Problema 1: Decimación

Modelo de Ising unidimencional:

$$\mathcal{H} = K \sum_i s_i s_{i+1} + h \sum_i s_i, \tag{1}$$

donde $\mathcal{H} \equiv -\beta H$, $K \equiv \beta J$ y $h \equiv \beta B$.

Tomamos bloques de Kadanoff de dos sitios, de los cuales decimamos uno de los sitios. Llamamos S_i a las variables de bloque, y σ_i a las variables correspondientes a los sitios decimados. El hamiltoniano entonces puede ser escrito como

$$\mathcal{H} = K \sum_i \sigma_i (S_i + S_{i+1}) + \frac{h}{2} \sum_i (S_i + S_{i+1}) + h \sum_i \sigma_i. \tag{2}$$

Suponemos que, al renormalizar, no hay proliferación de interacciones, por lo que podemos proponer un hamiltoniano renormalizado de la forma

$$\mathcal{H}' = K' \sum_i S_i S_{i+1} + \frac{h'}{2} \sum_i (S_i + S_{i+1}). \tag{3}$$

Recordemos que, para el caso de decimación, la transformación de normalización está dada por

$$e^{\mathcal{C} + \mathcal{H}'(S)} = \sum_{\{\sigma\}} e^{\mathcal{H}(S,\sigma)}, \tag{4}$$

donde $\mathcal{C} = N g(K, h)$ es la constante de normalización y $g(K, h)$ es una función intensiva de los parámetros.

En este caso,

$$e^{\mathcal{C} + \mathcal{H}'(s')} = \prod_i \exp\left[K' S_i S_{i+1} + \frac{h'}{2}(S_i + S_{i+1}) + g \right] \tag{5}$$

y

$$\begin{aligned}
\sum_{\{\sigma\}} e^{\mathcal{H}(s,\sigma)} &= \prod_i \sum_{\sigma = \pm 1} \exp\left[K \sigma_i (S_i + S_{i+1}) + \frac{h}{2}(S_i + S_{i+1}) + h\sigma_i \right] \\
&= \prod_i 2 e^{\frac{h}{2}(S_i + S_{i+1})} \cosh\left[K(S_i + S_{i+1}) + h \right]
\end{aligned}$$

Igualando las dos expresiones anteriores, tenemos

$$\exp\left[K' S_i S_{i+1} + \frac{h'}{2}(S_i + S_{i+1}) + g \right] = e^{\frac{h}{2}(S_i + S_{i+1})} \cosh\left[K(S_i + S_{i+1}) + h \right], \tag{6}$$

para cada bloque i.
Evaluando para cada combinación de spines, tenemos las relaciones

$$e^{g+K'+h'} = 2e^{h}\cosh(2K+h) \tag{7}$$
$$e^{g+K'-h'} = 2e^{-h}\cosh(2K-h) \tag{8}$$
$$e^{g-K'} = 2\cosh(h) \tag{9}$$

En el caso $h=0$, tenemos que $h'=0$. Resolviendo para K',

$$K'(K) = \frac{1}{2}\ln\left[\cosh(2K)\right] \tag{10}$$
$$g(K) = \ln(2) + K'(K) \tag{11}$$

La expresión 10 se puede simplificar mediante el cambio de variables

$$t = \tanh(K) \tag{12}$$
$$t' = \tanh(K'), \tag{13}$$

y teniendo en cuenta la identidad

$$z = \tanh\left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{z+1}{z-1}\right)\right]. \tag{14}$$

De 10, tenemos que

$$t' = \tanh(K') = \tanh\left[\frac{1}{2}\ln\left[\cosh(2K)\right]\right], \tag{15}$$

por lo que se deduce que

$$\begin{aligned}\frac{t'+1}{t'-1} &= \cosh(2K)\\ &= \frac{\frac{t+1}{t-1}+\frac{t-1}{t+1}}{2}\\ &= \frac{t^2+1}{(t^2-1)}.\end{aligned} \tag{16}$$

Simplificando la expresión anterior, obtenemos la relación de recurrencia

$$t' = t^2. \tag{17}$$

La relación 17 indica que hay dos puntos fijos: $t^* = 0$, que es estable y $t^* = 1$, que es inestable. Estos corresponden a $K = 0$ (temperatura infinita) y

$K = \infty$ (temperatura cero). Es decir que el modelo precice una transición de fase a temperatura idénticamente cero.

El exponente crítico ν, asociado a la divergencia de la longitud de correlación, puede calcularse mediante $\nu = y_T^{-1}$, donde

$$y_T = \frac{\ln\left(\left.\frac{\partial K'}{\partial K}\right|_{K_c}\right)}{\ln(b)}. \tag{18}$$

En este caso,

$$\left.\frac{\partial K'}{\partial K}\right|_{K_c} = \tanh(2K_c) = 1, \tag{19}$$

por lo que $\nu = \infty$

Analizamos ahora el caso $h > 0$. Definimos las variables $u = e^{-4K}$ y $v = e^{-2h}$. Dividiendo 8 por 7, obtenemos la ecuación para v'

$$\begin{aligned} e^{-2h'} &= e^{-2h}\frac{\cosh(2K-h)}{\cosh(2K+h)} \\ v' &= v\frac{e^{2K-h}+e^{-2K+h}}{e^{2K+h}+e^{-2K-h}} \\ v' &= v\frac{v+u}{1+uv}. \end{aligned} \tag{20}$$

Elevando 9 al cuadrado,

$$e^{2g-2K'} = (e^h + e^{-h})^2 = \frac{(1+v)^2}{v} \tag{21}$$

Multiplicando 8 por 7,

$$\begin{aligned} e^{2g+2K'} &= (e^{2K+h}+e^{-2K-h})(e^{2K-h}+e^{-2K+h}) \\ &= \frac{(1+uv)(v+u)}{uv}. \end{aligned} \tag{22}$$

Por último, dividiendo 21 por 22, obtenemos la ecuación para u'. Juntas, ambas son

$$u' = \frac{u(1+v)^2}{(1+uv)(v+u)} \tag{23}$$

$$v' = v\frac{v+u}{1+uv}. \tag{24}$$

Por inspección, podemos ver que los puntos $(0,0)$ y $(1,1)$ son puntos fijos. Estos corresponden a las fases ordenada ($T = 0$) y desordenada ($T = \infty$), respectivamente. Además, si $v^* = 1$, que correspondería a campo nulo, tenemos

$$u^* = \frac{4u^*}{(1+u^*)^2}, \tag{25}$$

cuyas soluciones son $u^* = 0$ y $u^* = 1$. Por lo tanto $(0, 1)$ es también un punto fijo. Por otro lado, si $u^* = 1$, cualquier valor de v entre 0 y 1 es solución, por lo que $(1, v)$ es una línea cítica.