Problema 1: Interacciones de corto alcance

Sistema de tipo Ising con condiciones de borde periódicas e interacciones de corto alcance a varios vecinos

$$\mathcal{H} = -\sum_{i<j\le N} J(i-j)\sigma_1\sigma_j - B\sum_{i=1}^{N}\sigma_i, \tag{1}$$

$J(n) = 0$, $\forall n > n_0$.
El hamiltioniano puede reescribirse en la forma

$$\mathcal{H} = -\sum_{k=1}^{n_0} J_k \sum_{i=1}^{N}\sigma_i\sigma_{i+k} - B\sum_{i=1}^{N}\sigma_i. \tag{2}$$

Supongamos que $N = Ln_0$. En ese caso, podemos separar nuestra cadena en bloques de spines consecutivos de tamaño n_0 e introducir la siguiente notación:

$$\begin{aligned}
\left[\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n_0}\right] &\quad\to\quad \left[s_1^{(1)}, s_2^{(1)}, \ldots, s_{n_0}^{(1)}\right]\\
\left[\sigma_{n_0+1}, \sigma_{n_0+2}, \ldots, \sigma_{2n_0}\right] &\quad\to\quad \left[s_1^{(2)}, s_2^{(2)}, \ldots, s_{n_0}^{(2)}\right]\\
&\quad\cdots\\
\left[\sigma_{(L-1)n_0+1}, \sigma_{(L-1)n_0+1}, \ldots, \sigma_{Ln_0}\right] &\quad\to\quad \left[s_1^{(L)}, s_2^{(L)}, \ldots, s_{n_0}^{(L)}\right]
\end{aligned}$$

Así, la energía del sistema viene dada por tres tipos de interacciones diferentes:

- Interacciones de spines de un bloque con el campo magnético,
- Interacciones de spines dentro de un bloque,
- Interacciones de spines entre bloques consecutivos.

Las contribuciones de los primeros dos tipos dentro de un bloque vienen dadas por

$$\begin{aligned}
X_{c_j} &\equiv X(s_1^{(j)}, s_2^{(j)}, \ldots, s_{n_0}^{(j)})\\
&= -B\sum_{i=1}^{n_0} s_i^{(j)} - \sum_{k=1}^{n_0} J_k \sum_{i=1}^{n_0-k} s_i^{(j)} s_{i+k}^{(j)}.
\end{aligned}$$

Por otro lado, las interacciones entre bloques vienen dadas por

$$
\begin{aligned}
Y_{c_j,c_{j+1}} &\equiv Y(s_1^{(j)}, s_2^{(j)}, \ldots, s_{n_0}^{(j)}, \ldots, s_1^{(j+1)}, s_2^{(j+1)}, \ldots, s_{n_0}^{(j+1)}) \\
&= -\sum_{k=1}^{n_0} J_k \sum_{i=1}^{n_0-k} s_{n+1-i}^{(j)} s_{k-i+1}^{(j+1)}.
\end{aligned}
$$

Luego, el hamiltoniano del sistema puede escribirse como

$$
\mathcal{H} = \sum_{j=1}^{L} \left(X_{c_j} + Y_{c_j,c_{j+1}} \right) \tag{3}
$$

La función de partición del sistema será entonces

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Z} &= \sum_{\{c\}} \exp\left[-\beta \sum_{j=1}^{L} \left(X_{c_j} + Y_{c_j,c_{j+1}} \right) \right] \\
&= \sum_{\{c\}} \prod_{j=1}^{L} \exp\left[-\beta \left(\frac{X_{c_j}}{2} + Y_{c_j,c_{j+1}} + \frac{X_{c_{j+1}}}{2} \right) \right]
\end{aligned} \tag{4}
$$

Definimos la matriz de transferencia

$$
T(c,c') = \exp\left[-\beta \left(\frac{X_c}{2} + Y_{c,c'} + \frac{X_{c'}}{2} \right) \right], \tag{5}
$$

entonces

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Z} &= \sum_{c_1} \sum_{c_2} \cdots \sum_{c_L} T(c_1,c_2) T(c_2,c_3) \ldots T(c_{L-1},c_L) T(c_L,c_1) \\
&= \mathrm{Tr}(T^L).
\end{aligned} \tag{6}
$$

En el límite termodinámico, la función de partición puede aproximarse por

$$
\mathcal{Z} \sim \lambda_1^L, \tag{7}
$$

donde λ_1 es el mayor autovalor de T.

Problema 2: Modelo de Ising antiferromagnético unidimensional

$$\mathcal{H} = J\sum_{i=1}^{N}\sigma_i\sigma_{i+1} - B\sum_{i=1}^{N}\sigma_i - B_a\sum_{i=1}^{N}(-1)^N\sigma_i. \tag{8}$$

Simetrizamos el hamiltoniano y separamos las sumas en términos pares e impares

$$\begin{aligned}\mathcal{H} = &\sum_{i\,\mathrm{par}}\left[J\sigma_i\sigma_{i+1} - \frac{B}{2}\left(\sigma_i+\sigma_{i+1}\right) - \frac{B_a}{2}\left(\sigma_i-\sigma_{i+1}\right)\right] + \\ &+\sum_{i\,\mathrm{impar}}\left[J\sigma_i\sigma_{i+1} - \frac{B}{2}\left(\sigma_i+\sigma_{i+1}\right) - \frac{B_a}{2}\left(\sigma_{i+1}-\sigma_i\right)\right].\end{aligned} \tag{9}$$

Definimos la matriz A tal que

$$(A)_{\sigma\sigma'} = -\beta\exp\left[J\sigma\sigma' - \frac{B}{2}\left(\sigma+\sigma'\right) - \frac{B_a}{2}\left(\sigma-\sigma'\right)\right].$$

La función de partición puede escribirse entonces como

$$\begin{aligned}\mathcal{Z} &= \sum_{\{\sigma\}}(A)_{\sigma_1\sigma_2}(A^T)_{\sigma_2\sigma_3}\dots(A)_{\sigma_{N-1}\sigma_N}(A^T)_{\sigma_N\sigma_1} \\ &= \mathrm{Tr}\left(U^{N/2}\right),\end{aligned} \tag{10}$$

donde $U = AA^T$. Como U es simétrica, podemos aplicar el teorema de Perron-Frobenius. El sistema, entonces, está caracterizado por el autovalor más grande de U, λ_1.

Calculamos explícitamente A para obtener los autovalores de U.

$$A = \begin{bmatrix} e^{-\beta(J+B)} & e^{\beta(J-B_a)} \\ e^{\beta(J+B_a)} & e^{\beta(J+B)}\end{bmatrix} \tag{11}$$

$$U = \begin{bmatrix} e^{-\beta(J+B)} & e^{\beta(J-B_a)} \\ e^{\beta(J+B_a)} & e^{\beta(J+B)}\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} e^{-\beta(J+B)} & e^{\beta(J+B_a)} \\ e^{\beta(J-B_a)} & e^{\beta(J+B)}\end{bmatrix} \tag{12}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-2\beta(J+B)} + e^{2\beta(J-B_a)} & e^{\beta(B_a-B)} + e^{\beta(2J+B-B_a)} \\ e^{\beta(B_a-B)} + e^{\beta(2J+B-B_a)} & e^{2\beta(J+B)} + e^{2\beta(J+B_a)}\end{bmatrix} \tag{13}$$

Problema 3: Modelo de Blume-Capel Unidimensional

$$\mathcal{H} = -J \sum_i s_i s_{i+1} + D \sum_i s_i^2. \tag{14}$$

Reescribimos el hamiltoniano de forma simetrizada

$$\mathcal{H} = \sum_i \left[\frac{D}{2} \left(s_i^2 + s_{i+1}^2 \right) - J s_i s_{i+1} \right]. \tag{15}$$

La función de partición está dada por

$$\mathcal{Z} = \sum_{\{s\}} \prod_i e^{K s_i s_{i+1} - \frac{K_2}{2}(s_i^2 + s_{i+1}^2)}, \tag{16}$$

donde definimos $K \equiv \beta J$ y $K_2 \equiv \beta D$. Definimos la matriz de transferencia A como

$$A_{ss'} = e^{K s s' - \frac{K_2}{2}(s^2 + s'^2)}, \tag{17}$$

por lo que tenemos

$$\mathcal{Z} = \mathrm{Tr}(A^N). \tag{18}$$

Como A es real, simétrica y de dimensiónb finita, vale Perron-Frobenius, por lo que, en el límite termodinámico se puede aproximar

$$\mathcal{Z} = \lambda_1^N, \tag{19}$$

siendo λ_1 el mayor autovalor de A.
Escribimos la expresión explícita para A:

$$A = \begin{bmatrix} A_{-1,-1} & A_{-1,0} & A_{-1,1} \\ A_{0,-1} & A_{0,0} & A_{0,1} \\ A_{1,-1} & A_{1,0} & A_{1,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{K-K_2} & e^{-K_2/2} & e^{-K-K_2} \\ e^{-K_2/2} & 1 & e^{-K_2/2} \\ e^{-K-K_2} & e^{-K_2/2} & e^{K-K_2} \end{bmatrix} \tag{20}$$

Los autovalores de la matriz son

$$\lambda_s = 2e^{-K_2} \sinh(K) \tag{21}$$

$$\lambda_\pm = \frac{1}{2} + e^{-K_2} \cosh(K) \pm \sqrt{\left[\frac{1}{2} - e^{-K_2} \cosh(K) \right]^2 + 2e^{-K_2}} \tag{22}$$

En el límite de altas temperaturas, el autovalor $\lambda_s \to 0$, por lo que el mayor autovalor es

$$\lambda_1 = \lambda_+ = \frac{1}{2} + e^{-K_2} \cosh(K) + \sqrt{\left[\frac{1}{2} - e^{-K_2} \cosh(K) \right]^2 + 2e^{-K_2}} \tag{23}$$