Problema 1: Funciones homogéneas

Sea una función homogénea generalizada

$$\lambda f(x,y) = f(\lambda^a x, \lambda^b y). \tag{1}$$

Muestre que la transformada de Legendre

$$g(x, u(x,y)) = f(x,y) - yu(x,y), \tag{2}$$

donde

$$u(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x, \tag{3}$$

es también una función homogénea generalizada.

Solución:

Observemos primero que la derivada de una función homogénea generalizada es también función homogénea generalizada:

$$\begin{aligned}
\lambda \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} &= \frac{\partial f(\lambda^a x, \lambda^b y)}{y} \\
\lambda u(x,y) &= \lambda^b \frac{\partial f(\lambda^a x, \lambda^b y)}{\partial(\lambda^b y)} \\
\lambda^{1-b} u(x,y) &= u(\lambda^a x, \lambda^b y)
\end{aligned}$$

Ahora bien, partiendo de la definición de g,

$$\begin{aligned}
f(\lambda^a x, \lambda^b y) &= g(\lambda^a x, u(\lambda^a x, \lambda^b y)) + \lambda^b y u(\lambda^a x, \lambda^b y) \\
\lambda f(x,y) &= g(\lambda^a x, \lambda^{1-b} u(x,y)) + \lambda^b y \lambda^{1-b} u(x,y) \\
\lambda \left(f(x,y) - yu(x,y)\right) &= g(\lambda^a x, \lambda^{1-b} u(x,y) \\
\lambda^{1-b} g(x,u) &= g(\lambda^a x, \lambda^{1-b} u)
\end{aligned}$$

Problema 2: Teorías de escala

Usando la construcción de bloques de Kadanoff muestre que la función de correlación de pares para un ferromagneto puede expresarse como

$$C(r,t,B) = t^{\nu(d-2+\eta)} F\left(\frac{r}{t^{-\nu}}, \frac{B}{t^{\Delta}}\right), \tag{4}$$

donde $t = T/T_c - 1$ y $\Delta = \beta\delta$.

Solución:

$$b^{2(d-y)} C(r,t,B) = C(r/b, tb^x, Bb^y) \tag{5}$$

En particular, para $tb^x = 1$ (o bien, $b = t^{-1/x}$),

$$t^{-2(d-y)/x} C(r,t,B) = C\left(\frac{r}{t^{1/x}}, \frac{B}{t^{y/x}}\right).$$

Usando las identidades $\nu = 1/x$, $\Delta = y/x$ y $2(d-y) = d-2-\eta$, se deduce que

$$C(r,t,B) = t^{\nu(d-2+\eta)} F\left(\frac{r}{t^{-\nu}}, \frac{B}{t^{\Delta}}\right), \tag{6}$$