Elementos de la Teoría de los Fenómenos Críticos

Agosto de 2019

Guía N° 1 - Exponentes Críticos

Problema 1: ***Gas de Van der Walls.***

Considere la ecuación de Van der Walls para un fluido simple:

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)\,(v - b) \,=\, RT$$

(a) Calcule los parámetros críticos v_c , T_c , p_c.

(b) Muestre que esta ecuación de estado puede escribirse en la forma

$$\pi \,=\, \frac{4(1+t)}{1+\frac{3}{2}\omega} \,-\, \frac{3}{(1+\omega)^2} \,-\, 1$$

donde

$$\pi \,\equiv\, \frac{p-p_c}{p_c} \;;\; \omega \,\equiv\, \frac{v-v_c}{v_c} \;;\; t \,\equiv\, \frac{T-T_c}{T_c}$$

se denominan variables reducidas. Note que la Ec. de V. der W. escrita en términos de estas variables resulta independiente del material.

(c) Muestre que, en un entorno del punto crítico se obtiene la forma asintótica

$$\pi \,=\, 4t \,-\, 6t\omega \,-\, \frac{3}{2}\omega^3 \,+\, O(\omega^4, t\omega^2)$$

(d) A partir de las isotermas de Van der Walls, corregidas por la construcción de Maxwell, obtenga una forma asintótica, válida en un entorno del punto crítico, para la curva de coexistencia, es decir, obtenga formas asintóticas para ω_1 (< 0) ; ω_2 $(>)0$ y π en función de t para $t \to 0^-$. Observe que se justifica a posteriori el truncamiento hecho en el punto anterior.

(e) Muestre que, en el diagrama $p-T$ la linea de coexistencia de fases y la curva definida por la condición $v = v_c$ tienen igual tangente en el punto crítico.

(f) Calcule los exponentes críticos β , asociado a la curva de coexistencia en el plano $p - v$ y δ asociado a la isoterma crítica en el plano $p - v$.

(g) Calcule las siguientes formas asintóticas para la compresibilidad isotérmica

$$\kappa_T(T, v = v_c) \,\sim\, Ct^{-\gamma} \;\;;\;\; t \to 0^+$$

$$\kappa_T(T = T_c, p) \,\sim\, \tilde{C}\pi^{-\tilde{\gamma}} \;\;;\;\; \pi \to 0$$

de los valores de C , $\tilde{C}$, γ y $\tilde{\gamma}$.

Problema 2: ***Gas de Berthelot***

Considere el gas de Berthelot, cuya ecuación de estado es

$$\left(p + \frac{a}{Tv^2}\right)\,(v-b) \,=\, RT$$

(a) Calcule los parámetros críticos v_c , T_c , p_c.

(b) Obtenga una expresión para la energía libre de Helmholtz $f(T,v)$ a menos de una función arbitraria de la temperatura.

(c) Calcule los exponentes críticos γ , β , δ *y* α.

Problema 3: ***Ecuación de Curie-Weiss de Ferromagnetismo***

En la teoría de campo medio para el ferromagnetismo la magnetización se obtiene como solución de la ecuación trascendente de Curie-Weiss

$$m \,=\, \tanh\left(\beta B \,+\, \beta\lambda m\right)$$

donde B es el campo magnetico externo y λ una cosntante.

(a) Obtenga las formas asintóticas

$$\chi(T, B=0) \,\sim\, Ct^{-\gamma} \;\;;\;\; t \to 0^+$$

$$\chi(T, B=0) \,\sim\, C'(-t)^{-\gamma'} \;\;;\;\; t \to 0^-$$

(b) Obtenga la forma asintótica para $\chi(T_c, B)$ para $B \,\to\, 0$.

(c) Obtenga las formas asintóticas de la magnetización espontanea para $T \,\to\, T_c^-$ y para $T \ll T_c$ $(T \to 0)$.

Problema 4: ***Desigualdades entre exponentes críticos***

Use argumentos termodinámicos para demostrar las siguientes relaciones entre exponentes críticos:

(a) *Desigualdad de Rushbrooke:*

$$\alpha + \gamma + 2\beta \geq 2$$

(b) *Desigualdad de Griffiths:*

$$\alpha + \beta(1+\delta) \geq 2$$