Tarea 3
Nahuel Almeira

1 Ecuación

En esta práctica, resolveremos la ecuación de onda en una dimensión, con velocidad dependiente de la posición. La ecuación correspondiente es

$$\phi_{tt} = (v(x)^2\phi_x)_x, \quad v(x) = 1 + \lambda \sin(\omega x), \quad (x,t) \in [0,1] \times [0.\infty) \tag{1}$$

Para resolver numéricamente, primero definimos las variables

$$V = \phi_x \tag{2}$$
$$U = \phi_t. \tag{3}$$

De este modo, la ecuación se puede transformar en un sistema de dos ecuaciones diferenciales acopladas de primer orden:

$$\begin{pmatrix} V_t \\ U_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (v(x)V)_x \\ U_x \end{pmatrix}, \tag{4}$$

que se puede expresar también como

$$V_t = U_x, \tag{5}$$
$$U_t = (v^2(x)V)_x. \tag{6}$$

La energía del sistema está dada por la expresión

$$E = \frac{1}{2}\int (v^2(x)\phi_x^2 + \phi_t^2)dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (v^2(x)V^2 + U^2)dx. \tag{7}$$

Veamos que la misma se conserva:

$$
\begin{aligned}
\dot{E} &= \int_0^1 (v^2\phi_x\phi_{xt} + \phi_t\phi_{tt})dx \\
&= \int_0^1 (v^2\phi_x\phi_t)_x dx \\
&= v^2\phi_x\phi_t\Big|_0^1 = 0
\end{aligned} \tag{8}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{E} &= \int_0^1 (v^2VU_x + UU_t)dx \\
\dot{E} &= \int_0^1 (v^2VU_x + U(v^2V)_x)dx \\
&= \int_0^1 (v^2UV)_x dx \\
&= v^2UV\Big|_0^1 = 0
\end{aligned} \tag{9}
$$

2 Implementación numérica

Para resolver la ecuación, utilizaremos dos implementaciones diferentes. En ambos casos utilizaremos el método de líneas, con un RK4 para la derivada temporal. Lo que cambiará en cada caso, será la implementación de la derivada espacial.

2.1 Caso STRICT

La aproximación es la siguiente:

$$V_t = D_x(U) \tag{10}$$

$$U_t = D_x(v^2V), \tag{11}$$

donde D_x representa algún operador de derivadas espaciales. Al igual que en la Tarea 2, utilizaremos distintos órdenes de aproximación.

2.2 Caso NON-STRICT

La aproximación es la siguiente:

$$V_t = D_x(U) \tag{12}$$
$$U_t = 2vv_xV + v^2 D_x(V), \tag{13}$$

donde $v_x = \lambda\omega\cos(\omega t)$. Es decir que en este caso aplicamos la regla del producto para distribuir el operador de derivadas espaciales. Como veremos en la siguiente sección, el hacer esto introduce un error en la solución numérica.

3 Energía numérica

Al igual que en la Tarea 2, haremos un desarrollo considerando, por simplicidad, condiciones de contorno periódicas y el operador de derivadas espaciales $D_X = D_0$. Este mismo análisis puede realizarse para otras condiciones de contorno y para operadores de mayor orden.

Utilizando la regla del trapecio para integrar, la energía numérica del sistema está dada por

$$E(t) = \frac{h}{2}\sum_{j=1}^{N-1}(v_j^2V_j^2 + U_j^2) + \frac{h}{4}(v_0^2V_0^2 + U_0^2) + \frac{h}{4}(v_N^2V_N^2 + U_N^2). \tag{14}$$

Por periodicidad, se tiene

$$E(t) = \frac{h}{2}\sum_{j=0}^{N-1}(v_j^2V_j^2 + U_j^2) \tag{15}$$

Derivando respecto al tiempo,

$$\dot{E}(t) = h\sum_{j=0}^{N-1}\left[v_j^2 V_j (V_j)_t + U_j (U_j)_t\right].$$
$$\dot{E}(t) = h\sum_{j=0}^{N-1}\left[v_j^2 V_j D_0(U_j) + U_j (U_j)_t\right]. \tag{16}$$

Veamos si la energía se conserva en cada una de las discretizaciones. En el caso **STRICT**, tenemos

$$\begin{aligned}
\dot{E}_{\mathrm{S}}(t) &= h\sum_{j=0}^{N-1}\left[v_j^2 V_j D_0(U_j) + U_j (v_j^2 (V_j)_x)_x\right] \\
&= h\sum_{j=0}^{N-1}\left[v_j^2 V_j D_0(U_j) + U_j D_0(v_j^2 V_j)\right] \\
&= (D_0 U, v^2 V)_{0,N-1} + (U, D_0(v^2 V))_{0,N-1} \\
&= \frac{h}{2}\left(U_j v_{j+1}^2 V_{j+1} + U_{j+1} v_j^2 V_j\right)\Bigg|_{N-1}^{N-1} \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{17}$$

Luego, esta discretización conserva la energía.

Por otro lado, para la discretización **NON-STRICT**, tenemos

$$
\begin{aligned}
\dot{E}_{\mathrm{NS}}(t) &= h\sum_{j=0}^{N-1}\left[v_j^2 V_j D_0(U_j) + U_j(v_j^2(V_j)_x)_x\right] \\
&= h\sum_{j=0}^{N-1}\left[v_j^2 V_j D_0(U_j) + U_j 2v_j(v_x)_j V_j + U_j v_j^2 D_0(V_j)\right] \\
&= (D_0U, v^2V)_{0,N-1} + (v^2 D_0(V), U)_{0,N-1} + h\sum_{j=0}^{N-1} U_j 2v_j(v_x)_j V_j \\
&= (D_0U, v^2V)_{0,N-1} + (D_0(v^2V), U)_{0,N-1} - h\sum_{j=0}^{N-1} v_j^2 D_-(V_j)U_{j+1} + h\sum_{j=0}^{N-1} U_j 2v_j(v_x)_j V_j \\
&= -h\sum_{j=0}^{N-1} v_j^2 D_-(V_j)U_{j+1} + h\sum_{j=0}^{N-1} U_j 2v_j(v_x)_j V_j \\
&\neq 0.
\end{aligned} \tag{18}
$$

References

[1] *Introduction to Numerical Methods for Time Dependent Differential Equations*, H. Kreiss and O. Ortiz, (2014).

[2] *High Order Difference Methods for Time Dependent PDE*, B. Gustafsson, (2008).