

Problema 1: Decimación

Modelo de Ising unidimensional:

$$\mathcal{H} = K \sum_i s_i s_{i+1} + h \sum_i s_i, \quad (1)$$

donde $\mathcal{H} \equiv -\beta H$, $K \equiv \beta J$ y $h \equiv \beta B$.

Tomamos bloques de Kadanoff de dos sitios, de los cuales decimamos uno de los sitios. Llamamos S_i a las variables de bloque, y σ_i a las variables correspondientes a los sitios decimados. El hamiltoniano entonces puede ser escrito como

$$\mathcal{H} = K \sum_i \sigma_i (S_i + S_{i+1}) + \frac{h}{2} \sum_i (S_i + S_{i+1}) + h \sum_i \sigma_i. \quad (2)$$

Suponemos que, al renormalizar, no hay proliferación de interacciones, por lo que podemos proponer un hamiltoniano renormalizado de la forma

$$\mathcal{H}' = K' \sum_i S_i S_{i+1} + \frac{h'}{2} \sum_i (S_i + S_{i+1}). \quad (3)$$

Recordemos que, para el caso de decimación, la transformación de normalización está dada por

$$e^{\mathcal{C} + \mathcal{H}'(S)} = \sum_{\{\sigma\}} e^{\mathcal{H}(S, \sigma)}, \quad (4)$$

donde $\mathcal{C} = Ng(K, h)$ es la constante de normalización y $g(K, h)$ es una función intensiva de los parámetros.

En este caso,

$$e^{\mathcal{C} + \mathcal{H}'(s')} = \prod_i \exp \left[K' S_i S_{i+1} + \frac{h'}{2} (S_i + S_{i+1}) + g \right] \quad (5)$$

y

$$\begin{aligned} \sum_{\{\sigma\}} e^{\mathcal{H}(s, \sigma)} &= \prod_i \sum_{\sigma=\pm 1} \exp \left[K \sigma_i (S_i + S_{i+1}) + \frac{h}{2} (S_i + S_{i+1}) + h \sigma_i \right] \\ &= \prod_i 2e^{\frac{h}{2}(S_i + S_{i+1})} \cosh [K(S_i + S_{i+1}) + h] \end{aligned}$$

Igualando las dos expresiones anteriores, tenemos

$$\exp \left[K' S_i S_{i+1} + \frac{h'}{2} (S_i + S_{i+1}) + g \right] = e^{\frac{h}{2}(S_i + S_{i+1})} \cosh [K(S_i + S_{i+1}) + h], \quad (6)$$

para cada bloque i .

Evaluando para cada combinación de spines, tenemos las relaciones

$$e^{g+K'+h'} = 2e^h \cosh(2K+h) \quad (7)$$

$$e^{g+K'-h'} = 2e^{-h} \cosh(2K-h) \quad (8)$$

$$e^{g-K'} = 2 \cosh(h) \quad (9)$$

En el caso $h = 0$, tenemos que $h' = 0$. Resolviendo para K' ,

$$K'(K) = \frac{1}{2} \ln [\cosh(2K)] \quad (10)$$

$$g(K) = \ln(2) + K'(K) \quad (11)$$

La expresión 10 se puede simplificar mediante el cambio de variables

$$t = \tanh(K) \quad (12)$$

$$t' = \tanh(K'), \quad (13)$$

y teniendo en cuenta la identidad

$$z = \tanh \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{z+1}{z-1} \right) \right]. \quad (14)$$

De 10, tenemos que

$$t' = \tanh(K') = \tanh \left[\frac{1}{2} \ln [\cosh(2K)] \right], \quad (15)$$

por lo que se deduce que

$$\begin{aligned} \frac{t'+1}{t'-1} &= \cosh(2K) \\ &= \frac{\frac{t+1}{t-1} + \frac{t-1}{t+1}}{2} \\ &= \frac{t^2+1}{(t^2-1)}. \end{aligned} \quad (16)$$

Simplificando la expresión anterior, obtenemos la relación de recurrencia

$$t' = t^2. \quad (17)$$

La relación 17 indica que hay dos puntos fijos: $t^* = 0$, que es estable y $t^* = 1$, que es inestable. Estos corresponden a $K = 0$ (temperatura infinita) y

$K = \infty$ (temperatura cero). Es decir que el modelo precice una transición de fase a temperatura idénticamente cero.

El exponente crítico ν , asociado a la divergencia de la longitud de correlación, puede calcularse mediante $\nu = y_T^{-1}$, donde

$$y_T = \frac{\ln \left(\left. \frac{\partial K'}{\partial K} \right|_{K_c} \right)}{\ln(b)}. \quad (18)$$

En este caso,

$$\left. \frac{\partial K'}{\partial K} \right|_{K_c} = \tanh(2K_c) = 1, \quad (19)$$

por lo que $\nu = \infty$

Analizamos ahora el caso $h > 0$