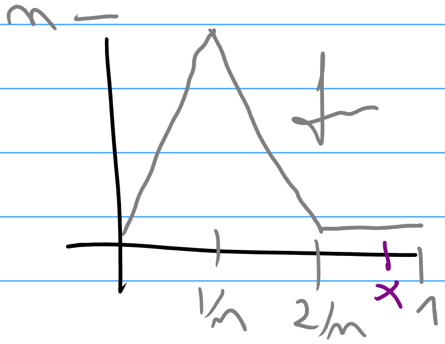
SUCESIONES DE FUNCIONES

EJEMPLOS:

1) $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$,



$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & 2/n \le x \\ n^2 x, & 0 \le x \le 1/n \\ -n^2(x - 2/n), & 1/n \le x \; 2/n \end{cases}$$

- $f_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \quad \forall x \; (\in [0,1])$

De hecho, $f_n(x) = 0$ si $\underbrace{x > 2/n}_{(x \neq 0;\; n > 2/x)}$

y $f_n(0) = 0 \quad \forall n$

→ Así $f_n \to f$ PUNTUALMENTE con $f \equiv 0$.

¿ES UNIFORME?

1. Sea Y un espacio métrico y sea A un conjunto. Sea $f : A \to Y$, y para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : A \to Y$.

Probar que la sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ *no* converge uniformemente a f si y sólo si existen $\alpha > 0$, una subsucesión $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ de $(f_n)_{n\geq 1}$ y una sucesión $(a_k)_{k\geq 1}$ en A tales que $d(f_{n_k}(a_k), f(a_k)) \geq \alpha$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

($f_n \rightrightarrows f$ si $\forall \alpha > 0\ \exists m_0$ con $d(f_n(a), f(a)) < \alpha\ \forall n \geq m_0\ \forall a \in A$)

NO: PUES $\left|\overbrace{f_n(1/n)}^{n^2} - \overbrace{f(1/n)}^{=0}\right| = n^2$

$\forall n$ (tomo $\alpha = 1$, $n_k = n$, $a_k = 1/n$)

Proposición
Sea $f_n \rightrightarrows f$, con $f_n, f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continuas. Entonces

$$\underbrace{\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)dt}_{G/R} = \underbrace{\int_a^b \overbrace{f(t)}^{\lim f_n(t)} dt.}_{G/R}$$

EN ESTE CASO, TENEMOS

$$\int_0^1 f_n(t)\,dt = 1$$

$$\not\Rightarrow \int_0^1 \underbrace{\lim f_n(t)}_{0}\, dt$$

$\rightsquigarrow \quad f_n \not\rightrightarrows f.$

2) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \sqrt{x^2 + \underbrace{1/n^2}_{\substack{\to 0 \\ n \to +\infty}}}$

$(f_n)_n$ CONV. PUNTUALMENTE

A $f(x) = \sqrt{x^2} = |x|$

¿LA CONV. ES UNIF? SÍ:

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \sqrt{x^2 + 1/n^2} - \sqrt{x^2} \right|$$

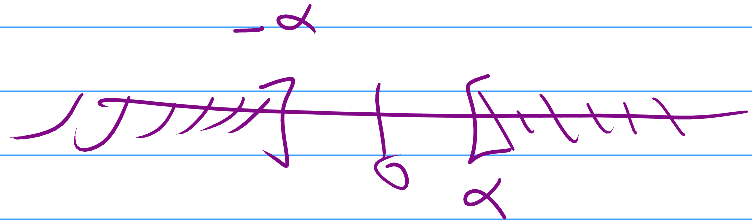
$$= \frac{1/n^2}{\underbrace{\sqrt{x^2 + 1/n^2} + \sqrt{x^2}}_{\geq 1/n}} \leq \frac{n}{n^2} = \underbrace{\frac{1}{n}}_{\substack{\to 0 \\ n \to +\infty}}$$

OBS: f_n ES DERIV $\forall n$, PERO f NO

NOTA 2: $$f_n'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1/n^2}} \to \underbrace{\begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} =: g(x)}_{\text{NO ES CONT}}$$

NOTAR: $f_n' \not\rightrightarrows g$

Proposición
Sean f_n de clase C^1 en $[a,b]$, $f_n \to f$ puntualmente en $[a,b]$, y $f_n' \rightrightarrows g$. Entonces, f es derivable y $f' = g$.



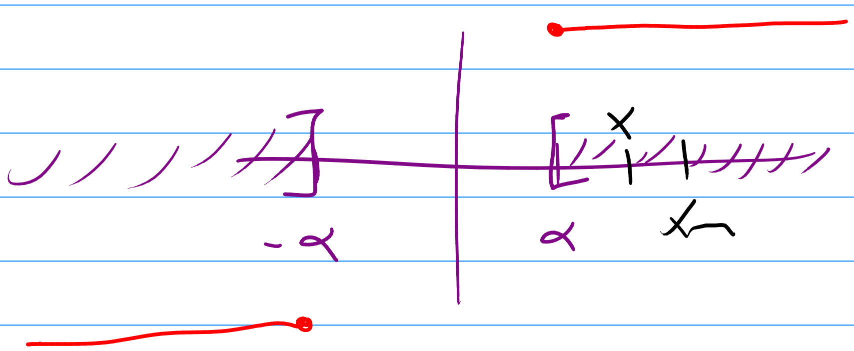
OBS: SI CONSIDERAMOS UN $\alpha > 0$ Y

$$f_n, f : \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq \alpha\} \to \mathbb{R}$$

AHORA TENEMOS QUE

EJERCICIO

$$f_n' \rightrightarrows g, \quad \text{CON} \quad g(x) = \begin{cases} 1, & x \geq \alpha \\ -1, & x \leq -\alpha \end{cases}$$



PROP: SUP $(f_n), f : A \to X$ CON

$f_n \rightrightarrows f$. SEA $\varphi : X \to Y$ UNIF CONT

ENTONCES $\varphi \circ f_n \rightrightarrows \varphi \circ f$.

DEM: QUEREMOS ACOTAR

$$d(\varphi(\underbrace{f_n(x)}_{y}), \varphi(\underbrace{f(x)}_{y'})) \text{ UNIF EN } X$$

SEA $\varepsilon > 0$

- COMO φ ES UNIF CONT, $(\exists \delta)$

$$d(\varphi(y), \varphi(y')) < \varepsilon$$

$$\forall\, y, y' \in Y \text{ CON } d(y, y') < \delta$$

- COMO $f_n \rightrightarrows f$, $\exists n_0 /$

$$d(f_n(x), f(x)) < \delta \quad \forall x \in A \quad \forall n \geq n_0$$

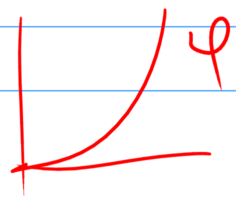
$\rightsquigarrow$ ASÍ, $d(\varphi(f_n(x)), \varphi(f(x))) < \varepsilon$

$\forall x \in A \quad \forall n \geq n_0$

$\boxtimes$

EJEMPLO: $f_n(x) = x + 1/n$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$;

$$\underbrace{\varphi(y) = y^2}_{\text{NO ES UNIF CONT}}$$



- $f_n(x) \to \overbrace{x}^{=: f(x)} \quad \forall x$;

DE HECHO $f_n \rightrightarrows f$ EN $\mathbb{R}$

- $|\varphi(f_n(x)) - \varphi(f(x))|$

$= |(x+1/n)^2 - x^2| = |2x/n + 1/n^2|$

$= 1/n\, |2x + 1/n| = 1$,

SI $2x + 1/n = n^2$, i.e.

$x = \dfrac{n^2 - 1/n}{2}$ " $= a_n$ "

$\to \varphi \circ f_n \not\rightrightarrows \varphi \circ f$.

$///$

2. Sea X un espacio métrico, y sean $f_n : X \to \mathbb{R}$ funciones que convergen uniformemente a una función continua f.

a) Probar que si $(x_n)_{n\geq 1} \subseteq X$ es tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ entonces $\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(x)$.

b) Mostrar que *a*) es falso si la convergencia de las f_n a f es solamente puntual.

a) Como f es cont,

$$f(x_n) \to f(x).$$

$$|f_n(x_n) - f(x)| \leq \underbrace{|f_n(x_n) - f(x_n)|}_{< \varepsilon/2 \text{ si } n \geq n_1} + \underbrace{|f(x_n) - f(x)|}_{< \varepsilon/2 \text{ si } n \geq n_0 \text{ (cont. de } f)}$$

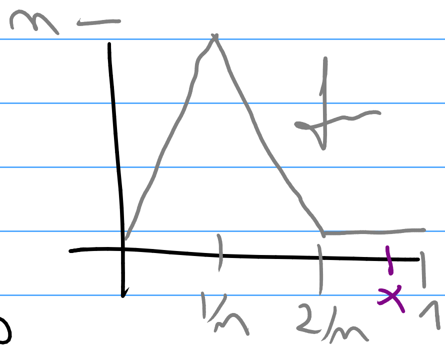
(pues $|f_n(y) - f(y)| < \varepsilon/2$ si $n \geq n_1$)

$$< \varepsilon \quad \forall\, n \geq \text{máx}\{n_0, n_1\}$$

b)

$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f \equiv 0$



Tomo $x_n = 1/n$, $x = 0$

Así $x_n \to x$ pero $\underbrace{f_n(x_n)}_{n} \not\to \underbrace{f(x)}_{0}$

$\blacksquare$