UBA - exactas
Departamento de Matemática

Análisis Avanzado - Sucesiones y series de funciones 2

Primer cuatrimestre de 2021

Daniel Carando - Victoria Paternostro

Dto. de Matemática - FCEN - UBA

Dado X espacio métrico,

$$C_b(X) = \{f : X \to \mathbb{R} : \text{ continuas y acotadas sobre } X\}$$

Dado X espacio métrico,

$$C_b(X) = \{f : X \to \mathbb{R} : \text{ continuas y acotadas sobre } X\}$$

y

$$B(X) = \{f : X \to \mathbb{R} : \text{ acotadas sobre } X\}$$

ambos con $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$.

Dado X espacio métrico,

$$C_b(X) = \{f : X \to \mathbb{R} : \text{ continuas y acotadas sobre } X\}$$

y

$$B(X) = \{f : X \to \mathbb{R} : \text{ acotadas sobre } X\}$$

ambos con $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$.

Proposición

$(C_b(X), \|\cdot\|_\infty)$ y $(B(X), \|\cdot\|_\infty)$ son espacios normados completos, es decir Banach.

$(f_n)_n \subseteq \mathcal{C}_b(X)$ $\quad f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$.

$(f_n)_n$ es de Cauchy c/ $\|\cdot\|_\infty \Longrightarrow (f_n)_n$ es uniformemente de Cauchy $\underset{\text{Teo}}{\Longrightarrow} \exists f : X \to \mathbb{R} \,/\, f_n \rightrightarrows f$.

. f es continua: Rta si xq' lim unif. de continuas es continua

. f es acot: $\varepsilon > 0$ $\exists n_0 \,/\, \forall n \geq n_0, \underline{\forall x \in X}$ $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

$|f(x)| \leq \underbrace{|f(x) - f_{n_0}(x)|}_{< \varepsilon} + \underbrace{|f_{n_0}(x)|}_{\leq M_{n_0}} \leq \varepsilon + M_{n_0}$ $\forall x \Rightarrow f$ acot.

$\Rightarrow f \in \mathcal{C}_b(X) \wedge f_n \xrightarrow[\|\cdot\|_\infty]{} f$ $\quad \therefore \quad \mathcal{C}_b(X)$ completo.

Esto permite pensar la convergencia uniforme de sucesiones y series de funciones en el marco de convergencia de sucesiones y series en espacios de Banach.

E es un espacio de Banach y $(x_n)_n \subset E$ una sucesión.

E es un espacio de Banach y $(x_n)_n \subset E$ una sucesión. Definimos la N-ésima suma parcial de $(x_n)_n$ como

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} x_n \in E \qquad (S_N)_{N \in \mathbb{N}} \subseteq E$$

E es un espacio de Banach y $(x_n)_n \subset E$ una sucesión. Definimos la N-ésima suma parcial de $(x_n)_n$ como

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} x_n$$

La sucesión $(S_N)_N$ es la sucesión de sumas parciales de $(x_n)_n$.

E es un espacio de Banach y $(x_n)_n \subset E$ una sucesión. Definimos la N-ésima suma parcial de $(x_n)_n$ como

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} x_n$$

La sucesión $(S_N)_N$ es la sucesión de sumas parciales de $(x_n)_n$.

Definición

Decimos que la serie

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} x_n}$$

converge cuando existe el límite $\lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} x_n$.

E es un espacio de Banach y $(x_n)_n \subset E$ una sucesión. Definimos la N-ésima suma parcial de $(x_n)_n$ como

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} x_n$$

La sucesión $(S_N)_N$ es la sucesión de sumas parciales de $(x_n)_n$.

Definición

Decimos que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

$\mathbb{R}$ $(x_n)_n \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$

$(S_N)_N$ es crec.

converge cuando existe el límite $\boxed{\lim_{N\to\infty} S_N} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} x_n$.
A ese límite, que es un elemento de E, lo llamamos $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} x_n}$.

Observación

Sea E es un espacio de Banach, $(x_n)_n \subset E$ una sucesión y $(S_N)_N$ la sucesión de sus sumas parciales.

Observación

Sea E es un espacio de Banach, $(x_n)_n \subset E$ una sucesión y $(S_N)_N$ la sucesión de sus sumas parciales.

Por definición, la serie $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} x_n \text{ converge}}$ si y sólo si la sucesión $(S_N)_N$ converge.

Observación

Sea E es un espacio de Banach, $(x_n)_n \subset E$ una sucesión y $(S_N)_N$ la sucesión de sus sumas parciales.

Por definición, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge si y sólo si la sucesión $(S_N)_N$ converge.

Como E es completo, esto sucede si y sólo si $\boxed{(S_N)_N \text{ es de Cauchy.}}$

Observación

Sea E es un espacio de Banach, $(x_n)_n \subset E$ una sucesión y $(S_N)_N$ la sucesión de sus sumas parciales.

Por definición, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge si y sólo si la sucesión $(S_N)_N$ converge.

Como E es completo, esto sucede si y sólo si $(S_N)_N$ es de Cauchy.

Esto equivale a lo siguiente:

Observación

Sea E es un espacio de Banach, $(x_n)_n \subset E$ una sucesión y $(S_N)_N$ la sucesión de sus sumas parciales.

Por definición, la serie $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} x_n \text{ converge}}$ si y sólo si la sucesión $(S_N)_N$ converge.

Como E es completo, esto sucede si y sólo si $(S_N)_N$ es de Cauchy.

Esto equivale a lo siguiente:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_0 \in \mathbb{N} \ / \ \|S_N - S_M\|_E < \varepsilon \ \forall N, M \geq N_0.$

$\sum_{n=1}^{M} x_n - \sum_{n=1}^{N} x_n$

$\Leftrightarrow \left\| \sum_{m=N+1}^{M} x_m \right\| < \varepsilon$

$\forall N, M \geq \underline{N_0}$.

Recordemos...

En $\mathbb{R}$, $(a_n)_n \subseteq \mathbb{R}$, $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty}$ conv absoluta.

Recordemos...

Definición

Decimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge absolutamente en E si

$\in \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < +\infty.$$

Proposición

Sea E es un espacio de Banach y $(x_n)_n \subset E$ una sucesión. Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge absolutamente, entonces converge.

Dem: qvq $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ conv en E es decir qvq

$S_N = \sum_{n=1}^{N} x_n \Rightarrow (S_N)_N$ es de Cauchy en E

$$\|S_M - S_N\| = \left\| \sum_{n=N+1}^{M} x_n \right\| \leq \boxed{\sum_{n=N+1}^{M} \|x_n\|}$$

$$\sum_{n=1}^{M} \|x_n\| - \sum_{n=1}^{N} \|x_n\|$$

Como $\sum \|x_n\|$ conv $\Rightarrow \left(\sum_{n=1}^{N} \|x_n\|\right)_N$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$. Dado $\varepsilon>0$ $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ / $N, M \geq N_0 \Rightarrow$

$$\sum_{n=N+1}^{M} \|x_n\| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \|S_N - S_M\| \leq \sum_{n=N+1}^{M} \|x_n\| < \varepsilon \text{ si } N, M \geq N_0.$$

$\therefore (S_N)_N$ es de Cauchy en E y $\therefore$ converge.

$\boxtimes$

Series de funciones

$\mathcal{C}_b(X)$, $\mathcal{B}(X)$

Sea X un conjunto y consideremos para cada $n \in \mathbb{N}$ una función $f_n : X \to \mathbb{R}$.

Series de funciones

Sea X un conjunto y consideremos para cada $n \in \mathbb{N}$ una función $f_n : X \to \mathbb{R}$.

Para cada N, tenemos la función suma parcial

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} f_n(x)$$

Series de funciones

Sea X un conjunto y consideremos para cada $n \in \mathbb{N}$ una función $f_n : X \to \mathbb{R}$.

Para cada N, tenemos la función suma parcial

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} f_n(x)$$

Decimos que la serie de funciones $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge (puntual o uniformemente) en X si la sucesión de funciones $(S_N)_N$ converge (puntual o uniformemente) en X.

Criterio de Weierstrass $f_n : X \to \mathbb{R}$ X conj.

Supongamos dado n existe $c_n \geq 0$ tal que $\boxed{|f_n(x)| \leq c_n}$ para todo $x \in X$. Si $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ converge, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge absoluta y uniformemente a una función (acotada) de X en $\mathbb{R}$.

Dem: $|f_n(x)| \leq c_n \quad \forall x \in X \Rightarrow f_n \in B(X) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$S_N = \sum_{n=1}^{N} f_n \in B(X)$ $\quad$ q.v.q. $(S_N)_N$ es de Cauchy en $(B(X), \|\cdot\|_\infty)$

1°) $\Rightarrow \|f_n\|_\infty \leq c_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\|S_M - S_N\|_\infty = \left\| \sum_{n=N+1}^{M} f_n \right\|_\infty \leq \boxed{\sum_{n=N+1}^{M} \|f_n\|_\infty \leqslant \sum_{n=N+1}^{M} c_n} \quad \boxed{*}$$

Como $\sum_n c_n$ conv $\Rightarrow \left(\sum_{n=1}^{N} c_n \right)_N$ es de Cauchy

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_0 \in \mathbb{N} \ / \ N, M \geq N_0 \Rightarrow \sum_{n=N+1}^{M} c_n < \varepsilon.$

$\underset{\boxed{*}}{\Rightarrow}$ $(S_N)_N$ es de Cauchy en $B(X)$. $\Rightarrow$ conv a $f \in B(X)$

$\Rightarrow \sum f_n$ conv uniformemente a f $\wedge$ f es acotada

Conv ABSOLUTA (detalles son ejercicio). $\boxtimes$