Problema 1: Campo medio

$$H = -J_2 \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j - J_4 \sum_I \sigma_{I1}\sigma_{I2}\sigma_{I3}\sigma_{I4} \tag{1}$$

Hamiltoniano de prueba:

$$H_0 = -\eta \sum_i \sigma_i \tag{2}$$

Desigualdad de Bogoliuvob-Peierls:

$$f \leq f_\rho = f_0 + \frac{1}{N}\langle H - H_0 \rangle_0. \tag{3}$$

Función de partición para el hamiltoniano de prueba:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}_0 &= \sum_{\{s_i\}} e^{-\beta H_0} \\
&= \sum_{\{s_i\}} \exp\left[\beta\eta \sum_i s_i\right] \\
&= \sum_{\{s_i\}} \prod_i e^{\beta\eta s_i} \\
&= \prod_i \sum_{s_i = \pm 1} e^{\beta\eta s_i} \\
&= \left[e^{-\beta\eta} + e^{\beta\eta}\right]^N \\
&= \left[2\cosh\left(\beta\eta\right)\right]^N, \\
&= \mathcal{Z}_{01}^N, \qquad (4)
\end{aligned}$$

donde

$$\mathcal{Z}_{01} = 2\cosh\left(\beta\eta\right). \tag{5}$$

Energía libre:

$$\begin{aligned}
f_0 &= -\frac{1}{\beta N}\ln \mathcal{Z}_0 \\
&= -\frac{1}{\beta}\ln\left[2\cosh\left(\beta\eta\right)\right] \qquad (6)
\end{aligned}$$

Magnetización:

$$
\begin{aligned}
m_0 &= \langle s_i \rangle_0 \\
&= \frac{1}{\mathcal{Z}_{01}} \sum_{s_i=\pm 1} s_i e^{\beta \eta s_i} \\
&= \frac{1}{\mathcal{Z}_{01}} \left[-e^{-\beta\eta} + e^{\beta\eta} \right] \\
&= \tanh\left(\beta\eta\right) \qquad (7)
\end{aligned}
$$

Valores medios de los hamiltonianos respecto del hamiltoniano de prueba:

$$
\begin{aligned}
\langle H_0 \rangle_0 &= -\eta \sum_i \langle s_i \rangle_0 \\
&= -\eta N m_0 \qquad (8)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle H \rangle_0 &= -J_2 \sum_{\langle i,j \rangle} \langle s_i s_j \rangle_0 - J_4 \sum_I \langle \sigma_{I1} \sigma_{I2} \sigma_{I3} \sigma_{I4} \rangle_0 \\
&= -J_2 \sum_{\langle i,j \rangle} \langle s_i \rangle_0^4 - J_4 \sum_I \langle \sigma_{I1} \rangle_0^4 \\
&= -2J_2 N m_0^2 - J_4 N m_0^4
\end{aligned}
$$

Proponemos la función variacional

$$
\begin{aligned}
\Phi(\eta) &= f_0 + \frac{1}{N} \langle H - H_0 \rangle_0 \\
&= -\frac{1}{\beta} \ln\left[2\cosh\left(\beta\eta\right)\right] - 2J_2 m_0^2 - J_4 m_0^4 + \eta m_0 \qquad (9)
\end{aligned}
$$

Derivamos con respecto a η e igualamos a cero para hallar el mínimo

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} &= -\tanh\left(\beta\eta\right) - 4J_2 m_0 \frac{\partial m_0}{\partial \eta} - 4J_4 m_0^3 \frac{\partial m_0}{\partial \eta} + m_0 + \eta \frac{\partial m_0}{\partial \eta} \\
&= \left(\eta - 4J_2 m_0 - 4J_4 m_0^3\right) \frac{\partial m_0}{\partial \eta}, \qquad (10)
\end{aligned}
$$

donde usamos la igualdad 7.
La expresión anterior implica que la solución al problema variacional es

$$
\eta = 4J_2 m_0 + 4J_4 m_0^3. \qquad (11)
$$

Reemplazando el valor de η en 7,

$$
m_0 = \tanh\left[\beta(4J_2 m_0 + 4J_4 m_0^3)\right]. \qquad (12)
$$

Definimos las variables $\tilde{\beta} \equiv 4J_2\beta$ y $J \equiv J_4/J_2$. De este modo, la ecuación anterior queda

$$m_0 = \tanh\left[\tilde{\beta}(m_0 + Jm_0^3)\right]. \tag{13}$$

La energía libre está dada por la expresión que minimiza la función $\Phi(\eta)$ con respecto a η. Es decir,

$$f_{\mathrm{mf}}(T, B) = \min_{\eta} \Phi(\eta). \tag{14}$$

Utilizando 11 y 9, tenemos

$$f_{\mathrm{mf}}(T, B = 0) = -\frac{1}{\beta} \ln\left[2\cosh\left(\beta(4J_2m_0 + 4J_4m_0^3)\right)\right] + 2J_2m_0^2 + 3J_4m_0^4. \tag{15}$$

Reescalamos la energía en unidades de J_2, definiendo $\tilde{f}_{\mathrm{mf}} \equiv f_{\mathrm{mf}}/J_2$. Así obtenemos

$$\tilde{f}_{\mathrm{mf}}(T, B = 0) = -4\tilde{\beta}^{-1} \ln\left[2\cosh\left(\tilde{\beta}(m_0 + Jm_0^3)\right)\right] + 2m_0^2 + 3Jm_0^4. \tag{16}$$

Haciendo un desarrollo de Taylor a orden 6,

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{\mathrm{mf}}(T, B = 0) = C + 2(1 - \tilde{\beta})m_0^2 + \left(3J - 4J\tilde{\beta} + \frac{\tilde{\beta}^3}{3}\right) m_0^4 \\ + \left(-2J^2\tilde{\beta} + \frac{4J\tilde{\beta}^3}{3} - \frac{4\tilde{\beta}^5}{45}\right) m_0^6 + \mathcal{O}(m_0^8) \end{aligned} \tag{17}$$

donde $C = -4\ln(2)/\tilde{\beta}$ es un término aditivo que resulta irrelevante. Vemos entonces que la energía libre queda expresada en forma de función de Landau

$$\tilde{f}_{\mathrm{mf}}(T, B = 0) = C + \frac{a_2}{2}m_0^2 + \frac{a_4}{4}m_0^4 + \frac{a_6}{6}m_0^6 + \mathcal{O}(m_0^8), \tag{18}$$

con coeficientes

$$\begin{aligned} a_2(T, J) &= 4(1 - \tilde{\beta}) \\ a_4(T, J) &= 4\left(3J - 4J\tilde{\beta} + \frac{\tilde{\beta}^3}{3}\right) \\ a_6(T, J) &= 6\left(-2J^2\tilde{\beta} + \frac{4J\tilde{\beta}^3}{3} - \frac{4\tilde{\beta}^5}{45}\right) \end{aligned}$$

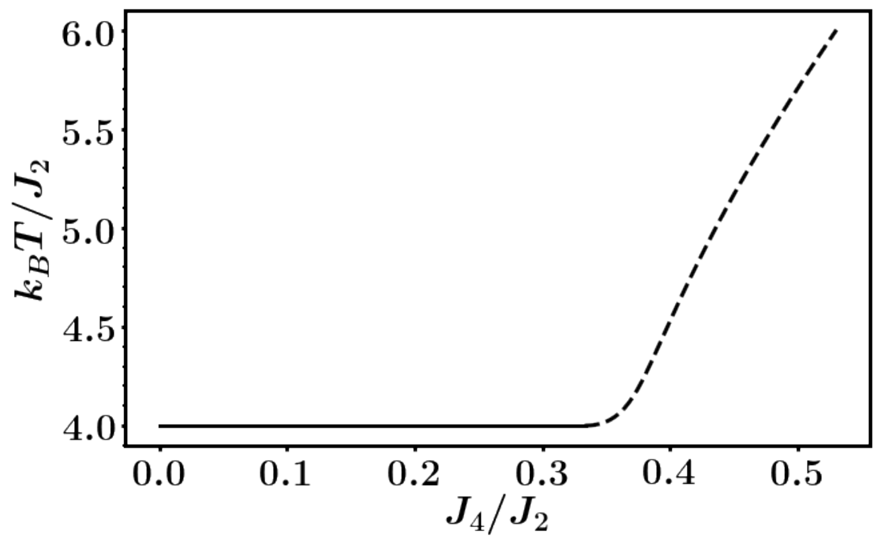

Figure 1: Diagrama de fases.

Para construir el diagrama de fases, comencemos analizando si existe transición de segundo orden. La línea de segundo orden se obtiene cuando $a_2 = 0$ y $a_4 > 0$. De la primera condición, obtenemos que $\tilde{\beta}_c = 1$, mientras que de la segunda,

$$J < \frac{\tilde{\beta}_c^3}{3(4\tilde{\beta}_c - 3)} = \frac{1}{3}. \tag{19}$$

De la definición de $\tilde{\beta}$, se deduce que $k_BT/J_2 = 4/\tilde{\beta}$, por lo que la temperatura crítica satisface $k_BT_c/J_2 = 4$.