

## Capítulo 5

# Teorías de Escala

Hemos visto que los fenómenos críticos presentan una serie de características notables: *i)* divergencias en forma de leyes de potencia caracterizadas por exponentes críticos; *ii)* universalidad, esto es, los exponentes no dependen de los detalles microscópicos del sistema y solo dependen de algunas propiedades globales: dimensión espacial, dimensión del parámetro de orden (simetrías del Hamiltoniano) e interacciones de corto alcance *iii)* los exponentes críticos no son independientes entre sí, sinó que satisfacen un conjunto de relaciones conocidas como *leyes de escala*, a saber:

- *Igualdad de Rushbrooke:*  $\alpha + 2\beta + \gamma = 2$
- *Igualdad de Griffiths:*  $\alpha + \beta(1 + \delta) = 2$
- *Igualdad de Fisher:*  $(2 - \eta)\nu = \gamma$
- *Igualdad de Josephson (hiperescala):*  $d\nu = 2 - \alpha$

Este último hecho es no trivial. Dado que todas las funciones respuesta, excepto la función de correlación, se obtienen de derivar la energía libre, e incluso la función de correlación se encuentra relacionada con la susceptibilidad a través del Teorema de Fluctuación-Disipación, las relaciones anteriores nos dicen que la energía libre tiene que presentar una forma bastante particular en el entorno de la región crítica.

Mas aún, el hecho de que exista universalidad nos dice que tiene que existir un mecanismo microscópico general asociado con los fenómenos críticos que da lugar a esa forma particular de la energía libre. En esta sección vamos a analizar un conjunto hipótesis, las cuales explican de manera fenomenológica las leyes de escala. Estas suelen denominarse Teorías ó Hipótesis de Escala.

La idea básica por detras de la Teorías de Escala esta relacionada con la divergencia de la longitud de correlación en el punto crítico. Se asume entonces que esta es la **única escala espacial relevante del problema**, esto es, que las propiedades que determinan la forma de las funciones termodinámicas ocurren en una escala espacial de dimensión lineal del orden de  $\xi$ . Ante esta suposición, un cambio en los parámetros termodinámicos (por ej., la temperatura o el campo externo) en las cercanías del punto crítico equivaldrá a **un cambio de escala**. En otras palabras, cuando  $\xi \gg 1$ , podemos esperar que los detalles a pequeñas escalas (esto es, para escalas lineales  $\ll \xi$ ) se tornen irrelevantes. Un cambio en los parámetros termodinámicos que me acerque al punto crítico va a aumentar  $\xi$ ; si asumimos que los detalles de pequeñas escalas son irrelevantes, al aumentar  $\xi$  esperamos ver mas o menos lo mismo, pero en una escala distinta (como si hiciéramos un zoom). Así, esperamos que la energía libre no cambie su forma funcional y solo cambie su escala. Que significa esto? Supongamos que a una temperatura fija  $T \sim T_c$  graficamos por ejemplo  $m$  vs  $B$ . Si cambiamos levemente la temperatura obtenemos una nueva curva diferente  $m$  vs  $B$ . Eligiendo adecuadamente las escalas del nuevo gráfico esperamos que ambas curvas coincidan. Una propiedad de este tipo se conoce como *ley de estados correspondientes* y de hecho se observa experimentalmente. Que tipo de funciones presentan esta invariancia de ante cambios de escala? Precisamente las leyes de potencia satisfacen esta propiedad. Que significa esto? Supongamos que tenemos el gráfico de una función exponencial del tipo  $f(r) = e^{-r/r_0}$  que puede representar, por ejemplo, una función de correlación lejos del punto crítico. Esta función tiene una escala característica dada por  $r_0$ , el valor para el cual  $f(r)$  decae a  $1/e$  de su valor en  $r = 0$ . Supongamos además que  $r$  está medida en [cm]. Si

ahora hacemos un cambio de escala en las longitudes, expresando las distancias en [m], los valores de  $r$  se contraen en un factor 100, en particular,  $r_0$ . Si uno conoce de antemano el valor de  $r_0$  puede identificar en que unidades están medidas las longitudes en el gráfico, solo mirando en que valor de  $r$   $f(r)$  decae a  $1/e$  en la escala dada. Supongamos ahora que la función de correlación que nos dan es una ley de potencia del tipo  $g(r) = A/r^\alpha$ . Si ahora cambiamos la escala de longitud de  $r$  [cm] a  $r'$  [m], con lo cual  $r' = r/100$  tenemos que

$$g(r) = \frac{A}{100^\alpha r'}$$

Si además cambiamos simultaneamente la escala de las ordenadas en el gráfico, de manera que representamos

$$g'(r') = 100^\alpha g(r) = \frac{A}{r'}$$

el gráfico  $g(r)$  vs  $r$  será idéntico al gráfico  $g(r')$  vs  $r'$ . Si nadie se molesta en especificar las unidades en que están mediadas las cantidades del gráfico somos incapaces de deducirlas con el solo dato del gráfico! Esto es porque las leyes de potencia no definen ninguna escala característica. Dedimos que son **invariantes por escala**.

Las leyes de potencia pertenecen a una clase mas general de funciones invariantes por escala, las cuales analizaremos a continuación.

## 5.1 Funciones homogeneas generalizadas

Se define una función homogenea de una variable a una función  $f(x)$  con la siguiente propiedad:

$$f(\lambda x) = g(\lambda)f(x) \quad \forall \lambda \text{ real} \quad (5.1)$$

la cual nos dá la forma mas general de una función de una variable que es invariante por escala. De la Ec.(5.1)

$$f(\lambda\mu x) = g(\lambda\mu)f(x) = g(\lambda)f(\mu x)$$

de donde

$$g(\lambda\mu) = g(\lambda)g(\mu)$$

Puede demostrarse que una función continua con la propiedad anterior necesariamente tiene la forma  $g(\lambda) = \lambda^p$ . Veamos la demostración para el caso en que  $g(\lambda)$  es diferenciable.

$$\frac{\partial}{\partial \mu} g(\lambda\mu) = \lambda g'(\lambda\mu) = g(\lambda)g'(\mu)$$

Tomando  $\mu = 1$  y definiendo  $p \equiv g'(\mu = 1)$  tenemos

$$\frac{g'(\lambda)}{g(\lambda)} = \frac{d}{d\lambda} \ln g(\lambda) = \frac{p}{\lambda}$$

de donde  $g(\lambda) = A\lambda^p$ . Derivando esta última expresión y evaluando en  $\lambda = 1$  tenemos  $g'(1) = pA$  de donde  $A = 1$ . De esta manera, una función homogénea satisface

$$f(\lambda x) = \lambda^p f(x)$$

Dado que esta ecuación se satisface para  $\lambda$  arbitrario, en particular podemos tomar  $\lambda = 1/x$ . Si llamamos  $B = f(1)$  tenemos finalmente que

$$f(x) = Bx^p$$

*Las únicas funciones homogéneas de una variable son las leyes de potencia.*

En forma análoga se define una función homogénea de varias variables como aquella que satisface:

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) = g(\lambda)f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \forall \lambda \text{ real}$$

Utilizando el mismo tipo de argumentos que en el caso anterior se demuestra que  $g(\lambda) = \lambda^p$ . Se dice en este caso que  $f$  es homogénea de grado  $p$ . La interpretación

geométrica de esta propiedad es la misma que antes. Si cambiamos la escala de todas las variables independientes en un mismo factor  $x_i \rightarrow \lambda x_i$  la función  $f$  resulta la misma que antes, pero re-escalada por un factor  $\lambda^p$ . Un ejemplo conocido es la entropía (o la energía) en termodinámica, la cual es una función homogénea de primer grado de los parámetros extensivos del sistema.

Finalmente se define una *función homogénea generalizada* como aquella que satisface

$$f(\lambda^{a_1}x_1, \lambda^{a_2}x_2, \dots, \lambda^{a_n}x_n) = \lambda f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \forall \lambda \text{ real} \quad (5.2)$$

donde  $a_i$  son números reales. Una función de este tipo presenta invariancia de escala ante cambios de escala heterogéneos en las variables independientes. Tomemos por ejemplo el caso de dos variables independientes:

$$f(\lambda^a x, \lambda^b y) = \lambda f(x, y)$$

Dado que esta ecuación se satisface para  $\lambda$  arbitrario, en particular podemos tomar  $\lambda^b y = 1$ , esto es,  $\lambda = y^{-1/b}$ , de donde

$$f\left(\frac{x}{y^{a/b}}, 1\right) = y^{-1/b} f(x, y)$$

Definiendo  $F(z) \equiv f(z, 1)$  tenemos que

$$f(x, y) = y^{1/b} F\left(\frac{x}{y^{a/b}}\right)$$

Se demuestra fácilmente que la recíproca también es cierta, esto es si,  $f(x, y) = y^p F(x/y^q)$  es fácil demostrar que  $f$  satisface la propiedad (5.2) con  $a = q/p$  y  $b = 1/p$ . Las siguientes propiedades también son simples de demostrar:

1.  $f(0, 0) = 0$  ó  $f(0, 0) = \infty$ .
2. Las derivadas  $\frac{\partial f}{\partial x}$  y  $\frac{\partial f}{\partial y}$  son también funciones homogéneas generalizadas.
3. La transformada de Legendre  $g(x, u)$  definida como

$$g(x, u) = f(x, y(x, u)) - y(x, u)u$$

donde

$$u(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}$$

es también una función homogénea generalizada.

## 5.2 Hipótesis de escala de Widom (1965) (homogeneidad de la energía libre)

Consideremos por simplicidad un sistema que presenta un punto crítico descrito por un parámetro de orden escalar, tal como un ferromagneto. La energía libre es función de la temperatura y el campo externo  $f = f(T, B)$ . Sea  $t = (T - T_c)/T_c$  la temperatura reducida y asumimos que el punto crítico ocurre en  $B = 0$ . La hipótesis de Widom es la siguiente:

1. En las proximidades del punto crítico  $f$  puede expresarse como

$$f(T, B) = f_r(T, B) + f_s(t, B)$$

donde la parte regular  $f_r$  es una función *analítica* de sus parámetros, la cual puede asumirse aproximadamente constante en la región crítica.

2. La parte *singular*  $f_s$  es una función homogénea generalizada:

$$f_s(\lambda^{a_t} t, \lambda^{a_B} B) = \lambda f_s(t, B) \quad (5.3)$$

Dado que estamos interesados en la derivadas de  $f$  y  $f_r$  se asume constante en el entorno del punto crítico, vamos a considerar solo  $f_s$ . Analicemos primero las consecuencias derivadas para la parte singular de la magnetización:

$$m(t, B) = -\frac{\partial f_s}{\partial B}(t, B)$$

Derivando la Ec.(5.3)

$$\lambda^{a_B} \frac{\partial f_s(\lambda^{a_t} t, \lambda^{a_B} B)}{\partial(\lambda^{a_B} B)} = \lambda \frac{\partial f_s(t, B)}{\partial B}$$

de donde

$$\lambda^{a_B} m(\lambda^{a_t} t, \lambda^{a_B} B) = \lambda m(t, B) \quad (5.4)$$

Eligiendo  $\lambda' = \lambda^{a_t}$  tenemos a campo nulo

$$m(\lambda' t, 0) = \lambda'^{\frac{1-a_B}{a_t}} m(t, 0)$$

de donde, o bien  $m \equiv 0$  ó  $m(t, 0)$  es una ley de potencia. Dado que  $m(t, 0)$  tiene que anularse para  $t > 0$  tenemos que

$$m(t, 0) = \begin{cases} 0 & \text{para } t > 0 \\ (-t)^{\frac{1-a_B}{a_t}} m(-1, 0) & \text{para } t < 0 \end{cases}$$

donde para  $t < 0$  hemos tomado  $\lambda' t = 1$ . Así, el exponente crítico de la magnetización resulta

$$\beta = \frac{1 - a_B}{a_t} \quad (5.5)$$

Consideremos ahora el caso  $t = 0$ . Tomando  $\lambda' = \lambda^{a_B}$  en la Ec.(5.4) obtenemos

$$m(0, \lambda' B) = \lambda'^{\frac{1-a_B}{a_B}} m(0, B)$$

de donde  $m(0, B)$  resulta una ley de potencia

$$m(0, B) \propto \text{sgn } |B|^{\frac{1-a_B}{a_B}} = \text{sgn } |B|^{1/\delta}$$

$$\delta = \frac{a_B}{1 - a_B} \quad (5.6)$$

Consideremos ahora la susceptibilidad

$$\chi = \frac{\partial m}{\partial B}$$

Derivando la relación (5.4) obtenemos

$$\lambda^{2a_B} \chi(\lambda^{a_t} t, \lambda^{a_B} B) = \lambda \chi(t, B) \quad (5.7)$$

Siguiendo el mismo procedimiento que antes obtenemos

$$\chi(t, 0) = \begin{cases} (t)^{-\frac{2a_B-1}{a_t}} \chi(1, 0) & \text{para } t > 0 \\ (-t)^{-\frac{2a_B-1}{a_t}} \chi(-1, 0) & \text{para } t < 0 \end{cases}$$

de donde

$$\gamma = \gamma' = \frac{2a_B - 1}{a_t} \quad (5.8)$$

Combinando las Ecs.(5.5), (5.6) y (5.8) obtenemos la ley de escala

$$\gamma = \beta(\delta - 1) \quad (5.9)$$

que es conocida como relación de Windom. Analicemos ahora la parte singular del calor específico

$$C = -T_c \frac{\partial^2 f_s}{\partial t^2}$$

Derivando la Ec.(5.3) obtenemos

$$\lambda^{2a_t} C(\lambda^{a_t} t, \lambda^{a_B} B) = \lambda C(t, B) \quad (5.10)$$

y siguiendo los mismos pasos que antes tenemos que

$$C(t, 0) \propto \begin{cases} (t)^{-\frac{2a_t-1}{a_t}} & \text{para } t > 0 \\ (-t)^{-\frac{2a_t-1}{a_t}} & \text{para } t < 0 \end{cases}$$

de donde



$$\alpha = \alpha' = \frac{2a_t - 1}{a_t} = 2 - \frac{1}{a_t} \quad (5.11)$$

Combinando las Ecs.(5.5), (5.6) y (5.11) obtenemos la relación de Griffiths

$$\alpha + \beta(\delta + 1) = 2$$

y reemplazando la relación de Widom (5.9) en la anterior obtenemos la relación de Rushbrooke

$$\alpha + 2\beta + \gamma = 2$$

Vemos de esta manera que la hipótesis de escala de Widom explica de manera completa todas las leyes de escala. Mas aún, la hipótesis de homogeneidad nos brinda algunas predicciones nuevas. Tomando  $\lambda^{a_t} t = \pm c$  ( $c > 0$ ) en la Ec.(5.4) para  $B \neq 0$  obtenemos

$$m(t, B) = |t|^{\frac{1-a_B}{a_t}} F^{\pm} \left( \frac{B}{|t|^{a_B/a_t}} \right) = |t|^{\beta} F^{\pm} \left( \frac{B}{|t|^{\Delta}} \right)$$

donde

$$\Delta \equiv \beta\delta = \frac{a_B}{a_t}$$

Estas relaciones tienen que satisfacerse para valores pequeños de tanto  $t$  como  $B$ , pero en principio son válidas para valores arbitrarios del cociente  $B/|t|^{\Delta}$ . Las funciones  $F^{\pm}(z)$  son proporcionales a las curvas de magnetización en función del campo externo para dos temperaturas de referencia  $T = T_c(1 \pm c)$ . Si escribimos la ecuación anterior como

$$\frac{m(t, B)}{|t|^{\beta}} = F^{\pm} \left( \frac{B}{|t|^{\Delta}} \right)$$

esto nos dice que, cualquiera sea el material, si medimos las curvas de magnetización *vs* campo para diferentes temperaturas y las representamos en un gráfico  $m/|t|^{\beta}$  *vs*  $B/|t|^{\Delta}$ , todas las curvas tienen que coincidir en una misma  $F^{\pm}(z)$ , dependiendo de que la temperatura sea mayor o menor que  $T_c$  respectivamente. A este tipo de

comportamiento (leyes de estados correspondientes) se lo denomina también *colapso de las curvas* (“data collapse”) y se verifica experimentalmente. Las funciones  $F^\pm(z)$  se conocen como *funciones de escala* y dependen del sistema particular (no son universales). No obstante, las mismas deben satisfacer ciertos comportamientos asintóticos generales. Así, a fin de satisfacer el comportamiento de la magnetización a campo nulo, tenemos que  $F^+(0) = 0$  y  $F^-(0) = cte \neq 0$ . Por otra parte para  $z \rightarrow \infty$  tenemos que  $F^\pm(z) \sim z^{1/\delta}$ , de manera de reobtener el comportamiento  $m \sim B^{1/\delta}$ .

Debemos recalcar que la hipótesis fenomenológica de escala constituye una conjetura plausible, la cual no ha sido demostrada rigurosamente. No obstante, dada la amplia confirmación experimental (y numérica) de la misma, se la acepta como válida en general.

### 5.3 Bloques de Kadanoff (homogeneidad en las correlaciones)

Existe un argumento heurístico propuesto por Kadanoff para justificar la hipótesis de homogeneidad. A pesar de basado en una serie de conjeturas (algunas de las cuales incluso son incorrectas) posee bastante interés por los siguientes motivos:

1. Las suposiciones introducidas para justificar la homogeneidad son a nivel *microscópico*.
2. El argumento fué el primer paso que condujo a las ideas de Grupo de Renormalización, Teoría estadística que explica de manera completa la universalidad del comportamiento crítico.
3. Permite deducir a la vez la homogeneidad de la energía libre y de las funciones de correlación.

El argumento trabaja específicamente sobre el modelo de Ising:

$$-\beta H = K \sum_{\langle i,j \rangle} S_i S_j + h \sum_{i=1}^N S_i \quad S_i = \pm 1$$

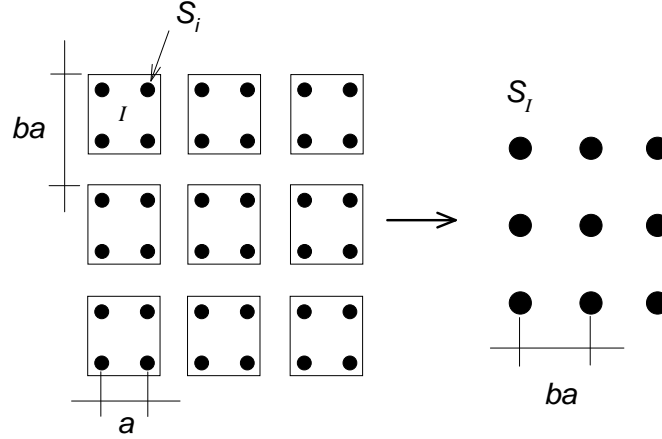


Figura 5.1: Ejemplo de bloques de Kadanoff en la red cuadrada para un factor de escala  $b = 2$ .

con  $K \equiv \beta J$  y  $h \equiv \beta B$ . Vamos a suponer por simplicidad que el modelo está definido en una red hipercúbica  $d$ -dimensional. Vamos dividir el sistema en bloques hipercúbicos de dimensión lineal  $ba$ , donde  $a$  es el parámetro de red original y  $b > 1$  es un factor de escala (ver Fig.5.1). De esta manera tenemos  $b^d$  spines (sitios) en cada bloque y  $N_b = N/b^d$  bloques en total. El conjunto de los  $N_b$  bloques, denominados *bloques de Kadanoff*, conforman a su vez una red hipercúbica de parámetro de red  $ba$ , cuyos sitios vamos a denotar con letras mayúsculas (ver Fig.5.1). El spin total en el bloque  $I$  es

$$S'_I = \sum_{i \in I} S_i = -b^d, -b^d + 1, \dots, 0, 1, \dots, b^d - 1, b^d$$

Esta construcción constituye una transformación de escala espacial (un zoom) a nivel microscópico. La idea básica del argumento de Kadanoff es que, si el sistema presenta invariancia de escala suficientemente cerca del punto crítico, entonces el sistema de bloques tiene que verse aproximadamente igual al sistema de spines. Esto es, suficientemente cerca del punto crítico,  $\xi \gg ba$ , tendremos entonces regiones de

dimensión lineal  $\sim \xi$  donde los spines van a apuntar mayoritariamente en la misma dirección; estas regiones van a contener un número grande de bloques de Kadanoff y por lo tanto podemos esperar que los spines dentro de un bloque apunten en su mayoría en la misma dirección. Dicho de otra manera, si pintamos los spines  $S_i = +1$  de negro y los  $S_j = -1$  de blanco, visto de lejos esperamos ver casi exclusivamente bloques totalmente blancos ó totalmente negros (a lo sumo gris oscuro o “blanco sucio”). Así, de todos los valores posibles que puede asumir  $S'_I$ , esperamos que los valores  $\pm b^d$  tengan una probabilidad mucho mayor que los restantes. Introducimos entonces las nuevas variables de spin de bloque  $S'_I = zS_I$ , donde  $S_I = \pm 1$  y  $z < b^d$ ;  $z$  evidentemente depende del factor de escala y vamos a *asumir* la forma  $z = b^y$ , con  $y < d$ .

Si el sistema de bloques se comporta aproximadamente igual al sistema de sitios, la termodinámica de ambos debe ser la misma, esto es, la *forma funcional* de la energía libre debe ser idéntica en ambos casos. Una forma de obtener esto (no es la única) es que la energía libre del sistema de bloques se derive de un *Hamiltoniano de bloques* con la misma forma funcional que el Hamiltoniano de sitios, esto es,

$$-\beta \hat{H}(\{S_I\}) = \hat{K} \sum_{\langle I, J \rangle} S_I S_J + \hat{h} \sum_{I=1}^{N_b} S_I$$

Para considerar los bloques como sitios hemos hecho un cambio de escala espacial, es decir, estamos midiendo ahora las longitudes en unidades de  $ba$ . Bajo este cambio de escala la longitud de correlación va a disminuir  $\xi \rightarrow \xi/b$ , lo cual implica un cambio en los parámetros intensivos  $t$  y  $h$ ; de ahí que  $\hat{H}$  tiene que tener parámetros diferentes  $\hat{K}$  y  $\hat{h}$ .

Dado que los Hamiltonianos de bloque y de sitios tienen la misma forma, la energía libre por bloque obtenida usando  $\hat{H}$ ,  $f_b(\hat{t}, \hat{h})$  tendrá la misma forma funcional que la energía libre por sitio  $f_s(t, h)$ , esto es,  $f_b(x, y) = f_s(x, y) = f(x, y)$ . Pero dado que estamos describiendo *el mismo* sistema (solo hemos hecho un cambio de escala), la energía libre *total* tiene que ser la misma en ambos casos

$$\frac{N}{b^d} f(\hat{t}, \hat{h}) = N f(t, h)$$

$$f(\hat{t}, \hat{h}) = b^d f(t, h) \quad (5.12)$$

El último paso en el argumento es discernir como dependen  $\hat{t}$  y  $\hat{h}$  de  $(t, h)$ . Como primero vamos a asumir que  $\hat{t}$  no depende de  $h$ ; esto es válido solo para sistemas con la simetría de inversión discreta del Hamiltoniano. Además, sabemos que  $t = 0 \Rightarrow \hat{t} = 0$ , ya que siendo ambos sistemas idénticos tienen el mismo punto crítico. Fuera del punto crítico, la transformación de escala nos aleja del mismo, ya que la longitud de correlación disminuye  $\xi \rightarrow \xi/b$  y por lo tanto  $|\hat{t}| > |t|$  y este alejamiento aumenta con el factor de escala  $b$ . La relación mas simple que satisface estos requerimientos es  $\hat{t} = g(b)t$ , con  $g(b) > 1$ . Supongamos ahora que hacemos dos transformaciones de escala sucesivas, una con un factor  $b_1$  y la otra con  $b_2$ . El resultado final tiene que ser equivalente a una única transformación con un factor  $b = b_1 b_2$  y por lo tanto  $g(b_1 b_2) = g(b_1)g(b_2)$ . Por los resultados de la sección anterior tenemos que  $g(b) = b^x$ , con  $x > 0$ .

Finalmente, el término de interacción con el campo externo es

$$h \sum_{i=1}^N S_i = h \sum_{I=1}^{N_b} \sum_{i \in I} S_i = h \sum_{I=1}^{N_b} S'_I \approx h z \sum_{I=1}^{N_b} S_I$$

de donde  $\hat{h} = z h = b^y h$ . Reemplazando en la Ec.(5.12) obtenemos

$$f(b^x t, b^y h) = b^d f(t, h) \quad (5.13)$$

El factor de escala en la ecuación anterior es un número entero, por la forma en que construimos la transformación de escala. Sin embargo, suficientemente cerca del punto crítico, donde  $\xi \gg 1$ , podemos generalizar la idea anterior para factores de escala arbitrarios y por lo tanto la Ec.(5.13) resulta equivalente a la hipótesis de homogeneidad (5.3) con

$$x = da_t \quad y = da_B$$

Una consecuencia nueva de esta derivación surge de la restricción  $y < d$ , la cual implica  $a_B < 1$ ; esto último se corrobora experimentalmente.

Notemos que, dado que el Hamiltoniano de bloques tiene la misma dependencia funcional en los parámetros termodinámicos que el de sitios, todos los promedios estadísticos van a compartir esta propiedad. Esto es válido en particular para la longitud de correlación  $\xi(t, h)$ , la cual satisface por lo tanto que

$$\xi(\hat{t}, \hat{h}) = \xi(b^x t, b^y h) = \xi(t, h)/b$$

En particular a campo nulo tenemos que  $b\xi(b^x t) = \xi(t)$ ; tomando  $b^x t = 1$  obtenemos  $\xi \propto t^{-1/x}$  de donde

$$\nu = \frac{1}{x} = \frac{1}{da_t}$$

Reemplazando en la Ec.(5.11) obtenemos entonces la ley de hiperescala

$$2 - \alpha = \nu d$$

Finalmente vamos a considerar la función correlación conectada. Consideremos por simplicidad el caso  $h = 0$ .

$$C(r_{ij}, t) = \langle S_i S_j \rangle - \langle S_i \rangle \langle S_j \rangle$$

donde  $r_{ij} \equiv |\vec{r}_i - \vec{r}_j|$  es la distancia entre los spines  $i$  y  $j$ , medida en unidades del parámetro de red  $a$ . Definimos de igual manera la función de correlación entre spines de bloque

$$C(r_{IJ}, \hat{t}) = \langle S_I S_J \rangle - \langle S_I \rangle \langle S_J \rangle$$

donde hemos asumido la misma forma funcional y donde  $r_{IJ} \equiv |\vec{r}_I - \vec{r}_J|$  es la distancia entre los centros de los bloques  $I$  y  $J$ , *medida en unidades de  $ba$* . En la expresión anterior los promedios se toman utilizando la distribución de probabilidad de Boltzmann asociada con el Hamiltoniano de bloques. Es razonable suponer que el resultado no va a cambiar si tomamos los promedios utilizando la distribución de probabilidad asociada con el Hamiltoniano de sitios. Tenemos entonces

$$\begin{aligned}
C(r_{IJ}, \hat{t}) &= \frac{1}{z^2} [\langle S'_I S'_J \rangle - \langle S'_I \rangle \langle S'_J \rangle] \\
&= \frac{1}{b^{2y}} \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} [\langle S_i S_j \rangle - \langle S_i \rangle \langle S_j \rangle] \\
&= \frac{1}{b^{2y}} \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} C(r_{ij}, t)
\end{aligned}$$

Para bloques distantes  $r_{IJ} \gg ba$ , la distancia entre spines pertenecientes a diferentes bloques puede asumirse aproximadamente constante  $r_{ij} \approx r = br_{IJ}$ . Así, obtenemos la relación de homogeneidad

$$C(r/b, tb^x) = b^{2(d-y)} C(r, t) \quad (5.14)$$

Tomando  $b = r$

$$C(r, t) = r^{2(y-d)} F_c(tr^x) = r^{2d(a_B-1)} F_c(tr^{da_t}) \quad (5.15)$$

En el punto crítico  $t = 0$

$$C(r) \propto \frac{1}{r^{2d(1-a_B)}} \sim \frac{1}{r^{d-2+\eta}}$$

de donde  $2 - \eta = d(2a_B - 1)$ . Recordando que  $2a_B - 1 = \gamma a_t = \gamma/\nu d$  obtenemos finalmente la ley de escala de Fisher

$$(2 - \eta)\nu = \gamma$$

La Ec.(5.15) puede entonces ser escrita como

$$C(r, t) = \frac{1}{r^{d-2+\eta}} F_c(tr^{1/\nu}) = \frac{1}{r^{d-2+\eta}} F_c((t^\nu r)^{1/\nu}) = \frac{1}{r^{d-2+\eta}} g(r/\xi)$$

En general se observa que  $g(x) \sim e^{-x}$ . Por otra parte, tomando  $tb^x = 1$  en la Ec.(5.14) obtenemos

$$C(r, t) = t^{2(d-y)/x} \hat{F}_c(rt^{1/x})$$

Si de alguna manera podemos obtener el comportamiento asintótico de la función de correlación, la expresión anterior puede utilizarse para corroborar las hipótesis de escala, utilizando los valores de  $x, y$  calculados a partir de las leyes de escala. Por ejemplo, para el modelo de Ising en  $d = 2$ , usando los exponentes críticos de la solución de Onsager y tomando  $\nu = 1$  tenemos que  $x = 1$  e  $y = 15/8$ , lo que nos da

$$C(r, t) \sim t^{1/4} \hat{F}_c(rt)$$

Esta forma asintótica fué corroborada rigurosamente por Wu en 1966.

Finalmente pueden repetirse todos los pasos anteriores a campo no nulo, de donde se obtiene la forma de escala

$$C(r, t, h) = t^{\nu(d-2+\eta)} F\left(\frac{r}{t^{-\nu}}, \frac{h}{t^\Delta}\right)$$

Notemos que las hipótesis de escala no dan cuenta para nada de la universalidad de los exponentes críticos. Si bien el argumento fue planteado específicamente para el modelo de Ising, es claro que es posible generalizarlo a otros modelos. No obstante, este tiene algunos puntos incorrectos.

Repasemos las suposiciones mas importantes utilizadas en la derivación del argumento. Estas son dos: *i*) El Hamiltoniano de bloques tiene la misma forma que el Hamiltoniano de sitios; *ii*) las relaciones  $\hat{h} = b^y h$  y  $\hat{t} = b^x t$ . Mientras que el segundo punto es correcto, el punto debil del argumento es el primero. Esta suposición es básicamente incorrecta. Como veremos en la sección siguiente, no es necesario mantener la invariancia de forma del Hamiltoniano para obtener la homogeneidad de las funciones termodinámicas y de hecho levantar esta restricción fué la idea clave que permitió explicar la universalidad.

## 5.4 Homogeneidad en la dependencia con el tamaño del sistema

Como sabemos, un fenómeno crítico ocurre estrictamente solo en un sistema infinito. En cualquier sistema finito, no importa cuan grande, tarde o temprano se observa



un desvío del comportamiento crítico cuando la longitud de correlación se vuelve  $\xi \sim L$ . Podemos pensar entonces en la inversa del tamaño lineal  $u \equiv 1/L$ , como un parámetro mas del sistema, tal que la criticalidad ocurre estrictamente para  $u = u_c = 0$  y el comportamiento crítico se observa para  $u \ll 1$ ,  $|t| \ll 1$  y  $|B| \ll 1$ . Desde este punto de vista, resulta natural extender la hipótesis de homogeneidad (5.3) asumiendo

$$f_s(\lambda^{a_t} t, \lambda^{a_B} B, \lambda^{a_u} u) = \lambda f_s(t, B) \quad (5.16)$$

de donde las diferentes magnitudes termodinámicas heredarán el mismo tipo de dependencia. Vamos a ejemplificar el tratamiento con la susceptibilidad. A campo nulo tendremos entonces que

$$\lambda^{2a_B} \chi(\lambda^{a_t} t, \lambda^{a_u} u) = \lambda \chi(t, u) \quad (5.17)$$

Eliendo entonces  $\lambda^{a_u} u = 1$  tenemos

$$\begin{aligned} \chi(t, L) &= L^{\frac{2a_B-1}{a_u}} F\left(L^{a_t/a_u} t\right) \\ &= L^{\frac{2a_B-1}{a_u}} F'\left(L^{1/d a_u} t^\nu\right) \\ &= L^{\frac{2a_B-1}{a_u}} F'\left(L^{1/d a_u} / \xi\right), \end{aligned} \quad (5.18)$$

donde hemos usado que  $a_t = 1/d\nu$ . Dado que el argumento de la función de escala debe ser adimensional, tenemos que  $d a_u = 1$ . Usando entonces (5.8) tenemos que

$$\chi(t, L) = L^{\gamma/\nu} F'(L/\xi). \quad (5.19)$$

Relaciones semejantes pueden obtenerse para las demás funciones termodinámicas.

