Problema 1: Interacciones de corto alcance

Sistema de tipo Ising con condiciones de borde periódicas e interacciones de corto alcance a varios vecinos

$$\mathcal{H} = -\sum_{i<j\leq N} J(i-j)\sigma_1\sigma_j - B\sum_{i=1}^{N}\sigma_i, \tag{1}$$

$J(n) = 0$, $\forall n > n_0$.
El hamiltioniano puede reescribirse en la forma

$$\mathcal{H} = -\sum_{k=1}^{n_0} J_k \sum_{i=1}^{N}\sigma_i\sigma_{i+k} - B\sum_{i=1}^{N}\sigma_i. \tag{2}$$

Supongamos que $N = Ln_0$. En ese caso, podemos separar nuestra cadena en bloques de spines consecutivos de tamaño n_0 e introducir la siguiente notación:

$$\begin{aligned}
[\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n_0}] &\to \left[s_1^{(1)}, s_2^{(1)}, \ldots, s_{n_0}^{(1)}\right] \\
[\sigma_{n_0+1}, \sigma_{n_0+2}, \ldots, \sigma_{2n_0}] &\to \left[s_1^{(2)}, s_2^{(2)}, \ldots, s_{n_0}^{(2)}\right] \\
&\cdots \\
\left[\sigma_{(L-1)n_0+1}, \sigma_{(L-1)n_0+1}, \ldots, \sigma_{Ln_0}\right] &\to \left[s_1^{(L)}, s_2^{(L)}, \ldots, s_{n_0}^{(L)}\right]
\end{aligned}$$

Así, la energía del sistema viene dada por tres tipos de interacciones diferentes:

- Interacciones de spines de un bloque con el campo magnético,

- Interacciones de spines dentro de un bloque,

- Interacciones de spines entre bloques consecutivos.

Las contribuciones de los primeros dos tipos dentro de un bloque vienen dadas por

$$\begin{aligned}
X_{c_j} &\equiv X(s_1^{(j)}, s_2^{(j)}, \ldots, s_{n_0}^{(j)}) \\
&= -B\sum_{i=1}^{n_0} s_i^{(j)} - \sum_{k=1}^{n_0} J_k \sum_{i=1}^{n_0-k} s_i^{(j)} s_{i+k}^{(j)}.
\end{aligned}$$

Por otro lado, las interacciones entre bloques vienen dadas por

$$
\begin{aligned}
Y_{c_j,c_{j+1}} &\equiv Y(s_1^{(j)}, s_2^{(j)}, \ldots, s_{n_0}^{(j)}, \ldots, s_1^{(j+1)}, s_2^{(j+1)}, \ldots, s_{n_0}^{(j+1)}) \\
&= -\sum_{k=1}^{n_0} J_k \sum_{i=1}^{n_0-k} s_{n+1-i}^{(j)} s_{k-i+1}^{(j+1)}.
\end{aligned}
$$

Luego, el hamiltoniano del sistema puede escribirse como

$$
\mathcal{H} = \sum_{j=1}^{L} \left(X_{c_j} + Y_{c_j,c_{j+1}} \right) \tag{3}
$$

La función de partición del sistema será entonces

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Z} &= \sum_{\{c\}} \exp\left[-\beta \sum_{j=1}^{L} \left(X_{c_j} + Y_{c_j,c_{j+1}} \right) \right] \\
&= \sum_{\{c\}} \prod_{j=1}^{L} \exp\left[-\beta \left(\frac{X_{c_j}}{2} + Y_{c_j,c_{j+1}} + \frac{X_{c_{j+1}}}{2} \right) \right]
\end{aligned} \tag{4}
$$

Definimos la matriz de transferencia

$$
T(c,c') = \exp\left[-\beta \left(\frac{X_c}{2} + Y_{c,c'} + \frac{X_{c'}}{2} \right) \right], \tag{5}
$$

entonces

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Z} &= \sum_{c_1} \sum_{c_2} \cdots \sum_{c_L} T(c_1,c_2) T(c_2,c_3) \ldots T(c_{L-1},c_L) T(c_L,c_1) \\
&= \mathrm{Tr}(T^L).
\end{aligned} \tag{6}
$$

En el límite termodinámico, la función de partición puede aproximarse por

$$
\mathcal{Z} \sim \lambda_1^L, \tag{7}
$$

donde λ_1 es el mayor autovalor de T.

Problema 2: Modelo de Ising antiferromagnético unidimensional

$$
\mathcal{H} = J \sum_{i=1}^{N} \sigma_i \sigma_{i+1} - B \sum_{i=1}^{N} \sigma_i - B_a \sum_{i=1}^{N} (-1)^N \sigma_i. \tag{8}
$$

Simetrizamos el hamiltoniano y separamos las sumas en términos pares e impares

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H} = &\sum_{i\,\mathrm{par}} \left[J\sigma_i\sigma_{i+1} - \frac{B}{2}\left(\sigma_i + \sigma_{i+1}\right) - \frac{B_a}{2}\left(\sigma_i - \sigma_{i+1}\right)\right] + \\
&+ \sum_{i\,\mathrm{impar}} \left[J\sigma_i\sigma_{i+1} - \frac{B}{2}\left(\sigma_i + \sigma_{i+1}\right) - \frac{B_a}{2}\left(\sigma_{i+1} - \sigma_i\right)\right]. \qquad (9)
\end{aligned}
$$

Definimos la matriz A tal que

$$
(A)_{\sigma\sigma'} = -\beta \exp\left[J\sigma\sigma' - \frac{B}{2}\left(\sigma + \sigma'\right) - \frac{B_a}{2}\left(\sigma - \sigma'\right)\right].
$$

La función de partición puede escribirse entonces como

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Z} &= \sum_{\{\sigma\}} (A)_{\sigma_1\sigma_2}(A^T)_{\sigma_2\sigma_3}\ldots(A)_{\sigma_{N-1}\sigma_N}(A^T)_{\sigma_N\sigma_1} \\
&= \mathrm{Tr}\left(U^{N/2}\right), \qquad (10)
\end{aligned}
$$

donde $U = AA^T$. Como U es simétrica, podemos aplicar el teorema de Perron-Frobenius. El sistema, entonces, está caracterizado por el autovalor más grande de U, λ_1.

Calculamos explícitamente A para obtener los autovalores de U.

$$
A = \begin{bmatrix} e^{-\beta(J+B)} & e^{\beta(J-B_a)} \\ e^{\beta(J+B_a)} & e^{\beta(J+B)} \end{bmatrix}
$$

$$
U = \begin{bmatrix} e^{-\beta(J+B)} & e^{\beta(J-B_a)} \\ e^{\beta(J+B_a)} & e^{\beta(J+B)} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} e^{-\beta(J+B)} & e^{\beta(J+B_a)} \\ e^{\beta(J-B_a)} & e^{\beta(J+B)} \end{bmatrix}
$$