UBA - exactas
Departamento de Matemática

Análisis Avanzado - Conjunto no medible

Primer cuatrimestre de 2021

Daniel Carando - Victoria Paternostro

Dto. de Matemática - FCEN - UBA

ón

Axioma de elecciÃşn (enunciado informal)

Sea $\mathcal{A}$ es familia de conjuntos *no vacíos*,

$$\mathcal{A} = \{A_i \ : \ \underline{i \in I}\}.$$

Entonces, podemos elegir un elemento de cada A_i.

Construción de un conjunto no medible

Construción de un conjunto no medible

- Consideramos los conjuntos $\{\mathbb{Q} + x\}_{x \in \mathbb{R}}$

Construción de un conjunto no medible

$\Rightarrow x-y = q_2 - q_1 \in \mathbb{Q}$

- Consideramos los conjuntos $\{\mathbb{Q}+x\}_{x\in\mathbb{R}}$
- Si $x, y \in \mathbb{R}$, entonces $(\mathbb{Q}+x)\cap(\mathbb{Q}+y)=\emptyset$ o $\mathbb{Q}+x=\mathbb{Q}+y$.

$y = x+1$

sp que $z \in (\mathbb{Q}+x)\cap(\mathbb{Q}+y) \Rightarrow z = x+q_1 = y+q_2 \Rightarrow x = y+q_2-q_1$

$\Rightarrow x+\mathbb{Q} = \{x+q : q\in\mathbb{Q}\} = \{y+\underbrace{q_2-q_1+q}_{} : q\in\mathbb{Q}\} = \{y+\tilde{q} : \tilde{q}\in\mathbb{Q}\}$

$= y+\mathbb{Q}$

- $\mathbb{Q}+x=\mathbb{Q}+y$ si y sólo si $x-y\in\mathbb{Q}$. $(*)$

- Definimos una relación de equivalencia en $\mathbb{R}$: $x \sim y$ si y sólo si $x - y \in \mathbb{Q}$.

- Definimos una relación de equivalencia en $\mathbb{R}$: $x \sim y$ si y sólo si $x - y \in \mathbb{Q}$.
- Sea S un conjunto formado con un elemento de cada clase de equivalencia.

- Definimos una relación de equivalencia en $\mathbb{R}$: $x \sim y$ si y sólo si $x - y \in \mathbb{Q}$.
- Sea S un conjunto formado con un elemento de cada clase de equivalencia. Entonces, si $x, y \in S$ tenemos que $(\mathbb{Q} + x) \cap (\mathbb{Q} + y) = \emptyset$.

$\Leftrightarrow x - y \notin \mathbb{Q}$

- Definimos una relación de equivalencia en $\mathbb{R}$: $x \sim y$ si y sólo si $x - y \in \mathbb{Q}$.
- Sea S un conjunto formado con un elemento de cada clase de equivalencia. Entonces, si $x, y \in S$ tenemos que $(\mathbb{Q} + x) \cap (\mathbb{Q} + y) = \emptyset$.
- Si $x \in \mathbb{R}$, entonces $(\mathbb{Q} + x) \cap [0,1] \underline{\neq} \emptyset$.

Sup que $(\mathbb{Q}+x) \cap [0,1] = \emptyset$

$x+q \notin [0,1] \ \forall q \in \mathbb{Q} \Rightarrow q \notin [-x, 1-x] \ \forall q \in \mathbb{Q}$

ABS!

intervalo y $\mathbb{Q}$ denso.

Definimos en conjunto E así: Para cada $x \in S$ elijo un elemento y_x de $(\mathbb{Q}+x) \cap [0,1]$. $E = \{y_x : x \in S\}$.

$\Rightarrow E \subseteq [0,1]$

- En $\mathbb{Q}+x$ tiene exactamente un elemento (y_x) que elem. está en $[0,1]$.
- $e_1, e_2 \in E \Rightarrow e_1 - e_2 \notin \mathbb{Q}$: Si $e_1 - e_2 \in \mathbb{Q} \Rightarrow$

$e_1 = y_{x_1} = \underset{S}{x_1} + q_1$; $e_2 = y_{x_2} = \underset{S}{x_2} + q_2 \Rightarrow \underbrace{e_1 - e_2}_{\in \mathbb{Q}} = (x_1 - x_2) + \underbrace{(q_1 - q_2)}_{\in \mathbb{Q}} \Rightarrow$

$x_1 - x_2 \in \mathbb{Q}$ pero $x_1, x_2 \in S \Rightarrow$ ABS!

Sea $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una numeración de $\mathbb{Q}$.

Sea $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una numeración de $\mathbb{Q}$.

Afirmación:

$$\mathbb{R} = \underbrace{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E + q_n}$$

y la unión es disjunta.

. Unión es disjunta:

Si $x \in (E+q_n) \cap (E+q_m) \Rightarrow$

$x = e_1 + q_n = e_2 + q_m$

$\Rightarrow e_1 - e_2 = q_m - q_n \in \mathbb{Q}$ ABS!.

. $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E+q_n$

$\supseteq)$ ✓ $\quad E+q_n \subseteq \mathbb{R}\ \forall n$.

$\subseteq)$ $x\in\mathbb{R} \Rightarrow \exists!\, x_0 \in S \,/\, x \in \mathbb{Q} + x_0 \Rightarrow x = \overset{\in\mathbb{Q}}{q_0} + x_0$

$\cdot\ x_0 \in S \rightsquigarrow y_{x_0} \in E, \quad y_{x_0} = \tilde{q} + x_0$

$\Rightarrow \underline{x} = q_0 + x_0 = q_0 + y_{x_0} - \tilde{q} = \underbrace{q_0 - \tilde{q}}_{\in \mathbb{R}} + \overset{\in E}{y_{x_0}} \in \underline{q_u + E}$

$\rightsquigarrow q_u$

$$\boxed{\mathbb{R} = \bigcup_{u \in A}^{d} E + q_u}$$

El conjunto E es no medible.

Sup. q si

$$\Rightarrow \underbrace{\mu(\mathbb{R})}_{+\infty} = \mu\Big(\bigcup_n E+q_n\Big) = \sum_n \underbrace{\mu(E+q_n)}_{\mu(E)}$$

$$= \sum_n \mu(E) \Rightarrow \mu(E) > 0.$$

- Consideremos $\{r_n\}_n$ una numeración de los racionales del $[0,1]$

$$\subseteq [0,1] \qquad \in [0,1)$$

$$\Rightarrow \bigcup_n E + r_n \subseteq [0,2]$$

Fijo $N \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{N} E + r_n \subseteq [0,2]$

$$\Rightarrow \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{N} E + r_n\Big) \leq \mu([0,2]) = 2.$$

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{N} E + r_n\Big) = \sum_{n=1}^{N} \underbrace{\mu(E + r_n)}_{\mu(E)}$$

$$= N \cdot \mu(E) \Rightarrow \boxed{N\mu(E) \leq 2 \ \forall N \in \mathbb{N}}$$

si $\mu(E) > 0$, es ABS! pues $\lim_{N \to +\infty} N\mu(E) = +\infty$