

1 Ecuación de onda

En esta práctica resolvemos la ecuación de onda en dimensión $D = 1$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}. \quad (1)$$

La misma puede reducirse a un sistema de dos ecuaciones desacopladas con derivadas de primer orden. Definimos para ello $W \equiv (w_1, w_2)^T$, donde

$$w_1 = \phi_x \quad (2)$$

$$w_2 = \phi_t. \quad (3)$$

Así, la ecuación se puede expresar como

$$\begin{pmatrix} \partial_t w_1 \\ \partial_t w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ v^2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_x w_1 \\ \partial_x w_2 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Es decir,

$$\partial_t W = A \cdot \partial_x W, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ v^2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Para resolver este sistema, debemos diagonalizar la matriz A . Para ello, definimos

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v^{-1} & -v^{-1} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad S^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v & 1 \\ -v & 1 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Notemos que la matriz A se puede expresar como una matriz diagonal mediante la transformación

$$S^{-1}AS = \Lambda = \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & -v \end{pmatrix} \quad (7)$$

Multiplicando 5 por S^{-1} ,

$$\begin{aligned} S^{-1}\partial_t W &= S^{-1}A\partial_x W \\ \partial_t (S^{-1}W) &= S^{-1}ASS^{-1}\partial_x W \\ \partial_t (S^{-1}W) &= \Lambda\partial_x (S^{-1}W), \end{aligned}$$

donde

$$(S^{-1}W) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} vw_1 + w_2 \\ -vw_1 + w_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v\phi_x + \phi_t \\ -v\phi_x + \phi_t \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Definiendo U y V tal que $(U, V)^T = (S^{-1}W)$, obtenemos el sistema diagonal

$$\begin{pmatrix} V_t \\ U_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & -v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_x \\ U_x \end{pmatrix} \quad (9)$$

Resolveremos el sistema con la condición inicial $V(t = 0) = 0$, lo cual implica que $V(t, x) = 0$. Es decir, resolveremos la ecuación de advección

$$U_t = -vU_x. \quad (10)$$

Además, simplificaremos el problema definiendo $v = 1$. Utilizaremos condiciones de contorno periódicas en el dominio $x \in [0, 1]$ y dos datos iniciales $U(t = 0)$. Los datos iniciales son los siguientes:

- **Simple Bump:**

$$U(x, t = 0) = (0.25)^8(x - 0.25)^4(x - 0.75)^4. \quad (11)$$

- **Square Bump:**

$$U(x, t = 0) = \begin{cases} 0 & x < 0.25, \\ (0.05)^8(x - 0.25)^4(x - 0.35)^4 & 0.25 \leq x \leq 0.3, \\ 1 & 0.3 < x < 0.6, \\ (0.05)^8(x - 0.65)^4(x - 0.75)^4 & 0.6 \leq x \leq 0.75, \\ 0 & 0.75 < x. \end{cases} \quad (12)$$

2 Solución exacta

A continuación utilizamos la teoría de Fourier para hallar la solución exacta del problema

$$\begin{aligned} U_t &= vU_x, \quad x \in (0, 1), \quad t > 0 \\ U(x, t = 0) &= f(x) \\ U(0, t) &= U(1, t). \end{aligned} \quad (13)$$

El dato inicial $f(x)$ es también 1-periódico, es decir, $f(x + 1) = f(x)$. Luego, podemos utilizar su expansión en serie de Fourier

$$U(x, t = 0) = f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i \omega x} \hat{f}(\omega). \quad (14)$$

Aplicando separación de variables, proponemos el ansatz

$$U(x, t) = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i \omega x} \hat{U}(\omega, t). \quad (15)$$

Derivando respecto a x ,

$$U_x(x, t) = \sum_{-\infty}^{\infty} 2\pi i \omega x e^{2\pi i \omega x} \hat{U}(\omega, t). \quad (16)$$

Por otro lado, derivando respecto a t ,

$$U_t(x, t) = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i \omega x} \hat{U}_t(\omega, t). \quad (17)$$

Reemplazando en 10,

$$\sum_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i \omega x} \hat{U}_t(\omega, t) = \sum_{-\infty}^{\infty} 2\pi i \omega x e^{2\pi i \omega x} \hat{U}(\omega, t). \quad (18)$$

Teniendo en cuenta la ortogonalidad de las funciones exponenciales, la ecuación anterior implica que

$$\hat{U}_t(\omega, t) = 2\pi i \omega x \hat{U}(\omega, t), \quad \forall \omega. \quad (19)$$

Teniendo en cuenta el dato inicial, la ecuación anterior tiene como solución

$$\hat{U}(\omega, t) = e^{-2\pi i \omega v t} \hat{f}(\omega). \quad (20)$$

Por lo tanto, la solución al problema es

$$U(x, t) = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i \omega (x - vt)} \hat{f}(\omega). \quad (21)$$

Es decir, la solución es una onda viajera que conserva la forma inicial, pero que se desplaza con velocidad constante v .

3 Conservación de la energía

3.1 Caso analítico

La energía se define como

$$E(t) = \int_0^1 U^2(x, t) \, dx. \quad (22)$$

Derivando respecto al tiempo,

$$\dot{E}(t) = 2 \int_0^1 U U_t dx = -2 \int_0^1 U U_x dx, \quad (23)$$

donde utilizamos la ecuación 10. Integrando por partes, obtenemos

$$\dot{E}(t) = -2U(x, t) \Big|_{x=0}^{x=1} + 2 \int_0^1 U_x U dx. \quad (24)$$

Por las condiciones de contorno, $U(1, t) = U(0, t)$. Luego, de 23 y 24 tenemos que $\dot{E}(t) = 0$, por lo que la energía es constante y, por lo tanto, una cantidad conservada.

3.2 Caso numérico

Definimos el producto interno euclídeo (y su respectiva norma) para funciones de grilla como

$$(u, v)_{\ell, m} \equiv h \sum_{j=l}^m u_j v_j \quad (25)$$

$$\|u\|_{\ell, m}^2 \equiv (u, u)_{\ell, m}. \quad (26)$$

Utilizando el método del trapecio para integrar, la energía del sistema puede escribirse como

$$E(t) = h \sum_{j=1}^{N-1} U_j^2 + \frac{h}{2}(U_0 + U_N). \quad (27)$$

Utilizando la periodicidad, tenemos que $U_0 = U_N$, por lo que podemos simplificar la expresión anterior como

$$E(t) \simeq h \sum_{j=0}^{N-1} U_j^2 = (U, U)_{0, N-1}. \quad (28)$$

Consideremos, por simplicidad, la derivada espacial discreta de orden 2

$$D_0 = \frac{D_+ + D_-}{2}, \quad (29)$$

y veamos que la energía se conserva (lo mismo puede hacerse para derivadas centradas de órdenes superiores). Siguiendo la referencia [1], tenemos que

$$(u, D_0 v)_{l,m} + (D_0 u, v)_{l,m} = \frac{h}{2} \left[u_j v_{j+1} + u_{j+1} v_j \right] \Big|_{l-1}^m. \quad (30)$$

Derivando la energía,

$$\dot{E}(t) \simeq 2h \sum_{j=0}^{N-1} U_j \partial_t U_j = -2h \sum_{j=0}^{N-1} U_j D_0 U_j = -2(D_0 U, U)_{0,N-1}. \quad (31)$$

De acuerdo con 30, tenemos que

$$\dot{E}(t) \simeq -\frac{h}{2} \left[U_j U_{j+1} + U_{j+1} U_j \right] \Big|_{-1}^{N-1} \quad (32)$$

$$\simeq -h \left[U_j U_{j+1} \right] \Big|_{N-1}^{N-1} = 0. \quad (33)$$

4 Método de las líneas

El método de las líneas consiste en resolver el problema 13 discretizando sólo las coordenadas espaciales, pero manteniendo el tiempo continuo, para transformar de ese modo el problema original en un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, que pueden ser resueltas por métodos estándar, como por ejemplo, métodos Runge-Kutta.

Sea M un entero y $h = (2M + 1)^{-1}$ el ancho de grilla, que define los puntos $x_j = hj$, $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Aproximamos el problema 13 como

$$\begin{aligned} U_t(x_j, t) &= v D_x^p U(x_j, t) \\ U(x_j, 0) &= f(x_j) \\ U(x_0, t) &= U(x_{2M+1}, t), \end{aligned} \quad (34)$$

donde D_x^p representa la aproximación de $\partial/\partial x$ a orden p .

Proponemos una solución de tipo onda simple

$$\begin{aligned} U(x_j, t) &= \hat{U}(\omega, t) e^{2\pi i \omega x_j} \\ U(x_j, 0) &= \hat{f}(\omega). \end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación, tenemos

$$U_t(x_j, t) = v \hat{U}(\omega, t) q(\omega) e^{2\pi i \omega x_j}, \quad (35)$$

donde $q(\omega)$ es el autovalor de D_x^p correspondiente al autovector $e^{2\pi i \omega x_j}$ (también llamado *factor de amplificación*), es decir,

$$D_x^p e^{2\pi i \omega x_j} = q(\omega) e^{2\pi i \omega x_j}. \quad (36)$$

La solución queda entonces de la forma

$$U(x_j, t) = \hat{f}(\omega) e^{2\pi i \omega x_j + v q(\omega) t}. \quad (37)$$

Comparando con la solución exacta, vemos que esta solución aproximada corresponde a una onda plana que se desplaza a una velocidad

$$\tilde{v}(\omega) = \frac{q(\omega)}{2\pi i \omega} v. \quad (38)$$

Es decir, la velocidad de la solución aproximada depende explícitamente de la frecuencia a través del factor de amplificación.

La generalización de la solución a cualquier dato periódico $f(x)$ es

$$U(x_j, t) = \sum_{\omega=-M}^M \hat{f}(\omega) e^{2\pi i \omega x_j + v q(\omega) t}, \quad (39)$$

donde

$$f(x) = \sum_{\omega=-M}^M \hat{f}(\omega) e^{2\pi i \omega x_j}. \quad (40)$$

Luego, vemos que la solución se irá deformando a medida que los distintos modos avancen cada uno con su correspondiente velocidad.

Siguiendo la referencia [2], podemos expresar los operadores de derivadas espaciales como

$$D_x^p = D_0 \sum_{\nu=0}^{p/2-1} (-1)^\nu \alpha_\nu (h^2 D_+ D_-)^\nu, \quad (41)$$

donde

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 1 \\ \alpha_\nu &= \frac{\nu}{2(2\nu+1)} \alpha_{\nu-1}, \quad \nu = 1, 2, \dots, p/2 - 1. \end{aligned}$$

En particular, los operadores utilizados en el código corresponden a los órdenes $p = 2, 4, 6, 8$. Los correspondientes factores de amplificación son

$$q_2(\omega) = i \frac{\sin(2\pi\omega h)}{h} \quad (42)$$

$$q_4(\omega) = i \frac{\sin(2\pi\omega h)}{h} \left[1 + \frac{2}{3} \sin^2(\pi\omega h) \right] \quad (43)$$

$$q_6(\omega) = i \frac{\sin(2\pi\omega h)}{h} \left[1 + \frac{2}{3} \sin^2(\pi\omega h) + \frac{8}{15} \sin^4(\pi\omega h) \right] \quad (44)$$

$$q_8(\omega) = i \frac{\sin(2\pi\omega h)}{h} \left[1 + \frac{2}{3} \sin^2(\pi\omega h) + \frac{8}{15} \sin^4(\pi\omega h) + \frac{16}{35} \sin^6(\pi\omega h) \right]. \quad (45)$$

Como se puede ver en la figura 1, todos los factores de amplificación se comportan bien para bajas frecuencias, pero inevitablemente fallan a frecuencias mayores. Cuanto mayor sea el orden de la aproximación, mayor es el rango de frecuencias para el cual $q \sim 1$.

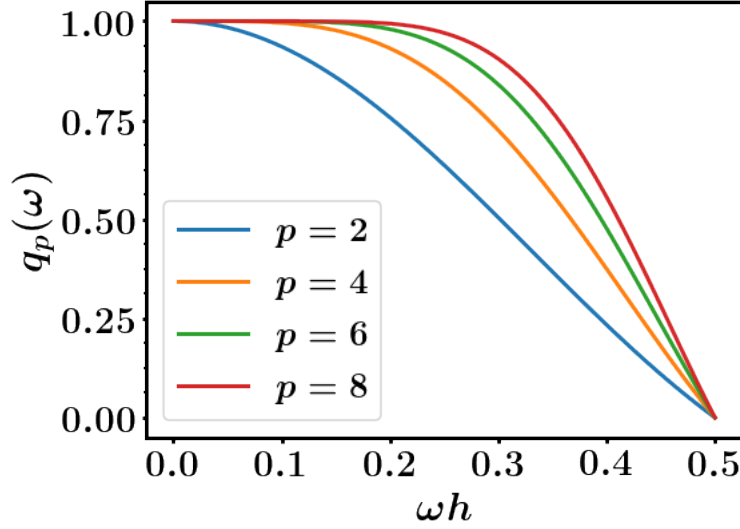


Figure 1: Factor de amplificación en función de la frecuencia para distintos operadores de derivadas espaciales.

5 Resultados numéricos

En la figura 2 mostramos la evolución de las soluciones aproximadas en función del tiempo de integración para el dato inicial **simple bump**. Como la velocidad es la unidad, las soluciones deberían coincidir con el dato inicial. Podemos ver que la solución correspondiente a D_x^2 comienza a diferenciarse para $T = 10$ (ver inset). Las demás aproximaciones se mantienen razonablemente buenas hasta tiempos largos ($T = 1000$).

Para el dato inicial **square bump**, en cambio, la solución comienza a deformarse antes (figura 3). Ya para $T = 100$ es posible ver diferencias significativas en la aproximación D_x^4 . Para $T = 1000$, se ven diferencias en todas las aproximaciones.

References

- [1] *Introduction to Numerical Methods for Time Dependent Differential Equations*, H. Kreiss and O. Ortiz, (2014).
- [2] *High Order Difference Methods for Time Dependent PDE*, B. Gustafsson, (2008).

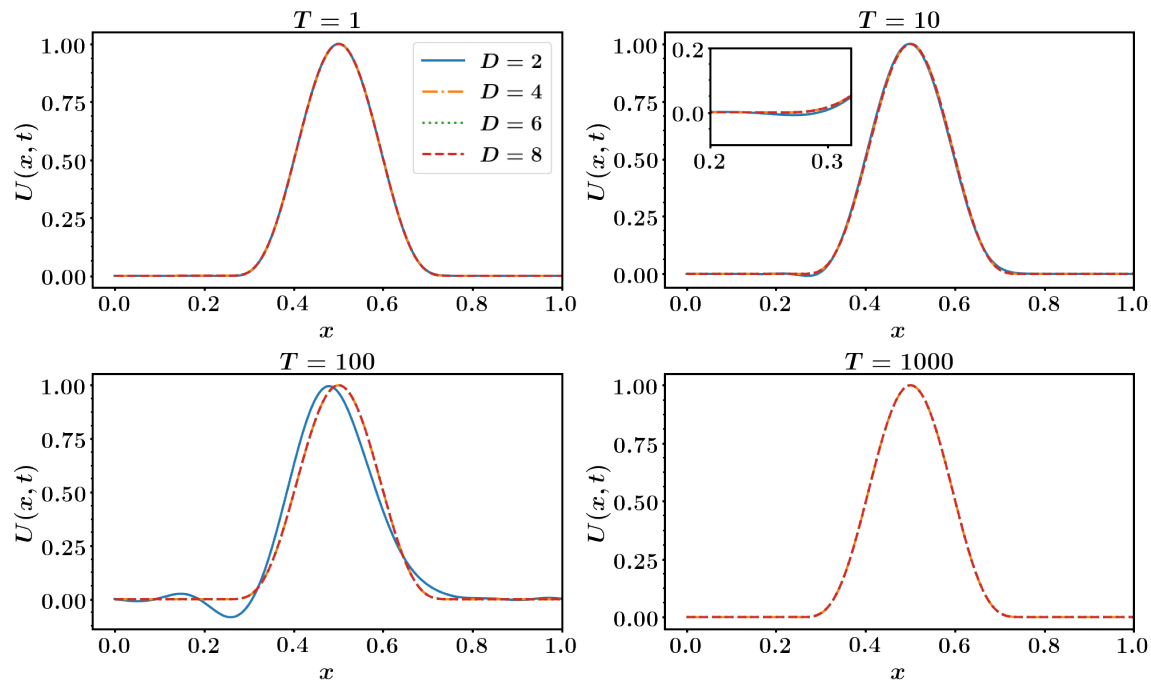


Figure 2: Comparación entre las soluciones aproximadas y la solución analítica para distintos tiempos, para el dato inicial **simple bump**. $N_x = 501$, $\text{CDF} = 0.501$.

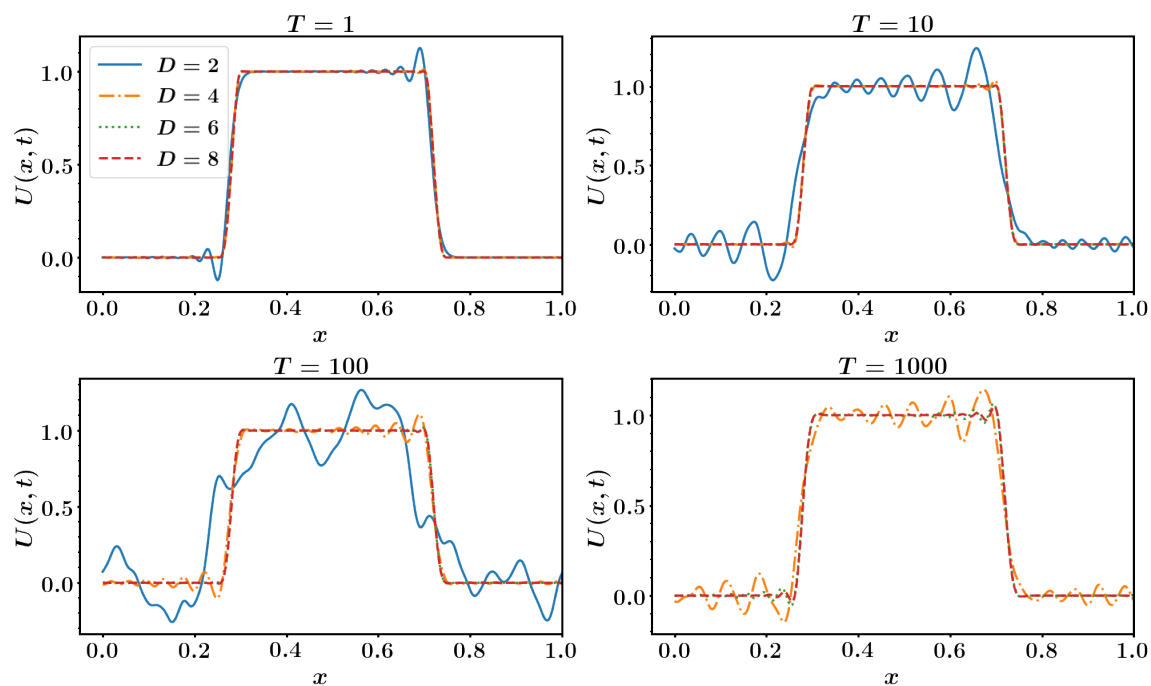


Figure 3: Comparación entre las soluciones aproximadas y la solución analítica para distintos tiempos, para el dato inicial **square bump**. $N_x = 501$, $\text{CDF} = 0.501$.

6 Disipación

Para disminuir el error de disipación en altas frecuencias, una opción es agregar un término disipativo de orden superior. En este caso, la ecuación 13 se transforma en

$$U_t = vD_x^p U + \sigma D_{xx}^{p+2} U, \quad \sigma > 0. \quad (46)$$

El término disipativo se encarga de matar los modos de alta frecuencia a tiempos largos, disminuyendo la deformación de la onda inicial.