

# **Curvas y Superficies**

## **en Análisis II y Matemática 3**

Gabriel Acosta y Noemí Wolanski



## Índice general

Preliminares	5
Capítulo 1. Curvas	7
1. El concepto de curva	7
2. Recta Tangente y Suavidad	10
3. (*) Suavidad Geométrica	15
Ejercicios	17
4. Longitud de una curva	19
5. (*) Fórmula de Longitud	22
Ejercicios	25
6. Integral de longitud de arco	26
Ejercicios	28
7. Integrales curvilíneas	29
Ejercicios	32
Capítulo 2. Superficies “En Construcción...en breve estará disponible”	35
Bibliografía	37



## Preliminares

En estas notas se presentan los temas de curvas, superficies e integrales sobre curvas y superficies como se darían en un primer curso para alumnos de Análisis II / Matemática 3 en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la UBA.

Se trata de presentar los temas sin un exagerado formalismo pero sin perder las ideas geométricas subyacentes.

Por lo tanto, se trata de evitar identificar una curva o una superficie con una parametrización de la misma. Del mismo modo, se busca que las definiciones de recta (resp. plano) tangente sean intrínsecas a la curva (resp. superficie). De todos modos, las veces en que mantener el criterio geométrico ha resultado conceptualmente costoso, se ha optado por apartarlo en una sección señalada con (\*) y de lectura optativa o bien pertinente para una segunda aproximación al texto. Con ese criterio, el mismo símbolo es utilizado para otros temas optativos en general.

En el caso de curvas, siguiendo el libro de Apostol [1] se define rectificabilidad y longitud de una curva en forma intrínseca y se prueba la fórmula que permite calcular la longitud a partir de una parametrización.

Con la misma lógica, se define la integral con respecto a longitud de arco de una función continua, y correspondientemente, la integral curvilínea de un campo en forma intrínseca a partir de motivaciones físicas sobre el interés de estos cálculos. Las fórmulas para el cálculo utilizando parametrizaciones es una consecuencia inmediata de las definiciones y de las fórmulas para la longitud.

En el caso de superficies, se define el plano tangente en forma intrínseca y luego se obtiene su ecuación a partir de una parametrización. El cálculo del área se sugiere hacerlo utilizando una parametrización siguiendo, por ejemplo, el libro de Marsden y Tromba [3].

Como en el caso de curvas, una vez que se tiene una forma de calcular el área, las definiciones de integral de superficie de una función continua y de flujo de un campo a través de una superficie se realizan a partir de aplicaciones físicas y puede hacerse de manera ‘bastante’ intrínseca.

Agregamos en cada capítulo los ejercicios que se sugieren a los alumnos sobre estos temas.

El curso concluye con los Teoremas del Cálculo Integral (Green, Stokes y Gauss) y aplicaciones al modelado de fenómenos de la física (Ley de conservación de masa, Ecuación del Calor, Ecuaciones de Maxwell). No incluimos estos temas que están muy bien expuestos en [3].



## Capítulo 1

# Curvas

Si bien muchos de los conceptos presentados en este capítulo son coherentes en  $\mathbb{R}^n$ , en vista de las aplicaciones que nos van a interesar asumiremos en todo momento que  $n = 2$  o  $n = 3$ .

### 1. El concepto de curva

Una curva  $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$  es un conjunto de puntos en el plano (si  $n = 2$ ) o en el espacio (si  $n = 3$ ) que puede describirse mediante un parámetro que varía en forma continua en un intervalo cerrado y acotado de la recta. Más precisamente definimos:

**DEFINICIÓN 1.1.**  $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$  es una curva si existe una función continua  $\sigma(t)$ , denominada una “parametrización de  $\mathcal{C}$ ”, definida en algún intervalo  $[a, b]$

$$\sigma : [a, b] \rightarrow \mathcal{C},$$

tales que  $P \in \mathcal{C}$  si y sólo si existe  $t \in [a, b]$  tal que  $\sigma(t) = P$ .

**OBSERVACIÓN 1.** En vista de la definición previa, toda vez que usemos el término parametrización para una función  $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathcal{C}$ , se asumirá que es continua y suryectiva (es decir que la imagen de  $\sigma$  es  $\mathcal{C}$ ).

**OBSERVACIÓN 2.** Notar que la continuidad de  $\sigma$  en la definición anterior implica la continuidad de todas sus coordenadas (de hecho es equivalente). Por ejemplo, si  $n = 3$  y  $\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))$  entonces las funciones  $x(t), y(t), z(t)$  definidas en  $[a, b]$  resultan continuas.

**OBSERVACIÓN 3.** Con esta definición una curva resulta ser siempre acotada. Es decir que está contenida en una bola de radio suficientemente grande. Esto se demuestra fácilmente notando que todas las coordenadas están acotadas por ser funciones continuas definidas sobre un intervalo compacto.

En la Figura 1 vemos la curva que puede definirse por la parametrización

$$\sigma(t) = (\cos(3t), \sin(3t), t),$$

con  $\sigma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Notemos que la misma curva puede parametrizarse trivialmente de otras formas. Por ejemplo

$$\tilde{\sigma}(t) = (\cos(t), \sin(t), t/3),$$

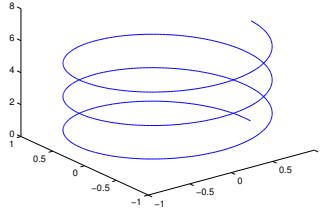


FIGURA 1. Una curva  $\mathcal{C}$  que admite una parametrización de la forma  $\sigma(t) = (\cos(3t), \sin(3t), t)$ , con  $\sigma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

con  $\tilde{\sigma}$  definida en  $[0, 6\pi]$ , o

$$\hat{\sigma}(t) = (\cos(3t^2), \sin(3t^2), t^2),$$

con  $\hat{\sigma}$  definida en  $[0, \sqrt{2\pi}]$ .

Por su parte el ejemplo más simple de curva plana podría estar dado por el gráfico de una función continua. En efecto, si tenemos  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua, su gráfico

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x) \text{ y } x \in [a, b]\},$$

es una curva que admite una parametrización  $\sigma(x) = (x, f(x))$ ,  $\sigma$  definida en  $[a, b]$ .

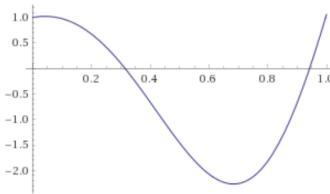


FIGURA 2. Una curva  $\mathcal{C}$  que es el gráfico de una función continua  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , parametrizada como  $\sigma(t) = (t, f(t))$ , con  $\sigma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$ .

**DEFINICIÓN 1.2.** Una curva  $\mathcal{C}$  se dice “simple, abierta” si no se corta a si misma. Más precisamente, si admite una parametrización  $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$  ( $n = 2, 3$ ) que es inyectiva en  $[a, b]$ .

**DEFINICIÓN 1.3.** Una curva  $\mathcal{C}$  se dice “simple, cerrada” si admite una parametrización  $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$  ( $n = 2, 3$ ) que es inyectiva en  $[a, b]$  y con  $\sigma(a) = \sigma(b)$ .

Ejemplos de curvas simples abiertas pueden verse en las Figuras 1 y 2. En la Figura 3 vemos ejemplos sencillos de curvas cerradas simples. En el caso de la Cardiodie, la parametrización correspondiente puede tomarse como

$$(1.1) \quad x(t) = (1 - \cos(t))\cos(t) \quad y(t) = (1 - \cos(t))\sin(t) \quad t \in [0, 2\pi].$$

Obviamente una curva puede no ser abierta ni cerrada (Figura 4). En este sentido podría pensarse que focalizar nuestra atención en curvas abiertas y cerradas es muy restrictivo. Sin

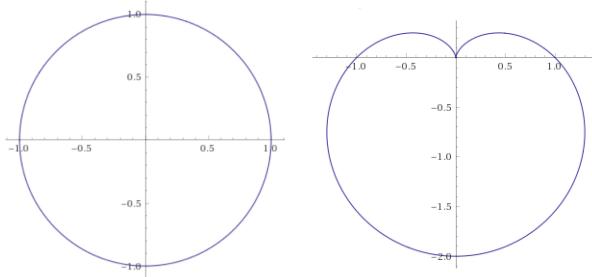
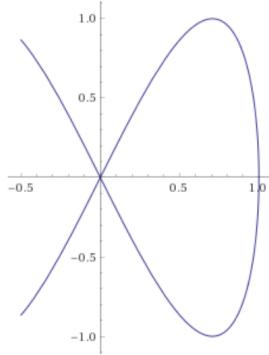


FIGURA 3. Curvas cerradas simples: Círculo y Cardiodie

embargo en la aplicaciones que tenemos en mente a lo largo de este apunte cualquier curva puede escribirse como union finita de curvas abiertas y/o cerradas que se intersecan -de a dos en dos- a lo sumo en un solo punto.

FIGURA 4.  $\sigma(t) = (\cos(t), \sin(2t))$  con  $t \in [-2\pi/3, 2\pi/3]$ 

La propia definición de curva admite que podamos, en algunas circunstancias, concatenar mas de una curva para obtener una nueva. Por ejemplo, si  $\sigma_1 : [a, b] \rightarrow \mathcal{C}_1$  y  $\sigma_2 : [b, c] \rightarrow \mathcal{C}_2$  son parametrizaciones de dos curvas  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$  tales que  $\sigma_1(b) = \sigma_2(b)$  entonces  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$  es una curva que de hecho admite una parametrización dada por la función partida (y continua)  $\sigma(t) : [a, c] \rightarrow \mathcal{C}$  dada por

$$\sigma(t) = \begin{cases} \sigma_1(t), & \text{si } t \in [a, b] \\ \sigma_2(t), & \text{si } t \in [b, c] \end{cases} .$$

**OBSERVACIÓN 4.** *La descripción de una curva a través de un parámetro no es la única posible. Por ejemplo, todos reconocemos una circunferencia en la ecuación  $x^2 + y^2 = 1$  (asumiendo que  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ )<sup>a</sup>. ¿Puede reconocer a cuál de las curvas graficadas en esta sección representa la ecuación  $(x + x^2 + y^2)^2 = (x^2 + y^2)$ ?*

<sup>a</sup>Probablemente el lector reconozca que aquí el teorema de la función implícita juega un rol a la hora de probar la existencia de una parametrización posible -al menos en un entorno de un punto- para curvas dadas como curvas de nivel  $f(x, y) = c$ .

OBSERVACIÓN 5. (\*) Se pueden definir curvas de otros modos alternativos -que no estudiaremos en este apunte- con la intención de construir objetos matemáticos más complejos. Como ejemplo consideremos un segmento unitario (de longitud 1) en  $\mathbb{R}^2$  (Figura 5) de este segmento recortamos el tercio central y agregamos dos segmentos de longitud  $1/3$  de modo de obtener una suerte de tienda (Figura 6). Repitiendo este proceso indefinidamente obtenemos una curva muy compleja llamada cristal de Koch. En la Figura 7 vemos algunas iteraciones de este proceso.

FIGURA 5. Segmento unitario

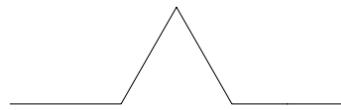


FIGURA 6. Primera iteración

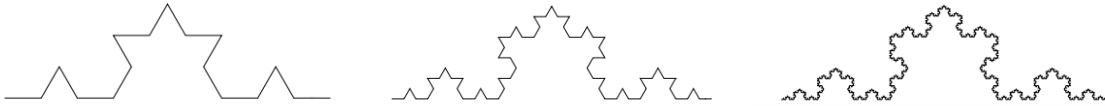


FIGURA 7. Iteraciones 2, 3 y 5.

## 2. Recta Tangente y Suavidad

DEFINICIÓN 1.4. Sea  $\mathcal{C}$  una curva,  $P_0 \in \mathcal{C}$ . Una recta  $L$  por  $P_0$  se llama tangente a  $\mathcal{C}$  en  $P_0$  si es el límite de las rectas secantes a  $\mathcal{C}$  por  $P_0$ . Estas son las rectas que pasan por  $P$  y  $P_0$  con  $P \in \mathcal{C}$ . El límite se entiende en el sentido de que el ángulo (entre 0 y  $\pi/2$ ) entre  $L$  y la secante por  $P_0$  y  $P$  tiende a 0 cuando  $P$  se acerca a  $P_0$  con  $P \in \mathcal{C}$ .

La definición anterior es puramente geométrica y no dice cómo hacer para hallar la recta tangente de un modo general. Para obtener un criterio analítico veamos primero el siguiente lema.

LEMA 1.1. *Sea  $\mathcal{C}$  es una curva que admite una parametrización  $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  ( $n = 2, 3$ ) con  $\sigma \in C([a, b])$  inyectiva y  $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{C}$  una sucesión de puntos en  $\mathcal{C}$  con  $\sigma(t_n) = P_n$  y  $t_n \in [a, b]$ . Si  $P_n \rightarrow P_0 \in \mathcal{C}$ , entonces  $t_n \rightarrow t_0$  donde  $\sigma(t_0) = P_0$ .*

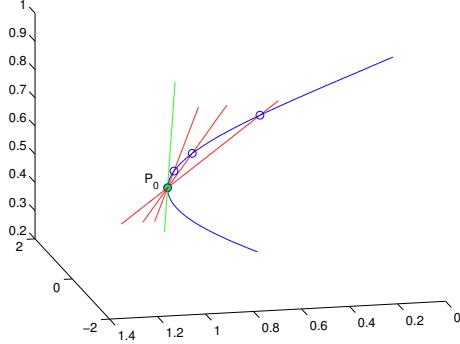


FIGURA 8. Recta tangente por  $P_0$  y algunas secantes por  $P_0$  y distintos  $P$ . Los diferentes  $P$  han sido tomados de un solo "lado" de  $P_0$  solo por claridad gráfica.

**DEMOSTRACIÓN.** Ante todo notemos que los  $t_n$  son únicos gracias a la inyectividad de  $\sigma$ . Queremos ver que  $t_n \rightarrow t_0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Si no fuera así, existiría  $\varepsilon_0 > 0$  y una subsucesión  $t_{n_k}$  tales que

$$(1.2) \quad |t_{n_k} - t_0| > \varepsilon_0.$$

Veamos que llegamos a un absurdo. En efecto, como la sucesión  $\{t_{n_k}\}$  está acotada tiene algún punto de acumulación. Es decir, existe  $t^* \in [a, b]$  y una subsucesión  $t_{n_{k_j}}$  tales que

$$t_{n_{k_j}} \rightarrow t^* \quad (j \rightarrow \infty).$$

Como  $\sigma$  es continua se tiene que  $P_{n_{k_j}} = \sigma(t_{n_{k_j}}) \rightarrow \sigma(t^*)$  cuando  $j \rightarrow \infty$ . Pero entonces  $\sigma(t^*) = P_0$ . Como  $t_0$  era el único punto del intervalo  $[a, b]$  cuya imagen por  $\sigma$  es  $P_0$  se sigue que  $t^* = t_0$ . Pero esto contradice (1.2).  $\square$

**PROPOSICIÓN 2.1.** *Si  $\mathcal{C}$  es una curva que admite una parametrización*

$$\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

*con  $\sigma \in C([a, b])$ , inyectiva, diferenciable en  $t_0 \in [a, b]$  y tal que  $\sigma'(t_0) := (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)) \neq (0, 0, 0)$ , se sigue que  $\mathcal{C}$  tiene recta tangente en el punto  $P_0 = \sigma(t_0)$  y esta recta tiene la dirección del vector  $\sigma'(t_0)$ .*

*En particular, la tangente puede escribirse en forma vectorial, como*

$$L_{P_0} \equiv \lambda \frac{\sigma'(t_0)}{\|\sigma'(t_0)\|} + P_0$$

**DEMOSTRACIÓN.** Sea  $P_n \rightarrow P_0$  con  $P_n \in \mathcal{C}$  para todo  $n$ . Llamemos  $S_{P_n, P_0}$  a la recta secante por  $P_n$  y  $P_0$ . Gracias al Lema 1.1 sabemos que  $t_n \rightarrow t_0$  donde  $\sigma(t_n) = P_n$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ . Veamos que  $S_{P_n, P_0}$  tiende a  $L_{P_0}$ , la recta por  $P_0$  con dirección  $\sigma'(t_0)$ . En efecto,  $S_{P_n, P_0}$  tiene la dirección del vector

$$\sigma(t_n) - \sigma(t_0).$$

También genera la misma recta el vector

$$\tau_n := \frac{1}{t_n - t_0} (\sigma(t_n) - \sigma(t_0))$$

que converge al vector  $\sigma'(t_0)$ .

Como  $\sigma'(t_0) \neq 0$ , se tiene que  $\frac{\tau_n}{\|\tau_n\|} \rightarrow \frac{\sigma'(t_0)}{\|\sigma'(t_0)\|}$  con lo cuál

$$\alpha(P_n) := \text{el ángulo entre las rectas } S_{P_n, P_0} \text{ y } L_{P_0} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

□

La Proposición 2.1 indica que la diferenciabilidad de la parametrización implica la existencia de recta tangente. Nos interesa ahora el concepto de *suavidad* de una curva. Intuitivamente pensamos en curvas que no poseen aristas o rugosidades. En el caso de funciones de una variable  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  este concepto se asocia a la regularidad de las funciones. Con esa idea en mente vamos a definir *parametrización regular*. Por una cuestión que quedará claro en breve debemos distinguir los casos de curvas abiertas y cerradas.

**DEFINICIÓN 1.5.** Una parametrización  $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ , con  $n = 2, 3$ , de clase  $C^1([a, b])$  con  $\sigma'(t) \neq (0, 0, 0)$  para todo  $t \in [a, b]$  y que cumple una de las siguientes condiciones

1.  $\sigma$  es inyectiva en  $[a, b]$
2.  $\sigma$  es inyectiva en  $[a, b]$ ,  $\sigma(a) = \sigma(b)$  y  $\sigma'(a) = \sigma'(b)$  (derivadas laterales).

se denomina *parametrización regular* de un curva abierta o cerrada respectivamente.

**OBSERVACIÓN 6.** Es fácil ver que en la definición se puede cambiar  $\sigma'(a) = \sigma'(b)$  por “ $\sigma'(a)$  y  $\sigma'(b)$  linealmente dependientes”, sin embargo esto requiere una demostración que haremos oportunamente.

**DEFINICIÓN 1.6 (Curva Suave).** Una curva  $\mathcal{C}$ , abierta o cerrada, que admite una parametrización regular se dice *suave*.

**OBSERVACIÓN 7.** Para ver la implicación de esta definición notemos que si  $\mathcal{C}$  es suave entonces tiene recta tangente en todos sus puntos (por Proposición 2.1) y además las rectas tangentes se mueven con continuidad a lo largo de  $\mathcal{C}$ . Si bien esta afirmación es poco formal podemos aclararla en este sentido. Sea  $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathcal{C}$  una parametrización regular y  $\{P_n\} \subset \mathcal{C}$  una sucesión de puntos  $P_n \rightarrow P_0$ . Como vimos, las rectas tangentes por los puntos  $P_n = \sigma(t_n)$  puede escribirse como

$$L_{P_n} = \lambda \frac{\sigma'(t_n)}{\|\sigma'(t_n)\|} + P_n.$$

Gracias al Lema 1.1, sabemos que  $t_n \rightarrow t_0$  y usando que  $\sigma$  es regular se tiene que

$$\frac{\sigma'(t_n)}{\|\sigma'(t_n)\|} \rightarrow \frac{\sigma'(t_0)}{\|\sigma'(t_0)\|}.$$

En ese sentido podemos interpretar  $L_{P_n}$  tiende a  $L_{P_0}$ .

Veamos algunos ejemplos. En el primer caso estudiamos la curva dada por (Figura 9)

$$\sigma(t) = (t, |t|) \quad t \in [-1, 1].$$

Notar que la regularidad falla por no ser siquiera diferenciable  $\sigma$  en  $t = 0$ . Por otro lado ese hecho *no prueba* que la curva resultante no sea suave<sup>1</sup>. Para ahondar en este aspecto consideremos la curva de parametrización

$$\sigma(t) = (t, t^2) \quad t \in [-1, 1],$$

que resulta trivialmente suave por la definición y sin embargo puede también parametrizarse usando la función signo como

$$\sigma(t) = (sg(t)\sqrt{|t|}, |t|) \quad t \in [-1, 1],$$

que claramente no es regular.

En la Figura 10 vemos una curva dada por una parametrización  $C^1$  que sin embargo *no* es regular. Claramente en  $t = \pi/2$  falla la regularidad de  $\sigma$  por ser allí  $\sigma'(\pi/2) = 0$ .

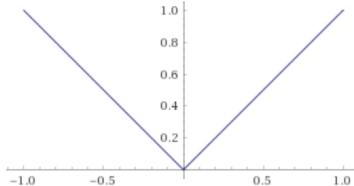


FIGURA 9. Curva con parametrización  $\sigma(t) = (t, |t|)$  definida en  $[-1, 1]$ .

Ejemplos de curvas cerradas pueden verse en la Figura 3. La parametrización trivial del círculo  $\sigma(t) = (\cos(t), \sin(t))$  con  $t \in [0, 2\pi]$  prueba que se trata de una curva suave. Por otro lado la parametrización de la Cardiodie dada por (1.1) no es regular (*¿por qué?*) y de hecho

<sup>1</sup>Para garantizar  $\mathcal{C}$  no sea suave hay que probar que no existe *ninguna* parametrización regular de  $\mathcal{C}$ . Eso puede hacerse fácilmente por el absurdo, tomando puntos en  $\mathcal{C}$  a izquierda y derecha del  $(0, 0)$  y usando la Observación 7.

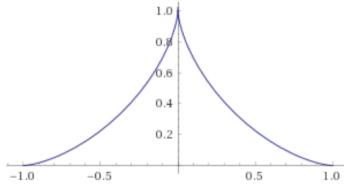


FIGURA 10. Curva con parametrización  $\sigma(t) = (\cos^3(t), \sin^3(t))$  definida en  $[0, \pi]$  que no es regular pero sí es  $C^1$ .

puede verse que no admite ninguna parametrización regular (¿por qué?)<sup>2</sup>, es decir que no es suave.

EJEMPLO 1.1 (Una aplicación física). *Hasta ahora hemos concentrado nuestra atención en las curvas como objetos geométrico. Un caso particular muy importante de curva es la que describe la trayectoria de una partícula. Si llamamos  $\sigma(t)$  a la posición de la partícula en el instante  $t \in [t_0, t_1]$ ,  $\sigma$  resulta la parametrización de una curva con el tiempo como parámetro (en mecánica clásica la partícula no puede describir una trayectoria discontinua). En este caso, el vector  $\sigma'(t)$  se denomina vector velocidad y da la variación instantánea de la posición en función del tiempo. Da además la dirección y sentido de recorrido de la partícula al pasar por el punto  $\sigma(t)$  en el instante  $t$ . Su magnitud -o sea  $\|\sigma'(t)\|$ - da la rapidez con la que se mueve la partícula (en la siguiente sección aclararemos el porqué de este nombre).*

*Aunque la función  $\sigma'$  no corresponda a la trayectoria de una partícula posee un claro sentido físico. Siguiendo con esta analogía el vector  $\sigma''(t)$  da la variación instantánea de la velocidad y se lo denomina vector aceleración.*

EJEMPLO 1.2 (Una aplicación gráfica). *En la práctica es común el uso de curvas en los programas de diseño gráfico. Una herramienta sencilla para generar curvas suaves se basa en concatenar curvas dadas por parametrizaciones hechas por polinomios cúbicos (la parametrización final se denomina spline cúbico). En la Figura 11 vemos una "S" generada por cinco pares (uno para cada coordenada) de polinomios cúbicos. Es decir que  $\sigma : [0, 5] \rightarrow \mathcal{C}$  y la restricción de  $\sigma$  a los intervalos de la forma  $[i, i + 1]$  con  $0 \leq i \leq 4$  tiene coordenadas polinomiales (de grado 3). En la Figura 12 pueden verse los puntos en donde se "pegan" con suavidad las distintas parametrizaciones. Analógicamente, en la Figura 13 capturamos las coordenadas de algunos puntos que sigan la trayectoria de una clave de sol y la "codificamos" hallando una curva suave que pase por esos puntos. En este ejemplo capturamos 23 puntos y mostramos la curva final compuesta por 22 parametrizaciones consecutivas.*

Antes de finalizar esta sección definamos el concepto de reparametrización.

DEFINICIÓN 1.7. Sea  $\mathcal{C}$  una curva abierta, simple, suave. Sea  $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  una parametrización regular de  $\mathcal{C}$ . Sea  $h : [a, b] \rightarrow [c, d]$  una biyección  $C^1$  con  $h'(t) \neq 0$  para todo  $t \in [a, b]$ . Sea  $\tilde{\sigma} : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por  $\tilde{\sigma}(\tau) = \sigma(h^{-1}(\tau))$ . Entonces,  $\tilde{\sigma}$  es una parametrización regular de  $\mathcal{C}$ . Decimos que  $\tilde{\sigma}$  es una "reparametrización de  $\sigma$ ".

<sup>2</sup>En la siguiente sección se indica un modo de dar una demostración indirecta de este hecho

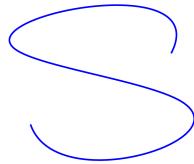


FIGURA 11. Construcción tipográfica: creamos una “S” que podríamos usar en un nuevo formato caligráfico.

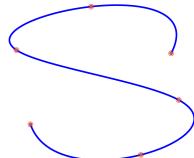


FIGURA 12. Puntos donde la parametrización cambia de definición



FIGURA 13. Capturamos algunos puntos de una “clave de sol” (izquierda), detalle de los puntos (centro) y construimos una curva suave que pase por ellos (derecha).

### 3. (\*) Suavidad Geométrica

La definición de recta tangente es puramente geométrica, sin embargo la definición de suavidad esta dada en términos de una parametrización. Definir suavidad en términos puramente geométricos es posible con un poco mas de esfuerzo. Al nuevo concepto, para distinguirlo del ya definido, lo llamaremos *suavidad geométrica*.

**DEFINICIÓN 1.8.** Una curva se dice “geométricamente suave” si tiene recta tangente en todos sus puntos y la secante por dos puntos  $P, Q$  de la curva tiende a la tangente en  $P_0$  cuando  $P, Q \rightarrow P_0$ .

Más precisamente, llamamos  $L_P$  a la tangente en el punto  $P \in \mathcal{C}$ . Escribamos  $L_P = P + L'_P$  donde  $L'_P$  es una recta por el origen. En forma similar, escribamos la secante por  $P, Q$  como  $S_{P,Q} = P + S'_{P,Q}$  con  $S'_{P,Q}$  una recta por el origen. Decimos que  $S_{P,Q}$  tiende a  $L_{P_0}$  cuando  $P, Q \rightarrow P_0$  si  $S'_{P,Q} \rightarrow L'_{P_0}$ .

**PROPOSICIÓN 3.1.** *Si  $\mathcal{C}$  es una curva abierta suave (según la Definición 1.5) entonces es  $\mathcal{C}$  es geométricamente suave.*

**DEMOSTRACIÓN.** Observemos que como  $\mathcal{C}$  es suave admite una parametrización regular, esto es  $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  inyectiva, de clase  $C^1([a, b])$  con  $\sigma'(t) \neq (0, 0, 0)$  para todo  $t \in [a, b]$ . Sean  $P, Q \in \mathcal{C}$  y  $S_{P,Q}$  la secante por  $P, Q$ . Sean  $t, s \in [a, b]$  los únicos tales que  $P = \sigma(t)$ ,  $Q = \sigma(s)$ . Supongamos que  $t > s$ . Sabemos que  $S'_{P,Q}$  tiene la dirección del vector

$$\tau(P, Q) = \sigma(t) - \sigma(s).$$

Por otro lado,  $L'_{P_0}$  tiene la dirección del vector  $\tau_0 = \sigma'(t_0)$  donde  $t_0$  es el único tal que  $P_0 = \sigma(t_0)$ .

Como vimos en el Lema 1.1,  $P, Q \rightarrow P_0$  si y sólo si  $t, s \rightarrow t_0$ .

Por otro lado, si llamamos  $\tau_i(P, Q)$  a la componente  $i$ -ésima del vector  $\tau(P, Q)$  tenemos

$$\tau_i(P, Q) = \int_s^t \sigma'_i(r) dr.$$

Observemos que  $S_{P,Q}$  también tiene la dirección del vector  $\frac{\tau(P, Q)}{t-s}$ . Tenemos,

$$\frac{\tau_i(P, Q)}{t-s} = \frac{1}{t-s} \int_s^t \sigma'_i(r) dr = \sigma'_i(r_i)$$

para un  $r_i$  entre  $t$  y  $s$ . Por lo tanto, como  $\sigma'_i$  es una función continua,

$$\frac{\tau(P, Q)}{t-s} \rightarrow \sigma'(t_0) \quad \text{cuando } P, Q \rightarrow P_0.$$

Como  $\sigma'(t_0) \neq 0$  se sigue que

$$\frac{\tau(P, Q)}{\|\tau(P, Q)\|} \rightarrow \frac{\sigma'(t_0)}{\|\sigma'(t_0)\|}.$$

Por lo tanto,  $S_{P,Q} \rightarrow L_{P_0}$  cuando  $P, Q \rightarrow P_0$ . □

**PROPOSICIÓN 3.2.** *Si  $\mathcal{C}$  es una curva cerrada simple suave, entonces  $\mathcal{C}$  es geométricamente suave.*

**DEMOSTRACIÓN.** La demostración sigue las líneas de las demostraciones de las Proposiciones 2.1 y 3.1. Para ver que se tiene recta tangente en todos los puntos procedemos como en la demostración de la Proposición 2.1. Sólo encontramos una diferencia si  $P_0 = \sigma(a) = \sigma(b)$ . En este caso podría suceder (siguiendo la nomenclatura de la Proposición 2.1) que  $t_0 = a$  y  $t^* = b$  o viceversa.

Análogamente, para ver que es suave, la única diferencia se da en el caso en que  $P_0 = \sigma(a) = \sigma(b)$ . En este caso, si  $P = \sigma(t)$  y  $Q = \sigma(s)$  con  $P, Q \rightarrow P_0$ , podría ser que  $t \rightarrow a$  y  $s \rightarrow b$ .

Para tratar esta posibilidad, extiendo  $\sigma$  al intervalo  $[b, b + (b - a)]$  como función periódica de período  $b - a$  de la siguiente manera:  $\sigma(r) = \sigma(r - (b - a))$  si  $r \in [b, b + (b - a)]$ .

Es fácil ver que como  $\sigma(a) = \sigma(b)$  y  $\sigma'(a) = \sigma'(b)$ , la función  $\sigma$  así definida en el intervalo  $[a, b + (b - a)]$  es de clase  $C^1$ .

A partir de aquí la demostración sigue exactamente como en las Proposiciones 2.1 y 3.1 escribiendo  $P = \sigma(t) = \sigma(t + (b - a))$  y observando que  $t + (b - a) \rightarrow b$  si  $t \rightarrow a$ .  $\square$

Como ejemplo interesante puede probar que la Cardioide *no* es geométricamente suave y en consecuencia tampoco es suave.

### Ejercicios

#### EJERCICIO 1.1.

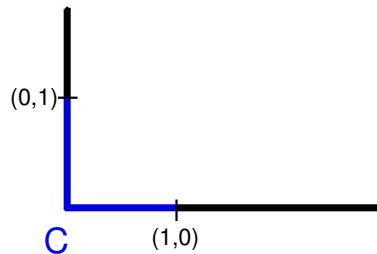
1. Probar que

$$\begin{cases} x_1(t) = r \cos 2\pi t & 0 \leq t \leq 1 \\ y_1(t) = r \sin 2\pi t & \end{cases} \quad \begin{cases} x_2(t) = r \cos 4\pi t & 0 \leq t \leq 1 \\ y_2(t) = r \sin 4\pi t & \end{cases}$$

son dos parametrizaciones  $C^1$  de la circunferencia de centro  $(0, 0)$  y radio  $r$ .

2. Probar que la circunferencia es una curva cerrada, simple, suave.
3. Probar que  $\sigma_2(t) = (x_2(t), y_2(t))$ ,  $t \in [0, 1]$  no es una parametrización regular.

EJERCICIO 1.2. Considerar la curva  $\mathcal{C}$  formada por los segmentos que unen el  $(0, 1)$  con el  $(0, 0)$  y el  $(0, 0)$  con el  $(1, 0)$ .



Probar que

$$\sigma(t) := \begin{cases} (0, (1-t)^2), & \text{si } 0 \leq t \leq 1, \\ ((t-1)^2, 0), & \text{si } 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

es una parametrización  $C^1$  de la curva  $\mathcal{C}$ .

Observar que  $\mathcal{C}$  no tiene recta tangente en el  $(0, 0)$ . ¿Por qué no hay contradicción?

EJERCICIO 1.3. Sea  $\sigma(t) = (t^3, t^3)$  con  $-1 \leq t \leq 1$ . Probar que  $\sigma$  es una parametrización  $C^1$  del segmento  $y = x$ ,  $-1 \leq x \leq 1$  que es una curva suave.

Observar que  $\sigma'(0) = (0, 0)$ .

EJERCICIO 1.4. Sea  $\mathcal{C}$  el arco de parábola  $y = x^2$  con  $0 \leq x \leq 1$ .

1. Probar que  $\mathcal{C}$  es una curva abierta, simple, suave
2. Probar que  $\bar{\sigma}(s) := (\bar{x}(s), \bar{y}(s))$  dada por

$$\begin{cases} \bar{x}(s) = e^s - 1 \\ \bar{y}(s) = (e^s - 1)^2 \end{cases} \quad 0 \leq s \leq \ln 2$$

es una parametrización regular de  $\mathcal{C}$ .

3. Observar que  $\sigma(t) := (t, t^2)$  con  $t \in [0, 1]$  es otra parametrización regular.
4. Hallar una función  $g : [0, 1] \rightarrow [0, \ln 2]$  tal que  $\bar{\sigma}(g(t)) = \sigma(t)$  para todo  $t \in [0, 1]$ .

Observar que  $g$  es biyectiva y  $C^1$ .

EJERCICIO 1.5. Sea  $\mathcal{C}$  una curva cerrada, simple, suave y  $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  una parametrización regular de  $\mathcal{C}$ . Sean  $\bar{a} \in (a, b)$  y  $\bar{b} = \bar{a} + b - a$ . Consideremos la función  $\bar{\sigma} : [\bar{a}, \bar{b}] \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por

$$\bar{\sigma}(s) = \begin{cases} \sigma(s) & \text{si } s \in [\bar{a}, b], \\ \sigma(a + (s - b)) & \text{si } s \in [b, \bar{b}] \end{cases}$$

Probar que  $\bar{\sigma}$  es una parametrización regular de  $\mathcal{C}$  (que recorre la curva  $\mathcal{C}$  desde  $y$  hasta el punto  $\sigma(\bar{a})$ ).

Observar que la parametrización regular  $\bar{\sigma}$  se obtiene a partir de la parametrización regular  $\sigma$  por un cambio de parámetro (una biyección entre los intervalos de los parámetros correspondientes a las dos parametrizaciones) que no es ni siquiera continuo. Esto no es posible en el caso de curvas abiertas, simples, suaves.

EJERCICIO 1.6. Sea  $\mathcal{C}$  una curva simple, suave. Sea  $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  una parametrización regular de  $\mathcal{C}$ . Sea  $[a_1, b_1]$  un intervalo arbitrario. Consideremos la función  $\sigma_1 : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por

$$\sigma_1(s) = \sigma\left(a + \frac{b-a}{b_1-a_1}(s-a_1)\right).$$

Probar que  $\bar{\sigma}$  es una parametrización regular de  $\mathcal{C}$ .

Esto muestra que se puede utilizar cualquier intervalo como intervalo de parámetros. Sólo hay que ajustar la velocidad con la que se recorre la curva.

EJERCICIO 1.7. Determinar los vectores velocidad y aceleración, y la ecuación de la recta tangente para cada una de las curvas cuyas parametrizaciones se dan a continuación, en el valor especificado de  $t$ .

1.  $\sigma(t) = (6t, 3t^2, t^3)$ ,  $t = 0$
2.  $\sigma(t) = (\cos^2 t, 3t - t^3, t)$ ,  $t = 0$

3.  $\sigma(t) = (\sin 3t, \cos 3t, 2t^{\frac{3}{2}})$ ,  $t = 1$   
 4.  $\sigma(t) = (0, 0, t)$ ,  $t = 1$

EJERCICIO 1.8. ¿Qué fuerza actúa sobre una partícula de masa  $m$  en el instante  $t = 0$  si sigue la trayectoria dada por la función  $\sigma$  del Ejercicio 7.(1)?

EJERCICIO 1.9. Suponer que una partícula sigue la trayectoria  $\sigma(t) = (e^t, e^{-t}, \cos t)$  hasta que sale por una tangente en  $t = 1$ . Hallar la ubicación de la partícula en  $t = 2$ . Suponer que ninguna fuerza actúa sobre ella después del tiempo  $t = 1$ .

#### 4. Longitud de una curva

Básicamente, en lo cotidiano, solo sabemos medir longitudes lineales (o sea rectas). Aunque usemos un metro flexible, al final del día debemos reconocer que el metro utilizado fué originalmente tabulado por un patrón recto.

Ahora queremos entonces extender el concepto a objetos curvos. Mas específicamente: sea  $\mathcal{C}$  una curva abierta, simple ¿Cuál es su longitud?. Si aprendemos a medir longitudes de curvas abiertas simples podemos medir longitudes de curvas mas complejas pensando que son curvas concatenadas, por ese motivo no es una limitación estudiar este caso particular.

Sea  $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  una parametrización regular de  $\mathcal{C}$ . Sea  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$  una partición  $\pi$  de  $[a, b]$ . Esto induce una partición  $\mathcal{P}$  de la curva  $\mathcal{C}$  dada por los puntos  $P_n = \sigma(t_n)$ . Cuando querramos remarcar la relación entre ambas particiones usaremos la notación  $\mathcal{P}_\pi$  en vez de  $\mathcal{P}$ .

Observemos que siempre podemos pensar a los puntos  $P_n$  como vértices de una poligonal. Cuantos más puntos tenga, más parecida será la poligonal a la curva  $\mathcal{C}$ . La idea es que las longitudes de las poligonales tenderán a la longitud de  $\mathcal{C}$ .

Dada una partición  $\mathcal{P}$  de  $\mathcal{C}$ , llamemos  $|\Pi(\mathcal{P})|$  a la longitud de la poligonal que tiene como vértices los puntos de  $\mathcal{P}$ .

OBSERVACIÓN 1.1. Si  $\mathcal{P}'$  es una partición más fina, es decir, si todos los puntos de  $\mathcal{P}$  están contenidos en  $\mathcal{P}'$ , la longitud  $|\Pi(\mathcal{P}')|$  será mayor o igual a  $|\Pi(\mathcal{P})|$ . En efecto, si entre dos puntos consecutivos  $P_1$  y  $P_2$  de la partición  $\mathcal{P}$  tengo puntos  $S_1, S_2, \dots, S_k$  de la partición  $\mathcal{P}'$ , la longitud del segmento de extremos  $P_1$  y  $P_2$  es menor que

$$\|P_1 - S_1\| + \|S_1 - S_2\| + \dots + \|S_k - P_2\|$$

que es parte de la suma que da la longitud  $|\Pi(\mathcal{P}')|$ ; y por lo tanto la longitud de la poligonal correspondiente a  $\mathcal{P}'$  es mayor.

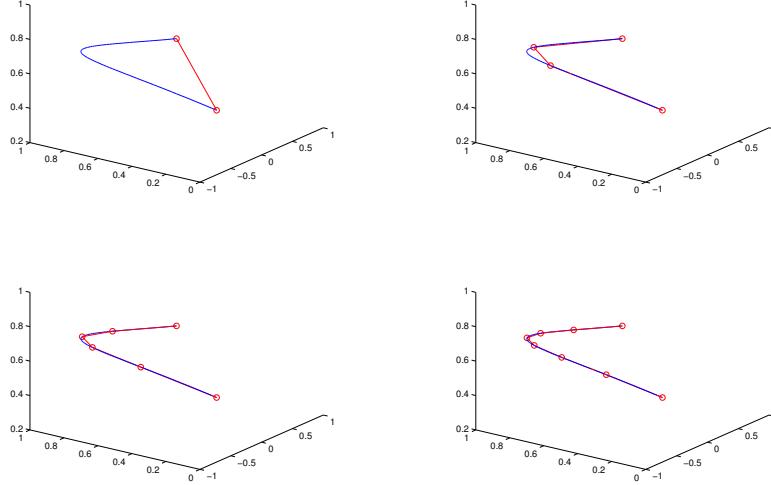


FIGURA 14. Cuatro aproximaciones poligonales con diferentes particiones  $\mathcal{P}$ . En cada caso se tiene  $|\Pi(\mathcal{P})|$  da respectivamente 2.02, 2.46, 2.50, 2.51. Como es de esperar las longitudes de las poligonales parecen “converger” a medida que aumentamos los segmentos de las poligonales.

**DEFINICIÓN 1.9.** Si existe una cota superior finita para las longitudes de todas las poligonales con vértices en la curva  $\mathcal{C}$  decimos que  $\mathcal{C}$  es “rectificable” y definimos la longitud de  $\mathcal{C}$  como la menor de esas cotas, es decir

$$\text{Long}(\mathcal{C}) := \sup \{ |\Pi(\mathcal{P})| ; \mathcal{P} \text{ partición de } \mathcal{C} \}.$$

**EJEMPLO 1.3.** (\*) Se puede ver que el cristal de Koch de la Observación 5, tiene longitud infinita (observe que cada iterado es una poligonal posible y calcule su longitud).

Notemos que si  $\mathcal{C}$  es abierta simple y suave podemos considerar una parametrización  $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathcal{C}$  regular. En ese caso tomando una partición  $\pi$  de  $[a, b]$  y  $\mathcal{P}_\pi$  observamos que

$$\Pi(\mathcal{P}_\pi) = \sum_{i=1}^N \|P_i - P_{i-1}\| = \sum_{i=1}^N \|\sigma(t_i) - \sigma(t_{i-1})\|.$$

De un modo *informal* notemos que si la norma de la partición  $|\pi| = \max_{1 \leq i \leq N} \{|t_i - t_{i-1}| \}$  es pequeña (es decir  $|\pi| \sim 0$ ) entonces, operando término a término, vemos que

$$\sigma(t_i) - \sigma(t_{i-1}) \sim \sigma'(t_{i-1})(t_i - t_{i-1}),$$

luego

$$\Pi(\mathcal{P}_\pi) \sim \sum_{i=1}^N \|\sigma'(t_{i-1})\|(t_i - t_{i-1}),$$

y la expresión de la derecha es una suma de Riemann de la función  $\|\sigma'(t)\|$  asociada a la partición  $\pi$ .

Este argumento informal parece indicar que para una curva suave el número  $\int_a^b \|\sigma'(t)\| dt$  daría su longitud. Pero para demostrar esto precisamos un poco mas de teoría que desarrollamos en la siguiente sección.

OBSERVACIÓN 1.2. *Asumimos por lo pronto la identidad*

$$\text{Long}(\mathcal{C}) = \int_a^b \|\sigma'(t)\| dt,$$

*cuya demostración se da mas adelante en la Proposición 1.11.*

OBSERVACIÓN 1.3 (Parámetro de longitud de arco). *Sea  $\mathcal{C}$  una curva simple abierta suave y  $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathcal{C}$  una parametrización regular. En base a la observación previa, la longitud entre uno de los extremos de la curva dado por  $P_0 = \sigma(a)$  y otro punto genérico  $P = \sigma(t) \in \mathcal{C}$  puede expresarse como*

$$\int_a^t \|\sigma'(l)\| dl.$$

*Si escribimos  $s = \int_a^t \|\sigma'(l)\| dl$ , resulta ser que  $s \in [0, \text{Long}(\mathcal{C})]$  y se denomina parámetro de longitud de arco.*

*Pensado como función de  $t$  lo llamamos función de longitud de arco y verifica*

$$s : [a, b] \rightarrow [0, \text{Long}(\mathcal{C})].$$

*Por el Teorema Fundamental del Cálculo resulta ser  $s'(t) = \|\sigma'(t)\| > 0$  y por ende de clase  $C^1$  (pues  $\sigma$  es regular). En particular  $s(t)$  admite una inversa continuamente diferenciable. Esto es, puede escribirse  $t = t(s)$ ,  $t : [0, \text{Long}(\mathcal{C})] \rightarrow [a, b]$  con derivada  $t'(s) = \frac{1}{\|\sigma'(t(s))\|}$ .*

*Teniendo esto en cuenta podemos considerar una reparametrización (ver Definición 1.7) de  $\mathcal{C}$  dada por*

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}(s) &= \sigma(t(s)) \\ \tilde{\sigma}(s) &: [0, \text{Long}(\mathcal{C})] \rightarrow \mathcal{C}, \end{aligned}$$

*y en este caso decimos que  $\mathcal{C}$  está parametrizada por longitud de arco. Notar que*

$$\|\tilde{\sigma}'(s)\| = 1,$$

*pues  $\tilde{\sigma}'(s) = \sigma'(t(s))t'(s) = \frac{\sigma'(t)}{\|\sigma'(t)\|}$ . Es decir que si se tratara de la trayectoria de una partícula -ver Ejemplo 1.1- ésta tendría rapidez 1 (tardaría en recorrer la curva exactamente su longitud). Esto justifica la notación  $ds$  que se utiliza mas adelante para el diferencial de longitud de arco. (Ver Sección 6)*

EJEMPLO 1.4. *Hallar la longitud de la hélice de parametrización  $\sigma(t) = (\cos t, \sin t, t)$  con  $t \in [0, 4\pi]$ .*

*Tenemos  $\sigma'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$ . Por lo tanto  $\|\sigma'(t)\| = \sqrt{2}$ . La longitud del arco de hélice entre  $(1, 0, 0)$  y  $(\cos t, \sin t, t)$  es*

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{2} d\tau = \sqrt{2} t.$$

*En particular, la longitud de la curva es  $\sqrt{2} 4\pi$ .*

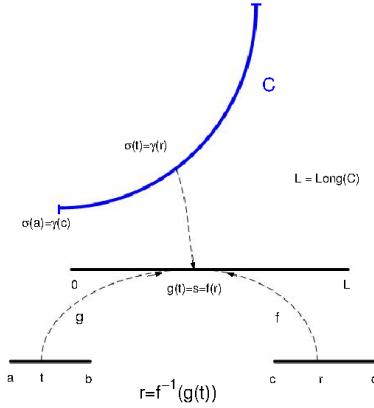


FIGURA 15. Dos parametrizaciones  $\sigma$  y  $\gamma$  de  $\mathcal{C}$  y el parámetro de longitud de arco

*Si queremos reparametrizar por longitud de arco tenemos que hallar  $t(s)$ .*

*Tenemos  $s = \sqrt{2}t$ . Por lo tanto, despejando  $t$  en función de  $s$  tenemos  $t = \frac{1}{\sqrt{2}}s = 2^{-1/2}s$ .*

*Definimos  $\tilde{\sigma}(s) = \sigma(t(s)) = (\cos(2^{-1/2}s), \operatorname{sen}(2^{-1/2}s), 2^{-1/2}s)$ , con  $s \in [0, \sqrt{2}4\pi]$ . Esto nos parametriza la hélice por longitud de arco.*

La siguiente proposición resulta de interés más adelante.

**PROPOSICIÓN 4.1.** (\*) Sean  $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  y  $\gamma : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3$  dos parametrizaciones regulares de una curva abierta, simple, suave  $\mathcal{C}$ . Entonces,  $\tilde{\sigma}$  es una reparametrización de  $\sigma$ .

**DEMOSTRACIÓN.** Sea  $s(t)$  la longitud del arco de curva  $\mathcal{C}$  entre  $\sigma(a)$  y  $\sigma(t)$ . Como vimos  $s$  es una biyección entre  $[a, b]$  y  $[0, \operatorname{Long}(\mathcal{C})]$ . Para evitar confusión en el argumento que sigue llamaremos  $s(t) = g(t)$ . Supongamos ahora por simplicidad que  $\sigma(a) = \gamma(c)$  y definimos  $s(r)$  para  $r \in [c, d]$  como la longitud del arco de  $\mathcal{C}$  entre  $\gamma(c)$  y  $\gamma(r)$ . Nuevamente, con la intención de evitar confusiones llamemos  $s(r) = f(r)$ . Se tiene que  $f(r)$  es una biyección estrictamente creciente y  $C^1$  entre  $[c, d]$  y  $[0, \operatorname{Long}(\mathcal{C})]$  con  $f'(r) \neq 0$  para todo  $r \in [c, d]$  (ver Figura 15).

Sea ahora  $h(t) = f^{-1}(g(t))$ . Se tiene que  $h$  es una biyección estrictamente creciente y  $C^1$  entre  $[a, b]$  y  $[c, d]$  con  $h'(t) \neq 0$  para todo  $t \in [a, b]$ . Además, dado  $t \in [a, b]$ , sea  $r \in [c, d]$  tal que  $\gamma(r) = \sigma(t)$ . Entonces,  $g(t) = f(r)$ . De donde,  $r = f^{-1}(g(t))$ . Por lo tanto,  $\gamma(h(t)) = (\gamma(r)) = \sigma(t)$  lo que demuestra que  $\gamma$  es una reparametrización de  $\sigma$ .

Si se tuviera  $\sigma(a) = \gamma(d)$  reparametrizamos  $\gamma$  del modo siguiente  $\tilde{\gamma}(\tilde{r}) = \gamma((c - \tilde{r}) + d)$  y luego usamos lo ya demostrado para  $\tilde{\gamma}$ .  $\square$

## 5. (\*) Fórmula de Longitud

En esta sección demostramos la fórmula de longitud. Primero recordemos la siguiente propiedad vista en Análisis I.

**TEOREMA 1.1.** *Sea  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua, y  $\pi$  una partición del  $[a, b]$ , dada por  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$ . Consideremos una suma de Riemann*

$$S(g, \pi) = \sum_{i=1}^N g(t_i^*)(t_i - t_{i-1})$$

con  $t_i^* \in [t_{i-1}, t_i]$  arbitrario, entonces

$$\int_a^b g(t) dt = \lim_{|\pi| \rightarrow 0} S(g, \pi).$$

Aquí y en lo que sigue para una función vectorial  $\mathbf{F} = (f_1, f_2, f_3)$  llamamos

$$\int \mathbf{F}(t) dt := \left( \int f_1(t) dt, \int f_2(t) dt, \int f_3(t) dt \right).$$

**LEMA 1.2.** *Sea  $\mathbf{F} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función continua. Se tiene que*

$$(1.3) \quad \left\| \int_a^b \mathbf{F}(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|\mathbf{F}(t)\| dt.$$

**DEMOSTRACIÓN.** Escribimos  $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ , y consideramos una partición uniforme de  $[a, b]$  dada por  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$  con  $t_{k+1} - t_k = (b - a)/n$ , luego, por el Teorema 1.1

$$\int_a^b F_i(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} (t_{k+1} - t_k) F_i(t_k^*)$$

donde  $t_k^* \in [t_k, t_{k+1}]$  es arbitrario y por consiguiente podemos tomar el mismo punto para cada componente  $F_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Por lo tanto,

$$\int_a^b \mathbf{F}(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} (t_{k+1} - t_k) \mathbf{F}(t_k^*).$$

Como para suma de vectores se tiene  $\|\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{F}_k\| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \|\mathbf{F}_k\|$  se tiene

$$(1.4) \quad \left\| \sum_{k=0}^{n-1} (t_{k+1} - t_k) \mathbf{F}(t_k^*) \right\| \leq \sum_{k=0}^{n-1} (t_{k+1} - t_k) \|\mathbf{F}(t_k^*)\|.$$

Observemos que el miembro derecho de (1.4) es una suma de Riemann para la función escalar  $\|\mathbf{F}\|$ . Pasando al límite con  $n \rightarrow \infty$  en (1.4) se sigue (1.3).  $\square$

**PROPOSICIÓN 5.1.** *Sea  $\mathcal{C}$  una curva abierta simple suave, entonces  $\mathcal{C}$  es rectificable. Más aún, sea  $\sigma \in C^1([a, b], \mathbb{R}^3)$  una parametrización regular de  $\mathcal{C}$ , luego*

$$(1.5) \quad \text{Long}(\mathcal{C}) = \int_a^b \|\sigma'(t)\| dt.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea  $\mathcal{P}$  una partición de  $\mathcal{C}$ . Como  $\mathcal{C}$  es abierta, simple, existe una única partición  $\pi$ ,  $t_0 < t_1 < \dots < t_n$  con  $t_i \in [a, b]$  tal que  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_\pi$ . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} |\Pi(\mathcal{P})| &= \sum_{i=1}^n \|\sigma(t_i) - \sigma(t_{i-1})\| = \sum_{i=1}^n \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sigma'(t) dt \right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\sigma'(t)\| dt = \int_a^b \|\sigma'(t)\| dt, \end{aligned}$$

donde hemos usado (1.3) en la última desigualdad. Por otro lado, como el último término  $\int_a^b \|\sigma'(t)\| dt$  es finito, ya que la parametrización es regular, la curva resulta rectificable.

Para probar (1.5), sea  $\varepsilon > 0$  un número arbitrario. Como  $\|\sigma'(t)\|$  es continua, usando el Teorema 1.1, existe un  $\delta > 0$  tal que para toda partición  $\pi$ , del intervalo  $[a, b]$ , tal que  $|\pi| < \delta$  la suma de Riemann

$$S(\|\sigma'(t)\|, \pi) = \sum_{i=0}^{N-1} \|\sigma'(t_i)\|(t_{i+1} - t_i)$$

verifica

$$(1.6) \quad \left| \int_a^b \|\sigma'(t)\| dt - S(\|\sigma'(t)\|, \pi) \right| < \varepsilon/3.$$

Más aún, usando continuidad uniforme de cada coordenada de  $\sigma'$  sobre el intervalo cerrado  $[a, b]$ , podemos, si es necesario, achicar el  $\delta$  para garantizar que también se cumple que

$$(1.7) \quad |\sigma'_1(t) - \sigma'_1(\tilde{t})|, |\sigma'_2(t) - \sigma'_2(\tilde{t})|, |\sigma'_3(t) - \sigma'_3(\tilde{t})| < \frac{\varepsilon}{3\sqrt{3}(b-a)},$$

siempre que  $|t - \tilde{t}| < \delta$ .

Por otro lado, como  $\mathcal{C}$  es rectificable existe  $\tilde{\mathcal{P}}$  una partición de  $\mathcal{C}$  tal que

$$(1.8) \quad |\Pi(\tilde{\mathcal{P}}) - \text{Long}(\mathcal{C})| < \varepsilon/3,$$

y sabemos además que (1.8) se mantiene para cualquier otra partición mas fina que  $\tilde{\mathcal{P}}$  (gracias a la Observación 1.1). Llamemos ahora  $\tilde{\pi} = \{\tilde{t}_0, \tilde{t}_1, \dots, \tilde{t}_M\}$  a la única partición del  $[a, b]$  tal que  $\tilde{\mathcal{P}} = \tilde{\mathcal{P}}_{\tilde{\pi}}$ .

Llamando ahora  $\hat{\pi} = \pi \cup \tilde{\pi}$  y  $\hat{\mathcal{P}} := \hat{\mathcal{P}}_{\hat{\pi}}$  se tiene que  $\hat{\pi}$  es mas fina que  $\pi$  y  $\hat{\mathcal{P}}$  es mas fina que  $\tilde{\mathcal{P}}$ . Luego (1.6) vale para  $\hat{\pi}$  y (1.8) para  $\hat{\mathcal{P}}$ . Llamemos  $a = \hat{t}_0 < \hat{t}_1, \dots, \hat{t}_M = b$  a los puntos de  $\hat{\pi}$ .

Nuestra intención es probar que

$$(1.9) \quad \left| \int_a^b \|\sigma'(t)\| dt - \text{Long}(\mathcal{C}) \right| < \varepsilon,$$

lo que demostraría (1.5) puesto que  $\varepsilon$  es arbitrario.

Por la desigualdad triangular se tiene que

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b \|\sigma'(t)\| dt - \text{Long}(\mathcal{C}) \right| &\leq \left| \int_a^b \|\sigma'(t)\| dt - S(\|\sigma'(t)\|, \hat{\pi}) \right| + \left| S(\|\sigma'(t)\|, \hat{\pi}) - \Pi(\hat{\mathcal{P}}) \right| \\ &\quad + \left| \Pi(\hat{\mathcal{P}}) - \text{Long}(\mathcal{C}) \right|. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que el primer y tercer término de la derecha se acotan con  $\varepsilon/3$ , resta acotar

$$\left| S(\|\sigma'(t)\|, \hat{\pi}) - \Pi(\hat{\mathcal{P}}) \right| = \left| \sum_{i=0}^{N-1} \|\sigma'(\hat{t}_i)\| (\hat{t}_{i+1} - \hat{t}_i) - \|\sigma(\hat{t}_{i+1}) - \sigma(\hat{t}_i)\| \right|,$$

usando el Teorema del Valor Medio del cálculo diferencial en cada coordenada, tenemos

$$\sigma(\hat{t}_{i+1}) - \sigma(\hat{t}_i) = (\sigma'_1(t_i^1), \sigma'_2(t_i^2), \sigma'_3(t_i^3))(\hat{t}_{i+1} - \hat{t}_i),$$

donde  $t_i^1, t_i^2, t_i^3 \in [\hat{t}_i, \hat{t}_{i+1}]$  luego

$$\|\sigma(\hat{t}_{i+1}) - \sigma(\hat{t}_i)\| = \|(\sigma'_1(t_i^1), \sigma'_2(t_i^2), \sigma'_3(t_i^3))\|(\hat{t}_{i+1} - \hat{t}_i)$$

entonces

$$\left| S(\|\sigma'(t)\|, \hat{\pi}) - \Pi(\hat{\mathcal{P}}) \right| \leq \sum_{i=0}^{N-1} \left| \|\sigma'(\hat{t}_i)\| - \|(\sigma'_1(t_i^1), \sigma'_2(t_i^2), \sigma'_3(t_i^3))\| \right| (\hat{t}_{i+1} - \hat{t}_i)$$

pero usando (1.7), vemos que

$$\left| \|\sigma'(\hat{t}_i)\| - \|(\sigma'_1(t_i^1), \sigma'_2(t_i^2), \sigma'_3(t_i^3))\| \right| \leq \|\sigma'(\hat{t}_i) - (\sigma'_1(t_i^1), \sigma'_2(t_i^2), \sigma'_3(t_i^3))\| \leq \frac{\varepsilon}{3(b-a)},$$

pues  $t_i, t_i^1, t_i^2, t_i^3 \in [\hat{t}_i, \hat{t}_{i+1}]$ , y la partición  $\hat{\pi}$  es mas fina que  $\pi$  que a su vez tiene norma menor a  $\delta$ . En definitiva

$$\left| S(\|\sigma'(t)\|, \hat{\pi}) - \Pi(\hat{\mathcal{P}}) \right| \leq \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \sum_{i=0}^{N-1} (\hat{t}_{i+1} - \hat{t}_i) \leq \frac{\varepsilon}{3},$$

que es lo que faltaba para probar (1.9).  $\square$

## Ejercicios

**EJERCICIO 1.10.** Considerar una partícula que se mueve siguiendo la trayectoria  $\sigma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$ . Hallar la velocidad, rapidez, y la longitud del arco descripto por la partícula entre los puntos  $\sigma(0)$  y  $\sigma(1)$ . Observar que  $\sigma$  describe la función de posición de un punto en un círculo de radio 1, que va rodando. La curva que describe se conoce como cicloide.

**EJERCICIO 1.11.** En los siguientes casos, calcular la longitud de la curva, donde  $\sigma$  es una parametrización de la misma sobre el intervalo  $[a, b]$ , siendo:

1.  $\sigma(t) = (t, t^2)$   $a = 0, b = 1$
2.  $\sigma(t) = (\sqrt{t}, t + 1, t)$   $a = 10, b = 20$

**EJERCICIO 1.12.** Sea  $\mathcal{C}$  la curva dada por

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \\ z = bt \end{cases} \quad t > 0$$

Parametrizar esta curva por longitud de arco.

## 6. Integral de longitud de arco

Supongamos que tenemos un alambre de un material homogéneo que ocupa una región del espacio que podemos pensar como una curva  $\mathcal{C}$  suave. La masa del alambre podemos pensarla como una proporción de su longitud ya que estamos despreciando las otras dimensiones espaciales del alambre. Llamamos “densidad lineal de masa” a esta proporción.

Si el alambre está formado por un material inhomogéneo, la densidad lineal de masa será una función -no constante- definida sobre la curva  $\mathcal{C}$  que supondremos continua<sup>3</sup>. ¿Cómo calcular la masa total del alambre en este caso?

Como la función  $\rho(x, y, z)$  definida en  $\mathcal{C}$  es continua, podemos pensar que es casi constante en pedacitos del alambre de longitud pequeña. Partamos al alambre en  $n$  pedacitos de longitud  $\ell/n$  donde  $\ell$  es la longitud de  $\mathcal{C}$ . Para eso, sea  $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  una parametrización regular de  $\mathcal{C}$  de clase  $C^1$  y  $g(t)$  la función de longitud de arco ( $g(t) =$ longitud del arco entre  $\sigma(a)$  y  $\sigma(t)$ ). Sabemos que  $g$  es estrictamente creciente. Tomemos sucesivamente puntos  $t_k \in [a, b]$  tales que  $g(t_k) = k\ell/n$ , para  $k = 0, 1, \dots, n$ . Si  $P_k = \sigma(t_k)$  se tiene que la longitud del arco de curva  $\mathcal{C}$  entre  $P_k$  y  $P_{k+1}$  es  $\ell/n$ . Por lo tanto, podemos aproximar a  $\rho$  por un valor constante digamos el valor que toma en un punto  $\tilde{P}_k = \sigma(\tilde{t}_k)$  con  $\tilde{t}_k \in [t_k, t_{k+1}]$ . De este modo, la masa del pedazo de alambre entre los punto  $P_k$  y  $P_{k+1}$  será aproximadamente  $\rho(\tilde{P}_k)\Lambda(t_k, t_{k+1})$ .

Sumando sobre todos los pedacitos y recordando que  $\Lambda(t_k, t_{k+1}) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\sigma'(t)\| dt$  tenemos que la masa total será aproximadamente

$$M \sim \sum_{k=0}^{n-1} \rho(\sigma(\tilde{t}_k)) \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\sigma'(t)\| dt.$$

Por otro lado, por el teorema del valor medio integral,

$$\int_a^b \rho(\sigma(t)) \|\sigma'(t)\| dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \rho(\sigma(t)) \|\sigma'(t)\| dt = \sum_{k=0}^{n-1} \rho(\sigma(t_k^*)) \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\sigma'(t)\| dt$$

para un  $t_k^* \in [t_k, t_{k+1}]$ .

De aquí que (con  $\Delta\ell = \ell/n$ ),

$$\sum_{k=0}^{n-1} \rho(\tilde{P}_k) \Delta\ell \rightarrow \int_a^b \rho(\sigma(t)) \|\sigma'(t)\| dt \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty$$

como veremos en el siguiente teorema.

Esta integral nos da entonces la masa total del alambre.

Siguiendo estas ideas probamos el siguiente teorema.

---

<sup>3</sup>Si hay un cambio abrupto de material la función podría ser discontinua pero veremos que es muy simple adaptar la teoría a funciones con finitas discontinuidades.

**TEOREMA 1.2.** *Sea  $\mathcal{C}$  una curva abierta, simple suave y  $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  una parametrización regular de  $\mathcal{C}$ . Sea  $f$  una función continua definida sobre  $\mathcal{C}$ . Entonces, existe*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(\tilde{P}_k) \Delta\ell$$

*para cualquier elección de punto  $\tilde{P}_k$  en el arco de curva entre los puntos  $P_k$  y  $P_{k+1}$  de la partición de  $\mathcal{C}$  en  $n$  arcos de longitud  $\ell/n$  con  $\ell = \text{Long } \mathcal{C}$ . Este límite coincide con*

$$(1.10) \quad \int_a^b f(\sigma(t)) \|\sigma'(t)\| dt.$$

*Observemos que, en particular, la integral (1.10) es independiente de la parametrización regular elegida.*

**DEMOSTRACIÓN.** Como acabamos de ver

$$\int_a^b f(\sigma(t)) \|\sigma'(t)\| dt = \sum_{k=0}^{n-1} f(\sigma(t_k^*)) \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\sigma'(t)\| dt$$

para un  $t_k^* \in [t_k, t_{k+1}]$ .

Por lo tanto, como  $\int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\sigma'(t)\| dt$  es la longitud del arco de curva entre  $\sigma(t_k)$  y  $\sigma(t_{k+1})$  que es  $\ell/n$  se tiene

$$(1.11) \quad \begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^{n-1} f(\tilde{P}_k) \Delta\ell - \int_a^b f(\sigma(t)) \|\sigma'(t)\| dt \right| &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} [f(\tilde{P}_k) - f(\sigma(t_k^*))] \Delta\ell \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} |f(\tilde{P}_k) - f(P_k^*)| \Delta\ell \end{aligned}$$

con  $P_k^* = \sigma(t_k^*)$ .

Como la distancia entre dos puntos de  $\mathcal{C}$  es menor o igual que la longitud del arco de curva  $\mathcal{C}$  que los contiene, la distancia entre los puntos  $\tilde{P}_k$  y  $P_k^*$  es a lo sumo  $\ell/n$ .

Como  $f$  es continua, es uniformemente continua. Esto quiere decir que  $|f(P) - f(Q)| < \varepsilon$  si  $\|P - Q\| < \delta$  independientemente de dónde se encuentren los puntos  $P, Q \in \mathcal{C}$ . Por lo tanto, si  $n$  es suficientemente grande, (1.11) da

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} f(\tilde{P}_k) \Delta\ell - \int_a^b f(\sigma(t)) \|\sigma'(t)\| dt \right| < \varepsilon\ell.$$

De modo que el teorema queda demostrado. □

**DEFINICIÓN 1.10.** Sea  $\mathcal{C}$  una curva abierta, simple, suave que admite una parametrización regular. Sea  $f$  una función continua definida sobre  $\mathcal{C}$  llamamos “integral de  $f$  en  $\mathcal{C}$  respecto de longitud de arco” al límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(\tilde{P}_k) \Delta\ell$$

para cualquier elección de punto  $\tilde{P}_k$  en el arco de curva entre los puntos  $P_k$  y  $P_{k+1}$  de la partición de  $\mathcal{C}$  en  $n$  arcos de longitud  $\ell/n$  con  $\ell = \text{Long } \mathcal{C}$ . A este límite lo denotamos indistintamente

$$\int_{\mathcal{C}} f d\ell \quad \text{o} \quad \int_{\mathcal{C}} f ds.$$

La justificación de la notación  $ds$  para el diferencial de longitud de arco viene del hecho de que en general llamamos  $s$  al parámetro de longitud de arco y, por la definición de integral de longitud de arco,  $\int_{\mathcal{C}} ds$  es la longitud de  $\mathcal{C}$ . (Además, recordemos que  $\|\tilde{\sigma}'(s)\| = 1$  cuando parametrizamos por longitud de arco).

### Ejercicios

**EJERCICIO 1.13.** Evaluar las integrales de longitud de arco  $\int_{\mathcal{C}} f(x, y, z) ds$ , donde  $\sigma$  es una parametrización de  $\mathcal{C}$ , en los casos siguientes

1.  $f(x, y, z) = x + y + z$ ,  $\sigma(t) = (\text{sent}, \cos t, t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$
2.  $f(x, y, z) = \cos z$ ,  $\sigma$  como en la parte 1.
3.  $f(x, y, z) = x \cos z$ ,  $\sigma(t) = (t, t^2, 0)$ ,  $t \in [0, 1]$

**EJERCICIO 1.14.**

1. Mostrar que la integral de longitud de arco de  $f(x, y)$  a lo largo de una curva dada en coordenadas polares por  $r = r(\theta)$ ,  $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$  es

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} f(r \cos \theta, r \sin \theta) \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta.$$

2. Calcular la longitud de la curva  $r = 1 + \cos \theta$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ .

**EJERCICIO 1.15.** Suponer que la semicircunferencia parametrizado por:

$$\sigma(\theta) = (0, a \sen \theta, a \cos \theta), \quad \theta \in [0, \pi],$$

con  $a > 0$ , está hecha de alambre con densidad uniforme de 2 gramos por unidad de longitud.

1. ¿Cuál es la masa total del alambre?
2. ¿Dónde está el centro de masa de esta configuración de alambre?
3. Si la temperatura ambiente es igual a  $x+y-z$  en el punto  $(x, y, z)$ , calcular la temperatura promedio sobre el alambre.

EJERCICIO 1.16. Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es continuamente diferenciable a trozos, el gráfico de  $f$  en  $[a, b]$  es una curva que se puede parametrizar como  $\sigma(t) = (t, f(t))$  para  $t \in [a, b]$ .

1. Mostrar que la longitud del gráfico de  $f$  en  $[a, b]$  es

$$\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

2. Hallar la longitud del gráfico de  $y = \log x$  de  $x = 1$  a  $x = 2$ .

EJERCICIO 1.17. Se quiere pintar una cerca que se encuentra sobre un campo ondulado. La cerca se encuentra a una distancia variable de una ruta recta que supondremos que ocupa el eje y.

Pongamos el kilómetro 0 de la ruta a la altura del comienzo de la cerca. Esta se encuentra entre los kilómetros 0 y 1, a una distancia variable igual a  $y(1 - y) + 1$  del kilómetro  $y$  de la ruta (calculada sobre el plano del nivel del mar).

Nuestra cerca tiene altura variable  $h = \frac{1+y}{750}$  a la altura del kilómetro  $y$  de la ruta si  $0 \leq y \leq 1/2$  y  $h = \frac{2-y}{750}$  si  $1/2 \leq y \leq 1$ .

Si 1 litro de pintura rinde  $4 m^2$  ¿Cuántos litros de pintura tengo que comprar?

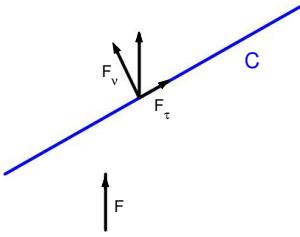
Observar que la superficie de la cerca será la integral de la altura  $h$ , con respecto a longitud de arco, sobre la curva proyección de la base de la cerca sobre el plano del nivel del mar aunque el campo sea ondulado.

## 7. Integrales curvilíneas

Consideremos el siguiente problema: Dada una fuerza  $\mathbf{F}$  que actúa sobre una partícula que se desplaza siguiendo una trayectoria  $\sigma(t)$  entre dos puntos, ¿cuál es el trabajo que ejerce esta fuerza?

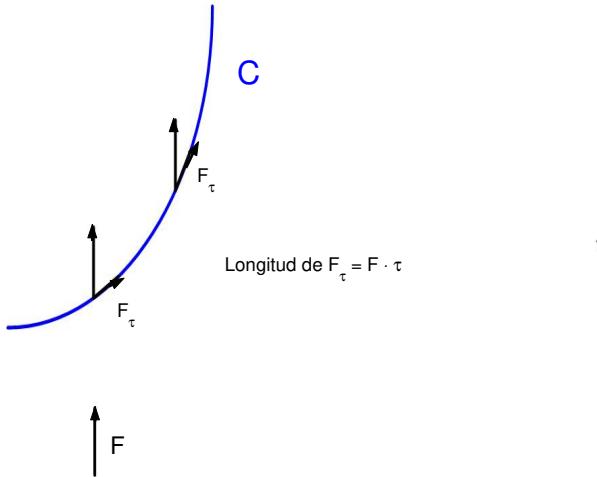
Aquí  $\sigma(t)$  es la posición de la partícula en el instante  $t$ . En el caso en que la partícula se mueve sobre una recta, la fuerza es constante, sólo tiene componente en la dirección de esa recta y actúa en el sentido del recorrido, sabemos que el trabajo resultante es la magnitud de la fuerza  $\|\mathbf{F}\|$  por la distancia recorrida. Si actúa en sentido contrario, el trabajo será  $-\|\mathbf{F}\|$  por la distancia recorrida.

Consideremos ahora el caso en que la partícula se mueve en línea recta, la fuerza es constante, pero actúa en otra dirección. Observemos, para empezar, que la fuerza es suma de dos fuerzas. Una actúa en la dirección del movimiento de la partícula y la otra en la dirección perpendicular. Es decir,  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_\tau + \mathbf{F}_\nu$ , donde  $\mathbf{F}_\tau = (\mathbf{F} \cdot \tau) \tau$  y  $\mathbf{F}_\nu \perp \tau$ . Donde  $\tau$  es un vector unitario que determina la dirección de la recta donde se mueve la partícula y da el sentido de recorrido de la partícula.



Por lo tanto, en este caso, el trabajo ejercido por la fuerza es  $\mathbf{F} \cdot \tau$  por la distancia recorrida por la partícula, ya que la fuerza que actúa perpendicularmente al movimiento no ejerce ningún trabajo ya que no modifica la trayectoria de la partícula.

Supongamos que la partícula recorre una trayectoria de dirección variable –una curva  $C$ – con velocidad no nula en todo momento y la fuerza es todavía constante. Tendremos la siguiente situación:



Finalmente, supongamos que la partícula recorre una trayectoria de dirección variable –una curva  $C$ – con velocidad no nula en todo momento, y la fuerza no es constante pero es continua. Si la longitud del camino recorrido por la partícula es pequeña podemos aproximar la fuerza por una fuerza constante igual al valor que toma en cualquier punto de la curva, digamos  $P^*$ .

También podemos aproximar la curva por una de igual longitud pero dirección constante, por ejemplo,  $\tau(P^*) = \sigma'(t^*)/\|\sigma'(t^*)\|$  que determina la dirección y sentido de recorrido de la partícula al pasar por el punto  $P^* = \sigma(t^*)$ .

Podemos aproximar entonces el trabajo realizado por la cantidad  $(F(P^*) \cdot \tau(P^*))$  por la longitud de la curva (la distancia recorrida por la partícula).

Si la curva es larga, la dividimos en  $n$  arcos de curva de longitud  $\ell/n$  donde  $\ell$  es la longitud de  $C$ . El trabajo realizado será la suma de los trabajos realizados sobre la partícula al recorrer ésta cada uno de los arquitos. Utilizando la aproximación que tenemos para el trabajo sobre cada arquito tenemos la aproximación

$$T \sim \sum_{k=0}^{n-1} (F(P_k^*) \cdot \tau(P_k^*)) \ell/n.$$

donde el punto  $P_k^*$  está en el  $k$ -ésimo arquito.

Observemos que el miembro derecho tiende a

$$\int_{\mathcal{C}} (\mathbf{F} \cdot \tau) d\ell$$

cuando  $n$  tiende a infinito, ya que lo que tenemos es una suma para la integral de longitud de arco de la función escalar  $f = \mathbf{F} \cdot \tau$  que es una función continua sobre  $\mathcal{C}$ .

Recordemos que el vector tangente  $\tau$  en el punto  $P \in \mathcal{C}$  podemos calcularlo por la relación  $\tau(P) = \sigma'(t)/\|\sigma'(t)\|$  si  $P = \sigma(t)$ . En particular,  $\tau$  es una función vectorial continua sobre  $\mathcal{C}$ .

De modo que el trabajo estará dado en términos de la trayectoria  $\sigma$  por

$$\int_a^b \mathbf{F}(\sigma(t)) \cdot \frac{\sigma'(t)}{\|\sigma'(t)\|} \|\sigma'(t)\| dt = \int_a^b \mathbf{F}(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) dt.$$

Estas consideraciones inducen las siguientes definiciones

**DEFINICIÓN 1.11.** Sea  $\mathcal{C}$  una curva abierta, simple, suave que admite una parametrización regular. Sea  $\tau$  un campo de vectores unitarios tangentes a  $\mathcal{C}$  continuo. Este campo determina un sentido de recorrido sobre la curva  $\mathcal{C}$ . Decimos que  $\mathcal{C}$  está “orientada” por el campo  $\tau$ .

Recordemos que el campo  $\tau$  vendrá dado a partir de una parametrización regular  $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  por la relación  $\tau(P) = \sigma'(t)/\|\sigma'(t)\|$  si  $P = \sigma(t)$ . En este caso también decimos que  $\mathcal{C}$  está orientada por la parametrización  $\sigma$ .

**DEFINICIÓN 1.12.** Sea  $\mathcal{C}$  una curva abierta, simple, suave que admite una parametrización regular  $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  que la orienta. Sea  $\mathbf{F}$  un campo vectorial continuo definido sobre  $\mathcal{C}$ . Llamamos “integral curvilinea del campo  $\mathbf{F}$  sobre la curva orientada  $\mathcal{C}$ ” a

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot ds := \int_a^b \mathbf{F}(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) dt.$$

**DEFINICIÓN 1.13.** Sea  $\mathcal{C}$  una curva abierta, simple, suave orientada por la parametrización regular  $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Sea  $\tilde{\sigma} : [\tilde{a}, \tilde{b}] \rightarrow \mathbb{R}^3$  otra parametrización regular de  $\mathcal{C}$ . Decimos que  $\tilde{\sigma}$  preserva la orientación de  $\mathcal{C}$  si para todo  $P \in \mathcal{C}$ , se tiene

$$\tau(P) = \frac{\sigma'(t)}{\|\sigma'(t)\|} = \frac{\tilde{\sigma}'(\tilde{t})}{\|\tilde{\sigma}'(\tilde{t})\|} \quad \text{si } P = \sigma(t) = \tilde{\sigma}(\tilde{t}) \text{ con } t \in [a, b], \tilde{t} \in [\tilde{a}, \tilde{b}].$$

Observemos que si  $\tilde{\sigma}$  no preserva la orientación de  $\mathcal{C}$  se tiene

$$\frac{\tilde{\sigma}'(\tilde{t})}{\|\tilde{\sigma}'(\tilde{t})\|} = -\tau(P) \quad \text{para } P = \tilde{\sigma}(\tilde{t}) \quad \text{para todo } \tilde{t} \in [\tilde{a}, \tilde{b}].$$

Por lo tanto, si  $\tilde{\sigma}$  preserva la orientación de  $\mathcal{C}$  se tiene

$$\int_a^b \mathbf{F}(\tilde{\sigma}(\tilde{t})) \cdot \tilde{\sigma}'(\tilde{t}) d\tilde{t} = \int_{\mathcal{C}} (\mathbf{F} \cdot \tau) d\ell = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

Y si  $\tilde{\sigma}$  no preserva la orientación de  $\mathcal{C}$  se tiene

$$\int_a^b \mathbf{F}(\tilde{\sigma}(\tilde{t})) \cdot \tilde{\sigma}'(\tilde{t}) d\tilde{t} = - \int_{\mathcal{C}} (\mathbf{F} \cdot \tau) d\ell = - \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

**EJEMPLO 1.5.** Sea  $\mathcal{C}$  la curva orientada dada por la parametrización  $\sigma(t) = (t, t^2)$  con  $t \in [0, 1]$ . Sea  $\mathbf{F}(x, y) = -(x, y)$  un campo de fuerzas (actúa en cada punto en dirección al origen). Supongamos que una partícula se desplaza por la curva  $\mathcal{C}$  siguiendo la trayectoria  $\sigma$  (es decir, la posición de la partícula en el instante  $t$  es  $\sigma(t)$ ). Hallar el trabajo efectuado por la fuerza sobre la partícula.

El trabajo es

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 \mathbf{F}(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) dt = \int_0^1 -(t, t^2) \cdot (1, 2t) dt = - \int_0^1 [t + 2t^3] dt = - \left[ \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{2} \right]_0^1 = -1.$$

**OBSERVACIÓN 1.4.** Para la integral curvilinea de un campo  $\mathbf{F} = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$  sobre una curva orientada  $\mathcal{C}$  se utiliza indistintamente las notaciones

$$(1.12) \quad \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \quad o \quad \int_{\mathcal{C}} P dx + Q dy + R dz.$$

La idea de esta última notación es que si  $\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))$  es una parametrización regular de  $\mathcal{C}$  que preserva la orientación de  $\mathcal{C}$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= \int_a^b \mathbf{F}(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) dt \\ &= \int_a^b \left( P(x(t), y(t), z(t)) x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t)) y'(t) + R(x(t), y(t), z(t)) z'(t) \right) dt \end{aligned}$$

que es lo mismo que se obtiene si se escribe  $dx = x'(t) dt$ ,  $dy = y'(t) dt$ ,  $dz = z'(t) dt$  en el miembro derecho de (1.12) y se evalúan las funciones  $P$ ,  $Q$  y  $R$  en  $(x(t), y(t), z(t))$ .

## Ejercicios

**EJERCICIO 1.18.** Sea  $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ . Evaluar la integral curvilinea de  $\mathbf{F}$  a lo largo de las curvas orientadas  $\mathcal{C}$  dadas por las siguientes parametrizaciones:

1.  $\sigma(t) = (t, t, t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$
2.  $\sigma(t) = (\sin t, 0, \cos t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$

EJERCICIO 1.19. Para las curvas orientadas  $\mathcal{C}$  parametrizadas por las correspondientes funciones  $\sigma$ , evaluar las integrales siguientes:

1.  $\int_{\mathcal{C}} x \, dy - y \, dx, \quad \sigma(t) = (\cos t, \sin t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$
2.  $\int_{\mathcal{C}} x \, dx + y \, dy, \quad \sigma(t) = (\cos(\pi t), \sin(\pi t)), \quad 0 \leq t \leq 2$

EJERCICIO 1.20. Considerar la fuerza  $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ . Calcular el trabajo realizado al mover una partícula a lo largo de la parábola  $y = x^2, z = 0$ , de  $x = -1$  a  $x = 2$ .

EJERCICIO 1.21. Sea  $\mathcal{C}$  una curva orientada suave parametrizada por  $\sigma$ .

1. Suponer que  $\mathbf{F}$  es perpendicular a  $\sigma'(t)$  en  $\sigma(t)$  para todo  $t$ . Mostrar que

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0.$$

2. Si  $\mathbf{F}$  es paralelo a  $\sigma'(t)$  en  $\sigma(t)$  para todo  $t$ , mostrar que

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathcal{C}} \|\mathbf{F}\| ds.$$

(Aquí, por paralelo a  $\sigma'(t)$  se entiende que  $\mathbf{F}(\sigma(t)) = \lambda(t)\sigma'(t)$ , donde  $\lambda(t) > 0$ .)

EJERCICIO 1.22. ¿Cuál es el valor de la integral curvilínea de un campo gradiente sobre una curva cerrada  $C$ ?

EJERCICIO 1.23. Suponer que  $\nabla f(x, y, z) = (2xyz e^{x^2}, z e^{x^2}, y e^{x^2})$ . Si  $f(0, 0, 0) = 5$ , hallar  $f(1, 1, 2)$ .

EJERCICIO 1.24. Considerar el campo de fuerza gravitacional (con  $G = m = M = 1$ ) definido (para  $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ ) por:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{-1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} (x, y, z).$$

Mostrar que el trabajo realizado por la fuerza gravitacional conforme una partícula se mueve de  $(x_1, y_1, z_1)$  a  $(x_2, y_2, z_2)$ , a lo largo de cualquier trayectoria, depende sólo de los radios  $R_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$  y  $R_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}$ .

EJERCICIO 1.25. Sean  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  una función  $C^1$ ,  $\mathbf{G} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  un campo  $C^1$  y  $\mathbf{F} = \nabla f + \mathbf{G}$ . Sea  $\mathcal{C}$  una curva cerrada, simple, suave, orientada. Verificar que

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{s}.$$

EJERCICIO 1.26. Sea  $\mathcal{C}$  una curva suave,  $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  una parametrización regular de  $\mathcal{C}$ . Sea  $g : [\bar{a}, \bar{b}] \rightarrow [a, b]$  una biyección  $C^1$  con  $g'(\tau) \neq 0$  para todo  $\tau \in [a, b]$ . Sea  $\bar{\sigma} : [\bar{a}, \bar{b}] \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por  $\bar{\sigma}(s) = \sigma(g(s))$ . Llamamos a  $\bar{\sigma}$  una **reparametrización** de  $\sigma$ .

1. Probar que  $\bar{\sigma}$  es una parametrización regular de  $\mathcal{C}$ .

2. Sea  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  continua. Ver que el cálculo de  $\int_C f \, ds$  da el mismo resultado cuando la integral se evalúa utilizando la parametrización  $\sigma$  o la parametrización  $\bar{\sigma}$ .
3. Sea  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  continua. Suponer que orientamos a  $C$  con la orientación dada por  $\sigma$ . Ver que el cálculo de  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$  utilizando la parametrización  $\bar{\sigma}$  da el mismo resultado que cuando se utiliza  $\sigma$ , si  $\bar{\sigma}$  preserva la orientación de  $C$ . Ver que si no es así, los resultados difieren sólo en el signo.

Realizar este ejercicio utilizando sólo la fórmula que da las integrales sin utilizar los resultados teóricos, es decir, comparando integrales en intervalos de la recta.

## Capítulo 2

**Superficies “En Construcción...en breve estará disponible”**



## Bibliografía

- [1] T. Apostol, "Calculus", Vol. I, Ed. Reverté, 1960.
- [2] T. Apostol, "Calculus", Vol. II, Ed. Reverté, 1960.
- [3] J. Marsden, A. Tromba, "Vector Calculus". Freeman and Company, New York 1988.