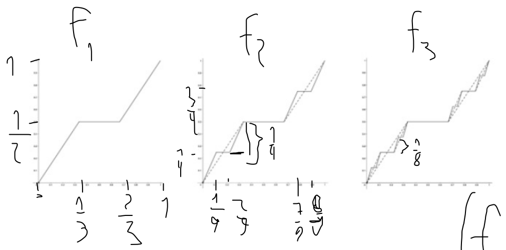
Pregunta: ¿Existe una función continua f:[0,1]---->[0,1] tal que f(0)=0, f(1)=1, pero que f sea "constante casi siempre"?



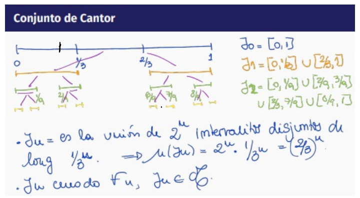

$f_n : [0,1] \to [0,1]$

$f_n\left(\left[0,\frac{1}{3}\right]\right) = \left[0,\frac{1}{2}\right]$

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge? $f_2\left(\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]\right) = \left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]$

si $x_0 \notin \mathcal{C} \Rightarrow$

$f_n(x_0) \Rightarrow \exists n_0,\ n \geq n_0 \Rightarrow f_n(x_0) = f_{n_0}(x_0)$




Practica 3

**18.** Teorema de la intersección (Cantor). Sea $(E,d)$ un espacio métrico completo. Sea $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos cerrados, acotados y no vacíos de $E$ tales que

- $A_{n+1} \subseteq A_n$ para todo $n \geq 1$.
- $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(A_n) = 0$.

Probar que existe un único elemento $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

¿Que pasa si $x \in \mathcal{C}$? Sea $I_n(x_0)$ el intervalo del paso $n$ tq $x_0 \in I_n(x_0)$

$\operatorname{diam}(I_n(x_0)) = \frac{1}{3^n} \longrightarrow 0$

$\tilde{I}_n(x_0)$ es un intervalo cerrado

$I_{n+1}(x) \subseteq I_n(x) \Rightarrow \{x_0\} = \bigcap I_n(x_0)$

$\operatorname{diam}\left(f_n(I_n(x_0))\right) = \frac{1}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$\tilde{I}_{n+1}(x) \subseteq \tilde{I}_n(x) \Rightarrow$ ej 18, Prac 3

$\exists!\ y_0 \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \tilde{I}_n(x_0)$ $\quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \tilde{I}_n(x_0) = \{y_0\}$

$\underbrace{f_n(x_0) \in \tilde{I}_n(x)}$

$f_n(x_0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} y_0$ $\quad f_{n+1}(x) \in \tilde{I}_{n+1}(x) \subseteq \tilde{I}_n(x)$ $\quad f_n(x) \in \tilde{I}_n$

$|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq \operatorname{diam} \tilde{I}_n(x) = \frac{1}{2^n}$

$\therefore$ Existe el limite puntual

Sea $f$ el límite puntual ¿$f$ es continua?

Para ver si $f$ es continua, veamos si la convergencia es uniforme

**Criterio de Weierstrass** $f_n : X \to \mathbb{R}$ $\quad X$ conj.

Supongamos dado $n$ existe $c_n \geq 0$ tal que $\boxed{|f_n(x)| \leq c_n}$ para todo $x \in X$. Si $\sum_{n=1}^\infty c_n$ converge, entonces la serie $\sum_{n=1}^\infty f_n$ converge absoluta y uniformemente a una función (acotada) de $X$ en $\mathbb{R}$.

$|h_n(x)| \leq \frac{1}{2^n}$

$h_n(x)$

MiREMOS ESTA $N$ SUMA

$\sum_{n=1}^{N} \overbrace{f_{n+1}(x) - f_n(x)}^{h_n(x)} = f_{N+1}(x) - f_1(x) =: g_N(x)$

$|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{2^n}$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} (f_n(x) - f_1(x))$ converge absoluta y uniformemente

si $x \notin \mathcal{C} \Rightarrow \exists n_0,\ n > n_0 \Rightarrow \overbrace{|\ \ |} = 0$

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$ converge

$\Rightarrow$ si considero la sucesión $(g_N)_{N\in\mathbb{N}} \subseteq C([0,1])$

$g_N \rightrightarrows g = f - f_1 \Rightarrow g_N + f_1 \rightrightarrows f \Rightarrow f_{N+1} \rightrightarrows f \Rightarrow f_N \rightrightarrows f$

Por otra parte $f_{N+1} - f_1 \xrightarrow[N\to+\infty]{} f - f_1 \Rightarrow f_{N+1} \longrightarrow f$

$\Rightarrow f$ es continua. A es ta función la llamamos la función de Cantor

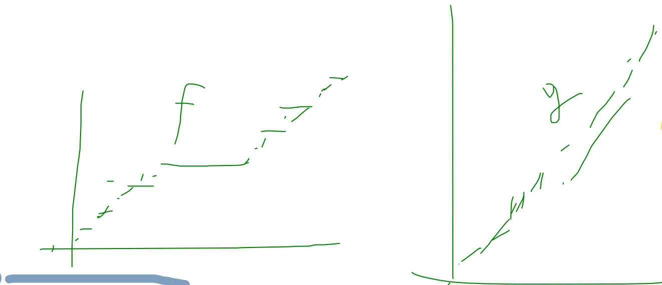
Sea $g : [0,1] \to [0,2]$

$g(x) = f(x) + x$

$0 \longmapsto f(0) + 0 = 0$

$1 \longmapsto f(1) + 1 = 2$

es continua, biyectiva e igual de problemática que $f$




$M := T \cap \mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}$

$f(\mathcal{C}) = [0,1]$

¿$T \cap \mathcal{C}$? es medible?

no medible

$V \subseteq [0,1]$ $\quad$ considero $\underbrace{f^{-1}(V)}_{T} \subseteq [0,1]$

$\exists M \subset [0,1]$ medible tq $f(M) = V$

$M$ es medible $\quad f(M) = V$

$\mathcal{C}$ es nulo

$\mathcal{C} = \{x \in [0,1],\ x$ se puede escribir en base 3 sin usar 1's$\}$

Ejemplo $\frac{2}{3} \in \mathcal{C}$ pues $\frac{2}{3} = [0,2]_3$

$\frac{1}{3} \in \mathcal{C}$ pues $\frac{1}{3} = [0,1]_3 = [0,0222\ldots]_3$

$f\left(\frac{1}{3}\right) = f\left([0,022\ldots]_3\right) = [0,011\ldots]_2 = [0,1]_2 = \frac{1}{2}$

$f\left(\frac{1}{3}\right) = f\left([0,2]_3\right) = [0,1]_2 = \frac{1}{2}$

Si $x \in \mathcal{C} \Rightarrow x = [0,\ldots 0 \ldots 2 \ldots]_3$ $\quad f(x) = [0,\ldots 0\ 1 \ldots]_2$

Observación. Dado un $x \in [0,1]$ lo escribo en base 2

$x = [0,\ldots 0 \ldots 1 \ldots]_2$. Sea $y = [0,\ldots 0 \ldots 2 \ldots] \in \mathcal{C}$

$\Rightarrow f(y) = x$. Como $x$ es arbitrario en $[0,1]$

$\Rightarrow f(\mathcal{C}) = [0,1]$ $\quad$ Pero $m(\mathcal{C}) = 0$ y $m(f(\mathcal{C})) = m([0,1]) = 1$

Decidir si las siguiente afirmaciones son verdaderas o falsas:

1. Si $\gamma_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $Z \subseteq \mathbb{R}$ con $m(Z) = 0 \Rightarrow m(\gamma_1(Z)) = 0$

2. Si $\gamma_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua y $Z \subseteq \mathbb{R}$ con $m(Z) = 0 \Rightarrow m(\gamma_2(Z)) = 0$

3. Si $\gamma_3 : [0,1] \to \mathbb{R}$ uniformemente continua, $Z \subseteq [0,1]$ $m(Z) = 0 \Rightarrow m(\gamma_3(Z)) = 0$

4. Si $\gamma_4 : [0,1] \to [0,1]$ uniformemente continua, monótona creciente, $Z \subseteq [0,1]$

$m(Z) = 0 \Longrightarrow m(\gamma_4(Z)) = 0$

$m(\{\nexists f'\}) = 0$

5. Si $\gamma_5 : [0,1] \to [0,1]$ uniformemente continua, monótona creciente biyectiva, $\underbrace{\text{derivable ctp}}$

Si $A \subseteq [0,1]$ es medible $\overset{?}{\Longrightarrow}$ $\gamma_5(A) \subseteq \mathbb{R}$ será medible? Falso