Problema 1: Decimación

Modelo de Ising unidimencional:

$$\mathcal{H} = K \sum_i s_i s_{i+1} + h \sum_i s_i, \tag{1}$$

donde $\mathcal{H} \equiv -\beta H$, $K \equiv \beta J$ y $h \equiv \beta B$.

Tomamos bloques de Kadanoff de dos sitios, de los cuales decimamos uno de los sitios. Llamamos S_i a las variables de bloque, y σ_i a las variables correspondientes a los sitios decimados. El hamiltoniano entonces puede ser escrito como

$$\mathcal{H} = K \sum_i \sigma_i (S_i + S_{i+1}) + \frac{h}{2} \sum_i (S_i + S_{i+1}) + h \sum_i \sigma_i. \tag{2}$$

Suponemos que, al renormalizar, no hay proliferación de interacciones, por lo que podemos proponer un hamiltoniano renormalizado de la forma

$$\mathcal{H}' = K' \sum_i S_i S_{i+1} + \frac{h'}{2} \sum_i (S_i + S_{i+1}). \tag{3}$$

Recordemos que, para el caso de decimación, la transformación de normalización está dada por

$$e^{\mathcal{C} + \mathcal{H}'(S)} = \sum_{\{\sigma\}} e^{\mathcal{H}(S,\sigma)}, \tag{4}$$

donde $\mathcal{C} = N g(K,h)$ es la constante de normalización y $g(K,h)$ es una función intensiva de los parámetros.

En este caso,

$$e^{\mathcal{C} + \mathcal{H}'(S)} = \prod_i \exp\left[K' S_i S_{i+1} + \frac{h'}{2}(S_i + S_{i+1}) + g\right] \tag{5}$$

y

$$\begin{aligned}\sum_{\{\sigma\}} e^{\mathcal{H}(S,\sigma)} &= \prod_i \sum_{\sigma=\pm 1} \exp\left[K\sigma_i (S_i + S_{i+1}) + \frac{h}{2}(S_i + S_{i+1}) + h\sigma_i\right] \\ &= \prod_i 2 e^{\frac{h}{2}(S_i + S_{i+1})} \cosh\left[K(S_i + S_{i+1}) + h\right]\end{aligned}$$

Igualando las dos expresiones anteriores, tenemos

$$\exp\left[K' S_i S_{i+1} + \frac{h'}{2}(S_i + S_{i+1}) + g\right] = e^{\frac{h}{2}(S_i + S_{i+1})} \cosh\left[K(S_i + S_{i+1}) + h\right], \tag{6}$$

para cada bloque i.
Evaluando para cada combinación de spines, tenemos las relaciones

$$e^{g+K'+h'} = 2e^{h}\cosh(2K+h) \tag{7}$$
$$e^{g+K'-h'} = 2e^{-h}\cosh(2K-h) \tag{8}$$
$$e^{g-K'} = 2\cosh(h) \tag{9}$$

En el caso $h=0$, tenemos que $h'=0$. Resolviendo para K',

$$K'(K) = \frac{1}{2}\ln\left[\cosh(2K)\right] \tag{10}$$
$$g(K) = \ln(2) + K'(K) \tag{11}$$

La expresión 10 se puede simplificar mediante el cambio de variables

$$t = \tanh(K) \tag{12}$$
$$t' = \tanh(K'), \tag{13}$$

y teniendo en cuenta la identidad

$$z = \tanh\left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{z+1}{z-1}\right)\right], \tag{14}$$

la cual implica que

$$K = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{t+1}{t-1}\right) \quad \Rightarrow \quad e^{2K} = \frac{t+1}{t-1} \tag{15}$$

De 10, tenemos que

$$t' = \tanh(K') = \tanh\left[\frac{1}{2}\ln\left[\cosh(2K)\right]\right], \tag{16}$$

por lo que se deduce que

$$\begin{aligned}\frac{t'+1}{t'-1} &= \cosh(2K)\\ &= \frac{\dfrac{t+1}{t-1}+\dfrac{t-1}{t+1}}{2}\\ &= \frac{t^2+1}{(t^2-1)}.\end{aligned} \tag{17}$$

Simplificando la expresión anterior, obtenemos la relación de recurrencia

$$t' = t^2. \tag{18}$$

Otra forma de llegar a la relación anterior es partiendo de

$$e^{2K'} = \cosh(2K) \tag{19}$$

y notando que

$$\tanh^2(K) = \frac{e^{2K} + e^{-2K} + 2}{e^{2K} + e^{-2K} - 2} = \frac{\cosh(2K) + 1}{\cosh(2K) - 1} = \frac{e^{2K'} + 1}{e^{2K'} - 1} = \tanh(K') \tag{20}$$

La relación 18 indica que hay dos puntos fijos: $t^* = 0$, que es estable y $t^* = 1$, que es inestable. Estos corresponden a $K = 0$ (temperatura infinita) y $K = \infty$ (temperatura cero). Es decir que el modelo precice una transición de fase a temperatura idénticamente cero.

El exponente crítico ν, asociado a la divergencia de la longitud de correlación, puede calcularse mediante $\nu = y_T^{-1}$, donde

$$y_T = \frac{\ln\left(\left.\frac{\partial K'}{\partial K}\right|_{K_c}\right)}{\ln(b)}. \tag{21}$$

En este caso,

$$\left.\frac{\partial K'}{\partial K}\right|_{K_c} = \tanh(2K_c) = 1, \tag{22}$$

por lo que $\nu = \infty$

Analizamos ahora el caso $h > 0$. Definimos las variables $u = e^{-4K}$ y $v = e^{-2h}$. Dividiendo 8 por 7, obtenemos la ecuación para v'

$$\begin{aligned}
e^{-2h'} &= e^{-2h}\frac{\cosh(2K - h)}{\cosh(2K + h)} \\
v' &= v\frac{e^{2K-h} + e^{-2K+h}}{e^{2K+h} + e^{-2K-h}} \\
v' &= v\frac{v + u}{1 + uv}.
\end{aligned} \tag{23}$$

Elevando 9 al cuadrado,

$$e^{2g-2K'} = (e^h + e^{-h})^2 = \frac{(1 + v)^2}{v} \tag{24}$$

Multiplicando 8 por 7,

$$
\begin{aligned}
e^{2g+2K'} &= (e^{2K+h} + e^{-2K-h})(e^{2K-h} + e^{-2K+h}) \\
&= \frac{(1+uv)(v+u)}{uv}. \qquad (25)
\end{aligned}
$$

Por último, dividiendo 24 por 25, obtenemos la ecuación para u'. Juntas, ambas son

$$
u' = \frac{u(1+v)^2}{(1+uv)(v+u)} \qquad (26)
$$

$$
v' = v\frac{v+u}{1+uv}. \qquad (27)
$$

Por inspección, podemos ver que los puntos $(0,0)$ y $(1,1)$ son puntos fijos. Estos corresponden a las fases ordenada ($T = 0$) y desordenada ($T = \infty$), respectivamente. Además, si $v^* = 1$, que correspondería a campo nulo, tenemos

$$
u^* = \frac{4u^*}{(1+u^*)^2}, \qquad (28)
$$

cuyas soluciones son $u^* = 0$ y $u^* = 1$. Por lo tanto $(0,1)$ es también un punto fijo. Por otro lado, si $u^* = 1$, cualquier valor de v entre 0 y 1 es solución, por lo que $(1,v)$ es una línea cítica.

Problema 2: Aproximación de Migdal-Kadanoff

Antes de utilizar la aproximación de M-K, necesitamos la ecuación de transformación para decimación de una cadena lineal con $b = 3$.

$$\exp\left[K' S_1 S_2 + \frac{h}{2}(S_1 + S_2) + g\right] = \sum_{\{\sigma\}} \exp\Big[K(S_1\sigma_1 + \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2 S_2) \\ + h(\sigma_1 + \sigma_2) + \frac{h}{2}(S_1 + S_2)\Big]$$

$$\sum_{\{\sigma\}} \exp\left[K(S_1\sigma_1 + \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2 S_2) + h(\sigma_1 + \sigma_2) + \frac{h}{2}(S_1 + S_2)\right] =$$

$$e^{\frac{h}{2}(S_1+S_2)} \sum_{\sigma_1}\sum_{\sigma_2} \exp\left[K(S_1\sigma_1 + \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2 S_2) + h(\sigma_1 + \sigma_2)\right] =$$

$$e^{\frac{h}{2}(S_1+S_2)} \left[e^{K(-S_1+1-S_2)-2h} + e^{K(-S_1-1+S_2)} + e^{K(S_1-1-S_2)} + e^{K(S_1+1+S_2)+2h}\right] =$$

$$2e^{\frac{h}{2}(S_1+S_2)} \left\{e^{K}\cosh\left[K(S_1 + S_2) + 2h\right] + e^{-K}\cosh\left[K(S_1 - S_2)\right]\right\}$$

Igualando para combinación de S_1 y S_2,

$$e^{g+K'+h'} = 2e^{h}\left[e^{-K} + e^{K}\cosh(2K + 2h)\right] \tag{29}$$

$$e^{g+K'-h'} = 2e^{-h}\left[e^{-K} + e^{K}\cosh(2K - 2h)\right] \tag{30}$$

$$e^{g-K'} = 2\left[e^{-K}\cosh(2K) + e^{K}\cosh(2h)\right] \tag{31}$$

Podemos verificar que que se cumplen las relaciones $K'(K, -h) = K'(K, h)$ y $h'(K, -h) = -h'(K, h)$, por lo que $h = 0$ es un subespacio invariante. Dado que el punto fijo es no trivial es único, este se encontrará dentro de este subespacio. Para hallarlo, entonces, basta con igualar $h = 0$ en las ecuaciones anteriores, con lo que obtenemos el sistema

$$e^{g+K'} = 2\left[e^{-K} + e^{K}\cosh(2K)\right] \tag{32}$$

$$e^{g-K'} = 2\left[e^{-K}\cosh(2K) + e^{K}\right] \tag{33}$$

Dividiendo 32 por 33,

$$e^{2K'} = \frac{2e^{-K} + e^{K}(e^{2K} + e^{-2K})}{e^{-K}(e^{3K} + e^{-2K}) + 2e^{K}} = \frac{e^{2K} + 3e^{K}}{e^{-3K} + 3e^{-K}}. \tag{34}$$

Luego,

$$
\begin{aligned}
\tanh(K') &= \frac{e^{2K'}+1}{e^{2K'}-1} \\
&= \frac{\dfrac{e^{3K}+3e^{K}}{e^{-3K}+3e^{-K}}+1}{\dfrac{e^{3K}+3e^{K}}{e^{-3K}+3e^{-K}}-1} \\
&= \frac{e^{3K}+3e^{K}+e^{-3K}+3e^{-K}}{e^{3K}+3e^{K}-e^{-3K}-3e^{-K}} \\
&= \tanh^3(K)
\end{aligned}
$$

Luego, utilizando el mismo cambio de variables que en el problema anterior, tenemos la ecuación de transformación

$$t' = t^3. \tag{35}$$

Una vez obtenida la relación $K'_b(K)$, utilizamos la aproximación de M-K, cuya expresión para $b = 3$ y $d = 2$ es $K'(K) = 3K'_3(K)$, es decir,

$$K' = 3\tanh^{-1}\left[\tanh^3(K)\right]. \tag{36}$$

La ecuación anterior se puede escribir como

$$\tanh\left(\frac{K'}{3}\right) = \tanh^3(K). \tag{37}$$

Teniendo en cuenta la relación

$$\tanh(x+y) = \frac{\tanh(x)+\tanh(y)}{1+\tanh(x)\tanh(y)} \tag{38}$$

y definiendo $z = \tanh(x)$,
tenemos

$$\tanh(2x) = \frac{2z}{1+z^2} \tag{39}$$

y

$$
\begin{aligned}
\tanh(3x) &= \frac{z+\tanh(2x)}{1+z\tanh(2x)} \qquad (40)\\
&= \frac{z(1+z^2)+2z}{1+z^2+2z^2} \qquad (41)\\
&= \frac{z^3+3z}{3z^2+1}. \qquad (42)
\end{aligned}
$$

Luego, teniendo en cuenta que $\tanh(K') = \tanh(3(K'/3))$,

$$t' = \tanh(K') = \frac{t^9 + 3t^3}{3t^6 + 1}. \tag{43}$$

Calculamos los puntos fijos mediante $t^* = t = t'$ y definimos $u = t^2$,

$$3u^3 + 1 = u^4 + 3u \tag{44}$$

$$(u^2 - 1)(u^2 - 3u + 1) = 0. \tag{45}$$

Como la variable u está definida en el intervalo $0 \leq u \leq 1$, las únicas dos soluciones posibles son

$$u_1 = 1$$

$$u_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

Para evaluar la estabilidad, derivamos 43 con respecto a t,

$$\frac{dt'}{dt} = \frac{9t^2(t^6 - 1)^2}{(3t^6 + 1)^2} \tag{46}$$

Para el equilibrio $t_1 = \sqrt{u_1}$ la derivada se anula, por lo que el punto fijo es estable (correspondiente a temperatura infinita). Para el equilibrio $t_2 = \sqrt{u_2}$, tenemos

$$\left.\frac{dt'}{dt}\right|_{t_2} = \frac{9}{4} > 1, \tag{47}$$

por lo que el punto fijo es inestable y, por lo tanto, representa el punto crítico. Resolviendo para $K^* = \tanh^{-1}(t^*)$, tenemos

$$K^* = \tanh^{-1}\left[\sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}}\right] \simeq 0.7218 \tag{48}$$

Problema 4: Redes jerárquicas

La igualdad entre el hamiltoniano de sitios y el hamiltoniano renormalizado está dada por

$$\exp\left[K'S_1S_2 + \frac{h}{2}(S_1+S_2) + g\right] = \sum_{\{\sigma\}} \exp\Big[K(S_1+S_1)(\sigma_1+\sigma_2) + K\sigma_1\sigma_2 \\ + h(\sigma_1+\sigma_2) + \frac{h}{2}(S_1+S_2)\Big]$$

Realizando la traza sobre el miembro derecho de la ecuación,

$$\sum_{\{\sigma\}} \exp\left[K(S_1+S_1)(\sigma_1+\sigma_2) + K\sigma_1\sigma_2 + h(\sigma_1+\sigma_2) + \frac{h}{2}(S_1+S_2)\right] =$$

$$e^{\frac{h}{2}(S_1+S_2)} \sum_{\{\sigma\}} \exp\left[K(S_1+S_1)(\sigma_1+\sigma_2) + K\sigma_1\sigma_2 + h(\sigma_1+\sigma_2)\right] =$$

$$e^{\frac{h}{2}(S_1+S_2)} \left[e^{-K(S_1+S_2)+K-2h} + e^{K(S_1+S_2)+K+2h} + 2e^{-K}\right] =$$

$$2e^{\frac{h}{2}(S_1+S_2)} \left[e^K cosh\Big(K(S_1+S_2)+2h\Big) + e^{-K}\right]$$

Evaluando para cada combinación de spines S_1 y S_2, tenemos el sistema de ecuaciones

$$e^{g+K'+h'} = 2e^h\left[e^{-K} + e^K\cosh(4K+2h)\right] \tag{49}$$

$$e^{g+K'-h'} = 2e^{-h}\left[e^{-K} + e^K\cosh(4K-2h)\right] \tag{50}$$

$$e^{g-K'} = 2\left[e^{-K} + e^K\cosh(2h)\right]. \tag{51}$$

Podemos verificar que que se cumplen las relaciones $K'(K,-h) = K'(K,h)$ y $h'(K,-h) = -h'(K,h)$, por lo que $h=0$ es un subespacio invariante. Dado que el punto fijo es no trivial es único, este se encontrará dentro de este subespacio. Para hallarlo, entonces, basta con igualar $h=0$ en las ecuaciones anteriores, con lo que obtenemos el sistema

$$e^{g+K'} = 2\left[e^{-K} + e^K\cosh(4K)\right] \tag{52}$$

$$e^{g-K'} = 4\cosh(K). \tag{53}$$

Dividiendo 52 por 53, tenemos

$$e^{2K'} = \frac{e^{-K} + e^K\cosh(4K)}{2\cosh(K)}. \tag{54}$$

Para calcular los puntos fijos, hacemos $K' = K = K^*$ y definimos $u = e^{2K^*}$. La ecuación anterior queda entonces

$$u = \frac{1 + u\dfrac{u^2 + u^{-2}}{2}}{(u+1)} \tag{55}$$

$$2u(u+1) = 2 + u^3 + u^{-1} \tag{56}$$

$$u^4 - 2u^3 - 2u^2 + 2u + 1 = 0 \tag{57}$$

$$(u-1)(u+1)(u-1-\sqrt{2})(u-1+\sqrt{2}) = 0. \tag{58}$$

Las únicas raíces positivas son $u_1 = 1$ t $u_2 = 1+\sqrt{2}$. La primera corresponde a $K^* = 0$, es decir, $T = \infty$, por lo que corresponde al estado paramagnético. La segunda corresponde a

$$K^* = \frac{\ln(1+\sqrt{2})}{2}, \tag{59}$$

que coincide con la temperatura crítica para el modelo de Ising en $d = 2$ con red cuadrada.

El exponente crítico ν viene dado por

$$\nu^{-1} = y_T = \frac{\ln\left(\left.\dfrac{dK'}{dK}\right|_{K^*}\right)}{\ln b}. \tag{60}$$

Derivando 54 respecto a K,

$$e^{2K'}\frac{dK'}{dK} = e^{4K} - \cosh(2K) \tag{61}$$

$$\left.\frac{dK'}{dK}\right|_{K^*} = u - \frac{1+u^{-2}}{2} \tag{62}$$

$$\left.\frac{dK'}{dK}\right|_{K^*} = 2\sqrt{2} - 1. \tag{63}$$

Con esto se obtiene $\nu \simeq 1.1486$.

Problema 5: Método de Niemeijer y von Leeuwen

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}_0^I &= e^{4K} + 4e^{2K} + 6 + 4e^{-2K} + e^{-4K} \\ &= 16\cosh^4(K) \end{aligned} \tag{64}$$

$$\begin{aligned}\langle s_c^I\rangle(S^I) &= \frac{1}{\mathcal{Z}_0}\sum_{\{s\}} P(S,s)e^{\mathcal{H}_0}(s)s_c^I \\ \langle s_c^I\rangle(1) &= \frac{e^{4K} + 4e^{2K} + 6 - 4e^{-2K} - e^{-4K}}{\mathcal{Z}_0^I} \\ &= \frac{\sinh(4K) + 4\sinh(2K) + 3}{8\cosh^4(K)} \end{aligned} \tag{65}$$

Luego,

$$\langle s_c^I\rangle = a(K)\; S^I, \quad a(K) = \frac{\sinh(4K) + 4\sinh(2K) + 3}{8\cosh^4(K)}. \tag{66}$$

$$\begin{aligned}\langle s_p^I\rangle(S^I) &= \frac{1}{\mathcal{Z}_0}\sum_{\{s\}} P(S,s)e^{\mathcal{H}_0}(s)s_p^I \\ \langle s_p^I\rangle(1) &= \frac{e^{4K} + 2e^{2K} + 2e^{-2K} + e^{-4K}}{\mathcal{Z}_0^I} \\ &= \frac{\cosh(4K) + 2\sinh(2K)}{8\cosh^4(K)} \end{aligned} \tag{67}$$

Luego,

$$\langle s_p^I\rangle = r(K)\; S^I, \quad r(K) = \frac{\cosh(4K) + 2\sinh(2K)}{8\cosh^4(K)}. \tag{68}$$

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{V}(s)\rangle_0 &= 2K\sum_{\langle I,J\rangle}\langle s_p^I\rangle_0\langle s_p^J\rangle_0 + h\sum_I \left[4\langle s_p^I\rangle_0 + \langle s_c^I\rangle_0\right] \\ &= 2Kr^2(K)\sum_{\langle I,J\rangle} S^I S^J + \left[4r(K) + a(K)\right] h \sum_I S^I \end{aligned} \tag{69}$$

Las ecuaciones de renormalización son entonces

$$K' = 2Kr^2(K) \tag{70}$$
$$h' = \left[4r(K) + a(K)\right] h \tag{71}$$

Calculamos K^* en el subespacio invariante $h = 0$:

$$r(K^*) = \frac{1}{2} \tag{72}$$
$$\cosh(4K) + 2\cosh(2K) = 4\cosh^4(K) \tag{73}$$
$$\cosh(4K) + 2\cosh(2K) = 4\left(\frac{1+\cosh(2K)}{2}\right)^2 \tag{74}$$
$$\cosh(4K) + 2\cosh(2K) = 1 + 2\cosh(2K) + \cosh^2(2K) \tag{75}$$
$$\cosh(4K) = 1 + \frac{1+\cosh(4K)}{2} \tag{76}$$
$$\cosh(4K) = 3 \tag{77}$$
$$e^{4K} + e^{-4K} = 6. \tag{78}$$

Definimos $u \equiv e^{4K}$, entonces

$$u^2 - 6u + 1 = 0. \tag{79}$$

La única solución física (con $u > 1$) es $u^* = 3 + 2\sqrt{2}$. Luego,

$$K^* = \frac{\log\left(3 + 2\sqrt{2}\right)}{4} \simeq 0.4407. \tag{80}$$