MEDIDA DE LEBESGUE

RECORDAR: $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ES UNA σ-ÁLG SI:

- $X \in \mathcal{A}$
- $A \in \mathcal{A} \Rightarrow X \setminus A \in \mathcal{A}$
- $A_n \ (n \in \mathbb{N}) \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$

RECORDAR: $A \subseteq \mathbb{R}$ ES NULO SI

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \ (a_n, b_n) \ (n \in \mathbb{N})$ CON

- $A \subseteq \bigcup_{n \geq 1} (a_n, b_n)$
- $\sum_{n \geq 1} b_n - a_n < \varepsilon$

EJEMPLO: $\mathcal{A} = \{ A \subseteq \mathbb{R} : A$ NULO ó $X \setminus A$ NULO $\}$

ES UNA σ-ÁLGEBRA

- $\mathbb{R} \in \mathcal{A}$ PUES $\mathbb{R} \setminus \mathbb{R} = \emptyset$ ES NULO

- $A \in \mathcal{A} \Rightarrow X \setminus A \in \mathcal{A}$

  - A NULO $\Rightarrow X \setminus (X \setminus A)$ NULO $\Rightarrow X \setminus A \in \mathcal{A}$
  - $X \setminus A$ NULO $\Rightarrow X \setminus A \in \mathcal{A}$

- SEAN $A_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$

  - SUP QUE $(\exists n_0)$ A_{n_0} NO ES NULO

    $\Rightarrow X \setminus A_{n_0}$ ES NULO

    $$\Rightarrow \underbrace{X \setminus \bigcup_{n \geq 1} A_n}_{\text{LUEGO, ESTE ES NULO}} \subseteq \underbrace{X \setminus A_{n_0}}_{\text{NULO}}$$

    $$\Rightarrow \bigcup_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{A}$$

  - SUP A_n NULO $\forall n$.

    SEA $\varepsilon > 0$. PARA CADA n,

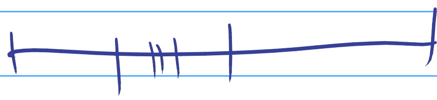
    SEAN $(a_i^{(n)}, b_i^{(n)})$ $(i \in \mathbb{N})$ TALES QUE

    $$\sum_i b_i^{(n)} - a_i^{(n)} < \varepsilon / 2^n$$

Así, $\bigcup_{m\geq 1} A_m \subseteq \bigcup_{\underbrace{m,i \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}}_{\text{NUMERABLE}}} (a_i^{(m)}, b_i^{(m)})$;

$$\sum_{m,i} b_i^{(m)} - a_i^{(m)} = \sum_m \underbrace{\sum_i b_i^{(m)} - a_i^{(m)}}_{< \varepsilon/2^m}$$

$$< \varepsilon \underbrace{\sum_{m\geq 1} 1/2^m}_{=1} = \varepsilon$$



SEA $\mathcal{M}$ LA σ-ÁLG DE LEBESGUE

- $\mathcal{M} \ni A \quad \forall A$ NULO
- $\mathcal{M} \ni A \quad \forall A$ INTERVALO

ES LA MENOR CON ESTAS PROPIEDADES

PROP: $A \in \mathcal{M} \iff \underbrace{\lambda + A}_{=\{\lambda + a \,:\, a\in A\}} \in \mathcal{M} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

DEM: SEA $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \lambda + x$

LEMA

f ES BIYECTIVA $\Rightarrow$

$$f(\mathcal{M}) := \{ f(A) : A \in \mathcal{M} \}$$

ES UNA σ-ÁLGEBRA (¿Q.V.Q. $f(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M}$)

(LEMA: SEA $J : X \to Y$, Y SEA $\mathcal{B} \subseteq Y$ UNA σ-ÁLG. SEA

$$\mathcal{A} = \{ J^{-1}(B) : B \in \mathcal{B} \}$$

PREIMAGEN

ENTONCES $\mathcal{A}$ ES UNA σ-ÁLGEBRA)

VEAMOS QUE $f(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$

1 • A NULO SII $f(A)$ ES NULO

SII $f^{-1}(A)$ ES NULO

2 • A INTERVALO SII $f(A)$ ES INTERVALO

SII $f^{-1}(A)$ ES INTERVALO

LUEGO, SI A ES NULO Ó INTERVALO

$$\underbrace{f(\mathcal{M})}_{\sigma\text{-ÁLG}} \ni f(\underbrace{f^{-1}(A)}_{\in \mathcal{M}}) = A$$

$\rightsquigarrow \quad f(\mathcal{M}) \supseteq \mathcal{M}$ (*) $\rightarrow$ $\mathcal{M}$ es la más chica con estas propiedades (1 y 2)

Luego,

$$\mathcal{M} \subseteq f(\mathcal{M}) \subseteq f(f^{-1}(\mathcal{M})) = \mathcal{M}$$

$$\mathcal{M} \subseteq f^{-1}(\mathcal{M})$$

(cambiando f por f^{-1}) (en *)

$$\therefore \mathcal{M} = f(\mathcal{M}) \qquad \boxtimes$$

Prop: $\forall A \in \mathcal{M}, \ \forall x \in \mathbb{R}$

$$\nu(A) := \mu(x + A) = \mu(A)$$

Dem:

Teorema (existencia de la *medida de Lebesgue*) No lo probamos.

Existe una única función μ de $\mathcal{M}$ en $[0, +\infty]$ tal que

- Si $A = (a, b)$, entonces $\mu(A) = b - a$.
- Si $A_n \in \mathcal{M}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\rightarrow \qquad \mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

Si los A_n son disjuntos dos a dos, entonces

$$\rightarrow \qquad \mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

- Si $A \in \mathcal{M}$, entonces los ab. son medibles

Regularidad

$$\rightarrow \qquad \mu(A) = \inf\{\mu(U) : U \supset A, \ U \text{ abierto}\}.$$

FIJEMOS $\alpha \in \mathbb{R}$

SEA $\nu : M \to [0,+\infty]$, $\nu(A) = \mu(\overbrace{\alpha + A}^{\mu(f(A))})$

$\rightsquigarrow$ QVQ ν CUMPLE LAS PROP. DE ARRIBA.

- $\nu((a,b)) = \mu(\alpha+(a,b)) = \mu((a+\alpha, b+\alpha))$
  $= b+\alpha-(a+\alpha) = b-a$ ✓

- SEAN $A_n \in M$. $f(\bigcup_n A_n) = \bigcup_n f(A_n)$

$$\nu\left(\bigcup_n A_n\right) = \mu\left(\overbrace{\alpha + \bigcup_n A_n}\right)$$

$$= \mu\left(\bigcup_n(\alpha+A_n)\right) \leq \sum_n \underbrace{\mu(\alpha+A_n)}_{\nu(A_n)}$$

f FUNCIÓN

$$\leq \sum_n \nu(A_n) \ ;$$

SUP QUE $A_n \cap A_m = \emptyset \ \forall n \neq m$

LUEGO (f INY) $f(A_n) \cap f(A_m) = \emptyset \ \forall n \neq m$

$$\Rightarrow \mu\left(\bigcup_n (\alpha + A_n)\right) = \sum_n \mu(\alpha + A_n) \ ;$$

LUEGO, $\nu\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_n \nu(A_n)$ ✓

• SEA $A \in \mathcal{M}$. ¿VQ

$$\overbrace{\underbrace{\nu(A)}_{\mu(a+A)} = \inf \{ \underbrace{\nu(U)}_{\mu(a+U)} : U \supseteq A \text{ ABIERTO} \}}^{X}$$

$$\mu(a+\underbrace{A)}_{=:B}$$

SÉ:

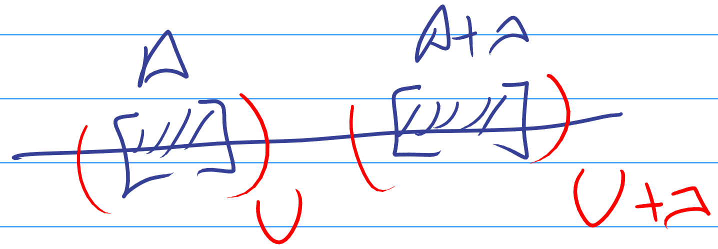
$$\overbrace{\mu(B) = \inf \{ \mu(V) : V \supseteq B \text{ ABIERTO} \}}^{Y}$$

AFIRMO: TENEMOS UNA BIY

$$\{ U \supseteq A \text{ ABIERTO} \} \xrightarrow{\sim} \{ V \supseteq B \text{ ABIERTO} \}$$

$$U \longmapsto U + a \;\; {=f(U)} \quad \text{(ABIERTO, PUES } f \text{ ES HOMEO)}$$

$$-a + V \longleftarrow\!\shortmid \; V$$



LUEGO, $X = Y$