

Elementos de la Teoría de los Fenómenos Críticos

Sergio A. Cannas

Agosto 11, 2019

Capítulo 1

Nociones básicas de transiciones de fase continuas

1.1 Fenomenología

El presente curso trata de aspectos generales de la teoría física de los llamados fenómenos críticos. ¿Que es un fenómeno crítico? Si bien en la actualidad el concepto de fenómeno crítico abarca una gran variedad de fenómenos presentes en la naturaleza (en su mayoría fenómenos de no-equilibrio, tales como flujo en medios granulares, terremotos, modelos de evolución biológica, redes neuronales, etc.) este curso trata exclusivamente de situaciones de *equilibrio termodinámico* en la física de la materia condensada. Sin embargo, los conceptos y teorías que aquí exponemos, así como la terminología que introduciremos, son en buena medida aplicables a los fenómenos arriba mencionados. En el contexto de la termodinámica y mecánica estadística de equilibrio podemos pensar un fenómeno crítico como un tipo particular de *transición de fase*, esto es, un cambio cualitativo en las propiedades macroscópicas al variar alguno de los parámetros termodinámicos. Los fenómenos que aquí trataremos se relacionan con lo que se conoce como transiciones de fase *continuas* o de *segundo orden*. Poco de lo que aquí veremos se relaciona, excepto bajo circunstancias particulares, con lo que se conoce como una transiciones de fase

de primer orden o *discontinuas*, tal como la familiar transición gas-líquido. En tal tipo de transición una o mas de las derivadas primeras de la energía libre (tal como entropía, densidad, magnetización, etc) sufren un cambio discontinuo. En el caso en que la entropía es discontinua la transición presenta *calor latente*¹. En este punto conviene aclarar una cuestión de terminología. La clasificación de transiciones de fase en primer y segundo orden es anacrónica y se debe a P. Ehrenfest, quien propuso clasificar a una transición como de *n-ésimo* orden si la *n-ésima* derivada de la energía libre respecto de alguno cualquiera de sus argumentos es discontinua. Esta clasificación es inadecuada, ya que en la mayoría de las transiciones de fase continuas (aquellas sin discontinuidad en las derivadas primeras) una o más de las derivadas segundas en realidad *diverge* en lugar de exhibir una discontinuidad (hecho que era desconocido a principios del siglo XX cuando fue propuesta dicha clasificación). A pesar de eso, la denominación de primer y segundo orden se popularizó tanto que hasta el día de hoy subsiste de manera convencional, si bien algunos autores prefieren hablar de transiciones *continuas* o *discontinuas*.

Que tiene de particular una transición continua? Veremos que la fenomenología es completamente diferente y mucho mas compleja que la de una discontinua. Vamos a considerar primero algunos ejemplos. El paradigma de una transición continua (y de hecho la primera que fué estudiada en profundidad) es la conversión de los sólidos llamados *ferromagnéticos* de un estado *paramagnético* a uno *ferromagnético* en una temperatura muy precisa llamada tempeatura de Curie T_c . El ejemplo típico es el hierro cuya temperatura de Curie es $T_c = 1043$ K. Para $T > T_c$ el material es paramagnético, es decir, en ausencia de campo magnético externo presenta magnetización nula, mientras que en presencia de un campo debil presenta una magnetización proporcional al campo. En la fase ferromagnética ($T < T_c$) el material se magnetiza aún en ausencia de campo externo, en alguna dirección particular. Decimos que el material presenta *magnetización espontanea* $\vec{M}_0(T)$. En algunos materiales la ori-

¹En algunos contextos solo se considera que una transición es de primer orden si presenta calor latente; en el presente curso consideraremos que una transición de fase es de primer orden si cualquiera de las derivadas primeras es discontinua, aún sin calor latente.

entación de la magnetización espontánea ocurre al azar. Estos son los ferromagnetos *isotrópicos*. En otros materiales, la magnetización espontánea tiende a alinearse preferencialmente en la dirección de alguno de los ejes cristalinos (llamado eje de magnetización fácil); estos se conocen como *ferromagnetos uniaxiales*. La forma típica del módulo de la magnetización espontánea específica $m_0(T) \equiv |\vec{M}_0(T)|/V$ se muestra en la figura 1.1. Por otra parte, en presencia de campo externo la magnetización tiende a alinearse con el mismo, en tanto que su módulo presenta una dependencia no-lineal con la intensidad del campo. Notemos que la derivada de $m_0(T)$ es discontinua en T_c y esto parece de acuerdo con la clasificación de Ehrenfest; sin embargo, esta no es una simple discontinuidad, ya que para $T \rightarrow T_c^-$ la derivada primera de m_0 *diverge* con una ley de potencia. Mas precisamente, para $T \rightarrow T_c^-$

$$m_0(T) \sim (T_c - T)^\beta$$

lo cual define el *exponente crítico* $0 < \beta < 1$. Valores típicos medidos arrojan valores del orden de $\beta \sim 0.36$ (ej., para Fe: $\beta = 0.37 \pm 0.1$; Ni: $\beta = 0.358 \pm 0.003$).

Por otra parte, el calor específico a campo nulo (derivada segunda de la energía libre) diverge en T_c de la forma

$$C(T) \sim |T - T_c|^{-\alpha} \quad \text{para} \quad \left| \frac{T - T_c}{T_c} \right| \ll 1$$

Valores medidos para Fe y Ni: $\alpha = -0.03 \pm 0.12$ y 0.04 ± 0.12 respectivamente (notemos que son valores muy pequeños; ya volveremos sobre este punto). Otra cantidad que diverge con una ley de potencia es la susceptibilidad magnética a campo nulo:

$$\chi(T) \sim |T - T_c|^{-\gamma} \quad \text{para} \quad \left| \frac{T - T_c}{T_c} \right| \ll 1$$

Por otra parte, a lo largo de la isoterma crítica $T = T_c$ la magnetización varía con el campo externo con una ley de potencia $m(B, T_c) \sim B^{1/\delta}$ ($\delta > 1$) cuando $B \rightarrow 0$. La relación de los diferentes exponentes críticos asociados a la magnetización con los diferentes comportamientos asintóticos se ilustra en la Fig.1.2.

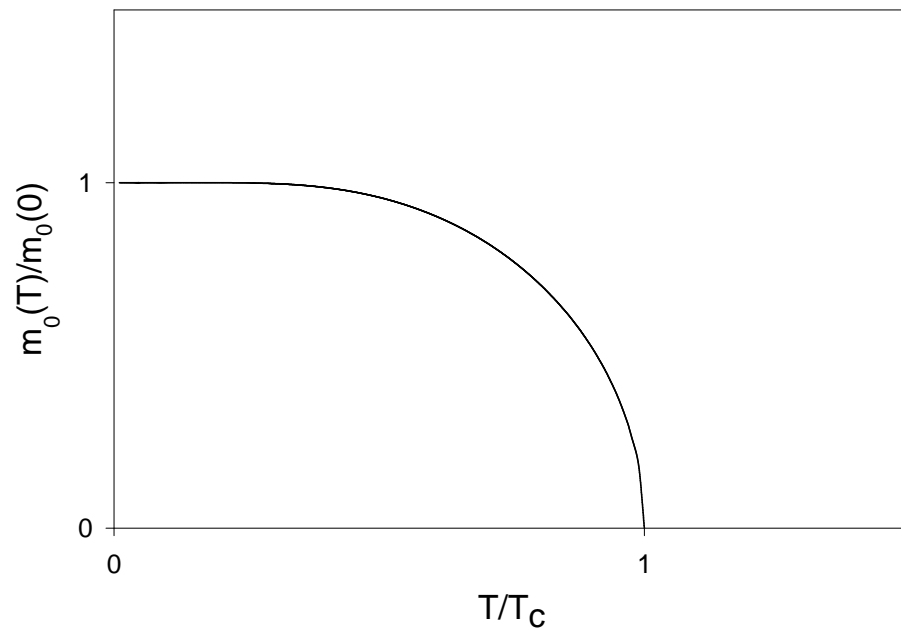


Figura 1.1: Magnetización espontanea en función de T/T_c para un material ferromagnético.

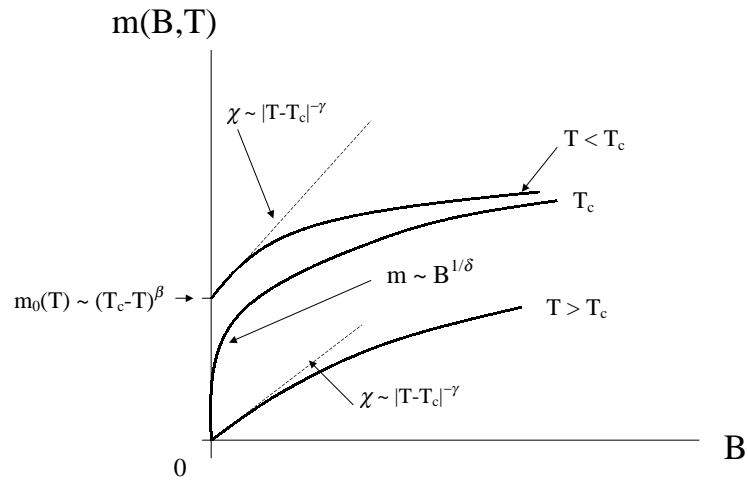


Figura 1.2: Magnetización específica en función del campo externo B para diferentes temperaturas y comportamientos asintóticos en torno del punto crítico $(T, B) = (T_c, 0)$.

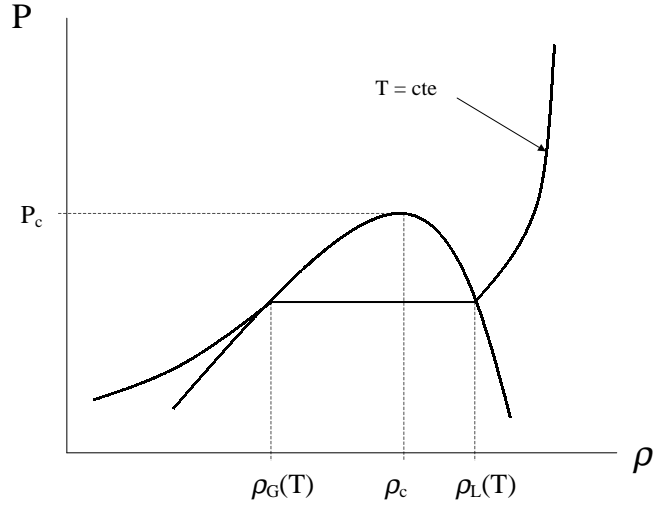


Figura 1.3: Diagrama de fases presión vs. densidad para la transición gas-líquido.

Otro fenómeno relacionado ocurre en la transición de fase gas-líquido. Esta presenta en el diagrama presión vs. temperatura una línea de primer orden la cual termina en un punto crítico. Que relación guarda esto con el ejemplo antes mencionado? Podemos entender esta relación analizando el comportamiento del sistema en la región de coexistencia de fases que se muestra en la Fig.1.3. Tomemos una isoterma arbitraria y sean $\rho_G(T)$ y $\rho_L(T)$ las densidades del gas y del líquido respectivamente en la curva de coexistencia. Si ahora aumentamos la temperatura aproximándonos de T_c la diferencia de densidades $\rho_L(T) - \rho_G(T)$ tiende a cero, mostrando un comportamiento análogo al de la magnetización espontánea mostrado en la Fig.1.1. Mas aún, esta diferencia tiende a cero mediante una ley de potencia asintótica

$$\rho_L(T) - \rho_G(T) \sim (T_c - T)^\beta \quad \text{para} \quad \frac{T_c - T}{T_c} \ll 1.$$

Esto en principio podría no tener nada que ver con el otro fenómeno. Sin embargo se observa experimentalmente que el exponente crítico β es el mismo para cualquier sustancia con un valor aproximado de $\beta = 0.33$, muy semejante al de ciertos ferro-

magnetos, tales como Fe y Ni. Pero la analogía no termina ahí. El calor específico también diverge con una ley de potencia en T_c , esto es, si enfriamos desde $T > T_c$ manteniendo la densidad constante $\rho = \rho_c$ tenemos que $C(T) \sim (T - T_c)^{-\alpha}$, con valores de α nuevamente semejantes a los del ferromagneto². Si además consideramos que las variables termodinámicas análogas entre un fluido y un sistema magnético son $M \rightarrow V$ y $B \rightarrow P$, el análogo de la susceptibilidad magnética en el fluido es la compresibilidad isotérmica κ_T . Se observa que la misma presenta el mismo tipo de divergencia que el ferromagneto con un exponente crítico γ también semejante e independiente de la sustancia particular!! Para completar el panorama, a lo largo de la isoterma crítica y en la proximidad del punto crítico, la densidad varía con la presión como $|\rho - \rho_c| \sim |p - p_c|^{1/\delta}$ y con el mismo exponente crítico que el ferromagneto ($\delta \approx 5$).

Otro fenómeno sumamente interesante que ocurre en el punto crítico de un fluido simple se conoce como **opalescencia crítica**. Si tomamos un fluido transparente encerrado en un recipiente transparente con densidad igual a la crítica y variamos la temperatura, al atravesar el punto crítico el fluido se vuelve opaco con una tonalidad lechosa, retomando su transparencia al continuar variando la temperatura. Este efecto nos dice que en la criticalidad el índice de refracción del fluido varía como resultado de la existencia de fluctuaciones de densidad sobre regiones de diferentes tamaños (burbujas), ya que el fluido dispersa luz en todo el espectro visible. Este efecto está directamente relacionado con la divergencia en la compresibilidad isotérmica. Una compresibilidad infinita dará como resultado que las fluctuaciones de presión (siempre presentes), aún siendo muy pequeñas, provoquen grandes fluctuaciones de densidad.

Este efecto es una clave central en la comprensión de los fenómenos críticos y volveremos sobre el repetidamente.

Otro ejemplo de sistema que presenta comportamiento crítico es el ^4He a bajas

²El comportamiento del calor específico para $T < T_c$ es más sutil y requiere de una discusión más cuidadosa, debido a que la transición presenta calor latente

temperaturas (~ 2 K), cuyo diagrama de fases se muestra en la Fig.1.4a. En un rango de presiones entre valores cercanos al cero y 25 atm., el ^4He sufre una transición de un estado de fluido normal (llamado He I) a un estado superfluido (llamado He II). En el estado superfluido el ^4He presenta una serie de propiedades bastante inusuales, como por ejemplo un flujo sin disipación en tubos capilares (a veces llamado efecto fuente). Este fenómeno está estrechamente relacionado a la transición de Bose-Einstein, siendo por lo tanto un fenómeno de origen netamente cuántico. La transición de fluido normal a superfluido se suele llamar *transición λ* debido a la forma característica del calor específico, la cual se muestra en la Fig.1.4b. La divergencia en el calor específico es en este caso de tipo logarítmica:

$$C \sim A \log |T - T_\lambda|$$

A partir de estos ejemplos podemos discutir con un poco más de detalle el concepto de exponente crítico y la manera en que se estima un exponente experimentalmente. Estos comportamientos divergentes que hemos mencionado son siempre *asintóticos*. Si nos alejamos del punto crítico observaremos que el comportamiento no se ajusta a ninguno de los mencionados. Esto hace que la estimación experimental de un exponente crítico, entre otras razones, sea sumamente difícil, ya que depende de la resolución del instrumental. Una medición con mayor resolución puede alterar significativamente los valores de los exponentes al aproximarnos mejor al régimen asintótico. En particular hemos visto que el exponente α para ferromagnetos y fluidos toma valores sumamente pequeños, mientras que para la transición al He superfluido presenta una divergencia logarítmica. En la práctica, es sumamente difícil distinguir entre una divergencia logarítmica y una ley de potencia con exponente pequeño. Para ver el origen de esto supongamos una función $f(x) \sim Ax^a$ con $0 < x \ll 1$ y $a < 0$. Si tomamos el logaritmo de la función obtenemos:

$$\ln f(x) \sim \ln A + a \ln x \quad (1.1)$$

Esto nos permite definir el exponente a como

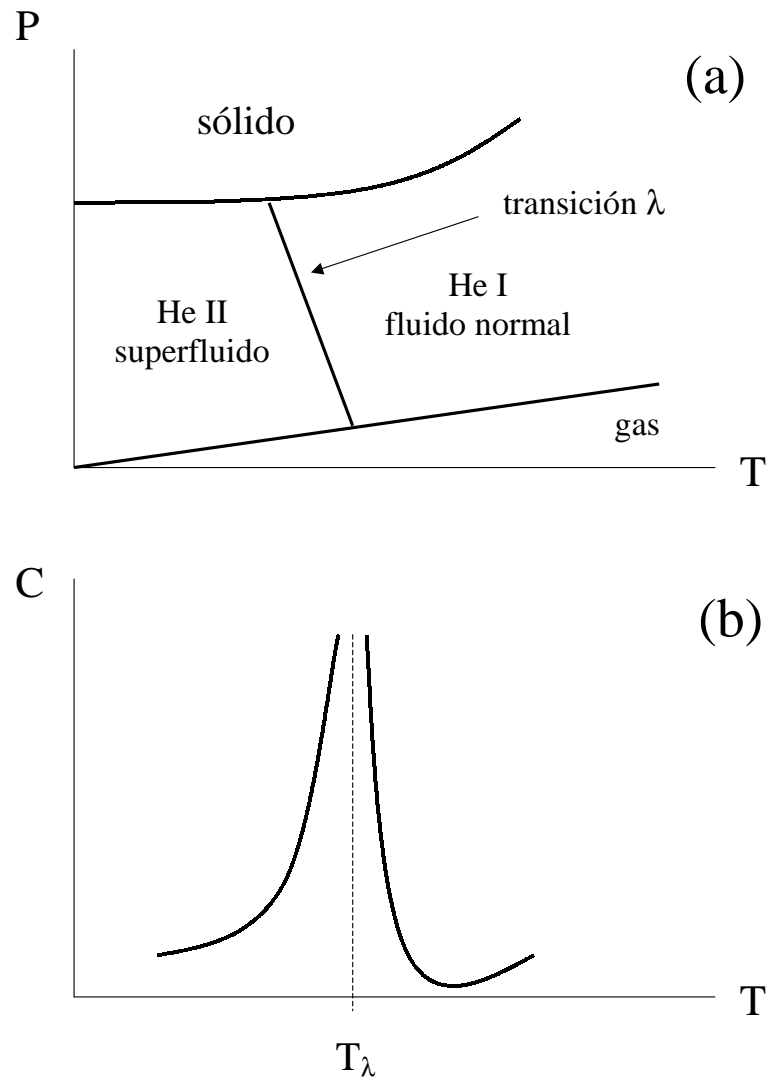


Figura 1.4: (a) Diagrama de fases presión vs. densidad para el ^4He ; (b) Calor específico a presión constante vs. temperatura en la transición λ .

$$a = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln f(x)}{\ln x} \quad (1.2)$$

Supongamos ahora que $f(x) = B \ln x$ con $B < 0$ y $0 < x \ll 1$, pero asumimos que la divergencia es una ley de potencia. La aplicación de la definición (1.2) nos da

$$a = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln |B| + \ln |\ln x|}{\ln x} = \lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{\ln |u|}{u} = 0 \quad (1.3)$$

Sin embargo, si en lugar de una divergencia tenemos un pico finito, la definición (1.2) también nos da un exponente cero. En los casos en que el exponente puede obtenerse analíticamente suelen distinguirse estos dos casos con la notación $\alpha = 0_{log}$ para una divergencia logarítmica. Sin embargo, la definición (1.2) no es práctica en el caso experimental, ya que este límite resulta inviable. En la práctica los exponentes críticos se estiman representando los puntos experimentales en un gráfico log-log. De la Ec.(1.1) vemos que una ley de potencia en esta representación aparece como una recta cuya pendiente es el exponente crítico, el cual puede obtenerse mediante una regresión lineal. Si la función diverge logarítmicamente aparecerá como una recta en un gráfico lineal-log. Sin embargo, si la función presenta una ley de potencia con un exponente muy pequeño $a \ll 1$ tenemos que

$$x^a = e^{a \ln x} \approx 1 + a \ln x$$

donde esta aproximación es válida siempre que $|a \ln x| \ll 1$, esto es, para valores no demasiado pequeños de x . De esta manera, si la resolución experimental es baja y/o disponemos de puntos en un rango limitado de valores, la representación de esta función en un gráfico lineal-log difícilmente resulta distinguible de un comportamiento logarítmico, tal como se ilustra en la Fig.1.5a. Que pasa en el caso inverso, esto es, cuando graficamos una función que diverge logarítmicamente en un gráfico log-log? Este caso se ilustra en la Fig.1.5b. A partir de la relación

$$\ln x = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{x^a - 1}{a}$$

ó bien

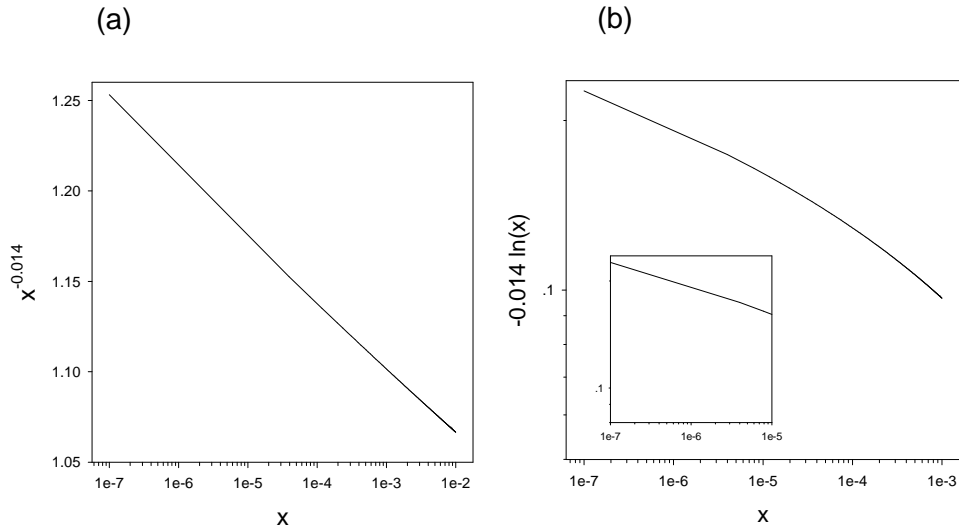


Figura 1.5: (a) Ley de potencia con exponente pequeño representada en un gráfico lineal-log; (b) Divergencia logarítmica representada en un gráfico log-log.

$$-\ln x = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{x^{-a} - 1}{a}$$

vemos que para valores de $x \ll 1$ en un rango limitado de valores podemos aproximar $\ln x \approx x^{-a}/a$, para algún valor de a suficientemente pequeño. Sin embargo, el valor de a variará al cambiar el rango de valores de x . De este modo necesitamos disponer de puntos en un rango amplio de valores para distinguirlo claramente de una ley de potencia.

Existen muchísimos mas ejemplos de sistemas que presentan este tipo de transiciones de fase caracterizadas por divergencias con exponentes críticos muy semejantes. Significa esto que los exponentes críticos son independientes (dentro del error

experimental) del sistema? La respuesta es no. Veremos a lo largo del curso que los sistemas críticos pueden agruparse en categorías, donde los sistemas pertenecientes a una misma categoría presentan todos los mismos exponentes críticos. Este fenómeno se conoce como **universalidad** y las distintas categorías como **clases de universalidad**. La transición para-ferro (en un ferromagneto uniaxial) y el punto crítico de la transición líquido-gas pertenecen a la misma clase de universalidad. El hecho de que sistemas tan diferentes tengan los mismo exponentes críticos nos indica que estamos en presencia de un fenómeno altamente complejo y con implicancias físicas sumamente profundas. De que depende que un sistema presente un dado conjunto de valores para los exponentes críticos? Dicho de otra manera, que propiedades del sistema determinan su pertenencia a una dada clase de universalidad? Para responder a esta pregunta tenemos que introducir algunos conceptos que nos permitan englobar en una misma descripción sistemas de naturaleza diferente.

1.1.1 Caracterización de las transiciones de fase continuas

Un concepto muy importante para la descripción unificada de las transiciones de fase continuas es el de **parámetro de orden**, el cual fué introducido por Landau. La idea general es que en cualquier transición de fase continua es posible identificar una cantidad macroscópica (esto es, relacionada de alguna manera con parámetros termodinámicos del sistema), la cual se anula idénticamente en una de las fases (generalmente la fase de altas temperaturas $T \geq T_c$) y es diferente de cero en la otra fase (generalmente a bajas temperaturas $T < T_c$). En una transición de fase continua este parámetro es continuo en T_c , con lo cual tiende a cero continuamente al aproximarnos a T_c desde temperaturas menores. El ejemplo típico es la magnetización en un ferromagneto. El parámetro de orden no necesariamente es un escalar, pudiendo ser un vector. Vamos a denominar D el número de componentes del parámetro de orden. En el caso general de un ferromagneto $D = 3$, si bien en el caso de ferromagnetos uniaxiales el parámetro de orden se reduce a un escalar. Vamos a denominarlo en forma genérica $\vec{\phi}$. En el caso de la transición gas-líquido

tenemos que $\phi = \rho_L - \rho_G$. Esto permite la definición general del exponente crítico β a través del comportamiento asintótico

$$|\vec{\phi}| \sim (T_c - T)^\beta \quad \text{para} \quad T < T_c$$

Vemos que hasta aquí la definición del parámetro de orden es bastante ambigua. Por ejemplo, dado un parámetro de orden escalar, cualquier potencia positiva del mismo satisface también el criterio antes mencionado. Pero esto hace que el exponente β , que es lo que realmente nos interesa, no este bien definido. En general la elección correcta del parámetro de orden requiere de un análisis de las condiciones físicas del problema y no existe una receta única para ello. Sin embargo, veremos que existen una serie de restricciones que limitan la arbitrariedad en la elección del parámetro de orden. Una de estas restricciones es la existencia de un parámetro *termodinámicamente conjugado* al parámetro de orden, al cual llamaremos genéricamente \vec{B} , el cual tiene la misma dimensión D del parámetro de orden; sea $B \equiv |\vec{B}|$. En el caso en que el parámetro de orden se relaciona de manera directa con una variable termodinámica extensiva (magnetización, densidad ó volumen específico) el parámetro termodinámicamente conjugado es simplemente la variable intensiva que resulta de derivar la energía libre respecto del parámetro de orden (campo magnético ó presión). En otros casos mas complicados, donde el parámetro de orden no esta tan claramente identificado con una variable termodinámica, la identificación del parámetro conjugado puede no ser muy simple.

Podemos entonces definir una susceptibilidad generalizada

$$\chi \equiv \left(\frac{\partial |\vec{\phi}|}{\partial B} \right)$$

Con estas definiciones podemos introducir de manera formal los exponentes γ y δ a través de los comportamientos asintóticos:

$$\chi \sim |T - T_c|^{-\gamma} \quad \text{para} \quad |T - T_c|/T_c \ll 1 \quad \text{y} \quad B = B_c$$

$$|\vec{\phi}| \sim |B - B_c|^{1/\delta} \quad \text{para} \quad T = T_c$$

Podemos ver ahora como esto sirve como guía en la elección del parámetro de orden correcto. Supongamos que ϕ es el parámetro de orden adecuado. Tomemos $\phi' = \phi^2$. de la definición anterior tenemos que $\chi' = 2\phi\chi$, cantidad que se anula idénticamente para $T > T_c$.

La misma ambigüedad en la definición del concepto de parámetro de orden hace que en la literatura se use este nombre para designar diferentes cantidades las cuales, no obstante semejantes, representan conceptos diferentes. Vamos a darle aquí nombres diferentes para evitar confusiones. Llamaremos *parámetro de orden microscópico* a aquella cantidad dependiente de las variables de estado del sistema cuyo valor medio térmico nos dá el parámetro de orden. En el caso de la transición para-ferro, por ejemplo, este vendría dado por la magnetización microscópica: $\sum_i \vec{s}_i/N$, donde \vec{s}_i es una variable de spin asociada con un sitio i de una red de Bravais y N es el número de spines en la red.

Hemos visto que en la criticalidad las fluctuaciones juegan un rol importante. Para un sistema homogéneo, lejos de la criticalidad, las fluctuaciones de cualquier promedio termodinámico son despreciables en el límite termodinámico, ya que decaen como $1/\sqrt{V}$. En la criticalidad, sin embargo, estamos en presencia de una singularidad en la energía libre y las fluctuaciones de cualquier parámetro pueden ser anormalmente grandes. Esto es cierto, en particular, para el parámetro de orden. Un concepto útil para analizar fluctuaciones es el de *parámetro de orden local* $\vec{\phi}(\vec{x})$. Este puede pensarse como un promedio espacial del parámetro de orden microscópico en un volumen pequeño δV centrado en la posición \vec{x} , mucho menor que el volumen V pero cuyo tamaño permite contener un número suficientemente grande de partículas, de manera que $\vec{\phi}(\vec{x})$ varíe de manera aproximadamente continua de punto a punto. El parámetro de orden total se obtiene entonces como la integral (normalizada) de $\vec{\phi}(\vec{x})$ sobre todo el volumen de la muestra. Para el caso de un fluido simple podemos definir

$$\phi(\vec{x}) = \rho(\vec{x}) - \rho_G$$

Por encima de T_c , ρ_G designa la densidad única del fluido y $\phi(\vec{x})$ variará en torno de

cero de punto a punto y lo mismo ocurrirá por debajo de T_c en las regiones donde hay vapor; por debajo de T_c en las regiones donde hay líquido $\phi(\vec{x})$ variará en torno de un valor positivo $\rho_L - \rho_G$.

En el caso de un sólido cristalino magnético puede definirse una magnetización local como

$$\vec{\phi}(\vec{x}) = \frac{1}{\delta V} \sum_{i \in \delta V} \vec{s}_i.$$

No obstante, en muchos casos consideraremos el parámetro local directamente como el spin \vec{s}_i ; en este caso δV corresponde a una celda unitaria.

Mucho del conocimiento experimental acerca de los fenómenos críticos se obtiene a través de experimentos de scattering, en los cuales diferentes tipos de partículas son dispersados por un sistema en condiciones críticas. Estas partículas pueden ser fotones en el caso de fluidos o bien neutrones en el caso de sistemas magnéticos, dado que los mismos son bastante penetrantes, electricamente nulos y su momento magnético es sensible a la orientación de los spines locales. En cualquier caso, puede verse que la matriz de scattering se encuentra directamente relacionada con la **función de correlación de dos puntos**³:

$$C^{(2)}(\vec{r}, \vec{r}') \equiv \langle \vec{\phi}(\vec{r}) \cdot \vec{\phi}(\vec{r}') \rangle.$$

Para un sistema homogéneo, $C^{(2)}$ depende solamente de la distancia entre los puntos $|\vec{r} - \vec{r}'|$, de manera que

$$C^{(2)}(r) \equiv \langle \vec{\phi}(0) \cdot \vec{\phi}(\vec{r}) \rangle. \quad (1.4)$$

Bien por encima de T_c se espera que los valores del parámetro de orden en diferentes puntos se encuentren descorrelacionados, con los cual $C^{(2)}$ se anula a temperaturas suficientemente grandes. Bien debajo de T_c , $C^{(2)}$ tomará valores grandes para todos

³Más precisamente, está relacionada con la transformada de Fourier de la función de correlación $C^{(2)}$.

los valores de su argumento, ya que el parámetro de orden tomará valores semejantes en todos los puntos. Esto nos lleva a definir la **función de correlación conectada**:

$$C_c^{(2)}(r) \equiv \langle \vec{\phi}(0) \cdot \vec{\phi}(\vec{r}) \rangle - |\langle \vec{\phi} \rangle|^2 = \langle (\vec{\phi}(0) - \langle \vec{\phi}(0) \rangle) \cdot (\vec{\phi}(\vec{r}) - \langle \vec{\phi}(\vec{r}) \rangle) \rangle \quad (1.5)$$

Por encima de T_c el parámetro de orden se anula en todo punto y ambas funciones de correlación coinciden. Por debajo de T_c ambas funciones de correlación van a diferir, ya que al descontar el alineamiento general del parámetro de orden local solamente las *fluctuaciones* de ϕ van a contribuir. Esto nos permite distinguir claramente el crecimiento de las fluctuaciones en el punto crítico.

En el caso de sistemas de spines en una red de Bravais, se definen de manera semejante las funciones de correlación:

$$C^{(2)}(r) \equiv \langle \vec{s}_i \cdot \vec{s}_j \rangle \quad (1.6)$$

$$C_c^{(2)}(r) \equiv \langle \vec{s}_i \cdot \vec{s}_j \rangle - m^2. \quad (1.7)$$

donde r en este caso es la distancia entre los spines i y j , y m es la magnetización por spin.

Experimentos de scattering muestran que $C_c^{(2)}(r)$ toma valores pequeños a distancias r grandes, para valores de temperatura tanto por debajo como por encima de T_c , exhibiendo un decaimiento exponencial de la forma

$$C_c^{(2)}(r) \sim e^{-r/\xi} \quad \text{para } r \gg 1 \quad \text{y } 0 \neq |T - T_c|/T_c \quad (1.8)$$

donde ξ se denomina *longitud de correlación* y mide la distancia típica en la cual las fluctuaciones del parámetro de orden se descorrelacionan. Se observa que la longitud de correlación crece al aproximarnos a T_c con una ley de potencia

$$\xi(T) \sim |T - T_c|^{-\nu} \quad \text{para } |T - T_c|/T_c \ll 1 \quad (1.9)$$

lo cual define un nuevo exponente crítico ν . Para $T = T_c$ la longitud de correlación es infinita. Esto no significa que las correlaciones se vuelvan independientes de la distancia. Cuando el decaimiento exponencial desaparece, un comportamiento remanente tipo ley de potencia con la distancia emerge:

$$C_c^{(2)}(r) \sim \frac{1}{r^{d-2+\eta}} \quad \text{para } T = T_c \text{ y } r \gg 1 \quad (1.10)$$

donde d es la dimensión espacial del sistema y η define un nuevo exponente crítico. Vemos entonces que en la criticalidad las correlaciones entre fluctuaciones decaen lentamente. Las expresiones (1.11) y (1.10) se sintetizan en el comportamiento general

$$C_c^{(2)}(r) \sim \frac{1}{r^{d-2+\eta}} e^{-r/\xi} \quad \text{para } r \gg 1 \text{ y } |T - T_c|/T_c \ll 1 \quad (1.11)$$

Podemos entonces resumir las siguientes características fenomenológicas de un fenómeno crítico:

- Comportamientos tipo leyes de potencia caracterizados por exponentes críticos asociados a diferentes magnitudes, la mayoría de ellas relacionadas con el parámetro de orden y su parámetro termodinámicamente conjugado. Es importante recalcar que estos comportamientos son **asintóticos** y por lo tanto solo valen en las proximidades del punto crítico.
- Los exponentes críticos exhiben **universalidad**, esto es, sistemas con características microscópicas muy diferentes presentan los mismos exponentes críticos. Que determina las clases de universalidad? Se observa (y la teoría lo confirma, como veremos a lo largo de este curso) que las clases de universalidad estan determinadas solo por las siguientes propiedades:

1. La dimensión espacial d .
2. La dimensión D y las simetrías del parámetro de orden (directamente relacionadas con las simetrías del Hamiltoniano).

3. El carácter de *corto alcance* de las interacciones. Esto es, para que un sistema exhiba universalidad las interacciones microscópicas entre partículas deben decaer rápidamente con la distancia entre ellas (ej., interacciones entre solo vecinos cercanos en una red). Volveremos mas adelante sobre este punto.
- Fluctuaciones anormalmente grandes en el entorno del punto crítico, con correlaciones a distancias macroscópicas entre ellas ($\xi \rightarrow \infty$).