Problema 1: Gas de Van der Waals

Ecuación de estado:

$$\left(p+\frac{a}{v^2}\right)(v-b)=RT. \tag{1}$$

(a) La transición de fase ocurre cuando

$$\frac{\partial p}{\partial v}=0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial v^2}=0 \tag{3}$$

Despejando la presión,

$$p=\frac{RT}{v-b}-\frac{a}{v^2}. \tag{4}$$

Derivando una vez e igualando a cero

$$\frac{\partial p}{\partial v}=-\frac{RT}{(v-b)^2}+\frac{2a}{v^3}=0 \quad\Leftrightarrow\quad RTv^3=2a(v-b)^2. \tag{5}$$

Derivando nuevamente

$$\frac{\partial^2 p}{\partial v^2}=\frac{2RT}{(v-b)^3}-\frac{6a}{v^4}=0 \quad\Leftrightarrow\quad 2RTv^4=6a(v-b)^3. \tag{6}$$

Dividiendo 6 por 5,

$$2v=3(v-b) \quad\Leftrightarrow\quad v_c=3b. \tag{7}$$

Reemplazando v_c en 6,

$$T_c=\frac{2a(2b)^2}{R(3b)^3}=\frac{8}{27}\frac{a}{Rb} \tag{8}$$

y reemplazando T_c y v_c en 4,

$$p_c=\frac{8}{27}\frac{a}{b}\frac{1}{2b}-\frac{a}{9b^2}=\frac{a}{27b^2}. \tag{9}$$

Una relación que resulta útil es

$$\frac{p_c v_c}{T_c}=\frac{3}{8}R. \tag{10}$$

(b) Partiendo de 4,

$$(\pi+1)p_c = \frac{R(t+1)T_c}{(\omega+1)v_c - b} - \frac{a}{(\omega+1)^2 v_c^2} \tag{11}$$

$$\pi+1 = \frac{(t+1)(RT_c/p_c v_c)}{(\omega+1) - b/v_c} - \frac{a}{(\omega+1)^2 p_c v_c^2} \tag{12}$$

$$\pi+1 = \frac{8(t+1)}{3(\omega+1)-1} - \frac{3}{(\omega+1)^2} \tag{13}$$

$$\pi = \frac{4(t+1)}{\frac{3}{2}\omega+1} - \frac{3}{(\omega+1)^2} - 1 \tag{14}$$

(c) Para hacer la aproximación, defino la función

$$f(\pi,\omega,t) = \frac{4(1+t)}{1+\frac{3}{2}\omega} - \frac{3}{(1+\omega)^2} - \pi - 1 \tag{15}$$

y realizo una expansión de Taylor en torno a $(\pi,\omega,t) = (0,0,0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial \pi} = -1 \tag{16}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \omega} = -\frac{6(1+t)}{1+\frac{3}{2}\omega} + \frac{6}{(1+\omega)^3} \tag{17}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{4}{1+\frac{3}{2}\omega} \tag{18}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \omega} = -\frac{6}{(1+\frac{3}{2}\omega)^2} \tag{19}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \omega^2} = 18\left[\frac{(1+t)}{(1+\frac{3}{2}\omega)^3} - \frac{1}{(1+\omega)^4}\right] \tag{20}$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial \omega^3} = 18\left[-\frac{9}{2}\frac{(1+t)}{(1+\frac{3}{2}\omega)^4} + \frac{4}{(1+\omega)^5}\right] \tag{21}$$

Teniendo en cuenta que las derivadas de orden superior con respecto a π se anulan, la expresión queda

$$\begin{aligned} f(\pi,\omega,t) &= f(0,0,0) \\ &+ \frac{\partial f}{\partial \pi}\Big|_0 \pi + \frac{\partial f}{\partial \omega}\Big|_0 \omega + \frac{\partial f}{\partial t}\Big|_0 t \\ &+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial \omega^2}\Big|_0 \omega^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial t \omega}\Big|_0 t\omega + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 f}{\partial \omega^3}\Big|_0 \omega^3 \\ &+ \mathcal{O}(t\omega^2, \omega^4). \end{aligned} \tag{22}$$

Evaluando las derivadas, se obtiene

$$f(\pi,\omega,t) = -\pi + 4t - 6t\omega - \frac{3}{2}\omega^3 + \mathcal{O}(t\omega^2,\omega^4) \tag{23}$$

Luego,

$$\pi = 4t - 6t\omega - \frac{3}{2}\omega^3 + \mathcal{O}(t\omega^2,\omega^4) \tag{24}$$

d) La construcción de Maxwell implica la igualdad

$$\int_{v_l}^{v_g} pdv = p_0(v_g - v_l), \tag{25}$$

donde $p_0 = p(v_g) = p(v_l)$.
Utilizando las variables reducidas, se tiene que

$$\int_{v_l}^{v_g} pdv = p_0(v_g - v_l) \tag{26}$$

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} (1+\pi)p_c v_c d\omega = (1+\pi_0)p_c(\omega_2 - \omega_1)v_c \tag{27}$$

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} \pi d\omega = \pi_0(\omega_2 - \omega_1), \tag{28}$$

donde $\pi_0 = \pi_0(\omega_2) = \pi_0(\omega_1)$
Utilizando la expresión aproximada dada por la ecuación 24 e integrando,

$$\begin{aligned} 4t(\omega_2 - \omega_1) - 3t(\omega_2^2 - \omega_1^2) - \frac{3}{8}(\omega_2^4 - \omega_1^4) &= \pi_0(\omega_2 - \omega_1) \\ 4t - 3t(\omega_2 + \omega_1) - \frac{3}{8}(\omega_2 + \omega_1)(\omega_2^2 + \omega_2\omega_1 + \omega_1^2) &= \pi_0. \end{aligned} \tag{29}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \pi_0(\omega_1) &= \pi_0(\omega_2) \\ -6t\omega_1 - \frac{3}{2}\omega_1^3 &= -6t\omega_2 - \frac{3}{2}\omega_2^3 \\ 2t(\omega_2 - \omega_1) + \frac{1}{2}(\omega_2^3 - \omega_1^3) &= 0 \\ 4t + \omega_2^2 + \omega_2\omega_1 + \omega_1^2 &= 0. \end{aligned} \tag{30}$$

Reemplazando 30 en 29,

$$\begin{aligned} 4t - 3t(\omega_2 + \omega_1) + \frac{3}{2}t(\omega_2 + \omega_1) &= \pi_0 \\ 4t - \frac{3}{2}t(\omega_2 + \omega_1) &= \pi_0 \end{aligned} \tag{31}$$

Evaluando π_0 en ω_2, se tiene

$$\begin{aligned}
-\frac{3}{2}t(\omega_2+\omega_1) &= -6t\omega_2 - \frac{3}{2}\omega_2^3 \\
t(\omega_2+\omega_1) &= 4t\omega_2 + \omega_2^3 \\
t\omega_1 &= 3t\omega_2 + \omega_2^3
\end{aligned}$$

Reemplazando ω_1 en 30 y conservando sólo los órdenes relevantes,

$$\begin{aligned}
\omega_2^2 + \omega_2\left(3\omega_2 - \frac{\omega_2^3}{t}\right) + \left(3\omega_2 - \frac{\omega_2^3}{t}\right)^2 &= 4t \\
4\omega_2^2 - \frac{\omega_2^4}{t} + 9\omega_2^2 - 6\frac{\omega_2^4}{t} + \left(\frac{\omega_2^3}{t}\right)^2 &= 4t \qquad (32)
\end{aligned}$$

TODO: Continuar (y verificar)

Problema 3: Curie-Weiss

$$m = \tanh(\beta B + \beta\lambda m) \tag{33}$$

Consideremos primero el caso de campo nulo. En ese caso, tenemos que

$$m = \tanh(\beta\lambda m) \tag{34}$$

El punto crítico está dado por la condición de que el argumento de la tangente hiperbólica sea igual a m, es decir, que

$$\begin{aligned} \beta_c &= \frac{1}{\lambda} \\ k_B T_c &= \lambda \end{aligned}$$

Para ver cómo escala la magnetización con respecto a la temperatura, desarrollamos la tangente en torno al punto crítico.

$$\begin{aligned} m &= \beta\lambda m - \frac{(\beta\lambda m)^3}{3} \\ 1 &= \beta\lambda - \frac{\beta^3\lambda^3 m^2}{3} \\ \frac{\beta^3\lambda^3 m^2}{3} &= \beta\lambda - 1 \\ \frac{\beta^2\lambda^2 m^2}{3} &= 1 - \frac{1}{\beta\lambda} \\ \frac{\beta^2\lambda^2 m^2}{3} &= 1 - \frac{k_B T}{\lambda} \\ \frac{\beta^2\lambda^2 m^2}{3} &= 1 - \frac{T}{T_c} \\ m &= \left[\frac{3}{\beta^2\lambda^2}(-t)\right]^{1/2} \end{aligned} \tag{35}$$

La susceptibilidad magnética se define como

$$\chi(T, B) = \frac{\partial m}{\partial B}. \tag{36}$$

Para obtener el escaleo con respecto a la temperatura de $\chi(T, B \to 0)$, aproximamos 33 a orden cúbico y derivamos ambos miembros.

$$\begin{aligned} m &= (\beta B + \beta\lambda m) - \frac{(\beta B + \beta\lambda m)^3}{3} \\ \chi &= (\beta + \beta\lambda\chi) - (\beta B + \beta\lambda m)^2(\beta + \beta\lambda\chi). \end{aligned} \tag{37}$$

A campo nulo, tenemos,

$$\chi = (\beta + \beta\lambda\chi) - (\beta\lambda m)^2(\beta + \beta\lambda\chi). \tag{38}$$

Para temperaturas superiores a la temperatura crítica, no existe magnetización espontánea, por lo que

$$\begin{aligned}
\chi &= (\beta + \beta\lambda\chi) \\
(1 - \beta\lambda)\chi &= \beta \\
(k_B T - \lambda)\chi &= 1 \\
k_B(T - T_c)\chi &= 1 \\
\lambda\frac{(T - T_c)}{T_c}\chi &= 1 \\
\chi &= \frac{1}{\lambda}t^{-1}.
\end{aligned} \tag{39}$$

Por otro lado, si $T < T_c$, podemos utilizar la ecuación 35

$$\begin{aligned}
\chi &= (\beta + \beta\lambda\chi) - 3\left(1 - \frac{1}{\beta\lambda}\right)(\beta + \beta\lambda\chi) \\
\chi &= \beta - 3\beta + \beta\lambda\chi - 3\beta\lambda\chi + \frac{3}{\lambda} + 3\chi \\
-2\chi &= -2\beta - 2\beta\lambda\chi + \frac{3}{\lambda} \\
-2(1 - \beta\lambda)\chi &= -2\beta + \frac{3}{\lambda} \\
-2(k_B T - \lambda)\chi &= -2 + \frac{3k_B T}{\lambda} \\
-2\lambda t\chi &= -2 + \frac{T}{T_c} \\
\chi &= \frac{-2 + 3\tilde{T}}{2\lambda}(-t)^{-1},
\end{aligned} \tag{40}$$

donde definimos $\tilde{T} = T/T_c$. TODO: Los prefactores deberían dar igules!