Problema 1: Campo medio

$$H = -J_2 \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j - J_4 \sum_I \sigma_{I1}\sigma_{I2}\sigma_{I3}\sigma_{I4} \tag{1}$$

Proponemos el hamiltoniano de prueba de spines no interactuantes

$$H_0 = -\eta \sum_i \sigma_i \tag{2}$$

y utilizamos la desigualdad de Bogoliuvob-Peierls:

$$f \leq f_\rho = f_0 + \frac{1}{N} \langle H - H_0 \rangle_0. \tag{3}$$

Calculamos la función de partición para el hamiltoniano de prueba:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}_0 &= \sum_{\{s_i\}} e^{-\beta H_0} \\
&= \sum_{\{s_i\}} \exp\left[\beta\eta \sum_i s_i\right] \\
&= \sum_{\{s_i\}} \prod_i e^{\beta\eta s_i} \\
&= \prod_i \sum_{s_i=\pm 1} e^{\beta\eta s_i} \\
&= \left[e^{-\beta\eta} + e^{\beta\eta}\right]^N \\
&= \left[2\cosh\left(\beta\eta\right)\right]^N \\
&= \mathcal{Z}_{01}^N,
\end{aligned} \tag{4}$$

donde

$$\mathcal{Z}_{01} = 2\cosh\left(\beta\eta\right). \tag{5}$$

La energía libre asociada al hamiltoniano de prueba es entonces

$$\begin{aligned}
f_0 &= -\frac{1}{\beta N} \ln \mathcal{Z}_0 \\
&= -\frac{1}{\beta} \ln\left[2\cosh\left(\beta\eta\right)\right]
\end{aligned} \tag{6}$$

Calculamos la magnetización:

$$
\begin{aligned}
m_0 &= \langle s_i \rangle_0 \\
&= \frac{1}{\mathcal{Z}_{01}} \sum_{s_i=\pm 1} s_i e^{\beta \eta s_i} \\
&= \frac{1}{\mathcal{Z}_{01}} \left[-e^{-\beta\eta} + e^{\beta\eta} \right] \\
&= \tanh\left(\beta\eta\right)
\end{aligned} \tag{7}
$$

Valores medios de los hamiltonianos respecto del hamiltoniano de prueba:

$$
\begin{aligned}
\langle H_0 \rangle_0 &= -\eta \sum_i \langle s_i \rangle_0 \\
&= -\eta N m_0.
\end{aligned} \tag{8}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle H \rangle_0 &= -J_2 \sum_{\langle i,j \rangle} \langle s_i s_j \rangle_0 - J_4 \sum_I \langle \sigma_{I1} \sigma_{I2} \sigma_{I3} \sigma_{I4} \rangle_0 \\
&= -J_2 \sum_{\langle i,j \rangle} \langle s_i \rangle_0^4 - J_4 \sum_I \langle \sigma_{I1} \rangle_0^4 \\
&= -2 J_2 N m_0^2 - J_4 N m_0^4.
\end{aligned} \tag{9}
$$

Proponemos la función variacional

$$
\begin{aligned}
\Phi(\eta) &= f_0 + \frac{1}{N} \langle H - H_0 \rangle_0 \\
&= -\frac{1}{\beta} \ln\left[2\cosh\left(\beta\eta\right)\right] - 2J_2 m_0^2 - J_4 m_0^4 + \eta m_0
\end{aligned} \tag{10}
$$

La energía libre en la aproximación de campo medio está dada por la expresión que minimiza la función $\Phi(\eta)$ con respecto a η. Es decir,

$$
f_{\mathrm{mf}}(T, B) = \min_\eta \Phi(\eta). \tag{11}
$$

Derivamos con respecto a η e igualamos a cero para hallar el mínimo

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} &= -\tanh\left(\beta\eta\right) - 4J_2 m_0 \frac{\partial m_0}{\partial \eta} - 4J_4 m_0^3 \frac{\partial m_0}{\partial \eta} + m_0 + \eta \frac{\partial m_0}{\partial \eta} \\
&= \left(\eta - 4J_2 m_0 - 4J_4 m_0^3\right) \frac{\partial m_0}{\partial \eta},
\end{aligned} \tag{12}
$$

donde usamos la igualdad 7.

La expresión anterior implica que la solución al problema variacional es

$$\eta = 4J_2 m_0 + 4J_4 m_0^3. \tag{13}$$

Reemplazando el valor de η en 7, obtenemos la ecuación de estado a campo nulo

$$m_0 = \tanh\left[\beta(4J_2 m_0 + 4J_4 m_0^3)\right]. \tag{14}$$

Para simplificar notación en el resto del desarrollo, definimos las variables $\tilde{\beta} \equiv 4J_2\beta$ y $J \equiv J_4/J_2$. De este modo, la ecuación anterior queda

$$m_0 = \tanh\left[\tilde{\beta}(m_0 + Jm_0^3)\right]. \tag{15}$$

Utilizando 10 y 13, tenemos

$$f_{\mathrm{mf}}(T, B=0) = -\frac{1}{\beta}\ln\left[2\cosh\left(\beta(4J_2 m_0 + 4J_4 m_0^3)\right)\right] + 2J_2 m_0^2 + 3J_4 m_0^4. \tag{16}$$

Reescalamos la energía en unidades de J_2, definiendo $\tilde{f}_{\mathrm{mf}} \equiv f_{\mathrm{mf}}/J_2$. Así obtenemos

$$\tilde{f}_{\mathrm{mf}}(T, B=0) = -4\tilde{\beta}^{-1}\ln\left[2\cosh\left(\tilde{\beta}(m_0 + Jm_0^3)\right)\right] + 2m_0^2 + 3Jm_0^4. \tag{17}$$

Haciendo un desarrollo de Taylor a orden 6,

$$\begin{aligned}\tilde{f}_{\mathrm{mf}}(T, B=0) = a_0 + 2(1-\tilde{\beta})m_0^2 + \left(3J - 4J\tilde{\beta} + \frac{\tilde{\beta}^3}{3}\right)m_0^4 \\ + \left(-2J^2\tilde{\beta} + \frac{4J\tilde{\beta}^3}{3} - \frac{4\tilde{\beta}^5}{45}\right)m_0^6 + \mathcal{O}(m_0^8)\end{aligned} \tag{18}$$

donde $a_0 = -4\ln(2)/\tilde{\beta}$ es un término aditivo que resulta irrelevante. Vemos entonces que la energía libre queda expresada en forma de función de Landau

$$\tilde{f}_{\mathrm{mf}}(T, B=0) = a_0 + \frac{a_2}{2}m_0^2 + \frac{a_4}{4}m_0^4 + \frac{a_6}{6}m_0^6 + \mathcal{O}(m_0^8), \tag{19}$$

con coeficientes

$$\begin{aligned}a_2(T,J) &= 4(1-\tilde{\beta}) \\ a_4(T,J) &= 4\left(3J - 4J\tilde{\beta} + \frac{\tilde{\beta}^3}{3}\right) \\ a_6(T,J) &= 6\left(-2J^2\tilde{\beta} + \frac{4J\tilde{\beta}^3}{3} - \frac{4\tilde{\beta}^5}{45}\right)\end{aligned}$$

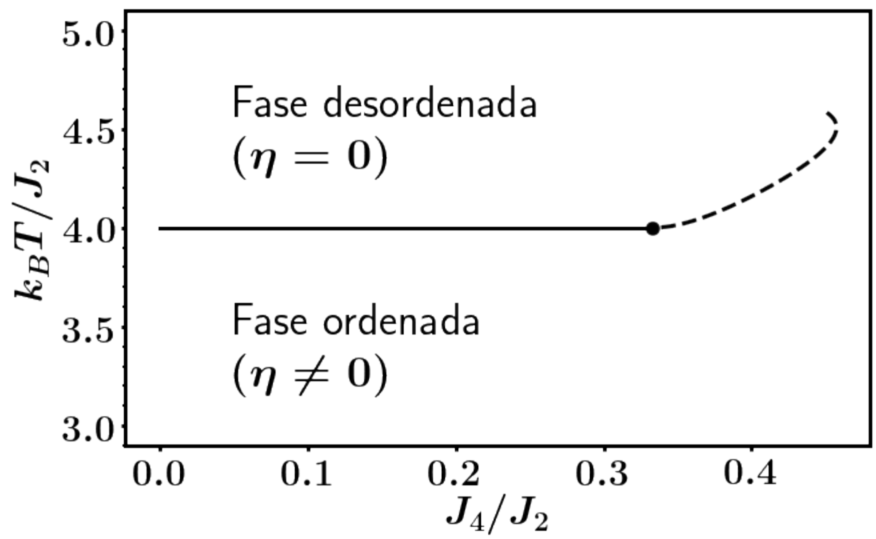

Figure 1: Diagrama de fases.

Para construir el diagrama de fases, comencemos analizando si existe transición de segundo orden. La línea de segundo orden se obtiene cuando $a_2 = 0$ y $a_4 > 0$. De la primera condición, obtenemos que $\tilde{\beta}_c = 1$, mientras que de la segunda,

$$J < \frac{\tilde{\beta}_c^3}{3(4\tilde{\beta}_c - 3)} = \frac{1}{3}. \tag{20}$$

De la definición de $\tilde{\beta}$, se deduce que $k_BT/J_2 = 4/\tilde{\beta}$, por lo que la temperatura crítica satisface $k_BT_c/J_2 = 4$. La línea de segundo orden se muestra como línea sólida en el gráfico de la figura 1.

La línea de segundo orden termina en el punto tricrítico, el cual se ubica en $(\tilde{\beta}_t, J_t) = (1, 1/3)$. A partir de allí, comienza la línea de primer orden, que consiste en los puntos $(\tilde{\beta}, J)$ que satisfacen

$$a_4(T,J) = -\frac{\sqrt{a_2(T,J)\ a_6(T,J)}}{3}, \tag{21}$$

junto con las condiciones $a_2 > 0$ y $a_6 > 0$. La línea punteada de la figura 1 representa la línea de primer orden.

Problema 2: Grupo de renormalización

El hamiltoniando (reducido) de Ising es

$$\mathcal{H} = K \sum_{\langle i,j \rangle} s_i s_j + h \sum_i s_i. \tag{22}$$

Renormalizamos utilizando bloques de Kadanoff cuadrados de 4 sitios. La regla de la mayoría puede expresarse como

$$P(s', s) = \prod_I P_I(s', s), \tag{23}$$

donde

$$P_I(s', s) = \frac{1}{2} \left[1 + S'_I \operatorname{sgn}(S_1^I + S_2^I + S_3^I + S_4^I) \right]. \tag{24}$$

Podemos ver que, en el caso de empate, la expresión anterior asigna la misma probabilidad a cada uno de los dos posibles valores del spin de bloque.

Descomponemos nuestro hamiltoniano en la forma

$$\mathcal{H}(s) = \mathcal{H}_0(s) + \mathcal{V}_0(s), \tag{25}$$

donde $\mathcal{H}_0(s)$ es una componente simétrica, con interacciones internas de cada bloque y $\mathcal{V}_0(s)$ es una componente no simétrica, que incluye las interacciones entre bloques

La función de partición interna puede expresarse como

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_0^I &= 1 \times e^{4K} + 1 \times 4 + \frac{1}{2} \times 4 + \frac{1}{2} \times 2e^{-4K} \\ &= e^{4K} + 6 + e^{-4K} \\ &= 2\cosh(4K) + 6 \end{aligned} \tag{26}$$

Como todos los spines del bloque son equivalentes, el promedio de spin de sitio es

$$\begin{aligned} \langle S_i^I \rangle_0 &= \frac{1}{\mathcal{Z}_0} \sum_{\{s\}} P(S, s) e^{\mathcal{H}_0}(s) S_i^I \\ &= \frac{e^{4K} + 2}{\mathcal{Z}_0^I} S'_I \\ &= a(K) S'_I, \end{aligned} \tag{27}$$

donde

$$a(K) = \frac{e^{4K} + 2}{2\cosh(4K) + 6}. \tag{28}$$

El promedio del término no simétrico es

$$\langle \mathcal{V}(s) \rangle_0 = K \sum_{\langle I,J \rangle} \langle V_{IJ} \rangle_0 + 4h \sum_I \langle S_i^I \rangle_0, \tag{29}$$

donde

$$V_{IJ} = \sum_{\substack{\langle I,J \rangle / \\ i \epsilon I, j \epsilon J}} S_i S_j. \tag{30}$$

En el caso de bloques cuadrados de 4 sitios,

$$V_{IJ} = S_1^I S_4^J + S_2^I S_3^J. \tag{31}$$

Luego,

$$\langle V_{IJ} \rangle_0 = 2 \langle S_i^I \rangle_0 \langle S_i^J \rangle_0. \tag{32}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{V}(s) \rangle_0 &= 2K \sum_{\langle I,J \rangle} \langle S_i^I \rangle_0 \langle S_i^J \rangle_0 + 4h \sum_I \langle S_i^I \rangle_0 \\ &= 2K a^2(K) \sum_{\langle I,J \rangle} S^I S^J + 4a(K) h \sum_I S^I \end{aligned} \tag{33}$$

Las ecuaciones de renormalización son entonces

$$K' = 2K \; a^2(K) \tag{34}$$

$$h' = 4h \; a(K) \tag{35}$$

Calculamos K^* en el subespacio invariante $h = 0$:

$$a^2(K^*) = \frac{1}{2} \tag{36}$$

$$e^{4K} + 2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(2 \cosh(4K) + 6 \right) \tag{37}$$

Definimos $u \equiv e^{4K}$, entonces

$$u + 2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(u + u^{-1} + 6 \right) \tag{38}$$

$$\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) u^2 + \left(2 - 3\sqrt{2} \right) u - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \tag{39}$$

La única solución física (con $u > 1$) es $u^* = 1 + 2\sqrt{2} + \sqrt{5(2+\sqrt{2})}$. Luego,

$$K^* = \frac{\log\left[1 + 2\sqrt{2} + \sqrt{5(2+\sqrt{2})}\right]}{4} \simeq 0.5186. \tag{40}$$

Por las relaciones de paridad, la matriz jacobiana es diagonal e igual a

$$\mathcal{L}_b = \begin{pmatrix} b^{y_T} & 0 \\ 0 & b^{y_B} \end{pmatrix},$$

donde

$$b^{y_T} = \left(\frac{\partial K'}{\partial K}\right)_{K^*, h=0} = 2a^2(K^*) + 4K^* a(K^*) a'(K^*) \tag{41}$$

$$b^{y_B} = \left(\frac{\partial h'}{\partial h}\right)_{K^*, h=0} = 4a(K^*) \tag{42}$$

Despejando y evaluando en K^*, y teniendo en cuenta que $b = 2$, tenemos

$$y_T = \frac{\log\left[\left(\frac{\partial K'}{\partial K}\right)_{K^*, h=0}\right]}{\log(b)} = 1.006 \tag{43}$$

$$y_B = \frac{\log\left[\left(\frac{\partial h'}{\partial h}\right)_{K^*, h=0}\right]}{\log(b)} = 3/2 \tag{44}$$

Una vez obtenidos los exponentes y_T y y_B, todos los demás exponentes se pueden calcular utilizando las relaciones entre exponentes

$$\nu = \frac{1}{y_T} = 0.9941 \tag{45}$$

$$\alpha = \frac{2dy_T - 1}{y_T} = 0.0117 \tag{46}$$

$$\beta = \frac{d - y_B}{y_T} = 0.4971 \tag{47}$$

$$\gamma = \frac{2y_B - d}{y_T} = 0.9941 \tag{48}$$

$$\delta = \frac{y_B}{d - y_B} = 3. \tag{49}$$

En la tabla 1 se muestra la comparación con los valores obtenidos mediante este método y los valores exactos.

Comparación entre exponentes		
Magnitud	GR	Exacto
K^*	0.5186	0.4409
y_T	1.006	1
y_B	1.500	1.875
ν	0.9941	1
α	0.0117	0
β	0.4971	0.125
γ	0.9941	1.75
δ	3	15

Table 1: Comparación entre exponentes