ESPACIOS NORMADOS I

EJEMPLOS:

0) $\mathbb{R}^m$, CON $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_\infty$

1) $C([0,1])$, CON $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_\infty$

2) $\ell^\infty = \{ a = (a_m)_{m \geq 1}^{\in \mathbb{R}} : \ a$ ACOTADA $\}$

CON $\|a\|_\infty = \sup_{m \in \mathbb{N}} |a_m|$

3) $\ell^2 = \{ a = (a_m)_{m \geq 1}^{\in \mathbb{R}} : \sum_{m \geq 1} a_m^2 < +\infty \}$

CON $\|a\|_2 = \sqrt{\sum_{m \geq 1} a_m^2}$

(EJ: $a = (1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots) \in \ell^2$)

SEAN $a, b \in \ell^2$; VEAMOS QUE $a+b \in \ell^2$

CERRADO A [illegible]

DADO $m \in \mathbb{N}$, DENOTEMOS

$$a^{(m)} = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m.$$

ASÍ:

$$\overbrace{\| a^{(m)} + b^{(m)}}^{\in \mathbb{R}^m} \|_2 \overset{\text{EN } \mathbb{R}^m}{\leq} \| a^{(m)} \|_2 + \| b^{(m)} \|$$

$$= \underbrace{\sqrt{\sum_{m=1}^{m} a_m^2}}_{\leq \|a\|_2} + \underbrace{\sqrt{\sum_{m=1}^{m} b_m^2}}_{\leq \|b\|_2}$$

ie: $\sqrt{\sum_{m=1}^{m} (a_m + b_m)^2} \leq \|a\|_2 + \|b\|_2$ $\forall m \in \mathbb{N}$

$$\therefore \underbrace{\sqrt{\sum_{m\geq 1} (a_m + b_m)^2}}_{\|a+b\|_2} \leq \|a\|_2 + \|b\|_2$$

(LUEGO, $a+b \in \ell^2$)

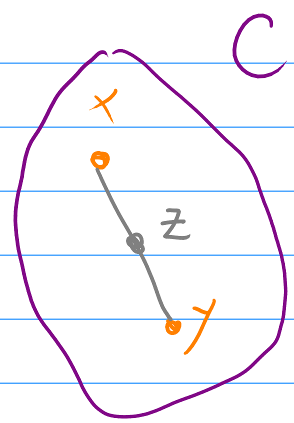
EJERCICIO: $\lambda \in \mathbb{R}$, $a \in \ell^2$, ENTONCES

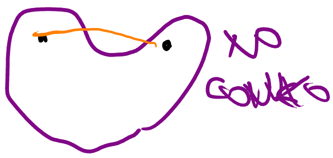
$$\|\lambda a\|_2 = |\lambda| \, \|a\|_2$$

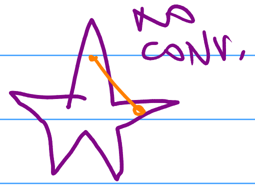
DEF: $C \subseteq E$ (E.V.) ES CONVEXO SI

$\forall t \in [0,1]$,

$$\underbrace{tx + (1-t)y}_{=z} \in C$$





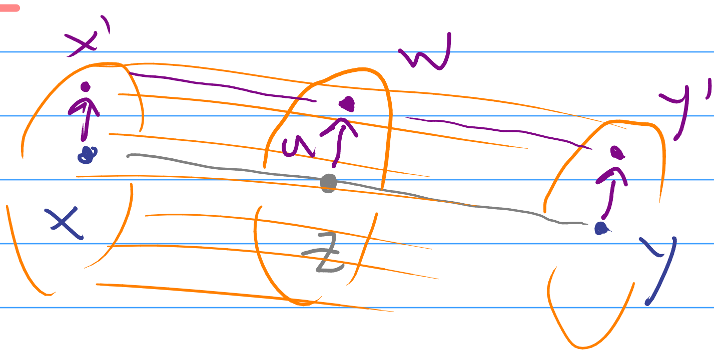


EJEMPLO: SEAN $x, y \in E$. SEA

$[x,y] := C = \{ tx + (1-t)y : t \in [0,1] \}$.

ENTONCES C ES CONVEXO.

EJEMPLO: C CONVEXO $\Rightarrow C^\circ$ CONVEXO



SEAN $x, y \in C^\circ$. SEA $z = tx + (1-t)y$

CON $t \in [0,1]$.

TOMO $r > 0$ / $B(x,r), B(y,r) \subseteq C$

VEAMOS QUE $B(z,r) \subseteq C$ (Y LISTO)

SEA $w \in B(z,r)$. ENTONCES $w = z + \underbrace{u}_{w-z}$

CON $\|u\| < r$

(NOTA: $d(w,z) = \|w - z\| = \|u\|$)

SEAN $x' = x + u$, $y' = y + u$

POR ⊛, $x', y' \in C$. LUEGO,

$$\boxed{C \ni} \; tx' + (1-t)\, y'$$
$$= t(x+n) + (1-t)(y+n)$$
$$= tx + (1-t)y + \underbrace{tn + (1-t)\,n}_{n - tn}$$
$$= z + n = \boxed{w}$$

EJERCICIO: C CONVEXO $\Rightarrow \bar{C}$ CONVEXO

DEF: E E.V., $S \subseteq E$ SUBESPACIO. S ES HIPERPLANO SI $\nexists T$ SUBESP CON

$$S \subsetneq T \subsetneq E$$

OBS: SI $\dim E = n$ (/$\mathbb{C}$) (LOO), S ES HIPERP SII $\dim S = n-1$

PROP: $S \subsetneq E$. SON EQUIV:

i) S HIPERPLANO

ii) $\exists\, v \notin S$ CON $S \oplus \langle v \rangle = E$

iii) $\forall\, v \notin S$, $S \oplus \langle v \rangle = E$

DEM: VEAMOS $ii \Rightarrow i$ (LAS DEMÁS, EJERCICIO)

SEA T SUBESP CON $S \subsetneq T$; VEAMOS QUE $T = E$.

TOMO $t \in T \setminus S$. COMO $t \in E = S + \langle v \rangle$, $\exists\, s \in S$, $\lambda \in \mathbb{R}$ CON $t = s + \lambda v$

$\lambda \neq 0$ (CASO CONTRARIO, $t = s \in S$)

ASÍ, $v = \frac{1}{\lambda}\overbrace{(t - s)}^{\in T} \in T$

ASÍ, $T \supseteq \underbrace{S}_{\subseteq T} + \langle \overset{\in T}{v} \rangle = E$ $\boxtimes$

EJEMPLO: SEA

$$E = \{ a \in \ell^\infty : \exists \lim_n a_n \}$$

SUBESP. DE ℓ^∞

SEA $S = \{ a \in E : \lim_n a_n = 0 \}$

VEAMOS QUE S ES UN HIPERPLANO

SEA $v = (1,1,1,\dots) \in E \setminus S$

VEAMOS QUE $E = S \oplus \langle v \rangle$

SEA $w \in E$. ESCRIBAMOS

$$w = \underbrace{(w - \lambda v)}_{¿\in S?} + \lambda v$$

$\rightsquigarrow$ DEPENDE DE λ

$$\lim_{n\to\infty} w_n - \lambda v_n =$$

$$\left(\lim w_n\right) - \lambda \overbrace{\left(\lim v_n\right)}^{=1} \stackrel{?}{=} 0$$

SII $\lambda = \lim w_n$

4. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado y $S \subseteq E$ un subespacio (vectorial). Probar que:

(a) $\overline{S}$ también es un subespacio.

(b) Si $S \neq E$, entonces $S^{\circ} = \emptyset$.

(c) Si $\dim(S) < \infty$, entonces S es cerrado.

(d) Si S es un hiperplano (o sea: no existe un subespacio T tal que $S \subsetneq T \subsetneq E$), entonces S es o bien denso o bien cerrado en E.

VEAMOS QUE S ES CERRADO ($\Rightarrow$ NO DENSO)

QVQ $E \setminus S$ ES ABIERTO

SEA $a \in E \setminus S$; BUSCO $r > 0$ CON

$B(a,r) \subseteq E \setminus S$

$(\text{ie, } \|b-a\| < r \Rightarrow \lim b_n \neq 0)$

TOMO $r = |\lambda|/2$, CON $\lambda := \underbrace{\lim a_n}_{\neq 0}$

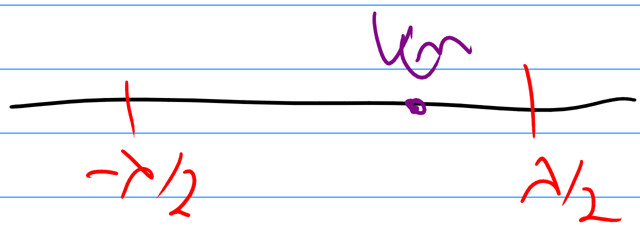
SEA $b \in B(a,r)$:

$b = a + u$, CON $\|u\| < r = |\lambda|/2$

$$\underbrace{\lim b_n}_{¿\neq 0?} = \underbrace{\lim a_n}_{\lambda} + \lim u_n$$

$\rightsquigarrow$ QVQ $\lim u_n \neq -\lambda$

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n| = \|u\| < |\lambda|/2$$



$$\therefore \; |\underbrace{\lim u_n}_{\neq -\lambda}| \leq \lambda/2$$