

Problema 1: Decimación

Modelo de Ising unidimensional:

$$\mathcal{H} = K \sum_i s_i s_{i+1} + h \sum_i s_i, \quad (1)$$

donde $\mathcal{H} \equiv -\beta H$, $K \equiv \beta J$ y $h \equiv \beta B$.

Tomamos bloques de Kadanoff de dos sitios, de los cuales decimamos uno de los sitios. Llamamos S_i a las variables de bloque, y σ_i a las variables correspondientes a los sitios decimados. El hamiltoniano entonces puede ser escrito como

$$\mathcal{H} = K \sum_i \sigma_i (S_i + S_{i+1}) + \frac{h}{2} \sum_i (S_i + S_{i+1}) + h \sum_i \sigma_i. \quad (2)$$

Suponemos que, al renormalizar, no hay proliferación de interacciones, por lo que podemos proponer un hamiltoniano renormalizado de la forma

$$\mathcal{H}' = K' \sum_i S_i S_{i+1} + \frac{h'}{2} \sum_i (S_i + S_{i+1}). \quad (3)$$

Recordemos que, para el caso de decimación, la transformación de normalización está dada por

$$e^{\mathcal{C} + \mathcal{H}'(S)} = \sum_{\{\sigma\}} e^{\mathcal{H}(S, \sigma)}, \quad (4)$$

donde $\mathcal{C} = Ng(K, h)$ es la constante de normalización y $g(K, h)$ es una función intensiva de los parámetros.

En este caso,

$$e^{\mathcal{C} + \mathcal{H}'(S)} = \prod_i \exp \left[K' S_i S_{i+1} + \frac{h'}{2} (S_i + S_{i+1}) + g \right] \quad (5)$$

y

$$\begin{aligned} \sum_{\{\sigma\}} e^{\mathcal{H}(S, \sigma)} &= \prod_i \sum_{\sigma=\pm 1} \exp \left[K \sigma_i (S_i + S_{i+1}) + \frac{h}{2} (S_i + S_{i+1}) + h \sigma_i \right] \\ &= \prod_i 2e^{\frac{h}{2}(S_i + S_{i+1})} \cosh [K(S_i + S_{i+1}) + h] \end{aligned}$$

Igualando las dos expresiones anteriores, tenemos

$$\exp \left[K' S_i S_{i+1} + \frac{h'}{2} (S_i + S_{i+1}) + g \right] = e^{\frac{h}{2}(S_i + S_{i+1})} \cosh [K(S_i + S_{i+1}) + h], \quad (6)$$

para cada bloque i .

Evaluando para cada combinación de spines, tenemos las relaciones

$$e^{g+K'+h'} = 2e^h \cosh(2K+h) \quad (7)$$

$$e^{g+K'-h'} = 2e^{-h} \cosh(2K-h) \quad (8)$$

$$e^{g-K'} = 2 \cosh(h) \quad (9)$$

En el caso $h = 0$, tenemos que $h' = 0$. Resolviendo para K' ,

$$K'(K) = \frac{1}{2} \ln [\cosh(2K)] \quad (10)$$

$$g(K) = \ln(2) + K'(K) \quad (11)$$

La expresión 10 se puede simplificar mediante el cambio de variables

$$t = \tanh(K) \quad (12)$$

$$t' = \tanh(K'), \quad (13)$$

y teniendo en cuenta la identidad

$$z = \tanh \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{z+1}{z-1} \right) \right], \quad (14)$$

la cual implica que

$$K = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{t+1}{t-1} \right) \Rightarrow e^{2K} = \frac{t+1}{t-1} \quad (15)$$

De 10, tenemos que

$$t' = \tanh(K') = \tanh \left[\frac{1}{2} \ln [\cosh(2K)] \right], \quad (16)$$

por lo que se deduce que

$$\begin{aligned} \frac{t'+1}{t'-1} &= \cosh(2K) \\ &= \frac{\frac{t+1}{t-1} + \frac{t-1}{t+1}}{2} \\ &= \frac{t^2+1}{(t^2-1)}. \end{aligned} \quad (17)$$

Simplificando la expresión anterior, obtenemos la relación de recurrencia

$$t' = t^2. \quad (18)$$

Otra forma de llegar a la relación anterior es partiendo de

$$e^{2K'} = \cosh(2K) \quad (19)$$

y notando que

$$\tanh^2(K) = \frac{e^{2K} + e^{-2K} + 2}{e^{2K} + e^{-2K} - 2} = \frac{\cosh(2K) + 1}{\cosh(2K) - 1} = \frac{e^{2K'} + 1}{e^{2K'} - 1} = \tanh(K') \quad (20)$$

La relación 18 indica que hay dos puntos fijos: $t^* = 0$, que es estable y $t^* = 1$, que es inestable. Estos corresponden a $K = 0$ (temperatura infinita) y $K = \infty$ (temperatura cero). Es decir que el modelo precice una transición de fase a temperatura idénticamente cero.

El exponente crítico ν , asociado a la divergencia de la longitud de correlación, puede calcularse mediante $\nu = y_T^{-1}$, donde

$$y_T = \frac{\ln \left(\left. \frac{\partial K'}{\partial K} \right|_{K_c} \right)}{\ln(b)}. \quad (21)$$

En este caso,

$$\left. \frac{\partial K'}{\partial K} \right|_{K_c} = \tanh(2K_c) = 1, \quad (22)$$

por lo que $\nu = \infty$

Analizamos ahora el caso $h > 0$. Definimos las variables $u = e^{-4K}$ y $v = e^{-2h}$. Dividiendo 8 por 7, obtenemos la ecuación para v'

$$\begin{aligned} e^{-2h'} &= e^{-2h} \frac{\cosh(2K - h)}{\cosh(2K + h)} \\ v' &= v \frac{e^{2K-h} + e^{-2K+h}}{e^{2K+h} + e^{-2K-h}} \\ v' &= v \frac{v + u}{1 + uv}. \end{aligned} \quad (23)$$

Elevando 9 al cuadrado,

$$e^{2g-2K'} = (e^h + e^{-h})^2 = \frac{(1+v)^2}{v} \quad (24)$$

Multiplicando 8 por 7,

$$\begin{aligned}
e^{2g+2K'} &= (e^{2K+h} + e^{-2K-h})(e^{2K-h} + e^{-2K+h}) \\
&= \frac{(1+uv)(v+u)}{uv}.
\end{aligned} \tag{25}$$

Por último, dividiendo 24 por 25, obtenemos la ecuación para u' . Juntas, ambas son

$$u' = \frac{u(1+v)^2}{(1+uv)(v+u)} \tag{26}$$

$$v' = v \frac{v+u}{1+uv}. \tag{27}$$

Por inspección, podemos ver que los puntos $(0,0)$ y $(1,1)$ son puntos fijos. Estos corresponden a las fases ordenada ($T = 0$) y desordenada ($T = \infty$), respectivamente. Además, si $v^* = 1$, que correspondería a campo nulo, tenemos

$$u^* = \frac{4u^*}{(1+u^*)^2}, \tag{28}$$

cuyas soluciones son $u^* = 0$ y $u^* = 1$. Por lo tanto $(0,1)$ es también un punto fijo. Por otro lado, si $u^* = 1$, cualquier valor de v entre 0 y 1 es solución, por lo que $(1,v)$ es una línea crítica.

Problema 2: Aproximación de Migdal-Kadanoff

Antes de utilizar la aproximación de M-K, necesitamos la ecuación de transformación para decimación de una cadena lineal con $b = 3$.

$$\exp \left[K' S_1 S_2 + \frac{h}{2} (S_1 + S_2) + g \right] = \sum_{\{\sigma\}} \exp \left[K(S_1 \sigma_1 + \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 S_2) + h(\sigma_1 + \sigma_2) + \frac{h}{2} (S_1 + S_2) \right]$$

$$\begin{aligned} \sum_{\{\sigma\}} \exp \left[K(S_1 \sigma_1 + \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 S_2) + h(\sigma_1 + \sigma_2) + \frac{h}{2} (S_1 + S_2) \right] &= \\ e^{\frac{h}{2} (S_1 + S_2)} \sum_{\sigma_1} \sum_{\sigma_2} \exp \left[K(S_1 \sigma_1 + \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 S_2) + h(\sigma_1 + \sigma_2) \right] &= \\ e^{\frac{h}{2} (S_1 + S_2)} \left[e^{K(-S_1+1-S_2)-2h} + e^{K(-S_1-1+S_2)} + e^{K(S_1-1-S_2)} + e^{K(S_1+1+S_2)+2h} \right] &= \\ 2e^{\frac{h}{2} (S_1 + S_2)} \left\{ e^K \cosh [K(S_1 + S_2) + 2h] + e^{-K} \cosh [K(S_1 - S_2)] \right\} \end{aligned}$$

Igualando para combinación de S_1 y S_2 ,

$$e^{g+K'+h'} = 2e^h [e^{-K} + e^K \cosh(2K + 2h)] \quad (29)$$

$$e^{g+K'-h'} = 2e^{-h} [e^{-K} + e^K \cosh(2K - 2h)] \quad (30)$$

$$e^{g-K'} = 2 [e^{-K} \cosh(2K) + e^K \cosh(2h)] \quad (31)$$

Podemos verificar que se cumplen las relaciones $K'(K, -h) = K'(K, h)$ y $h'(K, -h) = -h'(K, h)$, por lo que $h = 0$ es un subespacio invariante. Dado que el punto fijo es no trivial es único, este se encontrará dentro de este subespacio. Para hallarlo, entonces, basta con igualar $h = 0$ en las ecuaciones anteriores, con lo que obtenemos el sistema

$$e^{g+K'} = 2 [e^{-K} + e^K \cosh(2K)] \quad (32)$$

$$e^{g-K'} = 2 [e^{-K} \cosh(2K) + e^K] \quad (33)$$

Dividiendo 32 por 33,

$$e^{2K'} = \frac{2e^{-K} + e^K (e^{2K} + e^{-2K})}{e^{-K} (e^{3K} + e^{-2K}) + 2e^K} = \frac{e^{2K} + 3e^K}{e^{-3K} + 3e^{-K}}. \quad (34)$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\tanh(K') &= \frac{e^{2K'} + 1}{e^{2K'} - 1} \\
&= \frac{\frac{e^{3K} + 3e^K}{e^{-3K} + 3e^{-K}} + 1}{\frac{e^{3K} + 3e^K}{e^{-3K} + 3e^{-K}} - 1} \\
&= \frac{e^{3K} + 3e^K + e^{-3K} + 3e^{-K}}{e^{3K} + 3e^K - e^{-3K} - 3e^{-K}} \\
&= \tanh^3(K)
\end{aligned}$$

Luego, utilizando el mismo cambio de variables que en el problema anterior, tenemos la ecuación de transformación

$$t' = t^3. \quad (35)$$

Una vez obtenida la relación $K'_b(K)$, utilizamos la aproximación de M-K, cuya expresión para $b = 3$ y $d = 2$ es $K'(K) = 3K'_3(K)$, es decir,

$$K' = 3 \tanh^{-1} [\tanh^3(K)]. \quad (36)$$

La ecuación anterior se puede escribir como

$$\tanh\left(\frac{K'}{3}\right) = \tanh^3(K). \quad (37)$$

Teniendo en cuenta la relación

$$\tanh(x + y) = \frac{\tanh(x) + \tanh(y)}{1 + \tanh(x) \tanh(y)} \quad (38)$$

y definiendo $z = \tanh(x)$, tenemos

$$\tanh(2x) = \frac{2z}{1 + z^2} \quad (39)$$

y

$$\tanh(3x) = \frac{z + \tanh(2x)}{1 + z \tanh(2x)} \quad (40)$$

$$= \frac{z(1 + z^2) + 2z}{1 + z^2 + 2z^2} \quad (41)$$

$$= \frac{z^3 + 3z}{3z^2 + 1}. \quad (42)$$

Luego, teniendo en cuenta que $\tanh(K') = \tanh(3(K'/3))$,

$$t' = \tanh(K') = \frac{t^9 + 3t^3}{3t^6 + 1}. \quad (43)$$

Calculamos los puntos fijos mediante $t^* = t = t'$ y definimos $u = t^2$,

$$3u^3 + 1 = u^4 + 3u \quad (44)$$

$$(u^2 - 1)(u^2 - 3u + 1) = 0. \quad (45)$$

Como la variable u está definida en el intervalo $0 \leq u \leq 1$, las únicas dos soluciones posibles son

$$u_1 = 1$$

$$u_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

Problema 4: Redes jerárquicas

La igualdad entre el hamiltoniano de sitios y el hamiltoniano renormalizado está dada por

$$\exp \left[K' S_1 S_2 + \frac{h}{2} (S_1 + S_2) + g \right] = \sum_{\{\sigma\}} \exp \left[K(S_1 + S_1)(\sigma_1 + \sigma_2) + K\sigma_1\sigma_2 + h(\sigma_1 + \sigma_2) + \frac{h}{2}(S_1 + S_2) \right]$$

Realizando la traza sobre el miembro derecho de la ecuación,

$$\begin{aligned} & \sum_{\{\sigma\}} \exp \left[K(S_1 + S_1)(\sigma_1 + \sigma_2) + K\sigma_1\sigma_2 + h(\sigma_1 + \sigma_2) + \frac{h}{2}(S_1 + S_2) \right] = \\ & e^{\frac{h}{2}(S_1 + S_2)} \sum_{\{\sigma\}} \exp \left[K(S_1 + S_1)(\sigma_1 + \sigma_2) + K\sigma_1\sigma_2 + h(\sigma_1 + \sigma_2) \right] = \\ & e^{\frac{h}{2}(S_1 + S_2)} \left[e^{-K(S_1 + S_2) + K - 2h} + e^{K(S_1 + S_2) + K + 2h} + 2e^{-K} \right] = \\ & 2e^{\frac{h}{2}(S_1 + S_2)} \left[e^K \cosh \left(K(S_1 + S_2) + 2h \right) + e^{-K} \right] \end{aligned}$$

Evaluando para cada combinación de spines S_1 y S_2 , tenemos el sistema de ecuaciones

$$e^{g+K'+h'} = 2e^h \left[e^{-K} + e^K \cosh(4K + 2h) \right] \quad (46)$$

$$e^{g+K'-h'} = 2e^{-h} \left[e^{-K} + e^K \cosh(4K - 2h) \right] \quad (47)$$

$$e^{g-K'} = 2 \left[e^{-K} + e^K \cosh(2h) \right]. \quad (48)$$

Podemos verificar que se cumplen las relaciones $K'(K, -h) = K'(K, h)$ y $h'(K, -h) = -h'(K, h)$, por lo que $h = 0$ es un subespacio invariante. Dado que el punto fijo es no trivial es único, este se encontrará dentro de este subespacio. Para hallarlo, entonces, basta con igualar $h = 0$ en las ecuaciones anteriores, con lo que obtenemos el sistema

$$e^{g+K'} = 2 \left[e^{-K} + e^K \cosh(4K) \right] \quad (49)$$

$$e^{g-K'} = 4 \cosh(K). \quad (50)$$

Dividiendo 49 por 50, tenemos

$$e^{2K'} = \frac{e^{-K} + e^K \cosh(4K)}{2 \cosh(K)}. \quad (51)$$

Para calcular los puntos fijos, hacemos $K' = K = K^*$ y definimos $u = e^{2K^*}$. La ecuación anterior queda entonces

$$u = \frac{1 + u \frac{u^2 + u^{-2}}{2}}{(u + 1)} \quad (52)$$

$$2u(u + 1) = 2 + u^3 + u^{-1} \quad (53)$$

$$u^4 - 2u^3 - 2u^2 + 2u + 1 = 0 \quad (54)$$

$$(u - 1)(u + 1)(u - 1 - \sqrt{2})(u - 1 + \sqrt{2}) = 0. \quad (55)$$

Las únicas raíces positivas son $u_1 = 1$ y $u_2 = 1 + \sqrt{2}$. La primera corresponde a $K^* = 0$, es decir, $T = \infty$, por lo que corresponde al estado paramagnético. La segunda corresponde a

$$K^* = \frac{\ln(1 + \sqrt{2})}{2}, \quad (56)$$

que coincide con la temperatura crítica para el modelo de Ising en $d = 2$ con red cuadrada.

El exponente crítico ν viene dado por

$$\nu^{-1} = y_T = \frac{\ln \left(\frac{dK'}{dK} \Big|_{K^*} \right)}{\ln b}. \quad (57)$$

Derivando 51 respecto a K ,

$$e^{2K'} \frac{dK'}{dK} = e^{4K} - \cosh(2K) \quad (58)$$

$$\frac{dK'}{dK} \Big|_{K^*} = u - \frac{1 + u^{-2}}{2} \quad (59)$$

$$\frac{dK'}{dK} \Big|_{K^*} = 2\sqrt{2} - 1. \quad (60)$$

Con esto se obtiene $\nu \simeq 1.1486$.