

Grupo de Renormalización en el Espacio Real

Notas de clase - 2003

Sergio A. Cannas

1 Introducción

La *longitud de correlación* ξ constituye una de las magnitudes físicas fundamentales para la comprensión de los fenómenos críticos. La divergencia de ξ en el punto crítico se encuentra asociada de manera directa con el concepto de *invariancia de escala*, del cual a su vez pueden (mediante algunas suposiciones) derivarse las propiedades de homogeneidad de la energía libre (Widom) y de las funciones de correlación mediante la construcción de los bloques de Kadanoff.

La invariancia de escala es una *simetría* del sistema crítico, y como tal tendrá asociada un conjunto de *transformaciones de simetría*, las cuales serán obviamente transformaciones de escala. En términos generales las transformaciones de escala no poseen una expresión única, pudiendo adoptar diferentes formulaciones de acuerdo con el sistema y aún para un mismo sistema. Debemos tener en mente que lo importante es que todas esas formulaciones deben dar aproximadamente el mismo resultado *en un entorno del punto crítico*. De manera genérica se denomina al conjunto de procedimientos asociado con las transformaciones de escala (en mecánica estadística) como *Grupo de Renormalización (GR)*. Las “cantidades conservadas” asociadas con este conjunto de transformaciones de simetría son los exponentes críticos.

2 Procedimiento

Consideremos un modelo de spines $S_i = \pm 1$ definidos en una red regular arbitraria de N sitios. Si bien en lo que resta de estas notas consideraremos solo este tipo de modelos, la teoría es completamente general y puede extenderse a modelos clásicos de variables continuas, modelos cuánticos, etc.

El primer paso en la formulación de las transformaciones de escala consiste en la construcción de *bloques de Kadanoff* de volumen $\propto b^d$, donde d es la dimensión del espacio y b será el *factor de escala* de la transformación (ej., la arista de un hipercubo en d dimensiones, en el caso de una red hipercúbica), de tal manera que los bloques, pensados como nuevos sitios, conformen una red con las mismas simetrías que la red

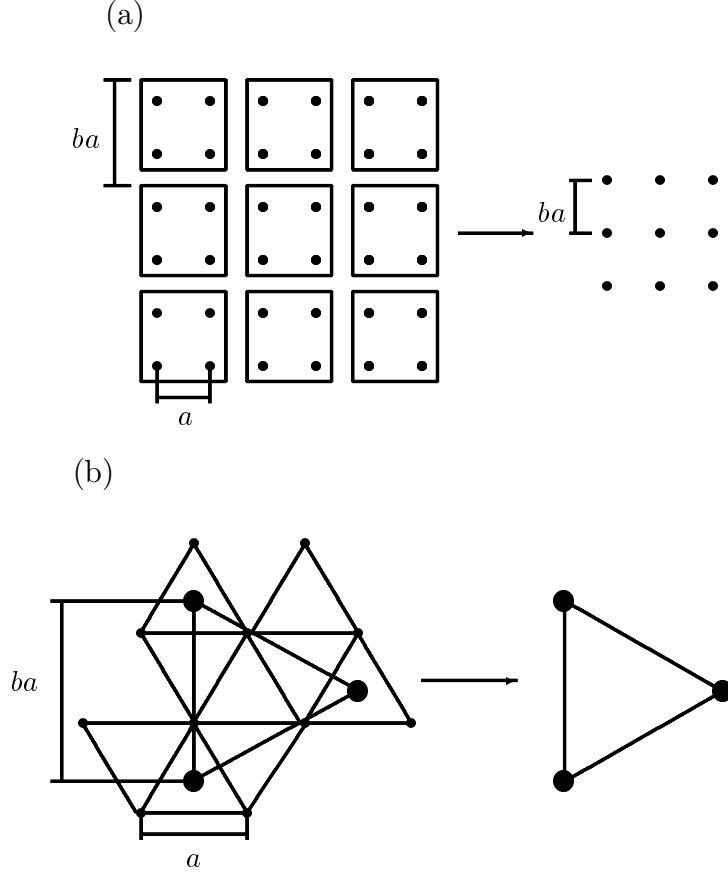


Figura 1: Bloques de Kadanoff. (a) Red cuadrada, $b = 2$. (b) Red triangular, $b = \sqrt{3}$.

original, pero con $N' = N/b^d$ sitios (ver ejemplos en Fig.(1)). A cada bloque vamos a asignar una variable de spin $S_I = \pm 1$.

En el esquema de Kadanoff la suposición mas fuerte consiste en definir un Hamiltoniano de bloques idéntico al Hamiltoniano de sitios, pero con valores diferentes de los parámetros. Esto, en terminos generales, es una aproximación, ya que usualmente al transformar del sistema de sitios al de bloques proliferan interacciones, es decir, para que el sistema de bloques sea equivalente (en términos termodinámicos) al sistema

de sitios, deben incluirse en el Hamiltoniano de bloques interacciones que no estan presentes en el de sitios.

Asi, si partimos de un Hamiltoniano con interacciones solo entre primeros vecinos, en general van a surgir interacciones entre spines de bloques segundos vecinos, acoplamientos de 4 spines, etc. De esta manera, debemos considerar la posibilidad de que la transformación de escala nos lleve a un Hamiltoniano mas amplio que el original. La manera mas simple de hacer esto es considerar de partida el Hamiltoniano spines mas general posible, esto es [1, 2]:

$$\mathcal{H}(s) = \sum_a K_a S_a \quad (1)$$

donde s denota el conjunto de todos los spines de sitio y la suma corre sobre todos los subconjuntos a de sitios de la red. Las variables S_a se definen como:

$$S_a \equiv \prod_{i \in a} S_i \quad (2)$$

de donde $S_a = \pm 1$. Por conveniencia vamos a elegir el cero de energia tal que:

$$\sum_{\{s\}} \mathcal{H}(s) = 0 \quad (3)$$

Es simple demostrar que $\sum_{\{s\}} S_a = 0$. Asi, la condición anterior equivale a excluir el conjunto vacio $a = \phi$ de \mathcal{H} , es decir, eliminamos los términos constantes.

Los parámetros de interacción K_a pueden ser obtenidos formalmente a partir de \mathcal{H} via la relación:

$$K_a = 2^{-N} \sum_{\{s\}} S_a \mathcal{H}(s) \quad (4)$$

Sin perdida de generalidad vamos a considerar de aqui en adelante sistemas *homogeneos*, los cuales poseen la siguiente propiedad: sea α la clase de todos los subconjuntos de sitios que pueden ser identificados por una operación de simetría de la red; α puede denotar, por ej., los propios “sitios simples” (en este caso K_α sera proporcional al campo magnético), “pares de sitios primeros vecinos”, etc; en un sistema homoganeo

$K_a = K_\alpha, \forall a \in \alpha$. Para estos sistemas homogéneos el Hamiltoniano (1) puede ser reescrito como:

$$\mathcal{H}(s) = \sum_{\alpha} K_{\alpha} \sum_{a \in \alpha} S_a \quad (5)$$

El siguiente paso consiste en introducir un factor de peso $P(s', s)$, que depende de las configuraciones de sitios $\{s\}$ y de bloques $\{s'\}$, con las siguientes propiedades:

- a) $P(s', s) \geq 0 \forall s', s$
- b) $\sum_{\{s'\}} P(s', s) = 1 \forall s$.

Definimos entonces el Hamiltoniano efectivo (de bloques) $\mathcal{H}'(s')$ mediante la siguiente operación, a la cual denominaremos **transformación de GR**:

$$e^{\mathcal{C} + \mathcal{H}'(s')} = \sum_{\{s\}} P(s', s) e^{\mathcal{H}(s)} \quad (6)$$

donde la constante \mathcal{C} se define imponiendo sobre \mathcal{H}' la condición:

$$\sum_{\{s'\}} \mathcal{H}'(s') = 0.$$

Notemos que la condición (a) es suficiente pero no necesaria para que \mathcal{C} y \mathcal{H}' sean reales. Con las condiciones (a) y (b), $P(s', s)$ puede interpretarse como una probabilidad condicional para una configuración $\{s'\}$ dada una configuración $\{s\}$. Bajo esta interpretación la cantidad $\sum_{\{s\}} P(s', s) e^{\mathcal{H}(s)}$ constituiría una distribución de probabilidad (no normalizada) para $\{s'\}$.

Sea

$$F \equiv \ln Z$$

donde Z es la función partición, es decir, F es la energia libre dividida por $-T$. De la Ec.(6), usando condición (b), se obtiene inmediatamente la relación:

$$\mathcal{C} + F' = F \quad (7)$$

De manera completamente general podemos expresar \mathcal{H}' de la forma: $\mathcal{H}'(s') = \sum_a K'_a S'_a$. Imponemos ahora sobre $P(s', s)$ la condición de que la transformación preserve las simetrías de $\mathcal{H}(s)$. Dado que hemos supuesto un sistema homogeneo, esto último implica que

$$\mathcal{H}'(s') = \sum_{\alpha} K'_{\alpha} \sum_{a \in \alpha} S'_a \quad (8)$$

A partir de la Ec.(6) podemos calcular la constante \mathcal{C} y los parámetros \vec{K}' de \mathcal{H}' , como función de los parámetros \vec{K} de \mathcal{H} ($\vec{K} \equiv (K^{(1)}, K^{(2)}, \dots)$) desarrollando la ecuación:

$$\mathcal{C} + \mathcal{H}'(s') = \ln \left(\sum_{\{s\}} P(s', s) e^{\mathcal{H}(s)} \right) \quad \forall s' \quad (9)$$

Denotaremos estas funciones como $\vec{K}' = \mathcal{R}_b(\vec{K})$, las cuales se conocen como *ecuaciones de GR* ó **ecuaciones de recurrencia**.

En el límite termodinámico $N \rightarrow \infty$, tenemos que $N' \rightarrow \infty$ con $N/N' = b^d$. Sea $f(\vec{K})$ la energia libre por sitio:

$$f(\vec{K}) \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} F(\vec{K}) \quad (10)$$

Dado que \mathcal{H}' tiene la misma forma funcional que \mathcal{H} tendremos que:

$$f(\vec{K}') \equiv \lim_{N' \rightarrow \infty} \frac{1}{N'} F'(\vec{K}') \quad (11)$$

La constante \mathcal{C} contiene la contribución a la energía libre total de los grados de libertad internos de todos los bloques. Así, \mathcal{C} debe ser una cantidad extensiva y podemos expresarla como $\mathcal{C} = N g(\vec{K})$, donde g es una función que no depende de N (para $N \rightarrow \infty$).

Si **suponemos** ahora que la transformación de GR continua siendo válida en el límite termodinámico, obtendremos de (7) la relación:

$$f(\vec{K}) = g(\vec{K}) + b^{-d} f(\vec{K}') \quad (12)$$

El procedimiento de GR se completa entonces reescalando todas las longitudes $l \rightarrow l/b$. Una vez completados estos pasos, hemos obtenido un sistema equivalente al original, idéntico en todas sus propiedades termodinámicas, pero con parámetros “renormalizados” \vec{K}' . La relación entre las energías libres de ambos sistemas viene dada por la Ec.(12). Podemos entonces repetir todo el procedimiento nuevamente cuantas veces querramos, es decir, podemos *iterar* las ecuaciones de recurrencia $\vec{K}' = \mathcal{R}_b(\vec{K})$.

Conviene notar que las condiciones impuestas sobre la función $P(s', s)$ son sumamente generales y poco restrictivas, de manera que admiten una enorme variedad de elecciones. No existe ningún criterio general *a priori* para la elección de P , ni siquiera para un mismo sistema particular, mas que criterios de consistencia y ciertas exigencias de regularidad en las ecuaciones de recurrencia resultantes. De ahí que la elección de una receta particular de renormalización (P) depende en gran medida de la intuición y su validez, en la mayoría de los casos, solo puede ser testada mediante un análisis *a posteriori* de los resultados.

La estrategia del GR consiste, a partir de aquí, en obtener las singularidades de la energía libre $f(\vec{K})$ a partir de las funciones $g(\vec{K})$ y $\mathcal{R}_b(\vec{K})$, las cuales se **asumen** regulares (analíticas), al menos en el dominio de interés del espacio de los parámetros, es decir, en el entorno de las regiones críticas. No obstante, no existe ninguna garantía

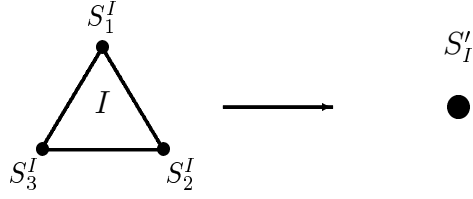


Figura 2: Bloques de tres sitios en la red triangular ($b = \sqrt{3}$).

a priori de que esto sea así, y de hecho ciertas elecciones de P no satisfacen este requerimiento, como se vera en uno de los ejemplos mas adelante. Parte del problema en la formulación del GR es justamente elegir P de manera que $g(\vec{K})$ y $\mathcal{R}_b(\vec{K})$ sean regulares. Estos aspectos surgen principalmente del hecho de que, en casi todos los casos de interés, no es posible obtener las ecuaciones de recurrencia de manera exacta, siendo necesario introducir aproximaciones “no controladas”, es decir, aproximaciones en las cuales no existe ningun parámetro de “pequeñez” (tal como en una teoría perturbativa) que permita estimar de manera sistemática el error cometido.

Veremos a continuación algunos ejemplos particulares de funciones $P(s', s)$.

i) **Ejemplo trivial** (completamente inutil):

$$P(s', s) = P(s)$$

De la condición (b) se obtiene: $P(s) = cte = 2^{-N'}$. Reemplazando en la Ec.(6) resulta $\mathcal{H}' = 0$ y $\mathcal{C} = F - N' \ln 2$, con lo cual $g(\vec{K})$ contiene las mismas singularidades que $f(\vec{K})$, no satisfaciendo por lo tanto las condiciones de regularidad antes mencionadas.

ii) **Regla de la Mayoría**

Supongamos una red triangular y bloques de tres sitios, como se muestra en la Fig.(2).

Vamos a exigir que el spin S_I' asuma el valor de la mayoría de los sitios en el bloque: $S_I' = \text{sgn}(S_1^I + S_2^I + S_3^I)$; pedimos entonces que P satisfaga:

$$P(s', s) = \begin{cases} 1 & \text{si } S'_I = \text{sgn}(S_1^I + S_2^I + S_3^I) \quad \forall I \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (13)$$

$P(s', s)$ puede ser expresada como:

$$P(s', s) = \prod_I \frac{1}{2} \left[1 + S'_I \text{sgn}(S_1^I + S_2^I + S_3^I) \right] \quad (14)$$

Es simple comprobar que P satisface las tres condiciones pedidas.

iii) **Decimación**

Designemos por σ_I^j , $j = 1, 2, \dots, b^d$, a los spines correspondientes a los sitios asociados con el bloque I (ver Fig.(3)). La técnica conocida como decimación consiste en elegir un spin arbitrario dentro del bloque (al cual llamaremos σ_I^1) e imponer que el spin de bloque satisfaga $S'_I = \sigma_I^1$, para todo bloque I . La idea de este método se basa en suponer que, cerca de la criticalidad, la orientación del spin de un sitio cualquiera del bloque será, en promedio, representativa de la orientación del conjunto de spines del bloque. Esto corresponde a una función P de la forma:

$$P(s', s) = \prod_I \delta_{S'_I, \sigma_I^1}. \quad (15)$$

La regla de decimación admite otro tipo de interpretación. Denotemos por σ una configuración de todos los sitios de bloque menos los sitios σ_I^1 y por σ^1 una configuración de estos últimos sitios. Así $\{s\} \equiv \{\sigma^1, \sigma\}$. Usando las Ecs.(6) y (15) obtenemos:

$$\sum_{\{\sigma^1, \sigma\}} P(s', \sigma^1, \sigma) e^{\mathcal{H}(\sigma^1, \sigma)} = \sum_{\sigma} e^{\mathcal{H}(s', \sigma)} \quad (16)$$

$$= e^{\mathcal{C} + \mathcal{H}'(s')} \quad (17)$$

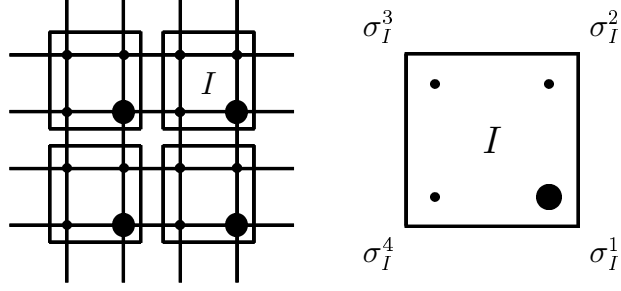


Figura 3: Decimación en la red cuadrada.

Consideremos ahora la función partición:

$$Z = \sum_{\{\sigma^1, \sigma\}} e^{\mathcal{H}(\sigma^1, \sigma)} \quad (18)$$

$$= \sum_{s'} \left(\sum_{\sigma} e^{\mathcal{H}(s', \sigma)} \right) \quad (19)$$

$$= \sum_{s'} e^{\mathcal{C} + \mathcal{H}'(s')}. \quad (20)$$

Vemos de esta manera que el procedimiento equivale a realizar una *traza parcial* sobre un cierto subconjunto de grados de libertad del sistema y exigir que dicha traza parcial mantenga la forma de una distribución de Boltzmann con Hamiltoniano efectivo $\mathcal{C} + \mathcal{H}'(s')$. Al hacer esto hemos “decimado”(diezmado), es decir, eliminado un subconjunto de sitios de la red.

3 Análisis de las ecuaciones de recurrencia

3.1 Flujo de renormalización en el espacio de los parámetros

Cada punto en el espacio de parámetros \vec{K} representa un Hamiltoniano particular [3, 4]. Así, la función (en general no lineal):

$$\vec{K}' = \mathcal{R}_b(\vec{K}) \quad (21)$$

representa una transformación entre Hamiltonianos. Vamos a denotar por \vec{K}_n al vector obtenido luego de n aplicaciones (iteraciones) sucesivas de la transformación (21) a un cierto vector inicial \vec{K}_0 . Tenemos entonces que:

$$\vec{K}_n = \mathcal{R}_b(\vec{K}_{n-1}) \quad (22)$$

Si interpretamos el número de iteraciones n como un tiempo discreto, las ecuaciones (22) nos definen un *flujo* en el espacio de parámetros. Desde este punto de vista, las ecuaciones de recurrencia (22) pueden analizarse como un sistema dinámico.

Se asume que, dados dos factores de escala b y b' , la transformación (21) satisface, al menos en un entorno de las regiones críticas, la siguiente propiedad:

$$\mathcal{R}_b(\mathcal{R}_{b'}(\vec{K})) = \mathcal{R}_{b'}(\mathcal{R}_b(\vec{K})) = \mathcal{R}_{bb'}(\vec{K}) \quad (23)$$

La propiedad (23), conjuntamente con la existencia de elemento neutro en la transformación ($b = 1$) definen una estructura de **semi-grupo** para la transformación (21) respecto de la composición de transformaciones. Notemos que el conjunto de las transformaciones del “grupo de renormalización” no es precisamente un grupo, ya que no es posible definir la transformación inversa.

Estamos interesados en los sistemas *invariantes* bajo la transformación de escala, es decir, sistemas cuyo Hamiltoniano resulta inalterado bajo la aplicación (21). Dichos sistemas estarán caracterizados por **puntos fijos** \vec{K}^* de la transformación (21), esto es:

$$\vec{K}^* = \mathcal{R}_b(\vec{K}^*) \quad (24)$$

Supongamos que una dada sucesión de puntos del flujo de renormalización $\{\vec{K}_n\}$ converge a \vec{K}^* para $n \rightarrow \infty$. Asumiendo \mathcal{R}_b continua, se sigue que \vec{K}^* es un punto fijo:

$$\vec{K}^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{K}_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{R}_b(\vec{K}_n) = \mathcal{R}_b\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{K}_n\right) = \mathcal{R}_b(\vec{K}^*) \quad (25)$$

Bajo la transformación (21) la longitud de correlación satisface $\xi(\vec{K}') = \xi(\vec{K})/b$. En un punto fijo tenemos: $\xi(\vec{K}^*) = \xi(\vec{K}^*)/b$, con lo cual ξ solo puede ser nula o infinita,

tal como se espera en un punto de invariancia de escala. Consideremos entonces un punto fijo \vec{K}^* tal que $\xi(\vec{K}^*) = \infty$ y sea $\{\vec{K}_n\}$ una sucesión de puntos del flujo de renormalización tal que: $\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{K}_n = \vec{K}^*$. Para una iteración n arbitraria tenemos que:

$$\xi(\vec{K}_n) = \xi(\vec{K}_{n-1})/b = \dots = \xi(\vec{K}_0)/b^n. \quad (26)$$

De (25) y (26) se sigue que $\xi(\vec{K}_0) = \xi(\vec{K}_n) = \infty \forall n$, ya que de otro modo tendríamos que $\xi(\vec{K}_n) \rightarrow 0$ para $n \rightarrow \infty$. Sabemos por otra parte que *en la criticalidad*: $\xi = \infty$. Arribamos así a la conclusión de que el GR transforma *sistemas críticos en sistemas críticos*.

Puntos iniciales \vec{K}_0 con ξ finita, por otra parte, van a converger a puntos fijos \vec{K}^* en los cuales $\xi(\vec{K}^*) = 0$; dichos puntos fijos se denominan **triviales**, ya que se espera sean soluciones triviales de las ecuaciones de punto fijo. Estos puntos, por otra parte, describen sistemas completamente desordenados ($T = \infty$) o bien completamente ordenados ($T = 0$, es decir, sistemas en un estado fundamental).

El conjunto de puntos del espacio de parámetros que convergen a un punto fijo \vec{K}^* se denomina el **dominio o cuenca de atracción** de dicho punto. La cuenca de atracción de un punto fijo crítico ($\xi = \infty$) constituye una **superficie crítica**, ya que todos los Hamiltonianos asociados con ella describen sistemas críticos.

Tomemos ahora un punto inicial \vec{K}_0 fuera de la superficie crítica, pero infinitesimalmente próximo a ella. Dado que $\xi(\vec{K}_0)$ es finita, el flujo de renormalización convergerá a un punto fijo trivial, alejándose de la superficie crítica. Vemos así que las superficies críticas serán siempre inestables y los correspondientes puntos fijos no-triviales parcial o totalmente inestables.

Entre las suposiciones de regularidad de la transformación (21), se asume que las líneas de flujo de RG no se cortan, excepto en un punto fijo; entendemos por líneas de flujo la interpolación continua de las sucesiones de puntos generadas por las ecuaciones de recurrencia (22). De esta manera, el flujo de renormalización no podrá atravesar las superficies críticas, las cuales actuarán como “divisorias de aguas” separando las

cuencas de atracción de los diferentes puntos fijos triviales. Dichos puntos fijos serán completamente estables, por lo cual se los denomina **atractores**. Por otra parte, sabemos que sistemas invariantes por escala con $\xi = 0$ corresponden a fases completamente ordenadas o completamente desordenadas. Las cuencas de atracción asociadas con los atractores corresponderán entonces a las *fases* asociadas con los mismos, ya que dichas regiones están separadas por superficies críticas. Tomemos, por ejemplo, un ferromagneto en ausencia de campo externo, el cual posee solamente dos fases: paramagnética y ferromagnética. Este sistema presenta solamente dos atractores: *a)* $\vec{K} = 0$ ($T = \infty$), cuya cuenca describe la fase para y *b)* $\vec{K} = \infty$ ($T = 0$, estado fundamental), cuya cuenca describe la fase ferro.

En sistemas más complejos es posible tener varios estados fundamentales para distintos valores de los parámetros, así como diferentes fases parcialmente desordenadas. En este caso existirán múltiples atractores, así como diversas superficies críticas con diferentes puntos fijos no-triviales asociados.

Estas consideraciones permiten construir un procedimiento de cálculo numérico de diagramas de fase, mediante el uso de las ecuaciones (22):

- *i)* Determinación de los atractores de (22) y caracterización de las fases asociadas analizando las simetrías de los Hamiltonianos correspondientes.
- *ii)* Determinación de las superficies críticas pensadas como “divisorias de aguas” entre las cuencas de atracción, mediante un proceso de “bisección”.

3.2 Estabilidad de los puntos fijos

Hemos visto hasta aquí que la estabilidad de los puntos fijos cumple un rol fundamental en la interpretación de los resultados obtenidos vía el procedimiento de GR. Analizaremos en detalle en esta subsección el problema de estabilidad, lo cual nos permitirá, no solo clasificar los puntos fijos, sino también establecer la conexión entre puntos fijos no-triviales y exponentes críticos. Es en esta conexión donde reside el mayor aporte de la teoría de GR, ya que de ella, no solo se derivan de manera completa y consistente las

leyes de escala entre exponentes críticos, sino que tambien puede definirse de manera clara y precisa el concepto de *universalidad*.

Tomemos un punto arbitrario \vec{K} en el entorno de un punto fijo \vec{K}^* y calculemos $\vec{K}' = \mathcal{R}_b(\vec{K})$.

Sea

$$\delta \vec{K} \equiv \vec{K} - \vec{K}^*$$

con $|\delta \vec{K}| < 1$. Asi

$$\delta \vec{K}' \equiv \vec{K}' - \vec{K}^* = \mathcal{R}_b(\vec{K}) - \mathcal{R}_b(\vec{K}^*). \quad (27)$$

Efectuando un desarrollo de Taylor de (27) en torno de \vec{K}^* obtenemos:

$$\delta \vec{K}' = \mathcal{L}_b \cdot \delta \vec{K} + \mathcal{O}(|\delta \vec{K}|^2) \quad (28)$$

donde \mathcal{L}_b denota la matriz jacobiana de \mathcal{R}_b en \vec{K}^* :

$$(\mathcal{L}_b)_{ij} \equiv \left(\frac{\partial \mathcal{R}_b^{(i)}}{\partial K^{(j)}} \right)_{\vec{K}^*}$$

donde $K'^{(i)} = \mathcal{R}_b^{(i)}(\vec{K})$. Sean $\{\mathbf{e}_j\}$ los autovectores a derecha de \mathcal{L}_b (ya que la misma es, en general, no-simétrica) y sean $\{\rho_j(b)\}$ los autovalores correspondientes. Los autovectores $\{\mathbf{e}_j\}$ se asumen independientes del factor de escala b . Tomando \vec{K}^* como origen, podemos hacer el cambio de coordenadas

$$\delta \vec{K} = \sum_j u_j \mathbf{e}_j$$

.

Las coordenadas $\{u_j\}$ (en general, no-ortogonales), definidas por los autovectores $\{\mathbf{e}_j\}$, se conocen como **campos de escala**. Reemplazando en la Ec.(28) obtenemos:

$$u'_j = \rho_j(b) u_j \quad (29)$$

y

$$\vec{K}' = \vec{K}^* + \sum_j \rho_j(b) u_j \mathbf{e}_j. \quad (30)$$

De la aplicación de \mathcal{L}_b n veces obtendremos:

$$\vec{K}_n = \vec{K}^* + \sum_j u_j^{(n)} \mathbf{e}_j \quad (31)$$

donde

$$u_j^{(n)} = \rho_j^n(b) u_j^{(0)}. \quad (32)$$

De la propiedad de semi-grupo (23) tenemos:

$$\mathcal{L}_b \cdot \mathcal{L}_{b'} = \mathcal{L}_{bb'}. \quad (33)$$

De las ecuaciones (30) y (33) obtenemos:

$$\rho_j(b) \rho_j(b') = \rho_j(bb'),$$

de donde concluimos que:

$$\rho_j(b) = b^{y_j}. \quad (34)$$

Reemplazando en la Ec.(32) obtenemos finalmente:

$$u_j^{(n)} = b^{ny_j} u_j^{(0)}. \quad (35)$$

Dado que $b > 1$, la Ec.(35) nos permite clasificar los campos de escala de acuerdo con la estabilidad del punto fijo en la dirección asociada (ver Fig.(4)):

- $y_j > 0 \Rightarrow b^{y_j} > 1$. \vec{K}^* será repulsivo en la dirección de \mathbf{e}_j , y el campo de escala u_j se denomina **relevante**.
- $y_j < 0 \Rightarrow b^{y_j} < 1$. \vec{K}^* será atractivo en la dirección de \mathbf{e}_j , y el campo de escala u_j se denomina **irrelevante**.

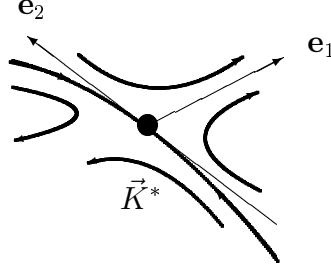


Figura 4: Flujo esquemático en torno de un punto fijo no-trivial; $y_1 > 0$ e $y_2 < 0$.

- $y_j = 0 \Rightarrow b^{y_j} = 1$. En este caso la estabilidad de \vec{K}^* en la dirección de \mathbf{e}_j dependerá del segundo orden en el desarrollo de Taylor (28); el campo de escala u_j se denomina en este caso **marginal**.

Un punto fijo parcialmente estable define una hipersuperficie en el espacio de parámetros, la cual constituye la cuenca de atracción del punto. Los autovectores asociados a los campos de escala irrelevantes definen un hiperplano tangente a la hipersuperficie en el punto fijo. En un atractor, por otra parte, todos los campos de escala son irrelevantes.

3.3 Homogeneidad y exponentes críticos

Tomemos un punto \vec{K} cercano a la superficie crítica: $\vec{K} = \vec{K}^* + \delta\vec{K}$. Supongamos \vec{K} suficientemente cercano a \vec{K}^* , tal que al cabo de n iteraciones podemos escribir:

$$\vec{K}_n = \mathcal{R}_b^n(\vec{K}) \approx \vec{K}^* + \mathcal{L}_b^n \cdot \delta\vec{K} = \vec{K}^* + \sum_j u_j b^{ny_j} \mathbf{e}_j \quad (36)$$

donde, fijos los parámetros microscópicos, los campos de escala u_j serán funciones de los parámetros termodinámicos, tales como T y B en el caso de un ferromagneto.

De las Ecs.(12) y (22) obtenemos

$$f(\vec{K}_0) = g(\vec{K}_0) + b^{-d} f(\vec{K}_1) \quad (37)$$

$$f(\vec{K}_1) = g(\vec{K}_1) + b^{-d} f(\vec{K}_2) \quad (38)$$

Reemplazando la Ec.(38) en la (37) tenemos

$$f(\vec{K}_0) = g(\vec{K}_0) + b^{-d} g(\vec{K}_1) + b^{-2d} f(\vec{K}_2), \quad (39)$$

y al cabo de n iteraciones:

$$f(\vec{K}_0) = \sum_{m=0}^n b^{-md} g(\vec{K}_m) + b^{-nd} f(\vec{K}_n) \quad (40)$$

Asumiendo la descomposición de f en parte regular y parte singular:

$$f(\vec{K}) = f_r(\vec{K}) + f_s(\vec{K}) \quad (41)$$

y reemplazando en la Ec.(40) tenemos

$$f_r(\vec{K}_0) = \sum_{m=0}^n b^{-md} g(\vec{K}_m) + b^{-nd} f_r(\vec{K}_n) \quad (42)$$

$$f_s(\vec{K}_n) = b^{nd} f_s(\vec{K}_0) \quad (43)$$

Supongamos que tenemos l campos de escala *relevantes* $y_j > 0$, $j = 1, \dots, l$. Al cabo de n iteraciones, la dependencia en los campos irrelevantes decae exponencialmente, con lo cual:

$$\vec{K}_n \approx \vec{K}^* + \sum_{j=1}^l u_j b^{ny_j} \mathbf{e}_j + \mathcal{O}(b^{-n|y'|}), \quad (44)$$

donde y' es el exponente con menor valor absoluto de los campos de escala irrelevantes.

Reemplazando en la Ec.(43):

$$b^{nd} f_s(u_1, u_2, \dots, u_l) = f_s(b^{ny_1} u_1, b^{ny_2} u_2, \dots, b^{ny_l} u_l). \quad (45)$$

Por otra parte, sabemos que

$$\xi(\vec{K}_n) = b^{-n} \xi(\vec{K}_0) \quad (46)$$

Asumiendo que las Ecs.(45) y (46) son válidas para valores arbitrarios de b , podemos reemplazar $b^n \rightarrow b$, obteniendo finalmente las siguiente relaciones de **homogeneidad**:

$$b^d f_s(u_1, u_2, \dots, u_l) = f_s(b^{y_1} u_1, b^{y_2} u_2, \dots, b^{y_l} u_l) \quad (47)$$

$$b^{-1} \xi(u_1, u_2, \dots, u_l) = \xi(b^{y_1} u_1, b^{y_2} u_2, \dots, b^{y_l} u_l). \quad (48)$$

Las Ecs.(47) y (48), implican que la energía libre y la longitud de correlación son funciones homogenas generalizadas de los *campos de escala relevantes*, resultando asi mas generales que las relaciones de homogeneidad de Widom y Kadanoff. La relación precisa de los exponentes de escala $\{y_j\}$ ($j = 1, 2, \dots, l$), con los exponentes críticos, dependerá de la dependencia específica de los campos de escala en los parámetros termodinámicos en cada sistema particular. Veamos un par de ejemplos simples.

- **i) Ferromagneto a campo nulo.** A fin de fijar ideas, supongamos que partimos de un Hamiltoniano con interacciones solamente entre spines primeros vecinos con constante de acoplamiento J_1 ($K^{(1)} \equiv \beta J_1$), y que en la aplicación del GR proliferan interacciones solo hasta los segundos vecinos, con cte. de acoplamiento $K^{(2)} \equiv \beta J_2$. El flujo de renormalización estará entonces restringido a un subespacio bidimensional $(K^{(1)}, K^{(2)})$. Imaginemos ahora que fijamos los parámetros microscópicos (J_1, J_2) , de manera que al variar la temperatura nuestro “espacio físico” estará constituido por una recta en el espacio $(K^{(1)}, K^{(2)})$, que parte del origen, con pendiente J_2/J_1 (ver Fig.(5)). Dado que este sistema posee únicamente dos fases, tendremos una única superficie crítica con un punto fijo no-trivial \vec{K}^* asociado y un único campo de escala relevante que llamaremos $u(T)$, con autovalor y_T . $u(T)$ nos da la coordenada en la dirección del campo de escala relevante a lo largo de la recta antes mencionada. Si dicha recta corta la linea crítica cerca de \vec{K}^* , tendremos que $u(T_c) \approx 0$. De esta manera, en el entorno

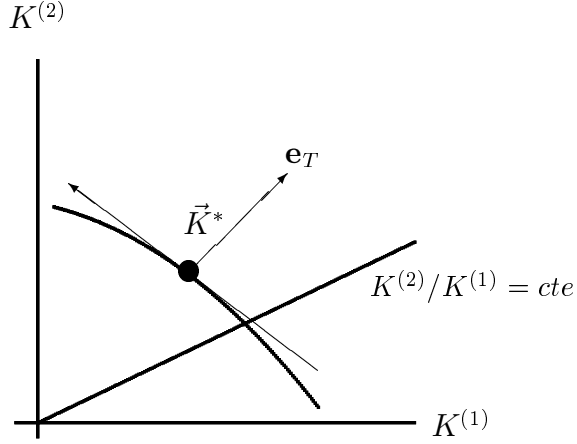


Figura 5: Superficie crítica en una transición para-ferro, en un modelo con interacciones entre 1^{ros} y 2^{dos} vecinos $(K^{(1)}, K^{(2)})$. La recta $K^{(2)}/K^{(1)} = J_2/J_1 = cte$ se obtiene al variar T en un modelo particular con J_1 y J_2 fijos.

de T_c , podemos desarrollar $u \approx A t + \mathcal{O}(t^2)$ ($t \equiv |T - T_c|/T_c$). Reemplazando en las Ecs.(47) y (48) (omitimos el factor A que resulta irrelevante) obtenemos las relaciones:

$$b f_s(t) = f_s(b^{y_T/d} t) \quad (49)$$

$$b^{-1} \xi(t) = \xi(b^{y_T} t). \quad (50)$$

de donde, por comparación con el comportamiento asintótico $\xi \approx t^{-\nu}$, obtenemos inmediatamente la identificación:

$$\nu = y_T^{-1} \quad (51)$$

Las relaciones (49) y (50) resultan consistentes con la hipótesis de homogeneidad de Kadanoff en el caso $B = 0$.

- ii) **Ferromagneto con campo externo B .** Supongamos que por algun método aproximado obtenemos ecuaciones de recurrencia cerradas para los parámetros $K \equiv \beta J$ (interacción entre primeros vecinos) y $h \equiv \beta B$, es decir

$$K' = K'(K, h)$$

$$h' = h'(K, h).$$

Sabemos que el punto crítico en el espacio (K, h) es único, con lo cual tendremos un único punto fijo no trivial con dos campos de escala relevantes (de otro modo tendríamos una superficie crítica en el espacio (K, h)).

Si cambiamos el signo de todos los spines en el modelo original $S_i \rightarrow -S_i$ esto implicara un cambio equivalente en el modelo renormalizado $S'_I \rightarrow -S'_I$. Por otra parte, dicho cambio resulta equivalente a un cambio de signo en el campo magnético $h \rightarrow -h$, en tanto que el término de interacción entre primeros vecinos resulta invariante. De estas consideraciones resultan de inmediato las siguientes propiedades de paridad para las ecuaciones de recurrencia:

$$K'(K, -h) = K'(K, h) \tag{52}$$

$$h'(K, -h) = -h'(K, h). \tag{53}$$

Tenemos entonces que $h'(K, 0) = 0$, es decir, la condición $h = 0$ se preserva bajo el GR, lo cual era de esperar ya que para $h = 0$ el modelo presenta simetría de inversión. Decimos en este caso que $h = 0$ constituye un **subespacio invariante** ante GR. Siendo que el punto fijo no-trivial es único, este debiera localizarse en el subespacio $h = 0$ y coincidirá con el punto crítico $K = K_c$.

De las relaciones de paridad concluimos tambien que \mathcal{L}_b tiene que ser diagonal, ya que

$$\left. \frac{\partial h'}{\partial K}(K, h) \right|_{h=0} = \left. \frac{\partial K'}{\partial h}(K, h) \right|_{h=0} = 0$$

Así

$$\mathcal{L}_b = \begin{pmatrix} b^{y_T} & 0 \\ 0 & b^{y_B} \end{pmatrix}$$

donde

$$y_T = \frac{\ln \left(\left(\frac{\partial K'}{\partial K} \right)_{K_c, h=0} \right)}{\ln b} \quad (54)$$

$$y_B = \frac{\ln \left(\left(\frac{\partial h'}{\partial h} \right)_{K_c, h=0} \right)}{\ln b} \quad (55)$$

Vemos que los campos de escala son los propios parámetros (K, h) lo cual, reemplazando en la Ec.(47), lleva inmediatamente a la identificación:

$$y_T = d a_T \quad (56)$$

$$y_B = d a_B \quad (57)$$

donde a_T y a_B son los índices definidos por la hipótesis de homogeneidad para la energía libre de Widom, de los cuales pueden derivarse todos los exponentes críticos mediante el uso de las leyes de escala.

Finalmente notemos que, si bien las relaciones (47) y (48) fueron derivadas para el caso en que nuestro “espacio físico” corta la superficie crítica en un entorno del punto fijo no trivial \vec{K}^* , los argumentos utilizados son válidos para cualquier región de la dicha superficie. La idea general es que, si nos acercamos lo suficiente a la superficie crítica, el flujo de renormalización, por continuidad, será paralelo y muy cercano a la superficie hasta alcanzar un entorno de \vec{K}^* , dada la influencia atractiva de dicho punto. Una vez allí, los campos de escala relevantes comenzarán a hacer sentir su influencia y el flujo se apartará de la superficie. Es decir, la manera de “alejarse” de la superficie, la cual determina la forma de las singularidades en las funciones termodinámicas, depende

exclusivamente de \vec{K}^* para cualquier punto de la superficie. Así si partimos de un punto inicial \vec{K}_0 , al cabo de un cierto número de iteraciones M alcanzaremos un punto $\vec{K}_M \approx \vec{K}^*$, donde las energías libres de los puntos inicial y final estarán relacionadas via una expresión del tipo (40). Una vez allí, podemos iterar n veces mas de manera de anular la influencia de los campos irrelevantes. La dependencia de la parte singular de f vendrá dada finalmente por la Ec.(47).

Concluimos entonces que los exponentes críticos serán los mismos *para todos los puntos de una misma superficie crítica* y los mismos estarán determinados exclusivamente por las propiedades de estabilidad del punto fijo no-trivial correspondiente.

3.4 Universalidad

Hemos visto que todos los sistemas críticos asociados a un mismo punto fijo no-trivial, al cual se encuentran asociados via la transformación de GR, presentan los mismos exponentes críticos. La superficie crítica correspondiente se localiza en un “espacio de interacciones” sumamente amplio (en principio), incluyendo una enorme variedad de modelos de características microscópicas variadas, tales como diferentes estructuras cristalinas. Así, por ejemplo, modelos homogéneos de spines en $d = 2$ en la red cuadrada y la red triangular (o cualquier otra estructura) estarán ambos incluidos en un espacio que incluya todas las interacciones entre primeros, segundos, ... , n -ésimos vecinos. El punto crítico de cada uno de estos modelos corresponderá a un punto diferente de *una misma superficie crítica*, teniendo por lo tanto los mismos exponentes críticos. Podremos hablar así de el “punto fijo Ising en $d=2$ ”, independientemente de las características microscópicas del modelo.

En términos generales, la transformación de GR (recordemos que en el fondo estamos hablando de una transformación de escala) preserva solamente propiedades macroscópicas tales la dimensión del espacio d , la dimensión del parámetro de orden y las simetrías globales (homogeneidad, isotropía, etc), en tanto que detalles microscópicos tales como la estructura de la red, rango de las interacciones (en tanto este se mantenga finito), etc, se “borran” en la convergencia de los distintos sistemas a un

mismo punto fijo.

Esto nos permite clasificar los diferentes sistemas críticos de acuerdo al punto fijo no-trivial asociado. Diremos que todos aquellos sistemas que comparten un mismo punto fijo no-trivial pertenecen a una misma **clase de universalidad**.

3.5 Comentarios generales

Hemos visto que la teoría de GR permite una descripción completa y consistente de los distintos aspectos de los fenómenos críticos: homogeneidad de las funciones termodinámicas (y con ello las leyes de escala entre exponentes críticos) y universalidad, dentro de un mismo marco conceptual basado en la invariancia de escala. Mas aun, a diferencia de las hipótesis de escala de Widom y Kadanoff, el RG brinda tambien un método operativo para el cálculo de diagramas de fase y, lo mas importante, exponentes críticos.

No obstante, en la mayoría de los casos de interés, no es posible llevar a cabo el cálculo de GR de manera exacta, siendo necesario introducir aproximaciones no controladas. Tampoco existe una receta única para la formulación del método en casos específicos. De ahí que el uso concreto del método posee una alta componente “artesanal”, basada principalmente en la intuición. Mas aun, en general muchas de las hipótesis utilizadas son sumamente difíciles de testar y, salvo ciertas consideraciones de simetría, el único test posible es confrontar los resultados del RG con los obtenidos por otros métodos, tales como simulaciones numéricas, desarrollos en serie, etc.

Parafraseando a Wilson, “... el GR no es una teoría descriptiva de la naturaleza, sino un método para construir teorías. Así el éxito de los resultados va a depender de la habilidad para construir la receta de GR en cada caso particular” (sic) [5].