Problema 1: Decimación

Modelo de Ising unidimencional:

$$\mathcal{H} = K \sum_i s_i s_{i+1} + h \sum_i s_i, \tag{1}$$

donde $\mathcal{H} \equiv -\beta H$, $K \equiv \beta J$ y $h \equiv \beta B$.

Tomamos bloques de Kadanoff de dos sitios, de los cuales decimamos uno de los sitios. Llamamos S_i a las variables de bloque, y σ_i a las variables correspondientes a los sitios decimados. El hamiltoniano entonces puede ser escrito como

$$\mathcal{H} = K \sum_i \sigma_i (S_i + S_{i+1}) + \frac{h}{2} \sum_i (S_i + S_{i+1}) + h \sum_i \sigma_i. \tag{2}$$

Suponemos que, al renormalizar, no hay proliferación de interacciones, por lo que podemos proponer un hamiltoniano renormalizado de la forma

$$\mathcal{H}' = K' \sum_i S_i S_{i+1} + \frac{h'}{2} \sum_i (S_i + S_{i+1}). \tag{3}$$

Recordemos que, para el caso de decimación, la transformación de normalización está dada por

$$e^{\mathcal{C} + \mathcal{H}'(S)} = \sum_{\{\sigma\}} e^{\mathcal{H}(S,\sigma)}, \tag{4}$$

donde $\mathcal{C} = Ng(K,h)$ es la constante de normalización y $g(K,h)$ es una función intensiva de los parámetros.

En este caso,

$$e^{\mathcal{C} + \mathcal{H}'(s')} = \prod_i \exp\left[K' S_i S_{i+1} + \frac{h'}{2}(S_i + S_{i+1}) + g\right] \tag{5}$$

y

$$\begin{aligned}
\sum_{\{\sigma\}} e^{\mathcal{H}(s,\sigma)} &= \prod_i \sum_{\sigma = \pm 1} \exp\left[K\sigma_i (S_i + S_{i+1}) + \frac{h}{2}(S_i + S_{i+1}) + h\sigma_i\right] \\
&= \prod_i 2 e^{\frac{h}{2}(S_i + S_{i+1})} \cosh\left[K(S_i + S_{i+1}) + h\right]
\end{aligned}$$

Igualando las dos expresiones anteriores, tenemos

$$\exp\left[K' S_i S_{i+1} + \frac{h'}{2}(S_i + S_{i+1}) + g\right] = e^{\frac{h}{2}(S_i + S_{i+1})} \cosh\left[K(S_i + S_{i+1}) + h\right], \tag{6}$$

para cada bloque i.
Evaluando para cada combinación de spines, tenemos las relaciones

$$e^{g+K'+h'} = 2e^{h}\cosh(2K+h) \tag{7}$$
$$e^{g+K'-h'} = 2e^{-h}\cosh(2K-h) \tag{8}$$
$$e^{g-K'} = 2\cosh(h) \tag{9}$$

En el caso $h=0$, tenemos que $h'=0$. Resolviendo para K',

$$K'(K) = \frac{1}{2}\ln\left[\cosh(2K)\right] \tag{10}$$
$$g(K) = \ln(2) + K'(K) \tag{11}$$

La expresión 10 se puede simplificar mediante el cambio de variables

$$t = \tanh(K) \tag{12}$$
$$t' = \tanh(K'), \tag{13}$$

y teniendo en cuenta la identidad

$$z = \tanh\left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{z+1}{z-1}\right)\right]. \tag{14}$$

De 10, tenemos que

$$t' = \tanh(K') = \tanh\left[\frac{1}{2}\ln\left[\cosh(2K)\right]\right], \tag{15}$$

por lo que se deduce que

$$\begin{aligned} \frac{t'+1}{t'-1} &= \cosh(2K) \\ &= \frac{\frac{t+1}{t-1} + \frac{t-1}{t+1}}{2} \\ &= \frac{t^2+1}{(t^2-1)}. \end{aligned} \tag{16}$$

Simplificando la expresión anterior, obtenemos la relación de recurrencia

$$t' = t^2. \tag{17}$$

La relación 17 indica que hay dos puntos fijos: $t^* = 0$, que es estable y $t^* = 1$, que es inestable. Estos corresponden a $K = 0$ (temperatura infinita) y

$K = \infty$ (temperatura cero). Es decir que el modelo precice una transición de fase a temperatura idénticamente cero.

El exponente crítico ν, asociado a la divergencia de la longitud de correlación, puede calcularse mediante $\nu = y_T^{-1}$, donde

$$y_T = \frac{\ln\left(\left.\frac{\partial K'}{\partial K}\right|_{K_c}\right)}{\ln(b)}. \tag{18}$$

En este caso,

$$\left.\frac{\partial K'}{\partial K}\right|_{K_c} = \tanh(2K_c) = 1, \tag{19}$$

por lo que $\nu = \infty$

Analizamos ahora el caso $h > 0$.