SUPREMOS

def: sea $A \subseteq \mathbb{R}$ decimos que

i) $c \in \mathbb{R}$ es cota superior de A si $c \geq a \ \forall a \in A$

ii) $c \in \mathbb{R}$ es el máximo de A si es cota superior y ademas $c \in A$

iii) A es acotado superiormente si tiene alguna cota superior

ejemplos

1) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$\Rightarrow$ 5 es cota superior y ademas es el máximo.

$\Rightarrow$ 6 es cota superior

$\Rightarrow$ 7,5 " "

obs: si c es cota sup de A, entonces $\forall c' \geq c$, c' es cota superior de A

2) $A = (-\infty, 1)$

1 es cota superior de A (pero NO es máximo) why??

$1 \notin A$ pero si es cota sup.

3) $A = \mathbb{N}$ no es acotado superiormente (principio de arquimedes)

def: sea $A \subseteq \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{R}$ decimos que s es el supremo de A ($s = \sup(A)$) si

① s es cota superior de A

② si s' es cota superior de $A \Rightarrow s' \geq s$

En el ejemplo anterior $A = (-\infty, 1)$

$1 = \sup(A)$ 1 es cota superior ✓

dem

sea $s' < 1$ quiero ver que s' no es cota superior

Puedo tomar el punto $\frac{s'+1}{2}$ (entre medio) → tengo que ver si $\in A$ entonces dem que es < 1

$\frac{s'+1}{2} < 1 \iff s'+1 < 2$

$\iff s' < 1$ ✓ $\therefore \frac{s'+1}{2} \in A$

ver si $\frac{s'+1}{2} > 1$ (tarea)

entonces s' no puede ser cota superior

$\Rightarrow 1 = \sup(A)$

(demost que cualq num más chico no puede ser cota superior)

algo que damos por válido y que no vamos a poder probar.

axioma de completitud

↳ dado $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ y acotado superiormente, entonces existe $\sup(A) \in \mathbb{R}$

Obs: $A \in (0, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}$ (racionales)

$= \{q \in \mathbb{Q} : 0 < q < \sqrt{2}\} \subseteq \mathbb{Q}$

A esta acotado superiormente, por ejemplo $2 \in \mathbb{Q}$ es una cota superior. Sin embargo, no existe $\sup(A) \in \mathbb{Q}$.

$\sqrt{2} \cong 1,412\ldots$

$\Rightarrow$ 1,5 es cota..

1,415 es cota ..

Prop: sea $A \subseteq \mathbb{R}$ entonces $s = \sup(A)$ si y solo si

① s es cota superior de A

② $\forall \varepsilon > 0 \ \exists a_\varepsilon \in A$ tal que $s - \varepsilon < a_\varepsilon \leq s$

dem:

$\Rightarrow$) $s = \sup(A) \Rightarrow s$ es cota superior

dado $\varepsilon > 0$, quiero ver que $\exists a_\varepsilon \in A$ con $a_\varepsilon > s - \varepsilon$.

suponiendo que no existe, entonces $a \leq s - \varepsilon \ \forall a \in A$

pero entonces $s - \varepsilon$ es cota superior y $s - \varepsilon < s$ Abs.

Pruebo la vuelta

$\Leftarrow$) quiero ver que $s = \sup(A)$

i) s es cota superior

sea s' una cota sup de A, suponiendo que $s' < s$, tenemos que $0 < s - s' = \varepsilon$

Por condicion ② $\exists a_\varepsilon \in A \ / \ s - \varepsilon < a_\varepsilon \leq s$

$s - \varepsilon - s - (s - s') = s'$

$\Rightarrow \exists a_\varepsilon \in A \ / \ s' < a_\varepsilon$ ABS

Principio de arquimedes

① Prop: $\mathbb{N}$ no está acotado superiormente

Equiv, $\forall x \in \mathbb{R} \ \exists n \in \mathbb{N}$ con $x \leq n$

demo: $A = \mathbb{N}$. suponiendo que está acot superiormente $\mathbb{N} \neq \emptyset$, por completitud $\exists s = \sup(A) \in \mathbb{R}$.

Por la prop, tomando $\varepsilon = 1$ (tomo un $\varepsilon > 0$) $\exists n \in \mathbb{N} \ /$

$s - 1 < n \leq s$

$\Rightarrow s < \underbrace{n+1}_{\in \mathbb{N}}$ Abs.

② Prop:

$\forall y \in \mathbb{R}$, $y > 0$ existe un $n \in \mathbb{N} \ / \ 0 < \frac{1}{n} \leq y$

demo:

como $y > 0$, $\exists \frac{1}{y} \in \mathbb{R}$, por Arq: $\exists$ $n \in \mathbb{N} \ / \ \frac{1}{y} \leq n$

$\Rightarrow \frac{1}{n} \leq y$ $\therefore$

INFIMOS

def: sea $A \subseteq \mathbb{R}$, decimos que

i) $c \in \mathbb{R}$ es cota inferior de A si $\forall a \in A$, $a \geq c$

ii) $c \in \mathbb{R}$ es mínimo de A si es cota inferior y $c \in A$

iii) A es acotado inferiormente si tiene alguna cota inferior

iv) $i = \inf(A)$ es es infimo de A si:

① i es cota inferior

② si i' es cota inferior $\Rightarrow i' \leq i$

ejemplo: $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$

$0 = \inf(A)$

·) 0 es cota inferior

ahora pruebo que cero sea infimo

·) si $y > 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} \ / \ 0 < \frac{1}{n} \leq y \Rightarrow y$ no es cota inf

$\Rightarrow 0 = \inf(A)$

Prop: sea $A \subseteq \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{R}$ entonces $i = \inf(A)$ si y solo si:

1) i es cota inf de A

2) $\forall \varepsilon > 0$ existe un $a_\varepsilon \in A$ talque $i \leq a_\varepsilon < i + \varepsilon$

Teo: sea $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ y acotado inferiormente $\Rightarrow \exists i = \inf(A)$

demo: sea $-A = \{-a : a \in A\}$

Entonces $-A$ es acotado superiormente

Como A es acotado inferiormente $\Rightarrow \exists c \in \mathbb{R}$ cota inferior

$\Rightarrow c \leq a \ \forall a \in A$

$\Rightarrow -c \geq -a \ \forall a \in A$

($-c$ acota sup a $-A$)

por completitud $-A$ tiene sup

sea $s = \sup(-A)$, veamos que $-s = \inf(A)$

1) $-s$ es cota inf $\rightarrow -s \leq a \ \forall a \iff s \geq -a$ $\therefore$

2) sea c cota inf de A

$\Rightarrow -c$ es cota superior de $-A$

$\Rightarrow -c \geq s \Rightarrow c \leq -s$ $\therefore$

PRÁCTICA

① sean $A = \left\{ \frac{1}{n^2+n+2} : n \in \mathbb{N} \right\}$ $B = \left\{ (-1)^m + \frac{3}{n} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$

hallar supremo, infimo, máximo, minimo de A y B

sol: afirmamos que $0 = \inf(A)$ y que A no tiene minimo, Probemos esto:

Para eso quremos ver que 0 es cota inferior de A y que es la mayor de ellas

*) 0 es cota inferior de A porque $\frac{1}{n^2+n+2} > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, pues es division de numeros positivos.

*) supongamos que $i > 0$ es una cota inferior de A. Queremos ver que no existe un i como en el renglón de arriba, para eso, vamos a encontrar un $n \in \mathbb{N}$ talque $\frac{1}{n^2+n+2} < i$ lo que probaría que i no es cota inferior de A.

$\frac{1}{n^2+n+2} < i$

$\frac{1}{i} < n^2+n+2$

si encuentro un $n > i$, entonces $\frac{1}{n^\circ \text{ gran}} < i$ ✓ $\therefore$

Por Arq. existe un número $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} \leq i$, pero como $n^2 + 2 > 0$, entonces $n^2+n+2 > n$ y luego $\frac{1}{n^2+n+2} < \frac{1}{n} < i$, esto prueba que i no es cota inferior $\Rightarrow 0 = \inf(A)$

buscamos $\sup(A)$.

necesito que n sea un numero chico y el numero más chico que puede tomar n es 1 xq $n \in \mathbb{N}$ y los $\mathbb{N}$ son $\{1, 2, 3, \ldots\}$ sin incluir el cero.

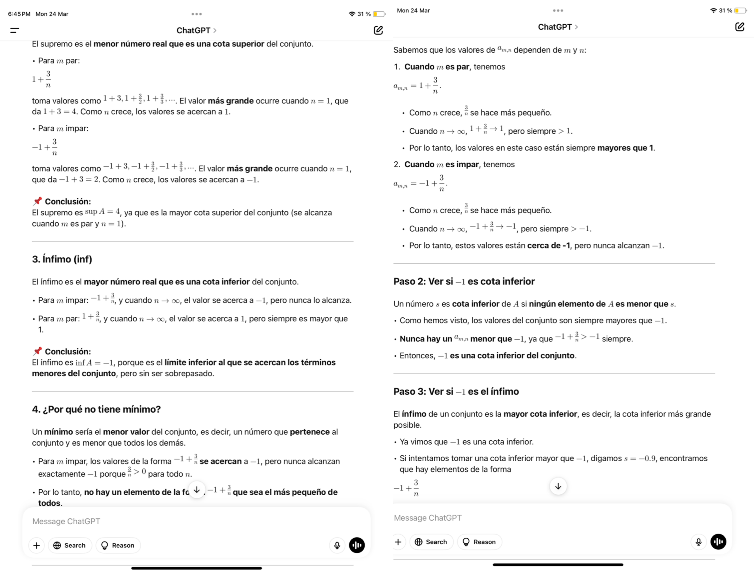
afirmamos que $\sup(A) = \max(A) = \frac{1}{4}$

como $\frac{1}{4} \in A$, alcanza con probar que $\frac{1}{4}$ es una cota superior de A. para eso usemos que $n^2 \geq 1$, $n \geq 1$ porque $n \in \mathbb{N}$ y luego $n^2+n+2 \geq 1+1+2 = 4$

$\Rightarrow \frac{1}{n^2+n+2} \leq \frac{1}{4}$ para todo $n \in \mathbb{N}$

Por último, A no tiene mínimo porque todos los elementos de A son positivos (son division de dos positivos) y luego $0 \notin A$.

xq $\frac{3}{n}$ y $n \neq 0$


El supremo es el **menor número real que es una cota superior** del conjunto.

- Para m par:

$1 + \frac{3}{n}$

toma valores como $1+3, 1+\frac{3}{2}, 1+\frac{3}{3}, \cdots$. El valor **más grande** ocurre cuando $n = 1$, que da $1 + 3 = 4$. Como n crece, los valores se acercan a 1.

- Para m impar:

$-1 + \frac{3}{n}$

toma valores como $-1+3, -1+\frac{3}{2}, -1+\frac{3}{3}, \cdots$. El valor **más grande** ocurre cuando $n = 1$, que da $-1 + 3 = 2$. Como n crece, los valores se acercan a -1.

📌 **Conclusión:**
El supremo es $\sup A = 4$, ya que es la mayor cota superior del conjunto (se alcanza cuando m es par y $n = 1$).

3. Ínfimo (inf)

El ínfimo es el **mayor número real que es una cota inferior** del conjunto.

- Para m impar: $-1 + \frac{3}{n}$, y cuando $n \to \infty$, el valor se acerca a -1, pero nunca lo alcanza.
- Para m par: $1 + \frac{3}{n}$, y cuando $n \to \infty$, el valor se acerca a 1, pero siempre es mayor que 1.

📌 **Conclusión:**
El ínfimo es $\inf A = -1$, porque es el **límite inferior al que se acercan los términos menores del conjunto**, pero sin ser sobrepasado.

4. ¿Por qué no tiene mínimo?

Un **mínimo** sería el **menor valor** del conjunto, es decir, un número que **pertenece** al conjunto y es menor que todos los demás.

- Para m impar, los valores de la forma $-1 + \frac{3}{n}$ **se acercan** a -1, pero nunca alcanzan exactamente -1 porque $\frac{3}{n} > 0$ para todo n.
- Por lo tanto, **no hay un elemento de la fo**[illegible] $-1 + \frac{3}{n}$ **que sea el más pequeño de todos.**

Sabemos que los valores de $a_{m,n}$ dependen de m y n:

1. **Cuando m es par**, tenemos $a_{m,n} = 1 + \frac{3}{n}$.
   - Como n crece, $\frac{3}{n}$ se hace más pequeño.
   - Cuando $n \to \infty$, $1 + \frac{3}{n} \to 1$, pero siempre > 1.
   - Por lo tanto, los valores en este caso están siempre **mayores que 1**.
2. **Cuando m es impar**, tenemos $a_{m,n} = -1 + \frac{3}{n}$.
   - Como n crece, $\frac{3}{n}$ se hace más pequeño.
   - Cuando $n \to \infty$, $-1 + \frac{3}{n} \to -1$, pero siempre > -1.
   - Por lo tanto, estos valores están **cerca de -1**, pero nunca alcanzan -1.

Paso 2: Ver si -1 es cota inferior

Un número s es **cota inferior** de A si **ningún elemento de A es menor que s**.

- Como hemos visto, los valores del conjunto son siempre mayores que -1.
- **Nunca hay un $a_{m,n}$ menor que** -1, ya que $-1 + \frac{3}{n} > -1$ siempre.
- Entonces, -1 **es una cota inferior del conjunto**.

Paso 3: Ver si -1 es el ínfimo

El **ínfimo** de un conjunto es la **mayor cota inferior**, es decir, la cota inferior más grande posible.

- Ya vimos que -1 es una cota inferior.
- Si intentamos tomar una cota inferior mayor que -1, digamos $s = -0.9$, encontramos que hay elementos de la forma

$-1 + \frac{3}{n}$

② sea x un número real cualquiera, probar que existe un único entero $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n \leq x < n+1$

aclaración → A este número se lo llama "parte entera de x" su notacion es $\lfloor x \rfloor = n$

sol: sea $A = \{m \in \mathbb{Z} : m \leq x\}$ si probamos que A no es vacio y acotado superiormente, entonces A tiene supremo (por el axiomo del supremo)

A es acotado porque x es cota superior de A

A es no vacio porque $\mathbb{Z}$ no está acotado inferiormente pues $-\mathbb{N}$ no está acotado inferiormente

Por todo esto, existe $\sup(A)$ y lo vamos a llamar n.

ahora hay que probar que → $n \in \mathbb{Z}$

↳ $n \leq x$

↳ $x < n+1$

tratemos de probar que $\sup(A) \in A$ (es decir que $n = \sup(A)$ es un máximo)

como $n = \sup(A)$ y x es cota superior de A, $n \leq x$. Como $n = \sup(A)$, para todo $\varepsilon > 0$, existe un elemento $a \in A$ tal que $n - \varepsilon < a \leq n$.

En particular, $\forall m \in \mathbb{N}$, existe $a_m \in A \ / \ n - \frac{1}{m} < a \leq n$.

En particular $\forall m \in \mathbb{N}$, $a_m \in \left(n - \frac{1}{m}, n\right] \subseteq (n-1, 0]$

como $(n-1, n]$ tiene longitud 1, hay un único entero k en $(n-1, n]$, entonces $a_m = k$ es ese entero para todo $m \in \mathbb{N}$. luego $k \in \left(n - \frac{1}{m}, n\right] \ \forall m \in \mathbb{N}$ y entonces $k > n - \frac{1}{m} \ \forall m \in \mathbb{N}$ por lo que $k \geq n \Rightarrow n \in A$.

hemos probado que $n \in A$ y luego $n \in \mathbb{Z}$ y $n \leq x$.

Falta probar que $x < n+1$.

como $n = \sup(A) = \max(A)$, tenemos que $n+1 \notin A$, como $n+1$ es entero, debe ser que $n+1 > x$.

practica (27/03)

ej 7 guia 1

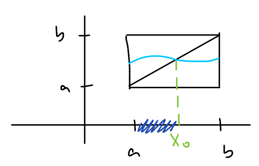
sea $f : [a,b] \longrightarrow [a,b]$ creciente y tal que $f(a) > a$, sea $x = \sup\{x \in [a, b] : f(x) > x\}$ probá que $f(x_0) = x_0$

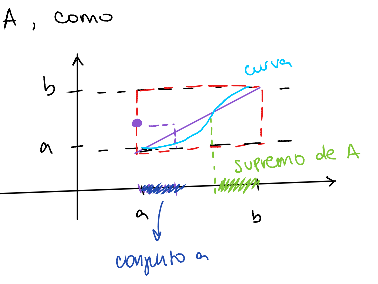
sol:

sea $A = \{x \in [a, b] \ / \ f(x) > x\}$ A es no vacio porque $a \in A$ y tiene cota superior (por ejemplo $b \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow \exists x_0 = \sup(A)$

$x_0 = \sup(A)$ y entonces es una cota superior de A, por lo que $x \geq a \ \forall a \in A$. como f es creciente, $f(x_0) \geq f(a) > a \ \forall a \in A$

Entonces $f(x_0)$ es cota superior de A, como $x_0 = \sup(A) \Rightarrow x_0 \leq f(x_0)$





sea $\varepsilon > 0$, conciderames $x_0 + \varepsilon > x_0$ como f es creciente, tenemos que $f(x_0 + \varepsilon) \geq f(x_0) \geq x_0$

como $x_0 + \varepsilon > x_0 = \sup(A)$, tenemos que $x_0 + \varepsilon \notin A$, y entonces $f(x_0 + \varepsilon) \leq x_0 + \varepsilon$

$\Rightarrow x_0 + \varepsilon \geq f(x_0 + \varepsilon) \geq f(x_0) \geq x_0 \quad \forall \varepsilon > 0$ tal que $x_0 + \varepsilon \in [a\ b]$

(salvo en el caso en que $x_0 = b$)

luego, basta tomar $\varepsilon \to 0$ y obtenemos $x_0 \geq f(x_0) \geq x_0$

El caso en que $x_0 = b$:

si $x_0 = b$, $\forall n \in \mathbb{N} \ \exists a_n \in A \ / \ b - \frac{1}{n} < a_n \leq b$

$f(b) \geq f(a_n) > a_n > b - \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow f(b) \geq b - \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow f(b) = b.$

Sucesion

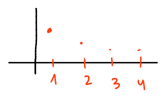
Teorica (sucesion)

def: una sucesion (en $\mathbb{R}$) es una funcion $a: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

Notacion: $a(n) = a_n \in \mathbb{R}$

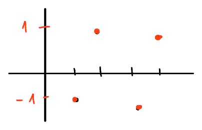
$a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ó $n\in\mathbb{N}$

ejemplo ① $a_n = \frac{1}{n}$



$a = (1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots)$

② $a_n = (-1)^n$, $a = (-1, 1, -1, 1, \dots)$

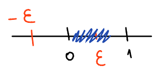


def: sea $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{R}$. decimos que a_n converge a l

$[a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} l$, $\lim_{n\to\infty} a_n = l]$ si dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ / si $n \geq n_0$: $|a_n - l| < \varepsilon$

ejemplo:

① $a_n = \frac{1}{n}$, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ → probemoslo : sea $\varepsilon > 0$, queremos encontrar n_0 / $|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon$ $\forall n \geq n_0$

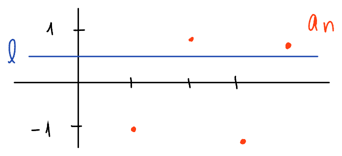


$|\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \underbrace{\frac{1}{\varepsilon}}_{\neq 0}$ sea n_0 con $n_0 \geq \frac{1}{3}$ (Puedo por el princip de Arqui)

Entonces, si $n \geq n_0 \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon$

② $a_n = (-1)^n$, Probemos que (a_n) NO converge

- conv: $\exists\, l \in \mathbb{R}$ / $\forall \varepsilon > 0$ $\exists\, n_0$ / $\forall n \geq n_0$, $|a_n - l| < \varepsilon$
- no conv: $\forall\, l \in \mathbb{R}$ / $\exists\, \varepsilon > 0$ / $\forall n_0 \in \mathbb{N}$ $\exists\, n \geq n_0$, $|a_n - l| \geq \varepsilon$



sea $l \in \mathbb{R}$. hay dos opciones,

① $l > 0$

② $l < 0$

① supongo $l > 0$, sea $\varepsilon = 1$. sea $n_0 \in \mathbb{N}$, si n_0 es impar, tomo $n = n_0 \Rightarrow (-1)^n = -1$

y como $l \geq 0 \Rightarrow |l - a_n| = l - (-1) = l + 1 \geq 1$

si n_0 es par $\Rightarrow$ elijo $n = n_0 + 1$ y hago lo mismo

Subsucesiones

$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_{100}, a_{101}, \dots a_{500}$

(me quedo con algunos pero infinitos)

def: sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ una sucesión. una subsucesion $(a_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ va a ser un subconjunto de (a_n) con la prop $n_1 < n_2 < \dots$

ejemplo:

$a_n = \frac{1}{n}$ $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots)$

$a_{n_j} = a_{2j} = \frac{1}{2j} \to a_{n_j} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots)$

$a_{n_j} = a_{2j+1} = \frac{1}{2j+1} \to a_{n_j} = (\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \dots)$

ojo! no es subsucesion

$(1, 1, 1 \dots \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots)$ no puedo repetir

$(\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}, \frac{1}{100}, \frac{1}{3})$ no puedo desordenar

Prop → sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ una sucesion, y $(a_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ una subsuc.

si $\lim_{n\to\infty} a_n = l \Rightarrow \lim_{j\to\infty} a_{n_j} = l$

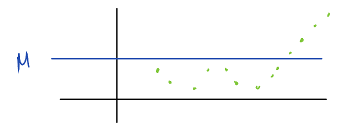
demo: sea $\varepsilon > 0$ como $a_n \xrightarrow[n]{} l$ $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ / si $n \geq n_0$. $|a_n - l| < \varepsilon$ $\forall n \geq n_0$

$(a_1, a_2, a_3, \dots a_{n_0}, a_{n_0+1})$

sea $n_{j_0} \geq n_0$, entonces si $n_j \geq n_{j_0} \Rightarrow |a_{n_j} - l| < \varepsilon$ (xq $n_j \geq n_0$)

DEF: decimos que una sucesion $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge a $\pm\infty$ $[\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty]$

si $\forall M > 0$ (ó $M < 0$) $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$, $a_n \geq M$ (ó $a_n \leq M$)



ejemplo : $a_n = n$ $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$

def: Decimos que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge si no converge ó diverge a $\pm\infty$

Prop → sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ $a, b \in \mathbb{R}$

① $\lim_{n\to\infty} c\, a_n = c \cdot a$ $\forall c \in \mathbb{R}$

② $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$

③ $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b$

④ si $b \neq 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$

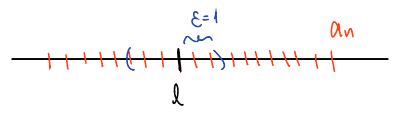
⑤ si $a_n \leq b_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ (ó $n \geq n_0$)

$\Rightarrow a \leq b$

Def: una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada si el conjunto $\{a_n : n\in\mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$ es acotado (sup - e - inf) es decir, si existe $M > 0$ / $|a_n| \leq M$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Prop → si existe $\lim_{n\to\infty} a_n = l \Rightarrow (a_n)$ es acotada.

DEMO



sabemos que $\lim_{n\to\infty} a_n = l$. sea $\varepsilon = 1$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ / si $n \geq n_0$ $|a_n - l| < 1$

pvq $|a_n| \leq M$

desigualdad triangular

$|a_n| = |a_n - l + l| \leq |a_n - l| + |l| < |l| + 1$ $\forall n \geq n_0$

(uso el truco de sumar y restar)

sea $M = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{n_0}|, |l|+1\}$ (lo puedo hacer xq son finitos)

Este M sirve → $|a_n| \leq M$

def: Decimos que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona (estrictamente) creciente decreciente

si $n > m \Rightarrow a_n \geq a_m$ ($>$)

$a_n \leq a_m$ ($<$)

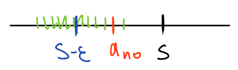
Prop → sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesion monótona creciente (decreciente) y acotada, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = s = \sup\{a_n : n\in\mathbb{N}\}$

$(= i = \inf\{a_n : n\in\mathbb{N}\})$

demo : como $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada $\Rightarrow \{a_n : n\in\mathbb{N}\}$ está acotada sup.

$\Rightarrow$ existe $s = \sup\{a_n : n\in\mathbb{N}\}$

sea $\varepsilon > 0$



como $s = \sup(a_n)$, existe a_{n_0} / $s - \varepsilon < a_{n_0} \leq s$

como (a_n) es monotona creciente, si $n \geq n_0 \Rightarrow a_n \geq a_{n_0}$

entonces : $s - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n < s$ $\Rightarrow |s - a_n| = s - a_n < \varepsilon$

Prop → Equivalencia de supremo

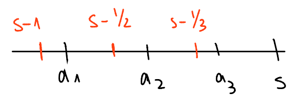
sea $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ y acot sup . Entonces $s = \sup(A)$ sii

① s es cota superior

② $\exists\, (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ / $\lim_{n\to\infty} a_n = s$

demo: $\Rightarrow$) $s = \sup(A)$ (1) ✓

construimos a_n : sea $\varepsilon = \frac{1}{n}$



Existe $a_n \in A$ con $s - 1/2 < a_n \leq s$

Entonces $|s - a_n| = s - a_n < 1/n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} s$ (prop del sandwich)

$\Leftarrow$) s cumple (1) y (2)

pvq $s = \sup(A)$

s es cota superior ✓

sea $\varepsilon > 0$, como $a_n \to s$ $\exists$

n_0 / si $n \geq n_0 \Rightarrow |s - a_n| < \varepsilon$

En particular, $|s - a_{n_0}| < \varepsilon$

pero $|a_{n_0} - s| = s - a_{n_0} < \varepsilon$

$\iff s - \varepsilon < a_{n_0} \leq s$, $a_{n_0} \in A$

Practica (sucesiones)

① sea la sucesion $a_n = \frac{n \cdot sen(\frac{1}{n})}{e^n}$ $\Big\} \to +\infty$ $\Big\} \to +\infty$ $\quad \ell = 0$

def de limite:

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 / n \geq n_0$

$|a_n - \ell| < \varepsilon$

↳ depende de mi ε veo cuan mi sucesion esta más cerca del limite

"puedo encontrar a partir de que momento, mi sucesion esta cerca del limite?"

quiero ver que

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 / \forall n \geq n_0 \quad |\ell_n - \ell| < \varepsilon$

$\left| \frac{n \cdot sen(\frac{1}{n})}{e^n} - 0 \right| \leq \left| \frac{n \cdot \frac{1}{n}}{e^n} \right| \leq \frac{1}{e^n}$

fui acotando hasta llegar aca.

tengo que encontrar un e^n tal que sea $< \varepsilon$.

sea $\varepsilon > 0$ si $n_0 = \log(\frac{1}{\varepsilon})$ $\quad \Rightarrow$ si $n \geq \log \frac{1}{\varepsilon}$ tal que

¿ $\frac{1}{e^n} < \varepsilon$? $\quad \log \frac{1}{\varepsilon} < \log e^n$ $\quad |a_n - \ell| < \varepsilon$

$\log \frac{1}{\varepsilon} < n_0$

②

sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ tal que $\underbrace{a_n \xrightarrow[n]{} a \in \mathbb{R}}_{\text{esto es lo unico que sabemos que vale}}$

veamos que $a_n^2 \xrightarrow[n]{} a^2$

veamos que $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 / \forall n \geq n_0$

$|a_n^2 - a^2| < \varepsilon$ voy a intentar a acotar

$|a_n^2 - a^2| \leq |(a_n + a)| |(a_n - a)|$ esto lo podemos acotar. "$< \varepsilon$"

(usamos diferencia de cuadrados)

si puedo decir que esto es más chico que una constante k. ganamos. $\leq k$

$a_n \xrightarrow[n]{} \ell$ entonces $|a_m| < m$

con $M \in \mathbb{R}$

$< \underbrace{|a_n + a|}\, |a_n - a|$ $\quad \Rightarrow \leq k\, |a_n - a|$

dado $\varepsilon > 0 \ \exists n_0 /$ $|a_n - a| < \varepsilon$

$\leq |a| + M$ donde $M \geq |a_m| \ \forall m$ $\quad \leq k\, \varepsilon$

pues a_m converge

$= k$

sea $\varepsilon > 0$

$< |a_m + a|\, |a_m - a| \leq (|a_m| + |a|)\, |a_m - a|$

✓

$|a_m|$ está acotado

entonces llegue a:

$|a_n^2 - e^2| \leq k\, |a_n - a|$

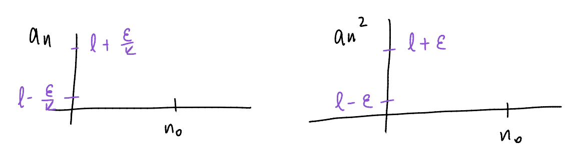
sea $\varepsilon > 0$ llamo $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{k} > 0$, entonces

como $a_n \xrightarrow[n]{} \ell \quad \exists n_0 / \forall n \geq n_0 \ |a_n - \ell| < \varepsilon'$

$|a_n^2 - e^2| \leq k\, |a_n - a| < \cancel{k} \frac{\varepsilon}{\cancel{k}} < \varepsilon$.

yo tengo dos sucesiones

a_n y a_n^2



IDEAS: ✓ elegir ε adecuadamente, ya sea → despejando ó usando otra sucesion que converja

ej 3 práctica

sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesion / $\lim_{n \to \infty} a_n = \ell \in \mathbb{R}$

a) demostrar que si $r > \ell$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n < r$ $\forall n \geq n_0$

sol: sea $\varepsilon = r - \ell > 0$ como $a_n \to \ell \ \exists n_0 / \forall n \geq n_0$

$|a_n - \ell| < \varepsilon$

entonces $\ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$

$a_n < \cancel{\ell} + r - \cancel{\ell}$

$a_n < r$

creo si este →

(seguimiento de un ejercicio)

x_n creciente, $x_{n_k} \to \ell$, entonces $\ell \geq x_n \ \forall n \in \mathbb{N}$

sol: como $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es acotada y monótona

$\Rightarrow (x_n)$ converge. Es decir, $\exists \tilde{\ell} \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \to \tilde{\ell}$. Pero

entonces, $x_{n_k} \to \tilde{\ell}$ pues es subsucesion de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $\Rightarrow \tilde{\ell} = \ell$.

Teorema sandwich

sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$

y sea $n_0 \in \mathbb{N}$ y $\ell \in \mathbb{R}$

tal que se cumple

1) $\forall n \geq n_0 \quad a_n \leq b_n \leq c_n$

2) $\lim_n a_n = \lim_n c_n = \ell$

$\Big\}$ Entonces $\lim_n b_n = \ell$

dado $\varepsilon > 0 \quad \exists n_1 / \forall n \geq n_1$

$|a_n - \ell| < \varepsilon$ entonces $\ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon$

para ese $\varepsilon > 0 \quad \exists n_2 / \forall n \geq n_2$

$|c_n - \ell| < \varepsilon$

Resumen

$\Rightarrow$ dado $\varepsilon > 0$ sea $n_0' = \max\{n_0, n_1, n_2\}$

vale que $\ell - \varepsilon < a_n < b_n < c_n < \ell + \varepsilon$

$\exists \ |b_n - \ell| < \varepsilon$

Ej sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ creciente y sea $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ una subsucesion tal que $\lim_k a_{n_k} = \ell$

sol:

si la sucesion es creciente veamos que $\lim_n a_n = \ell$

veamos que $\ell \geq a_n \ \forall n$. supongo que no $\exists m / a_m > \ell$

sea $\varepsilon = a_m - \ell > 0$.

como $a_{n_k} \xrightarrow[n]{} \ell \quad \exists k_0 / \forall k \geq k_0 \quad |a_{n_k} - \ell| < \varepsilon$

Entonces sea k tal que $n_k > m$ y $n_k > m_{k_0}$

com $n_k > m \quad a_{n_k} \geq a_m$ pues a_n es creciente.

supongo que $\exists m / \boxed{a_m > \ell}$ como a_m es creciente

vale que $\forall n \geq m \ \boxed{\ell \leq a_m < a_n}$

como $a_{n_k} \to \ell$ $\quad (a_m = \text{"}r\text{"})$ cambio nombre

$\Rightarrow \exists k_0 / \forall k \geq k_0 \quad a_{n_k} < r$

sea $k_1 / \boxed{n_{k_1} > m}$ y $k_1 \geq k_0$

entonces $a_{n_{k_1}} < \ell + \varepsilon \Rightarrow$ pues $a_{n_k} \to \ell$

y $a_m < a_{n_{k_1}} \Rightarrow$ pues $n_{k_1} > m$

$a_{n_{k_1}} < \ell + \varepsilon < a_m$ y a_n es creciente

$a_m < a_{n_{k_1}}$ ABS!

Practica (27/03)

① decidir si la sucesion

$a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$ es convergente

el más chico

el más chico (denom ⊕ grande)

sol: Vale las siguentes cotas:

$a_n \geq \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} = (n+1)\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$

$a_n \leq (n+1)\frac{1}{\sqrt{n^2}}$ (osea $\frac{1}{n}$)

entonces $\frac{n+1}{\sqrt{n^2+n}} \leq a_n \leq \frac{n+1}{n}$

$\downarrow n \to \infty \qquad \downarrow n \to \infty$

$1 \leq \lim a_n \leq 1$

Por el teorema del sandwich $a_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$

② sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesion definida del siguiente modo:

$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 2}{x_n + 1}$ y $x_1 = 5$

decidir si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente y si lo es, calcular su limite.

$\Rightarrow 5, \frac{27}{6}, \ldots$

sol: sabemos que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 2}{x_n + 1}$, en particular, si $x_n \to L$ tendriamos

que $L = \lim_{n \to \infty} x_{n+1} = \lim_{n \to \infty} \frac{x_n^2 + 2}{x_n + 1} = \frac{L^2 + 2}{L + 1}$

$L = \frac{L^2 + 2}{L + 1} \to \cancel{L^2} + L = \cancel{L^2} + 2$

$\boxed{L = 2}$

afirmo que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es monótona y acotada.

tratemos de probar que $x_{n+1} < x_n \ \forall n \in \mathbb{N}$

$\Leftrightarrow \frac{x_n^2 + 2}{x_n + 1} < x_n \Leftrightarrow x_n^2 + 2 < x_n (x_n + 1)$

$\cancel{x_n^2} + 2 < \cancel{x_n^2} + x_n$

$2 < x_n$

luego basta con ver que $2 < x_n \ \forall n \in \mathbb{N}$. para concluir que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es converg.

probemos que $2 < x_n \ \forall n \in \mathbb{N}$, podemos usar induccion

supongamos que $x_n > 2$, q.v.q: $x_{n+1} > 2 \Leftrightarrow \frac{x_n^2 + 2}{x_n + 1} > 2$

$x_n^2 + 2 > 2(x_n + 1)$

$x_n^2 + \cancel{2} > 2x_n + \cancel{2}$

$\boxed{x_n > 2}$

como $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es monótona y acotada, converge y luego $x_n \longrightarrow 2$

1. Pruebe que si $x < y + \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, entonces $x \leq y$. Deduzca que si $|x - y| < \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, entonces $x = y$.

$\{x < y + \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0\}$ entonces supongo $x > y$, tomo $\varepsilon = \frac{x-y}{2} > 0$ (pruebo por contrad.)

entonces $y + \frac{x-y}{2} = \frac{2y + x - y}{2}$

$= \frac{x+y}{2} \to$ supong $x > y \to \frac{x+x}{2} = \frac{2x}{2} = \underline{\underline{x}}$

$\Rightarrow x < x$ ABS! llego a un absurdo entonces pruebo

pues $x < y + \varepsilon \Rightarrow x \leq y$

$\Rightarrow$ demuestro que y tiene que ser mayor a x.

si $|x - y| < \varepsilon \ \forall \varepsilon > 0$ entonces $x = y$.

distribuyo el módulo

$x - y < \varepsilon$ ó $y - x < \varepsilon$

$x < \varepsilon + y \qquad y < \varepsilon + x$

como $\varepsilon > 0$ entonces cualq número positivo sumandole va a seguir siendo mayor, entonces

$x \leq y \qquad y \leq x$

y $x \leq y$ e $y \leq x$ si y solo si $\underline{\underline{x = y}}$.

3. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ no vacío y acotado inferiormente. Pruebe la siguiente equivalencia:

$$i = \inf A \iff \begin{cases} i \leq a \text{ para todo } a \in A, \\ \text{para todo } \varepsilon > 0 \text{ existe } a \in A \text{ tal que } i \leq a < i + \varepsilon. \end{cases}$$

puedo usar el axioma de completitud.

$\Rightarrow)$ i es cota inferior ✓

sea $\varepsilon > 0$, sea $T = i + \varepsilon > i \Rightarrow T$ no es cota inferior

$\Rightarrow \exists\, a \in A \,/\, T > a$ como ε es arbitraria, vale siempre.

$\Leftarrow)$ i es cota inferior ✓

supongo que i no es la mayor de las cotas inferiores

$\Rightarrow \exists\, T > i$ con T cota inferior de A osea T es la mayor de las cotas inf.

sea $\varepsilon = T - i > 0 \Rightarrow \exists\, a \in A \,/\, a < i + \varepsilon = \cancel{i} + T - \cancel{i} = T$

$\Rightarrow \exists\, a \in A \,/\, a < T$ Abs! abs porque T es cota inferior

$\therefore$ por lo tanto i es la mayor de las cotas inferiores

4. Halle, si existen, supremo, ínfimo, máximo y mínimo de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$, y pruebe que lo son:

(a) $(a, b]$

(b) $B = \{\frac{1}{2^n} : n \in \mathbb{N}\}$

(c) $B \cup \{0\}$

(d) $\{x^2 - x - 1 : x \in \mathbb{R}\}$

b) $B = \left\{\frac{1}{2^n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ (lo hice en mi carpeta)

8. Pruebe, usando la definición de límite:

(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{3-2n}{n+1} = -2$.

(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0$.

(c) $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n-3}{2^n+4} = 1$.

ⓐ $\lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{3-2n}{n+1}}_{a_n} = \underbrace{-2}_{L}$ $\quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \,/\,$ si $n \geq N \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$

$\left|\frac{3-2n}{n+1} - (-2)\right| < \varepsilon$

$\frac{3-2n+2(n+1)}{n+1} = \frac{3-\cancel{2n}+\cancel{2n}+2}{n+1} = \left|\frac{5}{n+1}\right| < \varepsilon$

$\frac{5}{\varepsilon} < n+1$

$\boxed{\frac{5}{\varepsilon} - 1 < n}$

$\Rightarrow \therefore$ tomando $n > \frac{5}{\varepsilon} - 1 \ \forall n \geq N \in \mathbb{N} \Rightarrow |a_n - (-2)| < \varepsilon$.

ⓑ $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0$

$\left|\frac{\sin(n)}{n} - 0\right| < \varepsilon$

$\frac{\sin(n)}{\varepsilon} < n$ $\quad$ cuando $n \to \infty$ $\sin(n) \to 1$

$\frac{1}{\varepsilon} < n \quad \Rightarrow \forall n \geq n_0 \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon$

$\Rightarrow \frac{\sin(n)}{n} \leq \frac{1}{n} < \varepsilon$

ⓒ $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n-3}{2^n+4} = 1$

$\left|\frac{2^n-3}{2^n+4} - 1\right| < \varepsilon$

$\frac{2^n - 3 - 1(2^n+4)}{2^n+4} = \frac{\cancel{2^n} - 3 - \cancel{2^n} - 4}{2^n+4} = \left|\frac{-7}{2^n+4}\right|$

tomo $|\,| > 0$

$\frac{7}{2^n+4} < \varepsilon \iff \frac{7}{\varepsilon} < 2^n + 4 \iff \frac{7}{\varepsilon} - 4 < 2^n$

$\log_b a = c \iff b^c = a$

$\Rightarrow$ tomando $n_0 \in \mathbb{N} \,/\, n_0 > \log_2\left(\frac{7}{\varepsilon} - 4\right)$

$\Rightarrow |a_n - 1| < \varepsilon \ \forall n \in n_0 \in \mathbb{N}$ $\qquad \log_2\left(\frac{7}{\varepsilon} - 4\right) < n$

9. Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones de números reales tales que $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell_1$ e $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell_2$. Pruebe que si $x_n \leq y_n$ para todo n, entonces $\ell_1 \leq \ell_2$.

$\lim_{n\to\infty} x_n \to \ell_1 \qquad \lim_{n\to\infty} y_n \to \ell_2 \qquad$ sdq $\boxed{\text{si } x_n \leq y_n} \Rightarrow \ell_1 \leq \ell_2$

$a \leq b$

tomo conjunto $A = \{x \in x_n \,/\, \forall n \in \mathbb{N}\} \Rightarrow \sup(A) = L_1 \iff a \leq L_1 \ \forall a \in A$

$B = \{y \in y_n \,/\, \forall n \in \mathbb{N}\} \Rightarrow \sup(B) = L_2 \iff b \leq L_2 \ \forall b \in B$

entonces quiero ver que $a \leq b \ \forall a \in A, b \in B$

$\Updownarrow$

$L_1 \leq L_2$

pruebo por contradicción $\Rightarrow$ supongo $L_1 > L_2$ osea $a > b$

como $L_1 \geq a \ \forall a \in A$ y $L_2 \geq b \ \forall b \in B$

como L_1 es el $\sup(A) \Rightarrow L_1 \geq a > b$

y absurdo porque $a \leq b \to$ por lo tanto $\boxed{L_1 \leq L_2}$ ✓

10. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones de números reales tales que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0 e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada, pruebe que $(x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0.

acotada superiormente ó acotada inferiormente

"$\exists\, \ell \in \mathbb{R} \,/\, \forall \varepsilon > 0, \exists\, n_0 \,/\, \forall n \geq n_0$ $|a_n - \ell| < \varepsilon$"

"x_n converge a 0" $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 0$

y_n

$n > 0$

"y_n está acotada" $\Rightarrow \exists\, n > 0 \,/\, |y_n| \leq n \ \forall n \in \mathbb{N}$

sdq $\lim_{n\to\infty} (x_n y_n) = 0 \Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0 \,/\, \exists\, n \in \mathbb{N} \,/\,$ si $n > n_0$ entonces $|a_n - L| < \varepsilon$

$|x_n y_n - 0| < \varepsilon$

$|x_n y_n| = |x_n||y_n| \to$ como y_n está acotada $\Rightarrow |y_n| \leq n$

$\leq |x_n| \cdot n$

$|x_n| \cdot n < \varepsilon$

$\boxed{\exists\, n \,/\, |x_n| n < \varepsilon \ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0}$

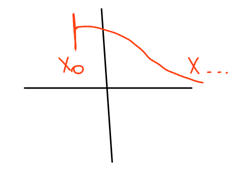
11. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ decreciente. Pruebe que:

$x_{n+1} \leq x_n$

(a) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada inferiormente, entonces tiene límite y

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

(b) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es no acotada inferiormente, entonces $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$.



ⓐ x_n acotado inferiormente $\to$ $x_0 \geq x$ es el mayor de todos los

los valores se acerca cada vez más a I cuando n es grande.

$\lim_{n\to\infty} x_n = \underbrace{\inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}_{\ell}$

uso la def de límite.

$\Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0 \,/\, |x_n - \ell| < \varepsilon$

$x_n < \varepsilon + \ell$

si ℓ es el ínfimo, $\ell + \varepsilon$ no es una cota inferior (xq al número más chico le estas sumando un número)

por definición de ínfimo

$x_n \geq \ell$

$\underline{(\ell \text{ es el más chiquito})}$

separo módulo

$-\varepsilon < x_n - i < \varepsilon$

$i - \varepsilon < x_n \ \wedge \ x_n < \varepsilon + i$

$i \leq x_n$

y como i es cota inf

$\leq$

como i es el ínfimo $\to x_n \geq i$

y como $i + \varepsilon$ no es cota inferior $\to \exists\, x_{n_0} < i + \varepsilon$

(xq si todos los x_n fueran mayores o iguales a $i + \varepsilon$, entonces $i + \varepsilon$ sería tmb cota inferior y eso no puede pasar! $\Rightarrow$ porque el ínfimo es la más grande de las cotas inferiores.

entonces si $x_0 < i + \varepsilon$ es decreciente

$\forall n \geq n_0 \quad x_n \leq x_{n_0} < i + \varepsilon$

y como además $x_n \geq i \Rightarrow i \leq x_n < i + \varepsilon \to |x_n - i| < \varepsilon$

def de límite

$\lim_{n\to\infty} x_n = I$. ✓

14. Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ y $\ell \in \mathbb{R}$.

Pruebe que si toda subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tiene una (sub)subsucesión $\left(x_{n_{k_j}}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ que converge a ℓ, entonces la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a ℓ.

cardinalidad

def: son X, Y dos conjuntos. decimos que **son coordinables** (o que tienen el mismo cardinal) ✓ **si $\exists\ f\ X \to Y$ biyectiva** (nota $X \sim Y$)

prop: $\sim$ es una relacion de equivalencia

demo: ① reflexiva $X \sim X$ $\quad X \to X$ biy ✓

② simétrica $X \sim Y$
$\Rightarrow f\ X \to Y$ biyectiva $\Rightarrow f^{-1}\ Y \to X$
biy $\to Y \sim X$ ✓

② transitiva $X \sim Y$, $Y \sim Z$
$\Rightarrow f: X \to Y$ biy $\quad g: Y \to Z$ biy
$\Rightarrow g \circ f: X \to Z$ biy $\Rightarrow X \sim Z$ ✓

ejemplo:

① $\mathbb{N} \sim \{n \in \mathbb{N},\ n \text{ par}\} = \text{Pares}$
$f: \mathbb{N} \to \text{pares}$ es biyectiva
$n \longmapsto 2n$
(n es coordinable con los pares)

② $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$
$$f(n) = \begin{cases} n/2 & \text{si } n \text{ es par} \\ -\left(\frac{n-1}{2}\right) & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} \quad \text{es biy}$$

③ $\mathbb{N} \sim \mathbb{Q}_+ = \{q \in \mathbb{Q},\ q > 0\}$
(tarea) $\to$ (sug. usar $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \sim \mathbb{Q}$)

DEF: ¿Qué es una cardinal? (not: $\#X$ ó $\text{card}(X)$)

el cardinal de un conjunto X es la clase de equivalencia de X con respecto a $\sim$
$\Rightarrow \#X = \{Y : Y \sim X\}$

distinguimos algunas:
$\#\{1, \dots n\} = n$ $\quad \}$ cardinales finitos
$\#\mathbb{N} = \aleph_0$ (aleph 0) $\quad \}$ cardinales infinitos
$\#\mathbb{R} = c$ (continuo)

def:
un conjunto X se dice:
- finito si es existe $n / X \sim \{1, \dots n\}$
- infinito $\Rightarrow$ si no es finito
- numerable / contable $\Rightarrow$ si es coord con $\mathbb{N}$ ($\#X = \aleph_0$)
- a lo sumo numerable si es finito o numerable

Teo: sea A numerable, $B \subseteq A$
$\Rightarrow B$ es a lo sumo numerable $(B \neq \emptyset)$

demo $\to$ como A es numerable,
$A = \{a_1, a_2, a_3\}$ $\quad f: \mathbb{N} \to A$ $\quad n \longmapsto a_n = f(n)$

como $B \subseteq A$, quiero definir $g(1)$. $\Rightarrow g(1) = a_{j_1}$
donde $j_1 = \min\{j : a_j \in B\}$

si $B = \{a_{j_1}\}$ listo. (es finito)
sino $B = \{a_{j_1}\} \neq \emptyset$ y repito el procedimiento
$\Big\}$ si termina en n pasos, entonc B es finito.

defino $g(n)$ de manera intuitiva

si B es infinito debería probar si g biyectiva
- inyectiva? porque f es inyectiva (la lista de A no tiene repetidos)
- sobre si $b \in B \Rightarrow b \in A$
  $\Rightarrow b = a_n$ para algun n
  $\Rightarrow$ en a b sumo n pasos llego a cubrirlo.

Teo: sea A infinito. Entonces existe $B \subseteq A$ numerable

demo $\to$ sea $a_1 \in A$ cualq, como A es infinito
$A \neq \{a_1\} \Rightarrow A \setminus \{a_1\} \neq \emptyset \Rightarrow \exists\ a_2 \in A \setminus \{a_1\} \Rightarrow$ así sucesivamente ...
osea intuitivamente, si elegí $a_1, \dots a_n$ como $A \setminus \{a_n, \dots, a_n\} \neq \emptyset$
(xq A es infinito) $\Rightarrow \exists\ a_{n+1} \in A \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$

Defino $B = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ $\quad f: \mathbb{N} \to B$ $\quad n \longmapsto a_n$

orden entre los cardinales

def: $\#A = \#B$ si $\exists\ f: A \to B$ biyectiva
$\#A \leq \#B$ si $\exists\ f: A \to B$ inyectiva
($\exists\ g: B \to A$ sobrey)

$\#A < \#B$ si $\#A \leq \#B$ pero $A \nsim B$

ejemplo:
$\#\{1, \dots, n\} \leq \#\mathbb{N}$
$\{1, \dots n\} \to \mathbb{N}$
$j \longmapsto j$

obs: tendríamos que probar la buena definicion y que es relacion de orden

si $\#A \leq \#B$ y $\#A = \#X$, $\#B = \#Y$
$\Rightarrow$ pvq $\Rightarrow \#X \leq \#Y$

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \uparrow g & & h^{-1}\downarrow\uparrow h \\ X & \longrightarrow & Y \end{array}$$

$A \xrightarrow{f} B$ inyectiva; biy g; h biy
$h^{-1} \circ f \circ g$ es iny

$\leq$) es relacion de orden
① reflexiva $\#A \leq \#A$
$id: A \to A$ es iny ✓
② transitividad $\#A \leq \#B$ y $\#B \leq \#C \Rightarrow f: A \to B$ iny
$g: B \to C$ iny $\Rightarrow g \circ f: A \to C$ iny ✓
③ antisimetrica $\#A \leq \#B$ y $\#B \leq \#A \Rightarrow \#A = \#B$

TEOREMA (Cantor - Schroeder - Bernstein)

si $\#A \leq \#B$ y $\#B \leq \#A \Rightarrow \#A = \#B$

ejemplo

① $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es numerable $\quad \mathbb{N}^2 = \{(n, m) : n, m \in \mathbb{N}\}$
1) $\#\mathbb{N} \leq \#\mathbb{N} \times \mathbb{N}$
2) $\#\mathbb{N} \times \mathbb{N} \leq \#\mathbb{N}$

1) $\mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ $\quad n \longmapsto (0, 1)$ $\quad$ es iny ✓

2) $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $\quad (n, m) \longmapsto 2^n \cdot 3^m$ $\quad$ es inyectiva por descomp unica en factores primos
elegí 2 y 3 porque son primos, pero puedo elegir otros primos

por CSB $\to \#\mathbb{N} = \#\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

② $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sucesion de conj numerables
$\Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = A$ es numerable

demo $\to$ $\#\mathbb{N} \leq \#A \Rightarrow \mathbb{N} \to \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, sé que $\exists\ f: \mathbb{N} \to A_1$ biy
pienso $f: \mathbb{N} \to A$ (le agrego más cosas al codominio) iny.

$\to \#A \leq \#\mathbb{N} = \#\mathbb{N} \times \mathbb{N}$
$A \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ iny $\quad A_1 = \{a_{11}, a_{12}, a_{13}\}$
$A_2 = \{a_{21}, a_{22}, a_{23}\}$

$a \in A \Rightarrow a \in A_n$ para algun n
si está en más de un A_m
$\Rightarrow$ elijo $n = \min\{m : a \in A_m\}$
$a \in A_n = \{a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, \dots\}$
$\to a = a_{nj}$
defino $f: A \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
$a \longmapsto (n, j)$

Partes

def $\to$ dado un conjunto A, se define partes de A $\mathcal{P}(A) = \{B \dots B \subseteq A\}$ (subconjuntos)

ej: $\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \dots, \{1,2\}, \{2,3\} \dots\}$

Prop $\to$ $\#\mathbb{N} \leq \#\mathcal{P}(\mathbb{N})$, es una funcion inyectiva de $\mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$
$n \longmapsto \{n\}$
si $\{n\} = \{m\} \Rightarrow n = m$

Teorema de Cantor

dado A $(A \neq \emptyset)$ un conjunto, entonces $\#A < \#\mathcal{P}(A)$

d/ veamos que $\#A \leq \#\mathcal{P}(A)$, la función $A \to \mathcal{P}(A)$, $a \longmapsto \{a\}$
es inyectiva, luego $\#A < \#\mathcal{P}(A)$

sea $g: A \to \mathcal{P}(A)$ si $a \in A$, $g(a) \in \mathcal{P}(a)$
$g(a)$ es un conjunto, es un subconjunto de A

tiene sentido preguntarse si $a \in g(a)$ o no.

considero $B = \{a \in A : a \notin g(a)\}$, supongamos que g es subyectiva,
luego como $B \in \mathcal{P}(A) = \text{Im}(g)$ luego existe $b \in A$ tal que $g(b) = B$

Esto conduce a una contradicción:
si $b \in B \to b \notin g(b) = B$ ABS!
si $b \notin B = g(b) \Rightarrow b \in B$ ABS!
$\Rightarrow$ no puede ser subyectiva
$\#A < \#\mathcal{P}(A)$

colorario
$\underbrace{\#\mathbb{N}}_{\aleph_0} < \#\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Además hay un ejercicio de la guía que pide probar $\#\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \#\mathbb{R} = c$
$\aleph_0 < c$

Ejemplo: $\mathbb{R} \sim (0, 1)$, $\mathbb{R} \xrightarrow{f} (-1, 1) \xrightarrow{g} (0, 1)$
$x \longmapsto \dfrac{x}{1 + |x|}$
$y \longmapsto \dfrac{y+1}{2}$

(tarea: chequear que son biyectivos)
(tarea: probar que $\mathbb{R} \sim (a, b)$ $a, b \in \mathbb{R}$ $a \neq b$.)

def $\to$ dados A, B conjuntos definimos
$A^B = \{f : B \to A \text{ funcion}\}$

Ej: A, B finitos $\quad \#A^B = n^k$
$\#A = n \quad f: B \to A$
$\#B = k$

Ejemplo: $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\}$
$\{0, 1\}^{\mathbb{N}} = \{f : \mathbb{N} \to \{0, 1\}\}$

Lema $\to$ sean A, B, D conjunto y $A \sim B$, entonces
a) $D^A \sim D^B$
b) $A^D \sim B^D$
$\Big\{$ $D^A = \{f : A \to D \text{ funcion}\}$
$D^B = \{g : B \to D \text{ funcion}\}$

a) D/
objetivo $\to$ hallar $\phi(f) = ?$
$\phi: D^A \to D^B$ biyeccion
un elemento de acá es una funcion f
$f \longmapsto \phi(f)$
sigue acá

por hipotesis sabemos $A \sim B \Leftrightarrow h: A \to B$ biyección

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & D \\ h \downarrow\uparrow h^{-1} & \nearrow g & \\ B & & \end{array}$$

defino $\Phi(f) = f \circ h^{-1} \to f \circ h^{-1} \in D^B$
$B \xrightarrow{h^{-1}} A \xrightarrow{f} D$, $\quad f \circ h^{-1}: B \to D$

defino
$\psi: D^B \to D^A$
$g \longmapsto \psi(g)$
$\Big\{$ $A \xrightarrow{h} B \xrightarrow{g} D$ $\quad g \circ h = \psi(g)$

osea ψ es la inversa de Φ $\to$ $\psi \circ \Phi(f) = \psi(f \circ h^{-1}) = (f \circ h^{-1}) \circ h = f$
$\Phi \circ \psi(g) = \Phi(g \circ h) = (g \circ h) \circ h^{-1} = g$

b) D/ pvq $A^D \sim B^D$, busco $\Phi: A^D \to B^D$ biyectiva
$f \longmapsto \Phi(f) = h \circ f$

$f \in A^D$
$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{f} & A \\ & \searrow h \circ f & h^{-1}\uparrow\downarrow h \\ & & B \end{array}$$

Quiero definir $\psi: B^D \to A^D$
$g \longmapsto \psi(g) = h^{-1} \circ g$
$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{h^{-1} \circ g} & A \\ & \searrow g & h^{-1}\uparrow\downarrow h \\ & & B \end{array}$$

resta ver Φ y ψ son inversas entre sí, $\psi \circ \Phi(f) = \psi(h \circ f) = h^{-1} \circ h \circ f = f$

Teorema $\mathbb{R}$ no es numerable $\Leftrightarrow \aleph_0 < c$ $\quad \#\mathbb{N} < \#\mathbb{R}$
como $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ $\quad i: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \longmapsto n$ es inyectiva $\#\mathbb{N} \leq \#\mathbb{R}$

D/ queremos ver que $\mathbb{R} \sim (0, 1)$ no es numerable. Es decir, que no existe $f: \mathbb{N} \to (0, 1)$ suyectiva
sea $f: \mathbb{N} \to (0, 1)$
$n \longmapsto x_n$ $\quad$ ($f(n) = x_n$, nombre)

$x_1 \quad 0, x_{11}\ x_{12} \dots$
$x_2 \quad 0, x_{21}\ x_{22} \dots$
$\vdots$
$x_n \quad 0, x_{n1}\ x_{n2} \dots x_{nn}$

considero el desarrollo decimal de cada x_n

$x_{ij} \in \{0, 1, 2 \dots 9\}$, definimos

definimos $y = 0, y_1\ y_2\ y_3$
Afirmo $y \neq x_n\ \forall n$, esto pasa porque $y_n \neq x_{nn}$ por def.

PRÁCTICA CARDINALIDAD

repaso

① $\#A = \{B / \exists\ f: A \to B$ biyectiva$\}$

② $\# \mathbb{N} = \aleph_0$

③ teorema CBS $\Rightarrow$ dado $i: A \to B$ inyect, $j: B \to A$ inyectiva
$\Rightarrow \exists\ f: A \to B$ biyect

④ Relacion de orden $\to$ $i: A \to B$ biyectiva $\#A \leq \#B$
$j: B \to A$ inyectiva $\Rightarrow \#B = \#A$

— o —

si A, B son numerables $\Rightarrow A \cup B$ es numerable

$\exists f: A \to \mathbb{N}$ biyectiva
$\exists g: B \to \mathbb{N}$ biyectiva
$\exists h: A \cup B \to \mathbb{N}$ biyect.

$\tilde{f}: A \to \mathbb{N} \to$ pares
$a \mapsto f(a) \to 2f(a)$
$\tilde{g}: B \to \mathbb{N} \to$ impares

inyect.

($\tilde{f}$ manda pares, $\tilde{g}$ manda impares)

$h(x) \begin{cases} x \in A \setminus B & \tilde{f}(x) \\ x \in B & \end{cases}$

$A \cup B = A \setminus B \cup B$
$\# A \cup B \leq \# \mathbb{N}$

— o —

$(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ numerables $\Rightarrow \bigcup_n A_n$ numerable

$\bigcup A_n \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ $f_n : A_n \to \mathbb{N}$ biyectiva

$\aleph_0 \leq \# \bigcup_n A_n \leq \aleph_0$ $a \in \bigcup_n A_n \Rightarrow m > \min n \{a \in A_n\}$

[quiero ver que A_n es numerable $\to$ (acoto su cardinal por arriba y por abajo)]
(no entendí, no copie, chat GPT)

— o —

A, B numerable $\to A \times B$ es numerable

$= $ union $\bigcup_{a \in A} \{a\} \times B$ dado un elem fijo $\times B$ $\Rightarrow$ es numerable.
numerable

si $A_1 \ldots A_n$ finitos son numerables, entonces $A_1 \times \ldots \times A_n$ es numerable.

D/ (por induccion)

$A_1 \times A_2$ es numerable

3/4 Practica

recuerdo: $A^B = \{f : B \to A \,/\, f$ funciones$\}$

$\{0,1\}^{\mathbb{N}} \sim (0,1) \sim (a,b) \sim \mathbb{R} \sim \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$

$\{0,1\}^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{R} \sim \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$

ejercicio: ¿cual es el cardinal de $\{f: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \,/\, f$ creciente$\}$?

sol: $\#A \leq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} = \# \mathbb{R} = c$ (obs) $\to A \subseteq B \Rightarrow \#A \leq \#B$
$i: A \to B$
$a \mapsto a$

digo que $\#A \geq \# \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$,

defino una funcion $\phi: \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to A$ digo que ϕ es inyectiva.

$f \xmapsto{\phi} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} f(i)}_{g_f(n)}$

veamos

sean f_1 y $f_2 \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, que $\phi(f_1) = \phi(f_2) \Rightarrow f_1 = f_2$

$\hookrightarrow \phi(f_1) = \phi(f_2) \Leftrightarrow g_{f_1} = g_{f_2} \Leftrightarrow g_{f_1}(n) = g_{f_2}(n)\ \forall n \in \mathbb{N}$

en particular, vale para $n=1$.

- $g_{f_1}(1) = g_{f_2}(1) \Leftrightarrow f_1(1) = f_2(1)$
- $g_{f_1}(2) = g_{f_2}(2) \Leftrightarrow \cancel{f_1(1)} + f_1(2) = \cancel{f_2(1)} + f_2(2)$
$\Leftrightarrow f_1(2) = f_2(2)$

siguiendo así, obtenemos $f_1(n) = f_2(n)\ \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow f_1 = f_2$. ✓

1. Halle el cardinal de los siguientes conjuntos:

(a) $\mathbb{Z}_{\leq -3}$ (b) $5\mathbb{Z}$ (c) $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ (d) $(-1,1)\cap\mathbb{Q}$

a) $\mathbb{Z}_{\leq -3} = \{-3,-4,-5\ldots\}$ es infinito

por lo tanto $\#\mathbb{Z}_{\leq -3} = \aleph_0$

b) $5\mathbb{Z}$ = son todos los múltiplos de 5 → infinito

$\#5\mathbb{Z} = \aleph_0$

c) $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ → $\mathbb{Z}$ tiene cardinalidad $\aleph_0$ ⎫ por lo tanto, el

$\mathbb{N}$ " " ⎭ producto entre $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{N}$ tmb tiene cardinalida $\mathbb{N}$

(es infinito numerable)

ademas $\mathbb{N}$ esta $\subseteq$ en $\mathbb{Z}$ por lo tanto como $\mathbb{Z}$ es numerable y $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{Z}$ entonces $\mathbb{N}$ es a lo sumo numerable

d) $(-1,1)\cap\mathbb{Q}$ → son los racionales que están en el intervalo $(-1,1)$ la cual es infinito numerable. $(-1,1)\cap\mathbb{Q}$ es un subconjunto de $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}$ es $\aleph_0$ $(-1,1)\cap\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{Q}\Rightarrow\aleph_0$

5. Sea $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos y sea $A=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n$.

(a) Encuentre una sucesión $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de conjuntos disjuntos dos a dos tales que:

- $B_n\subseteq A_n$ para todo $n\in\mathbb{N}$, y
- $\bigcup_{n\leq m}B_n=\bigcup_{n\leq m}A_n$ para todo $m\in\mathbb{N}$.

(b) Pruebe que para toda sucesión $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como arriba se tiene que $A=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}B_n$.

2. Sea A y B conjuntos contables. Pruebe que $A\cup B$ es contable.

∃ una funcion biyectiva desde $\mathbb{N}\to A$, $\mathbb{N}\to B$

$A=\{a_1, a_2, a_3\ldots\}$

$B=\{b_1, b_2, b_3\ldots\}$

y $A\cup B$ podria ser $=\{a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots\}$

Para probar que la unión de dos conjuntos contables $A\cup B$ es contable

Si ∃ una funcion inyectiva de dicho conjunto en los numeros naturales $\mathbb{N}$ ⎫ osea si el conjunto tiene el mismo tamaño que el conjunto de $\mathbb{N}$ o si el conjunto es finito

dado A y B conjuntos contables

$\exists\, f_A: A\to\mathbb{N}$ y $f_B: B\to\mathbb{N}$ inyectivas

demo:

- si A y B son finitos, la union $A\cup B$ tmb es finita ⇒ $A\cup B$ es contable
- si A y B son infinitos, A y B son contable ⇒ ∃ una funcion inyectiva $f: A\to\mathbb{N}$, $f: B\to\mathbb{N}$

$\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ → contable

Pruebo si es biyect con los naturales

→ positivos)

→ negativos

hice una biyeccion con los enteros.

voy a construir una funcion inyectiva para $A\cup B$
⇒ voy a "intercalar" los elementos A y B de forma que se pueda asignar un número único $\mathbb{N}$ a cada elemento de $A\cup B$

$1\to a_1$
$2\to b_1$
$3\to a_2$
$4\to b_2$
⋮

funcion inyectiva $f: A\cup B\to\mathbb{N}$

∃ una correspondencia inyectiva entre los elem de $A\cup B$ y los $\mathbb{N}$

∴ $A\cup B$ es contable.

3. Sean $A\subseteq B$ conjuntos tales que A es contable y $B\setminus A$ es infinito.

(a) Pruebe que existe $C\subseteq B\setminus A$ tal que $C\sim C\cup A$.

(b) Deduzca que $B\setminus A\sim B$.

a)

dice que A es contable → ∃ una biyeccion ó inyeccion $f: A\to\mathbb{N}$

(A es finito o numerable)

$B\setminus A$ es infinito → puedo selecionar un subconjunto infinito $C\subseteq B\setminus A$. Como $B\setminus A$ es infinito, podemos tomar C tal que

↳ $B\setminus A$ es numerable ⇒ $C=B\setminus A$

(es un subconjunto de un conjunto contable)

para ver $C\cup A$, basta con elegir C numerable e infinito

como A es contable y C es infinito y contable (subconjunto de un conjunto contable)

∃ biyeccion $A\sim\mathbb{N}$ y $C\sim\mathbb{N}$

el conjunto $C\cup A$ es la union de dos conj contal por lo que $C\cup A$ es contable. Pero si C es infinito y contable y A es contable

⇒ $C\cup A\sim\mathbb{N}\sim C$

⇒ ∃ biy $C\to C\cup A$

$C=\{c_1, c_2, c_3\ldots\}$ → fvf $\varphi: C\cup A\to C$

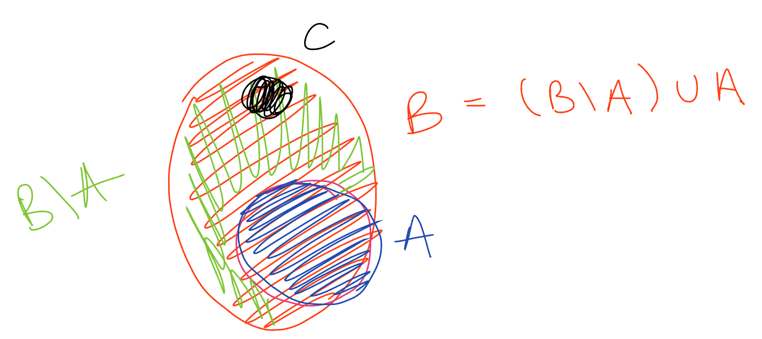
$A=\{a_1, a_2, a_3\ldots\}$

para cada a_i en A $a_i\mapsto c_i$

para cada c_j con $j>i$ (los c que no estan ocupados en la imagen de A)

$c_j\mapsto c_j$

⇒ funcion sobreyectiva



$C\subseteq B\setminus A$

$C\cup A\subseteq B$

$\#C = \#C\cup A$

elem c = elem A

ESPACIOS MÉTRICOS

(def) → sea M un conjunto, una métrica (o distancia) en M es una función $d: M\times M \to \mathbb{R}$ que cumple:

i) $d(x,y) \geq 0 \quad \forall x,y \in M$ y $d(x,y)=0 \iff x=y$

ii) $d(x,y) = d(y,x)$

iii) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \quad \forall x,y,z \in M$

(M,d) se llama espacio métrico

ejemplo:

① $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, $d(x,y) = |x-y|$

d es una métrica

i) $d(x,y) = |x-y| \geq 0$

$d(x,y) = |x-y| = 0 \iff x=y$

ii) $d(x,y) = |x-y| = |y-x| = d(y,x)$

iii) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

$|x-z| = |(x-y)+(y-z)| \leq |x-y| + |y-z|$

② $(\mathbb{R}, \delta)$ δ la distancia discreta

$$\delta(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x=y \\ 1 & \text{si } x\neq y \end{cases}$$

i) $\delta(x,y) \geq 0$

$\delta(x,y) = 0 \iff x=y$

ii) $\delta(x,y) = \delta(y,x)$

iii) $\delta(x,z) \leq \delta(x,y) + \delta(y,z)$

·) $x=z \wedge y=x$

$0 \leq 0+0$ ✓

·) $x=z \wedge y\neq x$

$0 \leq 1+1$ ✓

obs! la distancia discreta la puedo definir para cualq conjunto M

distancia en $\mathbb{R}^n$

$x = (x_1, \dots x_n)$, $y = (y_1, \dots y_n)$

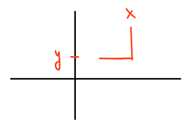
① distancia euclidea

$$d_2(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + \dots (x_n-y_n)^2}$$

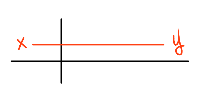
$$= \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i-y_i)^2\right)^{1/2}$$

② $d_1(x,y) = |x-y_1| + \dots + |x_n-y_n|$

$$= \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

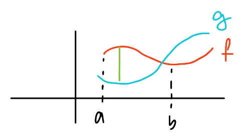


③ $d_\infty(x,y) = \max\{|x_1-y_1|, |x_2-y_2|, \dots |x_n-y_n|\}$



distancia en espacio de funciones

$M = \mathcal{C}([a,b]) = \{f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continuas$\}$



$$d_\infty(f,g) = \max_{a\leq x\leq b} |f(x)-g(x)|$$

obs! el máx existe porque f y g son continuas y $[a,b]$ cerrado y acotado

d_∞ es una distancia

① $d_\infty(f,g) = \max |f(x)-g(x)| \geq 0 \quad a<x<b$

$d_\infty(f,g) = \max |f(x)-g(x)| = 0 \quad a<x<b$

$\Rightarrow |f(x)-g(x)| = 0 \quad \forall x \in [a,b]$

$\Rightarrow f(x) = g(x) \quad \forall x\in[a,b)$

$\Rightarrow f=g$

ⓘⓘ $d_\infty(f,g) = \max |f(x)-g(x)| \quad a\leq x\leq b$

$= \max |g(x)-f(x)| = d_\infty(g,f)$

ⓘⓘⓘ $d_\infty(f,h) \leq d_\infty(f,g) + d_\infty(g,h)$

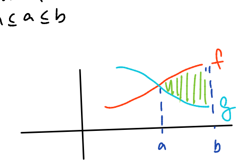
para $x\in[a,b]$

$|f(x)-h(x)| \leq |f(x)-g(x)| + |g(x)-h(x)|$

tomo máximo

$\max_{a\leq a\leq b} |f(x)-h(x)| = |f(x_0)-h(x_0)| \leq |f(x_0)-g(x_0)| + |g(x_0)-h(x_0)|$

$\leq \max_{a<x<b} |f(x)-g(x)| + \max_{a\leq x\leq b} |g(x)-h(x)|$



$d_1(f,g) = \int_a^b |f(x)-g(x)|\, dx$

Topología en E.M

(def) → sea (M,d) un e.M, sea $x\in M$, $r>0$

definimos: ⓘ la bola abierta de centro x y radio r

$B(x,r) = \{y\in M, d(x,y) < r\}$

ⓘⓘ la bola cerrada de centro x y radio r

$B[x,r] = \overline{B}(x,r) = \{y\in M, d(x,y) \leq r\}$

ⓘⓘⓘ la esfera cerrada x y radio r

$S(x,r) = \{y\in M, d(x,y) = r\}$

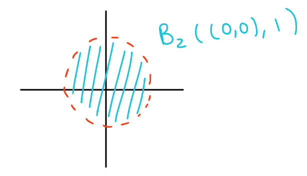
obs! $B(x,r) \subseteq B[x,r]$

$B[x,r] = B(x,r) \cup S(x,r)$

ejemplo:

① $(\mathbb{R}^2, d_2) \to B((0,0),1) = ?$

$d_2((x,y),(0,0)) = \sqrt{x^2+y^2} < 1$



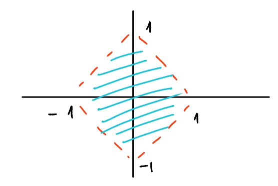
② $(\mathbb{R}^2, d_1) \to B((0,0),1) = ?$

$d_1((x,y),(0,0)) = |x| + |y| < 1$

$x,y>0$

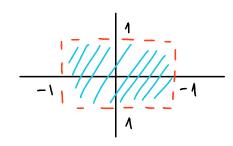
$x+y<1$

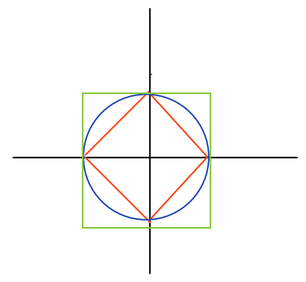
$y < 1-x$



③ $(\mathbb{R}^2, d_\infty) \to B((0,0),1) = ?$

$d_\infty((x,y)(0,0)) = \max\{|x|, |y|\} < 1$





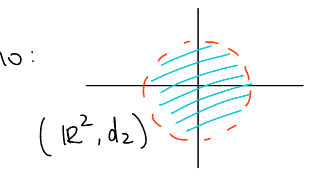
(def) → son (M,d) un espacio métrico, sea $E\subseteq M$ un subconjunto, voy a decir que E es acotado si existe $c>0$ / $d(x,y)\leq c$ (un numero $\mathbb{R}$) $\forall x,y\in E$

Equivalentemente → si $\exists x_0\in E$, $r>0$ / $E\subseteq B(x_0,r)$

si E es acotado se define "el diametro de E" como
$(\neq 0)$

$$\operatorname{diam}(E) = \sup\{d(x,y) : x,y\in E\}$$

ejemplo:



$E = B((0,0),1)$

$\operatorname{diam}(E) = 2$

(EJEMPLO DE LOS DOS TEOREMAS)

obs! → esto no vale para intersecc infinita

(NO) ejemplo: $A_n = (0, \frac{1}{n}) \subseteq (\mathbb{R}, |\cdot|)$

·) A_n son abiertos

prop → $(a,b) \subseteq (\mathbb{R},|\cdot|)$ es abierto $\Rightarrow (a,b) = B\left(\frac{a-b}{2}, \frac{b-a}{2}\right)$

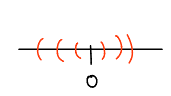
·) $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} (0,\frac{1}{n}) = \emptyset$ es ABS!

sea $y>0$ qvq $\exists n / 0 < \frac{1}{n} < y \Rightarrow y \notin A_i$

Ej: $A_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \subseteq (\mathbb{R}, |\cdot|)$

·) A_n abierto ✓

·) $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{0\}$



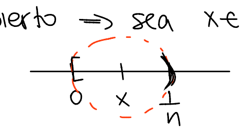
$\{0\}$ no es abierto $\forall r>0$, $B(0,r) \not\subseteq \{0\}$

$B(0,r) = (-r,r) \to \frac{r}{2} \in B(0,r)$, $\frac{r}{2} \neq 0$

otro ejemplo:

$A_n = [0,\frac{1}{n})$ en $(\mathbb{R}_{\geq 0}, |\cdot|)$

A_n es abierto $\Rightarrow$ sea $x\in A_n = [0,\frac{1}{n})$



sea $r = \frac{1}{n} - x$ $\quad B(x,r) = \{y\geq 0 : |x-y| < r\} \subseteq [0,\frac{1}{n})$

$\Rightarrow A = \bigcap A_n = \{0\}$

Ejemplo:

$(\mathbb{R}, \delta)$ $\quad \delta(x,y) = \begin{cases} 0 & x=y \\ 1 & x\neq y \end{cases}$

todos los conjuntos $\{x\}$ son abiertos

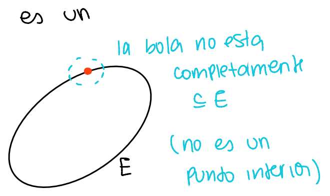
$B(x, 1/2) = \{x\}$

PUNTO INTERIOR

(def) → Sea (M,d) un espacio métrico

sea $E\subseteq M$, $x\in E$, Decimos que x es un punto interior de E si:

$\exists$ radio >0 / $B(x,r) \subseteq E$
↓
bola



El interior de E (notacion: E°) es el conjunto de dos puntos interior

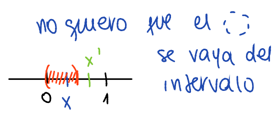
obs! → todos los $E^\circ \subseteq E$

ejemplo:

① $E = [0,1] \subseteq (\mathbb{R}, |\cdot|)$

$E^\circ = (0,1)$

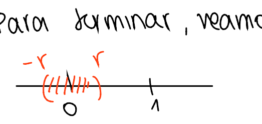
sea $x\in(0,1)$ qvq $x\in E^\circ$ →



sea $r = \min\{x, 1-x\} > 0$

$B(x,r) = (x-r, x+r) \subseteq [0,1] \to \begin{cases} x-r\geq 0 \\ x+r\leq 1 \end{cases}$ (tarea)

Para terminar, veamos $0,1 \notin E^\circ$



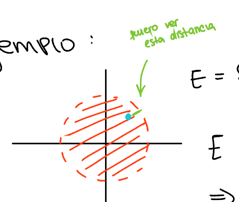
sea $r>0$, $B(0,r) = -\frac{r}{2}$

$d(-\frac{r}{2}, 0) = |-\frac{r}{2} - 0| = \frac{r}{2} < r$ ✓

pero $-\frac{r}{2} < 0 \Rightarrow 0 \notin E^\circ$ (lo mismo para 1)

(def) → sea $A\subseteq M$ un subconjunto A es abierto si $A^\circ = A$. Equiv. $\forall a\in A\ \exists r>0 / B(a,r)\subseteq A$

Ejemplo:



$E = \{x^2+y^2 < 1\} \subseteq (\mathbb{R}^2, d_2)$ círculo

E es abierto: sea $(x_0,y_0)\in E$

$\Rightarrow \exists r>0 / B(\underbrace{(x_0,y_0)}_{\text{centro}}, r) \subseteq E$

sea $r = 1 - \sqrt{x_0^2+y_0^2} > 0$

sea $(x,y)\in B((x_0,y_0),r)$ qvq $(x,y)\in E$

$(x,y)\in E \iff \sqrt{x^2+y^2} < 1$

$d_2((x,y),(0,0)) \leq d_2((x,y),(x_0,y_0)) + d_2((x_0,y_0),(0,0))$
↓
desig triang

$< r + \sqrt{x_0^2+y_0^2} = 1 - \sqrt{x_0^2+y_0^2} + \sqrt{x_0^2+y_0^2} = 1$

$\Rightarrow (x,y)\in B((0,0),1) = E$

En general: (M,d) e.m

$\Rightarrow E = B(x,r)$ es abierto.

sea $y\in E$, qvq $\exists r'>0 / B(y,r') \subseteq B(x,r)$

Elijo $r' = r - \underbrace{d(x,y)}_{\text{distancia de } x \text{ a } y} > 0$

sea $z\in B(y,r')$ qvq $z\in B(x,r) \Rightarrow d(z,x) < r$

no conozco $d(z,x)$ pero sí de $d(z,y)$ y $d(y,x)$

$\Rightarrow d(z,x) \leq \underbrace{d(z,y)}_{<r'=r-d(x,y)} + d(y,x) < r - d(x,y) + d(y,x) = r$

$\Rightarrow z\in B(x,r)$

(Prop) → (M,d) un e.m entonces

$\emptyset$, M son abiertos

demo: ·) $\emptyset = \emptyset^\circ$ → es abierto

·) M si $x\in M$ → $B(x,r)\subseteq M$
$\forall r>0$

¡importante!

(TEO) → sea $\{A_i\}_{i\in I}$ familia de conj abiertos. Entonces $A = \bigcup_{i\in I} A_i$ es abierto (union)

demo: sea $x\in A$, entonces existe $i\in I / x\in A_i$

como A_i es abierto, entonces $\exists r>0 / B(x,r)\subseteq A_i$

$\Rightarrow B(x,r) \subseteq A_i \subseteq A$

(TEO) → sean $A_1, \dots A_n \subseteq (M,d)$ abiertos, entonces $A = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ es abierto (interseccion)

demo:

sea $x\in A \Rightarrow x\in A_i\ \forall i=1\dots n$

como A_i es abierto

$\exists r_i>0 / B(x,r_i)\subseteq A_i$

nota: B(centro, radio)

sea $r = \min\{r_1, \dots r_n\} > 0$

Entonces $B(x,r) \subseteq B(x,r_i) \subseteq A_i \quad \forall i=1,\dots,n$

$\Rightarrow B(x,r) \subseteq A$ ∴

(Prop) → sea $E\subseteq M$, sea $A\subseteq E$ abierto, Entonces $A\subseteq E^\circ$. Es decir, E° es el abierto más grande adentro de E.

(def) → sea (M,d) un e.m, $x\in M$, $E\subseteq M$, Decimos que x es punto de adherencia de E si $\forall r>0$ $B(x,r)\cap E\neq\emptyset$.

⇓

El conjunto de puntos de adherencia de E, se llama la clausula de E. Notacion $\Rightarrow \overline{E}$

obs! $\Rightarrow E\subseteq \overline{E}$

15/4 Teorica

Repaso: sea (M,d) un e.m , $\overline{E} = \{$ptos de adherencia$\}$ → E es cerrado si $E = \overline{E}$

x es punto de adherencia si $\forall\, r>0$, $B(x,r) \cap E \neq \emptyset$

Teo → (M,d) un e.m , $F \subseteq M$, F es cerrado si y solo si F^c es abierto

(F^c: complemento de F)

d/ $\Rightarrow$) F es cerrado ($F = \overline{F}$), sea $x \in F^c \Rightarrow x \notin \overline{F}$

entonces $\exists\, r>0 \,/\, B(x,r) \cap F = \emptyset$

$\Rightarrow B(x,r) \subseteq F^c$

$\Leftarrow$) F^c es abierto y pvq F es cerrado

sea $x \in \overline{F}$, supongamos que $x \in F^c$, entonces $\exists\, r>0$ tal que $B(x,r) \subseteq F^c \Rightarrow B(x,r) \cap F \neq \emptyset \Rightarrow$ no es punto de adherencia ABS! xq $x \in \overline{F}$

$\Rightarrow \therefore x \in F$

obs! → NO abierto no implica que sea cerrado

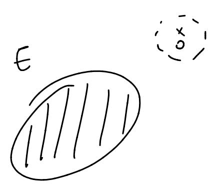
eg: $\mathbb{Q}$ no es abierto → $\mathbb{Q}^\circ : \{\mathbb{Q} \subseteq (\mathbb{R}, |\cdot|)\} = \emptyset$

$\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{Q}$ no es cerrado

PROP → el $\emptyset$ y M (espacio metricos) son cerrados (antes vimos q' eran abiertos ahora vemos q' tmb son cerrados)

d/ $\emptyset^c = M$ es abierto

$M^c = \emptyset$ es abierto $\therefore$



def → sea (M,d) un e.m $E \subseteq M$, $x \in E$.

se dice punto aislado de E si $\exists\, r>0 \,/\, B(x,r) \cap E = \{x\}$

Ejemplo:

① $E = \mathbb{Z}$ o $\mathbb{N} \subseteq (\mathbb{R}, |\cdot|)$ son todos puntos aislados

$n \in \mathbb{Z}$, $r = 1$ $(n-1, n+1) \cap \mathbb{Z} = \{n\}$

② $\mathbb{Q} \subseteq (\mathbb{R}, |\cdot|)$ no tiene puntos aislados

$q \in \mathbb{Q}$, $\forall\, r>0 \Rightarrow (q-r, q+r) \cap \mathbb{Q} \neq \{q\}$

③ M cualq , $d = \delta$ la métrica discreta

$$\delta(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

En M, son todos puntos aislados

$x \in M$, elijo $r = 1/2$

$B(x,r) = B(x, 1/2) = \{x\}$ (si $y \neq x$ $\delta(x,y) = 1 > 1/2$)

Ejercicio tarea:

EM (M,d) , $E \subseteq M$. si $x \in \overline{E} \Rightarrow x \in E'$ o x es aislado

Teo → (M,d) e.m

① Si $\{F_i\}_{i \in I}$ cerrados $\Rightarrow F = \bigcap_{i \in I} F_i$ es cerrado

② si $\{F_i\}_{i=1}^{n}$ cerrado $\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} F_i$ es cerrado

d/ ① $\left(\bigcap_{i \in I} F_i\right)^c = \bigcup_{i \in I} F_i^c$ es abierto ✓

② $\left(\bigcup_{i=1}^{n} F_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{n} F_i^c$ es abierto ✓

EJEMPLO ① en cualq e.m (M,d) probar

$F = \{x\}$ es cerrado. sea $y \in \overline{F}$

s/ $\overline{F} = F = \{x\}$. $\Rightarrow \forall\, r>0 \,/\, B(y,r) \cap F \neq \emptyset$

② $F = \{x_1, \dots, x_n\} \subseteq (M,d) \Rightarrow F$ es cerrado

$F = \bigcup_{i=1}^{n} \{x_i\}$

Ejercicio de tarea:

1) si $\subseteq (\mathbb{R}, |\cdot|)$ acotado y no vacio

$\Rightarrow \sup(E), \inf(E) \in \overline{E}$

2) $B[x,r]$ (bola cerrada) $\subseteq (M,d)$ es cerrada

def → sea (M,d) e.m , $E \subseteq M$, $x \in M$

es un punto de acumulación de E si $\forall\, r>0$

$B(x,r) \cap E \neq \emptyset$ y $B(x,r) \cap E \neq \{x\}$

$(B(x,r) \cap (E \setminus \{x\}) \neq \emptyset)$

pensar: x es pto de acumulacion $\Leftrightarrow \forall\, r>0$, $B(x,r) \cap E$ Tiene infinitos elementos

$E' = \{$puntos de acumulación$\}$ es el conjunto derivado

Ejemplo: $E = (0,1) \cup \{2\} \subseteq (\mathbb{R}, |\cdot|)$

$\overline{E} = [0,1] \cup \{2\}$ $E' = [0,1]$

si $x \in [0,1]$, $B(x,r) = (x-r, x+r)$

$\Rightarrow B(x,r) \cap (0,1)$ tiene inf elem

$B(2,1) \cap E = \{2\}$

Prop → $\overline{E} = E \cup E'$

d/ $E \subseteq \overline{E}$ (vale siempre) pero E' tmb $\subseteq \overline{E}$ (por definicion)

sea $x \in \overline{E}$, pvq $x \in E \cup E'$

$\Rightarrow$ si $x \notin E$, $\forall\, r>0$ $B(x,r) \cap E \neq \emptyset$ (porq $x \in \overline{E}$) y

$B(x,r) \cap E \neq \{x\}$ (porq $x \notin E$)

$\therefore x$ es un pto de acumulacion

corolario → E es cerrado $\Leftrightarrow$ todos los puntos de acum pertenecen a E.

d/ $\overline{E} = E \cup E' = E$

def → sea (M,d) e.m , $E \subseteq M$

$x \in M$ es un punto de frontera si $\forall\, r>0$

$B(x,r) \cap E \neq 0$ y $B(x,r) \cap E^c \neq 0$

Nota: $\partial E = \{$ptos frontera$\}$ se llama frontera de E

Prop → $\overline{E} = E \cup \partial E$

d/ $E \cup \partial E \subseteq \overline{E}$ por definicion.

sea $x \in \overline{E}$, si $x \notin E$, $\forall\, r>0$

$B(x,r) \cap E \neq \emptyset$ ($x \in \overline{E}$)

$B(x,r) \cap E^c \neq \emptyset$ ($x \notin E \Rightarrow x \in E^\circ$)

$\Rightarrow \therefore x \in \partial E$

Yo sé que $\overline{E} = E \cup E' = E \cup \partial E \Rightarrow$ ¿ vale que $E' = \partial E$?

EJEMPLOS (todos en $(\mathbb{R}, |\cdot|)$)

① $E = \mathbb{Z}$

$\overline{E} = \mathbb{Z}$ si $x \notin \mathbb{Z}$, $n < x < n+1$ $\exists\, r>0 \,/\, (x-r, x+r) \cap \mathbb{Z} = \emptyset$

$E' = \emptyset$ si $n \in \mathbb{Z}$, $0 < r < 1$

$B(n,r) = (n-r, n+r) \cap \mathbb{Z} = \{n\}$

$\partial E = \mathbb{Z}$: $B(n,r) = (n-r, n+r) \cap \mathbb{Z} \neq \emptyset$ $\forall\, r>0$

$(n-r, n+r) \cap \mathbb{Z}^c \neq \emptyset$

② $E = (0,1)$ $\overline{E} = [0,1]$ $E' = [0,1]$

$\partial E = \{0,1\}$

③ $E = \mathbb{Q}$

$\overline{E} = \mathbb{R}$, $E' = \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$, $(x-r, x+r)$ hay infinitos racionale

$\partial E = \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ $(x-r, x+r) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$

$(x-r, x+r) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \neq \emptyset$

$\overline{\mathbb{Z}} \ni x \Leftrightarrow \forall\, r>0$, $B(x,r) \cap \mathbb{Z} \neq \emptyset$

$n \in \mathbb{Z}$, $r>0$ $(n-r, n+r) \cap \mathbb{Z} \ni n$

$\Rightarrow \mathbb{Z} \subseteq \overline{\mathbb{Z}}$

veamos que si $x \notin \mathbb{Z} \Rightarrow x \notin \overline{\mathbb{Z}}$

$\Rightarrow \exists\, n \in \mathbb{Z} \,/\, n < x < n+1$

elijo $r = \min\{x-n, n+1-x\} > 0$

$B(x,r) = (x-r, x+r)$ $n \notin (x-r, x+r)$

$n < x-r \Leftrightarrow r < x-n$

$n+1 \notin (x-r, x+r)$

$n+1 > x+r \Leftrightarrow r < n+1-x$

$\Rightarrow (x-r, x+r) \cap \mathbb{Z} = \emptyset$

22/4

def M, e.m , $G \subseteq M$ es discreto si $\forall\, x \in G$ x es punto aislado

def sea M un conjunto, si d_1 y d_2 son métricas sobre M, decimos que son equivalentes $\forall\, x \in M$, $\forall\, r>0$:

$\exists\, r_1, r_2 \,/\, B_{d_1}(x, r_1) \subseteq B_{d_2}(x,r)$ y

$B_{d_2}(x, r_2) \subseteq B_{d_1}(x,r)$

notacion: $d_1 \sim d_2$

ejemplo: En $\mathbb{R}^2$ $d_1((x,y),(x_0,y_0)) = |x-x_0| + |y-y_0|$

$d_2((x,y),(x_0,y_0)) = \sqrt{|x-x_0|^2 + |y-y_0|^2}$

Ejemplo: En $C([0,1])$, $d_1(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx$

$d_\infty(f,g) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|$

Prop: M, d_1 y d_2 Métricas. si existen:

c_1 y $c_2 > 0 \,/\, c_1 \cdot d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq c_2 \cdot d_1(x,y)$

$\forall\, x, y \in M$

$\Rightarrow$ Entonces $d_1 \sim d_2$ (son equivalentes)

demo/

$B_{d_1}(x,r) = \{y \in M : d_1(x,y) < r\}$

$B_{d_2}(x,r) = \{y \in M : d_2(x,y) < r\}$

• $y \in B_{d_1}(x,r) \rightarrow d_1(x,y) < r$

$d_2(x,y) \leq c_2 \cdot d_1(x,y) < c_2 \cdot r$

$\Rightarrow y \in B_{d_2}(x, c_2 \cdot r)$

$\Rightarrow B_{d_1}(x,r) \subseteq B_2(x, c_2 \cdot r)$

• $y \in B_{d_2}(x,r) \rightarrow d_2(x,y) < r$

$d_1(x,y) \leq 1/c_1 \cdot d_2(x,y) < r/c_1$

$\Rightarrow y \in B_{d_1}(x, r/c_1)$

$\Rightarrow B_{d_2}(x,r) \subseteq B_{d_1}(x, r/c_1)$

Sucesiones : (teórica)

def → sea (M,d) un e.m. una sucesión es una función $f: \mathbb{N} \to M$ notación → $f(n) = x_n$, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$

decimos que (x_n) converge a $x \in M$ si $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ n_0 \ /$ si $n \geq n_0$
$d(x_n, x) < \varepsilon$

notación : $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$, $\lim_{n\to\infty} x_n = x$

obs $(d(x_n,x))_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$ $\quad x_n \to x \iff (d(x,x_n)) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

ejemplo :

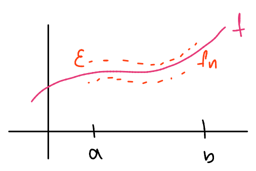
① (M,δ) $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq M$ $\quad x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$?

$\delta(x,x_n) < \varepsilon$ (porque la distancia puede solo ser 0 ó 1)

si $\varepsilon < 1 \Rightarrow \delta(x,x_n) < \varepsilon \iff x_n = x$

⇒ las sucesiones que converge son las eventualmente constantes

② en $(C[a,b], d_\infty)$ $\quad f_n \to f$?



$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ n_0 / d_\infty(f_n, f) < \varepsilon \ \forall n \geq n_0$

$\iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 / \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \ \forall n \geq n_0$

$\iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 / \forall x \in [a,b] \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \ \forall n \geq n_0$

(si vale para el supremo, vale para todos los x)

Esto se llama convergencia uniforme.

obs → $(f_n(x))_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$ $\quad f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x) \ \forall x \in [a,b]$

$\forall x , \forall \varepsilon > 0 \ \exists \ n_0 / n \geq n_0 \to |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$
(el n_0 puede depender de x).

Esto es convergencia puntual.

Prop → M un conjunto , d_1 y d_2 dos métricas equivalentes

$x_n \to x$ en (M, d_1)
$\iff$
$x_n \to x$ en (M, d_2)

demo/ si $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ en (M, d_1)

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ n_0 / x_n \in B_{d_1}(x, \varepsilon) \ \forall n \geq n_0$

sea $\varepsilon > 0$ $\ \text{tvq} \ \exists n_0 / x_n \in B_{d_2}(x,\varepsilon) \ \forall n \geq n_0$, como $d_1 \sim d_2$
$\exists \ \varepsilon' > 0 \ / B_{d_1}(x, \varepsilon') \subseteq B_{d_2}(x, \varepsilon)$

$x_n \to x$ en (M, d_1)
$\Rightarrow \exists \ n_0 / x_n \in B_{d_1}(x, \varepsilon') \ \forall n \geq n_0$

Prop → sea (M,d) e.m $E \subseteq M$, $x \in M$

① $x \in \overline{E} \iff \exists (x_n) \subseteq E \ / \ x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$

② $x \in E' \iff \exists (x_n) \subseteq E \ / \ x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ con $x_n \neq x$
(puedo pedir $x_n \neq x_m$)

demo : ① $x \in \overline{E} \iff \forall r > 0 \ B(x,r) \cap E \neq \emptyset$

⇒) $x \in \overline{E}$. sea $x_n \in B(x, 1/n) \cap E$

$(x_n) \subseteq E$ $\quad x_n \to x$ porque $d(x, x_n) < 1/n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

⇐) sea $(x_n) \subseteq E \ / x_n \to x$ quiero ver que $x \in \overline{E}$
sea $r > 0$, $x_n \to x \ \to \exists \ n_0 / x_n \in B(x,r) \ \forall n \geq n_0$
pero $x_n \in E \to B(x,r) \cap E \neq \emptyset$

corolario : $E \subseteq M$ es cerrado si y solo si $\forall (x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq E$ con $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x \to x \in E$.

def → sea (M,d) e.m $X \subseteq M$ se dice denso si $\overline{X} = M$

obs → $\forall x \in M \ \exists \ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ tq $x_n \to x \iff X$ es denso.

ejemplo → en $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ es denso
$\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tmb es denso
en $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{Q}^n$ es denso (con todas las métricas)

def → una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq M$ se dice acotada si $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq M$ es acotado
$(\exists \ x, r \ / x_n \in B(x,r) \ \forall n \in \mathbb{N})$

22/4 (práctica)

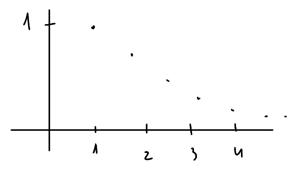
Espacios de sucesiones

def → sea $\ell^\infty = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} \ / \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n| < \infty\}$ ↗ acotada

notación: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} := a \in \ell^\infty$

definimos la métrica $d_\infty(a,b) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n - b_n|$

ejemplo: $a_n = \frac{1}{n}$, $0_n = 0 \Rightarrow d(a,0) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\frac{1}{n} - 0| = 1$



$b_n = -\frac{1}{n}$. Calculemos $d(a,b)$

$d(a,b) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \frac{1}{n} - \left(-\frac{1}{n}\right) \right| = 2$

Prop → (ℓ^∞, d_∞) es e.m

Ej: analizamos $B(0,3) = \{a \in \ell^\infty / d(a,0) < 3\}$

¿ $c_n = 3 - \frac{1}{n} \in B(0,3)$?

NO , pues $d(0,c) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |3 - 1/n| = 3$

para ver que es 3 , basta ver que $\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N} / 3 - \frac{1}{n} > 3 - \varepsilon$
(cosas de guía 1)

$\Rightarrow d(0,c) = 3 \ \Rightarrow \ c \notin B(0,3)$

caractericemos $B(0,3) = \{x \in \ell^\infty / \exists \ \varepsilon > 0 : |x_n| < 3 - \varepsilon\}$

dem: ⊆) sea $y \in B(0,3) \Rightarrow \sup_{n\in\mathbb{N}} |y_n| < 3$
$\qquad\qquad\qquad\qquad \overset{\shortparallel}{1}$

tomamos $\varepsilon = \frac{3-1}{2}$ pues $|y_n| \leq 1 + 3 - 3 = 3 - \underbrace{(3-1)}_{\varepsilon} = 3 - 2\varepsilon < 3 - \varepsilon$

$\Rightarrow |y_n| < 3 - \varepsilon$

⊇) sea $x \in \ell^\infty / \exists \ \varepsilon > 0, |x_n| < 3 - \varepsilon$. sea $\varepsilon > 0 /$ cumpla $|x_n| < 3 - \varepsilon$

sabemos que $|x_n| < 3 - \varepsilon \ \forall n \in \mathbb{N}$. Entonces $\sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| \leq 3 - \varepsilon < 3$
$\qquad\qquad\qquad\qquad \overset{\shortparallel}{d(x,0)} \to x \in B(0,3)$

ejemplo: sea $X_1 = \{a \in \ell^\infty / |a_1| < 1\}$

por ejemplo : $\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2}\right)_n$, $\left(\frac{1}{2}\right)_n$, $(0)_n$, $\left(2^{\frac{1}{n}}\right)_n$

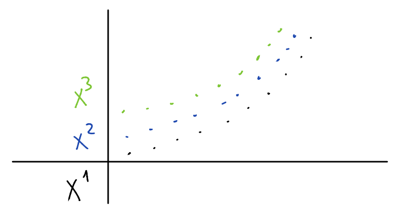
$$\boxed{x \in \overline{X} \iff \exists (x_n)_n \subseteq X / x_n \xrightarrow[n]{} x}$$

Calculamos $\overline{X_1} \overset{?}{=} \{a \in \ell^\infty / |a_1| \leq 1\}$

⊆) supongamos $a \in \overline{X_1} \Rightarrow \exists (a^k)_{k\in\mathbb{N}} \subset X_1 / a^k \to a$

notación : $(x^k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \ell^\infty$ es sucesión

$X_1 \ni x^1 = x_1^1, x_2^1, \dots$
$X_1 \ni x^2 = x_1^2, x_2^2, \dots$
$\vdots \ \ x^3 = x_1^3, x_2^3, \dots$
$\vdots$
$x^k = x_1^k, x_2^k \dots$
$\quad -1 < \ < 1$
↓
$a = (a_1, a_2, a_3 \dots)$



$x^k \to a$ cuando $d_\infty(x^k, a) \xrightarrow[k]{} 0$

$\sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n^k - a_n| \longrightarrow 0$

$\underbrace{|x_1^k - a_1|}_{0} \leq \underbrace{d_\infty(x^k, a)}_{0}$

como $(x_1^k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ y $|x_1^k - a_1| \longrightarrow 0$

$\Rightarrow x_1^k \to a_1$

$x^k \in X_1 \Rightarrow |x_1^k| < 1 \ \forall k \in \mathbb{N}$

{ ejercicio 9 de la guía 1 dice : $x_n \to x$, $y_n \to y$, $x_n \leq y_n \ \forall n \Rightarrow x \leq y$ }

$\Rightarrow |a_1| = \lim_{k\to\infty} |x_1^k| \leq 1$

⊇) sea $a \in \ell^\infty / |a_1| \leq 1$, quiero ver que $\exists (x^k) \subset X_1$, $x^k \to a$
$(a_1, a_2, a_3 \dots)$

podemos definir $\forall k$, $\forall n \geq 2$, $x_n^k = a_n$

ahora busco $(x_1^k) \subseteq (-1,1)$ y $x_1^k \to a_1$

$a_1 \in [-1,1] = \overline{(-1,1)} \Rightarrow \exists (x_1^k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq (-1,1)$, $x_1^k \to a_1$

Queda ver $d_\infty(x^k, a) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n^k - a_n| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \{ |x_1^k - a_1|, \underbrace{|a_2 - a_2|}_{0}, 0, 0 \dots \} = |x_1^k - a_1|$

pero entonces $d_\infty(x^k, a) = |x_1^k - a_1| \to 0$
$\Rightarrow x^k \to a$ y $x^k \in X_1 \Rightarrow a \in \overline{X_1}$

24/4 (teórica)

ejemplo: $\mathbb{N}$, $d_1(n,m) = |n-m|$
$d_2(n,m) = \delta(n,m)$
$= \begin{cases} 0 & n = m \\ 1 & n \neq m \end{cases}$

$d_1 \sim d_2$ sea $r > 0$

$\{n\} = B_{d_1}(n, \frac{1}{2}) \subseteq B_{d_2}(n,r)$
$\{n\} = B_{d_2}(n, 1/2) \subseteq B_{d_1}(n,r)$ $\Rightarrow d_1 \sim d_2$

$\nexists \ c > 0 \ / \ c|n-m| \leq \delta(n,m) \ \forall n,m \in \mathbb{N}$

DEF : una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq M$ es de Cauchy
si $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ n_0 \in \mathbb{N} / $ si $n, m \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon$
(toda sucesión convergente es una sucesión de cauchy)

ejemplo:

① $x_n = \frac{1}{n}$ en $(\mathbb{R}, |\cdot|)$

sol/ yo voy a querer acotar : $\left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m} < \varepsilon$

si $n_0 \in \mathbb{N} / \frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2}$ $\Rightarrow$ si $n, m \geq n_0 \Rightarrow \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \leq \frac{1}{n_0} + \frac{1}{n_0} < \varepsilon$

obs! $x_n = \frac{1}{n}$ en $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ ó $((0,1), |\cdot|)$ ó $(\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}, |\cdot|)$

⇒ (x_n) sigue siendo de Cauchy.

② (M, δ) discreta

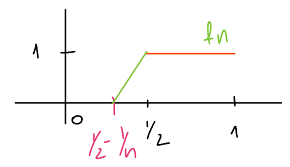
¿ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq M$ de Cauchy ?

$\delta(x_n, x_m) < \varepsilon$ si $\varepsilon < 1$

esto pasa si $x_n = x_m \ \forall n, m \geq n_0$

entonces las sucesiones de cauchy son las eventualmente constantes

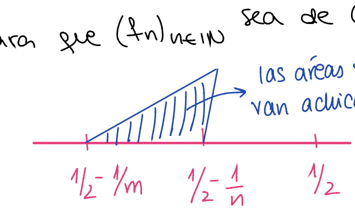
③ en funciones continuas
en $(C[0,1], d_1)$ si $d_1(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$



$f_n(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, 1/2 - \frac{1}{n}] \\ \text{lineal} & x \in [1/2 - \frac{1}{n}, 1/2] \\ 1 & x \in [1/2, 1] \end{cases}$

¿ Qué tendría que pasar para que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sea de Cauchy ?

$d_1(f_n, f_m) = ?$ →



Prop : sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq M$ y $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x \Rightarrow (x_n)$ es de Cauchy.

demo/ sea $\varepsilon > 0$
$d(x_n, x_m) \leq \underbrace{d(x_n, x)}_{< \varepsilon/2} + \underbrace{d(x_m, x)}_{< \varepsilon/2} < \varepsilon$

sea $n_0 \in \mathbb{N} / n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon/2$
⇒ si $n, m \geq n_0$
⇒ $d(x_n, x_m) < \varepsilon$

Prop : si $(x_n) \subseteq M$ es de Cauchy $\Rightarrow (x_n)$ es acotado

d/ elijo $\varepsilon = 1$ y existe un $n_0 \in \mathbb{N} /$ si $n, m \geq n_0$

$d(x_n, x_m) < 1$ quiero agrandar la bola para que me entren los demás

$x_n \in B(x_{n_0}, 1) \ \forall n \geq n_0$

$R = \max\{1, d(x_1, x_{n_0}), d(x_2, x_{n_0}), \dots d(x_{n_0 - 1}, x_{n_0})\}$

si $r > R \Rightarrow x_n \in B(x_{n_0}, r) \ \forall n \Rightarrow (x_n)$ es acotada

Prop : (x_n) es de cauchy y $\underbrace{\exists (x_{n_j}) / x_{n_j} \xrightarrow[j\to\infty]{} x}_{\text{una subsucesión convergente.}}$ ⇒ entonces $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$.

demo:/ dado $\varepsilon > 0$, $\underset{\text{(lo acoto)}}{\overset{\text{qvq}}{d(x_n, x)}} \overset{\text{desig. triang.}}{\leq} \underbrace{d(x_n, x_{n_j})}_{< \varepsilon/2} + \underbrace{d(x_{n_j}, x)}_{< \varepsilon/2} < \varepsilon$

elijo un $n_0 / n, m \geq n_0$ ahd $d(x_n, x_m) < \varepsilon/2$

Elijo $n_j > n_0 / d(x_{n_j}, x) < \varepsilon/2$ $\quad (x_{n_j} \xrightarrow[j\to\infty]{} x)$

⇒ si $n \geq n_0$, $d(x_n, x) < \varepsilon$.

Def → sea (M,d) un e.m , M es completo si toda sucesion de cauchy es convergente. (tiene limite en M)

ejemplo → ① $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ no es completo $(q_n) \subseteq \mathbb{Q} \,/\, q_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \sqrt{2}$

$\Rightarrow (q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de cauchy y no converge en $\mathbb{Q}$

② (M,δ) es completo

③ $M = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ $d_1(x,y) = |x-y|$ es de cauchy y no converge (en M)

$x_n = \frac{1}{n}\ (x_n) \subseteq M$

$\Rightarrow (M, d_1)$ no es completo

$\Rightarrow (M, \delta)$ sí es completo.

obs → M con métricas equivalentes d_1 y d_2, si (M,d_1) es completo $\rightarrow (M,d_2)$ es completo.

ejercicio: M con métrica d_1 y d_2 / $\exists\, c_1, c_2 > 0$ /

$c_1 d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq c_2 d_1(x,y) \quad \forall x,y \in M$

si (M,d_1) es completo $\Rightarrow (M,d_2)$ es completo.

Teo → $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ es completo

d/ sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ de cauchy. Consideramos,

$X_1 = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$

$X_2 = \{x_n : n > 2\} \subseteq \mathbb{R}$

$\vdots$

$X_k = \{x_n : n > k\}$

a cada paso q' voy, voy sacando puntos del anterior.

X_1 es acotado, y el resto tmb porque $X_1 \supseteq X_2 \supseteq X_3 \supseteq \dots \supseteq X_k \supseteq \dots$

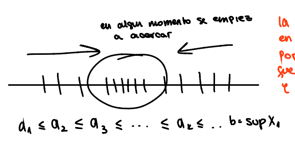
$\Rightarrow$ todos los X_k tienen infimos, supremos.

sea $a_1 = \inf X_1$

$a_2 = \inf X_2$

$\vdots$

$a_k = \inf X_k$



la sucesion no sé en que orden se van poniendo pero sí sé que tiene un infimo y un supremo.

$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_k \leq \dots b = \sup X_1$

(es acotado xq esto tiene que ser más chico que el supremo.)

es una sucesion creciente y acotado.

$\Rightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es monotona (creciente y acotada)

$\Rightarrow \exists\, a = \lim_{n\to\infty} a_n$

ahora veamos si $a = \lim_{n\to\infty} x_n \Rightarrow$ voy a probar que $\exists\, x_{n_j}$ (una subsucesion) que converja a $a \Rightarrow x_{n_j} \to a$

sea $n_1 \,/\, a_1 \leq x_{n_1} < a_1 + 1$

sea $n_2 \,/\, a_{n_1} \leq x_{n_2} < a_n + 1/2$

x_{n_2} vive en X_{n_1} dnd $X_{n_1} = \{x_n : n > n_1\}$

a_{n_1} es el infimo de X_{n_1}

Elijo $n_j \,/\, \underbrace{a_{n_{j-1}}}_{\to 0} \leq x_{n_j} < \underbrace{a_{n_{j-1}} + 1/j}_{\to a}$

tomo limite en $j \to \infty$

$x_{n_j} \xrightarrow[j\to\infty]{} a$ $\boxed{\#}$

colorario: $\mathbb{R}^n$ con d_1, d_2 y d_∞ es completo.

d/ Tarea.

lo muestro con inyectiva.

• si algo es contable → es finito o numerable

$\exists$ biyeccion con los $\mathbb{N}$

• algo es infinito cuando $\exists$ una f: inyectiva de los $\mathbb{N}$ a los conj.

24/4 (práctica)

def → dos metricas (X, d_1) y (X, d_2) son equivalentes si $\forall x\ \forall r > 0\ \ \exists\, r', r'' > 0$ tal que

$B_{d_2}(x, r') \subseteq B_{d_2}(x, r)$

$B_{d_2}(x, r'') \subseteq B_{d_1}(x, r)$

Ejercicio ①: sea $d(x,y) = \min\{d_2(x,y), 1\}$ para $x,y \in \mathbb{R}^2$

Probar que $(\mathbb{R}^2, d)$ es un espacio métrico y que $(\mathbb{R}^2, d) \sim (\mathbb{R}^2, d_2)$

sol:/

• $d(x,y) = d(y,x)$ porque d_2 es simétrico.

• $d(x,y) \geq 0$ porque $d_2(x,y) \geq 0$

• $d(x,y) = 0 \iff \min\{d_2(x,y), 1\} = 0$

$\iff d_2(x,y) = 0 \iff x = y$

• supongamos que $x, z \in \mathbb{R}^2$ y $d(x,z) = 1$

$1 = d(x,z) \leq d_2(x,z) \leq d_2(x,y) + d_2(y,z)$

hay cuatro posibilidades para $d(x,y) + d(y,z)$

① ↳ $d_2(x,y) + d_2(y,z)$

② ↳ $d_2(x,y) + 1$

③ ↳ $1 + d_2(y,z)$

④ ↳ $1 + 1$

segun qué pasa con cada uno de los mínimos, es claro que ②, ③, ④ ≥ 1, pues son 1 + algo positivo y hemos probado que ① $\geq d(x,z)$ arriba $\Rightarrow d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ en cualq caso.

El otro caso es $\underbrace{d(x,z) = d_2(y,z) \leq 1}$

$d(x,z) = d_2(x,z) \leq d_2(x,y) + d_2(y,z)$

$(\mathbb{R}^2, d_2)$ es métrica

y procedemos igual que en el otro argumento.

$\Rightarrow$ Entonces, $(\mathbb{R}^2, d)$ es métrico.

(ahora pruebo que $(\mathbb{R}^2, d) \sim (\mathbb{R}^2, d_2)$)

↳ sea $x \in \mathbb{R}^2$ y sea $r > 0$, Buscamos $r' > 0$ y $r'' > 0$ tales que

$B_d(x, r') \subseteq B_{d_2}(x, r)$ y $B_{d_2}(x, r'') \subseteq B_d(x, r)$

si tomo $r'' = r$, tengo que $B_{d_2}(x,r) \subseteq B_d(x,r)\ \forall r > 0$

sea $r' = \min\{r, 1/2\}$ (busco un r' que cumpla $r' \leq r$ y $r' < 1$)

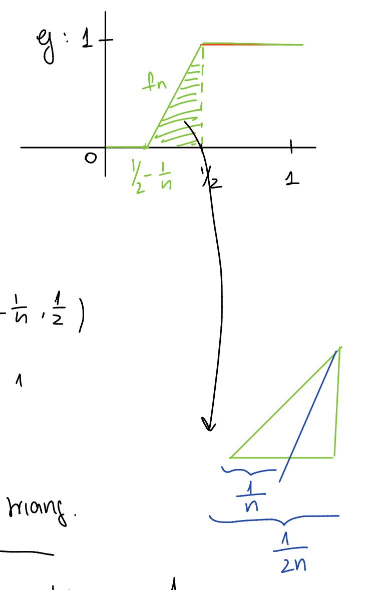
entonces como $r' < 1$ y $r' \leq r$ tenemos que $B_d(x, r') = B_{d_2}(x, r') \subseteq B_{d_2}(x, r)$

29/04 (practica)

¿$(C[0,1], d_1)$ es completo?

tengo que ver q' no haya huecos. (mediante suce. cauchy)

d_1: distancia de la integral



defino una funcion $f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}) \\ n(x - (\frac{1}{2} - \frac{1}{n})) & \text{si } x \in [\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2}) \\ 1 & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$

y tengo que probar que es una sucesion de cauchy

$\Downarrow$

qvq $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de cauchy:

sea $\varepsilon > 0$, $d_1(f_n(x), f_m(x)) = \underbrace{\int_0^1 |f_n(x) - f_m(x)|\,dx}_{\text{area del triang.}} \leq \frac{1}{2\min\{n,m\}} < \varepsilon$

sea $n_0 \,/\, \frac{1}{2n_0} < \varepsilon$

$\Rightarrow d_1(f_n, f_m) < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_0$

(no termine de copiar)

②

¿$C[0,1]$ d_∞ es completo?

sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de cauchy

$d_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f_m(x)|$

sea $x \in [0,1]$ y $\varepsilon > 0$, $\exists\, n_0 \,/$ para un x fijo

$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$

si x es fijo, $\underset{n\in\mathbb{N}}{(f_n(x))} \subseteq \mathbb{R}$ (sucesion contenida en $\mathbb{R}$) $\Rightarrow f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ para c/ $x \in [0,1]$

f está bien definida.

Ejercicio ②: sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$ probar que $S_{ais} = \{p \in S \text{ aislados}\}$ es a lo sumo numerable.

def → $p \in S$ se dice un punto aislado si $\exists\, r > 0$ talque $B(p,r) \cap S = \{p\}$

$S = \mathbb{N}^n$ tiene infinitos puntos aislados.

sol: nuestra idea es construir bolas alrededor de cada punto aislado disjuntas.

si $B(s, r_s)$ es una familia de bolas de este tipo, podemos elegir $(q_1, \dots, q_n) \in B(s, r_s)$ para cada $s \in S_{aislado}$ y definir las siguientes funciones:

$f: S_{ais} \longrightarrow \mathbb{Q}^n$

$s \longmapsto (q_1 \dots q_n) \in B(s, r_s)$

Este funcion es inyectiva porque $B(s, r_s) \cap B(s', r_{s'}) = \emptyset$ y entonces

$\#(S_{ais}) \leq \#(\mathbb{Q}^n) = \aleph_0$

como cada punto $s \in S_{ais}$ es aislado existe un $\tilde{r}_s$ tal que

$B(s, \tilde{r}_s) \cap S = \{s\}$

Tomamos $r_s = \tilde{r}_s \cdot \frac{1}{2}$

Afirmo que $B(s, r_s) \cap B(s', r_s) = \emptyset$, supongamos que

$x \in B(s, r_s) \cap B(s', r_{s'}) \Rightarrow d(x,s) < r_s$ y $d(x,s') < r_{s'}$

$\Rightarrow d(s,s') \leq d(s,x) + d(x,s') < r_s + r_{s'} < 2r_{s'} = \tilde{r}_{s'}$ si $r_{s'} > r_s$

$\Rightarrow s \in B(s', \tilde{r}_{s'}) \cap S = \{s'\}$ Absurdo!

$\Rightarrow$ las bolas son disjuntas.

☆ Cuando quiero demostrar si es completo:

paso 1 → defino f → f candidato libre

paso 2 → $d_\infty(f_n, f) \to 0 \Rightarrow f_n$ converge a f

paso 3 → ver que f es continua

ahora tengo q' probar si es continua:

sea n fijo, sea $n, m \geq n_0 \,/\, \underbrace{\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon}_{f_n \text{ es de cauchy}}$

$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$

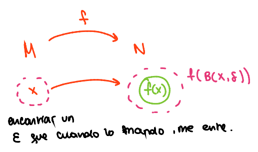
$\lim_{m\to\infty} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ (fijo 1 y al otro lo tiendo a ∞)

fijo. $\quad \to \infty$

$\forall x \in [0,1]\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

funciones continuas

(def) → sea (M,d) y (N,d') dos e.m $f: M \to N$,
$x \in M$, f es continua en x si $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 /$
si $d(y,x) < \delta \Rightarrow \underbrace{d'(f(x), f(y)) < \varepsilon}_{f(y) \in B(f(x),\varepsilon)} \quad y \in B(x,\delta)$



equiv $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0 / f(B(x,\delta)) \subseteq B(f(x), \varepsilon)$

Ejemplo:

① $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(\mathbb{R}^n, d_2)$, $(\mathbb{R}, |\cdot|)$
$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$
f es cont en x si $\forall \varepsilon > 0$
$\exists \delta > 0 / \underbrace{d_2(x,y)}_{\|x-y\|} < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

② $f: M \to N$, $x \in M$ es punto aislado ($\exists r > 0 / B(x,r) \cap M = \{x\}$)
dado $\varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 / f(B(x,\delta)) \subseteq B(f(x), \varepsilon)$
si $\delta = r$, $B(x,\delta) = \{x\} \Rightarrow f(B(x,\delta)) = \{f(x)\} \subseteq B(f(x), \varepsilon)$
$\Rightarrow f$ es continua en x.
ahora, si tenemos (M,δ) (N,d')
$f: M \to N$ es continua en x $\forall x$.

(Teo) → $f: M \to N$ $x \in M$, f es continua en $x \iff \forall \underbrace{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq M}_{\text{sucesion contenida en un e.m } M} / \underbrace{x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x}_{\text{converge.}} \Rightarrow f(x_n) \to f(x)$

d/ ⇒) hipotesis: f es continua en x
quiero ver: sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq M / x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$, quiero ver que $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq N$
donde $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$

sea $\varepsilon > 0$, qvq $\exists n_0 / \forall n \geq n_0$,
$d'(f(x_n), f(x)) < \varepsilon$, como f es continua en x, $\exists \delta > 0 /$
$d(x,y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$

como $x_n \to x$, $\exists n_0 /$ si $n \geq n_0$ $d(x_n, x) < \delta$
$\Rightarrow d'(f(x_n), f(x)) < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$.

⇐) pruebo x' el absurdo ⇒ supong que $\underline{f \text{ no es continua}}$ en x
implica que $\exists \varepsilon > 0 / \forall \delta > 0$
$\exists y \in M / d(x,y) < \delta$ pero
$d'(f(x), f(y)) \geq \varepsilon$.

Entonces
elijo $\delta = \frac{1}{n} \Rightarrow \exists x_n \in M / d(x_n, x) < \frac{1}{n}$ y $d'(f(x_n), f(x)) > \varepsilon$,

considero $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \subset N$.

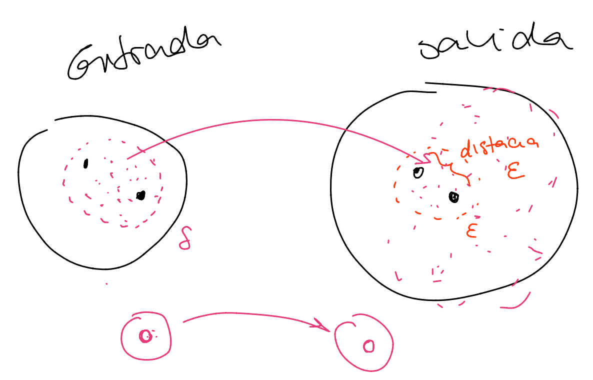
$d(x_n, x) < \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ pero $\forall n \in \mathbb{N}$,

$d'(f(x_n), f(x)) \geq \varepsilon \Rightarrow f(x_n) \not\to f(x)$ ABS!

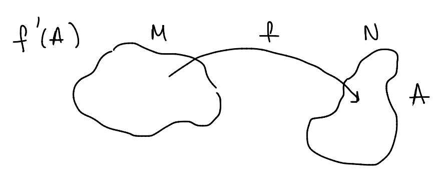
Ejemplo:

$ev_{1/2}: (C[0,1], d_\infty) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$
$f \longmapsto f(1/2)$
$ev_{1/2}$ es continua en f $\forall f \in C[0,1]$

sea $f \in C[0,1]$, sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C[0,1] / f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$
quiero ver que $ev_{1/2}(f_n) \to ev_{1/2}(f)$
$ev_{1/2}(f_n) = f_n(1/2)$
$ev_{1/2}(f) = f(1/2)$
$f_n(1/2) \to f(1/2) \iff |f_n(1/2) - f(1/2)| \to 0$
$f_n \to f$ en $(C[0,1], d_\infty)$
$\underbrace{d_\infty(f_n, f)}_{\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \Rightarrow |f_n(1/2) - f(1/2)| \leq \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \to 0$

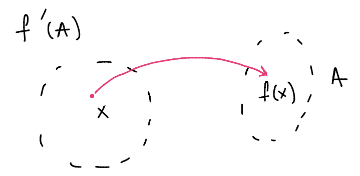


(def) → $f: M \to N$ es continua si es continua en x $\forall x \in M$.
$A \subseteq N$, $f^{-1}(A) = \{x \in M / f(x) \subset A\}$



(Teo) → $f: M \to N$ es continua $\iff f^{-1}(A) \subseteq M$ es abierto
$\forall A \subseteq N$ abierto

d/ ⇒) $M \xrightarrow{f} N$
) $f^{-1}(A) = \emptyset \Rightarrow$ es abierto
) si $f^{-1}(A) \neq \emptyset$, sea $x \in f^{-1}(A)$



Qvq $\exists r > 0 / B(x,r) \subseteq f^{-1}(A)$ como A es abierto, $\exists \varepsilon > 0 /$
• $B(f(x), \varepsilon) \subseteq A$
como f es continua en x, $\exists \delta > 0 / f(B(x,\delta)) \subseteq B(f(x), \varepsilon) \subseteq A$
$\Rightarrow B(x,\delta) \subseteq f'(A)$
(sea $y \in B(x,\delta) \Rightarrow f(y) \subset A \Rightarrow y \in f^{-1}(A)$)

⇐) sea $x \in M$, y sea $\varepsilon > 0$ qvq $\exists \delta > 0 / f(B(x,\delta)) \subseteq B(f(x), \varepsilon)$

como $B(f(x), \varepsilon)$ es un abierto
$\Rightarrow x \in f'(B(f(x), \varepsilon))$ es un abierto $\to \exists \delta > 0 / B(x, \varepsilon) \subseteq f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))$
$\Rightarrow f(B(x,\delta)) \subseteq B(f(x), \varepsilon)$ $\quad (y \in B(x,\delta) \Rightarrow y \in f^{-1}(B(f(x),\varepsilon))$
$\Rightarrow f(y) \in B(f(x), \varepsilon)$ ∴

Corolario: $f: M \to N$ es continua $\iff f^{-1}(F)$ es cerrado $\forall F$ cerrado
d/ $f^{-1}(F)$ es cerrado $\iff f^{-1}(F)^c$ es abierto
$f^{-1}(F)^c = f^{-1}(F^c)$ ← demostrar esto: tarea.

Ejemplo:
$M_2(\mathbb{R}) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \ a_{ij} \in \mathbb{R} \right\}$ $\quad d_\infty(A,B) = \max |a_{ij} - b_{ij}|$
$GL_2(\mathbb{R}) = \{A \in M_2(\mathbb{R}) : A$ es inversible$\}$ es abierto.

s/ det $M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$ el det es una funcion continua:
sea $(A^n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq M_2(\mathbb{R}) / A^n \to A$
$\Rightarrow \max_{1 \leq ij \leq 2} \{|a^n_{ij} - a_{ij}|\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow a^n_{ij} \xrightarrow[n\to\infty]{} a_{ij}$

$\det(A^n) = a^n_{11} a^n_{22} - a^n_{21} a^n_{12} =$
$A^n = \begin{pmatrix} a^n_{11} & a^n_{12} \\ a^n_{21} & a^n_{22} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow GL(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ es abierto

(teo) → $f: M \to N$ es continua $\iff f(\overline{E}) \subseteq \overline{f(E)}$ $\forall E \subseteq M$
d/ ⇒) f es continua. sea $E \subseteq M$.
sea $x \in \overline{E}$ qvq $f(x) \in \overline{f(E)}$ y como $\exists (x_n) \subseteq E / x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$. como
f es continua en $x \Rightarrow f(x_n) \to f(x)$
$\Rightarrow (f(x_n)) \subseteq f(E) \Rightarrow f(x) \in \overline{f(E)}$

⇐) $f(\overline{E}) \subseteq \overline{f(E)}$ $\forall E \subseteq M$
sea $F \subseteq N$ un cerrado qvq $f^{-1}(F)$ es cerrado.
Basta ver que $\overline{f^{-1}(F)} \subseteq f^{-1}(F)$.
sea $E = f^{-1}(F) \Rightarrow \underbrace{f(\overline{E}) \subseteq \overline{f(E)}}_{\text{hipotesis.}}$

¿Quien es $f(E)$?
$f(E) = f(f^{-1}(F))$

$\Rightarrow f(\overline{f^{-1}(F)}) \subseteq F \Rightarrow \overline{f^{-1}(F)} \subseteq f^{-1}(F)$ ∴

06/05

continuidad

Teorica

def → $f:(M,d) \to (N,d')$ decimos que f es uniformemente continua si $\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0 / (d(x,y)<\delta \Rightarrow d'(f(x),f(y))<\varepsilon$

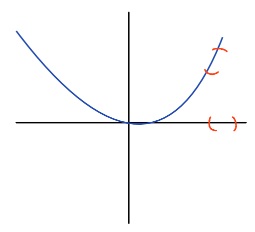
Ejemplos:

1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\cos(x)$

$\Rightarrow |\cos(x)-\cos(y)| = |-\operatorname{sen}(c)|\,|x-y| \leq |x-y|$

$\Rightarrow$ elijo $\delta=\varepsilon \Rightarrow |\cos(x)-\cos(y)| \leq |x-y| < \varepsilon$

2) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)=x^2$



f es continua en x $\forall x\in\mathbb{R}$, pero no es U.C

si $\delta>0$, $x\in\mathbb{R}$, $y=x+\delta$

$|x^2-y^2| = |(x+\delta)^2-x^2| = |2x\delta+\delta^2|$

si $\varepsilon>0$, $\delta>0 \Rightarrow \exists x\in\mathbb{R} / |2\delta x+\delta^2| \geq \varepsilon$

3) $f:(M,\delta) \to (N,d')$ δ la métrica discreta

dado $\varepsilon>0$, qvq $\exists \delta>0 /$ si $\underset{\text{métrica}}{\delta}(x,y) < \underset{\text{numero}}{\delta} \Rightarrow d'(f(x),f(y))<\varepsilon$) def de UC.

si $\delta=\frac{1}{2} \Rightarrow d(x,y)<\frac{1}{2} \Rightarrow x=y \Rightarrow d'(f(x),f(y))=0<\varepsilon$ ✓

$\Rightarrow$ toda f es U.C

Prop → $f:M\to N$ es UC $\Leftrightarrow \forall (x_n)(y_n)\subseteq M /$

$d(x_n,y_n)\to 0 \Rightarrow d'(x_n,y_n)\to 0$

d/ $\Rightarrow$) f es UC. sea $(x_n)(y_n)\subseteq M / d(x_n,y_n)\to 0$

qvq $d'(f(x_n),f(y_n))\to 0$

sea $\varepsilon>0$ y sea $\delta>0$ el de la UC. sea $n_0\in\mathbb{N} / n\geq N_0$

$d(x_n,y_n)<\delta$ xq' f es UC $\Rightarrow d'(f(x),f(y))<\varepsilon$

$\Leftarrow$) $\forall (x_n)(y_n)\subseteq M / d(x_n,y_n)\to 0 \Rightarrow d(f(x_n),f(y_n))\to 0$

qvq f es UC.

supongo que f no es UC $\Rightarrow \exists \varepsilon>0 / \forall\delta>0 \ \exists x,y$

$d(x,y)<\delta \wedge d'(f(x),f(y))\geq\varepsilon \quad \forall\varepsilon>0$

tomo $\delta=\frac{1}{n}$ y construyo $(x_n)(y_n)\subseteq M$

$d(x,y)<\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \ \wedge \ \underbrace{d'(f(x),f(y))}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0} \geq \varepsilon$ Abs!

obs: → no sabemos si $(x_n)(y_n)$ converge

Ej: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $f(x)=x^2$ $\quad x_n=n$, $y_n=n+\frac{1}{n}$

$d(x_n,y_n)=\frac{1}{n}\to 0 \quad |y_n^2-x_n^2| = |n^2+2+\frac{1}{n^2}-n^2|$

$= 2+\frac{1}{n^2} \geq 2.$

def → una función $f:M\to N$ se dice homeomorfismo si f es continua, biyectiva y f^{-1} es continua

si $\exists f:M\to N$ homeomorfismo decimos que M y N son homeomorfismo

obs! si $f:M\to N$ homeo $\Rightarrow$ tengo una correspondencia entre los abiertos de M y N.

sea $U\subseteq N$ abierto $\Rightarrow f^{-1}(U)\subseteq M$ es abierto

sea $V\subseteq M$ abierto $\Rightarrow f(V)\subseteq N$ es abierto

$(f(V)=(f^{-1})^{-1}(V)$ es abierto porq' f^{-1} es continua

ejemplo:

· $f:\mathbb{R}\to(-1,1)$ es un homeo

$x \longmapsto \frac{x}{-1+|x|}$

f es continua ✓ $\quad (f\circ f^{-1}=f^{-1}\circ f=\mathrm{id}.)$

f es biyectiva : $f^{-1}(y)=\frac{y}{1-|y|}$ ✓

f^{-1} es continua

ejemplo:

$f:(\mathbb{R},\delta)\to(\mathbb{R},|\cdot|)$

$x\longmapsto x$

f es U.C → f es continua ✓

f es biyectiva ✓

$f^{-1}:(\mathbb{R},|\cdot|)\to(\mathbb{R},\delta)$

$x\longmapsto x$

sea $x\in\mathbb{R}$, tomo $\varepsilon<1$

sea $\delta>0$, $\exists y / |x-y|<\delta$ pero $\delta(x,y)\geq 1>\varepsilon$

$y\in B(x,\delta)$

def → $f:M\to N$ es una isometría si

$d(x,y)=d'(f(x),f(y)) \quad \forall x,y\in M$

obs si f es una isometría $\Rightarrow f$ es lipschitz $\Rightarrow f$ es UC

si además es biyectiva $\Rightarrow f$ es un homeomorfismo

$v,w\in N$, $d(\underbrace{f^{-1}(v)}_{x},\underbrace{f^{-1}(w)}_{y}) = d'(f(x),f(y)) = d'(v,w)$

$\Rightarrow f^{-1}$ es una isometría.

def → $f:M\to N$ decimos que es lipschitz si $\exists c>0 /$

$d'(f(x),f(y))\leq c\cdot d(x,y) \quad \forall x,y\in M$

Ejemplo:

1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)=\cos(x) \to f$ es lipschitz con $c=1$

2) $F:(\mathcal{C}[0,1],d_\infty)\to(\mathcal{C}[0,1],d_\infty)$

$f\longmapsto\int_0^t f(x)\,dx$

$\underbrace{d_\infty(F(f),F(g))}\leq c\cdot d_\infty(f,g) = c\cdot\sup|f(x)-g(x)|$

$\left|\int_0^t f(x)\,dx-\int_0^t g(x)\,dx\right| = \left|\int_0^t f(x)-g(x)\,dx\right| \leq \int_0^t \underbrace{|f(x)-g(x)|}_{\leq d_\infty(f,g)}dx \leq \int_0^t d_\infty(f,g)\,dx = t\,d_\infty(f,g) \leq 1$

$\leq d_\infty(f,g)$

$\Rightarrow F$ es lipchitz con cte 1.

obs → si f es lipchitz $\Rightarrow$ es U.C !!

!! $d'(f(x),f(y))\leq c\cdot d(x,y)<\varepsilon$

→ elijo $\delta=\frac{\varepsilon}{c}$ y listo.

Prop → sea $X\subseteq M$ un subconjunto denso $(\overline{X}=M)$, (N,d') un e.m completo. sea $f:X\to N$ U.C

$\Rightarrow \exists \hat{f}:M\to N / \tilde{f}|_X=f$ y $\tilde{f}$ es UC.

d/ sea $x\in M$. si $x\in X \to \tilde{f}(x)=f(x)$

si $x\notin X \to \exists (x_n)\subseteq X / x_n\to x$

defino $\hat{f}(x)=\lim_{n\to\infty}f(x)$

1° quiero ver que $\exists$ lím

2° ver que $\tilde{f}(x)$ está bien definido

1°) $\exists \lim_{n\to\infty}f(x_n)$: como N es completo,

$\exists \lim_{n\to\infty}f(x_n) \Longleftrightarrow (f(x))_{n\in\mathbb{N}}$ es de cauchy. $\Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0, n_0\in\mathbb{N} /$

$d(f(x_n),f(x_m))<\varepsilon$

$\forall m,n\geq n_0$

sea $\varepsilon>0$, como f es UC.

$\exists \delta>0 / d(x,y)<\delta \Rightarrow d'(f(x_n),f(y_n))<\varepsilon$

sea $n_0\in\mathbb{N} /$ si $n,m\geq n_0 \Rightarrow d(x_n,x_m)<\delta$ $(x_n\to x)$

$\Rightarrow (x_n)$ es de cauchy.

$\Rightarrow d'(f(x_n),f(x_m))<\varepsilon \quad \forall n,m\geq n_0$

2°) Buena definicion : sup $(x_n),(y_n)\subseteq X / x_n\to x$, $y_n\to x$

tengo que $\underbrace{\lim_{n\to\infty}f(x_n)}_{l_1} = \underbrace{\lim_{n\to\infty}(y_n)}_{l_2}$

$d(x_n,y_n)\leq d(x_n,x)+d(y_n,x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\Rightarrow$ por la prop anterior y f es UC $\Rightarrow d'(f(x_n),f(y_n))\to 0$

$\Rightarrow d'(l_1,l_2)\leq d'(l_1,f(x_n))+d'(l_2,f(x_n)) \leq \underbrace{d'(l_1,f(x_n))}_{\to 0}+\underbrace{d'(l_2,f(y_n))}_{\to 0}+\underbrace{d'(f(x_n),f(y_n))}_{\to 0}$

$\longrightarrow 0$

$\Longleftrightarrow l_1=l_2$

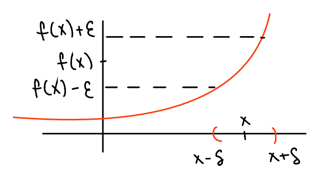
3°) $\hat{f}$ es UC (tarea) tomo $x,y\in M$ con $(x_n)(y_n)\subseteq M$ con $x_n\to x$ $y_n\to y$

debo usar que f es U.C

continuidad - práctica

$f:(E,d)\to(E',d')$ es continua en $x\in E$ si $\forall\varepsilon>0$

$\exists\delta>0 / d(x,y)<\delta \Rightarrow d'(f(x),f(y))<\varepsilon$



Ejercicio ①

$E=C([0,1])$

$d=d_\infty(f,g)=\sup_{x\in[0,1]}|f(x)-g(x)|$

$S=C([0,1])\longrightarrow C([0,1])$, $S(f)=f^2$

sea $\varepsilon>0$ y sea $f_0\in C([0,1])$

qvq $\exists\delta>0 / d_\infty(f,f_0)<\delta \Rightarrow d_\infty(f^2,f_0^2)<\varepsilon$

$d_\infty(f^2,f_0^2) = \sup_{x\in[0,1]}|f^2(x)-f_0^2(x)|$

tenemos que $|f^2(x)-f_0^2(x)| = |(f(x)+f_0(x))\underbrace{(f(x)-f_0(x))}_{\leq d_\infty(f,f_0)<\delta}|$

Acotemos $|f(x)+f_0(x)| = |f(x)-f_0(x)+f_0(x)+f_0(x)|$

$\leq \underbrace{|f(x)-f_0(x)|}_{\leq d_\infty(f,f_0)}+2|f_0(x)|$

$|(f(x)+f_0(x))(f(x)-f_0(x))| \leq ((f(x)-f_0(x)+2|f_0(x)|)\,|f(x)-f_0(x)|$

$\leq \delta^2+2\underbrace{|f_0(x)|}_{\leq c}\delta \leq \delta^2+2c\delta$

f_0 es continua en $[0,1]$ ⇝ tiene máx (depende de f_0)

Luego, $d_\infty(f^2,f_0^2)\leq\delta^2+2c\delta<\varepsilon/2+2c\,\varepsilon/4c=\varepsilon$

Elijo $\delta<\min\{\sqrt{\varepsilon/2},\varepsilon/4c\}$ $\quad \delta^2<\varepsilon/2$

$2c\delta<\varepsilon/2$

$\delta<\varepsilon/4c$

Ejercicio ②: $f:(E,d)\to(\mathbb{R},|\cdot|)$

f es continua sii $\begin{cases} U_\alpha=\{x\in E / f(x)\in(\alpha,+\infty)\} \\ V_\alpha=\{x\in E / f(x)\in(-\infty,\alpha)\} \end{cases}$ son abiertos

Sabemos que f es continua sii $\forall G\subseteq E'$ abierto, $f^{-1}(G)$ es abierto.

$\Rightarrow$) $U_\alpha=f^{-1}(\underbrace{(\alpha,+\infty)}_{\subseteq\mathbb{R}})$ como $(\alpha,+\infty)$ es abierto en $\mathbb{R}$ y f es continua,

entonces $f^{-1}((\alpha,+\infty))=U_\alpha$ es abierto (es pre imagen de abierto)

$\Leftarrow$) U_α y V_α abiertos $\forall\alpha\in\mathbb{R}$, qvq f es continua

sea $G\subseteq\mathbb{R}$ arbitraria

si G es abierto,

$G=\bigcup_{x\in G}B(x,r_x)$

$G=\bigcup_{x\in G}B(x,r_x)=\bigcup_{x\in G}(x-r_x,x+r_x)$

$f^{-1}(G)=f^{-1}\left(\bigcup_{x\in G}(x-r_x,x+r_x)\right)$) ej 1 guía 2

$=\bigcup_{x\in G}f^{-1}((x-r_x,x+r_x))$

$=\bigcup_{x\in G}f^{-1}((-\infty,x+r_x)\cap(x-r_x,+\infty))$

$=\bigcup_{x\in G}\underbrace{f^{-1}((-\infty,x+r_x))}_{V_{x+r_x}}\cap\underbrace{f^{-1}((x-r_x),+\infty))}_{U_{x-r_x}}$

$\Rightarrow f^{-1}((x-r_x,x+r_x))$ es abierto

como la unión arbitraria de abiertos es abierta,

entonces $\bigcup_{x\in G}f^{-1}((x-r_x,x+r_x))=f^{-1}(G)$ es abierto

$\Rightarrow f$ es continua ■

compacidad teorica

def → (M,d) un e.m $K \subseteq M$, se dice **compacto**
si $\forall (x_n) \subseteq K$ $\exists (x_{n_k})_k$ convergente.
$(\exists\, x \in K / x_{n_k} \to x)$

Teo → sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ acotada:
$\exists (a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} / a_{n_k} \to a \in \mathbb{R}$

Ejemplo:

1. Si $K = [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to K$ es compacto

si $(x_n)_n \subseteq [a,b] \to (x_n)_n$ está acotado
$\to \exists (x_{n_k})_k$ subsuc. $x_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} x$

como $[a,b]$ es cerrado $\to n \in [a,b]$

2. (M,δ), δ discreto
si $K \subseteq M$ es infinito $\Rightarrow K$ no es compacto.

como K es infinito $\Rightarrow \exists (x_n) \subseteq X / x_n \neq x_m \ \forall n \neq m$
$\to \delta(x_n, x_m) = 1 \ \forall n \neq m$

En particular, si (x_{n_k}) subsuc no puede ser de cauchy
$(\delta(x_{n_k}, x_{n_j}) = 1,\ n_k \neq n_j)$

Obs! si K es infinito → es compacto.

Prop → si $K \subseteq (M,d)$ compacto y $F \subseteq K$ cerrado
⇒ es compacto

d/ K compacto → es cerrado y acotado
$F \subseteq K$ tambien es cerrado y acotado
⇒ F es compacto, todavía nos falta

Intento 2: sea $(x_n) \subseteq F$, como $F \subseteq K$
$\to \exists (x_{n_k}) / x_{n_k} \to x \in K$ como F cerrado $\to x \in F$ ☒

Prop → $K \subseteq (M,d)$ compacto
→ K es cerrado y acotado

d/ · Cerrado: sea $(x_n) \subseteq K / x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x \in M$
quiero ver que $x \in K$
como K compacto $\to \exists (x_{n_k})_k / x_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} y \in K$
porque $x_{n_k} \to x$ $x = y \in K$

· Acotado: sea $x \in K$ qvq $\exists\, C > 0 / K \subseteq B(x,C)$
supongamos que no es acotado $\to \forall n \in \mathbb{N},\ K \not\subseteq B(x,n)$
$\to \exists x_n \in K / x_n \notin B(x,n)$
llamo $x_1 = x$

sea $\varphi : M \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ es una funcion continua
$y \mapsto d(x_1, y)$

como K es compacto $\to \exists (x_{n_k}) / x_{n_k} \to z \in K$
entonces $\varphi(x_{n_k}) \to \varphi(z) = d(z, x_1)$
$d(x_{n_k}, x_1) \geq n_k \longrightarrow \infty$ ABS!
$d(z, x_1) \geq \infty$ { (no tiene sentido)

Prop → sea $\{K_i\}$ familia de compactos $\subseteq M$

1) $\bigcup_{i=1}^{m} K_i$ es compacto (union infinita de compacto es compacto)

2) $\bigcap_{i\in\mathbb{N}}^{n} K_i$ es compacto (intersección numerable de compacto es compacto)

d/ (1) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} K_i$

$\to \exists K_i / K_i$ tiene infinitos $n / x_n \in K_i$
$\to \exists (x_{n_k}) \subseteq K_i$
$\to \exists (x_{n_{k_j}})$ subsuc convergente ☒

(2) K_i compacto $\to K_i$ cerrado $\forall i \in I$
$\to \bigcap_{i\in I} K_i$ es cerrado

Ademas, $\bigcap_{i\in I} K_i = K_{i_0}$ es compacto
$\to \bigcap_{i\in I} K_i$ es compacto. ☒

Ejemplo: NO VALE (en general)
cerrado + acotado ⟶ compacto.

$X = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} / \exists\, n_0 / a_n = 0\ \forall n \geq n_0\}$ (a partir de un n_0, la sucesion empieza a ser cero)
$d_\infty((a_n),(b_n)) = \sup |a_n - b_n|$

sea $0 = (0,0,0\ldots) \in X$
$K = B[0,1] = \{(a_n) \in X / |a_n - b_n| = |a_n| \leq 1\ \forall n \in \mathbb{N}\}$
$0_n = (0,0\ldots)$

digo que K es cerrado y acotado (porq' es una bola cerrada)

K no es compacto:
$x^1 \in K$, $x^1 = (1,0,0\ldots) \in K$
$x^2 \in K$, $x^2 = (0,1,0\ldots) \in K$
$\vdots$
$x^n \in K$, $x^n = (0,0,\underbrace{\ldots}_{n},1,0\ldots) \in K$

$\Rightarrow d_\infty(x^n, x^m) = \sup |x_i^n - x_i^m| = 1$ $n \neq m$
$\Rightarrow (x^n)$ no tiene subsuc convergentes (siempre Cauchy, ver def (d no disminuye))

Teo (Heine - Borel) !!
si $K \subseteq (\mathbb{R}^n, d_2)$ cerrado y acotado
!! → es compacto

d/ caso $m=1$ $\to K \subseteq (\mathbb{R}, d_2) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$
sea $(a_n)_n \subseteq K \subseteq \mathbb{R} \to (a_n)$ está acotado
$\to \exists (a_{n_k})$ converg $a_{n_k} \to a \in \mathbb{R}$
como K es cerrado $\to a \in K$

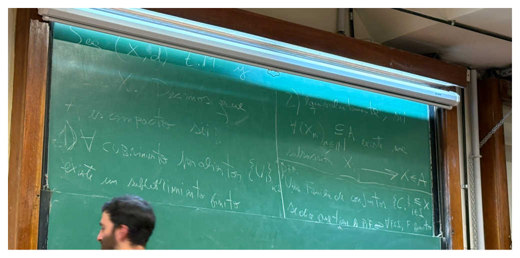
caso m cualq → $K \subseteq (\mathbb{R}^m, d_2)$
sea $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ contenido en $K \subseteq (\mathbb{R}^m, d_2)$
sea $(x^n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq K$, $x^1 = (x_1^1, x_2^1, \ldots, x_m^1)$
$\vdots$
$x^m = (x_1^m, x_2^m, \ldots x_m^m)$

concidero $(x_1^n)_n \subseteq \mathbb{R}$, $|x_1^n| \leq (\sum^n |x_i^n|^2)^{1/2} = d_2(x^n, 0) \leq C$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$\to (x_1^n)_n$ está acotada $\to \exists (x_1^n) / x_1^n \to x_1 \in \mathbb{R}$
$(x_2^{n x_1}) \subseteq \mathbb{R}$ está acotado
$\vdots$ $\to \exists (x_1^{n x_1 x_2}) / x_2^{n x_1 x_2} \to x_2 \in \mathbb{R}$
$\vdots$
Recursivamente continuo
(x^{n_k}) subsuc $/ x_i^{n_k} \to x_i$ $\forall i = 1, \ldots, m$

$\to x = (x_1, \ldots, x_m)$ $x^{n_k} \to x \in \mathbb{R}^m$
$d_2(x^{n_k}, x) = (\sum_{i=1}^{n} |x_i^{n_k} - x_i|^2)^{1/2} \leq \max_{1\leq i\leq m} |x_i^{n_k} - x| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$
como K es cerrado $\to x \in K$ ☒

¿ cómo hago si pongo d_∞, d_1 ?
NO porque $d_1 \sim d_2 \sim d_\infty$
→ si $(x^n) \subseteq \mathbb{R}^m$ y (x^n) converge con d_2 → converge con d_1 y d_∞



Practica:

1.
$\ell_\infty = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} / d_\infty(0,(a_n)) < \infty\}$

sea $A = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} / \sum_{i=1}^{n} |x_i| < \infty\} \subseteq \ell_\infty$ ¿ $\underbrace{\text{es } A \text{ compacto en } (\ell_\infty, d_\infty)}$?
tarea: sea X compacto, hint → tomar $C_1, C_2, C_3 \ldots$

$x^k = (0,0,\ldots,k,0\ldots)$
lugar k-ésimo

supongamos que $\exists\, x^{k_i} / x^{k_i} \to x \in A \subseteq \ell_\infty$
obs → (X,d), $x_0 \in X$, $\phi_{x_0} : X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ es continua.
$x \overset{\phi_{x_0}}{\longmapsto} d(x, x_0)$

si $f : X \to Y$ y $C \subseteq X$, f / f restringida a C,
$C \to Y$ es continua

$x^{k_j} \to x \Rightarrow d_\infty(0, x^{k_j}) \longrightarrow d_\infty(0,x)$
$\qquad\qquad\quad \| \qquad\qquad\qquad \|$
$\qquad\qquad\quad k_j \longrightarrow \infty \iff x \notin \ell_\infty$
ABS! ☒ no hay una subsuc. convergente.

CLASICOS EJEMPLOS PARA VER SI ES COMPACTOS O NO.

2. sea $F = \{f \in C([0,1]) / d_\infty(0,f) \leq 1\}$ en $(C[0,1], d_\infty)$
¿ es f compacto? ¿ es f cerrado?

$\phi_0(f) = d_\infty(0,f)$ es continua ← pract 4 ej 10. (probado)
f es exactamente igual a $\phi_0^{-1}([0,1])$ ⇒ f es cerrado. ☒
$(\mathbb{R}_{\geq 0}, |\cdot|)$

¿ es compacto?
sea $f_n(x) = x^n \in C([0,1])$ para cada $n \in \mathbb{N}$
supongamos que f es compacto ⇒ entonces $\exists$ una funcion $\varphi \in f$
tal que $\varphi_{n_i} \to \varphi$ (la sucesion tienda a φ) (agarro cualq' subsucesion de una sucesion y quiero ver que converge al espacio)

$\varphi_{n_i} \to \varphi \iff \sup_{x\in[0,1]} \{|\varphi_{n_i}(x) = \varphi(x)|\} \longrightarrow 0$
$\Rightarrow \forall x \in [0,1]$, tenemos que $\varphi_{n_i}(x) \xrightarrow{i\to\infty} \varphi(x)$
$\Rightarrow \forall x \in [0,1]$, $x^{n_i} \xrightarrow[i\to\infty]{} \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1) \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

Ejercicio
sea (X,d) E.M compacto y $\{U_i\}_{i\in I}$ cubrimiento por abiertos de X. Demostrar que $\exists\, \delta > 0 / \forall x \in X\ \exists\, j \in I$ tal que $B(x,\delta) \subseteq U_i$

S/ como X es compacto, $\exists\, U_{i_1}, U_{i_2}, \ldots, U_{i_n}$ que cubren X.
si algún $U_{i_j} = X$, tomo cualq δ.

sino:
concideremos $f : X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ complemento
$f(x) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} d(x, U_{i_j}^c)$ es continua

como f es continua y es un compacto, $\underbrace{\exists \text{ un } x_0 / f(x) \geq f(x_0)\ \forall x \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$
esto es porque hay compacidad.
x_0 es el minimo.

Afirmo que $f(x)$ es el δ buscado.

Sabemos que $f(x_0) \geq 0$, digo que $f(x_0) > 0$ sino, las distancias $d(x_0, U_{i_j}^c) = 0$ $\forall j \in \{1..n\}$
para que $f(x_0) = 0$

$x_0 \in U_{i_j}^c$ $\forall j \in \{1, \ldots n\}$
luego $x_0 \in U_{i_1}^c \cap U_{i_2}^c \cap \ldots \cap U_{i_n}^c \Rightarrow x_0 \in (U_{i_1} \text{ union } U_{i_2} \cup \ldots U_{i_n})^c = x_0 \notin \bigcup_{k=1}^{n} U_{i_k}$
De MORGAN $\qquad$ $(\cup)$

pero $x_0 \in \bigcup_{k=1}^{n} U_{i_k} = X$ ⇒ ABS!

luego $f(x_0) > 0$, $f(x_0) = \delta$.

Finalmente sea $x \in X_0$ quiero ver que $B(x,\delta) \subseteq U_{i_k}$ $k \in \{1 \ldots n\}$

sea $y \in B(x,\delta)$ y $y \in U_{i_k} \Rightarrow d(y, U_{i_k}^c) \geq f(y) \geq f(x_0) = \delta$

$\Rightarrow y \in U_{i_k} \supseteq B(x,\delta)$

práctica 22/05

compacidad:

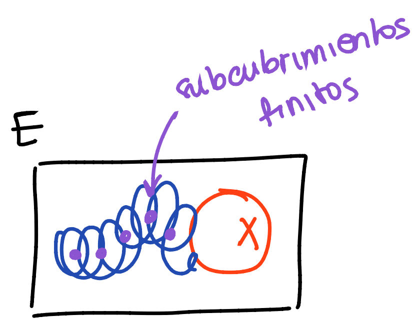
teo: $A \subseteq X$ compacto $\Rightarrow A$ es cerrado.

teo: $K \subseteq X$ compacto y $F \subseteq K$ cerrado $\Rightarrow F$ compacto

ejercicio 1)

sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (E,d)$ / $x_n \to x$

$\Rightarrow \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{x\} = K \subseteq E$ es un compacto



s/ sea $\{U_i\}_{i\in I}$ un cubrimiento por abiertos de K. quiero extraer un subcubrimiento finito.

sea $\tilde{i} \in I$ / $x \in U_{\tilde{i}}$, entonces como $U_{\tilde{i}}$ es un abierto,

$\exists\, r>0$ / $B(x,r) \subseteq U_{\tilde{i}}$ y $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ / si $n \geq n_0$ $d(x_n,x)<r$

$\Rightarrow x_n \in B(x,r) \subseteq U_{\tilde{i}}$ $\forall n \geq n_0$

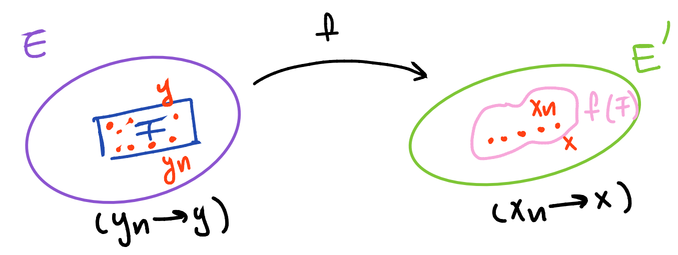
sean $i_1, i_2, i_3 \dots i_{n_0-1}$ / $x_j \in U_{i_j}$ para cada $j \in \{1,2,\dots n_0-1\} \Rightarrow \{U_{i_1}, U_{i_2}, \dots U_{i_{n_0-1}}, U_{\tilde{i}}\}$ es un subcubrimiento de K. $\Rightarrow K$ es compacto $\boxtimes$ Ejercicio importante !!

Problema 2)

sea $f: (E,d) \to (E',d)$ continua / $f^{-1}(K)$ es compacto $\forall K \subseteq E'$ compacto

Entonces f es una función cerrada. ($f(F)$ es cerrado $\forall F \subseteq E$ cerrado)

s/ sea $F \subseteq E$ un subconj cerrado, qvq la imagen de f $\to f(F)$ es cerrado



qvq su complemento es abierto, o la sucesión no se puede "escapar"

sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq f(F)$ una sucesión / $x_n \to x$, quiero ver que $x \in f(F)$

como $x_n \in f(F)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces $\exists\, y_n \in F$ / $f(y_n) = x_n$

sea $K \subseteq E'$ dado por $K = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{x\}$ este conjunto es compacto por el ej anterior

Entonces $f^{-1}(K)$ es compacto.

observar q' $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq f^{-1}(K)$ compacto porque $f(y_n) = x_n \in K$. Como $\{y_n\}$ es una sucesión en un compacto, $\exists\, y_{n_k}$ converge $y_{n_k} \to y$

como $y_{n_k} \in F$ $\forall k \in \mathbb{N}$, entonces $y \in F$ porque F es cerrado. Como f es continua, $f(y_{n_k}) = x_{n_k} \to f(y)$, como (x_{n_k}) es una subsucesión de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, f converge a x, por unicidad del límite, $f(y) = x \in f(F)$ $\therefore \boxtimes$

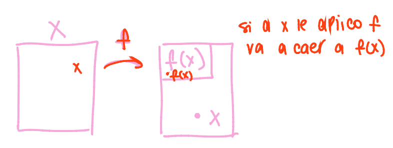
Ejercicio 3) $f: X \to X$ continua y (X,d) es un espacio métrico compacto / f cumple $d(f(x), f(y)) \geq d(x,y)$ $\forall x,y \in X$. $\Rightarrow f$ es un homeomorfismo.

s/ hay que ver que f sea inyectiva, sobreyectiva y que es inversa es cont.

- sea $x,y \in X$, si $f(x)=f(y) \Rightarrow d(f(x),f(y))=0 \Rightarrow d(x,y) \leq 0 \Rightarrow x=y$

$\Rightarrow f$ es inyectiva ✓

pruebo x' el abs!



- para ver si f es sobreyect. $\to$ sea supong $x \notin f(x) = \inf(x)$

consideremos la sucesión $(f^{(n)}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ dnd $f^{(n)}(x) = \underbrace{f \circ f \circ f \circ \dots \circ f}_{n\text{-veces}}(x)$, Afirmamos que $(f^{(n)}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ no admite subsuc convergentes $\Rightarrow$ ABS! xq X es compacto.

sea $n > m \Rightarrow d(f^{(n)}(x), f^{(m)}(x)) \geq d(f^{(n-1)}(x), f^{(m-1)}(x)) \geq \dots \geq d(f^{(n-m)}(x), x)$

sea $\varepsilon = d(x, \underbrace{f(X)}_{\text{conjunto } X}) > 0$. como $f(x)$ es compacto, la función $d(x,-): f(x) \to \mathbb{R}$
$y \mapsto d(x,y)$

$d(x,f(X)) = \inf_{y\in f(x)} d(x,y)$ dist y a x

alcanza un mínimo y luego $d(x,f(x))>0$. $\Rightarrow$ Entonces $(f^{(n)}(x))$ no tiene subsuc. converg $\Rightarrow$ ABS! $\Rightarrow f$ es sobreyectiva

(hay un punto dnd la dist a x es mínima)

- Por último, la función inversa $f^{-1}: X \to X$ tmb resulta continua.

sea $F \subseteq X$ un cerrado, qvq $\underbrace{(f^{-1})^{-1}(F)}_{= f(F)}$ es un cerrado

la preimagen de f^{-1}

como X es compacto $\Rightarrow F$ es compacto

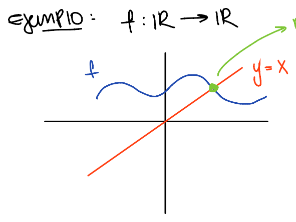
$\Rightarrow f(F)$ es compacto $\Rightarrow f(F)$ es cerrado.

Punto fijo

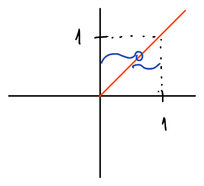
teorica 20/5

def $\Rightarrow f: M \to M$, $x \in M$ es un **pto fijo** de f si $f(x) = x$

ejemplo: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



los puntos fijos son los puntos de intersección del gráfico con la recta



si $f[0,1] \to [0,1]$ continua

$\Rightarrow f$ tiene al menos un punto fijo.

sea $g(x) = f(x) = x$

$g(0) = f(0) \geq 0$

$g(1) = \underbrace{f(1)}_{<0} - 1 \leq 0$

g es continua $\Rightarrow$ por bolsano, $\exists\, x_n \in [0,1] / g(x_0) = 0$

$\Rightarrow f(x_0) = x_0$

obs $\rightarrow f: M \to M$ continua, $x_0 \in M$ $\quad x_n = f(x_{n-1})$ $\forall n \geq 1$

$x \rightarrow (x_n) \subseteq M$. Supongamos $x_n \to x$, como f es continua $\underbrace{f(x_n)}_{= x_{n+1}} \to f(x) \Rightarrow x_{n+1} \to f(x)$

$\Rightarrow f(x) = x$ es un punto fijo.

def $\rightarrow f: M \to N$ es una **contracción** si $\exists\, 0 < c < 1 /$

$d'(f(x), f(y)) \leq c\, d(x,y)$ $\forall x,y \in M$

obs si f es contracción $\Rightarrow f$ es Lipschitz (con cte c) (y por lo tanto es continua)

ejemplo:

1) $f: [0, 1/3] \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = x^2$

$\rightarrow |f'(x)| \leq 2/3$

$\rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \underbrace{2/3}_{c} |x-y|$ $\forall x,y \in [0, 1/3]$

2) $f: [0, 1/2) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$

$\rightarrow |f'(x)| < 1 \rightarrow$ no es una contracción

Teo ! $\rightarrow$ si $f: M \to M$ tal que $d(f(x), f(y)) < d(x,y)$ $\forall x,y \in M$ y M compacto. Entonces f tiene un único punto fijo.

idea para la demo:

(1) $A = \{d(x, f(x))\ x \in M\} \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$

(2) $0 \in A$ $\quad$ ·) $\inf(A) = \min(A)$

·) $0 = \inf(A)$

(3) unicidad.

demo: (1) sea $A = \{d(x, f(x))\ x \in M\} \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ $\quad A \neq \emptyset$ y A está acotado inf.

$\Rightarrow \exists \inf(A)$

(2) sea $i = \inf(A)$. Existe $(x_n) \subseteq M / d(x_n, f(x_n)) \longrightarrow i$

como M es compacto $\Rightarrow \exists$ una sucesion convergente $(x_{n_k}) \longrightarrow x \in M$

$\Rightarrow d(x_{n_k}, f(x_{n_k})) \to i$

f continua $\Rightarrow f(x_{n_k}) \to f(x)$

$\Rightarrow d(x_{n_k}, f(x_{n_k})) \longrightarrow d(x, f(x))$ (TAREA)

$\Rightarrow i = d(x, f(x)) \in A$

$\Rightarrow i = \min(A)$

veamos que $i = 0$: supongo que no $\Rightarrow d(x, f(x)) > 0 \Rightarrow x \neq f(x)$

sea $y = f(x) \neq x$, $\underbrace{d(y, f(y))}_{\in A} = d(f(x), f(y)) < d(x,y) = \underbrace{d(x, f(x))}_{\in \min(A)}$ ABS!

$\Rightarrow i = 0$. ✓

$\Rightarrow x$ es punto fijo

(3) unicidad: supongo $\exists\, y \neq x / y = f(y)$

$d(x,y) = d(f(y), f(x)) < d(y,x)$ ABS.

$\Rightarrow x$ es el único punto fijo ▨

TEO ! **Punto fijo de Banach**

sea $f: M \to M$ una contracción y M completo. Entonces f tiene un único punto fijo

idea para la demo:

(1) sea $x_0 \in M$, $x_n = f(x_{n-1})$

(2) probar que (x_n) converge a un x. $\underbrace{\phantom{(x_n) \text{ converge a un } x}}_{\text{ver que es de cauchy}}$

(3) ver que x es el único punto fijo.

demo: (1) sea $x_0 \in M$, defino $x_n = f(x_{n-1})$, $n \geq 1$

$(x_n) \subseteq M$, quiero ver que $x_n \to x \in M$.

como M es completo, basta con ver que es de cauchy.

¿es cauchy?

$x_{1-1} = x_0$

$d(x_1, x_0) = d(f(x_0), x_0)$

$d(x_2, x_1) = d(f(x_1), f(x_0))$

$\leq \underbrace{c}_{<1} \cdot d(x_1, x_0) - c \cdot d(f(x_0), x_0)$

$d(x_{n+1}, x_n) = d(f(x_n), f(x_{n-1})) \leq c \cdot d(x_n, x_{n-1})$

$\leq c^2 \cdot d(x_{n-1}, x_{n-2}) \leq \ldots \leq \underbrace{c^n}_{\to 0} \cdot d(f(x_0), x_0)$

tdv no probe que sea de cauchy

cuanto mayor sea n, $c \to 0$.

(2) sea $n, m \in \mathbb{N}$, supongo $m = n+k$ $\forall k \in \mathbb{N}$

$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_{m-1}) + \ldots + \underbrace{d(x_{n+1}, x_n)}_{\leq c^n d(f(x_0), x_0)} \leq d(f(x_0), x_0)(c^n + c^{n+1} + c^{n+2} + \ldots + c^{m-1}) = d(f(x_0), x_0) \cdot c^n (1 + c + c^2 + \ldots + c^{k-1}) \leq$ (*)

(dist de n a m es n + k pasos)

obs $1 + c + c^2 + \ldots c^{k-1} = \sum_{i=n}^{k-1} c \leq \sum_{i=0}^{\infty} c^i = \frac{1}{1-c}$ (serie geometrica)

(*) $\leq \frac{c^n}{1-c} d(f(x_0), x_0)$, sea $\varepsilon > 0$, sea $n_0 \in \mathbb{N} / \underbrace{\frac{c^{n_0}}{1-c}}_{\to 0} d(f(x_0), x_0) < \varepsilon$ } puedo porque $c^n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

$\Rightarrow$ si $n, m \geq n_0$, $d(x_n, x_m) \leq \frac{c^n}{1-c} d(f(x_0), x_0) < \varepsilon$ ∴ ▨

como M es completo,

$\Rightarrow x_n \to x \in M$ y x es un punto fijo: $\underbrace{f(x_n)}_{x_{n+1}} \longrightarrow f(x)$ (f es continua)

$\Rightarrow f(x) = x$ es un pto fijo. ▨

(3) pruebo la unicidad:

supongamos que $y \neq x$, $f(y) = y$

$d(x,y) = d(f(y), f(x)) \leq c\, d(y,x) < d(y,x)$ ABS!

$\Rightarrow x$ es el único pto fijo.

$d(x_n, x_{n+k}) \leq \frac{c^n}{1-c} d(f(x_0), x_0)$

si tomo límite con $k \to \infty$ $\quad x_{n+k} \xrightarrow{k \to \infty} x$ $\quad \Rightarrow d(x_n, x) \leq \frac{c^n}{1-c} d(f(x_0), x_0)$

Espacios Armados

def → sea E un $\mathbb{R}$ espacio vectorial, una norma sobre E es una función $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que

(1) $\|x\| = 0 \iff x = 0$ ← cero del espacio vectorial

(2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \; x \in E$

(3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad x, y \in E$

ejemplo:

(1) $E = \mathbb{R}^n$,

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{1/2}$$

$$\|x\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

son normas (ej de la guía)

obs → los espacios normados son e.m con

$$d(x,y) = \|x-y\|$$

(no todas las distancias provienen de una norma)

ejemplo: $(\mathbb{R}, \delta)$ δ la discreta $\nexists$ $\|\cdot\|$ en $\mathbb{R}$ / $\delta(x,y) = \|x-y\|$

(lo pruebo):

"la distancia de 1 a 2"

supongamos que existe. → $1 = \delta(2,1) = \|2-1\| = \|1\|$

$1 = \delta(3,1) = \|3-1\| = 2\|1\| = 2$

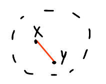
ABS, $1 \neq 2$!

revisar xq $\delta(3,1) = 1$

def → $(E, \|\cdot\|)$ decimos que es un Espacio de Banach si es completo (con la distancia heredado de la norma)

obs: $(E, \|\cdot\|)$ $B(x,r) = \{ y \in E : \|x-y\| < r \}$

si $y \in B(x,r) \Rightarrow$ el segmento que une a y con x tmb está en la bola



cuand $t=0$ me da y, cuando $t=1$ me da x

($z(t)$ es el segmento entre x,y)

$$z(t) = tx + (1-t)y \quad t \in [0,1]$$

$$\|z(t) - x\| = \|tx + (1-t)y - x\|$$

$$= \|(t-1)x + (1-t)y\|$$

$$= \underbrace{|1-t|}_{\leq 1} \underbrace{\|y-x\|}_{<r} < r \Rightarrow z(t) \in B(x,r) \quad \forall t \in [0,1]$$

$\Rightarrow$ por def, $B(x,r) = \{ y : \|x-y\| < r \}$

$$= \{ y+x : \|y\| < r \}$$

$$= B(0,r) + x$$

$$= \{ y : \|y\| < r \} + x$$

$$= \{ ry : \|y\| < 1 \} + x$$

$$= r \cdot B(0,1) + x$$

Teo → En $\mathbb{R}^n$, todas las normas son equivalentes

d/ sea $\| \|$ una norma en $\mathbb{R}^n$, vamos a ver que $\exists\, c_1, c_2 > 0$

tal que $c_1 \|x\|_\infty \leq \|x\| \leq c_2 \|x\|_\infty \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

(la idea es demostrar con un x que sé que vale y dsp llevarlo escalando para mostrar que vale en general)

sea $\{e_i\}_{i=1}^{n}$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$

$$x = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{x_i}_{\in \mathbb{R}} e_i$$

$$\|x\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \right\| \leq \sum_{i=1}^{n} \|x_i e_i\| = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{|x_i|}_{\leq \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i|} \|e_i\| \leq \|x\|_\infty \left(\sum_{i=1}^{n} \|e_i\| \right) \Rightarrow \|x\| \leq C_2 \|x\|_\infty$$

falta ver que $\exists\, c_1 / c_1 \|x\|_n \leq \|x\|$

sea $K = S(0,1) = \{ x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_\infty = 1 \}$ entonces K es cerrado y acotado en $\mathbb{R}^n$

$\Rightarrow$ es compacto (con $\| \|_\infty$)

$f\,(K_1, \| \|_\infty) \to \mathbb{R}$ es continua

$x \longmapsto \|x\|$

$\big| \|x\| - \|y\| \big| \leq \|x-y\| \leq c_2 \|x-y\|_\infty \Rightarrow$ es Lipchitz $\Rightarrow$ es continua

como f es continua y K compacto

$\Rightarrow f$ tiene máximo y mínimo

sea $C_2 = \min(f)$

$= \min \{ \|x\| : x \in K \}$ $\quad C_2 > 0$ porq $0 \notin K$

$\Rightarrow \|x\| \geq C_2 \quad \forall x \in K$

$\Rightarrow \|x\| \geq C_2 \|x\|_\infty \quad \forall \|x\|_\infty = 1$

sea $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, sea $\tilde{x} = \frac{x}{\|x\|_\infty}$

$\Rightarrow \tilde{x} \in K \Rightarrow \|\tilde{x}\| \geq C_2 \|\tilde{x}\|_\infty$

$$\Rightarrow \left\| \frac{x}{\cancel{\|x\|_\infty}} \right\| \geq C_2 \left\| \frac{x}{\cancel{\|x\|_\infty}} \right\|_\infty$$

$$\Rightarrow \|x\| \geq C_2 \|x\|_\infty$$

(2) $E = \ell^\infty(\mathbb{R}) = \{ (a_n) \subseteq \mathbb{R},\ \sup_n |a_n| < \infty \}$

1° ℓ^∞ es un espacio vectorial:

$(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ✓

$\alpha(a_n) = (\alpha a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ✓

2° $\|(a_n)\|_\infty = \sup_n |a_n|$ es una norma

ver que es norma:

(i) $\|(a_n)\|_\infty = 0$

$\Rightarrow \sup_n |a_n| = 0 \Rightarrow |a_n| = 0 \ \forall n$

$\Rightarrow a_n = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ ✓

(ii) $\|\alpha(a_n)\|_\infty = \|(\alpha a_n)\|_\infty$

$= \sup_n |\alpha a_n| = |\alpha| \cdot \|(a_n)\|_\infty$ ✓

(iii) desigualdad triang.

$\|(a_n) + (b_n)\|_\infty = \sup_n |a_n + b_n| \leq \sup_n |a_n| + |b_n| \leq (\sup_n |a_n|) + (\sup_n |b_n|)$

$= \|a_n\|_\infty + \|b_n\|_\infty$ ✓

3° ℓ^∞ tiene dimensión infinita

$e_1 = (1, 0, 0 \dots)$

$e_2 = (0, 1, 0 \dots)$

$\vdots$

$e_n = (0, 0 \dots, \underset{n\text{-lugar}}{1}, 0 \dots)$

son li $\Rightarrow$ dim inf.

def → sea E un normado con dos normas $\| \|_1$ y $\| \|_2$ (los llamo:)

decimos que son equivalentes si las distancias inducidas son equivalentes.

Prop → dos normas son equivalentes $\iff \exists\, c_1, c_2 > 0$ /

$$c_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2 \|x\|_1 \quad \forall x \in E$$

d/ $\Leftarrow$) ya la sabemos

$\Rightarrow$) truco → primero pruebo para un x puntual

Imp ! dsp voy reescalando (multip por cte) y lo pruebo $\forall x \in E$.

sea $x \in E$, $\|x\|_1 = 1$

$\Rightarrow x \in B_1(0,2) \quad \exists\, r > 0 / B_1(0,2) \subseteq B_2(0,r)$

entonces $x \in B_2(0,r)$ tmb

$\Rightarrow \|x\|_2 \leq r$ $\quad$ uso $\|x\|_1 = 1$.

$\|x\|_2 \leq \underset{C_2}{r} \|x\|_1$

¿Por qué vale esto?

$\| \|_1, \| \|_2$ son equivalentes $\iff \forall x \in E, \forall r > 0$

$\exists\, r_1, r_2 > 0 / B_1(x, r_1) \subseteq B_2(x, r)$

$B_2(x, r_2) \subseteq B_1(x, r)$

si $x = 0$, $r = 1 \Rightarrow \exists\, r_1 > 0 / B_1(0, r_1) \subseteq B_2(0,1)$

$$\frac{2}{r_1} B_1(0, r_1) \subseteq \frac{2}{r_1} B_2(0,1)$$

$$B_1(0,2) \subseteq B_2\Big(0, \underbrace{\tfrac{2}{r_1}}_{r}\Big)$$

(ahora a $\|x\|_1$ lo quiero extender a todo x)

ahora sea $x \in E$ cualquiera $\neq 0$,

sea $\tilde{x} = \frac{x}{\|x\|_1} \Rightarrow \|\tilde{x}\|_1 = 1$ $\quad$ (agarro un x cualq y lo normalizo)

$$\|\tilde{x}\|_2 \leq C_2 \|\tilde{x}\|_1$$

números reales positivos

$$\left\| \frac{x}{\|x\|_1} \right\|_2 \leq c_2 \left\| \frac{x}{\|x\|_1} \right\|_1$$

$$\frac{1}{\cancel{\|x\|_1}} \|x\|_2 \leq C_2 \cdot \frac{1}{\cancel{\|x\|_1}} \cdot \|x\|_1$$

$$\Rightarrow \|x\|_2 \leq C_2 \|x\|_1 \quad \forall x \in E$$

∴ tarea (pensar para la otra desigualdad)

↳ (misma cuenta pero invertir los roles)

(3) $E = C[0,1] = \{ f : [0,1) \to \mathbb{R} \text{ continua} \}$

$(f+g)(t) = f(t) + g(t)$

$(\alpha f)(t) = \alpha f(t)$

$\|f\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$

$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\, dt.$

son normas.

además tienen dimensión infinita $f_n(t) = t^n$, $n \geq 0$

son li (y son ∞)

Práctica 27/05 → espacios normados.

1) sea $(E, \|\cdot\|)$ $A \subseteq E$ cerrado, $B \subseteq E$ compacto

$C := \{a+b \,/\, a \in A,\ b \in B\}$ qvq $\underbrace{C \text{ es cerrado}}$

laburar con sucesiones.

s/
para ver que algo es cerrado $\longrightarrow$ $\exists$ sucesion convergente.

sea $(a_n+b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C$ quiero ver si esto se puede escribir como

$a_n+b_n \xrightarrow[\|\cdot\|]{} c$ $\quad \|a_n+b_n-x\| \xrightarrow[n]{} 0$

$c \in E$

$\Rightarrow$ qvq $x \in C$. $\Rightarrow$ demostrar que $\exists\, a' \in A$ y $b' \in B$

$c = a'+b'$

$(a_n) \subseteq A$

$(b_n) \subseteq B$

es compacto $\Rightarrow \exists (b_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \,/\, b_{n_k} \to B$ $\quad b \in B$.

qvq $c-b \in A$. $\quad c = \underbrace{c-b}_{\in A?} + \underbrace{b}_{\in B\ ✓}$

sé que:

- $a_n+b_n \longrightarrow c$
- $b_{n_k} \longrightarrow b$
- $a_{n_k}+b_{n_k} \longrightarrow c$.
- $(a_{n_k})_k \subseteq A$

como A es cerrado $c-b$ está en A.

$$\|a_{n_k}-(c-b)\| = \|a_{n_k}+b_{n_k}-c+b-b_{n_k}\| \leq \|\underbrace{a_{n_k}+b_{n_k}-c}_{\to 0}\| + \underbrace{\|b-b_{n_k}\|}_{\to 0}$$

$a_{n_k} \to c-b$ $\quad \therefore c-b \in A$ xq A es cerrado

$c = \underbrace{c-b}_{\in A} + \underbrace{b}_{\in B} \Rightarrow c \in C$. C es cerrado. ▣

g 2) $(E, \|\cdot\|)$ es completo $\Leftrightarrow$ $S = \{x \in E \,/\, \|x\| = 1\}$ es completo.

$\Rightarrow$) sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq S$ de cauchy qvq $\exists\, x \,/\, \|x\|=1$ $\quad x_n \to x$.

$\subseteq E$

como E es completo, $\exists\, x \in E \,/\, x_n \to x$

si $x_n \to x$

$1 = \|x_n\| \to \|x\|$

modulo es la diferencia de las normas.

$\|x\| = \|x-x_n+x_n\| \leq \|x-x_n\| + \|x_n\|$

$\big|\|x\| - \|x_n\|\big| \leq \|x-x_n\|$

$\|x_n\| \leq \|x-x_n\| + \|x\|$

$\underbrace{\big|\|x\| - \|x_n\|\big|} \leq \|x-x_n\| \longrightarrow 0$

$|(\|x\|-1)| \Rightarrow \|x\| = 1$ ▣

$\Leftarrow$) S es completo $\Rightarrow$ E es completo.

sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E$ de cauchy

$\big|\|x_n\| - \|x_m\|\big| \leq \|x_n - x_m\| < \varepsilon$

$(\|x_n\|)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ $\quad \|x_n\| \longrightarrow \lambda \geq 0$

$(\|x_n\|)_{n\in\mathbb{N}} \to \lambda > 0$; $\to \lambda = 0$

$\|x_n\| \to 0 \Rightarrow x_n \to 0 \in E$.

$\underbrace{\|x_n - 0\|}_{x_n \to 0} \leq \underbrace{\|x_n\| \to 0}_{\|x_n\| \to 0.}$

si S completo $\Rightarrow$ E completo.

$(x_n) \subseteq E$ de cauchy

$(\|x_n\|) \subseteq \mathbb{R}$ de cauchy $\longrightarrow \big|\|x_n\| - \|x_n\|\big| \leq \|x_m - x_n\| < \varepsilon$.

$\|x_n\| \to \lambda \geq 0$ $\mathbb{R}$ completo

$\|x_n\| \to 0 \Rightarrow x_n \to 0$ ✓

$\|x_n\| \to \lambda > 0$.

$\left(\frac{x_n}{\|x_n\|}\right)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq S$ $\quad$ qvq $\underbrace{\left\|\frac{x_n}{\|x_n\|} - \frac{x_m}{\|x_m\|}\right\|}_{\text{es chico}} < \varepsilon$ entonces converge.

si divido x_n por su norma

$\left\|\frac{x}{\|x_n\|}\right\| = \frac{1}{\cancel{\|x_n\|}} \cancel{\|x_n\|} = 1$.

$$\left\|\frac{x_n}{\|x_n\|} - \frac{x_m}{\|x_m\|}\right\| = \left\|\frac{x_n}{\|x_n\|} - \frac{x_n}{\|x_m\|} + \frac{x_n}{\|x_m\|} - \frac{x_m}{\|x_m\|}\right\|$$

tenía $\|x_m\| \to \lambda > 0$.

$$= \left\|\frac{x_n}{\|x_n\|} - \frac{x_n}{\|x_m\|}\right\| + \left\|\frac{x_n - x_m}{\|x_m\|}\right\|$$

$$= \left\|\left(\frac{1}{\|x_n\|} - \frac{1}{\|x_m\|}\right)x_m\right\| = \underbrace{\Big|\overbrace{\tfrac{1}{\|x_n\|}}^{\to 1/\lambda} - \overbrace{\tfrac{1}{\|x_m\|}}^{\to 1/\lambda}\Big|}_{\to 0} \cdot \underbrace{\|x_m\|}_{\substack{\to \lambda \\ \text{acotado}}} + \underbrace{\frac{1}{\|x_m\|}}_{\to \frac{1}{\lambda}} \cdot \underbrace{\|x_n - x_m\|}_{\substack{< \varepsilon \\ \to 0.}}$$

es de cauchy.

sea completo

$\therefore \left(\frac{x_n}{\|x_n\|}\right)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq S$ es de cauchy.

$\exists\, x \in S : \frac{x_n}{\|x_n\|} \to x$.

falta probar que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

decimos que $x_n \longrightarrow \lambda x$. donde $\frac{x_n}{\|x_n\|} \to x$ y $\|x_n\| \to \lambda$

pruebo que $x_n \to \lambda x$:

$$\|\lambda x - x_n\| = |\lambda| \underbrace{\Big\|x - \overbrace{\tfrac{x_n}{\lambda}}^{\to x}\Big\|}_{\to 0.}$$

sé que $\left\|x - \frac{x_n}{\|x_n\|}\right\| \to 0$ y como $\|x_n\| \to \lambda$.

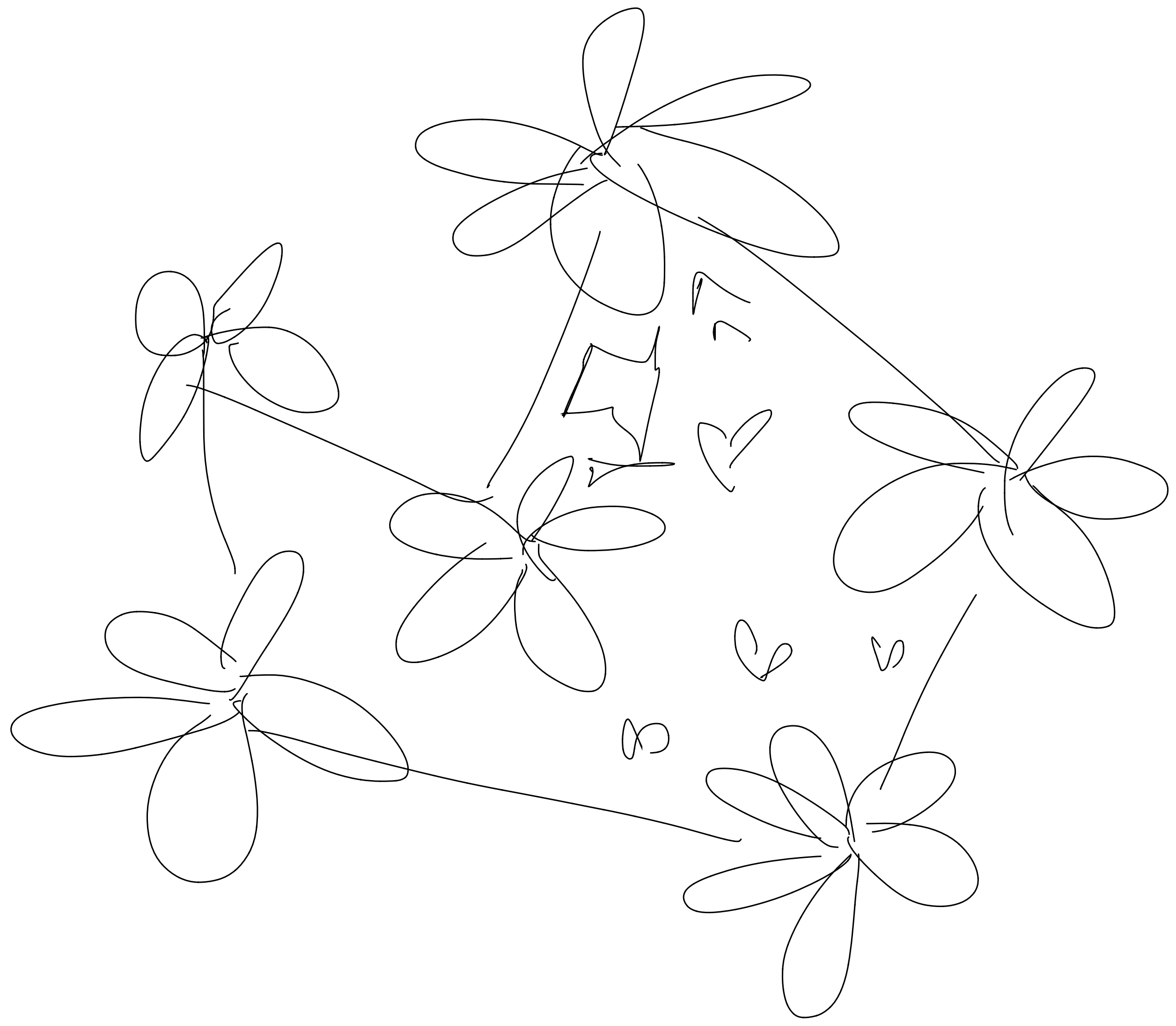
llegamos que $x_n \to \lambda x$.

$$= |\lambda| \left\|x - \frac{x_n}{\|x_n\|} + \frac{x_n}{\|x_n\|} - \frac{x_n}{\lambda}\right\| \leq (*)$$

(osea es como que diga que $x_n \to s$ $\quad \frac{x_n}{s} \to 1$.

$$(*)\ |\lambda| \underbrace{\left\|x - \frac{x_n}{\|x_n\|}\right\|}_{\to 0.} + |\lambda| \underbrace{\left|\frac{1}{\|x_n\|} - \frac{1}{\lambda}\right|}_{\to 0} \|x_n\|$$

▣



29/05 PRÁCTICA

$(E, \|\cdot\|)$ normado. $S \subseteq E$ se dice un hiperplano si

(a) $\exists\, v \notin S,\ v \in E \,/\, \langle v\rangle \oplus S = E$

$\Updownarrow$

(b) $\forall\, v \notin S,\ v \in E$ vale $\langle v\rangle \oplus S = E$

$\Updownarrow$

(c) $\exists\, \varphi : E \to \mathbb{R}$ lineal con $\ker(\varphi) = S$

import. enunc.

obs $\rightarrow$ (4 d) práctica 6) si $S \subseteq E$ es un hiperplano

$\Rightarrow$ S es o cerrado o denso.

s/

supongamos que S no es cerrado, sea $v \in \overline{S}$ con $v \notin S$,

entonces $E = \langle v\rangle \oplus S$ quiero ver que S es denso. sea

$\{s_n\} \subseteq S$ sucesion con $s_n \to v$ y sea $w \in E$

$\Rightarrow w = \lambda \cdot v + s$

$\Rightarrow \underbrace{\lambda \cdot s_n + s \to w}$ y $\lambda s_n + s \notin S\ \forall n \in \mathbb{N}$

xq' $\|w - (\lambda s_n + s)\| = \|\lambda v + s - (\lambda s_n + s)\|$

$= \|\lambda v - \lambda s_n\| = |\lambda| \cdot \|v - s_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

EJEMPLOS

(1) sea $E = \{$ sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} \,/\, \exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ con $a_n = 0\ \forall n \geq n_0$

con la norma $\|(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$.

sea $S = \{\underbrace{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n = 0}_{\text{subespacio de } E.}\} \subseteq E$ $\rightarrow$ cuando apartir de un numero, la sum me dan cero

ej: $(2, -1, 0, 0 \dots 0\,0) \in S$

$(1, 1, -1, 0, 0 \dots 0) \in S$

Probar que S es denso en E.

√ S es un subespacio.

si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S$, entonces

$\lambda \cdot (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S$, pues $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \lambda a_n = \lambda \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n = \lambda \cdot 0 = 0$

y $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S$ pues $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n + \sum_{n=1}^{\infty} n b_n = 0 + 0$.

√ S es un hiperplano porque

$S = \ker(\varphi)$ con $\varphi : E \to \mathbb{R}$ $\rightarrow$ φ es lineal

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} n a_n$

√ S es denso. Para verlo, basta con encontrar $s_n \in S\ \forall n \in \mathbb{N}$

tq $s_n \to w \notin S$ (lo mismo q' ver que no es cerrado). (lo mismo que ver que φ no es continua).

sea $s_n = (1, 0, 0, \dots 0, \underbrace{-\tfrac{1}{n}}_{n\text{-esimo}}, 0, \dots 0) \longrightarrow \overbrace{\underbrace{(1, 0, 0 \dots 0)}_{\text{seria } w \notin S.}}^{e_1}$ que no está en S.

$\|s_n - e_1\| = \|(0, 0, 0 \dots 0, -\tfrac{1}{n}, 0, 0 \dots)\| = \tfrac{1}{n} \to 0$.

$s_n \in S\ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow S$ no es cerrado

$\Rightarrow S$ es denso.

27/05

(repaso algebra)

def → E e.v, $S \subseteq E$ subespacios, es un hiperplano si $\exists\, x \notin S \,/\, E = S + \langle x \rangle$

prop → (resultado de algebra lineal)

$S \subseteq E$ es hiperplano $\iff \exists\, \varphi : E \to \mathbb{R}$ lineal tq $S = \ker(\varphi)$

prop → sea $(E, \|\cdot\|) \,/\, \dim E = n$. Entonces, E es isometrico a $\mathbb{R}^n$

d/ $T : E \to \mathbb{R}^n$ y extiendo por linealidad
$v_i \to e_i$

donde $\{v_1, \dots, v_n\}$ base de E y $\{e_1 \dots e_n\}$ base canónica de $\mathbb{R}^n$.

defino en $\mathbb{R}^n$ la norma $\|(x_1, \dots, x_n)\|_{\mathbb{R}^n} = \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i v_i \right\|_E$

$\Rightarrow$ T es isometría con esta norma $\blacksquare$

$$T\left(\sum_{i=1}^{n} x_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i T(v_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = (x_1, \dots, x_n)$$

corolario:

① si $\dim E < \infty \Rightarrow$ todas las normas son equivalentes

$$\begin{tikzcd}
(E, \|\cdot\|_1) \arrow[d, "\text{isom.}"'] & (E, \|\cdot\|_2) \arrow[d, "\text{isom}"] \\
(\mathbb{R}, \|\cdot\|_1) \arrow[r, phantom, "\underset{\text{Equiv}}{\sim}"] & (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)
\end{tikzcd}$$

② si $\dim E < \infty \Rightarrow$ es Banach

$(E, \|\cdot\|) \xrightarrow[T \text{ iso.}]{} (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$

(x_n) de cauchy en $E \Rightarrow (T(x_n))$ de cauchy en $\mathbb{R}^n \Rightarrow$ converge en $\mathbb{R}^n$

$\Rightarrow (x_n)$ converge.

③ si $\dim(E) < \infty \Rightarrow$ los conjuntos cerrados y acotados son compactos. d/ tarea.

Operadores lineales continuos

R^∞ $T : E \to F$ es una transf lineal si $T(x + \alpha y) = T(x) + \alpha T(y)$ $\forall x, y \in E, \forall \alpha \in \mathbb{R}$ $T(0) = 0$

obs $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tl $\Rightarrow$ es continua.

T tiene asociada una matriz $A \Rightarrow T(x) = Ax$

$\|Ax - Ay\| = \|A(x-y)\| \leq \|A\| \cdot \|x - y\|$

$\Rightarrow$ T es Lipschitz.

Pregunta 1: $T : E \to \mathbb{R}^n$ lineal es continua? NO

Pregunta 2: $T : \mathbb{R}^n \to E$ lineal es continua? (TAREA)

Ejemplo:

$E = \{ p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, p$ polinomio de coef reales$\}$

$(p+q)(x) = p(x) + q(x)$

$(\alpha p)(x) = \alpha\, p(x)$

$\|p\| = \sup\limits_{x \in [0,1]} |p(x)|$

$\|p\| = 0 \Rightarrow |p(x)| = 0 \;\forall x \in [0,1]$

El único polinomio con infinitas raíces es $p_0 = 0$.

$T : E \to \mathbb{R}$ es lineal, T no es continua en $p_0 = 0$
$p \mapsto p(2)$

sea $p_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n$. veamos $p_n \to p_0$, si $x \in [0,1]$, $|p_n(x) - p_0(x)| = \left|\frac{x}{2}\right|^n \leq \frac{1}{2^n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

$T(p_n) = p_n(2) = 1 \underset{n \to \infty}{\not\to} 0$ No es continua.

def → sea $T : E \to F$ una Tl, T es acotado si $\exists\, C > 0 \,/$ $\|T(x)\|_F \leq C \|x\|_E \;\forall x \in E$. Equivalentemente, T es acotado si $\sup\limits_{x \in B(0,1)} \|T(x)\|_F < \infty$

$\Rightarrow)$ $x \in B(0,1)$, Entonces $\|T(x)\|_F \leq C \|x\|_E \leq C$

$\Rightarrow \sup\limits_{x \in B(0,1)} \|T(x)\| \leq C < \infty$

$\Leftarrow)$ sea $x \in E$ si $x = 0$ ✓

si $x \neq 0$, $\tilde{x} = \dfrac{x}{(1+\varepsilon)\|x\|_E}$, $\varepsilon > 0$ cualquiera

$\Rightarrow \|\tilde{x}\|_E = \dfrac{1}{1+\varepsilon} < 1 \Rightarrow \tilde{x} \in B(0,1)$

$\Rightarrow \|T(\tilde{x})\|_F \leq C = \sup\limits_{x \in B(0,1)} \|T(x)\|$

$\Rightarrow \underbrace{\left\| T\left(\frac{x}{(1+\varepsilon)\|x\|}\right) \right\|}_{\frac{\|T(x)\|_F}{(1+\varepsilon)\|x\|_E}} < C \Rightarrow \|T(x)\|_F \leq C(1+\varepsilon)\|x\|_E$ $\blacksquare$

TEOREMA → $T : E \to F$ tl, entonces T acotado $\iff$ T continua.

d/ $\Rightarrow)$ T acotado $\Rightarrow$ T Lipschitz $\Rightarrow$ T uniform continua.

$\Leftarrow)$ T continua en cero, sea $\varepsilon = 1$ (cualquiera), $\exists\, \delta > 0 \,/$

$x \in B(0,1) \Rightarrow \|T(x)\|_F < 1$, si $y \in B(0,1) \Rightarrow \delta y \in B(0, \delta)$

dist de $T(x)$ a 0.

$\Rightarrow \underbrace{\|T(\delta y)\|_F}_{\delta \|T(y)\|_F} < 1 \Rightarrow \|T(y)\|_F < 1/\delta$ $\blacksquare$

como $\delta > 0$ lo puedo pasar al otro lado.

Prop → E, F normados F de Banach

$D \subseteq E$ subespacio denso, si $T : D \to F$ tl continua. $\Rightarrow \exists\, \tilde{T} : E \to F$ lineal y continua

$\tilde{T}|_D = T$

d/ (Tarea) → idea: $x \in E \Rightarrow (x_n) \subseteq D \,/\, x_n \to x$

defino $\tilde{T}(x) = \lim\limits_{n \to \infty} T(x_n)$

Teo → $T : E \to F$ lineal son equivalentes:

(1) T es continua en 0

(2) T es continua en algún $x \in E$

(3) T es continua (en todos lados)

(4) T es unif. contina

demo/ (1) $\Rightarrow$ (4). sea $\varepsilon > 0$, qvq $\exists\, \delta > 0 \,/\, \|x - y\|_E < \delta \Rightarrow \|T(x) - T(y)\|_E < \varepsilon$

Elijo $\delta > 0$ el de la continuidad en 0 $(\|v\|_E < \delta \Rightarrow \|T(v) - T(0)\|_F < \varepsilon)$

si $x, y \in E \,/\, \|x - y\|_E < \delta \Rightarrow \underbrace{\|T(x-y) - \underset{\to 0}{T(0)}\|_F}_{\|T(x) - T(y)\|_F} < \varepsilon$ $\blacksquare$

(4) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (2) ✓ vale en general.

(2) $\Rightarrow$ (1) sea $x \in E \,/\,$ T es continua en $x \Rightarrow \forall \varepsilon > 0.\, \exists\, \delta > 0 \,/\, \|x - y\|_E < \delta$

$\Rightarrow \|T(x) - T(y)\|_F < \varepsilon$

sea $\varepsilon > 0$, sea $\delta > 0$ el de la continuidad en x. sea $v \in B(0, \delta)$

$\|v\|_E < \delta$.

sea $y = v + x \Rightarrow \|x - y\|_E < \delta \Rightarrow \underbrace{\|T(x) - T(y)\|_F}_{\underbrace{\|T(x) - (T(v) + T(x))\|_F}_{\|T(v) - T(0)\|_F}} < \varepsilon$ $\Rightarrow \|T(v) - T(0)\|_F < \varepsilon$ $\blacksquare$

29/05 Práctica.

Repaso de cont. uniforme:

$x_{n_k} \to x_0$, $f(x_{n_k}) \to f(x_0)$ $\Rightarrow$ (como d es continua) $d(x_{n_k}, f(x_{n_k})) \to d(x_0, f(x_0))$

$$\boxed{\begin{array}{l} x_0 \to x \\ y_n \to y \end{array} \Rightarrow d(x_n, y_n) \to d(x,y)}$$

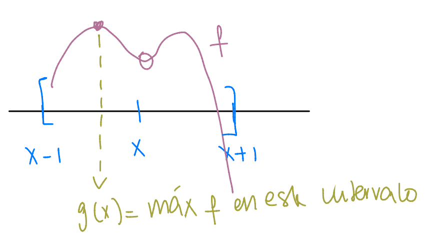
sea (E,d_1), (F,d_2) e.m, enlonces $(E\times F, d_1+d_2)$ es un espacio métrico $d_1+d_2 : (E\times F)\times E\times F \longrightarrow \mathbb{R}$

$$d_1+d_2((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = d_1(x_1,x_2) + d_2(y_1,y_2)$$

Prop $\rightarrow$ Sea (E,d) un espacio métrico. Enlonces, $(E\times E, d+d)$ es otro espacio métrico y $d: E\times E \to \mathbb{R}$ es continua.

(1) sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uniformemente continua y sea $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $g(x) = \max\{f(y) : y\in[x-1; x+1]\}$

Probar que g es uniformemente continua.

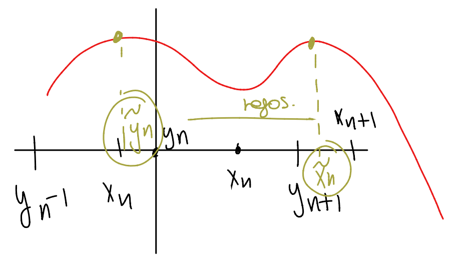


Supongamos que g no es uniforme. continua. Enlonces, $\exists\, \varepsilon>0$ y $\exists\, (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \,/\, |x_n-y_n|\to 0$ pero $|g(x_n)-g(y_n)|\geq\varepsilon$ $\forall n\in\mathbb{N}$

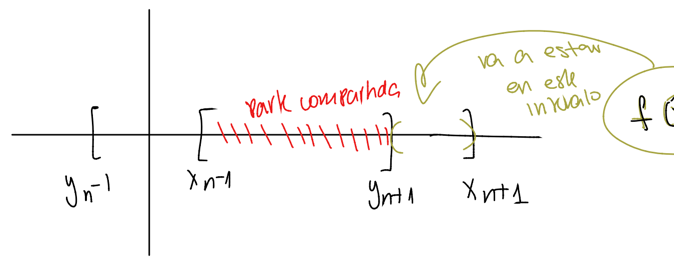
Sean, para cada $n\in\mathbb{N}$, $\tilde{x}_n\in[x_n-1, x_n+1]$ y $\tilde{y}_n\in[y_n-1, y_n+1]$ tales que

$g(x_n) = f(\tilde{x}_n)$, $g(y_n) = f(\tilde{y}_n)$

Enlonces, $|f(\tilde{x}_n) - f(\tilde{y}_n)| \geq \varepsilon$ $\forall n\in\mathbb{N}$,



este existe porq f es unif. continua. Y sea $n_0\in\mathbb{N} \,/\, n\geq n_0 \Rightarrow |x_n-y_n|<\delta$



Supongamos que $f(\tilde{x}_{n_0}) > f(\tilde{y}_{n_0})$, enlonces como

$f(\tilde{y}_{n_0}) \geq f(y)$ $\forall y\in[y_{n_0}-1, y_{n_0}+1]$

tenemos que $\tilde{x}_{n_0}\notin[y_{n_0}-1, y_{n_0}+1]$

$\Rightarrow \tilde{x}_{n_0}\in(y_{n_0}+1, x_{n_0}+1]$

$\Rightarrow |\tilde{x}_{n_0} - y_{n_0}+1| \leq |y_{n_0}+1 - (x_{n_0}+1)| < \delta$

Pero enlonces $|f(y_{n_0}+1) - f(x_{n_0})| \leq \varepsilon$ por la cont. uniforme de f,

$\Rightarrow f(\tilde{x}_{n_0}) \leq f(y_{n_0}+1) + \varepsilon \leq f(\tilde{y}_{n_0}) + \varepsilon$

$\Rightarrow |f(\tilde{x}_{n_0}) - f(\tilde{y}_{n_0})| < \varepsilon$ lo cual es absurdo, porque

$|f(\tilde{x}_{n_0}) - f(\tilde{y}_{n_0})| \geq \varepsilon$.

29/05

Sucesiones de funciones

def $\rightarrow$ sean $f_n: X \to Y$ X conjunto (Y, d') e.m

$f: x \mapsto y$

vamos a decir que (f_n) converge puntualmente a f si $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$ $\forall x \in X$. osea $\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ /

si $n \geq n_0 \Rightarrow d'(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$

ejemplo:

1) $f_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f_n(x) = \frac{nx+1}{n}$

$f(x) = x$, $f_n(x) \to f(x)$

$\left| \frac{nx+1}{n} - x \right| = \left| \frac{nx+1-nx}{n} \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$ si $n \geq n_0$

2) $f_n: [0,1] \to [0,1]$ $f_n(x) = x^n$ $f_n(x) \to f(x)$

$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

(su límite)

obs $\rightarrow$ $f(n)$ son todas continuas pero f no lo es.

def $\rightarrow$ f_n $f: X \to Y$ decimos que f_n converge uniformemente a f si $\forall \delta > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ / $d'(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$ $\forall x \in X$

$\Updownarrow$

$\sup_{x \in X} d'(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$

(notacion: $f_n \rightrightarrows f$ conv. uniforme)

ejemplo:

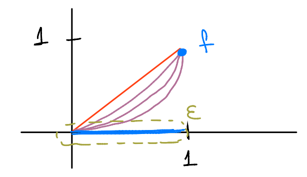
(1) $f_n(x) = \frac{nx+1}{n}$, $f(x) = x$

$f_n(x) \rightrightarrows f$

$|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{n} < \varepsilon$

$\forall x \in \mathbb{R}$

(2) $f_n(x) = x^n$ $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$



para negar la convers. unif

$\exists \varepsilon > 0$ / $\forall n_0$ puedo encontrar un x que no cumpla

$d'(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$

sea $\varepsilon > 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists x \in [0,1]$ /

$|f_n(x) - f(x)| > \varepsilon$

sea $n \in \mathbb{N}$, $|x^n| \geq \varepsilon$, elijo $x \geq \sqrt[n]{\varepsilon}$ ($\sqrt[n]{\varepsilon} < 1$ xq $\varepsilon < 1$)

TEO $\rightarrow$ sean (X, d)

(Y, d') em f_n, $f: X \to Y$, (f_n) continua $f_n \rightrightarrows f$, entonces

f es continua

d/ sea $x \in X$, sea $\varepsilon > 0$ $\exists\delta > 0$ / $d(x,y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$

$d'(f(x), f(y)) \leq d'(f(x), f_n(x)) + d'(f_n(x), f_n(y)) + d'(f_n(y), f(y))$

sea $n_0 \in \mathbb{N}$ / $n \geq n_0 \Rightarrow \sup_{z \in X} d'(f_n(z), f(z)) < \varepsilon/3$

como f_{n_0} es continua, $\exists \delta > 0$ / $d(x,y) < \delta$, esto implica que

$d'(\underbrace{f_{n_0}(x), f_{n_0}(y)}_{\text{es el mismo } n}) < \frac{\varepsilon}{3}$, entonces si $d(x,y) < \delta$,

$\Rightarrow d'(f(x), f(y)) \leq d'(f(x), f_{n_0}(x)) + d'(f_{n_0}(x), f_{n_0}(y)) + d'(f_{n_0}(y), f(y)) < \varepsilon$

def $\rightarrow$ sea $f_n: X \to Y$, (Y, d') e.m, decimos que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es uniformemente de Cauchy si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0$ / $n, m \geq n_0 \Rightarrow \underbrace{\sup_{x \in X} d'(f_n(x), f_m(x))}_{\text{distancia infinito.}} < \varepsilon$.

TEO $\rightarrow$ sean $f_n: X \to Y$ uniformemente de Cauchy,

Y completo. Entonces $f_n \rightrightarrows f$

d/ sea $x \in X$, $\underbrace{(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}}_{\text{suce de elem de } Y} \subseteq Y$ entonces esta sucesion es de Cauchy.

y como Y es completo, entonces converge. Defino $f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$, sea $\varepsilon > 0$ y sea

n_0 el de uniform. de Cauchy. ~~Esto~~ quiere decir, si $n, m \geq n_0 \Rightarrow \sup_{x \in X} d'(f_n(x), f_m(x)) < \varepsilon$

depende del ε.

(no depende de x)

sea $x \in X$ cualquiera (generico), sea $n \geq n_0$ $\Rightarrow \underbrace{d'(f_n(x), f(x))}_{\text{luego q' probar que es más chico que } \varepsilon\text{, independientemente del } x\text{. (por el } n) \text{ no lo elijo yo.}} \leq \underbrace{d'(f_n(x), f_m(x))}_{< \varepsilon/2} + \underbrace{d'(f_m(x), f(x))}_{< \varepsilon/2}$

En cambio este m lo elijo yo

si m muy grande $\to f(x)$ entonces eso es $< \varepsilon$

Elijo m / $m \geq n_0$ y $d'(f_m(x), f(x)) < \varepsilon/2$ ☒

def $\rightarrow$ $B(X) = f: X \to \mathbb{R}$ acotadas y es un armado,

$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$.

obs $\rightarrow$ si $(f_n) \subseteq B(X)$ de Cauchy $\Leftrightarrow$ (f_n) son uniformemente de Cauchy

En el teorema anterior, me dice que $\|f_n - f\|_\infty \to 0$

para ver que $(B(X), \|\cdot\|_\infty)$ es completo (de Banach). me falta ver que $f \in B(X)$:

$\|f\|_\infty \leq \|f - f_n\|_\infty + \|f_n\|_\infty$. si n/ $\|f - f_n\|_\infty \leq 1$ $\Rightarrow \|f\|_\infty \leq 1 + \|f_n\|_\infty < \infty$

a la norma infinito le puedo hacer desigualdad triangular

$\therefore$ conclusion: $(B(X), \|\cdot\|_\infty)$ es completo.

def $\rightarrow$ K compacto, $C(K) = \{f: K \to \mathbb{R}$ continuas$\}$ es un normado

con $\|f\|_\infty = \sup_{x \in K} |f(x)|$

obs $\rightarrow$ $(C(K), \|\|_\infty)$ es Banach, $(f_n) \subseteq C(K)$ de Cauchy

$\Rightarrow$ son Unif. de Cauchy

$\Rightarrow$ conv. uniformemente a f como (f_n) continuas.

$\Rightarrow$ f es continua.

Pregunta: En el primer teorema de hoy. Si pedimos $f_n: X \to Y$

sea U.C, $f_n \rightrightarrows f$ $\Rightarrow$ ¿f es U.C?

Prop $\rightarrow$ Sean f_n, $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continuas, $f_n \rightrightarrows f$. Entonces

$\int_a^b f_n(t)\,dt \to \int_a^b f(t)\,dt$

d/ $\left| \int_a^b f_n(t)\,dt - \int_a^b f(t)\,dt \right| = \left| \int_a^b f_n(t) - f(t)\,dt \right| \leq \int_a^b \underbrace{|f_n(t) - f(t)|}_{\leq \|f_n - f\|_\infty}\,dt \leq (b-a)\|f - f_n\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ ☒

obs $\rightarrow$ $I: (C[a,b], \|\cdot\|_\infty) \to \mathbb{R}$

$f \longmapsto \int_a^b f(t)\,dt$

$\Rightarrow I$ es continua. (osea la integral es un operador continuo)

def $\rightarrow$ $C^1([a,b]) = \{f: [a,b] \to \mathbb{R}$, derivables y f' es continua$\}$

Prop $\rightarrow$ Sea $(f_n) \subseteq C^1([a,b])$

$f_n \to f$ puntualmente y ademas las

$f'_n \rightrightarrows g$. entonces, f es derivable y $f' = g$.

d/ (recupero f_n a partir de f'_n integrandola).

g es continua (f'_n lo son), entonces por la prop anterior, entonces

$\int_a^b f'_n(t)\,dt \to \int_a^b g(t)\,dt$, por el teorema fundamental del calculo, osea

$\underbrace{f_n(x)}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)} - \underbrace{f_n(a)}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} f(a)} = \underbrace{\int_a^x f'_n(t)\,dt}_{\to \int g(t)\,dt}$ $\Rightarrow f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)\,dt$

$\Rightarrow$ (TFC) $f' = g$. ☒

SERIES 3/06

def → sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$, decimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si existe $\lim_{N\to\infty} S_N$, donde

$S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$.

Ejemplo: si $|r|<1$, $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$ veamoslo:

①

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} r^n = 1+r+r^2+\dots+r^N$$

$$(1-r)\sum_{n=0}^{N} r^n = \sum_{n=0}^{N} r^n - \sum_{n=1}^{N+1} r^n = 1 - r^{N+1}$$

$$\Rightarrow S_N = \frac{1-r^{N+1}}{1-r} \xrightarrow[N\to\infty]{} \frac{1}{1-r}$$

② $a_n = \begin{cases} & n \text{ es impar} \\ -1 & n \text{ es par} \end{cases} \to \sum_{n=1}^{\infty} a_n$?

$S_1 = 1 \quad S_3 = 1$

$S_2 = 0 \quad S_4 = 0$ → la serie no converge.

obs → $\exists \lim_{N\to\infty} S_N \iff (S_N)$ es de cauchy.

Prop → si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

d/ veamos que $S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$ es de cauchy.

$$|S_N - S_M| = \left|\sum_{n=1}^{N} a_n - \sum_{n=1}^{M} a_n\right| \underset{N>M}{=} \left|\sum_{n=M+1}^{N} a_n\right| \le \sum_{n=M+1}^{N} |a_n| = T_N - T_M < \varepsilon.$$

si $N, M > N_0$

$T_N = \sum_{n=1}^{N} |a_n|$ porque $(T_N)_{N=1}^{\infty}$ ⇒ es de cauchy ∎

Integrales de Riemann 3/6

def → sea $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ una partición de $[a,b]$ es un conjunto $P = \{x_0, x_n\}$ con $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$.

$I_i = [x_i, x_{i+1}]$, $\Delta i = \text{long}(I_i) = x_{i+1} - x_i$

sea $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ acotada

$$I(f,P) = \sum_{i=0}^{n} \left(\inf_{x\in I_i} f(x)\right) \cdot \Delta i$$

$$S(f,P) = \sum_{i=0}^{n} \left(\sup_{x\in I_i} f(x)\right) \Delta i$$

obs → $I(f,P) \le S(f,P)$

def → una funcion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ acotada se dice integrable Riemann si $\forall \varepsilon>0$ $\exists P$ partición / $S(f,P) - I(f,P) < \varepsilon$.

def → sea P particion. un refinamiento de P es una partición $P' / P \subseteq P'$

Ej: $[0,1] \to P = \{0,1\} \to I_0 = [0,1]$

$P' = \{0, 1/2, 1\} \to I_0 = [0, 1/2]$

$I_1 = [1/2, 1]$

obs → si P' es refinamiento de P, $\Rightarrow I(f,P) \le I(f,P')$

$S(f,P') \le S(f,P)$

def → $I_*(f) = \sup\{I(f,P),\ P \text{ particion}\}$

$I^*(f) = \inf\{S(f,P),\ P \text{ particion}\}$

si f es integrable Riemann $\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = I_*(f) = I^*(f)$

teo → sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua $\Rightarrow f$ es integrable (R)

d/ sea $\varepsilon>0$, qvq $\exists P$ particiones

$S(f,P) - I(f,P) < \varepsilon$

$$S(f,P) - I(f,P) = \sum_{i=0}^{n} \left(\sup_{x\in I_i} f(x)\right)\Delta i - \sum_{i=0}^{n} \left(\inf_{x\in I_i} f(x)\right)\Delta i$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \underbrace{\left(\sup_{x\in I_i} f(x) - \inf_{x\in I_i} f(x)\right)}_{<c} \Delta i$$

$< c \sum_{i=0}^{n} \Delta i = (b-a)$ → me gustaría $c = \frac{\varepsilon}{b-a}$

f continua y $[a,b]$ compacto $\Rightarrow f$ es U.C.

Para $\frac{\varepsilon}{b-a}$, $\exists \delta>0$ / si $|x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon/_{b-a}$

Elijo P particion / $x_{i+1} - x_i < \delta$

$a_i = x_0$

$x_1 = x_0 + \delta \quad x_2 = x_1 + \delta \quad \dots \quad x_i = a + i\delta \quad \dots$ y así hasta llegar a b.

como $I_i = [x_i, x_{i+1}]$ es compacto

⇒ f tiene máx y min en I_i

$\Rightarrow \exists z_i, y_i \in I_i$ / $\sup_{x\in I_i} f(x) = f(z_i)$

$\inf_{x\in I_i} f(x) = f(y_i)$

$$S(f,P) - I(f,P) = \sum_{i=0}^{n} \left(\sup_{x\in I_i} f(x) - \inf_{x\in I_i} f(x)\right)\Delta i$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \underbrace{\left(f(z_i) - f(y_i)\right)}_{<\frac{\varepsilon}{b-a}} \Delta i < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=0}^{n} \Delta i = \varepsilon$$ ∎

obs → si f es continua a trozos

(f tiene una cantidad finita de discontinuidades)

⇒ f es integrable Riemann.

Teo → si f es continua en $[a,b]$

$\Rightarrow F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ F es derivable en (a,b)

$F'(x) = f(x)$

Además, si G es cualq primitivo $(G'(x) = f(x))$

$\Rightarrow \int_a^b f(t)\,dt = G(b) - G(a)$.

Ejemplos:

(1) $f(x) = 1 \to \int_0^1 1\,dx = 1$

(2) sean $\{x_1, \dots, x_n\}$ $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \ne x_i \\ 0 & \text{si } x = x_i \end{cases}$ $\int_0^1 f(x)\,dx = 1$.

(3) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \end{cases} \to \int_0^1 f(x)\,dx = ?$

si $\varepsilon = 1$. sea P partición,

$S(f,P) = \sum_{i=0}^{n} \underbrace{\sup_{x\in I_i} f(x)}_{=1} \Delta i = 1$ porque $\exists$ irracionales en $[x_i, x_{i+1}]$

$I(f,P) = \sum_{i=0}^{n} \underbrace{\left(\inf_{x\in I_i} f(x)\right)}_{=0} \Delta i = 0$ porque $\mathbb{Q}$ denso.

$\Rightarrow S(f,P) - I(f,P) = 1$

⇒ f no es integrable Reimann.

(4) $f(x) = 1/\sqrt{x}$, $\int_0^1 f(x)\,dx = ?$ ni siquiera está definida

no es acotada en $(0,1)$

obs: si tengo $a>0$ y miro $\int_a^1 f(x)\,dx$ → es continua en $[a,1]$

$= \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \underbrace{2\sqrt{1} - 2\sqrt{a}}_{\xrightarrow[\text{si tomo } a\to 0^+]{} 2}$ para cualq $a>0$, vale.

Práctica norma 3/6

$T : C[0,1] \; \|\cdot\|_\infty \to C[0,1] \; \|\cdot\|_\infty$

$Tf(x) = \int_0^x (x-t) f(t)\, dt$

Para ver si es continua me fijo si $(x-y) < \delta \Rightarrow |Tf(x) - Tf(y)| < \delta$.

1) me fijo si T es lineal. (si la integral es lineal.)

2) $\|T\|$?

$\|T\| = \sup \|f\|_\infty \leq 1$.

lo acoto por la norma

$\underset{t\in[0,x]}{|f(t)|} \leq \underset{t\in[0,1]}{|f(t)|}$

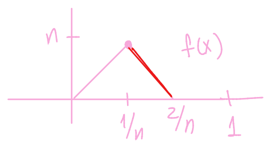
$\|Tf\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} \left| \int_0^x (x-t) f(t)\, dt \right| \leq \int_0^x |x-t| \cdot |f(t)|\, dt \leq \|f\|_\infty \int_0^x |x-t|\, dt$

es continua.

(2) $f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{si } 0 \leq x \leq 1/n \\ -n^2(x - 2/n) & \text{si } 1/n \leq x < 2/n \\ 0 & \text{si } 2/n \leq x \end{cases}$

$f_n : [0,1] \to \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (fijando n, son lineales)

afirmamos $f_n \to 0$ sea $x \in [0,1]$



Queremos ver que $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

si $x = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

si $x > 0 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} \;/\; n \geq n_0 \Rightarrow 2/n < x$

$\Rightarrow f_n(x) = 0 \quad \forall n \geq n_0$

$\Rightarrow f_n(x) \to 0$

$\Rightarrow f_n \to 0$

ahora pruebo si es uniforme o no.

si $d_\infty(f_n, 0) \to 0$

pero:

$d_\infty(f_n, 0) = \max_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = n \not\to 0$.

$\Rightarrow$ no es uniforme.

doy otro motivo:

$\int_0^1 f_n\, dx = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

pero $\int_0^1 0\, dx = 0$

si es uniforme, las integrales convergen.

Importante. para ver que algo no converge.

(3) X espacio metrico, $f_n : X \to \mathbb{R}$ continua $\forall n \in \mathbb{N}$

$f_n \rightrightarrows f$, $x_n \to x$ en X. probar que $f_n(x_n) \to f(x)$

S/ $|f(x) - f_n(x_n)| = |f(x) - f(x_n) + f(x_n) - f_n(x_n)| \leq |f(x) - f(x_n)| + |f(x_n) - f_n(x_n)|$

como $f_n \rightrightarrows f$, f es continua. Sea $\varepsilon > 0$

como f es continua, $\exists n_1 \in \mathbb{N} \;/\; n \geq n_1$

$|f(x) - f(x_n)| \leq \varepsilon/2$ pues $x_n \to x \Rightarrow f(x_n) \to f(x)$

como $f_n \rightrightarrows f$, $\exists n_2 \in \mathbb{N} \;/\; n \geq n_2$

$|f_n(y) - f(y)| < \varepsilon/2 \quad \forall y \in X$. En particular, vale para x_n

$\Rightarrow |f(x) - f_n(x_n)| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2\}$

$\frac{1}{n} \to 0$.

$f_n(1/n) \not\to f(0) = 0$

Práctica Guía 7 5/6

Convergencia de funciones.
(sucesiones)

$f : X \to (Y, d)$ espacio métrico. En $B(X,Y)$ tengo una distancia que es d_∞ $\quad f_n \rightrightarrows f \iff d_\infty(f_n, f) \to 0$.

$f_n \to f$ puntualmente si $\forall x \in X$, $f_n(x) \to f(x)$

Recordar:

(a) $f_n \rightrightarrows f$ con f_n todas continuas $\Rightarrow$ f es continua

(b) $f_n \rightrightarrows f$ con $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrables Riemann

$\Rightarrow \int_a^b f_n\, dx \to \int_a^b f\, dx$

$d_\infty(f,g) = \sup_{x\in X} d_Y(f(x), g(x))$.

Ejemplo:

(1) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x}{1+n^2x^2}$ analizar la convergencia de f_n.

(voy a fijar un x, lo de arriba está fijo y lo de abajo crece.)

Para cada $x \in \mathbb{R}$ vale que $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, entonces $f_n \to 0$.

$d_\infty(f_n, 0) = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{x}{1+n^2x^2} - 0 \right|$

buscamos $\underset{\text{el supremo}}{\underline{\text{el maximo}}}$ de $f_n(x)$ $\to f_n'(x) = \frac{1\cdot(1+n^2x^2) - 2n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2} = 0$

$1 - n^2x^2 = 0$

$\frac{1}{n^2} = x^2$ $\to x = 1/n$, $x = -1/n$ ptos criticos

$f_n(1/n) = \frac{1/n}{1+1} = \frac{1}{2n}$

$f_n(-1/n) = \frac{-1}{2n}$

en $1/2n$ tiene un máximo. $\max_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = \frac{1}{2n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Probamos $d_\infty(f_n, 0) \to 0 \Rightarrow f_n \rightrightarrows 0$ ☒

(4) para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $f_n(x) = \frac{nx}{e^{nx}}$

(a) $f_n : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ converge puntualmente a $f = 0$

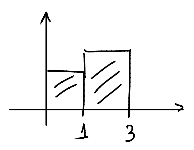
(b) $f_n : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ converge uniformemente a $f = 0$

(c) $f_n : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ no converge uniformemente a $f = 0$

5/6 (teórica)

medida

$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{en } [0,1) \\ 2 & \text{en } [1,3) \end{cases}$



$\int_0^3 f(x)\,dx = 1 \cdot \text{long}[0,1) + 2 \cdot \text{long}[1,3)$

→ nos interesa definir una noción de medida para conjuntos de $\mathbb{R}$.

$\mu : P(\mathbb{R}) \to [0,+\infty]$

Esto no lo vamos a poder hacer, pero vamos a poder medir muchos subconj.

Nos gustaría que μ cumpla $\mu((a,b)) = b-a$

$\mu([a,b)) = \mu((a,b]) = \mu([a,b]) = b-a$

si $a = \infty$ o $b = +\infty \Rightarrow \mu((a,b)) = +\infty$

(·) $\mu(A \overset{d}{\cup} B) = \mu(A) + \mu(B)$

(·) $\mu(A+x) = \mu(A) \ \forall x \in \mathbb{R}$.

TEO → (existencia de la medida de Lebesgue)

Existe una única función $\mu : \mathcal{M} \to [0,+\infty]$ tal que

(1) si $A = (a,b) \Rightarrow \mu(A) = b-a$

(si $a = -\infty$ o $b = +\infty \Rightarrow \mu(A) = +\infty$)

(2) si $(A_n) \subseteq \mathcal{M} \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ } si los A_n son disjuntos 2 a 2 $\Rightarrow \mu\left(\overset{d}{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

(3) si $A \in \mathcal{M} \Rightarrow \mu(A) = \inf\{\mu(U) : A \subseteq U, \ U \text{ es abierto}\}$

Ejemplo: $\mu(\emptyset) = 0$

sea $\varepsilon > 0$, $I_\varepsilon = (-\varepsilon/2, \varepsilon/2)$ $\mu(I_\varepsilon) = \varepsilon$, $\emptyset \subseteq I_\varepsilon$

$\Rightarrow \mu(\emptyset) \leq \mu(I_\varepsilon) = \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \mu(\emptyset) = 0$.

obs → si $A, B \in \mathcal{M}$

$\Rightarrow \mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$

(demo = tarea).

practica

(1) $\mathcal{A} = \{X \subseteq \mathbb{R} \ / \ X$ es nulo, $\mathbb{R} \setminus X$ nulo$\}$ svq es σ.algebra

1) $\mathbb{R} \in \mathcal{A}$? $\emptyset = \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}$ $\quad \emptyset \subseteq I = (0, 1/n)$ $|I_n| = \frac{1}{n}$

2) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$

A es nulo $\Rightarrow A^c$ tiene complemento nulo $\Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$

A / A^c es nulo $\Rightarrow A^c$ es nulo $\Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$

3) si tengo una sucesion de cosas, la union está en σalgebra

$\Rightarrow (A_n) \subseteq \mathcal{A}$

supongo que A_n es nulo $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Rightarrow \bigcup_n A_n$ es nula tmb (svq)

def → un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}$ es nulo si $\forall \varepsilon > 0, \exists \{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ intervalo abierto / (1) $E \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \log(I_n) < \varepsilon$

Ejemplo: $E = \{x\}$, para $\varepsilon > 0$, $(x - \frac{\varepsilon}{2}, x + \frac{\varepsilon}{2}) = I$

$E \subseteq I$, $\log(I) = \varepsilon \to E$ es nulo.

prop → si $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$, E_n nulo $\Rightarrow E$ es nulo

(si puedo escribir a un conjunto como una union de subconj numerable de nulos, entonces mi conjunto es nulo.)

d/ sea $\varepsilon > 0$, como E_n es nulo $\Rightarrow \exists \{I_k^n\}_{k\in\mathbb{N}} / E_n \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k^n$ y $\sum_{k=1}^{\infty} \log(I_k^n) < \varepsilon/2^n$.

Entonces, como todos los $\{I_k^n\}_{k\in\mathbb{N}, n}$ (son numerables)

$E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \subseteq \bigcup_{k,n\in\mathbb{N}} I_k^n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \log(I_k^n)}_{< \varepsilon/2^n} < \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon/2^n = \varepsilon$ ☒

def → sea X un conjunto cualq y $\mathcal{A} \subseteq P(X)$. Decimos que $\mathcal{A}$ es un σ.álgebra si: ("sigma algebra")

(1) $X \in \mathcal{A}$

(2) si $(A_n) \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$ (si tengo a los puntos, entonces tengo la union de los puntos)

(3) si $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$

Ejemplo:

(1) $\mathcal{A} = \{\emptyset, X\}$ es una σ.algeb.

prop (1) ✓ (2) ✓ (3) ✓ ↳ $\emptyset^c = X \in \mathcal{A}$ ✓, $X^c = \emptyset \in \mathcal{A}$ ✓

(2) $X = \mathbb{R}$

$\mathcal{A} = \{A \subseteq \mathbb{R} : A \text{ es abierto}\}$ no es σ.algebra.

(1) ✓ (2) ✓ (3) X ↳ el A^c es cerrado $\notin \mathcal{A}$

obs $\emptyset \in \mathcal{A}$ siempre. (xq $\emptyset = X^c$)

def → la σ.algebra $\mathcal{M}$ es la σ.algebra generada por los intervalos abiertos y por los conjuntos nulos. $\mathcal{M}$ se llama la σ.algebra de Lebesgue.

$\mathcal{M} = \bigcap \mathcal{A}$

$\mathcal{A}$ contiene a los intervalos abiertos y a los nulos

prop → si $A \subseteq \mathbb{R}$ abierto. $\to A \subset \mathcal{M}$

d/ vamos a probar que $A \subseteq \mathbb{R}$ abierto $\Rightarrow A = \underbrace{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n}$ (intervalo abierto.)

si A abierto entonces = union numerable de intervalos abiertos.

Pruebo 1° I_n abierto

2° la union de I_n abiertos

1°) sea $x \in A \Rightarrow$ como A es abierto, $\exists r > 0 / \underbrace{(x-r, x+r)}_{\text{intervalo}} \subseteq A$

sea I_x al intervalo abierto más grande (en terminos de contension) / $x \in I_x \subseteq A$

sea $y \in A$, $x \neq y$, pueden pasar dos cosas:

$\Rightarrow I_x = I_y$ o $I_x \cap I_y = \emptyset$ (no se tocan) →

suponsamos que $I_x \cap I_y \neq \emptyset$: $z \in I_x \cap I_y$

intervalo más grande que contiene a z.

$I_z \supseteq I_x \ni x$

$I_z \supseteq I_y \ni y$

$\Rightarrow I_x = I_z = I_y$

entonces si $z \in I_x$, entonces I_z como es el intervalo mas grande que contiene a z, $I_x \subseteq I_z$.

⇒ same con I_y.

Entonces $A = \overset{d}{\bigcup_{j\in J}} I_{x_j}$ (union disjunta) → la union de conjuntos que no comparten elementos

(o sea tiro todos los intervalos repetidos

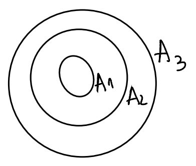
por ejercicio de la guía $\Rightarrow \#J \leq \aleph_0$. ☒

10/6

TEO $\rightarrow$ continuidad de la medida

(1) sea : $(A_n) \subseteq M$. $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots$

entonces $\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$



d/ $\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \mu\left(\overset{d}{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$

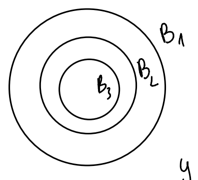
$= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \mu_i(\tilde{A}_n) = \lim_{N\to\infty} \mu\left(\bigcup_{n=1}^{N} \tilde{A}_n\right) =$

$= \lim_{N\to\infty} \mu(A_N)$ ▨

(2) sea $(B_n) \subseteq M$, $B_1 \supseteq B_2 \supseteq B_3 \dots$

y $\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \,/\, \mu(B_{n_0}) < \infty$, entonces $\mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n)$

d/



defino $A_n = B_1 \setminus B_n$

$A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots$

y $(A_n) \subseteq M$

(1) $\Rightarrow \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$

$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_1 \setminus B_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_1 \cap B_n^c = B_1 \cap \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n^c\right)$

$= B_1 \cap \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n\right)^c = B_1 \setminus \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n$

$\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \mu\left(B_1 \setminus \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \mu(B_1) - \mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n\right)$

porque $\bigcap B_n \subseteq B_{n_0}$ y $\mu(B_{n_0}) < \infty \Rightarrow \mu(\bigcap B_n) < \infty$

por otro lado, $\mu(A_n) = \mu(B_1 \setminus B_n)$

$= \mu(B_1) - \mu(B_n) \quad \forall n \geq n_0$

$\Rightarrow \mu(B_1) - \mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_1) - \mu(B_n)$

$\Rightarrow \mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n)$ ▨

Ejemplo:

$B_n = (n, +\infty) \subseteq \mathbb{R}$

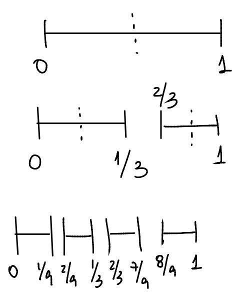
$B_n \subseteq M$, $\mu(B_n) = +\infty \;\forall n \in \mathbb{N}$

$B_1 \supseteq B_2 \supseteq B_3 \dots$

$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n = \emptyset \Rightarrow \mu(\bigcap B_n) = 0$, pero el $\lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = +\infty$

Conjunto de Cantor

lo voy partiend en tres pero 2^n intervalo



$J_0 = [0, 1]$

$J_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$

$J_2 = [0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1]$

def $\rightarrow$ $\mathcal{C} = \bigcap_{n=0}^{\infty} J_n$ el conjunto de cantor

obs $\rightarrow$ (1) $\mathcal{C}$ es un conjunto cerrado (porque cada J_n es la unión de 2^n intervalo cerrado)

(2) $\mathcal{C} \in M$ (porque es cerrado)

(3) $J_0 \supseteq J_1 \supseteq J_2 \supseteq \dots$

$\mu(J_0) = 1 \Rightarrow \mu(\mathcal{C}) = \lim_{n\to\infty} \mu(J_n)$

cada J_n es la unión de 2^n intervalos de longitud $\frac{1}{3^n} \Rightarrow \mu(J_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

$\Rightarrow \mu(\mathcal{C}) = 0$. (tener medida cero no significa que sea numerable)

(4) $\mathcal{C}$ es no numerable. $\#\mathcal{C} = c$.

$\mathcal{C} = \{x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{1}{3^n}, \; a_n = 0 \text{ o } a_n = 2\}$

$\#\mathcal{C} = \#\{0, 2\}^{\mathbb{N}} = c$

Funciones medibles

def → sea $E \subseteq \mathbb{R}$, la funcion caracteristica de E es

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}$$

def → una funcion simple $\varphi : E \to \mathbb{R}$ es una funcion que cumple $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}(x)$, donde $\alpha_i \in \mathbb{R}$ $E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$ (con d sobre la unión)

obs → φ es simple $\iff$ φ toma finitos valores

d/ $\Rightarrow$) ✓

$\Leftarrow$) $Im(\varphi) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ sea $E_i = \varphi^{-1}(\{\alpha_i\})$ ← ya son disj.

↓ tengo que probar que son union disjuntas.

$\Rightarrow \varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}(x)$

obs → puedo extender $\varphi : E \to \mathbb{R}$ a $\tilde{\varphi} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ simple

$\Rightarrow \tilde{\varphi}(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}(x) + 0 \cdot \chi_{E^c}(x)$

def → sea $f : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, decimos que f es medible si el conjunto $\underbrace{\{x \in E \ f(x) \geq a\}}_{f^{-1}([a,+\infty])}$ es medible $\forall a \in \mathbb{R}$

not: $\{x \in E : f(x) \geq a\} = \{f \geq a\}$

Ejemplo:

(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua $\Rightarrow f$ es medible

$\forall a \in \mathbb{R}$, $f^{-1}([a,+\infty))$ es cerrado $\Rightarrow$ es medible

(2) $E \subseteq \mathbb{R}$, χ_E es medible?

$$\{\chi_E \geq a\} = \begin{cases} \emptyset & \text{si } a > 1 \\ E & \text{si } 0 < a \leq 1 \\ \mathbb{R} & \text{si } a \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \chi_E \text{ es medible} \iff E \in \mathcal{M}.$$

(3) si φ es simple, $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}(x)$ es medible $\iff$ los E_i son medibles.

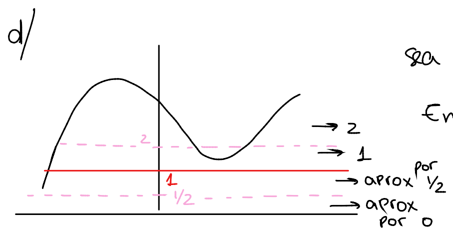
A PARTIR DE AHORA, TODAS LAS SIMPLES SON MEDIBLES.

Teo → sea $f : E \to [0,+\infty)$ medible, entonces $\exists$ (φ_n) creciente, no negativa de funciones simples / $f = \lim_{n\to\infty} \varphi_n$

$0 \leq \varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x)$

Además si f es acotado $\Rightarrow$ la convergencia es uniformes

d/



(la funcion es no neg)

sea $n \in \mathbb{N}$

$E_n = \{f < n\} = f_n([0,n))$

$[0,n) = \bigcup_{j=1}^{n \cdot 2^n} \left[\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n}\right)$ $\Rightarrow E_{nj} = \left\{\frac{j-1}{2^n} \leq f \leq \frac{j}{2^n}\right\} = f^{-1}\left(\left[\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n}\right)\right)$

$$\Rightarrow \varphi_n(x) = \begin{cases} \frac{j-1}{2^n} & \text{si } x \in E_{nj} \\ n & \text{si } f(x) \geq n \end{cases}$$

veamos $\varphi_n(x) \to f(x)$

si $f(x) = +\infty \to \varphi_n(x) = n \ \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \varphi_n(x) \to f(x)$

si $f(x) \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} / f(x) < n_0$

$\Rightarrow \forall n \geq n_0$, $x \in E_{nj}$ para algún j, $\frac{j-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{j}{2^n} \Rightarrow \varphi_n(x) = \frac{j-1}{2^n}$

$|f(x) - \varphi_n(x)| \leq \frac{1}{2^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$ $\boxed{\Sigma}$

Prop → sea $f\ E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ son equivalentes

(1) $\{f \geq a\}$ es medible $\forall a \in \mathbb{R}$

(2) $\{f > a\}$ es medible $\forall a \in \mathbb{R}$

(3) $\{f \leq a\}$ es medible $\forall a \in \mathbb{R}$

(4) $\{f < a\}$ es medible $\forall a \in \mathbb{R}$

esto esta contenido ahi pero σ-algebra no preserva contension por lo tanto no podemos implicar que es medible.

d/ tarea

(1) $\iff$ 4, (2) $\iff$ (3) por complementos

(1) $\Rightarrow$ (2) $\{f > a\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{f \geq a + \frac{1}{n}\} \in \mathcal{M}$

obs → si f es medible entonces $\{f = +\infty\}$ es medible

$$\underbrace{\{f = +\infty\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\{f > n\}}_{\text{medible}}}_{\text{la intersección de medibles es medible}} \Rightarrow \{f = +\infty\} \text{ es medible.}$$

Prop → (1) f, g medible $\Rightarrow f + g$ es medible

(2) f, g son medibles $\Rightarrow f \cdot g$ medible

(3) (f_n) suc de medibles $\Rightarrow$ $f(x) = \inf_n f_n(x)$, $g(x) = \sup_n f_n(x)$ son medible

(4) (f_n) medibles / $\exists \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \Rightarrow f$ es medible

d/ (1) $f + g$ está definido si no pasa $f(x) = +\infty$ y $g(x) = -\infty$ o $f(x) = -\infty$ y $g(x) = +\infty$

$\{f + g > a\}$ y $x \in f(x) + g(x) > a \iff f(x) = +\infty$ o $g(x) = +\infty$ o $f(x) > a - g(x)$ (son finitas)

si $f(x) > a - g(x) \Rightarrow \exists q \in \mathbb{Q} / f(x) > q > a - g(x)$

$\Rightarrow x \in \{f > q\} \cap \{g > a - q\}$

$$\Rightarrow \{f + g > a\} = \overbrace{\underbrace{\bigcup_{q\in\mathbb{Q}} \underbrace{\{f > q\}}_{\in \mathcal{M}} \cap \underbrace{\{g > a - q\}}_{\in \mathcal{M}}}_{\in \mathcal{M}}}^{\in \mathcal{M}} \cup \{f = +\infty\} \cup \{g = +\infty\}$$

(2) si h es medible $\Rightarrow h^2$ es medible

$\{h^2 \leq a\}$ si $a \geq 0$, $\{h^2 \leq a\} = \{-\sqrt{a} \leq h \leq \sqrt{a}\}$

$= \{h \geq -\sqrt{a}\} \cap \{h \geq \sqrt{a}\}$ son medible

$$fg = \frac{(f+g)^2 \cdot (f-g)^2}{4}$$

(3) $f(x) = \inf_n f_n(x)$ $\{f < a\}$ si $f(x) < a \Rightarrow \exists n_0 / f_{n_0}(x) < a$

$\Rightarrow \{f < a\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{f_n < a\}$ es medible

(4) $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ $\{f > a\}$ si $f(x) > a \Rightarrow \exists n_0 / f_{n_0}(x) > a \ \forall n \geq n_0$

Problema. $f_n(x) > a \ \forall n \geq n_0 \Rightarrow f(x) \geq a$

si $f(x) > a \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} / f(x) > a + 1/k$

$\Rightarrow \exists n_0 / f_n(x) > a + 1/k \ \forall n \geq n_0$

$\{f > a\} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{n_0\in\mathbb{N}} \bigcap_{n \geq n_0} \{f_n > a + 1/k\}$

$\Rightarrow$ son TODOS medibles