Elementos de la Teoría de los Fenómenos Críticos

Septiembre de 2019

Guía N° 3 - Teorías de Campo Medio

Problema 1: ***Modelo de Blume-Capel - Aproximación Variacional***

Considere el modelo de Blume-Capel a campo nulo en una red de coordinación z:

$$\mathcal{H} = -J \sum_{<i,j>} s_i s_j + D \sum_i s_i^2$$

donde $s_i = 0, \pm 1$, $D, J, B > 0$.

(a) Utilize el Hamiltoniano de prueba

$$\mathcal{H}_0 = -\eta \sum_i s_i + D \sum_i s_i^2$$

y la desigualdad variacional de Bogoliubov para obtener una expresión aproximada de la energía libre, esto es, obtenga una funcional $\Phi(T, B, \eta)$ tal que

$$f(T, B) = \min_\eta \Phi(T, B, \eta).$$

Verifique que el valor de η que minimiza la funcional es proporcional la magnetización a campo nulo del sistema en la aproximación que estamos considerando.

(b) Mediante una expansión de Landau para $\Phi(T, B = 0, \eta)$ en potencias de η

$$\Phi(T, B = 0, \eta) = a_0 + a_2\eta^2 + a_4\eta^4 + a_6\eta^6 + ...$$

calcule la linea de segundo orden y localize el punto tricrítico.

Problema 2: ***Modelo de Blume-Capel - Versión Curie-Weiss***

Considere la versión Curie-Weiss del modelo de Blume-Capel

$$\mathcal{H} = -\frac{J}{2N} \sum_{i,j} s_i s_j + D \sum_i s_i^2 - B \sum_i s_i$$

donde $s_i = 0, \pm 1$, $D, J, B > 0$.

(a) Obtenga una forma asintótica para la función partición en el $\lim N \to \infty$, y muestre que la energía libre puede escribirse como

$$f(T, B) = \min_m \Phi(T, B, m)$$

donde la variable m puede identificarse con la magnetización.

(b) Compare la expresión de esta funcional a campo nulo con la obtenida en el problema anterior. Compare el comportamiento crítico de ambas aproximaciones.

Problema 3: *Teoría de Landau para puntos tricríticos*

(a) Calcule los exponentes tricríticos clásicos α, β, γ y δ.

(b) Suponiendo dos parámetros termodinámicos (T, x), muestre que las lineas de primer y segundo orden en el diagrama de fases (T, x) tienen la misma pendiente en el punto tricrítico.

Problema 4: *Derivadas funcionales*

(a) Sea una funcional $F[f(x)]$. Muestre que

$$\frac{\delta f(x_1)}{\delta f(x_0)} = \delta(x_0 - x_1)$$

(b) Muestre que

$$\frac{\delta}{\delta \eta(\vec{r})} \int d\vec{r}\,' \frac{1}{2} \left(\nabla \eta(\vec{r}\,')\right)^2 = -\nabla^2 \eta(\vec{r})$$

$$\frac{\delta}{\delta h(\vec{r})} \exp\left(\int d\vec{r}\,' h(\vec{r}\,') \eta(\vec{r}\,')\right) = \eta(\vec{r}) \exp\left(\int d\vec{r}\,' h(\vec{r}\,') \eta(\vec{r}\,')\right)$$

donde $\vec{r}$ es un vector de posición d-dimensional.

Problema 5: *Funcional de Landau-Ginzburg*

Sea

$$Z = \int \mathcal{D}\eta(\vec{r}) e^{-\beta L[\eta(\vec{r})]}$$

donde $L[\eta(\vec{r})]$ es la funcional de Landau-Ginzburg

$$L = \int_\Omega d\vec{r} \left[\frac{1}{2} a t \eta(\vec{r})^2 + \frac{1}{4} b \eta(\vec{r})^4 - B(\vec{r}) \eta(\vec{r}) + \frac{c}{2} \left(\nabla \eta(\vec{r})\right)^2\right]$$

y sea

$$\chi(\vec{r}, \vec{r}\,') \equiv \left. \frac{\delta \langle \eta(\vec{r}) \rangle}{\delta B(\vec{r}\,')} \right|_{B(\vec{r})=0}$$

la susceptibilidad generalizada.

(a) Muestre que

$$\chi(\vec{r}, \vec{r}\,') = \frac{\beta}{N} \left[\langle \eta(\vec{r}) \eta(\vec{r}\,') \rangle - \langle \eta(\vec{r}) \rangle \langle \eta(\vec{r}\,') \rangle\right]$$

(b) Muestre que la susceptibilidad isotérmica en un sistema con invariancia traslacional satisface

$$\chi_T = \left. \frac{\partial \langle \eta \rangle}{\partial B} \right|_{B=0} = \int \chi(\vec{r}) d\vec{r}$$