Problema 1: Gas de Van der Waals

Ecuación de estado:

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT. \tag{1}$$

(a) La transición de fase ocurre cuando

$$\frac{\partial p}{\partial v} = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial v^2} = 0 \tag{3}$$

Despejando la presión,

$$p = \frac{RT}{v - b} - \frac{a}{v^2}. \tag{4}$$

Derivando una vez e igualando a cero

$$\frac{\partial p}{\partial v} = -\frac{RT}{(v-b)^2} + \frac{2a}{v^3} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad RTv^3 = 2a(v-b)^2. \tag{5}$$

Derivando nuevamente

$$\frac{\partial^2 p}{\partial v^2} = \frac{2RT}{(v-b)^3} - \frac{6a}{v^4} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2RTv^4 = 6a(v-b)^3. \tag{6}$$

Dividiendo 6 por 5,

$$2v = 3(v - b) \quad \Leftrightarrow \quad v_c = 3b. \tag{7}$$

Reemplazando v_c en 6,

$$T_c = \frac{2a(2b)^2}{R(3b)^3} = \frac{8}{27}\frac{a}{Rb} \tag{8}$$

y reemplazando T_c y v_c en 4,

$$p_c = \frac{8}{27}\frac{a}{b}\frac{1}{2b} - \frac{a}{9b^2} = \frac{a}{27b^2}. \tag{9}$$

Una relación que resulta útil es

$$\frac{p_c v_c}{T_c} = \frac{3}{8}R. \tag{10}$$

(b) Partiendo de 4,

$$(\pi+1)p_c = \frac{R(t+1)T_c}{(\omega+1)v_c - b} - \frac{a}{(\omega+1)^2 v_c^2} \tag{11}$$

$$\pi+1 = \frac{(t+1)(RT_c/p_c v_c)}{(\omega+1) - b/v_c} - \frac{a}{(\omega+1)^2 p_c v_c^2} \tag{12}$$

$$\pi+1 = \frac{8(t+1)}{3(\omega+1)-1} - \frac{3}{(\omega+1)^2} \tag{13}$$

$$\pi = \frac{4(t+1)}{\frac{3}{2}\omega+1} - \frac{3}{(\omega+1)^2} - 1 \tag{14}$$