UBA - exactas
Departamento de Matemática

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Análisis Avanzado - Medida 2

Segundo cuatrimestre de 2021

Daniel Carando - Victoria Paternostro

Dto. de Matemática - FCEN - UBA

Conjuntos medibles: $\mathcal{M}$ σ-álgebra generada por los intervalos abiertos y los conjuntos nulos.

$\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$

$\rightarrow$ A es nulo si $\forall \varepsilon > 0$ $\exists (U_n)_n$ suc. de intervalos abiertos /

$A \subseteq \bigcup_n U_n$ $\wedge$ $\sum_{n \geq 1} \operatorname{long}(U_n) < \varepsilon$

Conjuntos medibles: $\mathcal{M}$ σ-álgebra generada por los intervalos abiertos y los conjuntos nulos.

Todo abierto U de $\mathbb{R}$ es una unión numerable de intervalos disjuntos.

abiertos

$\Rightarrow$ todo abierto está en $\mathcal{C}$.

y $\therefore$ todo cerrado está en $\mathcal{C}$.

Henri Léon Lebesgue (1875 - 1941)

Teorema (existencia de la *medida de Lebesgue*)

Existe una única función μ de $\mathcal{M}$ en $[0, +\infty]$ tal que

- Si $A = (a, b)$, entonces $\mu(A) = b - a$. $=$ long (A)

Teorema (existencia de la *medida de Lebesgue*)

Existe una única función μ de $\mathcal{M}$ en $[0, +\infty]$ tal que

- Si $A = (a, b)$, entonces $\mu(A) = b - a$.
- Si $A_n \in \mathcal{M}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

Teorema (existencia de la *medida de Lebesgue*)

Existe una única función μ de $\mathcal{M}$ en $[0, +\infty]$ tal que

- Si $A = (a, b)$, entonces $\mu(A) = b - a$.
- Si $A_n \in \mathcal{M}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

Si los A_n son disjuntos dos a dos, entonces

$$\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

Teorema (existencia de la *medida de Lebesgue*)

Existe una única función μ de $\mathcal{M}$ en $[0, +\infty]$ tal que

- Si $A = (a, b)$, entonces $\mu(A) = b - a$.
- Si $A_n \in \mathcal{M}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

  Si los A_n son disjuntos dos a dos, entonces

$$\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

- Si $A \in \mathcal{M}$, entonces (regularidad

$$\mu(A) = \inf\{\mu(U) \colon A \subset U,\ U \text{ abierto}\}.$$

Observación

- $\mu(\emptyset) = 0$:

Observación

- $\mu(\emptyset) = 0$;
- Vale la aditividad: Si $A, B \in \mathcal{M}$ y son disjuntos, entonces $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.

Observación

- $\mu(\emptyset) = 0$:
- Vale la aditividad: Si $A, B \in \mathcal{M}$ y son disjuntos, entonces $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.
- Regularidad: Si $A \in \mathcal{M}$, entonces $\mu(A) = \inf\{\mu(U) : A \subset U,\ U \text{ abierto}\}$.

" "

$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, U \text{ abierto} \mid A \subseteq U \wedge \mu(U \setminus A) < \varepsilon}$

Proposición

Sea $\mu : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ la medida de Lebesgue dada por el teorema anterior. Entonces, μ satisface las siguientes propiedades.

Proposición

Sea $\mu : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ la medida de Lebesgue dada por el teorema anterior. Entonces, μ satisface las siguientes propiedades.

- Si $A, B \in \mathcal{M}$ cumplen que $A \subset B$, entonces $\mu(A) \leq \mu(B)$. (monótonía)

Proposición

Sea $\mu : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ la medida de Lebesgue dada por el teorema anterior. Entonces, μ satisface las siguientes propiedades.

- Si $A, B \in \mathcal{M}$ cumplen que $A \subset B$, entonces $\mu(A) \leq \mu(B)$.
- Si $A \subset \mathbb{R}$ es un conjunto nulo, entonces $\boxed{A \in \mathcal{M}}$ y $\underbrace{\mu(A) = 0}$.

Proposición

Sea $\mu : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ la medida de Lebesgue dada por el teorema anterior. Entonces, μ satisface las siguientes propiedades.

- Si $A, B \in \mathcal{M}$ cumplen que $A \subset B$, entonces $\mu(A) \leq \mu(B)$.
- Si $A \subset \mathbb{R}$ es un conjunto nulo, entonces $A \in \mathcal{M}$ y $\mu(A) = 0$. Recíprocamente, si $A \in \mathcal{M}$ es tal que $\mu(A) = 0$, entonces A es un conjunto nulo.

Proposición

Sea $\mu : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ la medida de Lebesgue dada por el teorema anterior. Entonces, μ satisface las siguientes propiedades.

- Si $A, B \in \mathcal{M}$ cumplen que $A \subset B$, entonces $\mu(A) \leq \mu(B)$. (Ejercicio)
- Si $A \subset \mathbb{R}$ es un conjunto nulo, entonces $A \in \mathcal{M}$ y $\mu(A) = 0$. Recíprocamente, si $A \in \mathcal{M}$ es tal que $\mu(A) = 0$, entonces A es un conjunto nulo.
- Dados $\underline{A \in \mathcal{M}}$ y $\underline{c \in \mathbb{R}}$, se tiene que $\underline{A + c \in \mathcal{M}}$ y $\mu(A + c) = \mu(A)$.

práctico

μ es invariante por traslaciones

Dem: A es nulo $\Rightarrow$ $A \in \mathcal{M}$ ✓ (x def. de $\mathcal{M}$).

Veamos q' $\mu(A)=0$. Sea $\varepsilon>0$. Como A es nulo, $\exists\, (U_n)_n$ de intervalos abiertos / $A \subseteq \bigcup_n U_n$ $\wedge$ $\sum_n \underbrace{\text{long}(U_n)}_{\mu(U_n)} < \varepsilon$

$$\mu(A) \underset{\substack{\downarrow \\ 1^{\circ}\text{ parte}}}{\leq} \mu\Big(\bigcup_n U_n\Big) \underset{\text{Teo 7}}{\leq} \sum_n{}' \mu(U_n) = \sum_n{}' \log(U_n) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \mu(A) < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \mu(A) = 0.$$

Recíproco: Si $\mu(A) = 0$ ($A \in \mathcal{M}$) qvq A es nulo. Sea $\varepsilon > 0$.

Por la regularidad, $\exists\, U$ abierto / $A \subseteq U$ / $\mu(U \setminus A) < \varepsilon$

Ahora: $\mu(U) = \mu(U \setminus A) + \underbrace{\mu(A)}_{=0 \text{ (hip.)}} = \mu(U \setminus A)$ y $\therefore \mu(U) < \varepsilon$

$U = \dot{\bigcup_n} U_n$ $\quad U_n$ intervalos abiertos. $\Rightarrow A \subseteq \bigcup_n U_n = U$

$$\wedge \sum_n{}' \mathrm{lon}(U_n) = \sum_n \mu(U_n) \underset{\text{disj.}}{=} \mu\Big(\bigcup_n U_n\Big) = \mu(U) < \varepsilon \Rightarrow A \text{ es nulo.}$$

Idea: monotonía: $A \subseteq B \Rightarrow B = B \setminus A \,\dot{\cup}\, A \Rightarrow \mu(B) = \overbrace{\mu(B \setminus A)}^{\geq 0} + \mu(A) \geq \mu(A)$

Proposición

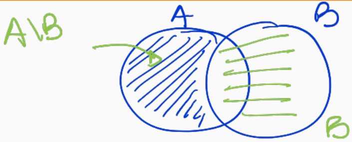
Sean $A, B \in \mathcal{M}$. Entonces, $A \setminus B \in \mathcal{M}$ y $\mu(A \cup B) = \mu(A \setminus B) + \mu(B)$.

Proposición

Sean $A, B \in \mathcal{M}$. Entonces, $A \setminus B \in \mathcal{M}$ y $\mu(A \cup B) = \mu(A \setminus B) + \mu(B)$.

En particular, si $B \subseteq A$ y $\mu(B) < \infty$, entonces $\mu(A \setminus B) = \underline{\mu(A) - \mu(B)}$.

<u>Dem:</u> . $A \setminus B = \underbrace{A \cap B^c}_{\in \mathcal{M}} \in \mathcal{M}$.



y $A \cup B = A \setminus B \overset{d}{\cup} B \Rightarrow$

$\mu(A \cup B) = \mu(A \setminus B) + \mu(B)$.

. $B \subseteq A \Rightarrow A \cup B = A = A \setminus B \overset{d}{\cup} B$

$\Rightarrow \mu(A) = \mu(A \setminus B) + \mu(B) \xrightarrow[\mu(B)<\infty]{}$ lo puedo pasar restando.

Proposición (regularidad para cerrados).

Sea $A \in \mathcal{M}$. Entonces, para todo $\varepsilon > 0$ existe un conjunto cerrado $F \subseteq A$ tal que $\mu(A \setminus F) < \varepsilon$.

Dem: Sea $\varepsilon > 0$. Llamo $B = A^c \in \mathcal{M}$.

$\Rightarrow \exists\, U$ abierto / $B \subseteq U$ y $\mu(U \setminus B) < \varepsilon$ (regularidad x abiertos).

Sea $F = U^c$ q' resulta cerrado y como $U \supseteq B$

$\Rightarrow F = U^c \subseteq B^c = (A^c)^c = A$. Además

$A \setminus F = A \cap F^c = A \cap U = B^c \cap U = U \setminus B$

$\Rightarrow \mu(A \setminus F) = \mu(U \setminus B) < \varepsilon$ $\boxtimes$

Continuidad de la medida

Teorema

Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ tal que $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \cdots \subset A_n \ldots$.

Continuidad de la medida

$\mu\left(\lim_{N\to\infty} \bigcup_{n=1}^{N} A_n\right)$

Teorema

Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ tal que $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \cdots \subset A_n \ldots$.

Entonces

$$\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Continuidad de la medida

Teorema

Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ tal que $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \cdots \subset A_n \ldots$.

Entonces

$$\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Sea $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ tal que $B_1 \supset B_2 \supset B_3 \cdots \supset B_n \ldots$ y supongamos que existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ con $\mu(B_{n_0}) < \infty$.

Continuidad de la medida

Teorema

Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ tal que $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \cdots \subset A_n \ldots$.
Entonces

$$\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Sea $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ tal que $B_1 \supset B_2 \supset B_3 \cdots \supset B_n \ldots$ y supongamos que existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ con $\mu(B_{n_0}) < \infty$.
Entonces

$$\mu\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n).$$

$$\tilde A_1 = A_1$$
$$\tilde A_2 = A_2 \setminus A_1 \in \mathcal{G}$$
$$\tilde A_3 = A_3 \setminus A_2$$
$$\vdots$$
$$\tilde A_m = A_m \setminus A_{m+1} \quad \forall m \Rightarrow \tilde A_m \in \mathcal{G}$$

$$\forall N \in \mathbb{N} \qquad \bigcup_{m=1}^{N} \tilde A_m = A_N, \quad \Rightarrow \bigcup_{N\in\mathbb{N}} A_N = \bigcup_{m} \tilde A_m$$

$$\Rightarrow \boxed{\mu\Big(\bigcup_N A_N\Big)} = \mu\Big(\bigcup_n \tilde A_n\Big) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu(\tilde A_n) = \lim_{N\to\infty} \sum_{m=1}^{N} \mu(\tilde A_m)$$

$$= \lim_{N\to\infty} \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{N} \tilde A_n\Big) = \boxed{\lim_{N\to\infty} \mu(A_N)} \quad \boxtimes$$

Para la segunda parte: $\boxed{\text{Ejercicio}}$

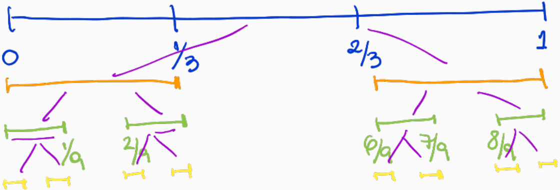
Sug: $B_1 \supseteq B_2 \supseteq B_3 \supseteq \dots$

Considerar: $A_n = B_1 \setminus B_n$

$A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \dots$ aplico lo anterior

Terminar.

Conjunto de Cantor



$J_0 = [0,1]$

$J_1 = [0,1/3] \cup [2/3,1]$

$J_2 = [0,1/9] \cup [2/9,3/9] \cup [2/3,7/9] \cup [8/9,1]$

- J_n = es la unión de 2^n intervalitos disjuntos de long $1/3^n$. $\Rightarrow \mu(J_n) = 2^n \cdot 1/3^n = (2/3)^n$.
- J_n cerrado $\forall n$, $J_n \in \mathcal{B}$.

Def. $\mathcal{C} = \bigcap_{n=0}^{\infty} J_n \in \mathcal{T}_{\mathcal{C}}$. $\mathcal{C}$ = conjunto de Cantor

- $\mathcal{C}$ es cerrado (pues es intersección de conj. cerrados)
- $\mathcal{C} \neq \emptyset$: $0, 1 \in \mathcal{C}$, $1/3, 2/3 \in \mathcal{C}$, los extremos de los intervalos.
- $\mu(\mathcal{C}) \leq \mu(J_n) = \left(2/3\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ $\therefore$ $\boxed{\mu(\mathcal{C}) = 0}$

  $\mathcal{C} \subseteq J_n \ \forall n \in \mathbb{N}$

- $\#\mathcal{C} = c$.

  $x \in \mathcal{C} \Rightarrow$ le asocio una suc. de 0's y 1's.

$x \in \mathcal{C}$: $x_1 = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1/3] = I_1 \\ 1 & \text{si } x \in [2/3, 1] = D_1 \end{cases}$

$x_2 = 0$ si x está en el hijo izquierdo
1 si x " " " " derecho.

⋮

$x_3 = 0$ si $x \in$ hijo izq
1 si $x \in$ hij der.

- $x \in \mathcal{C} \rightarrow$ suc. de ceros y unos

- $(x_n)_n$ suc. de ceros y unos $\longrightarrow x \in \mathcal{C}$

$\therefore$ $\mathcal{C} \longleftrightarrow$ $\underbrace{\text{suc. de ceros y unos}}$ $\rightarrow$ tiene cardinal c