UBA - exactas
Departamento de Matemática

Análisis Avanzado - Integral de Lebesgue 2

Segundo cuatrimestre de 2021

Daniel Carando - Victoria Paternostro

Dto. de Matemática - FCEN - UBA

Recordemos.....

Recordemos.....

$E \subseteq \mathbb{R}$ es siempre medible.

Recordemos.....

$E \subseteq \mathbb{R}$ es siempre medible.

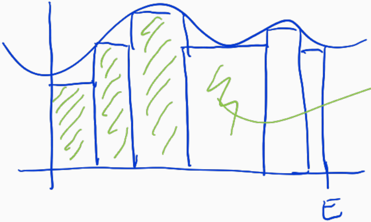
Integral de Lebesgue de funciones no negativas.

Sea $\boxed{f : E \to \mathbb{R}}$ una función medible tal que $f \geq 0$ en E. Definimos la integral de Lebesgue de f como

$$\int_E f\, d\mu := \sup\left\{\int_E \varphi\, d\mu : \varphi \text{ es simple } 0 \leq \varphi \leq f\right\}.$$

$$\varphi = \sum_{i=1}^{N} a_i \chi_{E_i}$$

$$\int_E \varphi\, d\mu = \sum_{i=1}^{N} a_i\, \mu(E_i)$$



Teorema

Sean $f, g : E \to \mathbb{R}$ funciones medibles y no negativas en E. La integral de Lebesgue tiene las siguientes propiedades:

Teorema

Sean $f, g : E \to \mathbb{R}$ funciones medibles y no negativas en E. La integral de Lebesgue tiene las siguientes propiedades:

(a) Si $0 \leq f \leq g$ en E, $\int_E f\, d\mu \leq \int_E g\, d\mu$.

Teorema

Sean $f, g : E \to \mathbb{R}$ funciones medibles y no negativas en E. La integral de Lebesgue tiene las siguientes propiedades:

(a) Si $0 \leq f \leq g$ en E, $\int_E f\, d\mu \leq \int_E g\, d\mu$.

(ctp)

(b) Si $\int_E f\, d\mu < \infty$, entonces $f < \infty$ en casi todo punto de E.

Teorema

Sean $f, g : E \to \mathbb{R}$ funciones medibles y no negativas en E. La integral de Lebesgue tiene las siguientes propiedades:

(a) Si $0 \leq f \leq g$ en E, $\int_E f \, d\mu \leq \int_E g \, d\mu$.

(b) Si $\int_E f \, d\mu < \infty$, entonces $f < \infty$ en casi todo punto de E.

(c) Si $A \subseteq E$ es medible, entonces $\int_A f \, d\mu \leq \int_E f \, d\mu$.

Teorema

Sean $f, g : E \to \mathbb{R}$ funciones medibles y no negativas en E. La integral de Lebesgue tiene las siguientes propiedades:

(a) Si $0 \leq f \leq g$ en E, $\int_E f\, d\mu \leq \int_E g\, d\mu$.

(b) Si $\int_E f\, d\mu < \infty$, entonces $f < \infty$ en casi todo punto de E.

(c) Si $A \subseteq E$ es medible, entonces $\int_A f\, d\mu \leq \int_E f\, d\mu$.

Teorema de la convergencia Monótona

Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles definidas en E tales que $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. ($(f_n)_n$ es una suc. monótona)

Si $f = \lim_{n\to\infty} f_n$, entonces

$$\int_E f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n\, d\mu.$$

Proposición

va a implicar: $\int_E f\,d\mu = \int_E g\,d\mu \Rightarrow f = g$
$f, g \geq 0$ en ctp de E

Sea $f \geq 0$ medible definida en E. Entonces:

$$\boxed{\int_E f\,d\mu = 0 \iff f = 0 \text{ en casi todo punto de } E.}$$

Dem: $\Leftarrow)$ ✓

$\Rightarrow)$ Definamos $E_n := \{x \in E : f(x) \geq 1/n\}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow E_n \in \sigma$ $\forall n$ y podemos def. $\varphi_n = \frac{1}{n}\chi_{E_n}$ q' uno

función simple $\wedge$ $0 \leq \varphi_n \leq f$ en E.

$\Longrightarrow$ def de $\int_E$ $\quad 0 \leq \underbrace{\int_E \varphi_n \, d\mu}_{\frac{1}{n}\mu(E_n)} \leq \int_E f \, d\mu = 0$ ↑ hipótesis.

$\neq 0$

$\Rightarrow \mu(E_n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

Pero $\bigcup_n E_n = \{x \in E : f(x) > 0\}$ y $\therefore$ como

$\mu(\{x \in E : f(x) > 0\}) = \mu(\bigcup_n E_n) \leq \sum_n \underbrace{\mu(E_n)}_{=0 \ \forall n} = 0.$

$\Rightarrow f = 0$ en ctp.

Teorema (Linealidad de la integral)

(a) Sea $f \geq 0$ medible definida en E y $c > 0$. Entonces, $\int_E cf\,d\mu = c\int_E f\,d\mu$.

(b) Sean $f, g \geq 0$ medibles definidas en E. Entonces, $\int_E f + g\,d\mu = \int_E f\,d\mu + \int_E g\,d\mu$.

Dem: (a) Ejercicio (consecuencia directa de la def y q' vale para simples).

(b) Sabemos que existen funciones simples $(f_n)_n$ y $(g_n)_n$ tales que $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$, $0 \leq g_n \leq g_{n+1}$ $\forall n$ y $\lim g_n = g$, $\lim f_n = f$.

Por conv monótona: $\cdot \lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu$

$\cdot \lim_{n\to\infty} \int_E g_n d\mu = \int_E g d\mu$

$f_n + g_n \le f_{n+1} + g_{n+1}$

Además como $f_n + g_n$ es simple $\wedge$ $f_n + g_n \nearrow f+g$

$\Rightarrow$ (monótona) $\boxed{\lim_{n\to\infty} \underbrace{\int_E f_n + g_n d\mu}} = \boxed{\int_E f+g d\mu}$ $=$ $\boxed{\int_E f d\mu + \int_E g d\mu}$

(simples) $= \int_E f_n d\mu + \int_E g_n d\mu \longrightarrow$

$\downarrow \int_E f d\mu$ $\quad$ $\downarrow \int_E g d\mu$

Corolario (Ejercicio) sug: $g = (g-f) + f$.

Sean f, g medibles definidas en E tales que $0 \leq f \leq g$. Si $\int_E f \, d\mu < \infty$, entonces

$$\int_E \underbrace{g - f}_{\geq 0} \, d\mu = \int_E g \, d\mu - \int_E f \, d\mu.$$

Corolario

Sean f, g medibles definidas en E tales que $0 \leq f \leq g$. Si $\int_F f \, d\mu < \infty$, entonces

$$\int_E g - f \, d\mu = \int_E g \, d\mu - \int_E f \, d\mu.$$

Teorema

Sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles definidas en E, tales que $f_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces,

$$\boxed{\int_E \sum_{n=1}^{+\infty} f_n \, d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_E f_n \, d\mu.}$$

Dem: $S_N = \sum_{n=1}^{N} f_n$, S_N med $\forall N$, $0 \leq S_N \leq S_{N+1}$

y $S := \lim_{N\to\infty} S_N = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$

Por conv monótona

$$\lim_{N\to\infty} \int_E S_N \, d\mu = \int_E \lim_{N\to\infty} S_N \, d\mu = \int_E S \, d\mu = \int_E \sum_{n=1}^{\infty} f_n \, d\mu$$

$$\underbrace{\int_E S_N \, d\mu}_{} = \sum_{n=1}^{N} \int_E f_n \, d\mu$$

linealidad

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \int_E f_n \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n \, d\mu \quad \boxtimes$$

Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Definimos el **límite inferior de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$** como

lim an

$$\liminf_{n\to+\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \boxed{\inf_{k\geq n} a_k}.$$

inf $\{a_1, a_2, \ldots$

inf $\{a_2, a_3, \ldots$

inf $\{a_3, a_4, \ldots$

Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Definimos el límite inferior de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como

$$\liminf_{n\to+\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq n} a_k.$$

Definimos el límite superior de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como

$$\limsup_{n\to+\infty} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} a_k.$$

Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Definimos el límite inferior de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como

$$\liminf_{n\to+\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq n} a_k.$$

Definimos el límite superior de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como

$$\limsup_{n\to+\infty} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} a_k.$$

Vale lo siguiente:

Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Definimos el límite inferior de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como

$$\liminf_{n\to+\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq n} a_k.$$

$a_n = (-1)^n$

Definimos el límite superior de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como

$$\limsup_{n\to+\infty} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} a_k.$$

$\underline{\lim}\, a_n = -1$

$\overline{\lim}\, a_n = 1$

Vale lo siguiente:

1. $\liminf_{n\to+\infty} a_n$ y $\limsup_{n\to+\infty} a_n$ siempre existen;

Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Definimos el límite inferior de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como

$$\liminf_{n\to+\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq n} a_k.$$

Definimos el límite superior de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como

$$\limsup_{n\to+\infty} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} a_k.$$

Vale lo siguiente:

1. $\liminf_{n\to+\infty} a_n$ y $\limsup_{n\to+\infty} a_n$ siempre existen;
2. $\liminf_{n\to+\infty} a_n \leq \limsup_{n\to+\infty} a_n$;

Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Definimos el límite inferior de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como

$$\liminf_{n\to+\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq n} a_k.$$

Definimos el límite superior de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como

$$\limsup_{n\to+\infty} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} a_k.$$

Vale lo siguiente:

1. $\liminf_{n\to+\infty} a_n$ y $\limsup_{n\to+\infty} a_n$ siempre existen;
2. $\liminf_{n\to+\infty} a_n \leq \limsup_{n\to+\infty} a_n$;
3. $\liminf_{n\to+\infty} a_n = \limsup_{n\to+\infty} a_n$ si y sólo si existe $\boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n}$.

Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Definimos el límite inferior de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como

$$\liminf_{n\to+\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq n} a_k.$$

Definimos el límite superior de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como

$$\limsup_{n\to+\infty} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} a_k.$$

Vale lo siguiente:

1. $\liminf_{n\to+\infty} a_n$ y $\limsup_{n\to+\infty} a_n$ siempre existen;
2. $\liminf_{n\to+\infty} a_n \leq \limsup_{n\to+\infty} a_n$;
3. $\liminf_{n\to+\infty} a_n = \limsup_{n\to+\infty} a_n$ si y sólo si existe $\lim_{n\to+\infty} a_n$. En ese caso,
$$\liminf_{n\to+\infty} a_n = \limsup_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} a_n.$$

Lema de Fatou

Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles definidas en E, tales que $f_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces,

$$\int_E \liminf_{n\to+\infty} f_n \, d\mu \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_E f_n \, d\mu.$$

Dem: Obs: Si $(f_n)_n$ es suc de funciones def en E med $\Rightarrow \underline{\lim} f_n$ y $\overline{\lim} f_n$ son med (Ejercicio).

$$\underline{\lim}\, f_n = \sup_{k\in\mathbb{N}} \underbrace{\inf_{m\geq k} f_m}_{g_k} \qquad g_k := \inf_{m\geq k} f_m \quad \text{med}$$

y $0 \leq g_k \leq g_{k+1}$ $\Rightarrow \lim_{k\to\infty} g_k = \sup_k g_k = \underline{\lim}\, f_n$

Por conv monótona, $\lim_{k\to\infty}\int_E g_k \, d\mu = \int_E \lim_{k\to\infty} g_k \, d\mu$

$= \int_E \underline{\lim} f_n \, d\mu$

Como $0 \leq g_n \leq f_n \Rightarrow \int_E g_n \, d\mu \leq \int_E f_n \, d\mu$

$\Rightarrow$ juntamos $\boxed{\int_E \underline{\lim} f_n \, d\mu \leq \lim_{k\to\infty} \int_E g_k \, d\mu \leq \underline{\lim} \int_E f_n \, d\mu}$

$\boxtimes$

Teorema de la Convergencia Dominada

Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles definidas en E, tales que $f_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que $f = \lim_{n\to+\infty} f_n$ y que existe una función ϕ medible definida en E tal que $f_n \leq \phi$ en E para todo $n \in \mathbb{N}$.

Teorema de la Convergencia Dominada

Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles definidas en E, tales que $f_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que $f = \lim_{n\to+\infty} f_n$ y que existe una función ϕ medible definida en E tal que $f_n \leq \phi$ en E para todo $n \in \mathbb{N}$. Si $\boxed{\int_E \phi\, d\mu < \infty}$, entonces

$$\lim_{n\to+\infty} \int_E f_n\, d\mu = \int_E f\, d\mu.$$

Dem: $\displaystyle\int_E f\,d\mu = \int_E \lim_{n\to\infty} f_n\,d\mu = \int_E \underline{\lim}\, f_n\,d\mu \underset{\text{Fatou}}{\le}$

$\displaystyle\underline{\lim}\int_E f_n\,d\mu \underset{\text{(vale siempre)}}{\le} \overline{\lim}\int_E f_n\,d\mu.$

Basta ver que $\displaystyle\overline{\lim}\int_E f_n\,d\mu \le \int_E f\,d\mu$

Defino $g_n := \phi - f_n \ge 0$ $\wedge$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} g_n = \phi - \overbrace{\lim_{n\to\infty} f_n}^{=f}$

además $f_n \le \phi$ $\wedge$ $\displaystyle\int_E \phi\,d\mu < \infty \Rightarrow \int_E f_n\,d\mu < \infty$

$\displaystyle\Rightarrow \int_E g_n\,d\mu = \int_E \phi\,d\mu - \int_E f_n\,d\mu.$ (corolario)

Fatou $\quad \underbrace{\int_E \underline{\lim}\, g_n \, d\mu}_{\lim_{n\to\infty} g_n \,=\, \phi - f} \leq \underline{\lim} \underbrace{\int_E g_n \, d\mu}_{\int_E \phi \, d\mu - \int_E f_n \, d\mu}$

$$\int_E \phi \, d\mu - \int_E f \, d\mu \leq \underline{\lim} \left(\int_E \phi \, d\mu - \int_E f_n \, d\mu \right)$$

$$= \int_E \phi \, d\mu - \overline{\lim} \int_E f_n \, d\mu$$

$\Rightarrow \checkmark \quad \boxtimes$

Teorema (continuidad absoluta de la integral)

Sea $f \geq 0$ medible definida en E, tal que $\int_E f \, d\mu < \infty$.

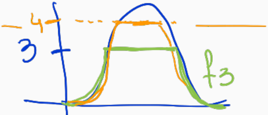
Teorema (continuidad absoluta de la integral)

Sea $f \geq 0$ medible definida en E, tal que $\int_E f\,d\mu < \infty$. Entonces, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } A \subseteq E \text{ es medible con } \boxed{\mu(A) < \delta \implies \int_A f\,d\mu < \varepsilon.}$$

Dem: Para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n = \min\{f, n\}$

Es decir $f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \leq n \\ n & \text{si } f(x) > n \end{cases}$



$\Rightarrow f_n \geq 0$, son medibles y $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$. (ejercicio)

$f_n \le f \ \forall n$ y $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$

↳ $\int_E f < \infty$

↳ pues: como $\int_E f\,d\mu < \infty$ $\Rightarrow$ $f < \infty$ en ctp de E $\Rightarrow$ $x \in E$ donde $f(x) < \infty$ $\Rightarrow$ $\exists m \in \mathbb{N}$ / $f(x) \le m$ $\Rightarrow$ $f_m(x) = f(x)$

Por conv dominada $(\phi = f)$

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\mu = \int_E f \, d\mu$$

Dado $\varepsilon > 0$, $\exists \underline{n_0} \in \mathbb{N}$ / $\int_E f\,d\mu - \int_E f_n\,d\mu < \varepsilon/2 \quad \forall n \ge n_0$.

$A \subseteq E$ med

$$\int_A f\,d\mu = \int_A f - f_{n_0}\,d\mu + \int_A \overbrace{f_{n_0}}^{\le n_0}\,d\mu$$

$$\le \int_E f - f_{n_0}\,d\mu + n_0\,\mu(A) < \varepsilon/2 + n_0\,\mu(A).$$

Si $\mu(A) < \delta \wedge \delta < \varepsilon/2n_0 \Rightarrow \int_A f\,d\mu < \varepsilon/2 + n_0\,\varepsilon/2n_0 = \varepsilon$ ☒