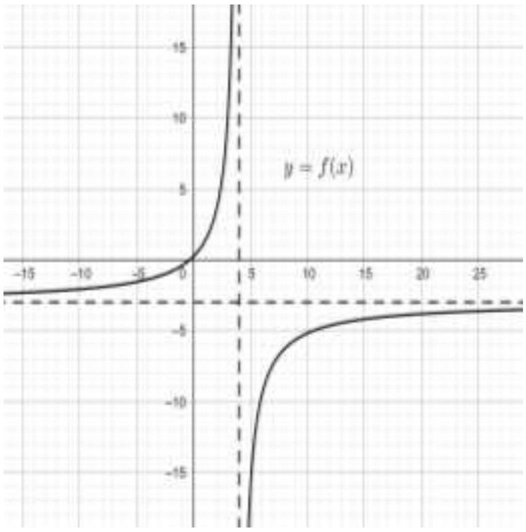
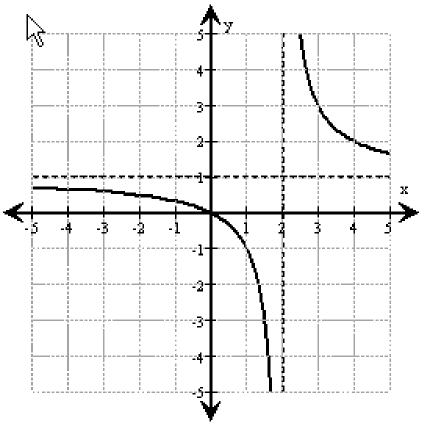
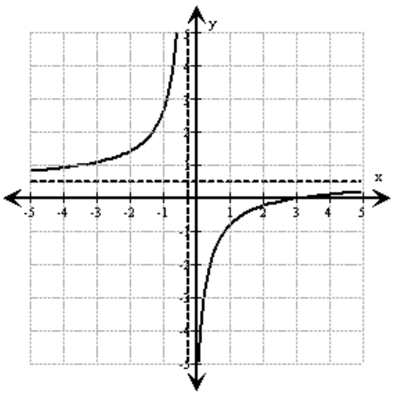


b)

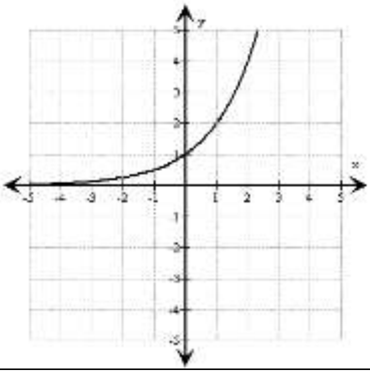
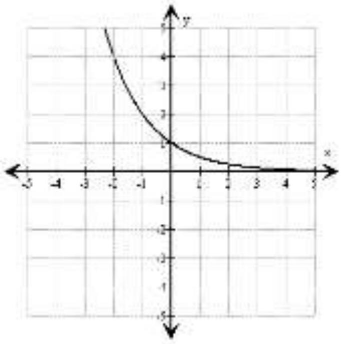
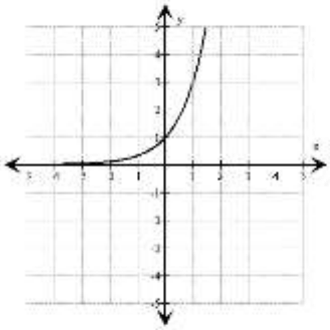
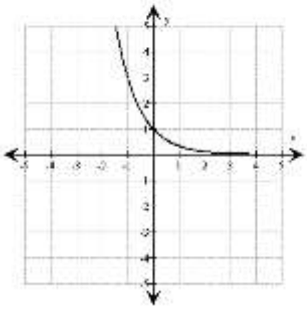
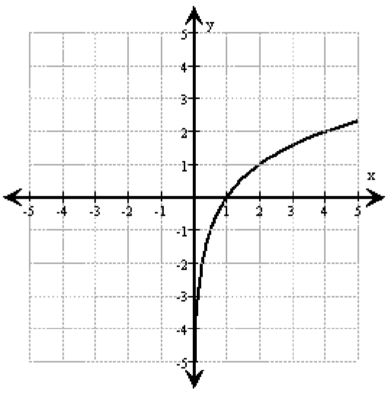
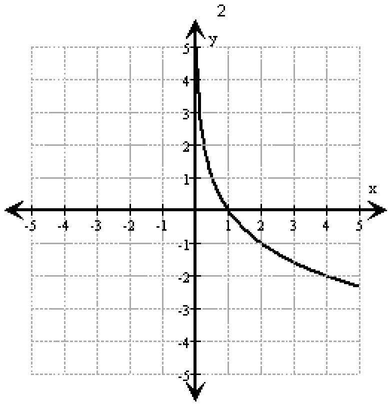
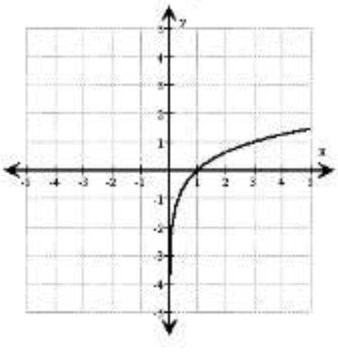
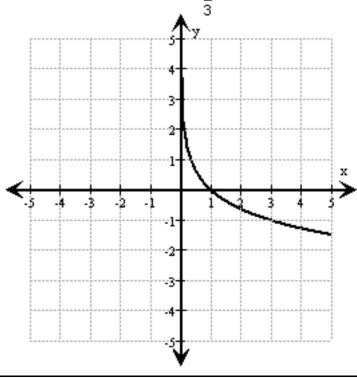


c) 	d) 

Ejercicio 13

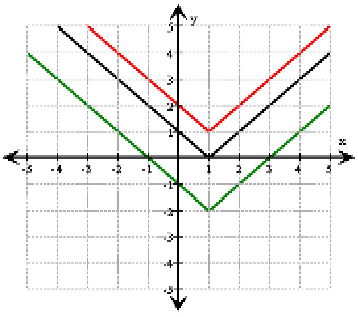
a) 	b) 
c) 	d) 

Ejercicio 14

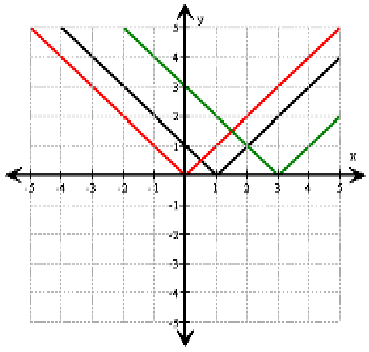
$y = 2^x$ 	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 
$y = 3^x$ 	$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 
Ej 16 $y = \log_2 x$ 	$y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 
$y = \log_3 x$ 	$y = \log_{\frac{1}{3}} x$ 

Ejercicio 20

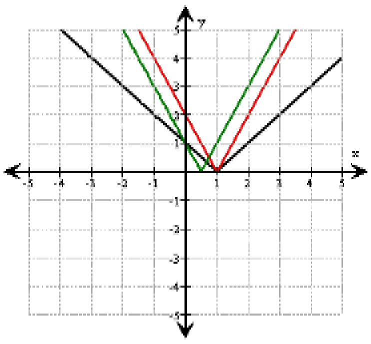
a) $\begin{cases} r(x) = f(x) + 1 = |x - 1| + 1 \\ h(x) = f(x) - 2 = |x - 1| - 2 \end{cases}$



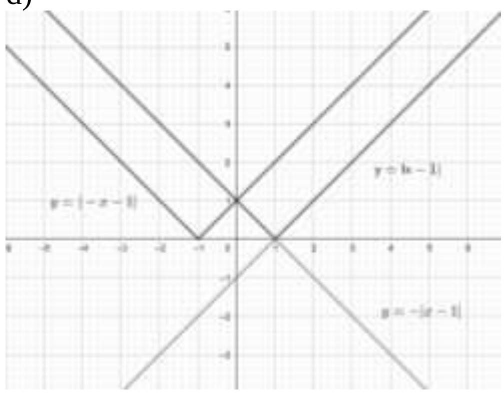
b) $\begin{cases} r(x) = f(x + 1) = |x| \\ h(x) = f(x - 2) = |x - 3| \end{cases}$



c) $\begin{cases} r(x) = 2f(x) = 2|x - 1| \\ h(x) = f(2x) = |2x - 1| \end{cases}$



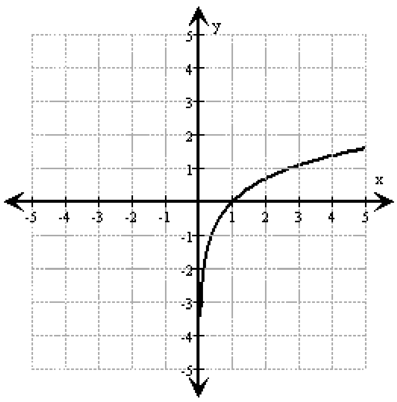
d)



Ejercicio 21

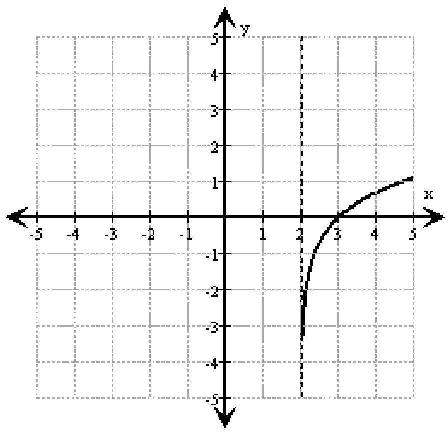
$y = \ln x$

$D = \Re^{+} \quad I = \Re$



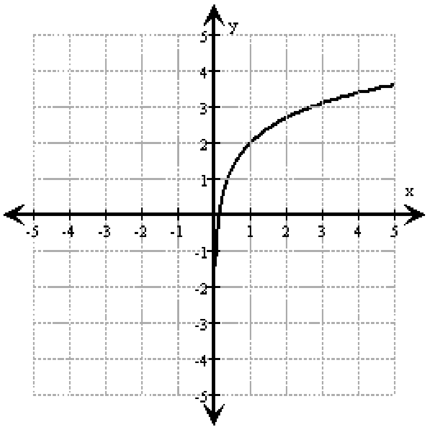
i) $y = \ln(x - 2)$

$D = (-2, +\infty) \quad I = \Re$



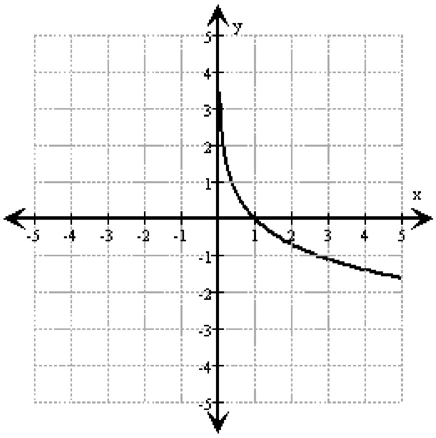
ii) $y = \ln x + 2$

$D = \Re^{+} \quad I = \Re$



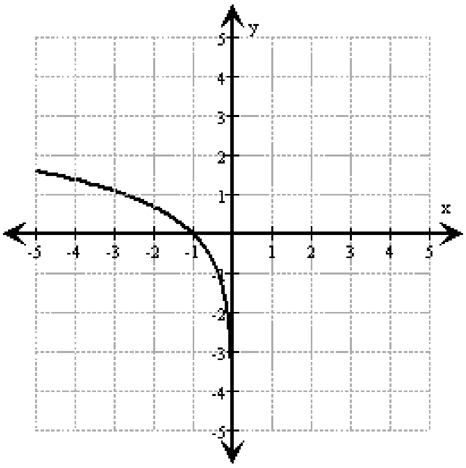
iii) $y = - \ln x$

$D = \Re^{+} \quad I = \Re$



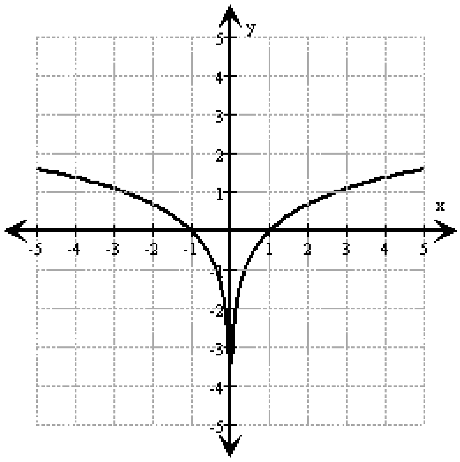
iv) $y = \ln (-x)$

$D = \Re^{-} \quad I = \Re$

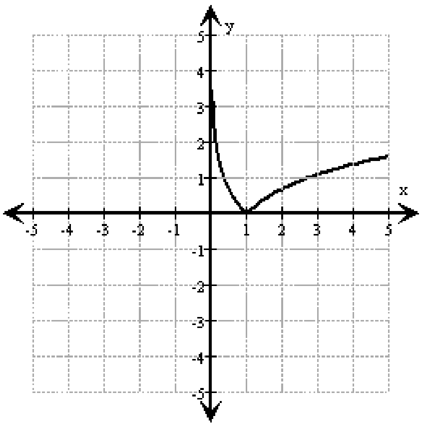


v) $y = \ln |x|$

$D = \Re - \{0\} \quad I = \Re$

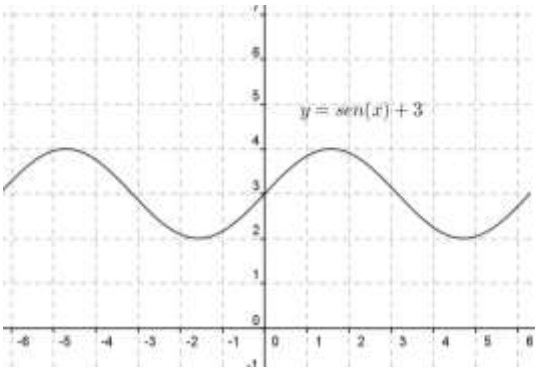


$vi) y = |\ln x| \; D = R^{+} \; I = [0, +\infty)$

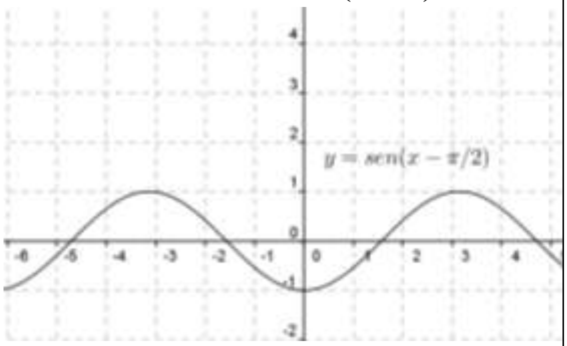


Ejercicio 22

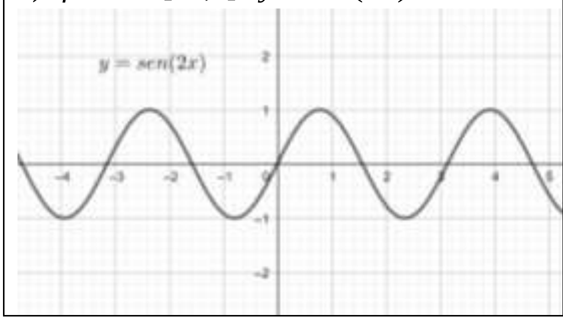
a) $f: R \to [2,4] / y = senx + 3$



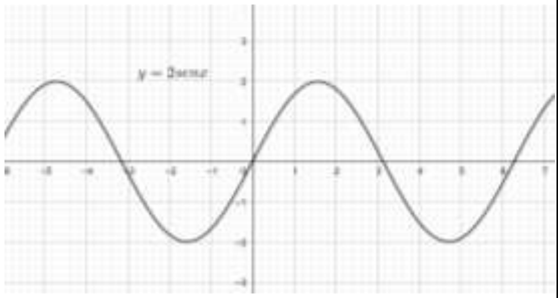
b) $f: R \to [-1,1] / y = sen\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$



c) $f: R \to [-1,1] / y = sen(2x)$

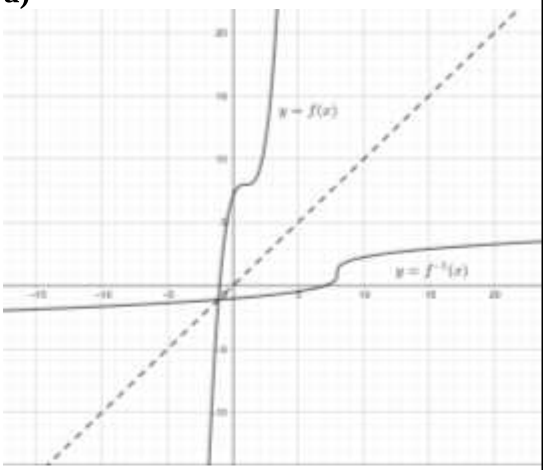


d) $f: R \to [-2,2] / y = 2sen(x)$

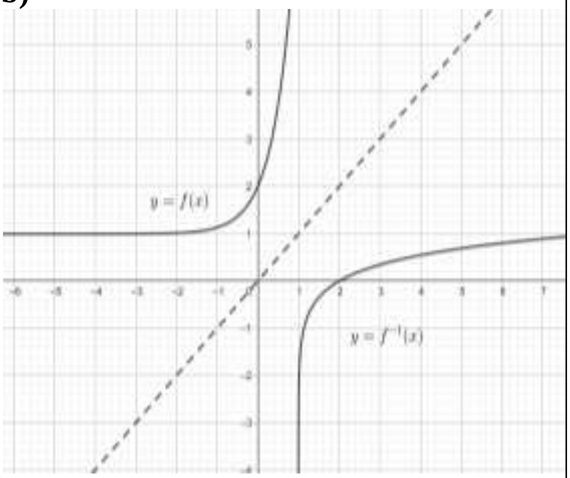


Ejercicio 26

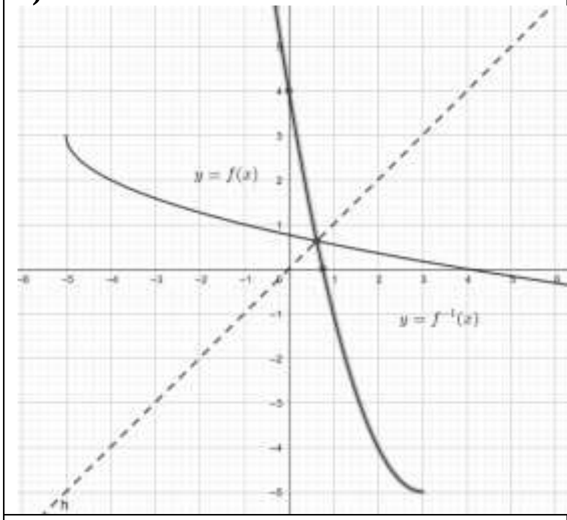
a)



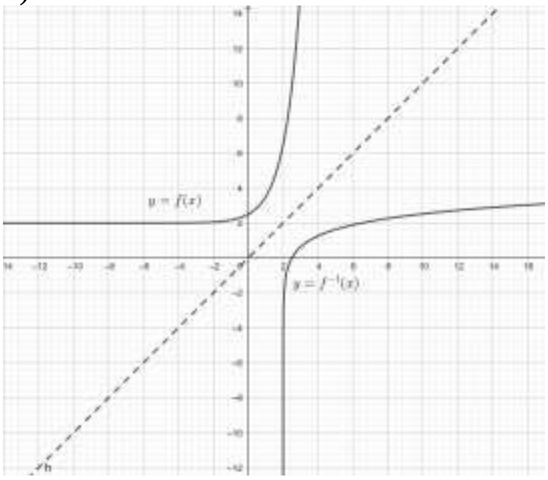
b)



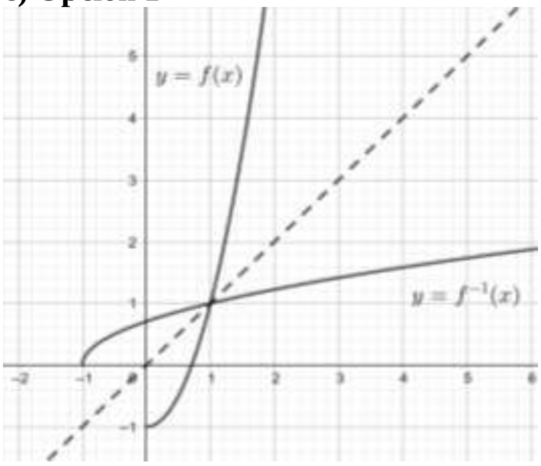
c)



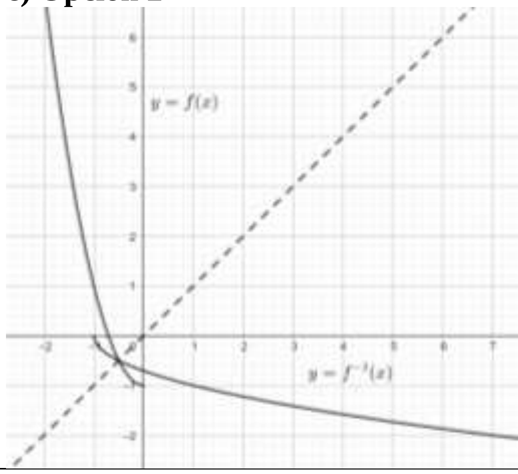
d)



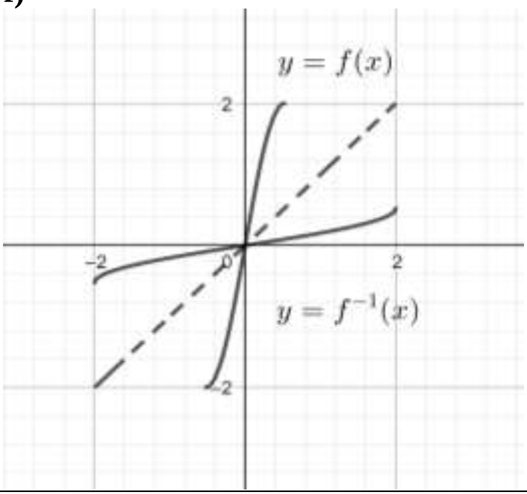
e) Opción 1



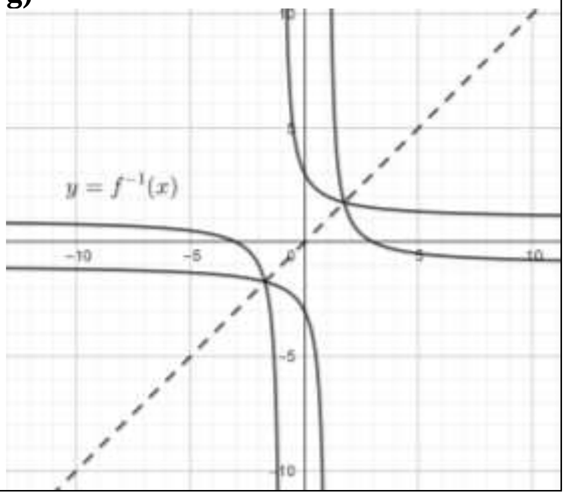
e) Opción 2

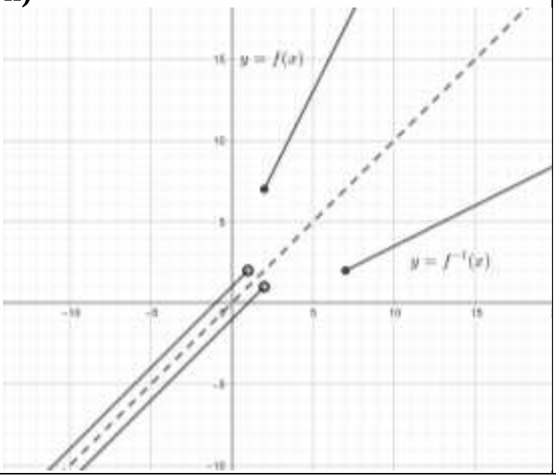
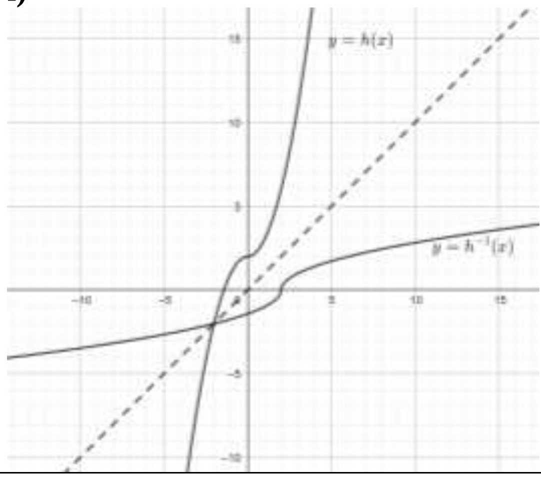


f)

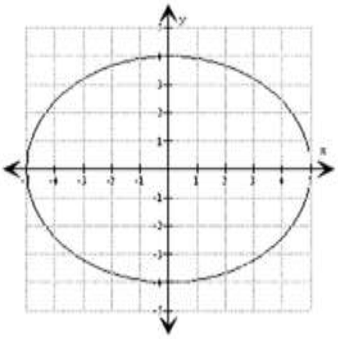
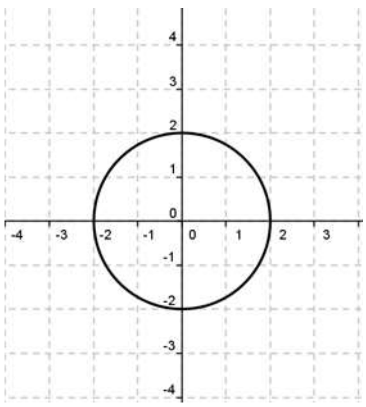
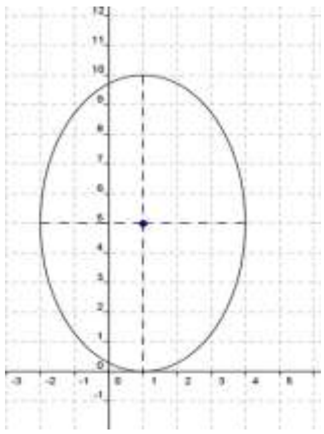
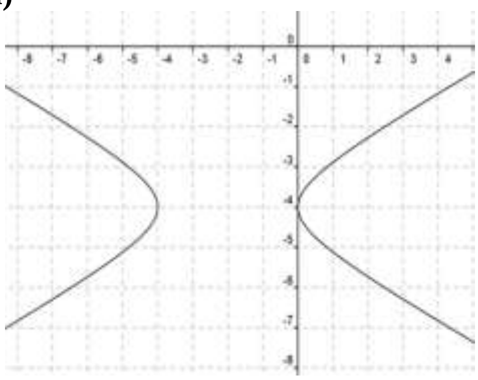


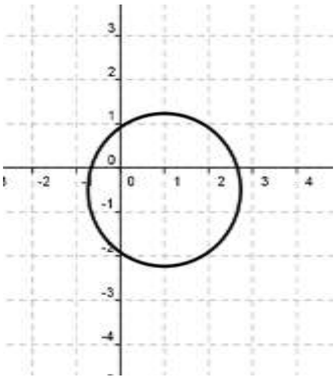
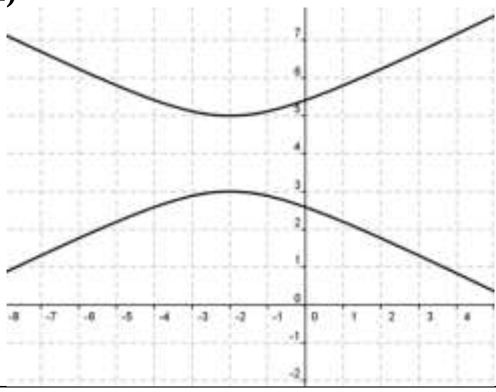
g)



h)	i)
	

Ejercicio 37

a)	b)
i) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ 	
c)	**d)**
	

e)	f)
	

TRABAJO PRÁCTICO Nº 2
LIMITES

1. a) ¿Las siguientes funciones son iguales? Graficar cada una.

$$f : D_f \to R \,/\, f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x - 2}$$

$$g : D_g \to R \,/\, g(x) = x + 3$$

$$h : D_h \to R \,/\, h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2} & x \neq 2 \\ -1 & x = 2 \end{cases}$$

b) ¿Y esta igualdad es verdadera o falsa? $\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} g(x) = \lim_{x \to 2} h(x)$ Justificar y extraer conclusiones.

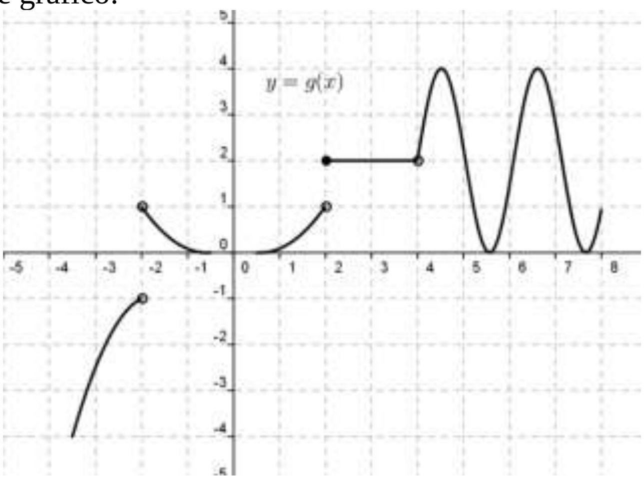
2. Calcular los siguientes límites inmediatos utilizando las propiedades de límite:

a) $\lim_{x \to 2} (x^2 - 3x + 1)$	b) $\lim_{x \to 3} \frac{x}{x^2 + 4}$	c) $\lim_{x \to 1} \sqrt{\frac{x+1}{2x+1}}$
d) $\lim_{x \to 3} \left(\frac{x^2 + 1}{x}\right)^{2x+1}$	e) $\lim_{x \to 0} \frac{7^x - 2^{-x}}{7^x + 2^{-x}}$	f) $\lim_{x \to 3} \ln\left\|x^2 - 4x - 1\right\|$
g) $\lim_{x \to 3} \frac{sen(x-3) + e^{x^2}}{\ln(x-2) + x^3 - 8x - 2}$	h) $\lim_{x \to \pi/2} (x.senx + \cos x)$	

3. Graficar $g : R - \{1\} \to R \,/\, g(x) = \begin{cases} -x + 1 & si\ x < 1 \\ x - 1 & si\ 1 < x < 2 \\ 6 - x^2 & si\ x \geq 2 \end{cases}$

Encontrar cada uno de los siguientes límites o establecer que no existen: $\lim_{x \to 1} g(x)$, $\lim_{x \to 2} g(x)$ $\lim_{x \to 1/4} g(x)$

4. Dado el siguiente gráfico:



Calcular los valores que se indican, si existen:

$\lim\limits_{x\to -2^-} g(x)$	$\lim\limits_{x\to -2^+} g(x)$	$\lim\limits_{x\to -2} g(x)$	$\lim\limits_{x\to 2^-} g(x)$	$\lim\limits_{x\to 2^+} g(x)$	$\lim\limits_{x\to 2} g(x)$
g(-2)	g(2)	$\lim\limits_{x\to 4} g(x)$	g (4)	$\lim\limits_{x\to 0} g(x)$	$\lim\limits_{x\to 5} g(x)$

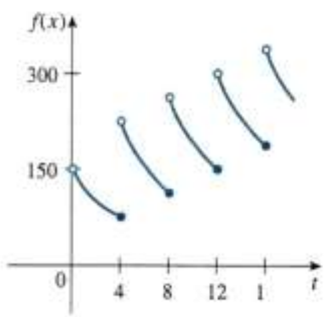
5. Determinar los coeficientes a, b sabiendo que existe el límite cuando $x \to -2 \quad y \quad x \to 1$, y luego graficar

$$f(x) = \begin{cases} bx & x \le -2 \\ x^2 + ax & -2 < x < 1 \\ a - bx & x \ge 1 \end{cases}$$

6. Encontrar cada uno de los siguientes límites o establecer que no existen:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\lvert x-1\rvert}{x-1}$	b) $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{\lvert x-1\rvert}{x-1}$	c) $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{x^2 - \lvert x-1\rvert - 1}{x-1}$	d) $\lim\limits_{x\to 1^+} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\lvert x-1\rvert} \right)$
e) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\lvert x\rvert - x}{x-1}$	f) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x+x^2}{\lvert x\rvert}$	g) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x+x^2}{\lvert x\rvert}$	

7. Un paciente recibe una inyección de 150 mg de una medicina cada 4 horas. En la gráfica que sigue vemos la concentración f(t) de la sustancia en sangre pasadas t horas. Calcular $\lim\limits_{t\to 12^+} f(t) \quad \lim\limits_{t\to 12^-} f(t)$. Explicar el significado de estos límites laterales.



8. Si $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x)) = 2$ y $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-g(x)) = 1$ encontrar $\lim\limits_{x\to a}(f(x).g(x))$

9. Calcular los siguientes límites indeterminados:

a) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x-3}{x^2-9}$	b) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-9x+14}$	c) $\lim\limits_{h\to 0} \frac{(3+h)^{-1}-3^{-1}}{h}$
d) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x-\sqrt{3x-2}}{x^2-4}$	e) $\lim\limits_{t\to 2} \frac{t^3-8}{t^5-32}$	f) $\lim\limits_{x\to 8} \frac{\sqrt{2x}-4}{64-x^2}$

10. Una pelota cae desde una altura de 150 m. Si la distancia recorrida en t segundos se representa por s(t), y se mide en metros, la ley de Galileo establece que $s(t) = 4.9\ t^2$ (no se tiene en cuenta la resistencia del aire).

a) Encontrar el dominio de la función bajo el contexto del problema y graficar.

b) Calcular la velocidad media de la pelota en los intervalos que se indican. Tener en cuenta que $v_m = \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{s(t) - s(3)}{t - 3}$

Intervalo	Velocidad media=$\frac{distancia\ recorrida}{tiempo\ transcurrido}$
[3,4]	
[3,3.1]	
[3,3.05]	
[3,3.01]	
[3,3.001]	

c) Se define velocidad instantánea al límite de las velocidades medias cuando $\Delta t \to 0$. Estimar el valor del límite de acuerdo con los datos completados en la tabla y luego hallarlo en forma exacta. Prestar atención a las unidades con las que se trabaja.

11. ¿Hay un número *a* tal que $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{3x^2 + ax + a + 3}{x^2 + x - 2}$ exista? Si es así encontrar los valores de *a* y del límite.

12. Determinar *a* para que el límite indicado sea un cociente de infinitésimos y calcular el valor de dicho límite:

a) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{(x^2 - 1)(x + 2)}{x^3 - x}$

b) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^3 + x^2 - 6x}{6 + x^3 - 7x}$

13. El costo de producción de x unidades de cierto artículo es $C(x) = 5000 + 10x + 0.05x^2$ (en pesos)

a) Se llama razón de cambio media de C con respecto a x en x = a al cociente $\dfrac{\Delta C}{\Delta x} = \dfrac{C(x) - C(a)}{x - a}$. Calcular la razón de cambio media cuando el nivel de producción cambia de i) x = 100 a x = 105; ii) de x = 100 a x = 101.

b) Calcular la razón instantánea de cambio C con respecto a x cuando a = 100 (se define razón instantánea de cambio al límite de la razón de cambio media cuando x tiende a “a”)

14. Las desigualdades $\dfrac{1}{2} - \dfrac{x^2}{24} < \dfrac{1 - \cos x}{x^2} < \dfrac{1}{2}$ son válidas para todos los valores de *x* cercanos a cero, ¿qué puede decirse de $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$? Justificar la respuesta.

15. Demostrar usando el teorema de intercalación con funciones adecuadas que $\lim_{x\to 0} x^2 sen\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

16. Si se sabe que $x^4 \le f(x) \le x^2 \quad \forall x \in [-1,1]$ y que $x^2 \le f(x) \le x^4 \quad \forall x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$

¿En qué puntos c se sabría automáticamente el valor del límite $\lim_{x\to c} f(x)$? ¿Qué puede decirse del valor del límite en esos puntos?

17. Sea $f: R \to R \,/\, y = f(x)$ tal que $\forall x \in R \wedge x \ne 0$ se cumple:

$x^2 - \frac{3}{4}x^4 \le f(x) \le x^2$. Calcular $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2}$

18. Calcular los siguientes límites trigonométricos:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{sen\, 4x}{3x}$	b) $\lim_{x\to 0} \frac{sen(4x)}{sen(5x)}$	c) $\lim_{x\to 0} \frac{sen^2 3x}{4x^2}$	d) $\lim_{x\to 0} \frac{3}{x \cos ec(2x)}$
e) $\lim_{z\to 0} \frac{1-\cos(3z)}{z^2}$	f) $\lim_{x\to a} \frac{sen(x-a)}{x-a}$	g) $\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{sen2x}{x}\right)^{\frac{tg3x}{x}}$	h) $\lim_{x\to 0} \frac{2senx + 3x\cos x}{3senx - x\cos x}$
i) $\lim_{x\to 1} \frac{tg(x-1)}{\lvert x^2-1\rvert}$	j) $\lim_{x\to 3} \frac{sen(x^2-10x+21)}{x-3}$		$k)\lim_{x\to 0} \frac{x.senx}{1-\cos x}$

19. Calcular los siguientes límites inmediatos:

a) $\lim_{x\to\infty} 3^{1/x}$	b) $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x$	c) $\lim_{x\to\infty} \frac{3+e^{-x^2}}{\frac{1}{x^2}+1}$
d) $\lim_{x\to\infty} \frac{2+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}{4+\frac{1}{x}}$	e) $\lim_{x\to\infty} \frac{e^{1/x^2}+e^{-x^2}}{e^{1/x^2}+\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}$	f) $\lim_{t\to-\infty} arctg(1+e^t)$
g) $\lim_{x\to\infty} \frac{sen^2 x}{x^2}$	h) $\lim_{x\to\infty}(x^2-3x+5)$	i) $\lim_{z\to+\infty}(z+senz)$

20. Evaluar los siguientes límites indeterminados:

a) $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+x^4-\sqrt{3}}{3x^4-x+1/2}$	b) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+4x^2-x+5}{2x^2-8x+1}$	c) $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3-5x^2+1}{-3x^5-2x^3+3}$

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^5-3x^4+1}{3x^5-2x^3-3}\right)^{\left(\frac{6x^2+x-1}{3x^2-2x}\right)}$	e) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(\sqrt{\dfrac{1-x}{1-64x}}\right)^{\left(\frac{1+2x}{3x-1}\right)}\right]$	f) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{9x^2+6}}{5x-2}$
g) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+senx}{x-\cos x}$		

21. Evaluar los siguientes límites laterales:

a) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$	b) $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$	c) $\lim\limits_{x\to 0^+}3^{1/x}$	d) $\lim\limits_{x\to 0^-}3^{1/x}$
e) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{1/x}$	f) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{1/x}$	g) $\lim\limits_{x\to 1^+}\ln(x-1)$	h) $\lim\limits_{x\to -2}\lvert\ln\lvert x+2\rvert\rvert$

22. Determinar los coeficientes a,b de modo que: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-2x+3}{x-1}+ax+b\right)=0$

23. Determinar $a,b,c\in\Re$ $para\ que$ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{a-bx}{x} & si \quad x\geq 2\\ c-x & si \quad -1<x<2\\ \dfrac{1+ax}{x} & si \quad x\leq -1\end{cases}$

tenga límite en x =2 y x = -1, sabiendo que $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+3]=0$.

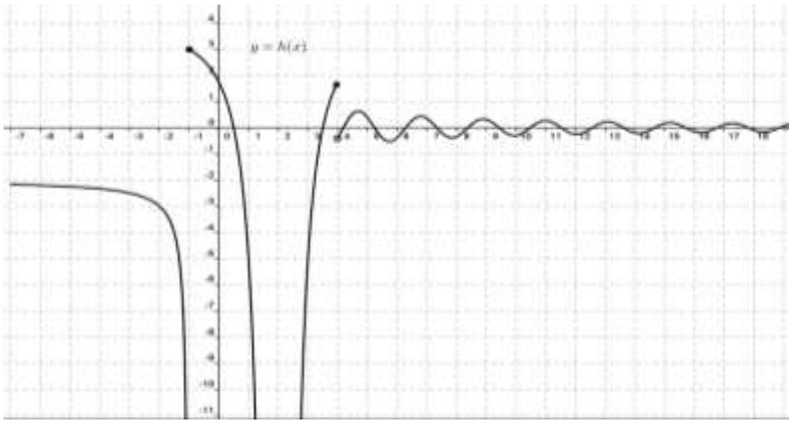
24. Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2}{x}+1\right)^x$	b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2x}\right)^x$	c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+2}$	d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x}\right)^{2x+1}$
e) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{1/(3x)}$	f) $\lim\limits_{x\to 0}(1+sen(3x))^{1/x}$		g) $\lim\limits_{x\to 0}(1+mx)^{1/x}$

25. Calcular los siguientes límites (repaso de todas las técnicas anteriores):

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x+4sen(2x)}{x^2+5senx}$	b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x}{x+5}$	c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+8}-3}{x^2-x}$
d) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x^2-1}{x-2}-\dfrac{x^2+x-2}{x^2-2x}\right)$	e) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{senx}{x}+xsen\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$	f) $\lim\limits_{x\to 3^+}\left(\dfrac{x^2-4x+3}{4x-12}\right)^{1/(x-3)}$

26. Dado el siguiente gráfico, determinar las ecuaciones de las asíntotas a la curva:



27. Graficar una función f que satisfaga todas las condiciones dadas. Indicar las ecuaciones de las asíntotas si posee:

$a) f(0)=0,\ f(1)=1,\ \lim_{x\to\infty} f(x)=0,\ f\ es\ impar$

$b) \lim_{x\to+\infty} f(x)=1,\ \lim_{x\to-\infty} f(x)=1,\ \lim_{x\to0^+} f(x)=+\infty,\ \lim_{x\to0^-} f(x)=-\infty$

$c) \lim_{x\to+\infty} f(x)=\infty,\ \lim_{x\to-\infty} f(x)=0,\ \lim_{x\to0^+} f(x)=+\infty,\ \lim_{x\to0^-} f(x)=-4,\ \lim_{x\to2} f(x)=-\infty$

$d) \lim_{x\to+\infty} f(x)=-3,\ \lim_{x\to-\infty} f(x)=3,\ \lim_{x\to-2} f(x)=\infty$

28. Determinar las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas, si existen:

a) $f(x)=\dfrac{2x^2-x}{x^2-1}$	b) $f(x)=\dfrac{2(x-1)^2}{x+1/2}$	c) $f(x)=\sqrt{x^2+1}$	d) $f(x)=\dfrac{3x}{x-1}+3x$
e) $f(x)=\dfrac{senx}{x}$	f) $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x^3+x}$	g) $f(x)=\dfrac{x-1}{\lvert x\rvert-1}$	h) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt[4]{x^4+1}}$
i) $f(x)=\ln(x^2-4)$	j) $y=\dfrac{1}{e^x-1}$	k) $f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$	l) $y=e^{1/x}$

29. Dada $f:\Re-\{k\}\to\Re \quad / \quad f(x)=\dfrac{x^2-2}{ax+b}$ Encontrar *a*, *b* y *k* tal que $y=\dfrac{1}{2}x-4$ sea asíntota de *f*.

30. Dadas las funciones

$$f:D_f\to R\,/\,f(x)=\frac{x^3+x+a}{x^2+bx+c} \text{ y } g:R-\{-1\}\to R\,/\,g(x)=\frac{x^2+x-2}{x+1}$$

hallar a, b y c para que tengan las mismas asíntotas. Dar las ecuaciones de dichas asíntotas.

31. Un rumor se propaga en una población, el número $N(t)$ de personas que lo conocen al cabo de t días viene dado por $N(t)=5000(1-2^{-0.01t})$. ¿Cuántas personas viven en la población? ¿Cuánto tiempo debe pasar para que el rumor sea conocido por la mitad de la población? Interpretar gráficamente.

32. Indicar para qué valores de ***x*** son discontinuas las siguientes funciones, indicando en cada caso qué tipo de discontinuidad poseen. Cuando sea posible redefinirlas para que sean continuas.

a) $f(x)=\dfrac{x-1}{\lvert x\rvert-1}$	b) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6}$	c) $f(x)=\dfrac{4x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$
d) $f(x)=\dfrac{sen(2x-10)}{\lvert x-5\rvert}$	e) $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{1-x}}}$	f) $f(x)=\begin{cases} x-3/4 & si\ \ x\geq 1 \\ \dfrac{1}{3x+1} & si\ \ x<1 \end{cases}$
g) $f(x)=\begin{cases} \ln(x-2) & x>2 \\ x^3 & -1<x\leq 2 \\ \lvert x\rvert & x\leq -1 \end{cases}$	h) $f(x)=\dfrac{1}{\ln(x+3)}$	i) $g(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3+4x^2-5x}{x^2+3x-10} & x\leq 0 \\ \dfrac{2}{e^{1/x}-2} & x>0 \end{cases}$

33. a) Siendo $f(x)=\begin{cases} 1/x+a & x\leq -1 \\ -x+b & -1<x\leq 2 \\ a/x-c & x>2 \end{cases}$

Encontrar *a, b* y *c* para que *f* resulte continua en $\Re$ y la recta $y=-3$ sea asíntota para $x\to+\infty$.

b) Dada la función g, hallar “a” para que tenga límite en x = 2:

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{sen(ax-2a)}{x^2-4} & x<2 \\ \\ \dfrac{x^2+x-6}{\sqrt{x^2+5}-3} & x>2 \end{cases}$$

¿Qué valor debería tener g (2) para que g sea continua en x = 2?

c) Dada $f: R-\{1,2\}\to R\ /\ f(x)=\dfrac{5x^2-a}{bx^2+15x+d}$ hallar a, b y d para que y = -1 sea asíntota horizontal, x = 1 asíntota vertical y en x = 2 la función tenga una discontinuidad evitable. Una vez hallado los valores redefinirla y graficarla.

34. Dar un ejemplo de una función que sea continua para todos los valores de *x*

a) Excepto en *x* =2, donde tiene una discontinuidad evitable y excepto en *x* = -1, donde tiene una discontinuidad esencial de salto infinito. Justificar

b) Excepto en x = 1 donde tiene una discontinuidad esencial de salto finito y en x = 0 donde tiene una discontinuidad evitable y x = 0 pertenece al dominio de la función. Justificar.

35. Calcular el salto de cada función en su punto de discontinuidad:

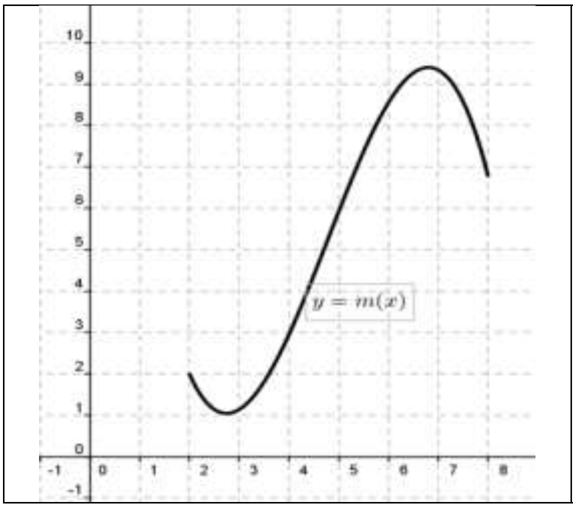
$a) \quad f(x)=\dfrac{1-10^{1/x}}{1+10^{1/x}} \qquad b) \quad f(x)=\begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & si\ x>0 \\ \dfrac{sen 5x}{3x} & si\ x<0 \end{cases} \qquad c) \quad f(x)=\begin{cases} 5x+1 & si\ x>0 \\ x+12 & si\ x\le 0 \end{cases}$

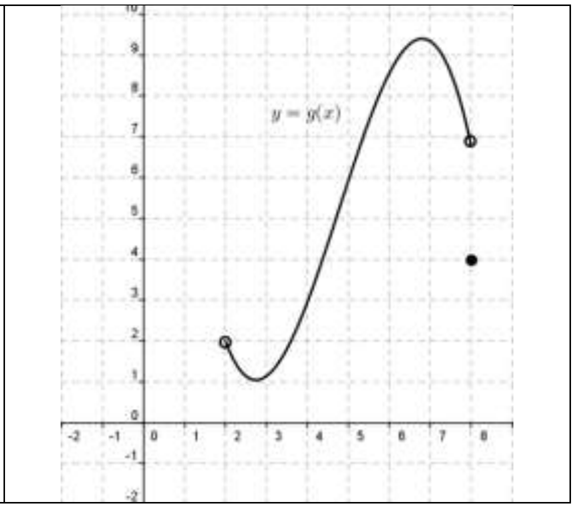
36. Determinar el valor de las constantes que hace que la función sea continua en toda la recta real:

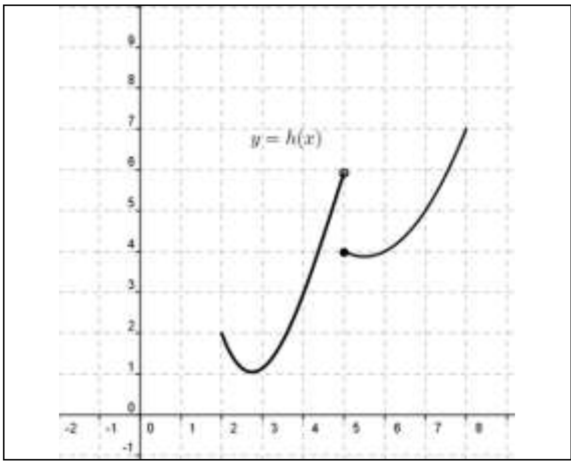
a) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-a^2}{x-a} & si\ x\neq a \\ 8 & si\ x=a \end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1-\cos(ax)}{4x^2} & si \quad x<0 \\ \dfrac{2+x}{3x+1} & si \quad x\ge 0 \end{cases}$

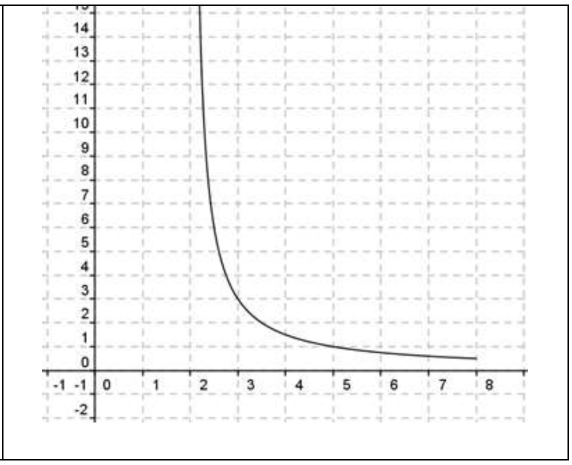
c) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+x}{x^2-1} & x<-1 \\ ax+b & -1\le x\le 1 \\ \dfrac{sen(x-1)}{\ln(x+1)} & x>1 \end{cases}$ d) $f(x)=\begin{cases} x+1 & si \quad 1<x<3 \\ x^2+bx+c & si \quad |x-2|\ge 1 \end{cases}$

37. Dados los siguientes gráficos determinar si la función es continua en [2,8] o (2,8):









38. Si $f(x)=x^3-x^2+x$ demostrar que existe un número *c* tal que $f(c)=10$.

39. ¿Hay algún número que sea exactamente una unidad mayor que su cubo? Justificar la respuesta.

40. Aplicar el teorema de Bolzano para probar que hay una raíz de la ecuación
a) $x^3-3x+1=0$ en el intervalo (0, 1)
b) $\ln x = e^{-x}$ en el intervalo (1, 2)
c) $1+x=3tg(x)$ en (0,1)

41. Sea $f: R \to R \,/\, f(x)=x^5+k\,x+1$ con $k \in R$ ¿para qué valores de k la función cumple con las hipótesis del teorema de Bolzano en el intervalo [-1,1]?

42. Responder con verdadero o falso. Justificar las respuestas.

a) Si $\lim\limits_{x\to c} f(x)=L \quad \Rightarrow \quad f(c)=L$

b) Si *f* (c) no está definida entonces el $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ no existe.

c) Si $f(x)<g(x) \quad \forall x \in E(a) \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to a} f(x) < \lim\limits_{x\to a} g(x)$

d) Si $\lim\limits_{x\to c^-} f(x) = \lim\limits_{x\to c^+} f(x)$ entonces la función es continua en *x* = *c*.

e) *f* y *g* son funciones continuas en [a; b] y $f(a)<g(a) \quad \wedge \quad f(b)>g(b)$ entonces $\exists\, x \in (a;b) \,/\, f(x)=g(x)$.

f) Si $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\infty \quad y \quad \lim\limits_{x\to 0} g(x)=\infty \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to 0}(f(x)-g(x))=0$

g) Si $\lim\limits_{x\to c} f(x)=0 \quad y \quad \lim\limits_{x\to c} g(x)=0 \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ no existe.

h) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln senx - \ln x)=0$

i) Si la recta $x=1$ es una asíntota vertical de $y=f(x)$ entonces x= 1 no pertenece al dominio de f.

j) Si $y=b$ es asíntota de *f* entonces no existe x = c perteneciente al dominio de la función tal que $f(c)=b$.

k) Si *a* no pertenece al dominio de la función entonces x = a es una asíntota de *f.*

l) Si f y g son polinomios que tienen el mismo grado, entonces la gráfica de *f /g* tiene una asíntota horizontal.
ll) Si *f* y g son polinomios que tienen distinto grado, entonces la gráfica de *f /g* tiene una asíntota oblicua.

m) La gráfica de $y = \dfrac{3x^2 + 2x + senx}{x}$ tiene una asíntota oblicua $y = 3x+2$.

n) Si f es continua en el intervalo [-1;1] y $f(-1) = 4$ y $f(1) = 3$, entonces existe un número r tal que $|r| < 1$ y $f(r) = \pi$

o) $f(x) = \dfrac{|x-1| + x^2 - 1}{x-1}$ tiene una discontinuidad esencial de salto finito en x = 1.

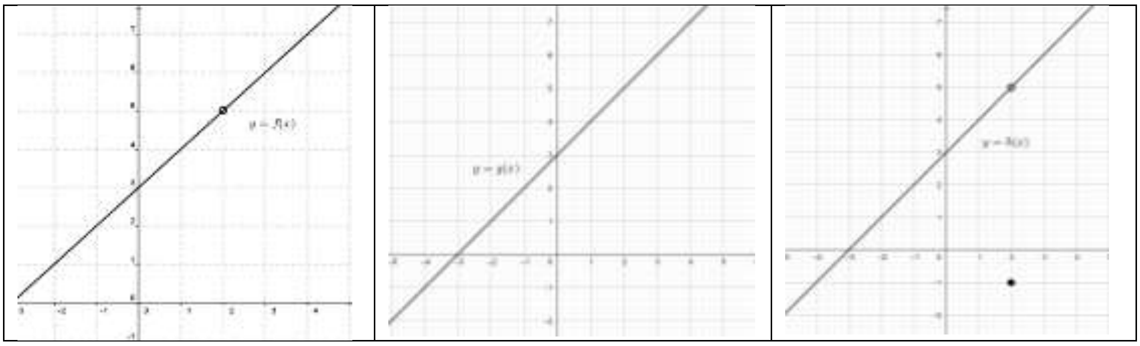
p) Si P es un polinomio tal que su término independiente es 3 y en x = 5 toma el valor -1, entonces existe una raíz de dicho polinomio en el intervalo (0,5).

q) $\lim\limits_{h \to 0} f(2+h) = f(2)$

r) Si P(x) es un polinomio entonces $g(x) = \dfrac{P(x)}{x-1}$ tiene una asíntota vertical en x = 1.

Respuestas

1. a) F b) V



2.

$a)\ (-1)$ $b)\ \frac{3}{13}$ $c)\ \sqrt{\frac{2}{3}}$ $d)\ \left(\frac{10}{3}\right)^{7}$ $e)\ 0$ $f)\ \ln 4$ $g)\ e^{9}$ $h)\ \left(\frac{\pi}{2}\right)$

3. $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=0$ $\lim\limits_{x\to 2} g(x)\ no\ \ existe$ $\lim\limits_{x\to 1/4} g(x)=3/4$

5. $a=1 \quad b=-1$

6.a) no existe b) –1 c) 3 d) 0 e) 0 f) 0 g) 1

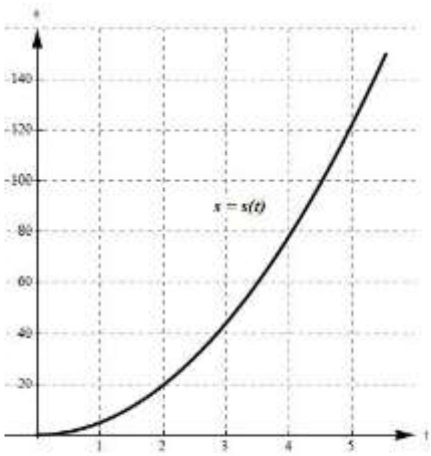
7. $\lim\limits_{t\to 12^-} f(t)=150 \quad \lim\limits_{t\to 12^+} f(t)=300$

8. 3/4

9. $a)\ \frac{1}{6}$ $b)\ \frac{1}{5}$ $c)\ -1/9$ $d)\ 1/16$ $e)\ \frac{3}{20}$ $f)\ -1/64$

10. a) $s:[0,\sqrt{1500/49}]\to[0,150]/\ s(t)=4.9t^2$ o en forma aproximada

$s:[0,5.53]\to[0,150]/\ s(t)=4.9t^2$



b)

Intervalo	Velocidad media=$\frac{distancia\ recorrida}{tiempo\ transcurrido}$
[3,4]	34.3 m/s
[3,3.1]	29.89 m/s
[3,3.05]	29.645 m/s
[3,3.01]	29.449 m/s
[3,3.001]	29.4049 m/s

c) Valor estimado de acuerdo con la tabla 29.4m/s
Valor exacto 29.4 m/s

11. a = 15 $\lim_{x\to -2} f(x) = -1$

12. a) a = 1 $\lim_{x\to 1} f(x) = 3$; a = -1 $\lim_{x\to -1} f(x) = -1$;

b) a = -3 $\lim_{x\to -3} f(x) = 3/4$; a = 2 $\lim_{x\to 2} f(x) = 2$

13. a) $\dfrac{C(105)-C(100)}{5} = 20.25\$ / \textit{artículo}$ $\dfrac{C(101)-C(100)}{1} = 20.05\$ / \textit{artículo}$ b) 20$

14. Se puede decir que dicho límite también vale ½. La justificación es el teorema de intercalación (comprobar todas las hipótesis)

16. Los puntos para los cuales se sabría en forma automática el valor del límite son c = 1, c = -1 y c = 0.

17. $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x^2} = 1$

18.

$a)\ 4/3$ $b)\ 4/5$ $c)\ 9/4$ $d)\ 6$ $e)\ 9/2$ $f)\ 1$ $g)\ 8$

$h)\ 5/2$ $i)$ *no existe* $l^+ = 1/2$ $l^- = -1/2$ $j) -4$ $k) 2$

19. a) 1 b) 0 c) 3 d) ½ e) 1 f) π/4 g) 0 h)+ ∞ i) +∞

20. a) 1/3 b) ∞ c) 0 d) 4/9 e) ¼

f) $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 3/5$ $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -3/5$ g) 1

21. a) 1 b) 1 c) +∞ d) 0 e) 0 f) +∞ g) -∞ h) +∞

22. $\begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases}$

23. a = 2 b = 3 c = 0

24.

$a)\ e^2$ $b)\ 1/\sqrt{e}$ $c)\ e$ $d)\ e^8$

$e)\ e^{2/3}$ $f)\ e^3$ $g)\ e^m$

25. a) 11/5 b) -2 (x→-∞) 0 (x→+∞) c) 1/6 d)∞ e) 1 f) 0

26. $y = 0 \quad AH^+, y = -2 \quad AH^-, x = 2 \quad AV, x = -1 \quad AV^-$

28.- a) x = 1; x = -1; y = 2; b) x = -1/2; y = 2x - 5;

c) $y = x$ ($x \to +\infty$); $y = -x$ ($x \to -\infty$);;
d) $x = 1$; $y = 3x + 3$; e) $y = 0$; f) x = 0, y = 1
g) $x = -1$ AV $y = -1$ AH por izquierda; y = 1 AH por derecha
h) y = 1 ($x \to +\infty$); y = -1 ($x \to -\infty$) i) x= 2 (por derecha) x = -2 (por izquierda)
j) x = 0, y = 0 ($x \to +\infty$); $y = -1$ ($x \to -\infty$)
k) y = x AO (por derecha) y = -x AO (por izquierda), x = -1 AV (por izquierda) x = 1 AV (por derecha)
29. a = 2, b = 16, k = -8
30. a = -2; b = 0; c = -1. Las ecuaciones son x = -1 AV, y = x AO.
31. La población tiene 5000 habitantes. Para t = 100 días el rumor es conocido por la mitad de la población.
32.

a) x = 1 disc. evitable; x = -1 disc. Esencial de salto infinito.
b) x = 2 disc. Evitable x = 3 disc. Esencial de salto infinito.
c) x = 2; x = -2 discontinuidades de salto infinito.
d) x = 5 discontinuidad esencial salto finito.
e) x = 1 discontinuidad esencial salto finito
f) x = -1/3 discontinuidad esencial salto infinito
g) x = 2 esencial salto infinito, x = -1 esencial salto finito
h) x = -3 discontinuidad evitable, x = -2 discontinuidad esencial salto infinito
i) x = -5 discontinuidad evitable, x = 1/ln2 esencial de salto infinito

33.

a) a = 2 b = 0 c = 3
b) a = 30 g(2) = 15/2
c) a = 20 b = -5 d = -10

35. a) S = 2 b) S = 2/3 c) S = 11
36. a) a = 4 b) a = 4 o a = -4 c) a = -1/4 b = ¼ d) b = -3 c = 4
41. $k \in (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$
42
Falsos: a) b) c) d) f) g) i) j) k) ll) r)
Verdaderos: e) h) l) m) n) o) p) q)

TRABAJO PRÁCTICO Nº 3
DERIVADA Y DIFERENCIAL

1. Una aproximación al espacio recorrido por un cuerpo que cae sin rozamiento del aire está dada por $s(t) = 5.t^2$, donde t se mide en segundos y s en metros. Supongamos que una piedra se cae desde un edificio de 150 metros de alto y queremos calcular la velocidad instantánea de la piedra a los dos segundos.

a) Calcular la velocidad instantánea de la piedra en t = 2 segundos, primero en forma aproximada completando la siguiente tabla:

Intervalo [2, t]	Velocidad media	Intervalo [t,2]	Velocidad media
[2,2.5]		[1.5,2]	
[2,2.1]		[1.9,2]	
[2,2.05]		[1.95,2]	
[2,2.001]		[1.999,2]	

b) Calcular la velocidad instantánea de la piedra como límite de la velocidad media en ese instante.

c) Comparar los dos resultados obtenidos.

2. Hallar la ecuación de la recta tangente "t" a $f : R \to R \,/\, f(x) = x^2$ en el punto (1,1) a través de los siguientes pasos:

a) Calcular la pendiente de la recta secante que une P (1,1) con los siguientes puntos Q (x, f(x)) y observar a qué valor se acercan esas pendientes a medida que Q se acerca a P.

x	Pendiente de la recta secante	x	Pendiente de la recta secante
x = 2		x = 0	
x = 1.5		x = 0.5	
x = 1.1		x = 0.9	
x = 1.01		x = 0.99	
x = 1.001		x = 0.999	

b) Escribir en forma genérica la pendiente de una recta secante que pase por P (1,1) y Q (x, f(x)).

c) Tomar el límite para x tendiendo a 1 de la pendiente genérica de la recta secante obtenida en b)

d) Corroborar el resultado con lo obtenido en el punto a).

e) Se define la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto dado como el límite de las pendientes de las rectas secantes, si éste existe. De acuerdo a esto hallar la ecuación de la recta tangente a la $f(x) = x^2$ en P (1,1). Graficar.

3. Obtener la función derivada de cada una de las funciones dadas, aplicando la definición. Determinar el dominio de f y de f ’

a) $f(x)=x^2+2x$	b) $f(x)=\dfrac{1}{x}$	c) $f(x)=\sqrt{x}$	d) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$
e) $f(x)=senx$	f) $f(x)=\ln x$	g) $f(x)=e^x$	

4. Los siguientes límites corresponden a la definición de derivada de una función f(x) en un punto x = a. Indicar la función f, el punto x = a, calcular dichas derivadas y hallar la recta tangente en cada caso. Graficar.

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{5-3(3+h)+4}{h}$	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x-1}$	$\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{2\sqrt{x}-6}{x-9}$	$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(2+h)^2+(2+h)-6}{h}$

5. Estudiar la continuidad y la derivabilidad de las siguientes funciones en su dominio. Graficar la función y su derivada

a) $f(x)=\begin{cases} x+3 & x<-1 \\ x^2 & -1\le x\le 2 \\ x+2 & x>2 \end{cases}$

b) $g(x)=|x-3|$

c) $n(x)=x^{2/3}$

d) $f(x)=x.|x|$

e) $h(x)=x+2|1-2x|$

f) $f(x)=|x-1|+3|x|$

6. Si la recta tangente a y = f(x) en (4,3) pasa por el punto (0,2), encontrar $f(4)$ y $f'(4)$

7. Demostrar que en cada uno de los puntos de intersección de las gráficas de $y=x;\ y=1/x$ las rectas tangentes son perpendiculares entre sí. Graficar.

8. Derivar aplicando propiedades y reglas:

a) $f(x)=x^5-2x^4+\sqrt{3}$	b) $f(x)=\sqrt{x}+\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x^3}+\dfrac{0,34}{x^5}$
c) $h(z)=\dfrac{z^3-z^2+1}{5}$	d) $g(x)=\dfrac{x}{m}-\dfrac{m}{b}+\dfrac{x^2}{n^2}$
e) $f(x)=e^x-2\ln x+\sqrt{5}x^3$	f) $f(t)=\dfrac{sent}{3}-4\cos t$
g) $f(t)=sent.\cos t$	h) $f(x)=(-x^2+\dfrac{x}{4}).e^x$
i) $f(x)=3x(\sqrt{x}+senx)$	j) $f(t)=2t\ sent-(t^2-2)\cos t$
k) $f(x)=x^3\ln x-\dfrac{x^3}{3}$	l) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$

ll) $g(t)=\dfrac{t}{t+\dfrac{a}{t}}$	m) $h(s)=\dfrac{\sqrt{s}-1}{\sqrt{s}+1}$
n) $f(x)=(\cot gx)(3x+2)$	o) $f(x)=\dfrac{x^2}{\ln x}$
p) $m(x)=(senx+\cos x)\sec x$	q) $l(z)=z^2senz+2z\cos z-2senz$
r) $a(x)=\dfrac{e^x}{x}$	s) $s(t)=\dfrac{\cos t}{1+sent}$

9. ¿Para qué valores de *x* de la gráfica de $f(x)=x+2senx$ tiene una tangente horizontal?

10. ¿La recta normal a la parábola $y=x-x^2$ en el punto (1; 0) se cruza con la parábola una segunda vez? Justificar la respuesta en forma analítica. Graficar.

11. ¿Qué ángulo forma la recta tangente a la curva $y=senx$ en el punto de abscisa x = π?

12. Determinar en qué puntos de la curva $f: D_f \to R \,/\, f(x)=\dfrac{x}{1-x^2}$ la recta tangente tiene una inclinación de 45°.

13. a) Probar que la recta tangente a $f(x)=\dfrac{1}{x}$ en $(a; f(a))$ no corta a la función salvo en ese punto. Graficar la situación del problema

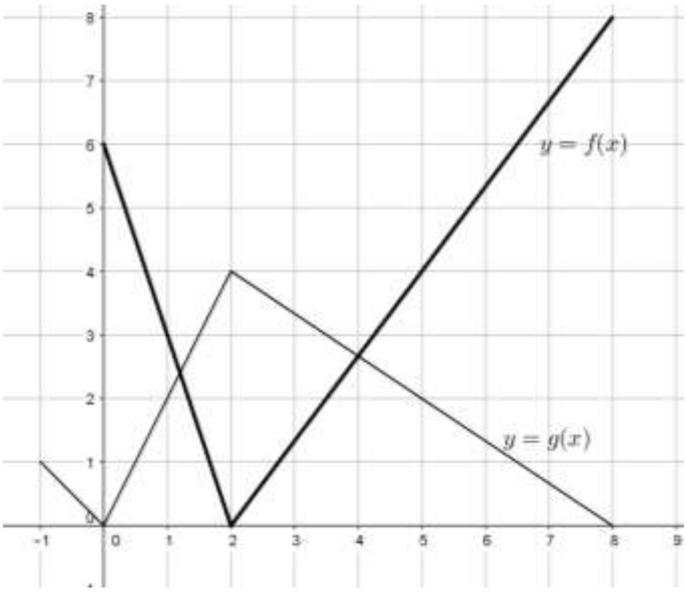
b) Probar que la recta tangente a $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ en $(a; f(a))$ corta a la función en dos puntos. Graficar la situación del problema

14. ¿En qué punto o puntos de la curva $y=\dfrac{1-x}{1+x}$ la recta normal tiene una inclinación de 60°?

15. ¿En qué punto de la curva $f(x)=x\sqrt{x}$ la tangente es paralela a la recta de ecuación $3x-y+6=0$?

16. Determinar "a" tal que $y = 9x + 24$ sea la expresión de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{ax}{2x+3}$ en x = -2.

17. Sean f y g las funciones cuyas gráficas aparecen en la figura, sean $u(x)=f(x).g(x)$ y $v(x)=f(x)/g(x)$. Calcular $u'(1)$ y $v'(5)$ (Nota: la función f es la que tiene trazo más grueso)



18. Hallar a y b para que $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ tenga por recta tangente a $y = 2x - 4$ en el punto de abscisa x = 1.

19. Demostrar que la curva dada por $f(x) = x + \ln x$ tiene una recta tangente que pasa por el origen (0,0).

20. Hallar a, b y c tal que la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = \begin{cases} ax^2 & x \leq 1 \\ bx^3 + c & x > 1 \end{cases}$ en x = 1 sea paralela a $y = 8x$. Una vez obtenidos los parámetros calcular la ecuación de la recta tangente en el punto (1, f (1)). Graficar

21. Derivar utilizando reglas de derivación:

a) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 2x}$	b) $f(x) = e^{-x^2}$
c) $f(t) = sen^2 t$	d) $f(x) = \cos\sqrt{x}$
e) $f(x) = \sqrt{x^2 + a^2}$	f) $f(x) = \ln^4(3x^2 + 5x^4)$
g) $f(x) = \sqrt{\ln(x^2)}$	h) $f(t) = sen\left(\frac{t}{\sqrt{t+1}}\right)$
i) $f(x) = \ln^2 x + \ln(\ln x)$	j) $f(x) = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$
k) $f(x) = \ln 2x + \log 2 + \log 2x$	l) $f(t) = 2^{sh\sqrt{t}}.Ch\sqrt{t}$
m) $f(r) = \sqrt[3]{tg(2r)}$	n) $f(x) = \cos(x^2 - senx).tg(2x)$
o) $g(z) = 10^{z.tgz}$	p) $y = \sqrt{1+x} - \ln(1 + \sqrt{x+1})$
q) $y = \frac{(2x^3+3)^2}{\ln(x^2+1)}$	r) $y = \cos^2\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)$

22. Sea $f(x) = a\,x^2\,e^{x^3-1} + b$. Determinar a y b reales de modo tal que la recta de ecuación $y = -5x + 8$ sea tangente al gráfico de *f* en el punto de abscisa x = 1.

23. Estudiar la continuidad de f en a = 0, la derivabilidad de f y la continuidad de la derivada f' en ese punto (a=0)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 sen\left(\dfrac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

(Observar que f'(0) existe y f'(x) es discontinua en a = 0. Remarcamos este comportamiento porque en general, todas las funciones que estudiamos derivables en un punto, la función derivada es continua en dicho punto)

24. ¿Para qué valores de m y b la siguiente función es derivable en R?

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 2 \\ mx + b & x > 2 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} x.e^{-1/x} & x > 0 \\ mx + b & x \leq 0 \end{cases}$

c) $h(x) = \begin{cases} mx^3 & x < 2 \\ x^2 + b & x \geq 2 \end{cases}$

25. ¿En qué punto o puntos de la curva $f(x) = x.|x|$ la recta tangente es paralela a $y - 4x + 6 = 0$? Hallar la recta tangente y graficarla junta con la curva.

26. La ecuación que sigue da la posición de una partícula $s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$ donde t se mide en segundos y s en metros.

a) Encontrar la velocidad en el instante t.
b) ¿Cuál es la velocidad después de 2 y 4 segundos?
c) ¿Cuándo está en reposo la partícula?
d) ¿Cuándo se mueve hacia delante (en sentido positivo)?
e) Dibujar un diagrama que represente el movimiento de la partícula.
f) Encontrar la distancia total recorrida por la partícula en los primeros 5 segundos.

27. Si un tanque contiene 5000 litros de agua que salen por el fondo en 40 minutos, la ley de Torricelli expresa el volumen V del agua que queda en el tanque después de t minutos:

$$V(t) = 5000\left(1 - \frac{t}{40}\right)^2 \quad 0 \leq t \leq 40$$

a) Hallar el dominio y la imagen de la función V(t)

b) Calcular la razón o tasa instantánea con que sale el agua del tanque cuando han transcurrido 20 minutos. ¿Qué significado tiene el signo negativo de la tasa instantánea en t = 20 minutos bajo el contexto del problema?
c) Si calculamos V^{-1} ¿qué significado tiene en el contexto del problema?

28. En el tiempo t = 0 un clavadista salta desde un trampolín que se encuentra a una altura de 32 pies sobre el agua. La posición del clavadista está dada por $s(t) = -16t^2 + 16t + 32$ donde s está en pies y t en segundos.
a) ¿Cuál es el tiempo en el que el clavadista choca con el agua?
b) ¿Cuál es la velocidad del clavadista en el momento del impacto?

29. La temperatura C de un cuerpo que inicialmente estaba a 90ºC se enfría de acuerdo con la ley $C(t) = 20 + 70.e^{-0.1t}$ (se está suponiendo que la temperatura ambiente es de 20ºC) donde t es el tiempo en minutos.
a) Calcular con qué velocidad se está enfriando el cuerpo a los 5 minutos.
b) Mostrar que la velocidad de enfriamiento es proporcional a la diferencia entre la temperatura C y la temperatura ambiente.
c) Mostrar que la velocidad de enfriamiento va tendiendo a 0 conforme avanza el tiempo.

30. Supongamos que $C(x)$ es el costo total en el que incurre una empresa para producir x unidades de cierto producto. La función C se llama función de costo. Si se aumenta la cantidad de artículos producidos de x_1 a x_2 el costo adicional la tasa media de cambio de costo es

$$\frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{C(x_2) - C(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{C(x + \Delta x) - C(x)}{\Delta x}$$

(lo que nosotros llamamos cociente incremental). Los economistas llaman *costo marginal* al límite de esta cantidad cuando Δx tiende a cero; es decir, la tasa instantánea del cambio del costo en función de la cantidad de artículos producidos.

Costo marginal = $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta x} = C'(x)$ (función derivada del costo)

Como x sólo puede adoptar valores enteros, los economistas hacen la siguiente aproximación para un valor de n grande:

$$C'(n) \cong \frac{C(n+1) - C(n)}{1} \quad (\Delta x = (n+1)-n = 1)$$

Con lo cual el costo marginal de producir n unidades es aproximadamente igual al costo de producir una unidad más, la enésima más uno.

Por ejemplo: supongamos que una empresa ha estimado que el costo de producir x artículos es $C(x) = 10000 + 5x + 0.01x^2$. Calcular el costo marginal cuando se producen 500 artículos y compararlo con el costo de producción del artículo 501.

31. Hay dos tangentes a la curva $y = 4x - x^2$ que pasan por el punto (2; 5). Encontrar las ecuaciones de ambas. Graficar.

32. La recta tangente de la función f en el punto de abscisa x = -1 tiene ecuación $y = -5x + 3$. Calcular la recta tangente a la función $g(x) = f(-x^2 + sen(\pi x))$ en x = 1.

33. Derivar aplicando propiedades y reglas:

a) $f(x) = arcsen(2x - 3)$	b) $y = \dfrac{1}{ab} arctg\left(\dfrac{a}{b} tgx\right)$	c) $y = \arccos(x^2)$
d) $g(s) = s^2.arctg(s)$	e) $y = tg(arcsent)$	

34. a) Sean f y g derivables y $h(x) = \dfrac{f(\ln(x+1))}{g(3^x)}$ Sabiendo que la recta tangente a f en x = 0 tiene por ecuación $y = 2x$ y que g (1) = 4, calcular h'(0).

b) Sea $y = 2x + 3$ la recta tangente a una función g en x = -2. Sea $f : R \to R \,/\, f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$ Calcular $(f \circ g)'(-2)$

c) Sea la función $h(x) = f(x).g(x)$, donde $g(x) = \dfrac{e^{x^2}}{2x - 3}$ y sabemos que la recta tangente a f en el punto de abscisa x = 1 es $y = -3x + 5$. Calcular $h'(1)$.

d) Sean $p(x) = \dfrac{1}{x - 9}$, $m(x) = x^2 - 16$ determinar, haciendo restricciones si es necesario $h(x) = (p \circ m)(x)$.Demostrar que la recta tangente a h(x) en el punto de intersección con el eje "y" es horizontal, escribir la ecuación de dicha recta.

35. a) Supongamos que f es derivable, tiene función inversa y la gráfica de f pasa por el punto (2,4), donde su pendiente es 1/3. Calcular la ecuación de la recta tangente a la función inversa de f (f^{-1}) en el punto de abscisa x = 4.

b) Sea $f : R \to R \,/\, f(x) = x^3 + x - 2$ calcular $(f^{-1})'(-2)$

c) Sean $f : R \to R \,/\, f(x) = 2x + 3$ $g : R \to R \,/\, g(x) = x^3$ calcular $\left((f \circ g)^{-1}\right)'(1)$

36. Derivar respecto de *x* las siguientes expresiones que definen a *y* como función o relación de *x* en forma implícita:

a) $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2.b^2$	b) $y^3 - 3y + 2ax = 0$	c) $y = \cos(x + y)$
d) $\cos(xy) = x$	e) $x^2y - xy^2 + x^2 + y^2 = 0$	

37. Demostrar que la normal a la curva $x^3 + y^3 = 3xy$ en $\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$ pasa por el origen.

38. Determinar los puntos de la curva $x^2 - x.y + y^2 = 27$ en los que la tangente es horizontal, y aquellos en los cuales la tangente es vertical.

39. Usando derivación implícita demuestra que la recta tangente en cualquier punto P de un círculo con centro O, es perpendicular al radio OP.

40. Hallar el valor de "a" para que la curva $x^2 - x.y + y^2 = a$ tenga recta tangente horizontal en un punto de abscisa $x = 2$. Una vez obtenido "a" indicar todos los puntos completos donde la recta tangente es horizontal.

41. Verificar que en el punto (7,4) la recta tangente a la curva $(x-2)^2 - y^2 = 9$ es paralela a la recta $y = \frac{5}{4}x + 9$ ¿Existe otro punto de la curva que tenga la misma pendiente?

42. Aplicando derivación logarítmica derivar las funciones:

a) $f(x) = x^x$	b) $f(x) = x^{\ln x}$	c) $f(x) = (senx)^x$
d) $f(x) = e^{(x^x)}$	e) $y = (Chx)^{x+1}$	

43. Determinar la ecuación de la recta tangente a la curva de ecuación $y = (1-x)^{3/(x+1)}$ en el punto de abscisa x = 0.

Diferencial. Aproximación lineal

44. Hallar los diferenciales de las siguientes funciones:

a) $y = arctg\left(\frac{x}{a}\right)$	b) $y = x.e^x$	c) $y = \ln(senx)$	d) $y = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$

45. Calcular $\Delta y\,;\,dy$ para $y = \sqrt[3]{x}$

a) $a = 8,\ \Delta x = 0{,}1$

b) $a = 64,\ \Delta x = 0{,}1$

46. Encontrar la aproximación lineal de la función $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$ en *a* = 0, y utilizarla para hallar aproximaciones de los números $\sqrt[3]{0{,}95}$ y $\sqrt[3]{1{,}1}$

47. Calcular usando aproximación lineal y verificar con calculadora:

a) $\sqrt{82}$	b) $\sqrt[3]{1.02} + \sqrt[4]{1.02}$	c) $e^{0,03}$
d) $tg46°$	e) $sen29°$	f) $arcsen(0,48)$

48. Sea la función $y = (x+2)^{\sqrt{x}}$, mediante su recta tangente en x = 1 aproximar el valor de $(3.1)^{\sqrt{1.1}}$

49. Responder con verdadero o falso. Justifica tus respuestas.

a) Si f es continua en *a* entonces *f* es derivable en *a*.

b) Una ecuación de la recta tangente a la parábola $y = x^2$ en (-2;4) es $y - 4 = 2x(x + 2)$

c) Si $f'(r)$ existe, entonces $\lim_{x \to r} f(x) = f(r)$

d) La tangente a una curva en un punto no puede cortar a la curva en otro punto.

e) Si $y = x + c \quad entonces \quad dy = dx$

f) Si $f'(x) = g'(x) \quad \forall\, x \;\Rightarrow\; f(x) = g(x) \quad \forall\, x$.

g) Si $g(x) = .\left|x^2 + x\right|$ entonces $g'(x) = \left|2x + 1\right| \quad \forall x \in R$

h) Si $y = ax + b \quad entonces \quad \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{dy}{dx}$

i) Si $y = \pi^5 \quad \Rightarrow \quad y' = 5\pi^4$.

j) Si la pendiente de la recta tangente a y = f(x) en (1,2) es 4 entonces la pendiente de la recta tangente a $f^{-1}(x)$ en (2,1) es ¼.

k) Si f ‘(a) existe entonces f’ es continua en x = a.

l) Si g es una función par derivable entonces su función derivada es impar.

m) $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ es la pendiente de la recta secante que une (a,f(a)) con (x, f(x)).

n) Si $y = f(x)$, *f* es creciente y derivable, y $\Delta x > 0$ entonces $\Delta y \geq dy$

o) Si f es derivable en x = a entonces $\lim_{h \to 0} \dfrac{\Delta y - dy}{h} = 0$

Respuestas:

1.

Intervalo [2, t]	Velocidad media	Intervalo [t,2]	Velocidad media
[2,2.5]	22.5 m/s	[1.5,2]	17.5 m/s
[2,2.1]	20.5 m/s	[1.9,2]	19.5 m/s
[2,2.05]	20.25 m/s	[1.95,2]	19.75 m/s
[2,2.001]	20.005 m/s	[1.999,2]	19.995 m/s

La velocidad instantánea en t = 2 es 20 m/s

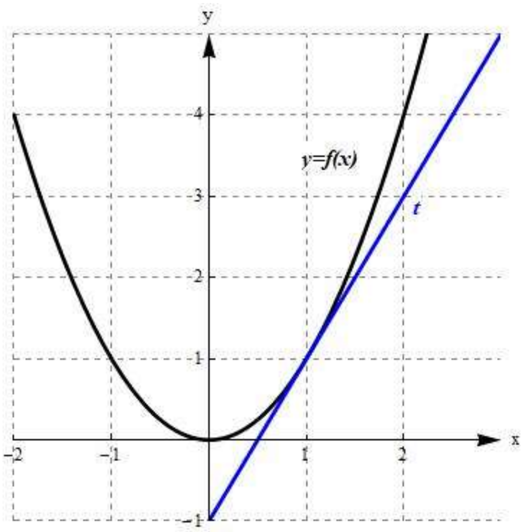
2.

x	Pendiente de la recta secante	x	Pendiente de la recta secante
x = 2	3	x = 0	1
x = 1.5	2.5	x = 0.5	1.5
x = 1.1	2.1	x = 0.9	1.9
x = 1.01	2.01	x = 0.99	1.99
x = 1.001	2.001	x = 0.999	1.999

b) $m_s = \dfrac{f(x) - f(1)}{x-1} = \dfrac{x^2 - 1}{x-1} = x+1 \quad x \neq 1$

c) El límite es igual a 2

d) Ecuación de la recta tangente a f en x = 1: $y = 2x - 1$



3. a) $D_f = D_{f'} = R \quad f'(x) = 2x + 2$

b) $D_f = D_{f'} = R - \{0\} \quad f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

c) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \quad D_f = [0, +\infty) \quad D_{f'} = (0, +\infty)$

d) $f'(x) = \dfrac{-1}{2\sqrt{x^3}} \quad D_f = (0, +\infty) \quad D_{f'} = (0, +\infty)$

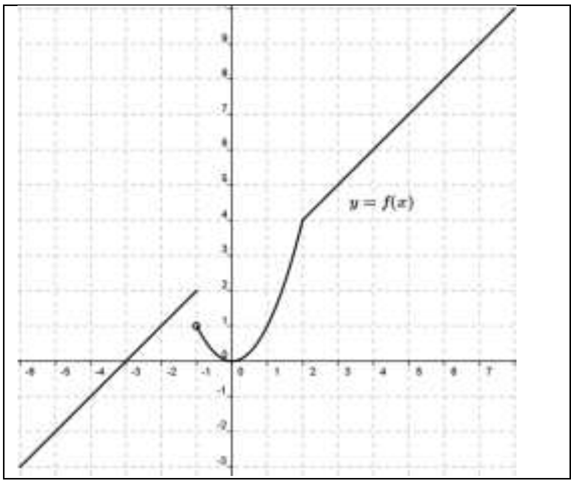
e) $f'(x)=\cos x \quad D_f = D_{f'} = R$

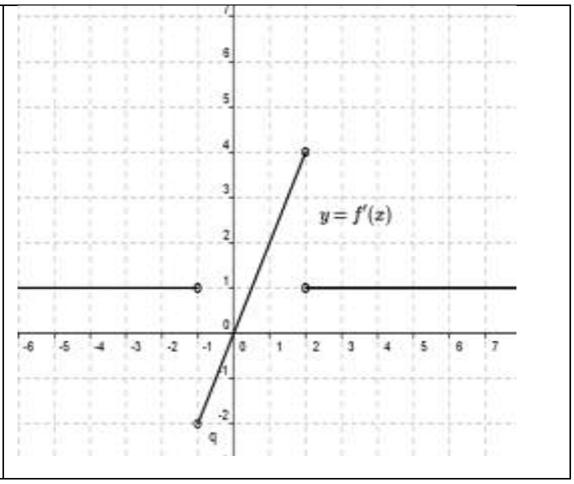
f) $f'(x)=\dfrac{1}{x} \quad D_f = D_{f'} = (0,+\infty)$

g) $f'(x)=e^x \quad D_f = D_{f'} = R$

5. a) f es continua en R salvo en x = -1 donde tiene una discontinuidad esencial de salto finito $D_{f'} = R-\{-1,2\}$ En x = -1 f no es derivable pues no es continua. En x = 2 las derivadas laterales son distintas: $f'_-(2)=4 \quad f'_+(2)=1$

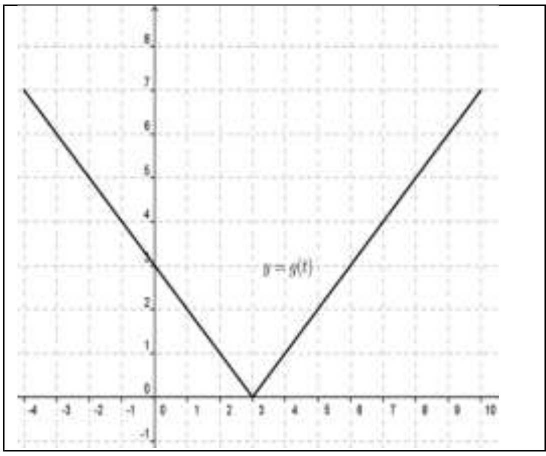
$$f'(x)=\begin{cases} 1 & x<-1 \\ 2x & -1<x<2 \\ 1 & x>2 \end{cases}$$

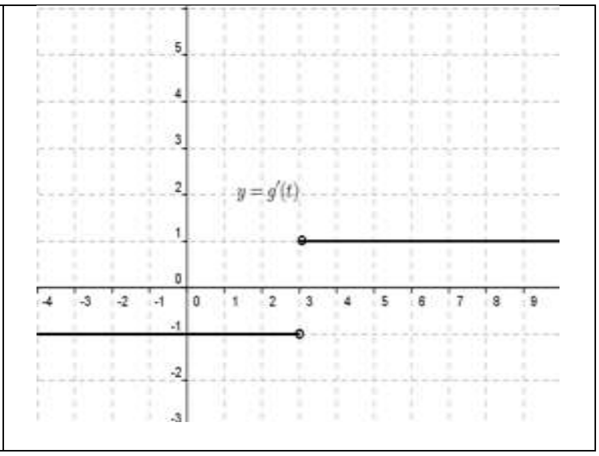




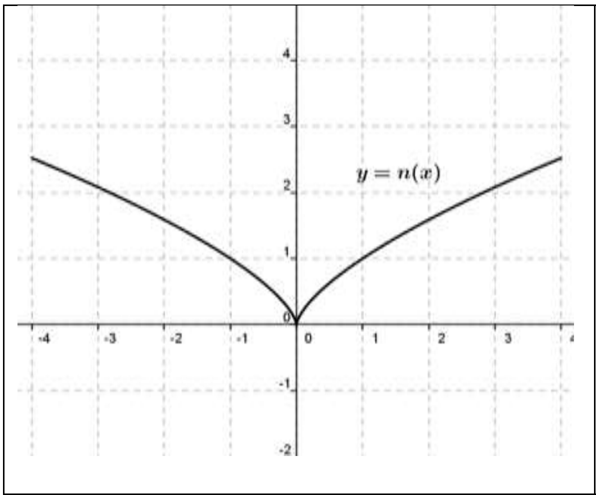
b) g es continua en R. g es derivable en R – {3}. En x = 3 las derivadas laterales son distintas $f'_-(3)=-1 \qquad f'_+(3)=1$

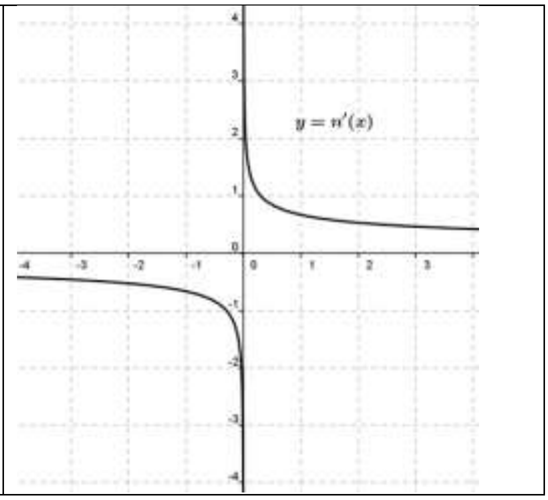
$$g'(x)=\begin{cases} -1 & x<3 \\ 1 & x>3 \end{cases}$$





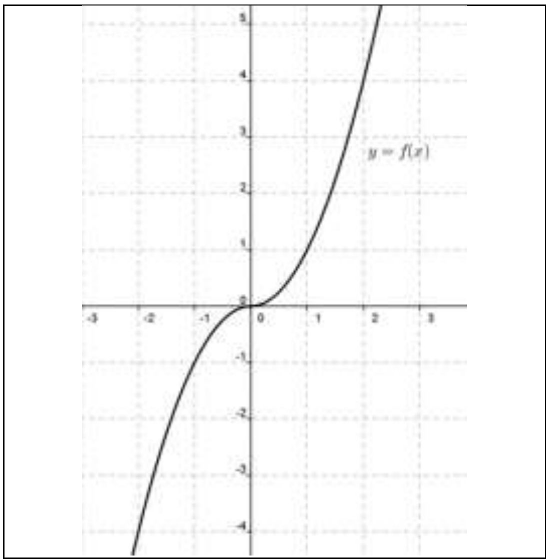
c) La función n(x) es continua en R y derivable en R – {0}. En x = 0 hay una tangente vertical, las derivadas laterales dan infinito. La derivada es: $n'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3} \quad x \neq 0$

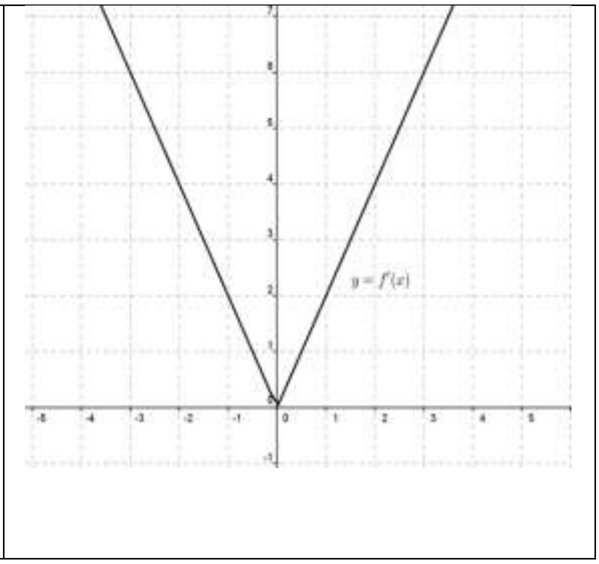




d) f es continua y derivable en R. Su derivada es:

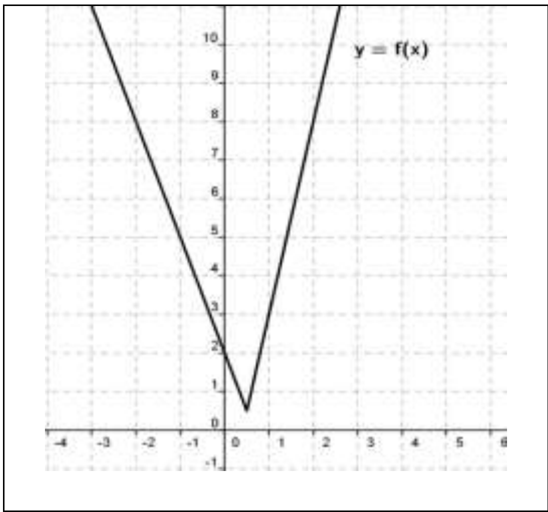
$$f'(x) = \begin{cases} -2x & x < 0 \\ 2x & x \geq 0 \end{cases}$$

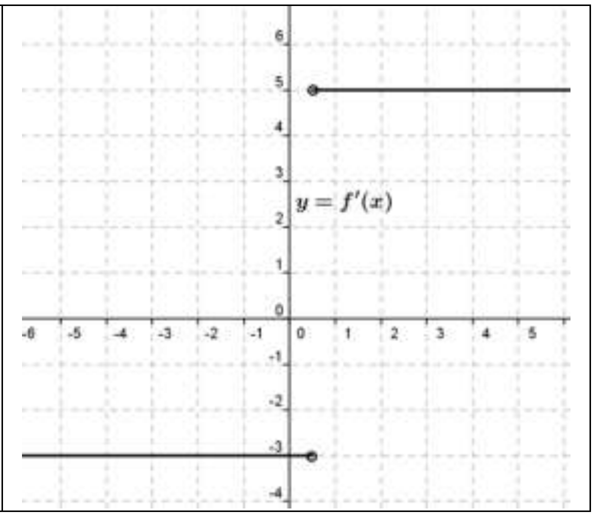




e) h es continua en R y es derivable en R-{1/2}. Su función derivada es:

$$h'(x) = \begin{cases} 5 & x > 1/2 \\ -3 & x < 1/2 \end{cases}$$





f) f es continua en R y es derivable en R-{0,1}. Su función derivada es:

$$f'(x)=\begin{cases}-4 & x<0\\ 2 & 0<x<1\\ 4 & x>1\end{cases}$$

6. $f(4)=3 \quad f'(4)=1/4$

7. f (4) = 3; f ' (4) = ¼

8.

a) $f'(x)=5x^4-8x^3$	b) $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}-\frac{3}{4\sqrt[4]{x}}-\frac{1,7}{x^6}$
c) $h'(z)=\frac{3z^2-2z}{5}$	d) $g'(x)=\frac{1}{m}+\frac{2x}{n^2}$
e) $f'(x)=e^x-\frac{2}{x}+3\sqrt{5}x^2$	f) $f'(t)=\frac{\cos t}{3}+4sent$
g) $f'(t)=\cos^2 t-sen^2 t$	h) $f'(x)=e^x(-x^2-\frac{7}{4}x+\frac{1}{4})$
i) $f'(x)=\frac{9}{2}\sqrt{x}+3senx+3x\cos x$	j) $f'(t)=t^2 sent$
k) $f'(x)=3x^2\ln x$	l) $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$
ll) $g'(t)=\frac{2at}{(t^2+a)^2}$	m) $h'(s)=\frac{1}{\sqrt{s}\left(\sqrt{s}+1\right)^2}$
n) $f'(x)=-(3x+2)\cos ec^2 x+3\cot g(x)$	o) $y'=\frac{x(2\ln x-1)}{\ln^2 x}$
p) $m'(x)=\sec^2 x$	q) $l'(z)=z^2.\cos z$
r) $a'(x)=\frac{e^x x-e^x}{x^2}$	s) $s'(t)=-\frac{1}{1+sent}$

9. $x=\frac{2}{3}\pi+2k\pi \quad o \quad x=\frac{4}{3}\pi+2k\pi \quad k\in Z$

10. La normal corta a la curva en $P_1(-1,-2)$ y P_2 (1,0)

11. α = 135°

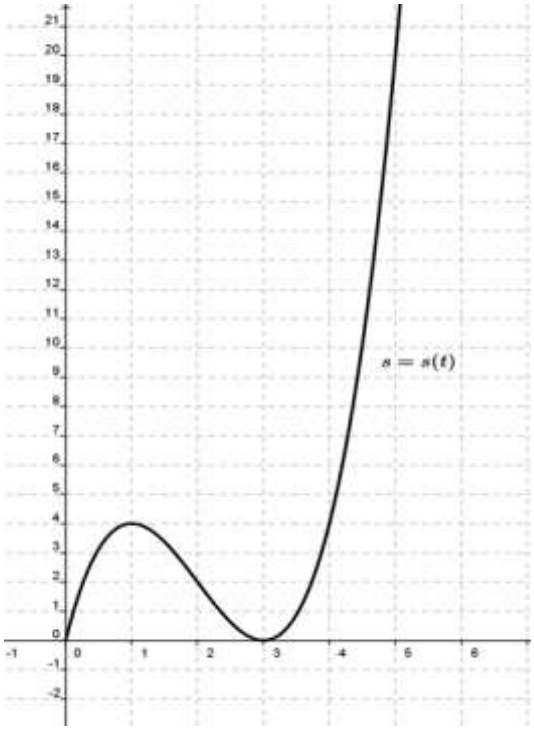
12. $P_1(0,0)\ \ P_2(\sqrt{3},-\frac{\sqrt{3}}{2})\quad P_3(-\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{2})$

14. $P_1(-1-\sqrt[4]{12}, f(-1-\sqrt[4]{12}))\quad P_2(-1+\sqrt[4]{12}, f(-1+\sqrt[4]{12}))$

15. P (4,8)
16. a = 3
17. u'(1) = 0 v'(5) = 4/3
18. a = 2; b = -5
20. a = 4; b = 8/3; c = 4/3 Ecuación de la recta tangente y =8x-4
21.

a) $f'(x)=\dfrac{2x+2}{3(x^2+2x)^{2/3}}$	b) $f'(x)=-2xe^{-x^2}$
c) $f'(t)=2sent\cos t$	d) $f'(x)=\dfrac{-sen\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$
e) $f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$	f) $f'(x)=\dfrac{4(6x+20x^3)\ln^3(3x^2+5x^4)}{3x^2+5x^4}$
g) $f'(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{\ln x^2}}$	h) $f'(t)=\cos\left(\dfrac{t}{\sqrt{t}+1}\right)\dfrac{t+2}{2(t+1)^{3/2}}$
i) $y'=\dfrac{1}{x}\left(2\ln x+\dfrac{1}{\ln x}\right)$	j) $f'(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$
k) $f'(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x\ln 10}$	l) $f'(t)=\dfrac{\ln 2\, 2^{Sh\sqrt{t}}Ch^2\sqrt{t}}{2\sqrt{t}}+\dfrac{2^{Sh\sqrt{t}}Sh\sqrt{t}}{2\sqrt{t}}$
m) $f'(r)=\dfrac{2}{3}tg^{-2/3}(2r)\sec^2(2r)$	n)
o) $g'(z)=10^{ztgz}\ln 10(tgz+z\sec^2 z)$	p) $y'=\dfrac{1}{2+2\sqrt{1+x}}$

22. a = -1, b = 4
24. a) m = 4; b = -4
b) m = b = 0
c) m = 1/3 b = -4/3
25. P (2,4) Q(-2,-4)
26. a) v(t) = $3t^2$-12t+9 b) v(2) = -3m/s v(4) = 9m/s c) t = 1s t = 3s
d) 0 < t <1 o t > 3
e) 28 m



27. a) Dom = [0,40] Im = [0,5000]
b) -125 l/min (el signo negativo significa que cada vez hay menos agua en el tanque, es decir la función decrece)
c) $V^{-1}(l) = 40 - 40\sqrt{\dfrac{l}{5000}}$ nos da el tiempo que lleva sacar l litros de agua del tanque.

28. a) El clavadista llega al agua a los 2 seg.
b) La velocidad con la que llega es de -48 pies/seg.
29. a) C'(5) ≈ -4.246 ºC/min
30. C'(500) = 15 $/artículo El costo de producir el artículo 501 es 15.01 $
31. $y = 2x + 1$ $y = -2x + 9$
32. y = (10+5π) (x-1) +8

33. a) $y' = \dfrac{2}{\sqrt{1-(2x-3)^2}}$

b) $y' = \dfrac{\sec^2 x}{b^2 + a^2 tg^2 x}$

c) $y' = \dfrac{-2x}{\sqrt{1-x^4}}$

d) $g'(s) = 2s\,arctg\,s + \dfrac{s^2}{1+s^2}$

e) $y' = \dfrac{\sec^2(arcsen\,t)}{\sqrt{1-t^2}}$

34. a) $h'(0) = 1/2$

b) $(f \circ g)'(-2) = 0$
c) $h'(1) = -5e$

35. a) y = 3x-10 b) 1 c) 1/6
36.

$$a)\, y' = -\frac{b^2 x}{a^2 y} \qquad b)\, y' = \frac{2a}{3(1-y^2)} \qquad c)\, y' = -\frac{sen(x+y)}{1+sen(x+y)}$$

$$d)\, y' = -\frac{1+ysen(xy)}{xsen(xy)} \qquad e)\, y' = \frac{y^2-2xy-2x}{x^2+2y-2xy}$$

38. Tg. horizontal: P (3; 6) y Q(-3; -6) ; Tg vertical: R(6; 3) y S(-6; -3)
40. a = 12 Otro punto con tangente horizontal (-2, -4).
41. Otro punto con la misma pendiente P (-3,-4)
42.
a) $f'(x) = x^x(1+\ln x)$
b) $f'(x) = x^{\ln x}\left(2\frac{\ln x}{x}\right)$
c) $f'(x) = (senx)^x(\ln senx + x\cot gx)$
d) $f'(x) = e^{(x^x)}x^x(1+\ln x)$
e) $f'(x) = (Chx)^{x+1}\left[\ln Chx + (x+1)Thx\right]$
43. y = -3x+1

Diferencial. Aproximación lineal

44. $a)\; dy = \frac{a}{a^2+x^2}dx;\quad b)\; dy = e^x(1+x)dx;\quad c)\; dy = \cot gx\; dx;\quad d)\; dy = \frac{-2}{(1-x^2)}dx$

45. $a)\Delta y = 0{,}00829885 \quad dy = 0{,}0083 \quad b)\Delta y = 0{,}002082249 \quad dy = 0{,}002083..$
46. $\sqrt[3]{0{,}95} \cong 0{,}9833... \quad \sqrt[3]{1{,}1} \cong 1{,}033....$

47. $a)\sqrt{82} \cong 9{,}05. \quad b)\sqrt[3]{1.02} + \sqrt[4]{1.02} \cong 2.01167 \quad c)e^{0,03} \cong 1{,}03 \quad d)tg46º \cong 1{,}03$
$e)sen29º \cong 0{,}48 \quad f)arcsen(0.48) \cong 0.500505$

49. Verdaderos: c) e) h) j) l) m) o)
Falsos: a) b) d) f) g) i) k) n)

TRABAJO PRÁCTICO Nº 4
APLICACIONES DEL CÁLCULO DIFERENCIAL

Teoremas de Rolle y del valor medio de Lagrange. Regla de L'Hopital

1. Comprobar si el Teorema de Rolle es válido para las funciones indicadas, hallando cuando sea posible los valores de **c** correspondientes:

a) $f(x) = sen^2 x$ en [0, π]	b) $f(x) = sen^2 x$ en [0, 2π]	c) $y = \frac{2-x^2}{x^4}$ en [-1; 1]
d) $y = \lvert x^2 - 1 \rvert$ en [-1,1]	e) $y = \lvert x^2 - 1 \rvert$ en [-2,2]	f) $y = x^3 - 9x$ en [-3,3]

2. a) Sea $f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)$ demostrar que la ecuación f '(x) = 0 tiene tres raíces reales distintas.
b) Usando el teorema de Rolle comprobar que entre los ceros de la función $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 5x + 6}$ se encuentra un cero de su derivada.

3. Indicar si las siguientes funciones cumplen con las condiciones del teorema de Rolle en el intervalo indicado. Si es así ¿en qué valor se verifica la conclusión? Graficar

a) $f(x) = \begin{cases} 2x+2 & x < 1 \\ 5-(x-2)^2 & x \geq 1 \end{cases}$ en [-1/2; 4]

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & x < 1 \\ 5x - 8 & x \geq 1 \end{cases}$ en [-2, 8/5]

4. Comprobar si el teorema del Valor Medio de Lagrange es válido para las funciones siguientes hallando, cuando sea posible, los valores de **c** correspondientes:

a) $y = 2x - x^2$ en [0,1]	b) $y = \sqrt{x+1}$ en [-1;4]
c) $y = \sqrt{x-1} + 2$ en [2,4]	d) $y = \ln x$ en [1; e]
e) $y = 1/x$ en [-1,1]	f) $y = \sqrt{100 - 4x^2}$ en [-4,3]
g) $y = -x^2 - x\lvert 2-x \rvert$ en [0,3]	h) $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x^2 + 4 & x \leq 2 \\ 6x - 2 & x > 2 \end{cases}$ en [1,3]

5. Sea $y = x^{2/3}$, determinar el punto ***c*** del Teorema del Valor Medio de Lagrange en [0; 1] y en [-2; 2]. Fundamentar la respuesta y realizar la gráfica correspondiente.

6. a) Un automovilista entra a una autopista y recibe en el primer puesto de peaje un talón marcado a las 13 hs. 120 kilómetros más adelante, cuando el automovilista pasa por el segundo puesto de peaje a las 14 hs, recibe una boleta de infracción. Explica esto por medio del teorema de Lagrange, suponiendo que la velocidad máxima es de 100 km/h.

b) Un avión inicia su despegue a las 2 de la tarde para efectuar un vuelo de 2500 millas. Llega a su destino a las 7:30 de la tarde. Explica por qué hay al menos dos momentos en los que su velocidad fue de 400 millas / hora.

7. a) Hallar "m" y "b" para que la siguiente función cumpla con las condiciones del Teorema de Lagrange en el intervalo [0, 2]. Calcular el punto "c".

$$f(x) = \begin{cases} mx^2 + 4 & x \leq 1 \\ bx - 2 & x > 1 \end{cases}$$

b) Hallar m, n y p para que la siguiente función cumpla con las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo [-1,5]. Luego calcular el o los valores de c del teorema:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + p.x & -1 \leq x \leq 3 \\ m.x + n & 3 < x \leq 5 \end{cases}$$

c) La siguiente función $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 3 & x \leq 1 \\ 2/x & x > 1 \end{cases}$ es continua en R. Demostrar que cumple con las hipótesis del teorema de Lagrange en el intervalo [-1,2]. Hallar el o los puntos c de la tesis del teorema

8. Sea $f(x) = |x-1|$ Demostrar que no hay un valor de c tal que $3f'(c) = f(3) - f(0)$ ¿Por qué esto no contradice el teorema del valor medio?

9. Sea el polinomio $P(x) = 5x^4 - 3x^2 + 7x - 2$. Demostrar que existe $c \in (0,2)$ tal que $P'(c) = 41$.

10. Utilizando el teorema de Rolle demostrar que la ecuación $x^5 + 10x + 3 = 0$ tiene una sola raíz real.

11. Responder con verdadero o falso. Justificar las respuestas.

a) La función $f(x) = \sqrt{x}$ satisface las hipótesis del teorema del valor medio de Lagrange en el intervalo [0;2].
b) En el intervalo [-1;1] hay sólo un punto donde la tangente a $y = x^3$ es paralela a la recta secante que une (-1,-1) con (1,1).
c) Si la gráfica de una función derivable tiene tres intersecciones con el eje *x*, debe tener al menos dos puntos de tangente horizontal.
d) Sea una función f tal que f(a) = f (b) no derivable en (a, b) entonces no existe punto de derivada cero en ese intervalo.
e) Si *f* es continua en [a; b], derivable en (a; b) y tal que existe *c* en (a; b) en el cual $f'(c) = 0$ entonces $f(a) = f(b)$
f) $|senb - sena| \leq |b - a|$ para todo a y b reales.

12. Verificar los siguientes límites indeterminados aplicando la Regla de L'Hopital.

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-arcsenx}{x^3}=-\dfrac{1}{6}$	b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^5-\sqrt{2-x}}{x^5-\sqrt[3]{x}}=\dfrac{33}{28}$	c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg(2x)}{3x}=\dfrac{2}{3}$
d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(a+x)^x-a^x}{x^2}=\dfrac{1}{a} \quad a>0$		e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{senx}=2$
f) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^x}{\ln x}=+\infty$	g) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(sen2x)}{\ln(senx)}=1$	h) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\ln x}{e^{1/x}}=0$
i) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x+\ln x}{x+2}=2$	j) $\lim\limits_{x\to 0^+} x.\ln(senx)=0$	k) $\lim\limits_{x\to 1}\ln x\cot g(1-x)=-1$
l) $\lim\limits_{x\to\infty} x(e^{1/x}-1)=1$	m) $\lim\limits_{x\to 0^+} x.e^{1/x}=+\infty$	n) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{5}{x^2-x-6}\right)=\dfrac{1}{5}$
o) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)=\dfrac{1}{2}$	p) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)=\dfrac{1}{2}$	q) $\lim\limits_{x\to\infty}(3+x)^{2/x}=1$
r) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+1}{3x-4}\right)^x=e^{5/3}$	s) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x=1$	t) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}=1$
u) $\lim\limits_{x\to +\infty}(e^x+x)^{1/x}=e$		

13. a) ¿Cómo deben ser a, b y c reales para que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}+bx+c}{x^2}=2$?

b) Sea $g(x)=\begin{cases}2f(3x)+a & x\geq 0\\ b.x & x<0\end{cases}$ Sabemos que f es derivable en R, con derivada continua en R y tal que $f'(0)=f(0)=1$ Calcular a y b para que g sea derivable en x = 0.

14. Explicar por qué no puede aplicarse la regla de L'Hopital para calcular los límites indicados y encontrarlos por otros medios:

$a)$ $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$	$b)$ $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x+senx}{x}$	$c)$ $\lim\limits_{t\to +\infty}\dfrac{e^t}{e^t-e^{-t}}$

15. a) Calcular las asíntotas de la función $f(x)=\dfrac{xe^x}{1+e^x}$.

b) Demostrar que la función $g(x)=x^{\frac{3}{4+\ln x}}$ tiene una discontinuidad evitable en x = 0 por derecha

Variación de funciones. Crecimiento, máximos y mínimos

16. a) Analizar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones:

a) $y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 1$	b) $y = x^2 - \frac{1}{x^2}$	c) $y = \sqrt{\frac{2x^2 - x}{2}}$
d) $y = \ln x - \frac{x^2}{2}$	e) $y = 2x + e^{-x}$	f) $y = x^{2/3}(1 - x)$
g) $y = 3 - \sqrt[3]{x+1}$	h) $y = \frac{4x}{x^2 + 4}$	i) $f(x) = \frac{x}{(x+1)(x+4)}$

b) De acuerdo con lo obtenido en el ítem a) establecer si las funciones estudiadas tienen máximos o mínimos relativos. Si la respuesta es afirmativa indicar en qué puntos.

17. Encontrar una función cúbica $y = a.x^3 + b.x^2 + c.x + d$ que tenga un máximo relativo en (-2,3) y un mínimo relativo en (1,0).

18. Hallar el valor de "a" para que $g(x) = \frac{\ln(a.x)}{x}$ tenga un extremo en $x = \frac{e}{2}$ Determinar de qué extremo se trata.

19. Sea $f(x) = x.e^{(-x^2 + ax)}$ Determinar el valor de "a" real para que f tenga en $x = 2$ un extremo relativo. Decidir si es un máximo o un mínimo. Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

20. Determinar el o los puntos para los cuales la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = e^{2x+1}(x^2 - 7x + 1/2)$ es mínima.

Problemas de optimización

21. Si se dispone de 1200 cm^2 de material para hacer una caja con base cuadrada y sin tapa, calcula el volumen máximo posible de esa caja.

22. Un recipiente de almacenamiento en forma de prisma rectangular con tapa debe tener 10 m^3 de volumen. La longitud de su base es el doble que la de su ancho. El material de la base cuesta 10$ por m^2 y el de los lados y la tapa 6$ por m^2. Calcula el costo mínimo de los materiales para ese recipiente.

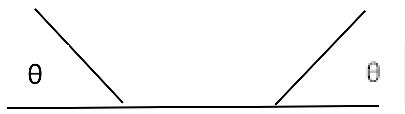
23. Una viga de madera tiene una sección transversal rectangular cuya altura es h y cuyo ancho en w. La resistencia S de la viga es directamente proporcional a su ancho y al cuadrado de su altura. ¿Cuáles son las dimensiones de la viga más resistente que pueda cortarse de un tronco redondo de 24 pulgadas de diámetro?

24. Los márgenes superior e inferior de un cartel tienen 6 cm de ancho y los laterales 4 cm. Si el área del material impreso del cartel se fija en 384 cm^2, calcula el área mínima total del cartel.

25. En una fábrica necesitan diseñar una lata cilíndrica sin tapa que contenga 1000 cm^3 de líquido utilizando la menor cantidad de hojalata posible. Determina las dimensiones de la lata.

26. Las autoridades de tránsito de una ciudad operan una línea de tren subterráneo desde un suburbio hasta el área metropolitana. En la actualidad, un promedio de 6000 pasajeros toma el tren diariamente, pagando una tarifa de 3$ por viaje. Las autoridades están pensando en subir la tarifa a 4$ para obtener mayores ingresos y solicitan un estudio a una empresa consultora. El estudio de esta empresa revela que por cada incremento de 0.5$ en la tarifa la cantidad de pasajeros se reducirá en 1000 pasajeros por día. ¿Qué tarifa le recomienda la empresa a las autoridades de tránsito?

27. Se va a construir un canalón pluvial con una lámina metálica de 30 cm de ancho, doblando hacia arriba la tercera parte de la lámina a cada lado, formando un ángulo θ con el fondo ¿cuál deber ser θ para que el canalón conduzca la mayor cantidad de agua?



28. Una empresa desea construir una bodega de base rectangular con una superficie de 5000 m^2. La bodega tendrá dos cuartos separados por una pared interior. El costo de construir las paredes exteriores será de 150 $ el metro lineal, y el de la pared interior, 90$ el metro lineal. Encuentra las dimensiones de la bodega menos costosa.

29. Un fabricante puede producir licuadoras a un costo de 100$ la unidad. Por experiencia sabe que si las vende a 800$ nadie las comprará, si las vende a 790$ realiza una venta al mes, si las vende a 780$ tendrá dos ventas al mes y así sucesivamente seguirá aumentando el promedio de unidades vendidas por cada 10$ que baje el precio de la venta. Determina el precio por el cual la utilidad del fabricante será mayor.

30. Considerar el recinto delimitado por el gráfico de $f(x)=\sqrt{x}$, el eje x y la recta x = 4. Se inscribe ahí un rectángulo de vértices A (x, 0); B(4,0); C(4,f(x)) y D(x, f(x)). Hallar el rectángulo de área máxima.

31. ¿Cuál es la mayor área posible de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 5 cm de largo?

Puntos de inflexión. Intervalos de concavidad positiva y negativa

32. Encontrar los puntos de inflexión y los intervalos de concavidad para las siguientes funciones:

a) $y=x^3-2x$	b) $y=\frac{x}{1+x^2}$	c) $y=\frac{1-x}{1+x^2}$
d) $y=\sqrt{\frac{x}{4-x}}$	e) $y=x+\frac{1}{x}$	f) $y=x^2e^{-x}$
g) $y=x^2\ln x$	h) $y=sen2x$ en $[0,2\pi]$	i) $y=(x+1)x^{1/5}$

33. Verificar que la abscisa del máximo de la curva $y = x^2 e^x$ es la semisuma de las abscisas de los puntos de inflexión.

34. Determinar *a, b, c* y *d* de modo que $y = a.x^3 + b.x^2 + c.x + d$ tenga un punto de inflexión en (-2; 6) y por tangente a $8x + y + 10 = 0$ en ese mismo punto, y, además, pase por P (0; -2).

Estudio completo de funciones. Ejercicios varios

35. Representar las funciones cuyas características son:

a) f continua en R y

$f(-2) = 3$; $f(2) = -1$; $f'(x) = 0 \quad \forall \; x > 2$; $f''(x) < 0 \quad \forall \; x < 2$

b) g continua en R y:

$g(-1) = 6$; $g(3) = -2$; $g'(x) < 0$ si $x < -1$; $g'(-1) = g'(3) = -2$;

$g'(7) = 0$; $g''(x) < 0$ si $x < -1$; $g''(x) = 0$ si $x \in (-1; 3)$

$g''(x) > 0$ si $x > 3$

c)

$f(2) = -1$, $f(0) = 0$;

$f'(2) = 0$, $f'(x) < 0$ si $0 < x < 2$, $f'(x) > 0$ si $x > 2$

$f''(x) < 0$ si $0 \le x < 1$ o si $x > 4$, $f'' > 0$ si $1 < x < 4$;

$\lim_{x \to \infty} f(x) = 1$; $f(x) = f(-x) \quad \forall \; x$

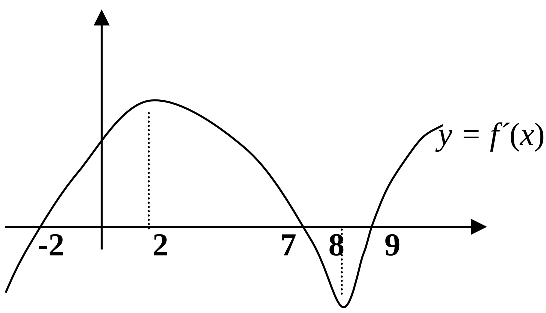
36. Se muestra la gráfica de la derivada *f ´* de una función f

a) ¿En qué intervalos crece y decrece la función?

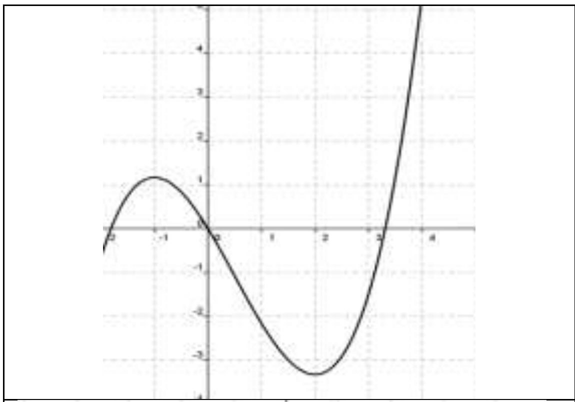
b) ¿En qué valores de *x* tiene *f* un máximo o un mínimo locales?

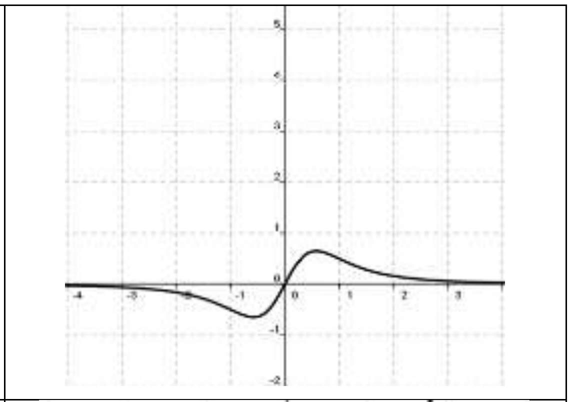
c) ¿En qué intervalos f es cóncava hacia arriba y en cuáles cóncavas hacia abajo? ¿En qué valores f tiene puntos de inflexión?

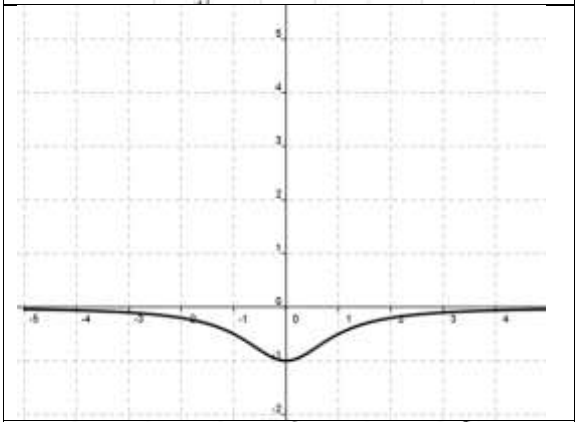
d) Si sabes que *f*(0) = 0 , traza una gráfica posible de *f*.

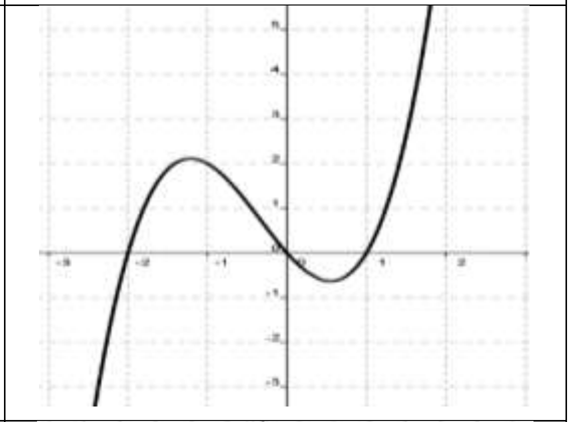


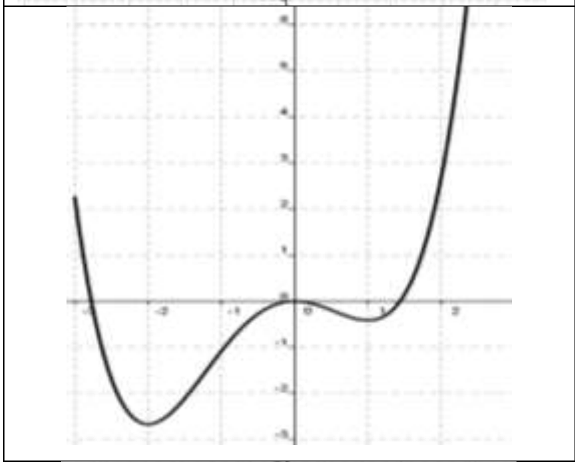
37. Relacionar el gráfico de cada función dada en la primera columna con los gráficos de sus derivadas dados en la segunda columna. **Justificar** cada una de las elecciones:

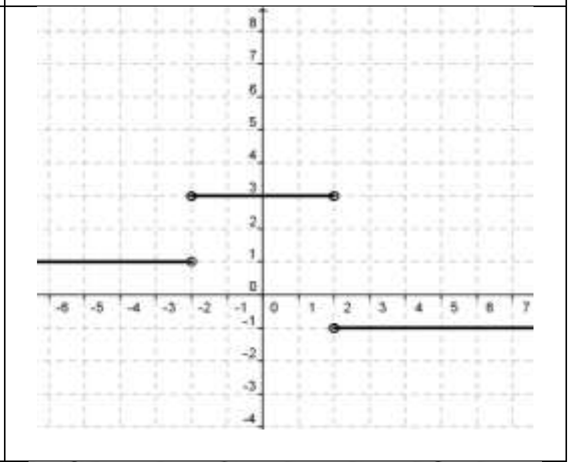


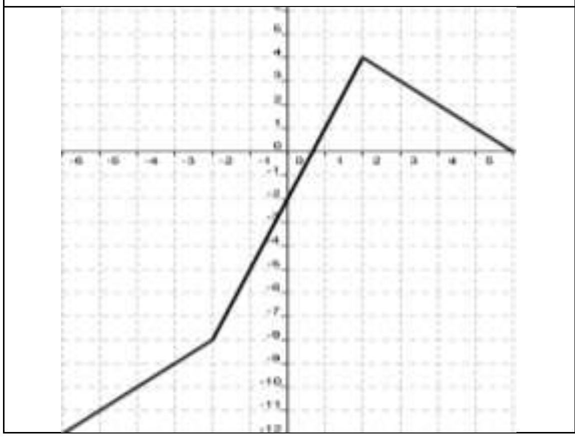


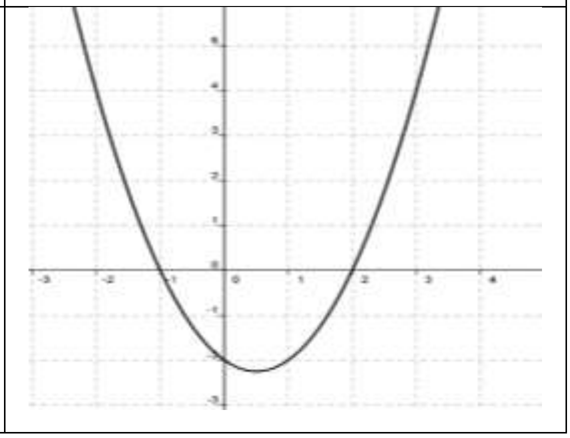












38. Realizar el estudio completo de las siguientes funciones:

a) $y=\sqrt{x}+\sqrt{4-x}$	b) $y=\dfrac{1}{x^2+3}$	c) $y=\dfrac{(x-2)(8-x)}{x^2}$
d) $y=\dfrac{e^x}{x}$	e) $y=x.e^{1/x}$	f) $y=\dfrac{x}{\ln x}$
g) $y=x^{2/3}(6-x)^{1/3}$	h) $y=f(x)=\left\|e^x-3\right\|$	i) $y=x\sqrt{1-x^2}$

39. Las siguientes proposiciones son todas FALSAS. Dar un contraejemplo de cada una.

a) Si f es creciente y derivable en (a, b) entonces $f'(x)>0 \quad \forall x\in(a,b)$

b) Si $f'(c)=0$ entonces f tiene un extremo relativo en (c, f(c))

c) Si f no es derivable en x = c entonces f tiene un extremo relativo en (c, f(c))

d) Si f no tiene extremos relativos entonces es siempre creciente o siempre decreciente en su dominio.

e) En cada punto crítico de una función existe un máximo o mínimo relativo.

f) Si f es cóncava hacia arriba y dos veces derivable en (a, b) entonces $f''(x)>0 \quad \forall x\in(a,b)$

g) Si $f''(c)=0$ entonces f tiene un punto de inflexión en (c, f(c)).

h) Si f no tiene puntos de inflexión entonces es cóncava hacia arriba en todo su dominio o cóncava hacia abajo en todo su dominio.

40. Indicar si las siguientes expresiones son V o F. Justificar

a) Si una función derivable alcanza un valor máximo en un punto interior c de su dominio, entonces $f'(c)=0$

b) Si $f'(c)=f''(c)=0$, entonces $(c, f(c))$ no es máximo ni mínimo.

c) La gráfica de $y=senx$ tiene un número infinito de puntos de inflexión.

d) Si f tiene un punto crítico en x = c entonces g(x) = f(x) + k también tiene un punto crítico en x = c.

e) Si f tiene un punto crítico en x = c entonces g(x) = f(x - k) también tiene un punto crítico en x = c.

f) La gráfica de todo polinomio cúbico tiene exactamente un punto de inflexión.

Respuestas:

1. a) $c = \frac{\pi}{2}$

b) $c_1 = \frac{\pi}{2} \quad c_2 = \pi \quad c_3 = \frac{3}{2}\pi$

c) no se puede aplicar Rolle

d) $c = 0$

e) No se puede aplicar el teorema

f) $c_1 = \sqrt{3} \quad c_2 = -\sqrt{3}$

3. a) $c = 2$ b) no se puede aplicar el teorema

4. a) $c = 1/2$

b) $c = ¼$

c) $c = 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}$

d) c = e-1

e) no se puede aplicar

f) c = $-1/\sqrt{2}$

g) no se puede aplicar

h) c = 7/4

5. En [0,1] $c = \frac{8}{27}$, en [-2,2] no se puede aplicar Lagrange.

6. a) La velocidad media es 120 km/h, por el teorema de Lagrange existe algún instante entre las 13hs y las 14hs en el que la velocidad instantánea alcanzada por el automovilista fue 120km/h, cometiendo de este modo una infracción.

b) La velocidad media es 454,5454...millas/h Por el teorema de Lagrange en algún instante la velocidad instantánea fue 454.54...millas/h. Siendo las velocidades inicial y final 0 deben existir dos instantes, por lo menos en los cuales la velocidad fue 400 millas/h.

7. a) m = 6; b = 12; c = ¾

b) m = -8/3; p = 10/3; n = 9; c = 5/3

c) c = 1/6

11. Verdaderas: a) c) f) Falsas: b) d) e)

13. a) a =2, b = -2 , c = -1 ó a = -2 , b = 2 ,c = -1

b) a = -2, b = 6

14.

$a)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = 1$	$b)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{x+senx}{x} = 1$	$c)\ \lim_{t\to+\infty} \frac{e^t}{e^t - e^{-t}} = 1$

15. a) y = x (AO por derecha) y = 0 (AH por izquierda)

16.

	Dominio	Intervalo de crecimiento	Intervalo decrecimiento	Máximos y mínimos
a)	R	$(-\infty,-2)\cup(3,+\infty)$	(-2,3)	(-2,45) Máximo relativo. (3,-80) Mínimo relativo.

b)	R -{0}	(0, +∞)	(-∞, 0)	No tiene
c)	$(-\infty,0]\cup[1/2,+\infty)$	(1/2, +∞)	(-∞,0)	(1/2,0) y (0,0) Mínimos absolutos
d)	R^+	(0,1)	(1, +∞)	(1, -1/2) Máximo relativo y absoluto
e)	R	(-ln2, +∞)	(-∞, -ln2)	(-ln2, 2-2ln2) Mínimo absoluto
f)	R	(0, 2/5)	(-∞, 0) U (2/5, +∞)	(0,0) mínimo (2/5, $3/5(2/5)^{2/3}$) máximo
g)	R	-	R	No tiene
h)	R	(-2,2)	(-∞, -2) U (2, +∞)	(2,1) Máximo relativo y absoluto (-2,-1) Mínimo relativo y absoluto
i)	$R-\{-1,-4\}$	$(-2,-1)\cup(-1,2)$	$(-\infty,-4)\cup(-4,-2)$ $\cup(2,+\infty)$	(-2,1) mínimo relativo (2,1/9) máximo relativo

17. a = 2/9 b = 1/3 c = -4/3 d = 7/9
18. a = 2 y se trata de un máximo
19. a = 7/2 Intervalo crecimiento = (-1/4, 2)
Intervalo decrecimiento = (-∞, -1/4) U (2, +∞)
(2, f(2)) Máximo
20. P(6, f(6))
21. El volumen máximo posible es 4000 cm^3
22. El costo mínimo es 191.279 $
23. El ancho es w = $8\sqrt{3}$ pulgadas y la altura h = $8\sqrt{6}$ pulgadas.
24. El área mínima es 864 cm^2
25. r = h = $\frac{10}{\sqrt[3]{\pi}}$
26. La consultora recomienda no aumentar el boleto.
27. θ = π/3
28. Las dimensiones son $100\sqrt{\frac{5}{13}}m \quad y \quad 50\sqrt{\frac{13}{5}}m$
29. 450$
30. x = 4/3 Área máxima: $\frac{16}{9}\sqrt{3}$
31. A = 25/4 cm^2
32.

	Punto de inflexión	Concavidad (+)	Concavidad (-)
a	(0;0)	$(0;+\infty)$	$(-\infty;0)$
b	$P_1(0;0);P_2(-\sqrt{3};-\frac{\sqrt{3}}{4})$ $P_3(\sqrt{3};\frac{\sqrt{3}}{4})$	$(-\sqrt{3};0)\cup(\sqrt{3};+\infty)$	$(-\infty;-\sqrt{3})\cup(0;\sqrt{3})$

c	$P_1(-1;1);P_2(2-\sqrt{3};\frac{1+\sqrt{3}}{4})$ $P_3\left(2+\sqrt{3};\frac{1-\sqrt{3}}{4}\right)$	$(-\infty;-1)\cup(2-\sqrt{3};2+\sqrt{3})$	$(-1;2-\sqrt{3})\cup(2+\sqrt{3};\infty)$
d	$(1;\frac{\sqrt{3}}{3})$	$(1;4)$	$(0;1)$
e	*no hay*	$(0;+\infty)$	$(-\infty;0)$
f	$P_1\left(2+\sqrt{2};\left(2+\sqrt{2}\right)^2e^{-(2+\sqrt{2})}\right)$ $P_2\left(2-\sqrt{2};\left(2-\sqrt{2}\right)^2e^{-(2-\sqrt{2})}\right)$	$(-\infty;2-\sqrt{2})\cup(2+\sqrt{2};+\infty)$	$(2-\sqrt{2};2+\sqrt{2})$
g	$(e^{-3/2};-\frac{3}{2}e^{-3})$	$(e^{-3/2};+\infty)$	$(0;e^{-3/2})$
h	$P_1(\pi;0)$; $P_2(\frac{\pi}{2};0)$; $P_3(\frac{3\pi}{2};0)$	$(\frac{\pi}{2};\pi)\cup(\frac{3\pi}{2};2\pi)$	$(0;\frac{\pi}{2})\cup(\pi;\frac{3\pi}{2})$
i	$P_1(0;0)$; $P_2(\frac{2}{3};\frac{5}{3}(2/3)^{1/5})$	$(-\infty;0)\cup(2/3;+\infty)$	$(0;2/3)$

34. a = 1; b = 6; c = 4; d = -2

36. La función crece en $(-2,7)\cup(9,+\infty)$ y decrece en $(-\infty,-2)\cup(7,9)$. En (-2,f(-2)) tiene un mínimo relativo, en (7,f(7)) un máximo relativo y en (9,f(9)) un mínimo relativo. En $(-\infty,2)\cup(8,+\infty)$ es cóncava hacia arriba y en $(2,8)$ cóncava hacia abajo. En (2,f(2)) y (8,f(8)) tiene puntos de inflexión.

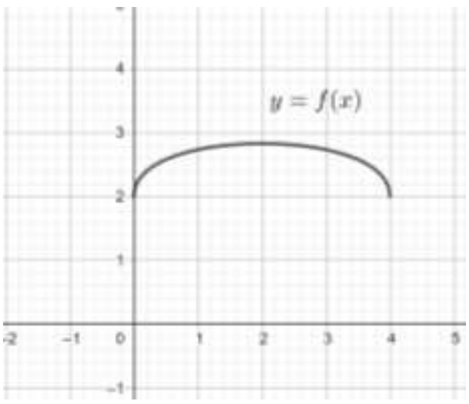
38. a) $D_f=[0,4]$ $\quad \mathrm{Im}_f=[2,2\sqrt{2}]$

∩ejes: (0,2); no tiene asíntotas ni paridad definida

Crece en (0,2) y decrece en (2,4) Máximo relativo y absoluto (2, 2√2); Mínimos absolutos (0,2) y (4,2)

Es cóncava hacia abajo en su dominio. No tiene Puntos de inflexión

Gráfico:



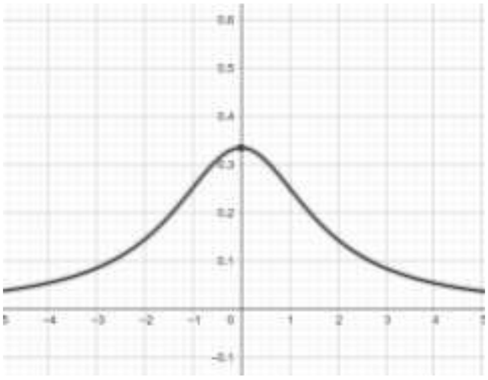
b) $D_f=R$ $\quad \mathrm{Im}_f=(0,1/3]$

∩ejes: (0,1/3); es par e y = 0 es asíntota horizontal

Crece en (-∞,0) y decrece en (0,+∞) Máximo relativo y absoluto (0, 1/3)

Es cóncava hacia arriba en (-∞,-1)U(1,+∞) y cóncava hacia abajo en (-1,1) PI (-1,1/4) y (1,1/4)

Gráfico



c) $D_f = R - \{0\} \quad \mathrm{Im}_f = (-\infty, 9/16]$

∩ejes: (2,0) (8,0). Asíntotas: x = 0, y = -1

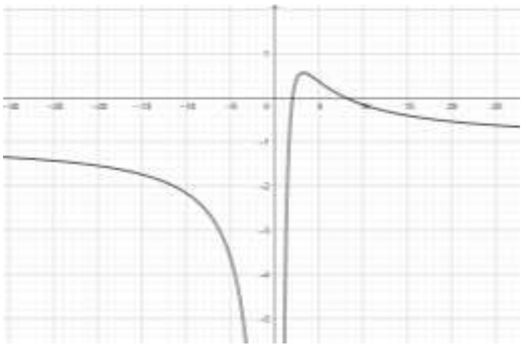
Decrece en $(-\infty, 0) \cup (16/5, +\infty)$ y crece en (0,16/5)

Máximo relativo y absoluto (16/5, 9/16)

Es cóncava hacia arriba en $(24/5, +\infty)$ y cóncava hacia abajo en $(-\infty, 0) \cup (0, 24/5)$

Punto de inflexión en (24/5, 7/18)

Gráfico:



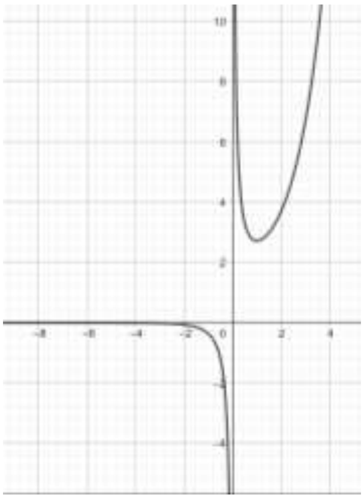
d) $D_f = R - \{0\} \quad \mathrm{Im}_f = (-\infty, 0) \cup [e, +\infty)$

∩ejes: no tiene. Asíntotas: x = 0; y = 0 (para x → -∞)

Crece en (1, +∞) y decrece en (-∞,0) U (0,1) Mínimo relativo (1, e)

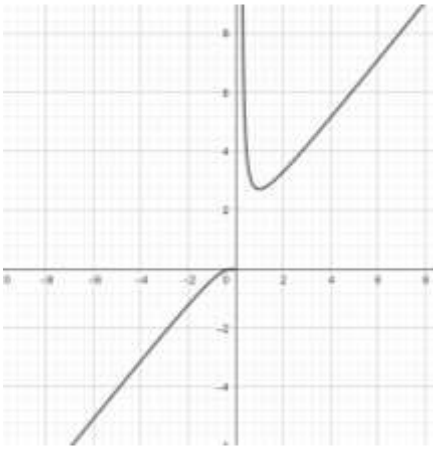
Es cóncava hacia abajo en (-∞, 0) y cóncava hacia arriba en (0, +∞) No tiene puntos de inflexión.

Gráfico:



e) $D_f = R - \{0\} \quad \text{Im}_f = (-\infty, 0) \cup [e, +\infty)$

No tiene intersecciones con los ejes. Asíntotas: x = 0 (por derecha) y = x +1 AO
Crece en $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ y decrece en (0,1) Mínimo relativo (1, e)
Es cóncava hacia abajo en $(-\infty, 0)$ y cóncava hacia arriba en $(0, +\infty)$
Gráfico:

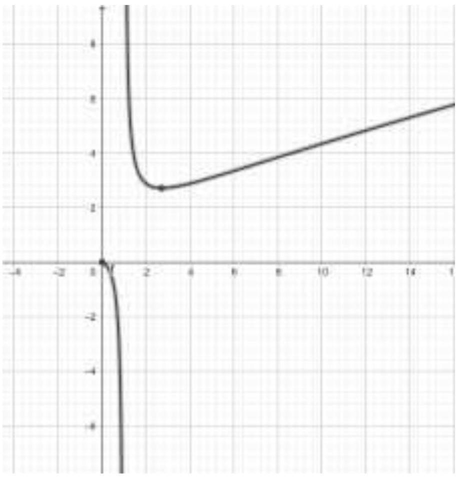


f) $D_f = R^+ - \{1\} \quad \text{Im} = (-\infty, 0) \cup [e, +\infty)$

No tiene intersecciones con los ejes. Asíntotas: x = 1 AV
En x = 0 tiene una discontinuidad evitable.
Crece en $(e, +\infty)$ y decrece en $(0,1) \cup (1, e)$
Mínimo relativo en (e, e)
Es cóncava hacia arriba en $(1, e^2)$ y cóncava hacia abajo en $(0,1) \cup (e^2, +\infty)$

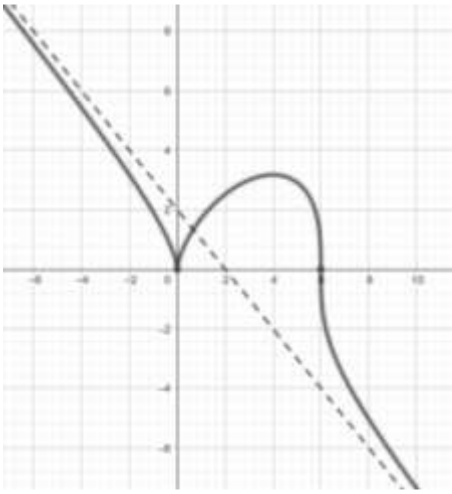
Punto de inflexión en $(e^2, \frac{e^2}{2})$

Gráfico:

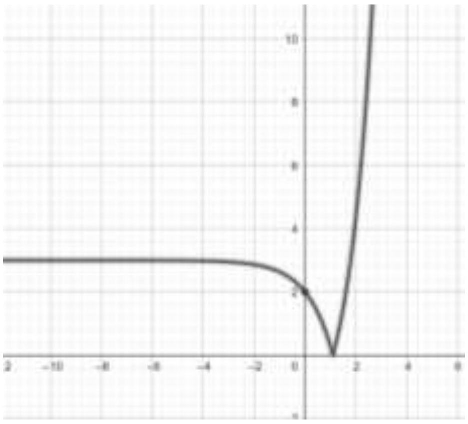


g) D = I = R
∩ejes: (0,0) (6,0). Asíntotas: y = -x + 2 AO
Crece en (0,4) y decrece en $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$
Mínimo relativo (0,0) y máximo relativo (4, f(4))

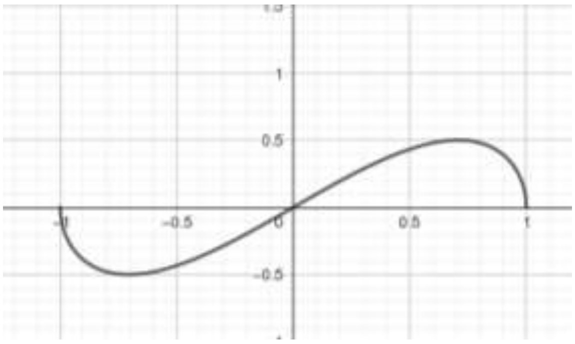
Es cóncava hacia abajo en $(-\infty,0)\cup(0,6)$ y cóncava hacia arriba en $(6,+\infty)$
Punto de inflexión: (6, f(6))
Gráfico



h) Dom=R Im= [0, +∞)
∩ejes: (0, 2); (ln3,0). Asíntotas: y = 3 (para x → -∞)
Crece en (ln3, +∞) y decrece en (-∞, ln3) Mínimo relativo y absoluto (ln3,0)
Es cóncava hacia abajo en (-∞, ln3) y cóncava hacia arriba en (ln3,+∞)
Punto de inflexión (ln3, 0)
Gráfico:



i) $D_f = [-1,1] \quad I = [-1/2, 1/2]$
Intersecciones con los ejes: (-1,0) (0,0) (1,0) Es impar. No tiene asíntotas
Crece en $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ Decrece en $\left(-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cup\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$
Máximo absoluto y relativo $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$ Mínimo absoluto y relativo $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right)$
Cóncava hacia arriba (-1,0) Cóncava hacia abajo (0,1) Punto de inflexión (0,0)
Gráfico



40. Verdaderas: a) c) d) f) g
Falsas: b) e)

TRABAJO PRÁCTICO Nº 5
POLINOMIOS DE TAYLOR

1. Determinar el orden de contacto en el origen para $f(x)=e^x$ $g(x)=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$

2. ¿Para qué valores de los coeficientes a, b y c las funciones

a) $f(x)=ax+b$ y $g(x)=x^3-3x^2+2$ tienen contacto superior a 1?

b) $f(x)=ax^2+bx+c$; $g(x)=e^x$ tienen contacto de segundo orden en a = 0?

3. Hallar el polinomio de Taylor de orden 3 en x = a para las siguientes funciones y utilizarlo para aproximar el valor indicado en cada caso. Verificar con calculadora.

a) $f(x)=\frac{1}{x}$; $a=1$; $f(1{,}3)$

b) $f(x)=\cos(x-2)$; $a=2$; $\cos(0{,}1)$

c) $f(x)=\sqrt{x+1}$; $a=0$; $\sqrt{0{,}85}$

4. Utilizando un polinomio de grado n adecuado aproximar los siguientes valores:
a) $e^{1/2}$ n = 4
b) $\ln(0{,}4)$ n = 3
c) $sen 31°$ n = 2

5. a) Completar la tabla usando los polinomios de Taylor $P_1(x); P_2(x)$ de $f(x)=\ln x$, centrado en a = 1.

x	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00
$\ln x$	0	0,2231	0,4055	0,5596	0,6931
$P_1(x)$					
$P_2(x)$					

b) Representar la función f y los polinomios de Taylor del apartado anterior.
c) ¿Qué conclusión se puede sacar mirando las columnas? ¿y las filas?

6. Encontrar el polinomio de Maclaurin de orden n para $f(x)=\frac{1}{1-x}$. Usarlo después con n = 4 para calcular el valor aproximado de $a)\, f(0{,}1)$ $b)\, f(0{,}5)$ $c)\, f(0{,}9)$ $d)\, f(2)$. ¿Qué se puede decir con respecto a la aproximación a medida que nos alejamos de x = 0?

7. Si un objeto de masa en reposo m_0 (con velocidad inicial v_0=0) tiene luego una velocidad v, entonces, de acuerdo con la teoría de la relatividad, su masa m está dada por $m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, donde c es la velocidad de la luz. Mostrar cómo los físicos obtienen la aproximación $m \approx m_0+\frac{m_0}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2$.

8. La velocidad con la que una determinada sustancia crece es proporcional a la cantidad de sustancia n(t) existente en cada instante t. Sabiendo que n'(t) = ¼ n(t), demostrar:

a) $n^{(k)}(t) = \dfrac{1}{4^k} n(t) \quad k \geq 2$

b) En t = 0, la cantidad de sustancia es n (0) = 200. Utilizando el desarrollo de Mac Laurin de orden 5 de la función dada calcular un valor aproximado de la cantidad de sustancia existente cuando han transcurrido 10 unidades de tiempo.

9. Hallar un desarrollo de Mac Laurin adecuado para resolver las siguientes ecuaciones:

a) $arctgx = x^2$

b) $e^x = x^3 + 1$

10. Dada $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$, hallar los polinomios de Taylor de grado n = 1, 3, 6, 9 para

a) a = 0

b) a = 1

¿En qué casos son una representación exacta de $f(x)$?

11. Determinar el resto de cada una de las siguientes identidades:

a) $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^4}{24} + R_4(x)$

b) $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + R_6(x)$

c) $senx = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + R_5(x)$

d) $\ln x = x - 1 - \dfrac{1}{2}(x-1)^2 + \dfrac{1}{3}(x-1)^3 + R_3(x)$

12. Sea $f(x) = 1 + 3x + \operatorname{sen} x$

a) Escribir el polinomio de Taylor en a = 0, de orden 4

b) Estimar f (1/3) mediante el polinomio calculado en el ítem a)

c) Calcular, estimando el resto, el error que se comete al realizar dicha aproximación.

13. a) Sea $f(x) = \sqrt{16+x}$, calcular aproximadamente $\sqrt{16,5}$, utilizando el polinomio de Taylor de orden 2 en *a* = 0, acotando el resto para estimar el error que se comete.

b) Sea $f(x) = \ln x$, calcular aproximadamente $\ln(1,23)$ utilizando un polinomio de Taylor de orden 3 en a = 1. Acotar el error que se comete al usar esa aproximación.

c) Sea $f(x) = x.\ln x$ hallar el polinomio de Taylor de orden n = 3 en a = 1 para aproximar el valor de $f(1,5)$. Acotar el error que se comete al usar esa aproximación.

14. Utilizar un polinomio de Mac Laurin de orden 5 para aproximar $e^{1/3}$ y probar que el error cometido es menor a $\dfrac{1}{174960}$.

15. ¿Cuántos términos es suficiente tomar en el desarrollo de Taylor de e^x en el origen de modo de obtener un polinomio que aproxime dicha función en todo el intervalo [-1;1] con un error menor que 10^{-4}? A partir del cálculo hecho, halla las tres primeras cifras del desarrollo decimal del número e.

16. a) Si $f(x) = \text{sen}(ax+b)$ $a, b \in \Re$ determinar a y b si su polinomio de Maclaurin de grado uno es $P(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+4x)$

b) Sabiendo que $a.\ln(bx+1) \cong -\frac{15}{2}(2x+3x^2)$ hallar a y b

17. Hallar a y b para que el polinomio de Mac Laurin de $f(x) = \ln(ax+b)$ sea $P(x) = 6x$ Luego usar el polinomio para aproximar $\ln(1,06)$ y acotar el error cometido usando la fórmula del resto.

18. La función f satisface la ecuación diferencial $(5x+1)f'(x) + f(x) = 1$ y $f(0) = 2$ Encontrar el polinomio de MacLaurin de orden 3 de f.

19. Sea $g(x) = 1 - 3x + \sqrt{f(x)}$ Si el polinomio de MacLaurin de g de orden dos es $P_2(x) = 2 - x + 3x^2$, hallar el polinomio de MacLaurin de orden 2 de f (suponemos f derivable en x = 0 dos veces y positiva).

20. Verdadero-Falso. Justifica las respuestas.

a) El polinomio de Maclaurin de orden 4 para e^x es $P_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}$

b) El coeficiente de x^6 en el polinomio de Maclaurin de orden 9 es $\dfrac{f^{(6)}(6)}{6!}$.

c) El residuo $R_n(x)$ en la fórmula de Taylor tiene la forma $f_{(a)}^{(n+1)} \dfrac{(x-a)^{(n+1)}}{(n+1)!}$

d) El polinomio de Taylor de orden 3 en $x = 1$ para $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 5$ es una representación exacta de $f(x)$.

e) Si una función f es impar entonces su polinomio de Mac Laurin sólo tiene potencias impares de x.

f) Si $P(x)$ es el polinomio de Maclaurin de orden 2 para $f(x)$, entonces $P(0) = f(0)$, $P'(0) = f'(0)$, $P''(0) = f''(0)$.

g) Si $P(x) = -8 + 3(x-2)^2 + 3(x-2)^4 + (x-2)^5$ es el polinomio de Taylor de f de orden 5 en a = 2 entonces $f^{(4)}(2) = 3$

.

Respuestas:

1. orden 2

2. a) a = -3 ; b = 3 b) $a=\frac{1}{2}; \quad b=1; \quad c=1$

3.

$a) P_3(x) = 1-(x-1)+(x-1)^2-(x-1)^3 \qquad f(1.3) \cong P_3(1.3) = 0.763$

$b) P_3(x) = 1-\frac{1}{2!}(x-2)^2; \qquad \cos(0.1) \cong 0.995$

$c) P_3(x) = 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3 \qquad \sqrt{0.85} \cong P_3(-0.15) = 0.921977$

4. Se pueden elegir otras funciones y puntos, diferentes a los dados en esta respuesta, para aproximar los valores pedidos

a) $f(x)=e^x \;\; a=0 \quad P_4(x)=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}$

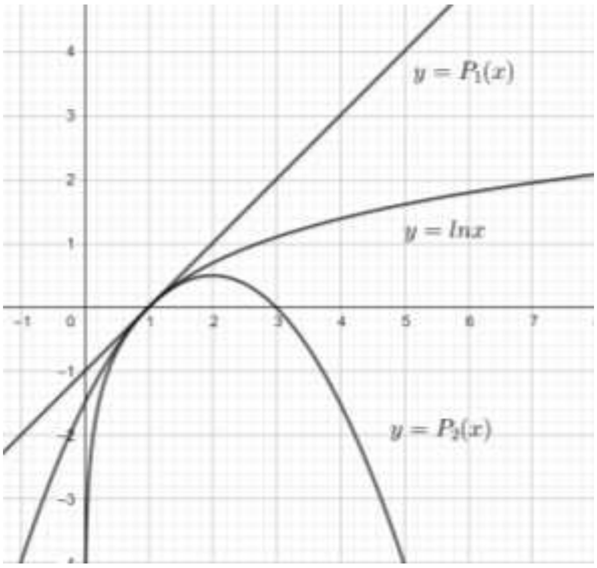
b) $f(x)=\ln(x) \;\; a=1 \quad P_3(x)=x-1-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{3}(x-1)^3$

c) $f(x)=senx \;\; a=\frac{\pi}{6} \quad P_2(x)=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{4}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^2$

5.

$P_1(x) = x-1; \qquad P_2(x) = -\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{3}{2}$

x	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00
$\ln x$	0	0,2231	0,4055	0,5596	0,6931
$P_1(x)$	0	0,25	0,5	0,75	1
$P_2(x)$	0	0,21875	0,375	0,46875	1/2



6. $P_n(x) = 1+x+x^2+x^3+......+x^n$

x	f(x)	P_4 (x)	$\lvert f(x) - P_4(x) \rvert$
0.1	1,1…	1.1111	0.00001111
0.5	2	1.9375	0.0625
0.9	10	4.0951	5.9049
2	-1	31	32

8. b) n(10) ≈2334 unidades de sustancia
9. a) $x_1 = 0$ $x_2 \approx 0.7913$ **b)** $x_1=0$, $x_2= -0.835782$, $x_3=1.43578$
10.

$$a) P_1(x) = -2+3x \quad P_3(x) = -2+3x+x^3 \quad P_6(x) = P_9(x) = P_3(x)$$

$$b)\ P_1(x) = 2-6(x-1) \quad P_3(x) = 2+6(x-1)+3(x-1)^2+(x-1)^3$$

$$P_6(x) = P_9(x) = P_3(x)$$

11. a) $R_4(x) = \dfrac{e^c x^5}{5!} \qquad 0<c<x$

b) $R_6(x) = \dfrac{x^7}{(1-c)^8} \qquad 0<c<x$

c) $R_5(x) = \dfrac{-senc.x^6}{6!} \qquad 0<c<x$

d) $R_3(x) = \dfrac{-6(x-1)^4}{c^4 4!} \qquad 1<c<x$

12.

$$a) P_4(x) = 1+4x-\frac{x^3}{3!}; \qquad b) f(1/3) \cong 2.32716 \quad c) R_4(1/3) \le 0{,}000035 \quad R_4(1/3) = 0.00003$$

13. a) $\sqrt{16{,}5} \cong 4{,}0620117 \;\; R_2(0.5) \le 8.10^{-6}$

b) $\ln(1,23) \simeq 0,207606 \;\; R_3(1,23) < 0,0006996$

c) $f(1,5) \simeq 0,604167 \;\; R_3(1,5) < 0,00520833$

14. $e^{1/3} \approx 1.39561$
15. n = 7 e = 2,718
16.

$$a)\ a = 4 \quad ; \quad b = \pi/4 \qquad ; \quad b)\ a = 5 \quad ; \quad b = -3$$

17. a = 6; b = 1
18.

$$P_3(x) = 2-x+3x^2-11x^3$$

19. $P_2(x) = 1+4x+10x^2$
20. Verdaderas: d) e) f)
Falsas: a) b) c) g)

TRABAJO PRÁCTICO Nº 6
CÁLCULO DE PRIMITIVAS

1. ¿Es $F: R \to R / F(x) = x.e^x - e^x + 2$ una primitiva de $f: R \to R / f(x) = x.e^x$? Justificar la respuesta.

2. ¿Cuáles de las siguientes funciones son primitivas de la función $f: R \to R / f(x) = senx$?

a) $F_1(x) = tgx$

b) $F_2(x) = -\cos x + 2$

c) $F_3(x) = \cos x + 1$

d) $F_4(x) = -2\cos x$

e) $F_5(x) = -\cos x$

3. De las siguientes afirmaciones, indicar cuáles son verdaderas:

a) $F(x) = tgx$ es una primitiva de $f(x) = tg^2 x + 1$

b) $F(x) = \dfrac{x^4}{4} - \ln 2$ es una primitiva de $f(x) = x^3$

c) $F(x) = \cos(2x)$ es una primitiva de $f(x) = -sen(2x)$

d) $F(x) = x^2$ es una primitiva de $f(x) = \dfrac{x^3}{3}$

4. Desde un globo en reposo situado a una altura de 3000 m sobre la tierra, se lanza un objeto verticalmente hacia abajo con v_0 = 15 m/s. ¿En qué momento llega al piso? ¿Con qué velocidad llega al piso? (Hay que recordar que si s(t) es la función posición de un objeto $s'(t) = v(t)$)

5. Desde una altura de 80 m se lanza una pelota hacia arriba con una velocidad inicial de 10 m/s. ¿Qué altura máxima alcanza? ¿En qué instante?

6. Una empresa estima que el costo marginal, en pesos por artículo, cuando produce x artículos es de 1.92-0.002x. Si el costo de producción unitario es de 562$, calcular el costo de elaborar 100 artículos (Recordar que estudiamos que si C(x) es el costo de producir x artículos C'(x) es el costo marginal)

7. ¿Con qué velocidad inicial deberá lanzarse un objeto hacia arriba desde una altura de 2m para que alcance una altura máxima de 200 m?

8. Resolver las siguientes integrales inmediatas:

a) $\int \frac{x+\sqrt{x}}{x^2}dx$	b) $\int \sqrt[3]{u}\,(u+1)(u+3)\,du$	c) $\int [2x+\ln(5)-\cos x]\,dx$

d) $\int \frac{x^3+x+1}{1+x^2}dx$	e) $\int \left(e^3t^3+\frac{1}{\sqrt{t}}\right)dt$	f) $\int (\sqrt{z}+\sqrt{a})^2\,dz =$
g) $\int \frac{\sqrt{x}-x^3e^x+x^2}{x^3}dx$	h) $\int 5^x.e^{3x}dx =$	i) $\int \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-2Shx\right)dx$

9. Resolver las siguientes integrales por sustitución:

a) $\int x^2(x^3+1)dx =$	*b)* $\int sen(3x).\cos(3x)dx =$	*c)* $\int \sqrt{2x-3}dx =$
d) $\int \frac{1}{3x+5}dx =$	*e)* $\int tgx dx =$	*f)* $\int \frac{3x}{1+x^2}dx =$
g) $\int \frac{senx}{1+\cos^2 x}dx =$	*h)* $\int \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}}dx =$	*i)* $\int \frac{e^{\sqrt{x}}+1}{\sqrt{x}}dx =$
j) $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx =$	*k)* $\int \frac{1}{\sqrt{25-16x^2}}dx =$	*l)* $\int \frac{x}{\sqrt{2x^2+5}}dx =$
m) $\int e^{x^4}x^3dx =$	*n)* $\int \frac{4x+2}{2x-1}dx =$	*o)* $\int \frac{1}{25+9x^2}dx =$
p) $\int \frac{1}{e^x+e^{-x}}dx =$	q) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx$	r) $\int \frac{x^3-1}{x^4-4x+1}dx$

10. Un cultivo tiene una cantidad inicial N_0 de bacterias. Cuando t = 1 h, la cantidad medida de bacterias es $\frac{3}{2}$ N_0. Si la razón de reproducción es proporcional a la cantidad de bacterias presentes, calcular el tiempo necesario para triplicar la cantidad inicial de los microorganismos.

11. Un depósito cilíndrico se está llenando de agua. La rapidez con la que fluye el agua en el recipiente está dada por $V'(t) = 5\ e^{t/3}\ cm^3/s$. Calcular la cantidad de agua que entra al depósito entre el primer y tercer segundo.

12. Integrar por partes:

a) $\int (x+2).e^{-x}dx =$	b) $\int x\,sen(3x)\,dx =$	c) $\int \ln x dx$
d) $\int arcsen\left(\frac{x}{2}\right)dx$	e) $\int (x^3-2x)e^{3x}\,dx =$	f) $\int e^x\cos x\,dx =$
g) $\int x.Sh(x-3)dx =$	h) $\int x^2\ln x dx$	i) $\int \ln(x^2+9)\,dx =$
j) $\int sen(\ln x)dx =$	k) $\int x\ .\sqrt{2x+1}\,dx =$	l) $\int e^{2x}senx\,dx =$

13. En un sistema masa resorte la masa oscila alrededor del punto de equilibrio con velocidad dada por la función $v(t) = -10e^{-t}(2sen(2t) + \cos(2t))$ Si inicialmente la masa se encuentra a 10 unidades del punto de equilibrio. ¿Cuál es la fórmula que nos da la posición en cualquier tiempo t?

14. Verificar los siguientes resultados, resolviendo por descomposición en fracciones simples

a) $\int \frac{x+3}{x^3-x}dx = -3\ln|x| + 2\ln|x-1| + \ln|x+1| + C$

b) $\int \frac{x}{x^2-6x+8}dx = \ln\left|\frac{(x-4)^2}{x-2}\right| + C$

c) $\int \frac{1}{x^2-9}dx = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right| + C$

d) $\int \frac{x^3+x^2+2}{x^3-x}dx = x + \ln\left|\frac{(x-1)^2(x+1)}{x^2}\right| + C$

e) $\int \frac{x}{(x+1)(x+2)^2}dx = -\frac{2}{x+2} + \ln\left|\frac{x+2}{x+1}\right| + C$

f) $\int \frac{1+x}{x(1+x^2)}dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x^2}{1+x^2}\right| + \operatorname{arctg} x + C$

g) $\int \frac{x+2}{1-x^4}dx = -\frac{3}{4}\ln|x-1| + \frac{1}{4}\ln|x+1| + \frac{1}{4}\ln(1+x^2) + arctgx + C$

h) $\int \frac{x^3}{(1+x)^3}dx = x + \frac{1}{2(x+1)^2} - \frac{3}{x+1} - 3\ln|x+1| + C$

i) $\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x(1+\cos^2 x)}dx = \frac{1}{2}\ln(1+\cos^2 x) - \ln(\cos x) + C$

j) $\int \frac{2x^2-3x+11}{(x-1)(x^2+9)}dx = \ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln(x^2+9) - \frac{2}{3}arctg\frac{x}{3} + C$

k) $\int \frac{x^4-x^3-x-1}{x^3-x^2}dx = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} + \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)^2 + C$

l) $\int \frac{1}{x^3+2x^2+x+2}dx = \frac{2}{5}arctgx + \frac{1}{5}\ln|x+2| - \frac{1}{10}\ln|x^2+1| + C$

15. La población de un determinado cultivo de bacteria ha crecido según la razón:

$$p'(t) = \frac{200t}{(t+1)^2}$$

bacterias por hora. ¿Cuál es el incremento de la población en el intervalo $0 \le t \le 4$?

16. Integrar eligiendo el método de integración adecuado:

a) $\int \frac{x+6}{x+1}dx =$	b) $\int xarctgxdx$	c) $\int \frac{\cos x}{sen^2 x}dx =$

$d)\ \displaystyle\int (x^2+7x-5)\cos(2x)\,dx=$	$e)\ \displaystyle\int \frac{x+1}{x^3+x^2-6x}\,dx=$	$f)\ \displaystyle\int e^{\sqrt{x}}\,dx=$
g) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}\,dx$	$h)\ \displaystyle\int \frac{x}{1+x^4}\,dx=$	i) $\displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt{e^x+4}}\,dx$
j) $\displaystyle\int x^4 sen(7x^5-3)\,dx$	k) $\displaystyle\int e^{x/2} sen(2x)dx$	l) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3-2x^2+x}$

17. De la familia de curvas que satisface $y'=\dfrac{x+3x^2}{y^2}$ hallar la curva que pasa por (0,6).

18. Hallar la familia de curvas cuya pendiente en un punto *P* es m = $3x^2y$, y determina la curva de esa familia que pasa por *P* (0;8).

19. Hallar la ecuación de la curva que pasa por *P* (1;0) en el que la pendiente es igual a 4, verificándose en cualquiera de sus puntos que $y'' = 6x-8$.

20. Determinar la curva que pasa por el punto de coordenadas (3;4), sabiendo que en cada punto su pendiente es el doble de la abscisa del punto.

21. Una pequeña bala de cañón que pesa 16 libras se dispara verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de v_0 = 90m/s ¿qué tanto sube la bala de cañón sin tener en cuenta la resistencia al aire? (considerar que cuando sólo actúa la fuerza de la gravedad y la dirección hacia arriba la consideramos positiva, la segunda ley de Newton establece que $a(t)=s''(t)=-g=-9.8m/s^2$)

22. De acuerdo con la ley empírica de Newton del enfriamiento o calentamiento, la rapidez a la que cambia la temperatura de un cuerpo es proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo y la temperatura del medio ambiente. Si T(t) representa la temperatura del cuerpo en el tiempo t, T_m la temperatura del medio circundante, se pide:

a) Formular la ecuación que representa este modelo matemático. (Es conveniente simbolizar a la derivada de T con dT/dt).
b) Responder al siguiente problema: al sacar un pastel del horno, su temperatura es 300°F. Después de 3 minutos, 200ºF. ¿En cuánto tiempo se enfriará hasta la temperatura ambiente de 70ºF?

23. Encontrar en cada caso una función que satisfaga:

a) $G''(x)=6x \quad G'(1)=3 \quad G(0)=1$
b) $G'''(x)=x+senx \quad G''(0)=G'(0)=G(0)=5$

24. Encontrar una primitiva F de la función $f(x)=\dfrac{e^{3x}}{e^{3x}+4}$ que satisfaga $F(0)=1/3\ln 5$

Respuestas

1. Si
2. $F_2(x), F_5(x)$
3. a) b)
4. t = 23.26s   v = 243 m /s
5. t = 1.02 s   h = 85.102 m
6. 742.08$
7. 62.3m/s
8.

a) $\ln\|x\| - \frac{2}{\sqrt{x}} + C$	b) $\left(\frac{3}{10}u^2 + \frac{12}{7}u + \frac{9}{4}\right)u\sqrt[3]{u}$	c) $x^2 + x.\ln 5 - senx + C$
d) $\frac{x^2}{2} + arctgx + C$	e) $\frac{1}{4}e^3t^4 + 2\sqrt{t} + C$	f) $\frac{z^2}{2} + \frac{4}{3}z^{3/2}\sqrt{a} + az + C$
g) $-\frac{2}{3\sqrt{x^3}} - e^x + \ln\|x\| + C$	h) $\frac{(5e^3)^x}{\ln 5 + 3} + C$	i) $arcsenx - 2Chx + C$

9.

a) $\frac{\left(x^3+1\right)^2}{6} + C$	b) $\frac{1}{6}\text{sen}^2(3x) + C$	c) $\frac{1}{3}\left(\sqrt{2x-3}\right)^3 + C$
d) $\frac{1}{3}\ln\|3x+5\| + C$	e) $-\ln\|\cos x\| + C$	f) $\frac{3}{2}\ln\left(1+x^2\right) + C$
g) $-arctg(\cos x) + C$	$x - \frac{1}{2e^{2x}} + C$	i) $2e^{\sqrt{x}} + 2\sqrt{x} + C$
j) $\frac{2}{3}\ln^{3/2} x + C$	k) $\frac{1}{4}\text{arcsen}\left(\frac{4}{5}x\right) + C$	l) $\frac{\sqrt{2x^2+5}}{2} + C$
m) $\frac{1}{4}e^{x^4} + C$	n) $2x + 2\ln\|2x-1\| + C$	o) $\frac{1}{15}\text{arctg}\left(\frac{3x}{5}\right) + C$
p) $arctge^x + C$	q) $-2\sqrt{x} + x + 2\ln(1+\sqrt{x}) + C$	r) $\frac{1}{4}\ln\left\|x^4 - 4x + 1\right\| + C$

10. En aproximadamente 2 horas 43 minutos se triplica la cantidad de microrganismos.
11. Entre el primer y tercer segundo entran 19.84 cm^3 de agua.
12.

a) $-e^{-x}(x+3) + C$	b) $-\frac{1}{3}x.\cos(3x) + \frac{1}{9}sen(3x) + C$
c) $x.\ln x - x + C$	d) $x\,arcsen\left(\frac{x}{2}\right) + \sqrt{4-x^2} + C$
e) $\frac{e^{3x}}{27}\left(4 - 12x - 9x^2 + 9x^3\right) + C$	f) $\frac{e^x}{2}(\text{sen}\,x + \cos x) + C$

g) $x\,Ch(x-3)-Sh(x-3)+C$	h) $\frac{x^3}{3}.(\ln x-\frac{1}{3})+c$
i) $x.(\ln x^2+9)-2x+6arctg\frac{x}{3}+c$	j) $\frac{1}{2}x.[sen(\ln x)-\cos(\ln x)]+c$
k) $\frac{1}{15}(2x+1)^{3/2}(3x-1)+C$	l) $-\frac{e^{2x}}{5}(\cos x-2senx)+C$

13. s(t) = 10 e^{-t} cos(2t)

15. El incremento es de 161 bacterias.

16.

a) $x+5\ln\lvert x+1\rvert+C$	b) $-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}arctgx+\frac{1}{2}x^2arctgx+C$	c) $-\frac{1}{senx}+C$
d) $\left(x^2+7x-5\right)\frac{sen(2x)}{2}+(2x+7)\frac{\cos(2x)}{4}-\frac{sen(2x)}{4}+C$		
e) $-\frac{1}{6}Ln\lvert x\rvert+\frac{3}{10}Ln\lvert x-2\rvert-\frac{2}{15}Ln\lvert x+3\rvert+C$		
f) $2\sqrt{x}\,e^{\sqrt{x}}-2e^{\sqrt{x}}+C$	g) $2\sqrt{\ln x}+C$	h) $\frac{1}{2}arctg(x^2)+C$
i) $2\sqrt{e^x+4}+C$	j) $-\frac{1}{35}\cos(7x^5-3)+C$	
k) $-\frac{2}{17}e^{x/2}(4\cos(2x)-sen(2x))+C$	l) $\ln\left\lvert\frac{x}{x-1}\right\rvert-\frac{1}{x-1}+C$	

17. $y=\sqrt[3]{\frac{3}{2}x^2+3x^3+6}$

18. $y=8e^{x^3}$

19. $y=x^3-4x^2+9x-6$

20. $y=x^2-5$

21. La bala de cañón sube hasta aproximadamente 413 m

22. El modelo matemático es $T(t)=T_m+C\,e^{kt}$ Para la parte b) $T(t)=70+230\,e^{-0.19018t}$, por lo cual en aproximadamente 35 minutos el pastel adquiere la temperatura ambiente.

23. a) $G(x)=x^3+1$

b) $G(x)=x^4/24+\cos x+3x^2+5x+4$

24. $F(x)=\frac{1}{3}\ln(4+e^{3x})$

TRABAJO PRÁCTICO Nº 7
INTEGRAL DEFINIDA

1. Calcular una suma de aproximación para las integrales de las siguientes funciones, en el intervalo cerrado indicado, y con el número de subintervalos señalados.

a) $f(x) = x^2$ en [0;8], para n = 2; n =4; n = 8
b) $f(x) = x + 2$ en [-3; 3], para n = 2; n = 3; n = 6
c) $f(x) = 1/x$ en [1; 9] para n = 2; n = 4; n = 8

2. La velocidad en km/h de un automóvil que se mueve a lo largo de una carretera recta durante dos horas está dada en la siguiente tabla:

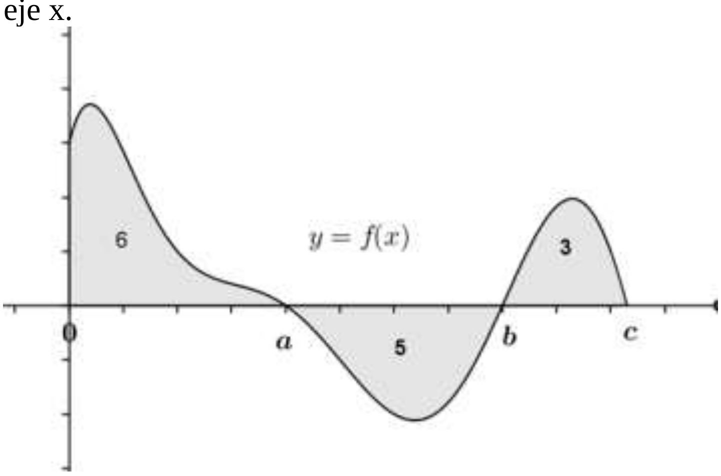
t (hs)	0	0.25	0.5	0.75	1	1.25	1.5	1.75	2
v (km/h)	80	80	100	100	90	110	80	100	120

Calcular mediante sumas de aproximación con n = 4 el espacio recorrido por el automóvil.

3. Sabiendo que $\int_0^3 f(x)dx = 2 \quad \int_3^6 f(x)dx = -5 \quad \int_3^6 g(x)dx = 1$, calcular si es posible, justificando en cada caso tu respuesta, las siguientes integrales:

a) $\int_0^3 5f(x)dx$	b) $\int_0^6 -\frac{f(x)}{2}dx$	c) $\int_3^6 \lvert f(x) \rvert dx$
d) $\int_3^6 (3f(x) - g(x))dx$	e) $\int_6^3 (f(x) + 2g(x))dx$	

4. La figura muestra el área de las regiones sombreadas que forma el gráfico de f con el eje x.



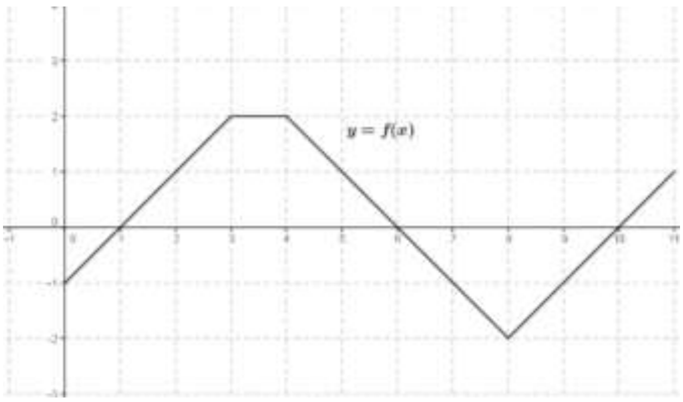
Con esos datos evaluar las siguientes integrales:

$\int_0^a f(x)dx$	$\int_0^b f(x)dx$	$\int_a^c f(x)dx$
$\int_0^c f(x)dx$	$\int_0^c \lvert f(x)\rvert dx$	

5. Sabiendo que la función f es continua en el intervalo [-5,5] y $\int_0^5 f(x)dx = 4$, evaluar cada una de las siguientes integrales. Justificar la respuesta

a) $\int_0^5 (f(x)+2)dx$	b) $\int_{-2}^3 f(x+2)dx$	c) $\int_{-5}^5 f(x)dx$ (si f es par)
d) $\int_{-5}^5 f(x)dx$ (si f es impar)		

6. Como se muestra en la figura, la gráfica de f consta de segmentos de recta. Evaluar cada una de las integrales definidas siguientes usando **argumentos geométricos**. Justificar



a) $\int_0^1 -f(x)dx$	b) $\int_3^4 3f(x)dx$	c) $\int_0^7 f(x)dx$
d) $\int_5^{11} f(x)dx$	e) $\int_0^{11} f(x)dx$	

7. Sin calcular F(x), hallar F´(x):

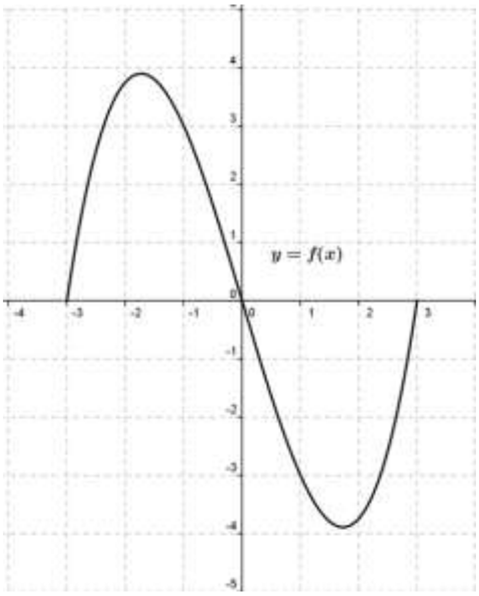
a) $F(x) = \int_{-6}^x (2z+1)dz$	b) $F(x) = \int_x^0 \frac{dt}{1+t+t^2}$	c) $F(x) = \int_1^{\sqrt{x}} \frac{\cos t}{1+t^2}dt$
d) $F(x) = \int_0^{x^3-x} (t-2)dt$	e) $F(x) = \int_1^{x^3} sen^3 t dt$	

8. a) Sin resolver la integral, calcular $\lim_{x\to 2} \dfrac{\int_8^{x^3} \sqrt{t^2+1+t}\quad dt}{x^2-4}$

b) Clasificar la discontinuidad x = 0 de la función $g(x)=\dfrac{\int_0^{x^2+2x}(t+1)dt}{3x^2+2x}$

c) Calcular sin resolver la integral $\lim_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{\ln(x^2+1)}\sqrt{1+t}\ dt}{e^{x^2}-1}$

9. Sea $F(x)=\int_{-3}^{x} f(t)dt$ donde f es una función impar cuyo gráfico se muestra:



a) Calcula F(-3) y F(3)
b) ¿En qué intervalo F es creciente?
c) ¿En qué intervalo F es decreciente?
d) ¿Dónde F tiene un valor máximo?

10. Sean las siguientes funciones: $f(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ x & 0\le x<1 \\ 2-x & 1\le x<2 \\ 0 & x\ge 2 \end{cases}$

Y $g(x)=\int_0^x f(t)dt$

a) Deduce la fórmula de g análoga a la de f
b) Traza las gráficas de f y g
c) ¿Dónde son diferenciables f y g respectivamente?

11. a) Sin resolver la integral halla el polinomio de Taylor de orden 2 de $f(x) = 2 - \int_2^{x+1} \frac{9}{1+t}\,dt$ cuando a = 1 y utilízalo para calcular aproximadamente f (0.9). Verificar comparando con el valor exacto de f (0.9).

b) Sin resolver la integral hallar el polinomio de Mac Laurin de orden 3 de $f(x) = \int_0^x t\ sent\ dt$ y utilizarlo para calcular aproximadamente $f(0{,}15)$. Verificar comparando con el valor exacto de $f(0{,}15)$.

12.
a) Hallar una función $f : (0,+\infty) \to R$ derivable que satisfaga la ecuación integral:
$(x+3)f(x) = x^3 + 1 + \int_1^x f(t)dt$ y $f(1) = 1/2$.

b) Hallar una función g continua tal que:
$1 + \int_0^{\ln x} g(e^t)dt = x^2 + \ln x \quad x > 0$

c) Calcular $\left(f^{-1}\right)'(0)$ si se sabe que $f(x) = \int_\pi^x (1 + sen(sent))dt$

d) Si f es continua y $\int_0^9 f(x)dx = 4$, encontrar el valor de $\int_0^3 xf(x^2)dx$

13. a) Evaluar las siguientes integrales definidas:

a) $\int_1^4 \frac{6x + 5\sqrt{x} + 1}{2\sqrt{x}}dx$

b) $\int_{-2}^{-1} (2x-1)e^{2x}dx$

c) $\int_0^{5\pi/4} senx.\cos x dx$

¿Cuál de ellas coincide con el área que forma el gráfico de la función y el eje x? Justificar la respuesta.

b) Calcular mediante la regla de Barrow las integrales planteadas por aproximación del ejercicio 1. Comparar resultados.

14. Encontrar los números b tales que el valor medio de $f(x) = 2 + 6x - 3x^2$ en el intervalo [0; *b*] sea igual a 3. Interpretar gráficamente.

15. La temperatura en ºF de cierta ciudad t horas después de las 9 am, se expresa, aproximadamente, mediante la función:

$$F(t) = 50 + 14sen\left(\frac{\pi\, t}{12}\right)$$

Calcular la temperatura promedio de dicha ciudad entre las 9 am y las 9 pm considerando como instante inicial t = 0 para las 9 am.

16. Una partícula se mueve a lo largo de un eje a una velocidad de $v(t) = 11 + 9.8t$, donde la velocidad está en metros/segundos.

a) Encontrar la distancia total recorrida por la partícula en $1 \le t \le 4$.

b) Encontrar la velocidad media de la partícula en ese intervalo.

17. La razón de cambio B del número de bacterias en función de la temperatura T está dada por

$$\frac{dB}{dT} = (10 - T)(T - 30).$$

Si se sabe que para una temperatura de 0º hay 2000 bacterias:

a) Encontrar la función que describe el número de bacterias en función de la temperatura.
b) Calcular el número promedio de bacterias entre las temperaturas 5º y 12º.
c) Encontrar la o las temperaturas para las cuales el número de bacterias es máximo y mínimo.

18. Hallar el área de la figura limitada por la curva y el eje **x.** Representar gráficamente.

a) $y = \lvert 3x - 4 \rvert$ en [-1,3]	b) $y = x^3 + 3x^2 - 4x$	c) $y = x e^x$ en [-1,0]
d) $y = \frac{\ln x}{x}$ en [1, e]	e) $y = \frac{x-2}{x(x+1)}$ en [1, 4]	f) $y = sen^2 x$ en [0, π]

19. Graficar y hallar el área de las figuras limitadas por las curvas indicadas:

a) $\begin{cases} y = 6x - x^2 \\ y = x^2 - 2x \end{cases}$	b) $\begin{cases} y = \frac{x^2}{2} - 2x + 1 \\ y = \frac{x}{3} + 1 \\ y = -x + 5 \end{cases}$	c) $\begin{cases} y = \sqrt{3x} + 1 \\ y = x + 1 \end{cases}$
d) $\begin{cases} y^2 = x \\ y + 2 = x \end{cases}$	e) $\begin{cases} y = 2^x \\ y = 2^{-x} \\ y = 4 \end{cases}$	f) $\begin{cases} y = 3x^3 - x^2 - 10x \\ y = -x^2 + 2x \end{cases}$
g) $\begin{cases} y = x^3 \\ y = 4x \end{cases}$	h) $\begin{cases} y = \lvert x - 1 \rvert \\ y = x^2 - 3 \end{cases}$	i) $\begin{cases} 3 - y^2 = x \\ y + 1 = x \end{cases}$
j) $\begin{cases} y = \frac{x}{x^2 + 1} \\ y = \frac{x}{x + 7} \end{cases}$	k) $\begin{cases} y = xe^{2x} \\ y = xe^{x+3} \end{cases}$	

20. ¿Cuál es el área del triángulo de mayor tamaño, en el primer cuadrante, con dos lados en los ejes y el tercero tangente a la gráfica de $y = e^{-x}$?

21. Estudiar y representar la curva $y = x^2 \ln x$. Encontrar el área comprendida entre la curva, el eje x la recta $x = 1/2$ y la recta $x = 2$.

22. Determinar el área encerrada por el eje de abscisas y la curva de ecuación $y=\left|x^3-1\right|-2$. Graficar.

23. Calcular el área de la figura delimitada por $f(x)=\ln x$, x = e y la recta normal a $f(x)$ en (1; 0). Graficar.

24. Calcular el área de la región encerrada por la curva $y=x^3-x$ y la recta tangente a esta curva en x =1. Graficar.

25. Dentro de t años la inversión de una empresa generará utilidades a una tasa $P_1'(t)=50+t^2$ miles de U$S por año; en tanto que una segunda inversión generará utilidades a una tasa de $P_2'(t)=200+5t$ miles de U$S al año.

a) ¿Durante cuántos años sobrepasa la tasa de rentabilidad de la segunda inversión a la primera inversión?
b) ¿Cuánto es el exceso neto en utilidad para el período determinado en el inciso a)?

26. Hallar $k \in R^-$ tal que el área encerrada por $y=x-x^2$ e $y-k.x=0$ sea 9/2.

27. Hallar los volúmenes de los sólidos de revolución engendrados cuando las curvas indicadas rotan alrededor del eje x. Graficar

a) $y=2x/3$ en [2, 5]	b) $y=x^2$ en [1, 2]	c) $y=senx$ en [0, π/2]
d) $y=x^2+3$ en [-2,2]	e) $y=\sqrt{\ln x}$ en [1, e]	f) $y=\sqrt{x+1}\,e^x$ en [0,1]

28. a) Resolver a), b) y d) del ejercicio anterior cuando la curva rota alrededor del eje ***y***.

b) Hallar el volumen del sólido generado al girar $y=sen(x^2)$ en el intervalo $\left[0,\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right]$ sobre el eje y.

29. Encontrar el volumen del cuerpo de revolución generado por el recinto limitado por la curva $y=\sqrt{16-x^2}$ al girar alrededor del eje x.

30. Determinar, por integración, la expresión del volumen de un cono de radio r y altura h.

31. Determinar el volumen generado por la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ al girar alrededor del eje x.

32. Obtener el volumen del tronco de cono engendrado por el trapecio de lados $x=0$, $x=5$, $y=0$, $2x-2y+5=0$.

33. Nos piden que diseñemos una plomada de bronce que pese alrededor de 190 gr y te decides a darle la forma de un sólido de revolución que responde a la ecuación $y=\frac{x}{12}\sqrt{36-x^2}$. Hallar el volumen de la plomada. Si elegimos bronce de 8,5 gr/cm^3 ¿Cuánto pesará la plomada?

34. Calcular el volumen del cuerpo engendrado por la figura limitada por las curvas que se indican al girar alrededor del eje ***x***:

a) $\begin{cases} y = x^2+1 \\ y = x+3 \end{cases}$	b) $\begin{cases} y = x^2 \\ y = -x^2+8 \end{cases}$	c) $\begin{cases} y = x^3/32 \\ y^2 = x \end{cases}$	d) $\begin{cases} y = 4/x \\ y = -x+5 \end{cases}$

35. Un fabricante taladra un orificio a través de una esfera metálica de 5 pulgadas de radio. El radio del orificio es de 3 pulgadas ¿Cuál es el volumen del anillo metálico que se obtiene?

36. Calcular el volumen engendrado por la hipérbola $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$ en el intervalo [-6;6]

37. Determinar si cada una de las siguientes integrales impropias es convergente o divergente. Evaluar las convergentes:

a) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$	b) $\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$	c) $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}dx$
d) $\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$	e) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$	f) $\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x}dx$
g) $\int_2^{\infty} \frac{1}{(x+2)(x+3)}dx$	h) $\int_0^{+\infty} senxdx$	i) $\int_0^1 \frac{1}{x}dx$
j) $\int_0^1 \ln xdx$	k) $\int_0^{\pi/4} \frac{\cos x}{\sqrt{senx}}dx$	l) $\int_{-1}^0 \frac{1}{x^2}dx$
ll) $\int_0^4 \frac{1}{x^2+x-6}dx$	m) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x-1)^2}$	n) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{e^{\lvert x\rvert}}dx$

38. Calcular el área del recinto determinado por $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$, su asíntota vertical y la recta $x=4$.

39. Determinar el área encerrada por $f(x)=e^{-x}$ en el primer cuadrante.

40. Determinar el área delimitada por $g(x)=e^{2x}$ su asíntota y el eje de ordenadas.

41. Hallar el área de la región del plano comprendida entre la curva $y=\frac{x^2-1}{x^2+1}$ y su asíntota.

42. Demostrar que la región R = {(x, y) / x ≥ 1, 0 ≤ y ≤ 1/x} tiene área infinita pero que girándola alrededor del eje x, obtenemos un cuerpo con volumen finito.

43. Verdadero – Falso. Justificar.

a) Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo [a; b], con $a \neq b$, tal que $\int_a^b f(x)\,dx = 0$ entonces existe un ***c*** perteneciente al mencionado intervalo, para el cual $f(c) = 0$

b) Si $f\,'$ es continua sobre [1;3], entonces $\int_1^3 f'(v)\,dv = f(3) - f(1)$

c) $\int_0^2 (x - x^2)\,dx$ representa el área bajo la curva $y = x - x^2$ en [0,2].

d) $\left(\int_0^{x^2} \frac{1}{1+t^2}\,dt \right)' = \frac{1}{1+x^4}$

e) Si se duplica el radio de la base de un cono en tanto que su altura se reduce a la mitad, el volumen seguirá siendo el mismo. Justifica usando integración.

f) $\int_0^4 \frac{x}{x^2 - 1}\,dx = \frac{1}{2}\ln 15$

g) Si f es continua en $[0, +\infty)$ y $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0 \Rightarrow \int_0^{\infty} f(x)\,dx$ es convergente.

h) Si f es continua en $[0, +\infty)$ y $\int_0^{\infty} f(x)\,dx \; es \; divergente \Rightarrow \lim_{x\to\infty} f(x) \neq 0$

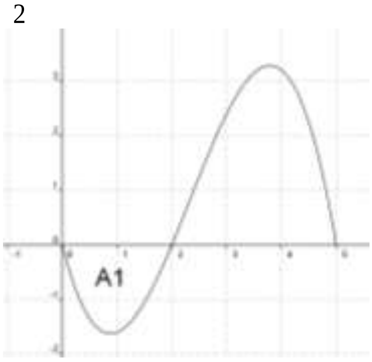
i) Si $f\,'$ es continua en $[0;\infty]$ y $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0 \Rightarrow \int_0^{\infty} f\,'(x)\,dx = -f(0)$.

j) Si $\int_a^b f(x)\,dx = 0$, entonces $f(x) = 0 \quad \forall x \in [a, b]$

k) Si f es continua en $\Re$ y $\int_0^x f(t)\,dt = x^2(1+x)$ entonces $f(2) = 16$

l) Si f es par y continua sobre R, entonces $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$, donde a es cualquier número real positivo.

m) Supongamos que la región A1 tiene área 2.5 y que la $\int_0^5 f(x)dx = 5.5$ entonces $\int_2^5 f(x)dx = 3$



o) Las funciones $F(x)=\int_1^x \frac{dt}{t}$ y $G(x)=\int_1^{x^2}\frac{dt}{2t}$ difieren en una constante para x > 1.

p) Si $f(x)=\int_1^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$ entonces $(f)'(2)=1/\sqrt{17}$

q) Si f es continua, positiva y decreciente en [a,b], entonces la función integral $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ también es decreciente en dicho intervalo.

Respuestas:

1. Si hacemos una partición regular en cada caso, y tomamos como punto muestra "*c*" el valor central de cada uno de los subintervalos resulta:

$$a)\ n=2:\ \sum_1^2 f(c_i)\Delta x_i = 160,\quad n=4:\ \sum_1^4 f(c_i)\Delta x_i = 168,\quad n=8:\ \sum_1^8 f(c_i)\Delta x_i = 170$$

$$b)\ n=2:\ \sum_1^2 f(c_i)\Delta x_i = 12,\quad n=3:\ \sum_1^3 f(c_i)\Delta x_i = 12,\quad n=6:\ \sum_1^6 f(c_i)\Delta x_i = 12$$

$$c)\ n=2:\ \sum_1^2 f(c_i)\Delta x_i \cong 1{,}9,\quad n=4:\ \sum_1^4 f(c_i)\Delta x_i \cong 2{,}08,\quad n=8:\ \sum_1^8 f(c_i)\Delta x_i \cong 2{,}16$$

3. a) 10 b) 3/2 c) no se puede establecer d) -16 e) 3

4.

$\int_0^a f(x)dx = 6$	$\int_0^b f(x)dx = 1$	$\int_a^c f(x)dx = -2$
$\int_0^c f(x)dx = 4$	$\int_0^c \lvert f(x)\rvert dx = 14$	

5.

a) $\int_0^5 (f(x)+2)dx = 14$	b) $\int_{-2}^3 f(x+2)dx = 4$	c) $\int_{-5}^5 f(x)dx = 8$ (si f es par)
d) $\int_{-5}^5 f(x)dx = 0$ (si f es impar)		

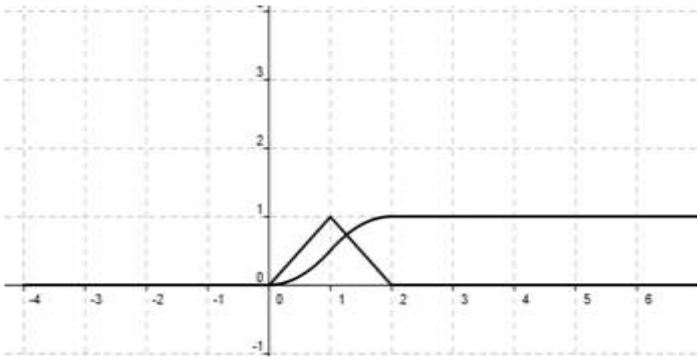
6.

a) $\int_0^1 -f(x)dx = 1/2$	b) $\int_3^4 3f(x)dx = 6$	c) $\int_0^7 f(x)dx = 5$
d) $\int_5^{11} f(x)dx = -3$	e) $\int_0^{11} f(x)dx = 2$	

7.

a) $F'(x) = 2x+1$	b) $F'(x) = -\dfrac{1}{x^2+x+1}$	c) $F'(x) = \dfrac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}(1+x)}$
d) $F'(x) = (x^3-x-2)(3x^2-1)$	e) $F'(x) = sen^3(x^3)3x^2$	

8. a) $3\sqrt{73}$
b) discontinuidad evitable
c) 1
9. F(-3) = F(3) = 0
F es creciente en $(-3,0)$
F es decreciente en $(0,3)$
F tiene un valor máximo en (0, F(0)).
10.



$$g(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ x^2/2 & 0\le x<1\\ -1+2x-x^2/2 & 1\le x<2\\ 1 & x\ge 2\end{cases}$$

La función f es diferenciable en R – {0, 1 , 2}. La función g es derivable en R.

11. a) $P_2(x)=2-3(x-1)+\dfrac{(x-1)^2}{2}$

$f(0,9)\simeq 2,305$

b) $P_3(x)=\dfrac{x^3}{3}$ $P_3(0.15)=0,001125$

$$\int_0^{0,15} t.sentdt=-0.15\cos(0.15)+sen(0.15)=0,00112247$$

12. a) $f(x)=\dfrac{3}{2}x^2-9x+27\ln(x+3)+8-27\ln 4$

b) $g(x)=2x^2+1$

c) $\left(f^{-1}\right)'(0)=1$

d) 2

13. a)

a) 45/2

b) $\dfrac{3-2e^2}{e^4}$

c) $1/4$

b) $\int_0^8 x^2dx=170,666...$ $\int_{-3}^{3}(x+2)\,dx=12$

$\int_1^9 \dfrac{1}{x}dx=\ln 9\cong 2,19$

14. $b=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

15. 58.9 ºF

16. a) 106.5 m b) 35.5 m/s

17. a) $B(T)=-\dfrac{T^3}{3}+20T^2-300T+2000$

b) 737 bacterias

c) Para T = 10° el número de bacterias es mínimo y para T = 30° el número de bacterias es máximo.

18.

a) 37/3 (unidades de área)
b) 131/4 (unidades de área)
c) 1-2/e (unidades de área)
d) 1/2 (unidades de área)
e) ln(1000/729) ≈ 0.32 (unidades de área)
f) π/2 (unidades de área)

19.

a) 64/3 (unidades de área)
b) 1550/81 (unidades de área)
c) 3/2 (unidades de área)
d) 9/2 (unidades cuadradas)
e) -6/ln2 + 16 (unidades cuadradas)
f) 24 (unidades cuadradas)
g) 8 (unidades cuadradas)
h) $\frac{1}{12}(77+17\sqrt{17}) \simeq 12,26$ (unidades cuadradas)
i) 9/2 (unidades cuadradas)
j) $-1+\frac{15}{2}\ln(50)-14\ln(7) \simeq 1,097$ (unidades cuadradas)
k) $-\frac{1}{4}+e^3+\frac{3}{4}e^6 \simeq 322,41$ (unidades cuadradas)

20. 2/e (unidades cuadradas)

21. $D=(0;+\infty)$ no tiene asíntotas, $\left(e^{-1/2};-\frac{1}{2}e^{-1}\right)$ mínimo, $\left(e^{-3/2};-\frac{3}{2}e^{-3}\right)$ punto de inflexión

A = 7/72 (-7 + 9 ln8) (unidades de área)

22. $3/4 \quad (-1++3\sqrt[3]{3}) \cong 2.49$ (unidades cuadradas)

23. A = 3/2 – e + e^2/2 (unidades cuadradas)

24. Recta tangente $y = 2x$-2   Área = 27/4 (unidades cuadradas)

25. a) 15 años   b) 1687500 U$S

26. k = -2

27.

a) $V=\frac{52}{3}\pi$ (unidades de volumen)
b) $V=\frac{31}{5}\pi$ (unidades de volumen)
c) $V=\frac{\pi^2}{4}$ (unidades de volumen)
d) $V=\frac{404}{5}\pi$ (unidades de volumen)
e) $V=\pi$ (unidades de volumen)
f) $V=\frac{\pi}{4}(3e^2-1) \cong 16,62$ (unidades de volumen)

28. a) $a)\ V = 26\pi$, $b)\ V = \dfrac{15}{2}\pi$, $d)\ V = 8\pi$

b) $\dfrac{\pi}{2}(\pi - 2)$ (unidades de volumen)

29. $V = \dfrac{256}{3}\pi$ (unidades de volumen)

30. $V = \dfrac{\pi\, r^2 h}{3}$ (unidades de volumen)

31. $V = \dfrac{4\,\pi\, b^2 a}{3}$ (unidades de volumen)

32. $V = \dfrac{1625}{12}\pi$ (unidades de volumen)

33. V = (36 π)/5 La plomada pesa aproximadamente 192.3 gramos
34. a) $V = 117\pi/5$; b) $V = 512\pi/3$; c) $V = 40\,\pi/7$; d) $V = 9\ \pi$
35. (256 π)/3 pulgadas cúbicas.
36. V = 240 π (unidades de volumen)
37. Convergentes: a) π/2; c) 1; d) 1; e) π/2; g) ln(5/4); j) -1; k) $2^{3/4}$ n) 0
Divergentes: b) f) i) l) ll) m)
Oscilante: h)
38. A = 4 (unidades de área)
39. A = 1 (unidades de área)
40. A = ½ (unidades de área)
41. A = 2π (unidades de área)
43. Verdaderos: a) b) i) k) l) o)
Falso: c) d) e) f) g) h) j) m) q)

TRABAJO PRÁCTICO Nº8
SUCESIONES Y SERIES

1. a) Escribe los cinco primeros términos de las sucesiones siguientes:

a) $a_n = \dfrac{2n}{n+1}$	b) $b_n = 1+(-1)^n$	c) $c_n = \dfrac{2^n}{n^2+1}$
d) $d_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2}$	e) $e_n = \dfrac{\ln(n^3)}{2n}$	

b) Determina si las sucesiones anteriores son convergentes, divergentes u oscilantes.

2. Si la tasa de inflación de un país es del 4,5% anual y actualmente el precio de un automóvil es de 16000 $ (unidad monetaria de ese país). Calcula los precios promedios de ese auto para los próximos 5 años.

3. Escribe la expresión del término general de las siguientes sucesiones y luego determina si son o no convergentes:

a) 1, 2, 3,.......................
b) 1, 1/3, 1/5, 1/7,..........
c) 2/3, 4/5, 6/7, 8/9,.......
d) 2, -1, 1/2, -1/4, 1/8,....
e) -1/2, 2/3, -3/4, 4/5,.....

4. Interés compuesto: Si un capital P se deposita en un banco a interés compuesto con tasa anual de r %, el saldo de la cuenta después de n meses está dado por:

$$A_n = P\left(1+\frac{r}{12}\right)^n$$

a) ¿Es An una sucesión convergente? Justificar.
b) Encontrar los primeros 5 saldos en cuenta para un capital de 9000$ a un interés compuesto anual de r = 0.055

5. Determina si es convergente, divergente u oscilante cada una de las siguientes sucesiones. Justificar

a) $a_n = \dfrac{\lvert n-5\rvert}{2n-1}$	b) $b_n = \dfrac{n!-2(n+1)!}{3(n+1)!-2n!}$	c) $c_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{senn}{n}$
d) $d_n = \sqrt{2n-3}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$	e) $e_n = (-1)^n \dfrac{1}{n!}$	f) $f_n = (-1)^n \dfrac{n}{n+1}$
g) $g_n = \sqrt{\dfrac{4n^3-2n}{3n^3+6n^2}}$	h) $h_n = \left(\dfrac{3}{5}+\dfrac{2n-5}{5n-4}\right)^{3n-1}$	i) $i_n = \dfrac{n!}{2^n}$
j) $j_n = \left(\dfrac{n^2-4}{n^2}\right)^{(n^2)}$		

6.- Determina los valores reales de a y b $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{an^6+3bn^4+2\sqrt{n}}{5n^4-3n+4} = \dfrac{1}{5}$

7. Determinar los valores reales de a y b tal que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{an+b}{2n+1}\right)^{3n}=5$.

8. Determinar si cada una de las siguientes sucesiones es o no monótona y acotada

$a)\ a_n=3+(-1)^n \qquad b)\ b_n=\dfrac{2n}{n+1} \qquad c)\ c_n=\dfrac{e}{2^n-1} \qquad d)d_n=\sqrt{n}$

9. Para las series dadas, obtener la expresión del término general y las cinco primeras sumas parciales:

$a)1+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{25}+.......;\quad b)3+\dfrac{9}{2}+\dfrac{27}{4}+\dfrac{81}{8}+\dfrac{243}{16}+....;\quad c)1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{11}+.....$

10. Utilizando la condición necesaria de convergencia, verificar que las siguientes series son divergentes:

a) $\dfrac{2}{3}+\dfrac{4}{5}+\dfrac{6}{7}+\dfrac{8}{9}+.......$	b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3n}{n+1}$	c) $1+\dfrac{4}{3}+\dfrac{16}{9}+\dfrac{64}{27}+\dfrac{256}{81}+....$
d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-2)^n$	e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} senn$	

11. Dadas las siguientes series identificar si es serie geométrica o serie p. Determinar la convergencia o divergencia en cada caso. Si la serie es geométrica convergente, halla su suma:

$a)2+\dfrac{3}{2}+\dfrac{9}{8}+\dfrac{27}{32}+\dfrac{81}{128}+........$	$b)\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\sqrt[3]{n}}$	$c)\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$
$d)\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n5^{n+1}}{9^{n/2}}$	$e)0.3+0.03+0.003+0.0003+........$	$f)\sum\limits_{n=0}^{\infty}2\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n$
$g)3+6+12+24+48+..........$	$h)1+\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{81}+\dfrac{1}{256}+........$	

12.- Estudia la convergencia de las siguientes series utilizando el criterio de D'Alembert:

$a)\sum\limits_{1}^{\infty}\dfrac{1}{2+3^n}$	$b)\sum\limits_{1}^{\infty}\dfrac{2^n}{n!}$	$c)\sum\limits_{1}^{\infty}\dfrac{n^2 2^{n+1}}{3^n}$
$d)\sum\limits_{1}^{\infty}e^{-n}$	$e)\sum\limits_{1}^{\infty}\dfrac{3^n}{n^3}$	

13.- Indica si cada una de las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Justifica la respuesta

a) Si $\{a_n\}$ converge a 3, y $\{b_n\}$ converge a 2, entonces $\{a_n + b_n\}$ converge a 5.

b) Si $\{a_n\}$ converge, entonces $\lim_{n\to\infty}(a_n - a_{n-1}) = 0$.

c) Si $\{a_n\}$ converge, entonces $\{a_n / n\}$ converge a 0.

d) Si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, entonces $\sum a_n$ es convergente.

e) La serie $\frac{1}{10000} + \frac{1}{10001} + \frac{1}{10002} + \cdots$ converge porque sus términos tienden a cero.

Respuestas

1. a) b)

$$\{a_n\}=\left\{\frac{2n}{n+1}\right\}=\left\{1,\frac{4}{3},\frac{3}{2},\frac{8}{5},\frac{5}{3},....\right\}\quad \lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1}=2 \text{ Es convergente}$$

$$\{b_n\}=\left\{1+(-1)^n\right\}=\{0,2,0,2,0,....\}\quad \lim_{n\to\infty}(1+(-1)^n)\quad no\quad existe \text{ Es oscilante}$$

$$\{c_n\}=\left\{\frac{2^n}{n^2+1}\right\}=\left\{1,\frac{4}{5},\frac{8}{10},\frac{16}{17},\frac{32}{26}...\right\}\quad \lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n^2+1}=\infty \text{ Es divergente}$$

$$\{d_n\}=\left\{\frac{(-1)^n}{n^2}\right\}=\left\{-1,\frac{1}{4},-\frac{1}{9},\frac{1}{16},-\frac{1}{25},....\right\}\quad \lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=0 \text{ Es convergente}$$

$$\{e_n\}=\left\{\frac{\ln(n^3)}{2n}\right\}=\left\{0,\frac{\ln 8}{4},\frac{\ln 27}{6},\frac{\ln 64}{8},\frac{\ln 125}{10},....\right\}\quad \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n^3)}{2n}=0 \text{ Es convergente}$$

2. $P_n=16000(1.045)^n$

P_1=16072\$; P_2=16144\$; P_3=16217\$; P_4=16289\$; P_5=16363\$

3. $a)\{a_n\}=\{n\}\quad \lim_{n\to\infty} n=\infty$ Es divergente

$b)\{b_n\}=\left\{\frac{1}{2n+1}\right\}\quad \lim_{n\to\infty} b_n=0$ Es convergente

$c)\{c_n\}=\left\{\frac{2n}{2n+1}\right\}\quad \lim_{n\to\infty} c_n=1$ Es convergente

$d)\{d_n\}=\left\{(-1)^{n+1}2^{2-n}\right\}\quad \lim_{n\to\infty} d_n=0$ Es convergente

$e)\{e_n\}=\left\{(-1)^n\frac{n}{n+1}\right\}\quad \lim_{n\to\infty} e_n\quad no\quad existe$ Es oscilante

4. a) Es divergente (la base es mayor que 1 ya que r > 0)
b) A_1 = 9041.25\$; A_2 = 9082.69\$; A_3 = 9124.32\$; A_4 = 9166.14\$; A_5 = 9208.15\$

5. a) Converge a ½; b) converge a -2/3; c) Converge a 0; d) Converge a $\sqrt{2}/2$; e) Converge a 0; f) oscila, no existe el límite; g) Converge a $\sqrt{\frac{4}{3}}$; Converge a $e^{-51/25}$; i) diverge; j) Converge a e^{-4}

6. $a=0\quad;\quad b=1/3$

7.
$a=2\quad;\quad b=\frac{2}{3}\ln 5+1$

8. Monótonas: b) c) d)
Acotadas: a) b) c)

9. $a)\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\quad b)\sum_{0}^{\infty}3\left(\frac{3}{2}\right)^n\quad c)\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$

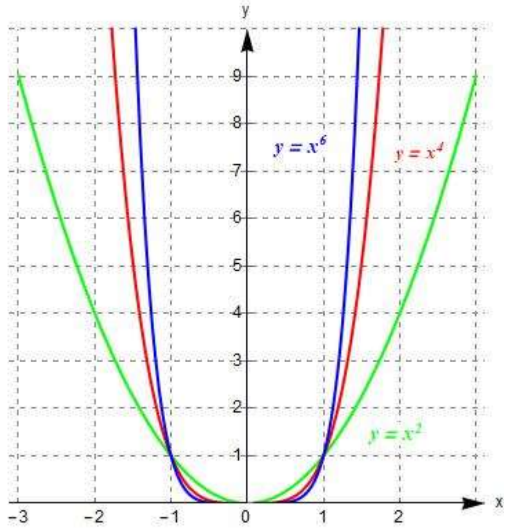
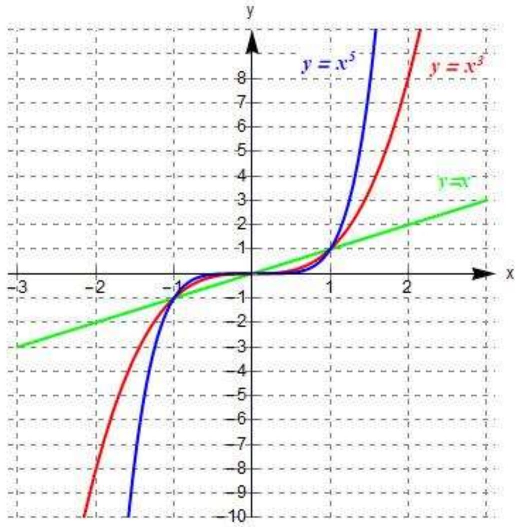
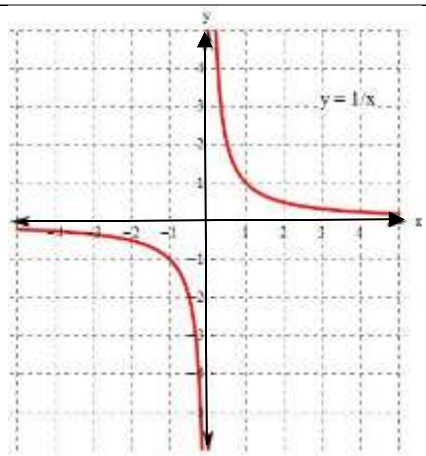
$a) S_1 = 1;\ S_2 = 5/4;\ S_3 = 49/36;\ S_4 = 205/144;\ S_5 = 5269/3600$

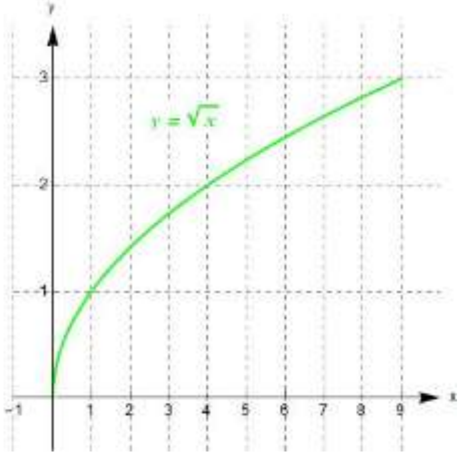
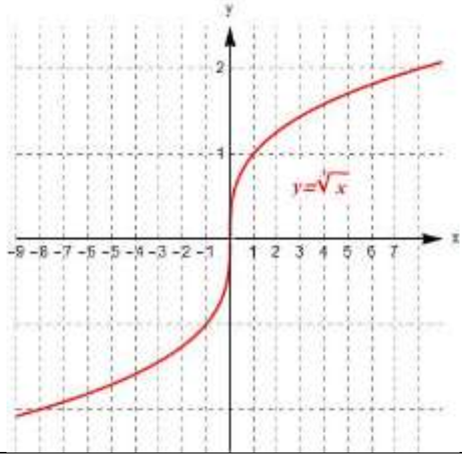
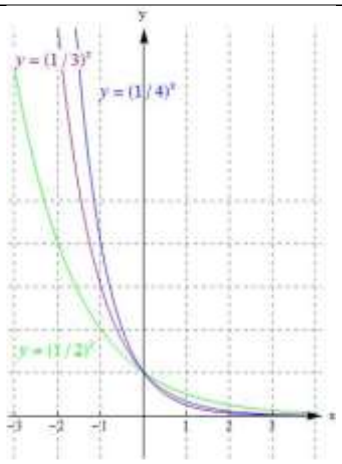
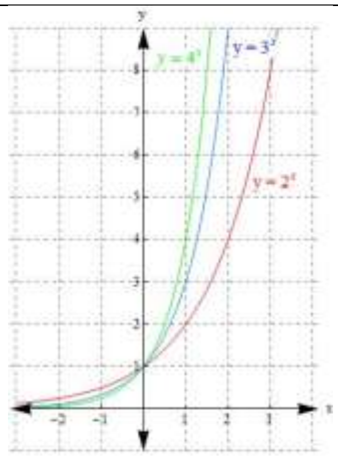
$b)\ S_1 = 3;\ S_2 = 15/2;\ S_3 = 57/4;\ S_4 = 195/8;\ S_5 = 633/16$

$c)\ S_1 = 1;\ S_2 = 4/3;\ S_3 = 23/15;\ S_4 = 176/105;\ S_5 = 563/315$

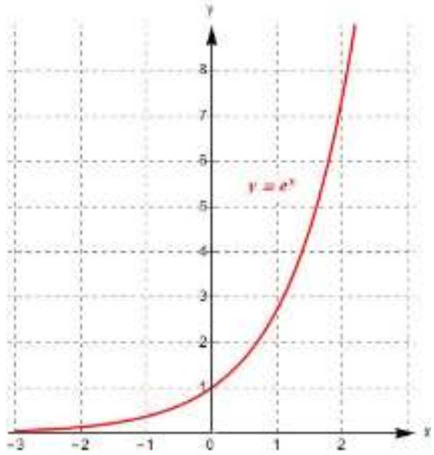
11. a) Serie Geométrica con a = 2 y r = ¾. Es convergente y su suma es S = 8
b) Serie p con p = 4/3 Es convergente
c) Serie p con p = ½. Divergente
d) Serie geométrica con a = 5 y r = -5/3 Es divergente
e) Serie Geométrica con a = 0,3 y r = 0,1. Converge a S = 1/3
f) Serie geométrica con a = 2 y r = -2/3. Converge a S = 6/5
g) Serie geométrica con a = 3 y r = 2 Diverge
h) Serie p con p = 4 Converge
12. Convergentes: a) b) c) d)
Divergente: e)
13. Verdaderos a) b) c)
Falsos: d) e)

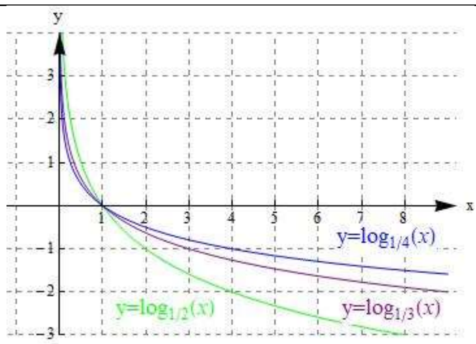
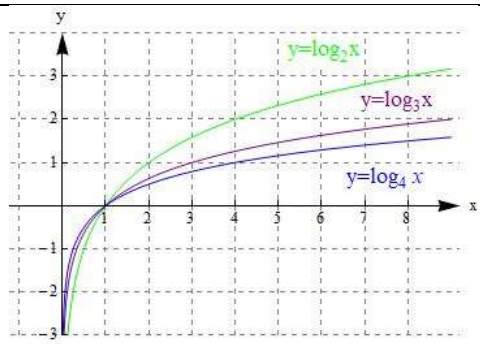
FUNCIONES ALGEBRAICAS Y TRASCENDENTES ELEMENTALES

<table>
<tr><td colspan="2">$f: R \to R / \quad f(x) = x^n \qquad n \in N$</td></tr>
<tr><td>n par
Dom = R
Im = [0,+∞)
Par
No inyectiva
Cero = {0}
Intersección eje y (0,0)</td><td>
</td></tr>
<tr><td>n impar
Dom = Im = R
Impar
Inyectiva
Cero = {0}
Intersección eje y (0,0)</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">$f: R - \{0\} \to R / \quad f(x) = 1/x$</td></tr>
<tr><td>Dom = R – {0}
Im = R –{0}
Impar
Inyectiva
No tiene ceros ni corta al eje y
AV: x = 0
AH: y = 0</td><td>
</td></tr>
</table>

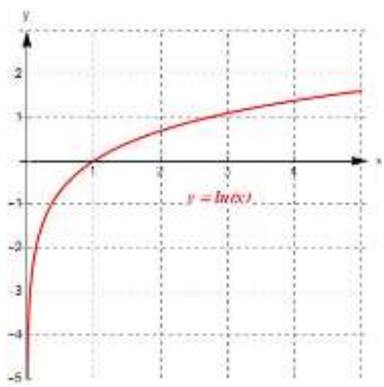
<table>
<tr><td colspan="2">$f:[0,+\infty) \to R / \ f(x) = \sqrt{x}$</td></tr>
<tr><td>Dom = [0,+∞)
Im = [0,+∞)
Inyectiva
Ceros = {0}
Intersección eje y (0,0)</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">$f: R \to R / \ f(x) = \sqrt[3]{x}$</td></tr>
<tr><td>Dom = R
Im = R
Inyectiva
Impar
Ceros = {0}
Intersección eje y (0,0)</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">$f: R \to R / \ f(x) = a^x \quad a \in R^+$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Dom = R   Im = (0,+∞)
No tiene paridad definida Inyectiva
Ceros: no tiene
Intersección eje y (0,1)</td></tr>
<tr><td>0 < a < 1</td><td>a > 1</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Es decreciente
y = 0 asíntota horizontal para x →+∞</td><td>Es creciente
y = 0 asíntota horizontal para x →-∞</td></tr>
</table>

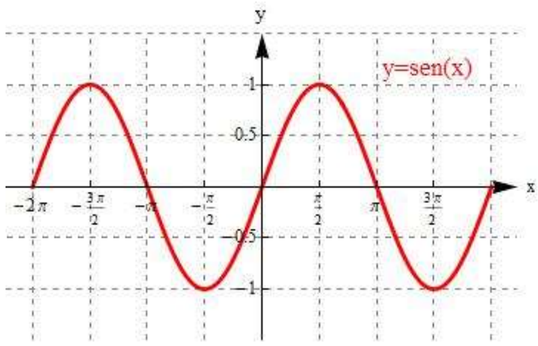
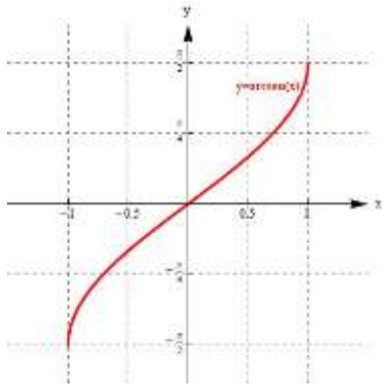
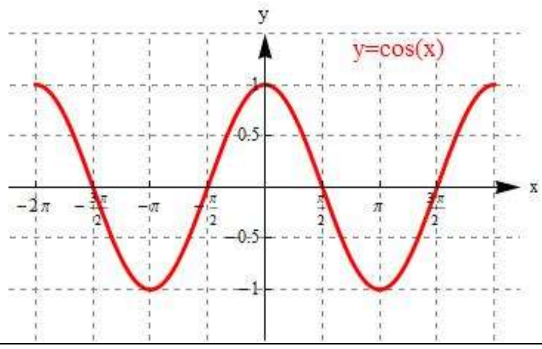
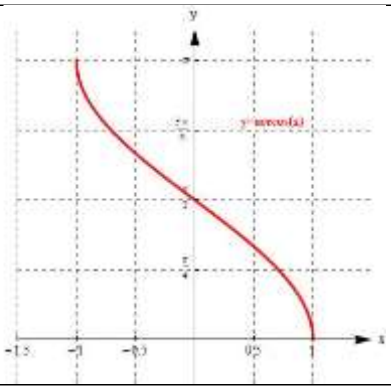
Dentro de las exponenciales, una de las más importantes es $f : R \rightarrow R / \quad f(x) = e^{x}$, cuyo gráfico es:

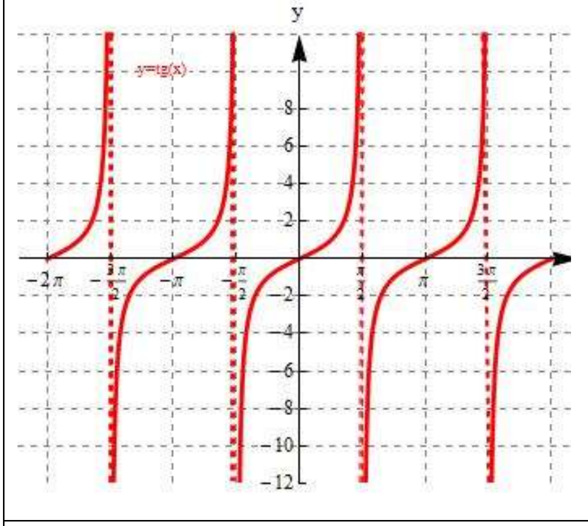
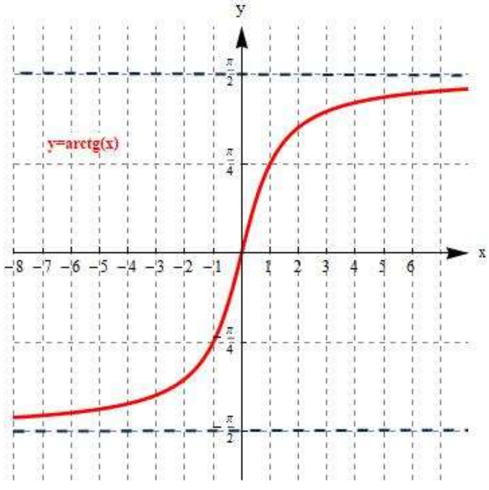
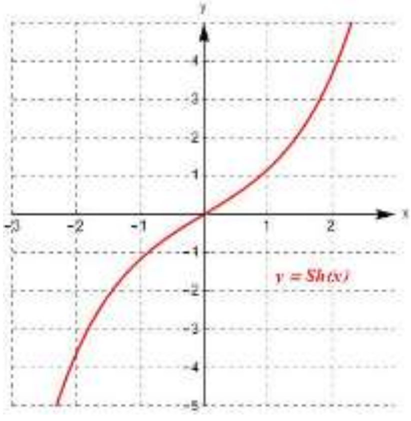
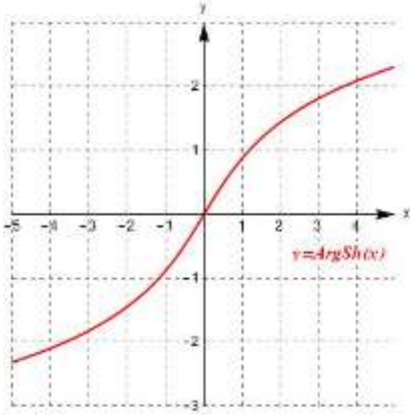
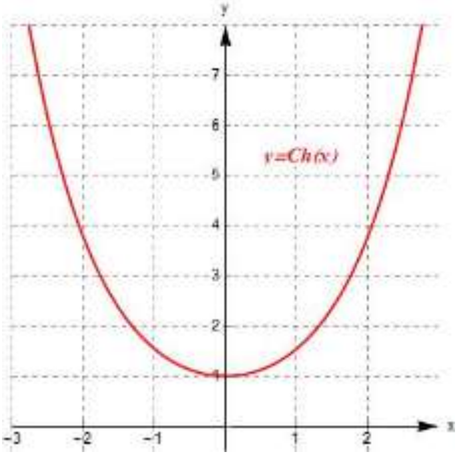
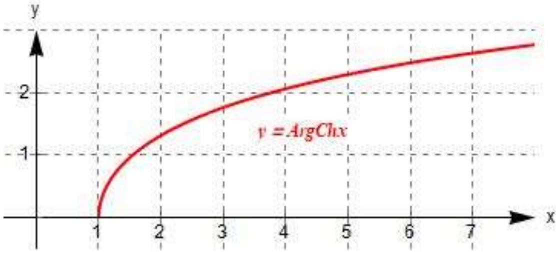


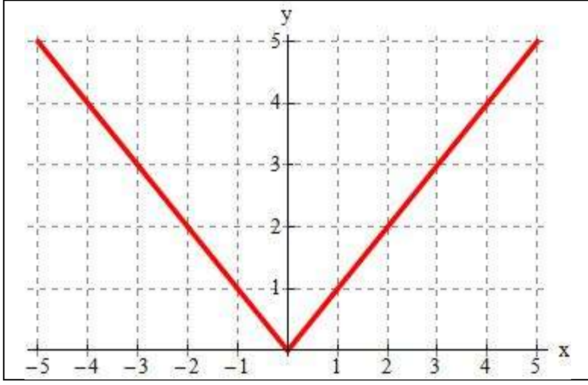
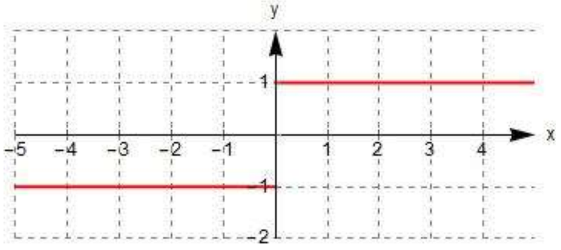
<table>
<tr><td colspan="2" align="center">$f : R^{+} \rightarrow R / \quad f(x) = \log_{a}(x) \quad a \in R^{+}$</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">Dom = $(0,+\infty)$ Im = R
Inyectiva
Cero = {1}
No tiene intersección con el eje y</td></tr>
<tr><td align="center">0 < a < 1</td><td align="center">a > 1</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Es decreciente
x = 0 asíntota vertical (y > 0)</td><td>Es creciente
x = 0 asíntota vertical (y < 0)</td></tr>
</table>

Una de las funciones logarítmicas más importantes es $f : R^{+} \rightarrow R / \quad f(x) = \ln(x)$ cuyo gráfico es:



$f: R \to R / \quad f(x) = senx$	$f: [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] / \quad f(x) = arcsenx$
Dom = R Im = [-1,1] Impar No inyectiva Ceros = { x / x = k π con k ϵ Z} Intersección eje y (0,0) Periódica de período 2π Acotada	Dom = [-1,1] Im = [-π/2,π/2] Impar Inyectiva Cero = {0} Intersección eje y (0,0) Acotada
	
$f: R \to R / \quad f(x) = \cos x$	$f: [-1,1] \to [0, \pi] / \quad f(x) = \arccos x$
Dom = R Im = [-1,1] Par No inyectiva Ceros = { x / x = (2k+1) π/2 con k ϵ Z} Intersección eje y (0,1) Periódica de período 2π Acotada	Dom = [-1,1] Im = [0,π] Inyectiva Cero = {1} Intersección eje y (0,π/2) Acotada
	
$f: R - \{x / x = (2k+1)\frac{\pi}{2} \ k \in Z\} \to R / \quad f(x) = tgx$	$f: R \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) / \quad f(x) = arctgx$
Dom = R -{ x / x = (2k+1) π/2 con k ϵ Z} Im = R Impar No inyectiva Ceros = { x / x = k π con k ϵ Z} Intersección eje y (0,0) Periódica de período π	Dom = R Im = (-π/2,π/2) Cero = {0} Intersección eje y (0,0) Acotada

	
$f:R\to R/\quad f(x)=Shx$	$f:R\to R/\quad f(x)=ArgShx$
Dom = R; Im = R Impar Cero = {0} Intersección eje y (0,0) Inyectiva	Dom = Im = R Impar Cero = {0} Intersección eje y (0,0) Inyectiva
	
$f:R\to R/\quad f(x)=Chx$	$f:[1,+\infty)\to R/\quad f(x)=ArgChx$
Dom = R Im = [1,+∞) Par No inyectiva No tiene ceros Intersección eje y (0,1)	Dom = [1,+∞) Im = R Inyectiva Cero = {1} No tiene intersección con el eje y
	

$f : R \to R / \quad f(x) = \lvert x \rvert$	$f : R - \{0\} \to R / \quad f(x) = \lvert x \rvert / x = sg(x)$
Dom = R Im = [0,+∞) Par No inyectiva Intersección eje y (0,0) Cero ={0}	Dom = R – {0} Im = {-1,1} Impar Acotada No inyectiva Intersección eje y no tiene No tiene ceros
	

FÓRMULAS IMPORTANTES

Trigonometría

$$tgx = \frac{senx}{\cos x} \qquad \cot gx = \frac{\cos x}{senx} \qquad \sec x = \frac{1}{\cos x} \qquad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{senx}$$

$$sen^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad tg^2 x + 1 = \sec^2 x \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$

$$sen^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$$

Potencias de igual base

$$a^x\, a^y = a^{x+y} \qquad a^x : a^y = a^{x-y} \qquad (a^x)^y = a^{x.y}$$

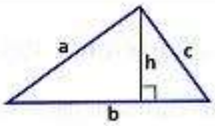
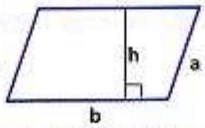
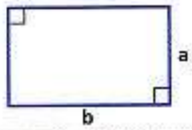
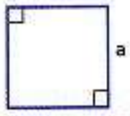
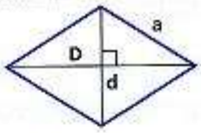
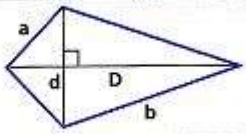
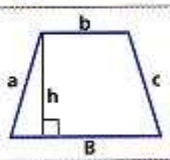
Propiedades de logaritmo

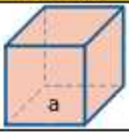
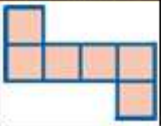
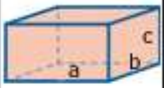
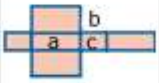
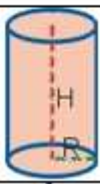
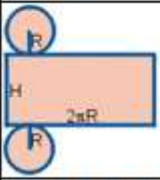
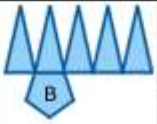
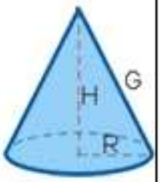
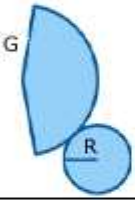
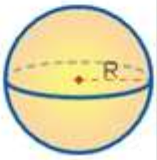
$$\log_a(x.y) = \log_a x + \log_a y \qquad \log_a(x/y) = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a x^y = y \log_a x \qquad \log_a a = 1 \qquad \log_a a^x = x$$

$$a^{\log_a x} = x$$

Perímetros y áreas de figuras planas

		Perímetro	Area
Triángulo		$a + b + c$	$\frac{b \cdot h}{2}$
Paralelogramo		$2 \cdot (a + b)$	$b \cdot h$
Rectángulo		$2 \cdot (b + a)$	$b \cdot a$
Cuadrado		$4 \cdot a$	a^2
Rombo		$4 \cdot a$	$\frac{D \cdot d}{2}$
Cometa		$2 \cdot (b + a)$	$\frac{D \cdot d}{2}$
Trapecio		$B + b + a + c$	$\frac{(B + b) \cdot h}{2}$
Círculo		$2 \cdot \pi \cdot r$	$\pi \cdot r^2$

NOMBRE	DIBUJO	DESARROLLO	ÁREA	VOLUMEN
Cubo o Hexaedro: ortoedro donde las tres dimensiones son iguales.			$A=6a^2$	$V=a^3$
Paralelepípedo u ortoedro: prisma cuyas bases son dos rectángulos.			$A=2(ab+ac+bc)$	$V=abc$
Cilindro: es el cuerpo geométrico engendrado por la revolución de un rectángulo alrededor de uno de sus lados.			$A=2\pi r(H+r)$	$V=\pi r^2 \cdot H$
Pirámide: Cuerpo geométrico cuya base es un polígono cualquiera y sus caras laterales triangulos.			$A=A_{base} + A_{lateral}$	$V=\frac{1}{3} B \cdot H$
Cono: Es el cuerpo geomérico engendrado por la revolución de un triangulo rectángulo alrededor de uno.			$A=A_{base} + A_{lateral}$	$V=\frac{1}{3} \pi r^2 \cdot H$
Esfera: cuerpo geométrico engendrado por la revolución completa de un semicirculo alrededor de su diámetro.			$A=4\pi R^2$	$V=\frac{4}{3} \pi R^3$