PDE's: Tarea 4 - 2017

Condiciones de contorno para la ecuación de onda 1D

23 de octubre de 2017

En esta tarea se resolverá la ecuación de ondas

$$\varphi_{tt} = \varphi_{xx}, \quad x \in (0,1), \tag{1}$$

sujeta a condiciones de contorno en $x = 0$ y $x = 1$, las cuales estarán especificadas por funciones $g(t)$ y $h(t)$ dadas. Usaremos la representación de ondas entrantes y salientes para imponer dichas condiciones, empleando para ello un sistema de *penalties*.

Esta técnica consiste en lo siguiente. Si U y V representan ondas entrantes y salientes, luego de calcular las derivadas temporales U_t y V_t en cada paso, se agregan términos de la forma

$$\begin{cases} V_t^{x_0} = V_t^{x_0} + F \cdot \left(g(t) - V^{x_0}\right), & U_t^{x_0} = U_t^{x_0} \\ \\ U_t^{x_N} = U_t^{x_N} + F \cdot \left(h(t) - U^{x_N}\right), & V_t^{x_N} = V_t^{x_N} \end{cases} \tag{2}$$

De esta manera se pide que la solución ingrese en x_0 valiendo $g(t)$, y salga en x_N valiendo $h(t)$. El valor de la constante F depende del orden de la derivada usada, y de la ecuación. Use las diferencias finitas que figuran en el código para el caso no periódico. (deberán comentar el #define PERIODIC).

Muestre que la ecuación (1) puede llevarse al sistema lineal

$$\begin{pmatrix} U_t = U_x \\ V_t = -V_x \end{pmatrix}, \tag{3}$$

de manera que U (V respectivamente) representa una onda viajera hacia la izquierda (derecha, respectivamente). Note que este cambio de variables está relacionado con las variables (π, ω) empleadas en la tarea anterior según

$$U = \pi + \omega, \quad V = \pi - \omega.$$

Analice el comportamiento de la solución para las siguientes configuraciones:

1. *Onda entrante.* Se obtiene dando solo dato en el borde (dato inicial nulo)
$$g(t) = \begin{cases} \sin(2\pi\omega t), & \text{si} \quad t < 0{,}5 \\ 0, & \text{si} \quad t \geq 0{,}5 \end{cases} \quad ; \quad h(t) = V^{x_N}.$$
Corra la rutina hasta T=4, con 200 puntos de grilla y tome $\omega = 10$. Repita la rutina empleando derivadas de orden 2, 4, 6 y 8 en el interior. Verifique el comportamiento de la solución graficando la transformada de Fourier del dato inicial (usando el xmgrace) y la energía de la onda (use escala logarítmica para graficar donde corresponda) .

2. *Onda saliente (sin reflexión).* Esto se logra poniendo $h(t) = g(t) = 0$ y dato inicial (simple-bump) para alguno de los dos modos. Repita la rutina empleando derivadas de orden 2, 4, 6 y 8 en el interior. Verifique el comportamiento de la solución graficando la transformada de Fourier del dato inicial (usando el xmgrace) y la energía de la onda (use escala logarítmica para graficar donde corresponda) .

3. *Doble reflexión.* Elija como dato inicial el pulso suave (simple bump) y elija π de modo que $U = 0$ y $V \neq 0$. Luego, basta con imponer $g(t) = U^{x_0}$ y $h(t) = V^{x_N}$ para tener reflexión en las dos caras. Grafique la energía de la onda durante los primeros 10 segundos de corrida. Si dispone de DV, visualice la evolución de la onda en ese período y note las reflexiones sucesivas. Que pasa si ponemos $h(t) = -V^{x_N}$?

4. *Reflexión con atenuación.* Para que la onda pierda amplitud, considere como dato saliente la función $h(t) = \alpha V^{x_N}$, con $\alpha < 1$. En particular, imponga
$$g(t) = \frac{U^{x_0}}{2}\left(1 + \cos(2\pi\omega t)\right), \quad h(t) = \frac{V^{x_N}}{2}\left(1 + \cos(2\pi\omega t)\right).$$
Analice la energía de la onda para distintos valores de ω.

5. *Reflexión con atenuación y amplificación.* Modifique los penalties de modo que
$$g(t) = U^{x_0}\left(1 + \cos(2\pi\omega t)\right), \quad h(t) = V^{x_N}\left(1 + \cos(2\pi\omega t)\right),$$
y analice las energías. Finalmente, y en base a lo estudiando en las configuraciones anteriores, modifique la frecuencia que aparece en el coeficiente de reflexión de modo de tener situaciones donde la energía disminuya, se mantenga acotada (oscile) o diverja.

6. *Campo dado más reflexión.* En el extremo derecho de una condición que en ausencia de campo saliente fije un valor dado para el campo entrante, un valor constante por ejemplo. Pero que en presencia de una onda saliente la refleje sumándola al campo entrante constante.

FECHA DE ENTREGA: 30 de octubre a las 14hs.