

Tarea 1  
Nahuel Almeira

## 1 Oscilador armónico

### 1.1 Ecuación

En esta práctica resolveremos la ecuación del oscilador armónico

$$\begin{aligned}\ddot{y} + \omega y &= 0 \\ y(0) &= 1 \\ \dot{y}(0) &= 0.\end{aligned}\tag{1}$$

Por inspección, puede verse que la solución a la ecuación 1 es

$$y(t) = \sin(\omega t).\tag{2}$$

Para resolver numéricamente la ecuación, conviene transformarla en un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden. Para ello, realizamos el cambio de variables

$$y = x_1\tag{3}$$

$$\dot{y} = \omega x_2.\tag{4}$$

Así, obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\tag{5}$$

que podemos escribir como

$$\dot{x} = Ax, \quad x \equiv (x_1, x_2)^T, \quad A \equiv \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix}.\tag{6}$$

La matriz  $A$  es diagonalizable mediante la transformación

$$A = S^{-1}\Lambda S, \quad S = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} -i\omega & 0 \\ 0 & i\omega \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Definiendo  $\tilde{x} \equiv Sx$ , tenemos

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax \\ \dot{x} &= S^{-1}\Lambda Sx \\ S\dot{x} &= \Lambda Sx \\ \dot{\tilde{x}} &= \Lambda\tilde{x}, \end{aligned} \quad (8)$$

con lo cual obtenemos dos ecuaciones desacopladas.

## 1.2 Métodos numéricos

Para resolver la ecuación 8 emplearemos dos métodos. El método de Euler explícito, de primer orden, y el método de Runge-Kutta de orden cuatro (RK4). En ambos casos utilizaremos un paso  $k$ .

La región de estabilidad de cada método está relacionada con los autovalores  $\lambda$  de  $A$ . En particular, se debe satisfacer que  $|P(\lambda k)| \leq 1$ , donde  $P$  es un polinomio que depende exclusivamente del método. En la figure 1 se puede comparar la región de estabilidad para ambos métodos. Los autovalores asociados a la ecuación a resolver son puramente imaginarios ( $\lambda = \pm i\omega$ ), por lo que es esperable que el método de Euler no converja, dado que su región de estabilidad no incluye el eje imaginario. El método RK4, por otro lado, debería converger para un paso  $k$  suficientemente chico.

## 1.3 Resultados

En la figura 2, se muestra la solución numérica de la ecuación utilizando los dos métodos. Se puede ver que, mientras que RK4 aproxima muy bien la solución, Euler es divergente, dando una solución con una amplificación a lo largo del tiempo. Se puede ver también que la diferencia entre la energía a tiempo cero y la energía a tiempo  $t$  es considerablemente mayor en Euler que en RK4.

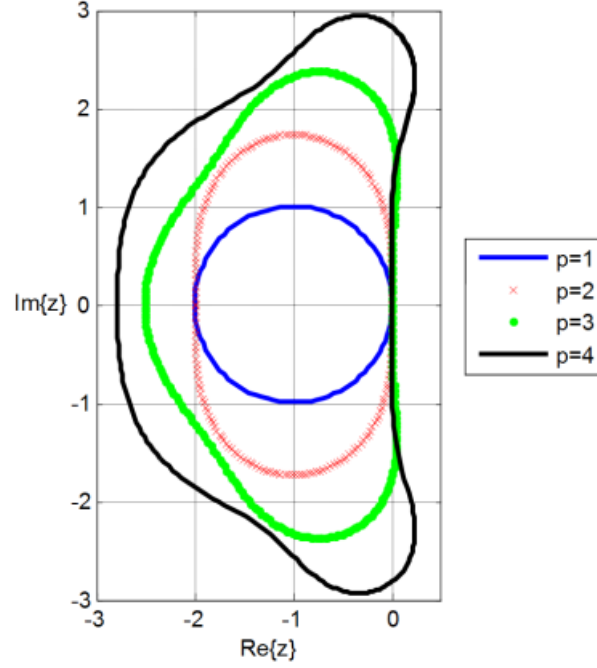


Figure 1: Región de estabilidad en el plano complejo ( $z = \lambda k$ ) para el método de Euler ( $p=1$ ) y Runge-Kutta ( $p=4$ ).

Aunque el método de Euler diverge para cualquier valor de  $k$ , converge a la solución exacta en el límite  $k \rightarrow 0$ . Esto se puede ver graficando  $|e(T) - e(0)|$  en función de  $k$ , para un valor fijo de  $T > 0$ . En la figura 3 se puede ver que la diferencia de energías disminuye linealmente a medida que se reduce el paso  $k$ .

Para corroborar el orden  $p$  de cada método, utilizamos la expresión [1]

$$\tilde{Q} = \frac{v_k(t) - v_{k/2}(t)}{v_{k/2}(t) - v_{k/4}(t)} \approx 2^p. \quad (9)$$

Podemos ver en la figura 4 que el orden en cada caso es el correcto

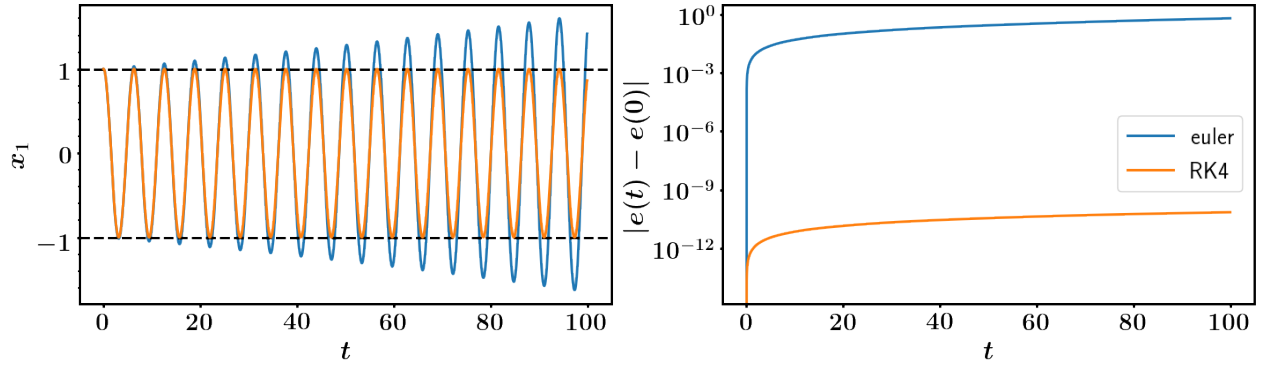


Figure 2: Comparación entre los dos métodos empleados.  $k = 0.01$ .

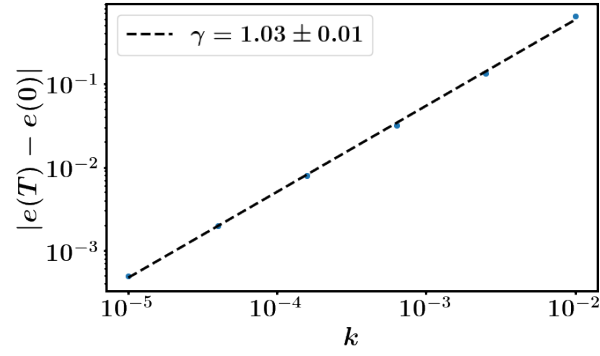


Figure 3: Convergencia del método de Euler en el límite  $k \rightarrow 0$ . Se puede ver que  $|e(T) - e(0)| \sim k^\gamma$ , con  $\gamma \approx 1$ .

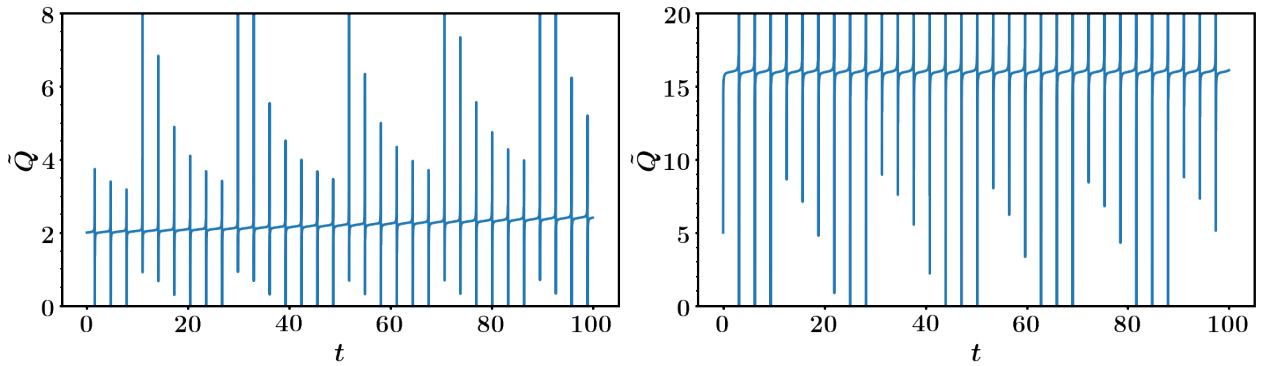


Figure 4: Corroboración del orden de cada método. Izquierda: Euler; Derecha: RK4.

## 2 Potencial central

### 2.1 Ecuaciones

Resolvemos el problema de una partícula de masa unidad sujeta a un potencial central  $U(r) = -r^{-1}$ . La ecuación correspondiente es

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla U(r). \quad (10)$$

En coordenadas cartesianas el problema se puede expresar como un sistema de cuatro ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ -x \\ -y \end{pmatrix}. \quad (11)$$

En cambio, en coordenadas polares, el sistema se reduce a tres dimensiones, ya que una de las ecuaciones resulta trivial. El sistema resulta

$$\begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\phi} \\ \dot{v}_r \\ \dot{v}_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_r \\ v_\phi \\ -\frac{1}{r^2} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

La energía mecánica del sistema está dada por

$$E = T + U = \frac{1}{2} \left( \dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 \right) - \frac{1}{r}. \quad (13)$$

La energía, que es una cantidad conservada del sistema, determina el tipo de órbita que tiene lugar. Para  $E < 0$ , las órbitas son elipses (acotadas), mientras que para  $E > 0$ , las órbitas son hipérbolas (no acotadas). El caso  $E = 0$  da lugar a órbitas parabólicas.

Utilizamos las condiciones iniciales

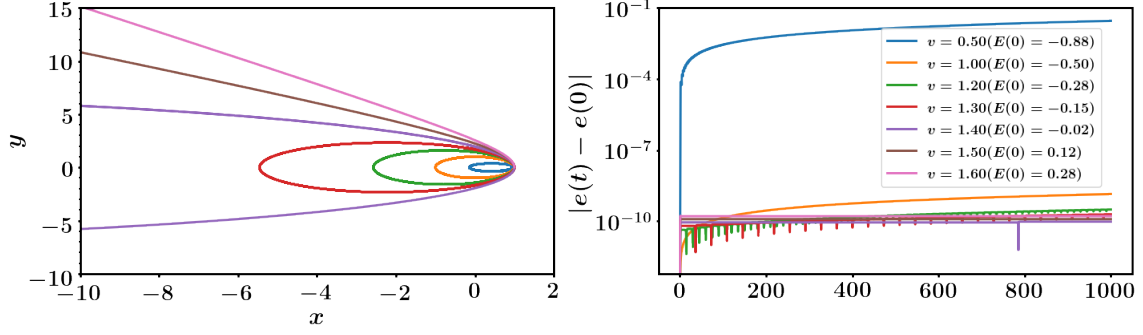


Figure 5: Soluciones al sistema 10, con coordenadas cartesianas, para diferentes energías.  $k = 0.01$ .

$$x(0) = 1 \quad (14)$$

$$y(0) = 0 \quad (15)$$

$$v_x(0) = 0 \quad (16)$$

$$v_y(0) = v, \quad (17)$$

con  $v > 0$ . Con estas condiciones, la energía mecánica es  $E = v^2/2 - 1$ . Luego, la condición para tener órbitas cerradas es  $v < \sqrt{2}$ .

En la figura 5, se muestra la resolución numérica del sistema (en coordenadas cartesianas) para distintas energías, utilizando el método RK4 con  $k = 0.01$ . Vemos que la energía se mantiene acotada siempre y cuando la velocidad inicial no sea demasiado baja.

Por último, analizamos el comportamiento asintótico de las soluciones (utilizando coordenadas polares). En la figura 6 se muestra el valor de  $\phi(T = 1000)$  para distintas condiciones iniciales de  $v_r$ , correspondientes a órbitas abiertas con energías cercanas a cero. Se puede ver que, independientemente de la condición inicial, las órbitas alcanzan el mismo valor angular.

## References

- [1] *Introduction to Numerical Methods for Time Dependent Differential Equations*, H. Kreiss and O. Ortiz, (2014).

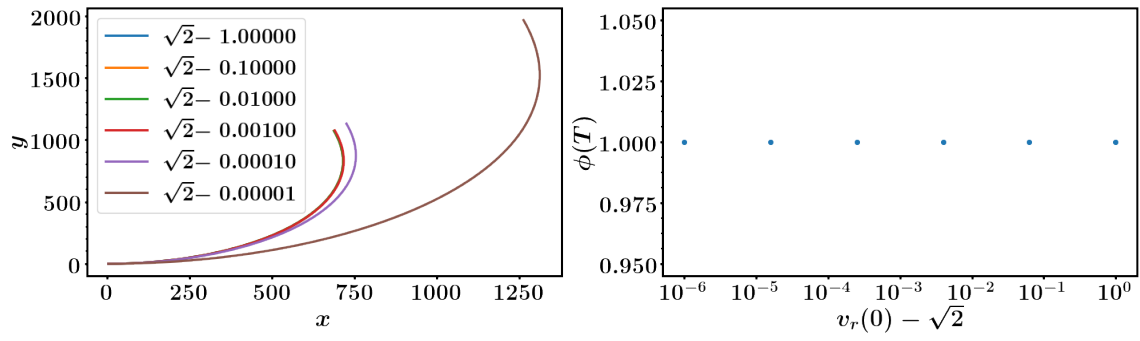


Figure 6: Órbitas abiertas con  $E \approx 0$ . Se observa que, para el mismo tiempo  $T = 1000$ , todas las soluciones terminanan en el mismo ángulo.