Espaços Métricos

§

ELON LAGES LIMA

§

Algunas soluciones

Resumen

Este documento es resultado de cursar Análisis Real, ramo dictado por la profesora Verónica Poblete Oviedo, en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Chile. A veces subo correcciones. Se agradecen hacer llegar los comentarios a **ecordenes@ug.uchile.cl**.

Última actualización: 13/09/2018

Índice

1. Espacios métricos

Problema 1.1. *Sea* $d : M \times M \to \mathbb{R}$ *una función tal que:*

(a) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(b) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(z, y)$.

Pruebe que d *es una métrica.*

Demostración. Necesitamos mostrar que d es positiva y simétrica. Por hipótesis:

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(z,y),$$

y

$$d(z,x) \leq d(z,y) + d(x,y).$$

Si se considera $x = y$, se tiene que $d(x,z) \leq d(z,x)$ y $d(z,x) \leq d(x,z)$. Se concluye que $d(x,z) = d(z,x)$. Ahora que sabemos que es simétrica, si se considera $x \neq y$ y $x = z$ en la hipótesis se obtiene que $d(x,y) > 0$.

Por lo tanto, d es una métrica. □

Problema 1.2. *Demuestre que $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $d(x,y) = (x-y)^2$ no es una metrica*

Demostración. Note que $d(1,0) \geq d(1, \frac{1}{2}) + d(\frac{1}{2}, 0)$ □

Problema 1.3. *Para cada una de las cuatro condiciones que caracterizan una métrica obtenga una función $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que no las cumpla pero que satisfaga tres*

Ejemplo para (1). □

Ejemplo para (2). □

Ejemplo para (3). □

Ejemplo para (4). Se toma $d(x,y) = (x-y)^2$ como en el ejemplo anterior. □

Problema 1.4. *Sea $d : M \times M \to \mathbb{R}$ una métrica. Verifique que $\alpha(x,y) = \sqrt{d(x,y)}$, $\beta(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ y $\gamma(x,y) = \min\{1, d(x,y)\}$ son métricas en M.*

Demostración. Las primeras condiciones se verifican fácilmente en cada una de estas funciones. Probemos que cada una cumple la desigualdad triangular.

- Queremos demostrar que

  $$\alpha(x,y) \leq \alpha(x,z) + \alpha(z,y),$$

  para notemos que como d es una métrica entonces se tiene que $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$. Notando que $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ para todos $a, b \geq 0$ entonces tomando raíz en la desigualdad triangular dada por d entonces se sigue que $\sqrt{d(x,y)} \leq \sqrt{d(x,z)} + \sqrt{d(z,y)}$.

- Queremos demostrar que

$$\beta(x,y) \leq \beta(x,z) + \beta(z,y).$$

Basta multiplicar por $(1+d(x,y))(1+d(x,z))(1+d(z,y))$ dicha desigualdad y reducir términos para visualizar como llegar a partir de $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ a lo que nos piden.

- Queremos demostrar que

$$\gamma(x,y) \leq \gamma(x,z) + \gamma(z,y).$$

Dado que si $d(u,v) > 1$ entonces $\gamma(u,v) = 1$, podemos asumir sin pérdida de generalidad que $d(u,v) \leq 1$ para todo $u, v \in M$. Así $\gamma(x,z) + \gamma(z,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \leq 2$, y además, como $\gamma(x,y) \leq d(x,y)$ se concluye

□

Problema 1.5. *Pruebe que toda norma $\| \ \|$ en $\mathbb{R}$ es de la forma $\|x\| = a \cdot |x|$, donde $a > 0$ es una constante y $|x|$ es el valor absoluto de x. Concluya que toda norma en $\mathbb{R}$ proviene de un producto interno.*

Demostración. Note que $x = 1 \cdot x$. Por propiedades de la norma, se sigue la igualdad $\|x\| = \|1\| \cdot |x|$. Como $\| \ \|$ está dada, el valor de $\|1\|$ es fijo. Luego tomando $a = \|1\|$ tenemos que $\|x\| = a \cdot |x|$ □

La conclusión se sigue al corroborar la Ley del paralelógramo.

Problema 1.6. *A fin de que una métrica d, en un espacio vectorial E, sea proveniente de una norma, es necesario y suficiente que, para $x, a \in E$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ arbitrarios se tenga $d(x+a, y+x) = d(x,y)$ y $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x,y)$.*

Demostración. □

Problema 1.7. *Muestre que si X tiene más de un elemento entonces la norma $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$ no proviene de un producto interno en $\mathcal{B}(X;\mathbb{R})$. Concluya lo mismo para la norma $|x|'' = \text{máx}\,\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$*

Demostración. Si X posee un elementos las funciones son constantes y por ende se tiene la Ley del Paralelógramo. Para f y g en $\mathcal{B}(X;\mathbb{R})$ es conocida la desigualdad

$$\sup_X(f+g) \leq \sup_X(f) + \sup_X(g).$$

Se sigue que $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$ y $\|f-g\| \leq \|f\| + \|g\|$. Elevanto al cuadrado (dado qe dichas cantidades son positivias) y sumando se obtiene $\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 \leq 2(\|f\|^2 + \|g\|^2) + 4\|f\|\|g\|$ □

Problema 1.8. *Sea $X \subset \mathbb{R}^2$ tal que la métrica euclidiana induce en X la métrica cero-uno. Pruebe que X tiene a lo más tres elementos. Y si fuese $X \subset \mathbb{R}^3$? Generalice para $\mathbb{R}^n$. Usted puede imaginar un espacio vectorial normado E y un subconjunto infinito $X \subset E$ tal que $x \neq y$ en X implique $d(x,y) = 1$?*

Demostración. □

Problema 1.9. *Sea E un espacio vectorial dotado de un producto interno. Dados $x, y \in E$, pruebe que $|\langle x, y\rangle| = |x| \cdot |y|$, si y sólo si, x e y son linealmente dependientes.*

Demostración. Archiconocido □

Problema 1.10. *En un espacio vectorial normado E, si $c - a = t \cdot (b-a)$,con $t \geq 1$, entonces $d(a,c) = d(a,b) + d(b,c)$. En el plano, con una norma $|(x,y)| = |x| + |y|$, tome $a = (0,1)$, $b = (0,0)$ y $c = (1,0)$ para mostrar que la recíproca no es verdadera en todo espacio vectorial normado.*

Demostración. □

Problema 1.11. *Sean a, b, c tres puntos distintos en un espacio vectorial E, dotado de un producto interno. Si $d(a,c) = d(a,b) + d(b,c)$ entonces $c - a = t \cdot (b-a)$ con $t \geq 1$.*

Demostración. □

Problema 1.12. *En todo espacio métrico M se tiene:*

$$B[a;r] = \bigcap_{s>r} B(a;s) = \bigcap_{n=1}^{\infty} B\left(a; r + \frac{1}{n}\right),$$

y

$$\{a\} = \bigcap_{r>0} B(a;r) = \bigcap_{n=1}^{\infty} B\left(a; \frac{1}{n}\right).$$

Escriba, dualmente, cada bola abierta de M como unión de bolas cerradas.

Demostración.

$$\begin{aligned} x \in B[a,r] \quad &\Leftrightarrow \quad d(a,x) \leq r, \\ &\Leftrightarrow \quad d(a,x) < r + \varepsilon = s, \ \forall \varepsilon > 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x \in \bigcap_{s>r} B\left(a,s\right), \\ &\Leftrightarrow \quad d(a,x) < r + \frac{1}{n}, \ \forall n \in \mathbb{N} \\ &\Leftrightarrow \quad x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B\left(a, r + \frac{1}{n}\right), \end{aligned}$$

La segunda igualdad es consecuencia de la primera, considerando $r = 0$. Lo último que nos piden es

$$B(a;r) = \bigcup_{n=1}^{\infty} B\left[a; r - \frac{1}{n}\right]$$

□

Problema 1.13. *Un punto $a = (a_1, \ldots, a_n)$ es aislado en el producto cartesiano $M = M_1 \times \ldots \times M_n$ si y sólo si cada coordenada a_i es un punto aislado en M_i. Concluya que el producto cartesiano $M_1 \times \ldots \times M_n$ es discreto si y sólo si cada factor M_i es discreto.*

Demostración. Si cada a_i es aislado entonces existe $r_i > 0$ tal que $B(a_i; r_i) = \{a_i\}$. Considerando la métrica

$$d((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) = \max_{1 \leq i \leq n} d(x_i, y_i),$$

y tomando $r = \min\{r_i\}$, se sigue que

$$B(a;r) = B(a_1;r) \times \ldots \times B(a_n;r) = \{a_1\} \times \ldots \times \{a_n\} = \{a\}.$$

En consecuencia a es aislado en M.

Si a es aislado por definición exite $r > 0$ tal que $B(a;r) = \{a\}$. Supongamos que existe j tal que a_j no es aislado. Luego, existe a'_j tal que $d(a_j, a'_j) < r$. Esto nos da un punto $a' = (a_1, \ldots, a_{j-1}, a'_j, a_{j+1}, \ldots, a_n)$ distinto de a tal que $a' \in B(a;r)$, lo cual es una contradición. $\square$

Problema 1.14. *Todo espacio métrico finito es discreto.*

Demostración. Supongamos que M no es discreto. Luego existe $x \in M$ que no es aislado. Por definición para cada número positivo, en particular $\frac{1}{n}$ con $n \in \mathbb{N}$, existe un $x_n \in M$ tal que $0 < d(x, x_n) < \frac{1}{n}$ y $d(x, x_n) > \frac{1}{n+1}$. Así $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$, por lo tanto el conjunto $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ está contenido en M y es infinito lo cual es una contradicción. $\square$

Problema 1.15. *Sea X un conjunto infinito numerable. Muestre que se puede definir una métrica en X, respecto de la cual ningún punto es aislado.*

Demostración. Note que en $\mathbb{Q}$ con la métrica del valor absoluto ninguno de sus puntos es aislado. Sea X un conjunto infinito numerable, es decir $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Como $\mathbb{Q}$ también es infninito numerable lo escribimos como $\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, \ldots\}$. Dado esto existe una biyección natural entre X y $\mathbb{Q}$ dada por $f(x_i) = q_i$. Así, f induce en X la métrica

$$d(x_i, x_j) = |f(x_i) - f(x_j)| = |q_i - q_j|,$$

obteniendo lo pedido. $\square$

Problema 1.16. *De un ejemplo de dos subconjuntos discretos $X, Y \subset \mathbb{R}$ tales que $X \cup Y$ no sea discreto.*

Demostración. Tome $X = \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ e $Y = \{0\}$. Es claro que Y es discreto. Para $\dfrac{1}{n} \in X$ basta tomar $r = \frac{1}{n(n+1)}$ para notar que $B_X\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n(n+1)}\right) = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ y concluir que por ende X es discreto. Luego $X \cup Y$ no es discreto dado que, es sabido, 0 es punto de acumulación de X. $\square$

Es fácil ver como este contraejemplo al mismo tiempo da una receta para encontrar los ejemplos pedidos.

Problema 1.17. *Si $b \notin B[a;r]$ pruebe que existe $s > 0$ tal que $B[a;r] \cap B[b;s] = \emptyset$*

Demostración. Como $b \notin B[a;r]$ entonces $d(a,b) > r$, es decir $d(a,b) - r > 0$. Esto implica que existe s tal que $0 < s < d(a,b) - r$. Así, $s + r < d(a,b)$, y por ende las bolas cerradas $B[a;r]$ y $B[b;s]$ son disjuntas $\square$

Problema 1.18. *En un espacio métrico M sea $b \in B(a;r)$. Pruebe que existe una bola abierta de centro b contenida en $B(a;r)$. Dé un contra-ejemplo mostrando que esto podría ser falso si $b \in B[a;r]$.*

Demostración. Sea $s = r - d(a,b) > 0$, y sea $x \in B(b;s)$. Así $d(b,x) < s = r - d(a,b)$. Luego

$$r > d(a,b) + d(b,x) \geq d(a,x),$$

es decir que $d(a,x) < r$, por lo que $x \in B(a;r)$. Se concluye que $B(b,s) \subset B(a;r)$.

Para el contraejemplo considere $B[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] = [0,1]$ en $M = \mathbb{R}$. Tome $b = 1$. $\square$

Problema 1.19. *Sea M un espacio métrico. La diagonal $\Delta \subset M \times M$ es el conjunto de los pares $(x,x) \in M \times M$ con coordenadas iguales. Pruebe que si $z \in M \times M - \Delta$ entonces existe una bol abierta de centro z en $M \times M$ que es disjunta de Δ.*

Demostración. Sea $z = (z_1, z_2) \in M \times M - \Delta$. Razonemos por contradicción y supongamos que para todo $r > 0$ se tiene que $B(z;r) \cap \Delta \neq \emptyset$.

Usando la métrica sugerida en el problema esto significa que si tomamos $x = (x', x')$ en dicha intersección entonces tendremos que $d(z,x) < r$, lo que equivale a $d(z_1, x') < r$ y $d(z_2, x') < r$.

Tomando $r = \frac{d(z_1,z_2)}{2}$ (que es positivo ya que $z_1 \neq z_2$) nos queda que $d(z_1, x') < \frac{d(z_1,z_2)}{2}$ y $d(z_2, x') < \frac{d(z_1,z_2)}{2}$. Sumando:

$$\begin{aligned} d(z_1, z_2) &= \frac{d(z_1,z_2)}{2} + \frac{d(z_1,z_2)}{2}, \\ &> d(z_1, x') + d(z_2, x'), \\ &> d(z_1, z_2), \end{aligned}$$

lo cual es una contradicción. $\square$

Problema 1.20. *Usando la métrica $d[(x,y),(x',y')] = \text{máx}\{d(x,x'), d(y,y')\}$ muestre que la esfera de centro (a,b) y radio r en $M \times N$ es igual a $(B[a;r] \times S(b;r)) \cup (S(a;r) \times B[b;r])$.*

Demostración. Sea $(x, y) \in S((a, b); r)$. Por esto $d((x, y), (a, b)) = r$, donde, recordemos, r es el máximo entre $d(x, a)$ y $d(y, b)$, es decir

$$d(x, a) \leq r, \text{ y } d(y, b) \leq r.$$

De aquí tenemos dos casos:

- Si $d(x, a) < r$, entonces $d(y, b) = r$. Así $(x, y) \in B[a; r] \times S(b; r)$.
- Si $d(x, a) = r$, entonces $d(y, b) \leq r$. Así $(x, y) \in S(a; r) \times B[b; r]$.

Así

$$(x, y) \in (B[a; r] \times S(b; r)) \cup (S[a; r] \cup B[b; r]),$$

y en consecuencia

$$S((a, b); r) \subset (B[a; r] \times S(b; r)) \cup (S[a; r] \times B[b; r]).$$

Si $(x, y) \in (B[a; r] \times S(b; r)) \cup (S[a; r] \times B[b; r])$, entonces, $d(a, x) \leq r$ y $d(b, y) \leq r$, por lo que $(x, y) \in S((a, b); r)$ en cualquiera de ambos casos pues al menos uno es r. □

Problema 1.21. *Sea $X \subset M$ un subconjunto discreto. Obtenga para cada $x \in X$, una bola abierta $B_X = B(X; r_x)$ en M, de tal modo que $x \neq y \Rightarrow B_x \cap B_y = \emptyset$.*

Demostración. Dado que X es un subconjunto discreto, para cada x existe un radio $r_x > 0$ tal que $B(x; r_x) = \{x\}$. □

Problema 1.22. *Sea X un subconjunto de un espacio métrico M y un número real $r > 0$, sea $B(X; r) := \bigcup_{x \in X} B(x; r)$. Pruebe que $B(X \cap Y) \subset B(X; r) \cap B(Y; r)$ y que $B(X \cup Y; r) = B(X; r) \cup B(Y; r)$*

Demostración. Probemos que $B(X \cap Y; r) \subset B(X; r) \cap B(Y; r)$.

Sea $a \in B(X \cap Y; r) = \bigcup_{z \in X \cap Y} B(z; r)$, por lo que existe $z \in X \cap Y$ tal que

$$a \in B(z, r) \subset B(X; r) \text{ y } a \in B(z, r) \subset B(Y; r).$$

Luego, $a \in B(X; r) \cap B(Y; r)$.

Es claro que

$$B(X, r) = \bigcup_{x \in X} B(x; r) \subset \bigcup_{x \in X \cup Y} B(x; r) = B(X \cup Y; r).$$

Por otro lado, sea $a \in B(X \cup Y; r) = \bigcup_{z \in X \cup Y} B(z; r)$, entonces existe $z \in X \cup Y$ tal que $a \in B(z; r)$. Sin pérdida de generalidad $z \in X$. Luego $a \in B(z; r) \subset B(X; r)$. Por lo tanto $B(X \cup Y; r) \subset B(X; r) \cup B(Y; r)$ □

Problema 1.23. *Dé un ejemplo de un conjunto acotado $X \subset \mathbb{R}$ tal que no existan $x, y \in X$ con $|x - y| = diam(X)$.*

Demostración. Considere el intervalo abierto (a, b) □

Problema 1.24. *Sea M un espacio métrico acotado. Muestre que para cada $a \in M$ existe una bola $B[a; r]$ cuyo diámetro es menor que $2r$.*

Demostración. Ya que M es acotado sea $r = diam(M)$. Luego, si $a \in M$ entonces $diam(B[a; r]) < 2r$, en efecto, $d(x, y) < r < 2r,\ x, y \in B[a; r]$. □

Problema 1.25. *Sea $p(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$ ($a_n \neq 0$) un polinomio de grado $n > 0$. Muestre que la función $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ no es acotada pero para todo subconjunto acotado $X \subset \mathbb{R}$ la restricción $p|X$ es acotada.*

Demostración. □

Problema 1.26. *Sea a un punto y C un subconjunto de un espacio métrico. Suponga que $d(a, C) = 2$ y pruebe que existe una bola abierta $B(a; r)$ tal que $d(x, C) > 1$ para todo $x \in B(a; r)$*

Demostración. Dado que $d(a, C) = 2$ al tomar $B(a; r)$ con $r < 1$ se tiene que $B(a; r) \cap C = \emptyset$. Luego, recordando que para todo $x \in B(a; r)$

$$|d(a, C) - d(x, C)| \leq d(a, x),$$

se sigue que $d(x, C) > 1$ □

Problema 1.27. *Sea $F = M - B(a; r)$ el complemento de una bola abierta en el espacio métrico M. Si $d(x, F) = 0$ entonces $x \in F$.*

Demostración. Razonemos por contradicción. Supongamos que $x \notin F$. En consecuencia $x \in B(a; r)$, lo que equivale a que, por el Problema 18, exista s tal que $B(x; s) \subset B(a; r)$. Luego $B(x; s) \cap F = \emptyset$, y de esto se sigue que dado cualquier elemento $y \in F$ tenemos que $y \notin B(x; s)$, implicando que $d(x, y) > s$, para todo $y \in F$. Esto último contradice que $d(x, F) = 0$ □

Problema 1.28. *Sea* $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n; x_{p+1} = \ldots = x_n = 0\}$*. Usando en* $\mathbb{R}^n$ *la métrica euclidiana pruebe que si* $a = (a_1, \ldots, a_n)$ *entonces* $d(a,X) = \sqrt{a_{p+1}^2 + \ldots + a_n^2}$.

Demostración. Sea $\alpha = \sqrt{a_{p+1}^2 + \ldots + a_n^2}$. Empecemos notando que

$$d(x,a) = \sqrt{\sum_{i=1}^{p}(a_i - x_i)^2 + \sum_{i=p+1}^{n} a_i^2},\ \forall x \in X.$$

Luego es claro que

$$\alpha \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{p}(a_i - x_i)^2 + \sum_{i=p+1}^{n} a_i^2}.$$

Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe $(x_1, \ldots, x_n) = x \in \mathbb{R}^n$ tal que $\sqrt{\sum_{i=1}^{p}(x_i - a_i)^2} < \varepsilon$. Luego, tomando $x' = (x_1, \ldots, x_p, 0, \ldots, 0)$, tenemos que:

$$\begin{aligned} d(a,x) &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^{p}(a_i - x_i)^2 + \sum_{i=p+1}^{n} a_i^2}, \\ &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^{p}(a_i - x_i)^2} + \alpha, \\ &< \varepsilon + \alpha. \end{aligned}$$

Por lo tanto $d(a,X) = \alpha$. □

Problema 1.29. *Pruebe que se tiene* $d(a,X) = \inf\{r > 0; a \in B(X;r)\}$.

Demostración. Sean $\alpha = d(a;X)$, y $\beta = \inf\{r > 0;\ a \in B(X;r)\}$. Empecemos notando que $r' \in \{r > 0;\ a \in B(X;r)\}$ implica la existencia de un $x \in X$ tal que $d(a,x) < r$. Así, dado que $\alpha \leq d(a,x)$, para todo $x \in X$ se tiene que $\alpha < r$ para todo $r \in \{r > 0;\ a \in B(X;r)\}$ entonces $\alpha \leq \beta$.

Ahora probemos que el símbolo $<$ no vale. Supongamos que $\alpha < \beta$, entonces tomando el promedio, sabemos que $\alpha < \frac{\alpha+\beta}{2} < \beta$. Luego, $a \notin B\left(x; \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$, para todo $x \in X$. Es decir, $d(a,x) \geq \frac{\alpha+\beta}{2}$ para todo $x \in X$. Como $\alpha = d(a,X)$ entones $\frac{\alpha+\beta}{2} \leq \alpha$. Esto es una contradicción. Por lo tanto $\alpha = \beta$ □

Problema 1.30. *Dé un ejemplo de conjuntos no vacíos tales que* $A \cap B = \emptyset$ *y* $d(A, B) = 0$

Demostración. Considere $A = (0, 1)$ y $B = \{1\}$. $\square$

Un ejemplo genérico se consigue al tomar un conjunto que no sea cerrado y luego algún punto de su frontera.

Problema 1.31. *En un espacio vectorial* E *dos bolas abiertas (cerradas) de mismo radio son isométricas. Más precisamente existe una isometría de* E *que lleva una de esas bolas en la otra. Muestre que para espacios métricos este resultado es falso.*

Demostración. Sean $u, v \in E$ y $r > 0$. Probemos que $B(u; r)$ y $B(v; r)$ son isométricas. Sea $\varphi : B(u; r) \to B(v; r)$ definida por $\varphi(x) = x + v - u$. Es claro que φ es una biyección. Dados $x, y \in E$, entonces

$$\begin{aligned} \|\varphi(x) - \varphi(y)\| &= \|x + v - u - (y + v - u)\|, \\ &= \|x - y\|, \end{aligned}$$

por lo tanto es isometría de E. Ahora probemos que $\varphi(B(u; r)) = B(v; r)$. Sea $x \in B(u; r)$ entonces $\|\varphi(x) - v\| = \|x - u\| < r$, por lo que, en efecto, $\varphi(x) \in B(v; r)$. Sea $y \in B(v; r)$, como φ es biyectiva, existe $x \in E$ tal que $\varphi(x) = y$. Luego $\|x - u\| = \|y - v\| < r$, por lo que $x \in B(u; r)$ $y \in \varphi(B(u; r))$ $\square$

Problema 1.32. *Pruebe que se tiene* $d(a, X) = \inf \{r > 0; a \in B(X; r)\}$.

Demostración. Sean $\alpha = d(a; X)$, y $\beta = \inf \{r > 0;\ a \in B(X; r)\}$. Empecemos notando que $r' \in \{r > 0;\ a \in B(X; r)\}$ implica la existencia de un $x \in X$ tal que $d(a, x) < r$. Así, dado que $\alpha \leq d(a, x)$, para todo $x \in X$ se tiene que $\alpha < r$ para todo $r \in \{r > 0;\ a \in B(X; r)\}$ entonces $\alpha \leq \beta$.

Ahora probemos que el símbolo $<$ no vale. Supongamos que $\alpha < \beta$, entonces tomando el promedio, sabemos que $\alpha < \frac{\alpha+\beta}{2} < \beta$. Luego, $a \notin B\left(x; \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$, para todo $x \in X$. Es decir, $d(a, x) \geq \frac{\alpha+\beta}{2}$ para todo $x \in X$. Como $\alpha = d(a, X)$ entones $\frac{\alpha+\beta}{2} \leq \alpha$. Esto es una contradicción. Por lo tanto $\alpha = \beta$ $\square$

Problema 1.33. *Sea* E *un espacio vectorial con producto interno. Dada una transformación lineal* $T : E \to E$ *las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) T *es una inmersión isométrica.*

(b) $|T\cdot x| = |x|$ *para todo* $x \in E$.

(c) $< T\cdot x, T\cdot y > = < x, y >$

Si la dimensión de E *es finita, en estas condiciones* T *es una isometría.*

Demostración. $(a) \Longrightarrow (b)$ Dado que T es una inmersión isométrica se tiene que $|Tu - Tv| = |u - v|$, como T es lineal $Tu - Tv = T(u-v)$. Haciendo $x = u - v$ se tiene $|Tx| = |x|$

$(b) \Longrightarrow (c)$

$$\begin{aligned} < Tx, Ty > &= \frac{|Tx+Ty|^2 - |Tx-Ty|^2}{4}, \\ &= \frac{|T(x+y)|^2 - |T(x-y)|^2}{4}, \\ &= \frac{|x+y|^2 - |x-y|^2}{4}, \\ &= < x, y > . \end{aligned}$$

□

$(c) \Longrightarrow (a)$

$$\begin{aligned} d(Tu, Tv) &= |T(u-v)|, \\ &= \sqrt{< T(u-v), T(u-v) >}, \\ &= \sqrt{< u-v, u-v >}, \\ &= |u-v|, \\ &= d(u,v). \end{aligned}$$

Ahora demostremos que T es sobreyectiva, es decir, que dado $v \in E$ existe $u \in E$ tal que $T(u) = v$. Como E es de dimensión finita, tenemos que $v = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_k u_k = \alpha_1 T(v_1) + \ldots + \alpha_k T(v_k) = T(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k)$

Problema 1.34. *Sea* $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; < x, x > = 1\}$ *la esfera unitaria n-dimensional. El espacio proyectivo de dimensión n es el conjunto* P^n *cuyos elementos son los pares no ordenados* $[x] = \{x, -x\}$*, donde* $x \in S^n$*. Note que* $[x] = [-x]$*. Más precisamente* $[x] = [y]$ *entonces* $x = \pm y$*. Defina* $d([x],[y]) = \min\{|x-y|, |x+y|\}$ *y muestre que* d *es una métrica en* P^n*. Muestre que la aplicación natural* $\pi : S^n \to P^n$*, definida por* $\pi(x) = [x]$ *cumple la condición* $d(\pi(x), \pi(y)) \leq d(x,y)$*. Muestre también que, si* $X \subset S^n$ *es tal que* $diam(X) \leq \sqrt{2}$*, entonces la restricción* $\pi|X$ *es una inmersión isométrica de* X *en* P^n*.*

Demostración. (I) Si $[x] = [y]$ entonces $d([x],[y]) = \min\{0, 2|x|\} = 0$. Si $0 = d([x],[y])$ entonces $0 = \min\{|x-y|, |x+y|\}$. En cualquier caso se deduce que $x = \pm y$, por lo que $[x] = [y]$.

(II) Si $[x] \neq [y]$ entonces $x \neq \pm y$. Luego $|x-y| > 0$ y $|x+y| > 0$, por lo que $0 < \text{mín}\{|x-y|, |x+y|\} = d([x],[y])$.

(III)

(IV) $d([x],[y]) \leq d([x],[z]) + d([z],[y])$

Según la definición de π se tiene que :

$$d(\pi(x), \pi(y)) = d([x],[y]) = \text{mín}\{|x-y|, |x+y|\} \leq |x-y| = d(x,y).$$

Queremos demostrar que $d(\pi(x), \pi(y)) = d(x,y)$, sabiendo que

$$diam(X) = \sup_{x,y \in S^n} d(x,y) \leq \sqrt{2}$$

□

---

2. Funciones contínuas

Problema 2.1. *Sean $f, g : M \to \mathbb{R}$ contínuas en un punto $a \in M$. Si $f(a) < g(a)$, existe $\delta > 0$ tal que, para $x, y \in M$, $d(x,a) < \delta$, $d(y,a) < \delta$ entonces $f(x) < f(y)$. Enuncie explícitamente el corolario que se obtiene tomando $f(x) = 0$ para todo $x \in M$. Concluya que si $B \subset M$ es una bola cerrada y $c \in M - B$ entonces existe una bola abierta (y por lo tanto una bola cerrada) B', de centro c tal que $B' \cap B = \emptyset$*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Como f y g son continuas en a entonces existen $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$ tales que

$$f(B(a, \delta_1)) \subset (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon),$$

y

$$g(B(a, \delta_1)) \subset (g(a) - \varepsilon, g(a) + \varepsilon).$$

Tomando $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$ sea $x \in B(a, \delta)$ entonces

$$f(x) - g(x) > f(a) - \varepsilon - g(a) - \varepsilon > f(a) - g(a) > 0.$$

Acabamos de probar lo pedido.

Si el resultado se aplica para $f : M \to \mathbb{R}$ con $f(x) = 0$ para todo $x \in M$, que es continua, y otra función $g : M \to \mathbb{R}$ contienua en a con $g(a) > 0$ entonces existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in M$ tal que $d(x,a) < \delta$ se tiene que $g(x) > 0$.

Sea B una bola cerrada de radio r. Considere la función $d_B : M \to \mathbb{R}$ definida por $d_B(x) = d(x, B)$. Dicha función es continua pues es una contracción débil, así, si $c \in M - B$ entonces $d_B(c) > r$, luego existe una bola centrada en c de manera que $d_B(x) > r$, $\forall x \in B(c; r')$ para algún $r' > 0$. Es decir, $B \cap B' = \emptyset$.

□

Problema 2.2. *Sean $f, g : M \to N$ continuas en el punto $a \in M$. Si $f(a) \neq g(a)$ entonces existe una bola abierta B de centro a tal que $f(B) \cap g(B) = \emptyset$.*

Demostración. Dado que $f(a) \neq g(a)$ entonces $d(f(a), g(a)) > 0$. Sea $\varepsilon < \frac{d(f(a),g(a))}{2}$, entonces $B(f(a), \varepsilon) \cap B(g(a), \varepsilon) = \emptyset$. Luego como f y g son continuas existe $\delta > 0$ tal que

$$f(B(a;\delta)) \subset B(f(a), \varepsilon), \text{ y } g(B(a;\delta)) \subset B(g(a), \varepsilon).$$

Se sigue que $f(B(a;\delta)) \cap g(B(a;\delta)) = \emptyset$. □

Problema 2.3. *Sean $f, g : M \to N$ continuas. Dado $a \in M$, suponga que toda bola de centro a contiene punto x tal que $f(x) = g(x)$. Concluya que $f(a) = g(a)$. Use este hecho para demostrar que si $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son continuas y $f(x) = g(x)$ para todo x racional entonces $f = g$.*

Demostración. Supongamos que $f(a) \neq g(a)$, luego existe una bola B centrada en a de manera que $f(x) \neq g(x)$, $\forall x \in B$, lo cual es una contradicción.

Dada la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ se dedude lo que nos piden.

Problema 2.4. *Sea $f : M \to N \times N$ continua y $\Delta \subset N \times N$ la diagonal. Pruebe que $f^{-1}(N \times N - \Delta)$ es una unión de bolas abiertas en M.*

Demostración. Sea $x \in f^{-1}(N \times N - \Delta)$. Así $f(x) \in N \times N - \Delta$. Por el problema 19, capítulo 1, sabemos que existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(f(x); \varepsilon) \subset N \times N - \Delta$. Luego, dada la continuidad de f sabemos que existe $\delta > 0$ tal que

$$f(B(x;\delta)) \subset B(f(x); \varepsilon).$$

Por transitividad $f(B(x;\delta)) \subset N \times N - \Delta$. Luego $B(x;\delta) \subset f^{-1}(N \times N - \Delta)$. Así

$$\bigcup_{x \in f^{-1}(N \times N - \Delta)} B(x;\delta_x) = f^{-1}(N \times N - \Delta)$$

Problema 2.5. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x \operatorname{sen}(1/x)$, si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$ si $x = 0$. Muestre que f es continua en el punto 0 pero que no es lipchitziana.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Note que $|\operatorname{sen}(1/x)| \leq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Tome $\delta = \varepsilon$. Así, si $|x| < \delta$ entonces $|x \operatorname{sen}(1/x) - f(0)| = |x \operatorname{sen}(1/x)| < \delta = \varepsilon$. Se concluye la continuidad de f en 0.

□

Problema 2.6. *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ derivable en el intervalo I. Si f es lipchitziana entonces su derivada es acotada en el intervalo I.*

Demostración. Dado que f es tiene derivada en todos los puntos del intervalo I, entonces existe el límite $\lim_{x\to y} \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$, que es igual a f, entonces existe el límite del valor absoluto, que es igual a $|f'|$. Como f es lipchitziana entonces existe $K > 0$ tal que $\left|\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| < K$, $\forall x, y \in I$. Así

$$|f'| = \lim_{x\to y} \left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| < \lim_{x\to y} K = K.$$

Luego f' está acotada en el intervalo I, demostrando lo pedido □

Problema 2.7. *Sean I, J intervalos arbitrarios de la recta y $f : I \to J$ una biyección tal que $x < y$ implica $f(x) < f(y)$. Pruebe que f (y consecuentemente f^{-1}) es continua.*

Demostración. Sean $\varepsilon > 0$ y $a \in I$ tales que $(f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon) = B \subset J$. Sean $f(u), f(v) \in B$ tales que $f(u) < f(a) < f(v)$, es decir, $u < a < v$. Luego, es claro que si $t \in I$ es tal que $u < t < v$ entonces $f(t) \in B$. Esto implica que el conjunto $f^{-1}(B(f(a); \varepsilon)$ es un intervalo, por lo tanto, existe $\delta > 0$ tal que $f((a - \delta, a + \delta)) \subset B$, probando que f es continua en a y dada la arbitrariedad de a, concluimos que f es continua en I □

Problema 2.8. *Sea $f : X \to \mathbb{R}$ continua definida en un subconjunto $X \subset \mathbb{R}$. Suponga que $P = \{x \in X;\ f(x) > 0\}$ es acotada y no vacío. Sean $a = \inf P$ y $b = \sup P$. Pruebe que si $a, b \in X$ entonces $f(a) \leq 0$ y $f(b) \leq 0$*

Demostración. Razonemos por contradicción y supongamos $f(a) < 0$. Dado que f es continua en X existe una bola B de radio ε centrada en a tal que $f(x) < 0$, $\forall x \in B$. Pero dado que a es el ínfimo de X existe $x \in X$ tal que $a \leq x < a + \varepsilon$. Así $f(x) > 0$ y $f(x) < 0$, lo cual es una contradicción. Razonamos de forma análoga para b □

Problema 2.9. *Dada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua, con $f(a)f(b) < 0$, sea $c = \sup\limits_{f(x)>0} \{x \in [a, b]\}$. Pruebe que $f(c) = 0$. Concluya de ahí que si $f : I \to \mathbb{R}$ es continua, entonces $f(I)$ es un intervalo.*

Demostración. Razonemos por contradicción y supongamos que $f(c) \neq 0$. Si $f(c) < 0$, al ser f continua existe $\varepsilon > 0$ tal que $f(x) < 0$ para todo $x \in (c-\varepsilon, c+\varepsilon) \subset [a, b]$. Por c ser supremo, existe x en dicho intervalo tal que $f(x) > 0$ lo cual es una contradicción. Si, en cambio, $f(c) > 0$, por el mismo argumento, existe $\varepsilon > 0$ tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in (c-\varepsilon, c+\varepsilon)$ y tomando $y \in (c, c+\varepsilon)$, se tiene que $y > c$ y $f(y) > 0$ contradiciendo el hecho de que c sea supremo. Por lo tanto $f(c) = 0$.

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ continua, donde I es un intervalo. Pobremos que el conjunto $f(I)$ es un intervalo. Sean $f(u), f(v) \in f(I)$ tales que $f(u) < f(v)$, probemos que si $t \in \mathbb{R}$ es tal que $f(u) < t < f(v)$ entonces $t \in f(I)$ $\square$

Problema 2.10. *Dados los espacios métricos M e N sea $v : \mathcal{B}(M; N) \times M \to N$ definida por $v(fx) = f(x)$. Muestre que v es continua en el punto $(f_x, x_0) \in \mathcal{B}(M; N) \times N$ si y sólo si $f_0 : M \to N$ es continua en x_0.*

Demostración. $\square$

Problema 2.11. *Sean M, N espacios métricos y $\varphi : M \to N$ cualquiera. Defina la aplicación $\varphi^* : \mathcal{B}(N; \mathbb{R}) \to \mathcal{B}(M; \mathbb{R})$ haciendo $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$. Demuestre que φ^* es una contracción débil.*

Demostración. Deseamos probar que, dadas $f, g \in \mathcal{B}(N; \mathbb{R})$, se tiene que

$$d(\varphi^*(f), \varphi^*(g)) \leq d(f, g)),$$

donde

$$d(\varphi^*(f), \varphi^*(g)) = \sup_{x \in M} d((f \circ \varphi)(x), (g \circ \varphi)(x)),$$

y

$$d(f, g) = \sup_{x \in N} d(f(x), g(x)).$$

Empecemos notando que $\varphi(M) \subset N$, y que además de eso

$$\sup_{x \in M} d(f(\varphi(x)), g(\varphi(x))) = \sup_{\varphi(x) \in N} d(f(\varphi(x)), g(\varphi(x))),$$

por lo que es clara la contención

$$\{d(f(\varphi(x)), g(\varphi(x)));\ x \in N\} \subset \{d(f(\varphi(x)), g(\varphi(x)));\ x \in \varphi(M)\}.$$

Recordando que si $A \subset B$ entonces $\sup A \leq \sup B$, se concluye la desigualdad buscada y por ende que φ^* es una contracción débil $\square$

Problema 2.12. *Dado un conjunto arbitrario X, defina la aplicación*

$$V : \mathcal{B}(X;\mathbb{R}) \to \mathcal{B}(X;\mathbb{R}),$$

poniendo $V(f) = |f|$, donde $|f|(x) = |f(x)|$. Pruebe que V es una contracción débil.

Demostración. Es sabido que para todos $x, y \in \mathbb{R}$ se tiene que $||x| - |y|| \leq |x - y|$. Así, dadas $f, g \in \mathcal{B}(X;\mathbb{R})$, tenemos que

$$||f(x)| - |g(x)|| \leq |f(x) - g(x)|.$$

Por un lado $|f(x)-g(x)| \leq \sup_{x\in X} |f(x)-g(x)|$. Por otro, y consecuencia de esto último, tenemos que $||f(x)| - |g(x)|| \leq \sup_{x\in X} |f(x) - g(x)|$, lo que implica que $\sup_{x\in X} |f(x) - g(x)|$ es una cota superior del conjunto $\{||f(x)| - |g(x)||; x \in X\}$. Luego

$$\begin{aligned} \sup_{x\in X} ||f(x)| - |g(x)|| &\leq \sup_{x\in X} |f(x) - g(x)|, \\ d(V(f), V(g)) &\leq d(f, g), \end{aligned}$$

por lo tanto V es una contracción débil. □

Problema 2.13. *Dada $f : M \to N$, si existen constante $c > 0$ y $\alpha > 0$ tales que f cumple la çondición de Hölder"$d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y)^\alpha$, para todo $x, y \in M$, entonces se dice que f es hölderiana. Muestre que si f es hölderiana, entonces es continua. Muestre también que si $f : I \to \mathbb{R}$, cumple la condición de Hölder con $\alpha < 1$ entonces f es constante.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ y sea $a \in M$. Dado que f es hölderiana, se tiene que para todo $x \in M$

$$d(f(x), f(a)) \leq c \cdot d(x, a)^\alpha.$$

Considerando $\delta = \sqrt[\alpha]{\frac{\varepsilon}{c}}$, si $d(x, a) < \delta$, entonces se tiene que $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$, por lo tanto f es continua en $a \in M$. Dada la arbitrariedad de $a \in M$, se concluye que f es continua. □

Problema 2.14. *En un espacio métrico M sean, $F = B[a; r]$ y $G = M - B(a, s)$, donde $0 < r < s$. Muestre que*

$$f(x) = \frac{d(x, F)}{d(x, F) + d(x, G)},$$

es continua y , además de eso, $f^{-1}(0) = F$, $f^{-1}(1) = G$.

Demostración. No es difícil ver que f es continua al ver que es cuociente de dos funciones continuas.

Es claro que $F \subset f^{-1}(0)$. Ahora note que si $x \in f^{-1}(0)$ entonces $f(x) = 0$, es decir $d(x, F) = 0$. Esto implica que $x \in F$, pues F es cerrado. Por lo tanto $f^{-1}(0) = F$

Por otro lado, si $x \in f^{-1}(1)$ entonces $f(x) = 1$, es decir $d(x, G) = 0$. Como $B(a; s)$ es abierto, entonces $M - B(a; s) = G$ es cerrado, implicando que $x \in G$. Por lo tanto $f^{-1}(1) = G$.

□

Problema 2.15. *Sea $f : M \to N$ continua. Suponga que $a \in M$ sea tal que $m \neq n$ implique $f^m(a) \neq f^n(a)$. Pruebe que , para todo $p \in \mathbb{N}$, existe una bola B de centro a, tal que $1 \leq i \neq j \leq p$ implica $f^i(B) \cap f^j(B) = \emptyset$.*

Demostración. □

Problema 2.16. *Sean $f : M \to N$ y $g : N \to P$ continuas tales que $g \circ f : M \to P$ sea un homeomorfismo. Suponiendo que f sea sobreyectiva (o que g sea inyectiva) pruebe que f y g son ambos homeomorfismos.*

Demostración. Sea f sobreyectiva, probemos que f es inyectiva. Sean $x, y \in M$ tales que $f(x) = f(y)$, asi que $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$. Como $g \circ f$ es biyectiva se sigue que $x = y$. f es biyectiva. Se sigue que f^{-1} existe.

Como la composición de funciones biyectivas es biyectiva, entonces $g \circ f \circ f^{-1} = g$ es biyectiva y por ende g^{-1} existe. Por último note que f^{-1} es igual a la composición de funciones continuas $(g \circ f)^{-1} \circ g$, por lo que es continua y por ende f es homeo. Análogo para g. □

Problema 2.17. *Muestre que los siguientes espacios métricos son dos a dos homeomorfos:*

- $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = 1\}$ *(cilindro vertical)*
- $Y = S^1 \times \mathbb{R}$
- $Z = \mathbb{R}^2 - \{0\}$
- $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 1 < x^2 + y^2 < 2\}$
- $T = S^2 - \{p, q\}$ *donde* $p = (0, 0, 1)$ *e* $q = (0, 0, -1)$
- $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$

Respuestas. Las funciones homeomorfas son:

- $f : X \to Y$ definida por $f(x, y, z) = ((x, y), z)$.
- $g : Y \to Z$ definida por $g(x, y, z) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \ln(x^2 + y^2) \right)$

$\square$

Problema 2.18. *Establezca un homeomorfismo entre el "primer cuadrante" $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \geq 0\}$ y el semiplano $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \geq 0\}$*

sketch. La función que nos da el homeomorfismo asigna al par (x, y) del primer cuadrante el par (x', y') que es tal que $d((x, y), 0) = d((x', y'), 0)$ y posee el doble del argumento de (x, y). $\square$

Problema 2.19. *Muestre que $f : S^n \times R \to R^{n+1}$ dada por $f(x, t) = e^t x$ es un homeomorfismo y use este hecho para definir un homeomorfismo φ, de $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ sobre sí mismo, tal que $\varphi|S^n = id$ y $\varphi = \varphi^{-1}$ y $|\varphi(z)| > 1 \Leftrightarrow |z| < 1$*

Demostración. Sea $x = (x_1, \ldots, x_n) \in S^n$, entonces

$$f(x, t) = \left(x_1 e^t, \ldots, x_{n+1} e^t\right).$$

De aquí es fácil ver que cada función coordenada $f_i(x) = x_i e^t$ es continua y por ende, f es continua.

Si $(x, t_1), (y, t_2) \in S^n \times \mathbb{R}$ son tales que $f(x, t_1) = f(y, t_1)$, entonces $x_i e^{t_1 - t_2} = y_i$, $i = 1, \ldots, n+1$. Considerando que $y \in S^n$, entonces $\langle y, y \rangle = 1$, es decir $e^{2(t_1 - t_2)} \langle x, x \rangle = 1$. Pero $x \in S^n$, por lo que $\langle x, x \rangle = 1$. Luego $t_1 - t_2 = 0$, es decir, $t_1 = t_2$, implicando que $x_i = y_i$, $i = 1, \ldots, n+1$. Así f es inyectiva.

Para probar que f es sobre, entonces dado $y = (y_1, \ldots, y_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ basta tomar $x = (x_1, \ldots, x_{n+1})$ con $x_i = \frac{y_i}{\sqrt{y_1^2 + \ldots + y_{n+1}^2}}$ y $t = \frac{1}{2} \ln(y_1^2 + \ldots + y_{n+1}^2)$ para ver que $f(x, t) = y$.

f^{-1} está dada por

$$f^{-1}(y_1, \ldots, y_{n+1}) = \left(\frac{y_1}{|y|}, \ldots, \frac{y_n}{|y|}, ln(|y|^2) \right)$$

.

Sea $\varphi : \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \to \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ definida por $\varphi(x) = \frac{x}{|x|^2}$. Si $x \in S^1$ entonces $|x| = 1$ y así, $\varphi(x) = \frac{x}{|x|^2} = x$, y por ende $|\varphi(x)| = |x| = 1$ por lo que $\varphi(x)|S^1 = id$. Ahora tome

$x \in \mathbb{R}^{n+1}$ con $|x| > 1$, así $\dfrac{1}{|x|} < 1$ y por ende $\dfrac{1}{|x|^2} < 1$. Luego $|\varphi(x)| = \left|\dfrac{x}{|x|^2}\right| = \left|\dfrac{1}{|x|}\right| < 1$. El otro caso es análogo.

Estamos listos.

$\square$

---

3. Lenguaje básico de la topología

Problema 3.1. *La frontera de un conjunto abierto tiene interior vacío. Recíprocamente, todo subconjunto $X \subset M$ cerrado, con interior vacío, es frontera de algún abierto en M.*

Demostración. Sea $A \subset M$ abierto y supongamos que existe $x \in \operatorname{int} \partial A$. De este modo, existe $r > 0$ tal que $B(x;r) \subset \partial A$, pero dado que $x \in \partial A$, también

$$B(x;r) \cap \operatorname{int} A = B(x;r) \cap A \neq \emptyset,$$

lo cual es una contradicción pues ∂A e $\operatorname{int} A$ son disjuntos.

Sea F cerrado con $\operatorname{int} F = \emptyset$. Así para todo $r > 0$ se tiene que $B(x;r) \cap F \neq \emptyset$ y $B(x;r) \cap (M - F) \neq \emptyset$. Ahora bien, como $\operatorname{int} F = \emptyset$, también se tiene que $M = \partial(M - F) \cup \operatorname{int}(M - F) = \partial(M - F) \cup (M - F)$. Así, si $x \in F \subset M$ entonces $x \in \partial(M - F)$, por lo que $F \subset \partial(M - F)$. La otra contensión es trivial. Luego $F = \partial(M - F)$, donde $M - F$ es abierto pues F es cerrado $\square$

Problema 3.2. *Si un conjunto y su complemento tienen interior vacío entonces la frontera de cada uno de ellos es el espacio entero.*

Demostración. Recordemos que para todo espacio métrico M y un subconjunto X cualquiera de él se cumple

$$M = int(X) \cup \partial X \cup int(M - X).$$

Dado que $int(X) = int(M - X) = \emptyset$, se concluye $\square$

Problema 3.3. *Sea M un espacio métrico. Dado $x \in M$, vale:*

(a) Todo conjunto que contiene una vecindad de x es una vecindad de x.

(b) La intersección de un número finito (o una unión de una familia cualquiera) de vecindades de x es una vecindad de x.

Demostración. (a) Sea V una vecindad de x y W un conjunto tal que $V \subset W$. Así se tiene que $\operatorname{int}(V) \subset \operatorname{int}(W)$. Luego, como $x \in \operatorname{int}(V)$ se sigue que $x \in \operatorname{int} W$.

(b) Sean $V_1, \ldots, V_n$ vecindades de x, es decir, que $x \in V_i$ con $x \in \operatorname{int} V_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Es inmediato de lo anterior que

$$x \in \bigcap_{i=1}^{n} V_i,$$

y

$$x \in \bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{int} V_i = \operatorname{int}\left(\bigcap_{i=1}^{n} V_i\right).$$

Se concluye que $\bigcap V_i$ es una vecindad de x

$\square$

Problema 3.4. *En un espacio vectorial normado E, pruebe que todo subespacio vectorial propio F tiene interior vacío. Concluya que, para todo $a \in E$, la variedad afin $a + F = \{a + x; x \in F\}$ tiene interior vacío.*

Demostración. Sea $f \in F$ y $r > 0$. Construiremos un vector $u \notin F$ tal que $\|f - v\| < r$. Dado que F es subespacio propio de E consideremos un vector linealmente independiente a F, digamos v. Sea $t < r$, entonces tomamos $u = f + \dfrac{v}{\|v\|}t$. Luego

$$\begin{aligned} \|u - f\| &= \left\| \frac{v}{\|v\|}t \right\|, \\ &= t < r. \end{aligned}$$

Así u es tal que $u \in B[f; r]$ y $u \notin F$. Por lo tanto F tiene interior vacío.

$\square$

Problema 3.5. *Todo abierto no vacío $A \subset \mathbb{R}^m$ contiene por lo menos un punto $x = (x_1, \ldots, x_m)$ cuyas coordenadas son racionales. Conluir que si $\mathcal{C}$ es una colección de abiertos no vacíos dos a dos disjuntos en $\mathbb{R}^m$ entonces $\mathcal{C}$ es numerable.*

Demostración. Sea A un abierto de $\mathbb{R}$, es decir, que A_i es abierto en $\mathbb{R}$ con $i = 1, \ldots m$. Así existe $r_i > 0$ tal que $B(a_i; r_i) \subset A_i$ con $i = 1, \ldots, m$ por lo que, dada la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$, en cada A_i existe al menos un racional. Luego, basta tomar un racional en cada bola y tenemos el punto buscado.

SKETCH: Dado que $\mathcal{C}$ es una familia de abiertos disjuntos en $\mathbb{R}^m$ entonces sabemos que cada cual posee al menos un punto de coordenadas racionales, distinto al que pueda poseer otro dado que en esta colección los abiertos son disjuntos. Así, como $\mathbb{Q}^m$ es numerable entonces cualquier subconjunto lo es, y como estamos considerando el subconjunto de $\mathbb{Q}^m$ tal que $q_j \mathbb{A}_\urcorner$ entonces $\mathcal{C}$ es numerable. $\square$

Problema 3.6. *No es cierto que* $X \subset Y \Rightarrow \partial X \subset \partial Y$. *Entre tanto, se tiene que* $\partial(\operatorname{int} S) \subset \partial S$

Demostración. Basta tomar $X = [0, 1)$ e $Y = (0, 1)$ para probar que $X \subset Y$ no implica que $\partial X \subset \partial Y$. Por otro lado sea $x \in \partial(\operatorname{int} S)$. Por definición $B(x; \varepsilon) \cap \operatorname{int} S \neq \emptyset$ y $B(x; \varepsilon) \cap (M - \operatorname{int} S) \neq \emptyset$. Como $\operatorname{int} S \subset S$ y por ende $M - \operatorname{int} S$ □

Problema 3.7. *Dados* $A \subset M$ *y* $B \subset N$ *se tiene* $\operatorname{int}(A \times B) = \operatorname{int}(A) \times \operatorname{int}(B)$ *e* $\partial(A \times B) = (\partial(A) \times B) \cup (A \times \partial(B))$

Demostración. La contención $\operatorname{int}(A) \times \operatorname{int}(B)$ es clara. Hagamos la otra dirección. Sea $x \in \operatorname{int}(A \times B)$. Por definición existe un abierto O de $A \times B$ tal que $x \in O \subset A \times B$. Si notamos $x = (a, b)$ entonces $O = B(a, \varepsilon_1) \times B(b, \varepsilon_2)$, de donde se sigue que $B(a, \varepsilon_1) \subset A$ y $B(b, \varepsilon_2) \subset B$. Por lo tanto $a \in \operatorname{int}(A)$ y $b \in \operatorname{int}(B)$, ergo $x \in \operatorname{int}(A) \times \operatorname{int}(B)$. □

Problema 3.8. *Sea* $f : M \to N$ *continua. Dados un subconjunto arbitrario* $X \subset M$ *y un abierto* V *en* N *con* $f(X) \subset V$, *pruebe que existe* $U \supset X$ *abierto en* M *tal que* $f(U) \subset V$.

Demostración. Por hipótesis f es continua, luego $f^{-1}(V)$ es abierto y además $X \subset f^{-1}(V)$. Dado lo anterior por cada $x \in X$ tomamos $r_x > 0$ tal que $B(x; r_x) \subset f^{-1}(V)$. No es difícil ver que

$$X \subset \bigcup_{x \in X} B(x; r_x) = U \subset f^{-1}(V).$$

Como U es unión arbitraria de abiertos, es abierto. Finalmente $f(U) \subset V$, demostrando lo pedido. □

Problema 3.9. *A fin de que una función* $f : M \to \mathbb{R}$ *sea continua es necesario y suficiente que, para todo* $a \in \mathbb{R}$ *sea abiertos en* M *los conjuntos* $X_a = \{x \in M \mid f(x) < a\}$ *e* $Y_a = \{x \in M \mid f(x) > a\}$.

Demostración. Si f es continua, entonces $X_a = f^{-1}(-\infty, a)$ e $Y_a = f^{-1}(a, +\infty)$ para todo $a \in \mathbb{R}$. Luego X_a e Y_a son abiertos para todo $a \in \mathbb{R}$. Recíprocamente, si X_a e Y_a son abiertos para todo a entonces dado $\varepsilon > 0$ y $c \in M$ entonces

$$f^{-1}(f(c) - \varepsilon, f(c) + \varepsilon) = X_{f(c)+\varepsilon} \cap Y_{f(c)-\varepsilon},$$

lo cual muestra que $f^{-1}(f(c) - \varepsilon, f(c) + \varepsilon)$ es abierto. Luego existe $\delta > 0$ tal que

$$(c - \delta, c + \delta) \subset f^{-1}(f(c) - \varepsilon, f(c) + \varepsilon),$$

equivalentemente

$$f(c-\delta, c+\delta) \subset (f(c)-\varepsilon, f(c)+\varepsilon).$$

Por lo tanto f es continua. $\square$

Problema 3.10. *Dada una función real continua $f : M \to \mathbb{R}$, considere el abierto $A = \{x \in M; f(x) > 0\}$. Muestre que, para todo $x \in \partial A$, se tiene que $f(x) = 0$. De un ejemplo en que se tenga $f(x) = 0$ con $x \notin \partial A$*

Demostración. Sea $x \in \partial(A)$. Dado que $M - A = \{x \in M;\ f(x) \leq 0\}$ es un conjunto cerrado, entonces se tiene

$$\partial(A) = \overline{A} \cap \overline{M-A} = \overline{A} \cap (M-A).$$

Así, $x \in M - A$, ergo $f(x) \leq 0$.

Si $f(x) < 0$, se tiene que existe $r > 0$ tal que $B(x; r) \subset (M - A)$, es decir, $B(x; r) \cap A = \emptyset$. Esto último es una contradicción pues $x \in \overline{A}$. Luego $f(x) = 0$.

$\square$

Problema 3.11. *Una aplicación $f : M \to N$ es contínua, si y sólo si, para todo $Y \subset N$, se tiene $f^{-1}(\operatorname{int}(Y)) \subset \operatorname{int} f^{-1}(Y)$.*

Demostración. Sea $y \in f^{-1}(\operatorname{int}(Y))$. Por definición $f(y) \in \operatorname{int}(Y)$, así, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(f(y); \varepsilon) \subset Y$. Como f es continua, existe $\delta > 0$ tal que

$$f(B(y; \delta)) \subset B(f(y); \varepsilon) \subset Y.$$

De aquí, se sigue que $B(y; \delta) \subset f^{-1}(Y)$. Luego $y \in \operatorname{int}(f^{-1}(Y))$. Por lo tanto

$$f^{-1}(\operatorname{int}(Y)) \subset \operatorname{int} f^{-1}(Y).$$

Recíprocamente, sea $A \subset N$ abierto. Probemos que $f^{-1}(A)$ es abierto. Sólo basta notar lo siguiente

$$\operatorname{int} f^{-1}(A) \subset f^{-1}(A) = f^{-1}(\operatorname{int} A) \subset \operatorname{int} f^{-1}(A),$$

donde la primera contención es por definición, la igualdad está dada porque A es un conjunto abierto y la segunda contención está dada por la hipótesis. Luego $f^{-1}(A) = \operatorname{int} f^{-1}(A)$, por lo tanto $f^{-1}(A)$ es abierto.

$\square$

Problema 3.12. *Una colección $\mathcal{V}$ de abiertos de un espacio topológico X se llama un sistema fundamental de vecindades abiertas (SFVA) de un punto $x \in X$ cuando*

1. *Todo $V \in \mathcal{V}$ contiene a x.*

2. *Todo abierto A en X que contiene x debe contener algún $V \in \mathcal{V}$.*

Pruebe que en un espacio métrico, las bolas abiertos $B\left(x; \frac{1}{n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$ forman un SFVA de x.

Demostración. Es evidente que $x \in B\left(x; \frac{1}{n}\right)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Ahora sea A un abierto conteniendo a x. Por definición existe $\delta > 0$ tal que $B(x; \delta) \subset A$. Por propiedad arquimediana existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \delta$. Así $B\left(x; \frac{1}{n}\right) \subset B(x; \delta) \subset A$. Por lo tanto la colección pedida forma un SFVA.

□

Problema 3.13. *Dados X,Y en un espacio métrico M, se tiene $\overline{U \cup Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$ y $\overline{X \cap Y} \subset \overline{X} \cap \overline{Y}$.*

Demostración. Sea $x \in \overline{X \cup Y}$. Para todo $\varepsilon > 0$

$$(B(x;\varepsilon) \cap X) \cup (B(x;r) \cap Y) = B(x;\varepsilon) \cap (X \cup Y) \neq \emptyset.$$

Esto implica que ambas intersecciones no pueden ser vacías simultáneamente. Sin pérdida de generalidad $B(x;\varepsilon) \cap X \neq \emptyset$. Luego $x \in \overline{X}$. Por lo tanto $\overline{X \cup Y} \subset \overline{X} \cup \overline{Y}$. Recíprocamente, si $x \in \overline{X}$ entonces para todo $\varepsilon > 0$ se tendrá que

$$B(x;\varepsilon) \cap (X \cup Y) \supset B(x;\varepsilon) \cap X \neq \emptyset.$$

Luego $x \in \overline{X \cup Y}$. Se concluye la igualdad pedida.

□

Problema 3.14. *Si $X \subset M$ e $Y \subset N$ entonces $\overline{X \times Y} = \overline{X} \times \overline{Y}$ en $M \times N$.*

Demostración. □

Problema 3.15. *Una función $f : M \to N$ es continua si y sólo para todo $X \subset M$ se tiene que $f\left(\overline{X}\right) \subset \overline{f(X)}$*

Demostración. Supongamos la continuidad de f. Sea $\overline{x} \in \overline{X}$. Dado $\varepsilon > 0$, como f es continua en M, existe $\delta > 0$ tal que para $x \in X$ con $d(x, \overline{x}) < \delta$ entonces $d(f(x), f(\overline{x})) < \varepsilon$. Como $\overline{x} \in \overline{X}$ entonces sea $x \in B(\overline{x}; \delta) \cap X \neq \emptyset$. Así $d(x, \overline{x}) < \delta$ y luego $d(f(x), f(\overline{x})) < \varepsilon$. Notando que $f(\overline{x}) \in f(\overline{X})$, hemos mostrado que para cualquier $\varepsilon > 0$ que siempre es posible obtener $f(x) \in f(X)$ tal que $d(f(\overline{x}), f(x)) < \varepsilon$, así $f(\overline{x}) \in \overline{f(X)}$.

Recíprocamente, sea $F \subset N$ cerrado. Probemos que $f^{-1}(F)$ es cerrado en M. Es claro que $f^{-1}(F) \subset \overline{f^{-1}(F)}$. Por otro lado, por hipótesis,

$$f(\overline{f^{-1}(F)}) \subset \overline{f(f^{-1}(F))} \subset \overline{F} = F.$$

Considerando la imagen inversa, $\overline{f^{-1}(F)} \subset F$, conluyendo que $f^{-1}(F) = \overline{f^{-1}(F)}$. Por lo tanto f es continua. □

Problema 3.16. *Una aplicación $f : M \to N$ se dice cerrada cuando para todo $F \subset M$ cerrado, su imagen $f(F)$ es cerrada en N. Pruebe que $f : M \to N$ es cerrada si y solamente si para todo $y \in N$ y todo abierto $V \supset f^{-1}(y)$ existe un abierto $U \subset M$ tal que $f^{-1}(y) \subset U \subset V$*

Demostración. Sea $y \in N$ y $V \subset M$ abierto tal que $f^{-1}(y) \subset V$. Dado que $M - V$ es cerrado y f es cerrada, $f(M - V)$ es cerrado y por ende $N - f(M - V)$ abierto. Note que $f^{-1}(y) \cap (M - V) = \emptyset$ implica $\{y\} \cap f(M - V) = \emptyset$, por lo que $y \in N - f(M - V)$. Como N-f(M-V) es abierto, existe un abierto U tal que $y \in U \subset N - f(M - V)$. Así, $U \cap f(M - V) = \emptyset$, implicando $U \subset f(V)$. □

Problema 3.17. *Sea $A \subset M$ abierto. Si $X \subset M$ es denso en M entonces $X \cap A$ es denso en A*

Demostración. Sea $U \subset A$ subconjunto abierto. Como A es abierto, U es abierto en M. Como X es denso en M, $U \cap X \neq \emptyset$, luego $U \cap (A \cap X) \neq \emptyset$. Por lo tanto, $A \cap X$ es denso en A. □

Problema 3.18. *$A \subset M$ es abierto si y solamente si $A \cap \overline{X} \subset \overline{A \cap X}$ para todo $X \subset M$.*

Demostración. Sea $A \subset M$ abierto y sea $x \in A \cap \overline{X}$. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $B(x; \varepsilon) \subset A$. Luego

$$B(x; \varepsilon) \cap (A \cap X) = B(x; \varepsilon) \cap X \neq \emptyset,$$

pues $x \in \overline{X}$.

Recíprocamente, si $A \subset M$ es tal que $A \cap \overline{X} \subset \overline{A \cap X}$, note que en particular si $X = M - A$ se tiene que $A \cap \overline{M - A} \subset \emptyset$, es decir $A \cap \overline{M - A} = \emptyset$. Sea $x \in A$. De este modo, $x \notin \overline{M - A}$, ni $x \notin \partial(A)$ recordando que $M = \text{int}(A) \cup \partial(A) \cup \text{int}\,(M - A)$, entonces $x \in \text{int}(A)$, por lo que $A = \text{int}(A)$. Ergo, A es abierto. □

Problema 3.19. *Si X es denso en M y $f : M \to N$ es una aplicación continua sobreyectiva, entonces $f(X)$ es denso en N.*

Demostración. Probaremos que toda bola abierta con centro en $f(X)$ contiene puntos de N, o sea $B(f(a);\varepsilon) \cap N \neq \emptyset$.

Sean $\varepsilon > 0$ y $a \in M$. Como f es continua en M, existe $\delta > 0$ tal que

$$f(B(a;\delta)) \subset B(f(a);\varepsilon).$$

Por la densidad de X en M, se tiene que $B(a;\delta) \cap X \neq \emptyset$. Además por la sobreyectividad de f entonces $f(M) = N$. Y recordando que para todos $A, B \subset M$ se cumple que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$, entonces:

$$\begin{aligned} f(B(a;\delta) \cap M) &\subset f(B(a;\delta)) \cap f(M), \\ &\subset B(f(a);\varepsilon) \cap N, \end{aligned}$$

o sea $f(B(a;\delta) \cap M) \subset B(f(a);\varepsilon) \cap N$, pero $f(B(a;\delta) \cap M)$ es no vacío. Se sigue que $B(f(a);\varepsilon) \cap N \neq \emptyset$, que era lo que queríamos □

Problema 3.20. *El derivado de cualquier $X \subset M$ es un subconjunto cerrado en M.*

Demostración. Sea $X \subset M$ y sea $x \in \overline{X'}$. Por definición $B(x;\varepsilon) \cap X' \neq \emptyset$, para todo $\varepsilon > 0$. Si $B(x;\varepsilon) = \{x\}$ para algún $\varepsilon > 0$, entonces $\{x\} \cap X' \neq$ por lo que $x \in X'$. Si por el contrario, $\{x\} \subset B(x;\varepsilon)$ propiamente, supongamos que $x \notin X'$. Esto quiere decir que existe $\delta > 0$ tal que $B(x;\delta) \cap X' = \emptyset$, por lo que $B(x,\delta) = \{x\}$ lo cual es una contradicción. Finalmente $x \in X'$, concluyendo que $\overline{X'} = X'$. □

Problema 3.21. *Sea X denso en M. M posee puntos aislados si y sólo si X los posee.*

Demostración. Sea $x \in M$ punto aislado. Se sigue que existe $r > 0$ tal que $B(x;r) = \{x\}$. Como X es denso en M, $B(x;r) \cap X = \{x\}$. Note que $B(x;r) \cap X$ es una bola abierta en X, por lo que x es también un punto aislado de X. Recíprocamente, si $x \in M$ es punto aislado de X existe $r > 0$ tal que $B(x;r) = \{x\}$, pero como X es denso $x \in X$ □

Problema 3.22. *Para todo $X \subset M$, $\operatorname{int} X \cup \operatorname{int}(M - X)$ es denso en M.*

Demostración. Es sabido que dado $X \subset M$ cualquiera, se tiene que

$$M = \operatorname{int} X \cup \partial(X) \cup \operatorname{int}(M - X).$$

Así sea $x \in \partial(X)$, por lo que para todo $r > 0$ $B(x;r) \cap X \neq \emptyset$. Note que

$$\operatorname{int}(B(x;r) \cap X) = B(x;r) \cap \operatorname{int} X.$$

Se sigue entonces que $B(x;r) \cap \operatorname{int} X \neq \emptyset$. Por lo tanto

$$B(x;r) \cap (\operatorname{int} X \cup \operatorname{int}(M - X)) \neq \emptyset,$$

ergo, $\operatorname{int} X \cup \operatorname{int}(M - X)$ es denso en M □

Problema 3.23. *Dado $S \subset M$, sea $(F_\lambda)_{\lambda \in L}$ la familia de todos los subconjuntos cerrados de M que contienen S. Pruebe que $\overline{S} = \bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda$*

Demostración. Como cada F_λ es cerrado y contiene a S, entonces $\overline{S} \subset \overline{F_\lambda} = F_\lambda$ para todo $\lambda \in L$. Luego $\overline{S} \subset \bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda$. Sea $x \in \bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda$, es decir $x \in F_\lambda$ para todo $\lambda \in L$, en particular $x \in \overline{S}$, implicando $\bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda \subset \overline{S}$. Por lo tanto $\overline{S} = \bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda$ □

Problema 3.24. *Pruebe que $M - \operatorname{int} S = \overline{M - S}$ y $M - \overline{S} = \operatorname{int}(M - S)$*

Demostración. Sea $x \in M - \operatorname{int} S$. Se sigue que $x \notin \operatorname{int} S$, por lo que para todo $\varepsilon > 0$ se tiene que $B(x;\varepsilon) \not\subset S$. Esto quiere decir que existen puntos $y \in B(x;\varepsilon)$ tales que $y \notin S$ es decir $y \in M - S$, por lo que $B(x;\varepsilon) \cap (M - S) \neq \emptyset$. Por otro lado, sea $x \in \overline{M - S}$, por lo que para todo $\varepsilon > 0$ se tiene que $B(x;\varepsilon) \cap (M - S) \neq \emptyset$. Se sigue que $B(x;\varepsilon)$ posee puntos que no están en S, por lo tanto $B(x;\varepsilon) \not\subset S$, por lo que x □

Problema 3.25. *Si un conjunto abierto A es disjunto de S etonces A es disjunto de la clausura de S.*

Demostración. Supongamos que $A \cap \overline{S} \neq \emptyset$. Sea $x \in A \cap \overline{S}$. Como A es abierto, existe $r > 0$ tal que $B(x;r) \subset A$. Además, $B(x;r) \cap S \neq \emptyset$. Luego, $A \cap S \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción □

Problema 3.26. *Muestre que, para todo $X \subset M$, se tiene $\overline{X} = \bigcap_{n=1}^{\infty} B\left[X; \frac{1}{n}\right]$.*

Demostración.

$$\begin{aligned} x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B\left[X; \frac{1}{n}\right] &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, x \in B\left[X; \frac{1}{n}\right], \\ &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in X, d(x, x_n) \leq \frac{1}{n}, \\ &\Leftrightarrow x \in \overline{X}. \end{aligned}$$

□

---

4. Conjuntos conexos

Problema 4.1. *Sean $X, Y \subset M$ tales que $M = X \cup Y$ y $X \cap Y = \emptyset$. Entonces $M = X \cup Y$ es una escisión si y solamente si $X \cap \overline{Y} = \overline{X} \cap Y = \emptyset$. (O sea $x \in X \Rightarrow d(x, Y) > 0$ e $y \in Y \Rightarrow d(y, X) > 0$*

Demostración. Si $X \cup Y$ es una escisión de M entonces X e Y son abiertos y cerrados. Se sigue que $X = \overline{X}$ e $Y = \overline{Y}$. Luego, de $X \cap Y = \emptyset$, es directo que $X \cap \overline{Y} = \overline{X} \cap Y = \emptyset$.

Por otro lado, dado que $X \subset \overline{X}$, para todo $X \subset M$, es claro que $X \cap Y = \emptyset$. Consecuencia de lo anterior es que dado $x \in X$, entonces $d(x, Y) > 0$. Luego existe $r > 0$ tal que $B(x; r) \cap Y = \emptyset$, por lo que $B(x; r) \subset M - Y = X$, implicando que X es abierto. Se razona de forma análoga para Y. □

Problema 4.2. *Sea $\varphi : M \to N$ un homeomorfismo local. Dado el espacio métrico X, sean $f, g : X \to M$ continuas tales que $\varphi \circ f = \varphi \circ g$. Muestre que si X fuera conexo entonces se tiene que $f = g$ o $f(x) \neq g(x)$ para todo $x \in X$.*

Demostración. □

Problema 4.3. *Sean X, Y, M conexos. Si $\partial X \subset Y$ entonces $X \cup Y$ es conexo.*

Demostración. Sean A y B abiertos disjuntos tales que $A \cup B = X \cup Y$. Así $X = (A \cap X) \cup (B \cap X)$ e $Y = (A \cap X) \cup (B \cap X)$. Como X es conexo:

1. Si $A \cap X = \emptyset$ y $X \cap B = X$ entonces $X \subset B$.

   a) Si $A \cap Y = \emptyset$ y $B \cap Y = Y$ entonces $A = \emptyset$ y $B = X \cup Y$.

   b) Si $A \cap Y = Y$ y $B \cap Y = \emptyset$ entonces $Y \subset A$, por lo que $X \cup Y \subset A \cup B$. Luego $X \cap Y = \emptyset$. Sea $x \in \partial X \subset Y \subset A$. Luego existe $r > 0$ tal que $B(x; r) \subset A$, lo cual es una contradicción pues $A \cap X = \emptyset$

2. Si $A \cap X = X$ y $B \cap X = \emptyset$ entonces $X \subset A$.

   a) Si $A \cap Y = Y$ y $B \cap Y = \emptyset$ entonces $B = \emptyset$ y $A = X \cup Y$.

   b) Si $A \cap Y = \emptyset$ y $B \cap Y = Y$ entonces $Y \subset B$. Sea $x \in \partial X \subset Y \subset B$ y se argumenta de forma análoga.

Finalmente, $X \cup Y$ es conexo. □

Problema 4.4. *Dados $a, b \in M$, suponga que existe un subconjunto X abierto y cerrado tal que $a \in X$ y $b \notin X$. Entonces ningún subconjunto conexo de M puede contener a a y b simultáneamente.*

Demostración. Razonemos por contradicción. Supongamos que existe un subconjunto conexo Y que contiene a a y b simultáneamente. Como X es abierto y cerrado en M entonces $X \cup (M - X) = M$ es una excisión no trivial de M y $b \in M - X$. Note que $Y = (Y \cap X) \cup (Y \cap (M - X))$, es una excisión de Y. Como Y es conexo eso implica que $Y \cap X$ o $Y \cap (M - X)$ es vacío. Esto no es posible pues $a \in Y \cap X$ y $b \in Y \cap (M - X)$. Contradicción. □

Problema 4.5. *Un espacio métrico M es conexo si y sólo si, toda función continua $f : M \to \{0, 1\}$ es constante.*

Demostración. Si $f : M \to \{0, 1\}$ es continua, entonces $f(M) \subset \{0, 1\}$. La igualdad es posible si y sólo si M es conexo dado que $\{0, 1\}$ es un espacio discreto. □

Problema 4.6. *Sea $(X_\lambda)_{\lambda \in L}$ una familoia de conjuntos conexos en un espacio métrico M, tales que para $X_\lambda \cap X_\mu \neq \emptyset$ para cualesquiera $\lambda, \mu \in L$. Pruebe que $\bigcup\limits_{\lambda \in L} X_\lambda$ es conexo.*

Demostración. Sean $a, b \in \bigcup\limits_{\lambda \in L} X_\lambda$. Luego existen $\lambda, \mu \in L$ tales que $a \in X_\lambda$ y $b \in X_\mu$. Dado que $X_\lambda \cap X_\mu \neq \emptyset$ entonces $X_\lambda \cup X_\mu$ es conexo tales que contiene a a y b. Se concluye que para cada par de puntos a y b existe un subconjunto conexo de $\bigcup\limits_{\lambda \in L} X_\lambda$ que los contiene. Luego $\bigcup\limits_{\lambda \in L} X_\lambda$ es conexo. □

Problema 4.7. *Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ subconjuntos conexos de un espacio métrico M, tales que $X_n \cap X_{n+1} \neq \emptyset$ para todo n. Muestre que $M = \cup X_n$ es conexo.*

Demostración. Sea $a, b \in X$, luego existen $m, p \in \mathbb{N}$ tal que $a \in X_m$ e $b \in X_p$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $p = m + k$. Note que $X_m \cup X_{m+1} \cup \ldots \cup X_{m+k}$ es conexo tal que contiene a a y b. Esto, pues se observa lo siguiente:

- Por hipótesis X_m y X_{m+1} son conexos tales que $X_m \cap X_{m+1} \neq \emptyset$, así $X_m \cup X_{m+1}$ es conexo.

- Por hipótesis X_{m+2} es conexo tal que $X_{m+1} \cap X_{m+2} \neq \emptyset$, así $(X_m \cup X_{m+1}) \cap X_{m+2} \neq \emptyset$. De lo anterior $X_m \cup X_{m+1}$ es conexo, luego $X_m \cup X_{m+1} \cup X_{m+2}$ es conexo.

Se concluye que para todo par de puntos $a, b \in X$ existe un subconjunto conexo que los contiene. Por lo tanto, X es conexo. □

Problema 4.8. *Sea $E \subset \mathbb{R}^m$ un subespacio vectorial. Si $\dim(E) = m - 1$, entonces $\mathbb{R}^m - E$ tiene dos componentes conexas, con cada una de ellas teniendo a E como su frontera. Para cualquier subconjunto propio $X \subset E$ se tiene que $\mathbb{R}^m - X$ es conexo. Pruebe que si $\dim(E) \leq m - 2$ entonces $\mathbb{R}^m - E$ es conexo.*

Demostración. Dado que $\dim(E) = m - 1$ entonces existe $u \in \mathbb{R}^m$ linealmente independiente a E. Sean

$$C_1 = E + \{\alpha u;\ \alpha > 0\} = E + \langle u \rangle_+ \text{ y } C_2 = E + \{\alpha u;\ \alpha < 0\} = E + \langle u \rangle_-.$$

Afirmamos que C_1 y C_2 son las dos componentes conexas de $\mathbb{R}^m - E$. Sea $x \in C_1 \cap C_2$, entonces $x = \alpha u + a = \beta u + b$ con $a, b \in E$, luego $(\alpha - \beta)u = b - a \in E$, lo cual es una contradicción. □

---

5. Límites

Problema 5.1. *Sea d una pseudo-métrica en un conjunto M. Pruebe que d es una métrica si y sólo si toda sucesión convergente según d posee límite único.*

Demostración. Para probar que d es métrica debemos mostrar que $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$. Sean x, y tales que $d(x, y) = 0$. Considere la sucesión constante $x_n = x$ (que converge a x). Así, $d(x_n, y) = d(x, y) = 0 < \varepsilon$, por lo que (x_n) converge también a y. Dada la unicidad del límite, se concluye que $x = y$.

□

Problema 5.2. *Dada una isometría $f : M \to M$, fije un punto $x_0 \in M$ y defina $x_1 = f(x_0), \ldots, x_{n+1} = f(x)$. Si $f(x_0) = x_0$, la sucesión (x_n) no converge.*

Demostración. Por definición $f^n(x_0) = x_n$. Además, como f es una isometría, se deduce que $d(x_n, x_{n+1}) = d(x_0, x_1)$, para todo $n \in \mathbb{N}$ falta seguir escribiendo $\square$

Problema 5.3.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Dado que $\lim_{n\in\mathbb{N}_1} x_n = a$ y $\lim_{n\in\mathbb{N}_2} x_n = a$ existe $N_1 \in \mathbb{N}_1 \subset \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, a) < \varepsilon$ para todo $n > N_1$existen $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tales que $d(x_n, a) < \varepsilon$ para todo $n > N_1$ por un lado y $d(x_n, a) < \varepsilon$ para todo $n > N_2$. Tomando $N = \max\{N_1, N_2\}$ $\square$

Problema 5.4. *Dada una función $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, se dice que $\lim_{n\to\infty} \varphi(n) = \infty$ cuando, para todo $c > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow \varphi(n) > c$. Pruebe que $\lim_{n\to\infty} \varphi(n) = \infty$ si y sólo si para todo $k \in \mathbb{N}$ se tiene que $\varphi^{-1}(k)$ es finito. En particular si φ es inyectiva* $\lim_{n\to\infty} \varphi(n) = \infty$

Demostración. Mostremos primero que $f^{-1}(k)$ es finito. Como $\varphi^{-1}(k) \subset \mathbb{N}$ entonces posee menor elemento y así $\varphi^{-1}(k) = \{n_1, n_2, \ldots\}$. Así existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi^{-1}(n) > k$ para todo $n > N$.

Sea $c > 0$. Mostremos que exite $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi(n) > c$ para $n > n_0$. Note que $\varphi^{-1}(\lfloor c \rfloor), \varphi^{-1}(\lfloor c \rfloor - 1), \varphi^{-1}(\lfloor c \rfloor - 2), \ldots, \varphi^{-1}(1)$ son fonitos. Así

$$\bigcup_{i=1}^{\lfloor c \rfloor} \varphi^{-1}(i),$$

es finito. Así $N = \max \bigcup_{i=1}^{\lfloor c \rfloor} \varphi^{-1}(i)$.

Note que $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $\varphi(2k) = k$ y $\varphi(2k+1) = 1$ cumple lo pedido. $\square$

Problema 5.5. *Toda sucesión convergente posee un único valor de adherencia. Discuta la recíproca*

Demostración. Supongamos que (x_n) es una sucesión convergente, es decir, $\lim_{n\in\mathbb{N}} x_n = a$, para algún $a \in M$. Dado que (x_n) es convergente entonces toda subsucesión de (x_n) converge a a, en otras palabras, se tiene que $\lim x_{n_k} = a$, para toda subsucesión de (x_n). Por lo tanto el valor de adherencia de (x_n) es único. Si una sucesión tiene un único valor de adherencia es convergente pues, digamos que dada una sucesión (x_n) su valor de adherencia es a. Por lo tanto, dada una vecindad de a por definición, a partir de N suficientemente grande, $x_n \in V_a$ para todo $n > N$ $\square$

Problema 5.6. *Una sucesión dupla en un espacio métrico M es una aplicación $(m, n) \to x_{mn}$ de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ en M. La sucesión dupla (x_{mn}) origina, para cada $n \in \mathbb{N}$ fijo, una sucesión simple $(x_{1n}, x_{2n}, x_{3n}, \ldots)$ y para cada $m \in \mathbb{N}$ fijo, la sucesión $(x_{m1}, x_{m2}, x_{m3}, \ldots)$. Se escribe $a_n = \lim_{m\to\infty} x_{mn}$ y $b_m = \lim_{n\to\infty} x_{mn}$ para indicar los límites de estaciones sucesiones simples, si existieran. Por otro ldo, se dice que la sucesión dupla (x_{mn}) converge al límite $a \in M$ cuando, para cada $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $m, n > n_0$ implica $d(x_{mn}, a) < \varepsilon$. Se escribe entonces $a = \lim_{m,n} x_{mn} = \lim_{m,n\to\infty} x_{mn}$. Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definida por $f(k) = k$ se k fuese par y $f(k) = \dfrac{1}{k}$ si k fuese impar. Muestre que:*

1. *La sucesión dupla de números reales $x_{mn} = \dfrac{f(m) + f(n)}{mn}$ converge a 0 pero no existen los límites simples $\lim_{n\to\infty} x_{mn}$ $\lim_{m\to\infty} x_{mn}$ para ningún valor de n ni m.*

2. *Poniendo $y_{mn} = \dfrac{f(m)}{mn}$, existe, para todo n, el límite $\lim_{m\to\infty} y_{mn} = 0$ pero para ningún valor fijo de m existe $\lim_{n\to\infty} y_{mn}$*

3. *Si existiera el límite duplo $a = \lim x_{mn}$ y para todo n existiera $\lim\limits_{m\to\infty} x_{mn} = a_n$ entonces se debe tener $\lim a_n = a$. Por lo tanto valen las igualdades*

$$\lim_m(\lim_n x_{mn}) = \lim_n(\lim_m x_{mn}) = \lim_{m,n} x_{mn}$$

Demostración.

1. Note que
$$0 \leq x_{mn} \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m}.$$
Luego haciendo $n, m \to \infty$ tenemos que $\lim\limits_{m,n\to\infty} x_{mn} = 0$. Para $2m$ se tiene que $x_{2mn} = \dfrac{1}{n} + \dfrac{f(n)}{2mn}$. Para $2m+1$ se tine que $x_{(2m+1)n} = \dfrac{1}{(2m+1)^2 n} + \dfrac{f(n)}{(2m+1)n}$. Así $\lim_{m\to\infty} x_{(2m+1)n} = 0$ y $\lim_{m\to\infty} x_{2mn} = \dfrac{1}{n}$.

2. Note que
$$0 \leq y_n \leq \frac{f(n)}{mn} \leq \frac{1}{m}.$$
Luego $\lim_{m\to\infty} y_{mn} = 0$. Note que según paridad de n se tiene que $\lim_{n\to\infty} y_{mn} = \dfrac{1}{m}$ para n par y $\lim_{n\to\infty} y_{mn} = 0$ para n impar.

3. Sea $\varepsilon > 0$. Por desigualdad triangular tenemos que
$$d(a_n, a) \leq d(a_n, x_{mn}) + d(x_{mn}, a).$$
Sabemos que existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que para $n, m > N_1$ se tiene que $d(x_{mn}, a) < \dfrac{\varepsilon}{2}$ y $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que para $m > N_2$ se tiene que $d(a_n, x_{mn}) < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Así, tomando

$N = \text{máx}\{N_1, N_2\}$, para $n, m > N$ tendremos que $d(a_n, a) < \varepsilon$, haciendo valer que $\lim a_n = a$.

$\square$

Problema 5.7. *Sea $S \subset M$ denso. Dada una sucesión (x_n) en M suponga qe existe $x \in M$ tal que $\lim d(x_n, s) = d(x, s)$ para todo $s \in S$. Pruebe que $\lim x_n = x$.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Como S es denso en M, existe $s \in S$ tal que $d(x, s) < \frac{\varepsilon}{4}$. Además, por hipótesis, para todo n suficientemente grande tenemos que $|d(x_n, s) - d(x, s)| < \frac{\varepsilon}{2}$, es decir $d(x_n, s) < d(x, s) + \dfrac{\varepsilon}{2}$. Así, para n suficientemente grande:

$$\begin{aligned} d(x_n, x) &\leq d(x_n, s) + d(s, x), \\ &< 2d(x, s) + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\lim x_n = x$ $\square$

Problema 5.8. *La sucesión de funciones $f_n(x) = \dfrac{1}{1 + nx}$ converge puntualmente pero no uniformemente en el intervalo $[0, 1]$. Lo mismo para $f_n(x) = nx(1 - x)^n$.*

Convergencia de $\left(\frac{1}{1+nx}\right)_{n \in \mathbb{N}}$.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{1 + nx} = \begin{cases} 1, & \text{si } x = 0 \\ 0, & \text{si } x \in (0, 1] \end{cases},$$

y la convergencia no es uniforme pues la sucesión de funciones es continua mientras que la función limite es discontinua. $\square$

Convergencia de $(nx(1 - x)^n)_{n \in \mathbb{N}}$.

$$\lim_{n \to \infty} nx(1 - x)^n = 0, \ \forall x \in [0, 1]$$

Sin duda la convergencia es puntual. Notemos que cada función f_n tiene un máximo en $x_n = \frac{1}{n+1} \in (0, 1)$, que es $f_n(x_n) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$. Es fácil ver

$$n \to \infty \Longrightarrow f_n(x_n) \to \frac{1}{e}.$$

Con esto en mano, dado $\varepsilon > 0$, si $\varepsilon < \frac{1}{e}$ existe $N \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $|f_n(x_n)| > \varepsilon$ para todo $n > N$. Se concluye que la convergencia no es uniforme. $\square$

Problema 5.9. *Sea $\mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$ el espacio vectorial de las funciones $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, de clase $\mathcal{C}^1$, con la norma $\|f\| = \sup_{a\leq x\leq b}(|f(x)|+|f'(x)|)$. Muestre que* $\lim f_n = f$ *en $\mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$ significa que $f_n \to f$ y $f_n' \to f'$ uniformemente en $[a,b]$.*

Demostración. Asumiendo que $\lim f_n = f$ en $\mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$, como $|\cdot|$ es positiva, entonces $\|f_n - f\| = \sup_{a\leq x\leq b}(|f_n(x)-f(x)|+|f_n'(x)-f'(x)|) = \sup_{a\leq x\leq b}|f_n(x)-f(x)| + \sup_{a\leq x\leq}(|f_n'(x)-f'(x)|) = d(f_n,f)+d(f_n',f)$. Luego, para n suficientemente grande se tiene que $d(f_n,f)+d(f_n',f)<\varepsilon$, y por ende $d(f_n,f)<\varepsilon$ y $d(f_n',f')<\varepsilon$. Para la dirección conversa se asume que $\square$

Problema 5.10. *Dada $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ se dice que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = c$ cuando para todo $\varepsilon>0$ existe $k\in\mathbb{R}$ tal que $x>k$ entonces $|f(x)-c|<\varepsilon$. Muestre que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = c$ si y sólo si $g_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definidas por $g_n(x) = f(x+n)$ converge uniformemente para c en cada parte acotada de $(0,+\infty)$.*

Demostración. $\square$

Problema 5.11. *Sea E un espacio vectorial normado. Las siguientes afirmaciones acerca de una sucesión de transformaciones lineales $T_n:\mathbb{R}^m\to E$ y de una $T\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^m,E)$ son equivalentes:*

(a) $\lim T_n(x) = T(x)$*, para todo $x\in\mathbb{R}^m$.*

(b) $\lim T_n(e_i) = T(e_i)$ *para todo $i=1,\dots,m$, donde $\{e_1,\dots,e_n\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^m$.*

(c) $T_n\to T$ en cada parte acotada de $\mathbb{R}^m$.

(d) $T_n\to T$ en $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m,V)$

Demostración. Que (a) implica (b) es claro, pues (b) es un caso particular de (a). Ahora asumimos (b) y consideramos $X\subset\mathbb{R}^m$ acotado, es decir, existe $r>0$ tal que $X\subset B(0;r)$, lo que en términos de la norma del máximo (podemos hacerlo ya que es equivalente a la norma euclidiana) si $x\in X$, entonces, $\max\limits_{1\leq i\leq n}|x_i|<r$. Así:

$$\begin{aligned}\|T_n(x)-T(x)\| &= \|\sum x_i(T_n(e_i)-T(e_i))\|,\\ &\leq \sum |x_i|\cdot\|T_n(e_i)-T(e_i)\|,\\ &\leq m\cdot\max|x_i|\cdot\|T_n(e_i)-T(e_i)\|,\\ &\leq m\cdot r\cdot\|T_n(e_i)-T(e_i)\|.\end{aligned}$$

Como $T_n(e_i) \to T(e_i)$, con $i = 1, \ldots, n$, dado $\varepsilon > 0$ existen $N_i \in \mathbb{N}$ tal que $n > N_i$ implica $\|T_n(e_i) - T(e_i)\| < \dfrac{\varepsilon}{rm}$. Luego tomando $N = \text{máx}\{N_1, \ldots, N_m\}$, para $n > N$ se tendrá que $\|T_n(e_i) - T(e_i)\| < \dfrac{\varepsilon}{mr}$. Y finalmente $\|T_n(x) - T(x)\| < rm \cdot \dfrac{\varepsilon}{rm} = \varepsilon$.

Ahora asumiendo (c) como hipótesis, como $T_n \to T$ uniformemente en cada subconjunto acotado X de $\mathbb{R}^m$, entonces dadp $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|T_n(x) - T(x)\| < \varepsilon$, para todo $n > N$ y todo $x \in X$. Esto quiere decir que $\|T_n - T\| \leq \varepsilon$ para todo $n > N$, por lo que $T_n \to T$ en $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, V)$.

Para probar que (d) implica (a) empiece notando que $\|T_n(x) - T(x)\| \leq \|T_n - T|$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Luego, para n suficintemente grande $\|T_n - T\| < \varepsilon$. Por transitividad $\|T_n(x) - T(x)\| < \varepsilon$ para todo $x \in \mathbb{R}^m$ con n suficientemente grande. $\square$

---

6. Continuidad uniforme

Problema 6.1. *Si una sucesión de funciones uniformemente continuas $f_n : M \to N$ converge uniformemente para una aplicación $f : M \to N$ entonces f es uniformemente continua.*

Demostración. Empiece notando que se tiene, usando dos veces la desigualdad triangular, la siguiente desigualdad

$$d(f(x), f(y)) \leq d(f_n(x), f(x)) + d(f_n(x), f_n(y)) + d(f_n(y), f(y)).$$

Por la sucesión de funciones uniformemente continuas tenemos que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta_1 > 0$ tal que para todo $x, y \in M$ tales que $d(x, y) < \delta_1$ entonces $d(f_n(x), f_n(y)) < \dfrac{\varepsilon}{3}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Además, como la sucesión (f_n) converge uniformemente a f, entonces para todo $\varepsilon > 0$, y para todo $x \in M$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(f_n, f) < \dfrac{\varepsilon}{3}$ para todo $n > N$. Así, para $\delta = \delta_1$ y todo $n > N$ se tiene que para todo $x, y \in M$ tales que $d(x, y) < \delta$ $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$, por lo tanto f es uniformemente continua. $\square$

Problema 6.2. *Dada $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, suponga que existe $a > 0$ tal que $f|[0, a]$ y $f|[a, +\infty)$ sean uniformemente continuas. Pruebe que f es uniformemente continua.*

Demostración. Empiece notando que para todo $x, y \in [0, +\infty)$ se tiene que

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(a)| + |f(y) - f(a)|.$$

Como $f|[0, a]$ y $f|[a, +\infty)$ son uniformemente continuas, entonces dado $\varepsilon > 0$ existen $\delta_1, \delta_2 > 0$ tales que para todos $x \in [0, a]$ e $y \in [a, +\infty)$ tales que $|x-a| < \delta_1$, y $|y-a| < \delta_2$

entonces $|f(x)-f(a)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ y $|f(y)-f(a)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Así, tomando $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$ entonces para $x \in [0,a]$ e $y \in [a,+\infty)$ tales que $|x-a| < \delta$ e $|y-a| < \delta$ se sigue que

$$|f(x)-f(a)| + |f(y)-f(a)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Luego para todo $\varepsilon > 0$ y todos $x, y \in [0,+\infty)$ existe $\delta > 0$ tal que $|x-y| < \delta$ implica $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$, por lo que $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ es uniformemente continua. □

Problema 6.3. *Sea $X \subset M$ denso. Si $f : M \to N$ es una aplicación continua tal que $f|X$ es uniformemente continua, entonces f es uniformemente continua.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Sabemos que existe $\delta > 0$ tal que para todos $x, y \in X$ tales que $d(x,y) < \delta$ entonces $d(f(x), f(y)) < \dfrac{\varepsilon}{3}$.

Sean $u, v \in M$ tales que $d(u,v) < \dfrac{\delta}{3}$. Por continuidad en u existe $\delta_1 > 0$ tal que para todo $a \in M$ tal que $d(u,a) < \delta_1$ entonces $d(f(u), f(a)) < \dfrac{\varepsilon}{3}$. Análogamente para v, existe $\delta_2 > 0$ tal que para todo $b \in M$ tal que $d(v,b) < \delta_2$ entonces $d(f(v), f(b)) < \dfrac{\varepsilon}{3}$.

Ahora bien, como X es denso, existen $x, y \in X$ tales que $d(u,x) < \text{mín}\left\{\delta_1, \dfrac{\delta}{3}\right\}$ y $d(u,y) < \text{mín}\left\{\dfrac{\delta}{3}, \delta_2\right\}$.

Así

$$d(x,y) \leq d(x,u) + d(u,v) + d(v,y) < \delta,$$

por lo tanto

$$d(f(u), f(v) \leq d(f(u), f(x)) + d(f(x), f(y)) + d(f(y), f(v)) < \varepsilon,$$

por lo tanto, f es uniformemente continua

□

---

7. Espacios métricos completos

Problema 7.1. *Sea $\sum a_n$ una serie convergente de números reales positivos. Si una sucesión (x_n) en un espacio métrico es tal que $d(x_n, x_{n+1}) \leq a_n$ para todo n entonces (x_n) es una sucesión de Cauchy.*

Demostración. Dado que $\sum a_n$ es convergente, $\lim a_n = 0$, de lo que se sigue que dado $\varepsilon > 0$ existe N tal que para $n > N$ se tiene que $a_n < \dfrac{\varepsilon}{p}$.

Para mostrar que (x_n) es de Cauchy basta mostrar que $d(x_n, x_{n+p}) < \varepsilon$ para cualquier $p \in \mathbb{N}$. Usando $p - 1$ veces la desigualdad triangular se tiene:

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+p}) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+p}), \\ &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + d(x_{n+2}, x_{n+p}), \\ &\leq d(x_n, x_{n+1}) + \ldots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}), \\ &\leq a_n + \ldots + a_{n+p-1}. \end{aligned}$$

Así, para $n > N$,

$$d(x_n, x_{n+p}) < \frac{\varepsilon}{p} + \ldots + \frac{\varepsilon}{p} = \varepsilon.$$

□

Problema 7.2. *Dada una sucesión (x_n) en M formamos una sucesión dupla de números reales poniendo $t_{mn} = d(x_m, x_n)$. Muestre que (x_n) es de Cauchy si y sólo si $\lim\limits_{m,n\to\infty} t_{mn} = 0$.*

Demostración. Suponga que (x_n) es de Cauchy. Dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para $n, m > N$ se tiene que

$$|t_{mn}| = |d(x_m, x_n)| = d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Se satisface la definición inmediatamente.

Si $\lim\limits_{m,n\to\infty} t_{mn} = 0$ es análogo □

Problema 7.3. *Sea $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $\lim_{n\to\infty} \varphi(n) = \infty$. Se (x_n) es una sucesión de Cauchy en M entonces $y_n = x_{\varphi(n)}$ define una sucesión de Cauchy en M.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Entonces tenemos que $d(y_m, y_n) = d(x_{\varphi(m)}, x_{\varphi(n)})$. Como (x_n) es de Cauchy existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para $n, m > N$ se tiene que $d(x_n, x_m) < \varepsilon$. Como $\lim \varphi(n) = \infty$ existe N_0 tal que para $m, n > N_0$ se tenga $\varphi(n), \varphi(m) > N$, luego $d(y_m, y_n) = d(x_\varphi(m), x_\varphi(n)) < \varepsilon$. Por lo tanto (y_n) define una sucesión de Cauchy en M. □

Problema 7.4. *Dada una sucesión (x_n) en el espacio métrico M considere la sucesión de funciones $f_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dadas por $f_n(p) = d(x_n, x_{n+p})$. La sucesión (x_n) es de Cauchy, si y sólo si $f_n \to 0$ uniformemente. Considerando la sucesión de las sumas parciales de la serie armónica, muestre que la consideración $f_n \to 0$ puntualmente no basta para que (x_n) sea de Cauchy.*

Demostración. Suponga que f_n converge uniformemente a la función nula. Sea $\varepsilon > 0$ y para todo $p \in \mathbb{N}$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para $n > N$ se tiene que $d(x_n, x_{n+p}) = |f_n(p)| < \varepsilon$, por lo tanto (x_n) es una sucesión de Cauchy.

Ahora suponga que (x_n) es una sucesión de Cauchy. Sea $\varepsilon > 0$, por tanto, existen N tal que para todos $n > N$ se tiene que $|f_n(p) - 0| = |f_n(p)| = d(x_n, x_{n+p}) < \varepsilon$ sea cual sea $p \in \mathbb{N}$, por lo tanto (f_n) converge uniformemente a la función nula. $\square$

Problema 7.5. *Si $M_1, \ldots, M_n \subset M$ son completos entonces $M_1 \cup \ldots \cup M_n$ es completo*

Demostración. Dado que $M_1, \ldots, M_n$ son subespacios completos de N entonces son subconjuntos cerrados. Luego, $M_1 \cup M_2 \cup \ldots M_n$ es union finita de cerrados, por lo tanto es cerrado y así, completo $\square$

Problema 7.6. *Las componentes conexas de un espacio métrico completo son subconjuntos completos.*

Demostración. Es sabido que las componentes conexas de un espacio métrico son conjuntos cerrados. Además, como el espacio de referencia es completo, al ser cerrados también son completos. Termina la demostración. $\square$

Problema 7.7. *Sea $(M_\lambda)_{\lambda \in L}$ una familia arbitraria de subespacios completos de un espacio métrico N. Entonces la intersección $M = \bigcap_{\lambda \in L} M_\lambda$ es un espacio métrico completo.*

Demostración. Dado que M_λ es subespacio completo de un espacio métrico entonces es cerrado para todo $\lambda \in L$. Luego, como M es unión arbitraria de cerrados, es cerrado y así es completo. $\square$

Problema 7.8. *Sea $f : M \to N$ continua, tal que existe $c > 0$ con $d(f(x), f(y)) \geq c \cdot d(x, y)$ para todo $x, y \in M$. Muestre que f trannsforma subespacios completos de M en subespacios completos de N. En particular, si M es completo entonces f es una aplicación cerrada.*

Demostración. Sea $X \subset M$ completo y sea (z_n) una sucesión de Cauchy en $f(X)$. Debemos probar que (z_n) converge en $f(X)$.

Por definición para cada z_n existe $x_n \in X$ tal que $f(x_n) = z_n$. Como (z_n) es de Cauchy, dado $\varepsilon > 0$ entonces $d(z_n, z_m) < \varepsilon \cdot c$ para todos n y m suficientemente grandes. En seguida por hipótesis se tiene que $d(x_n, x_m) < \varepsilon$, por lo tanto (x_n) es de Cauchy en X y así existe $x \in X$ tal que $x_n \longrightarrow x$. Haciendo $z = f(x) \in f(X)$ afirmamos que

$z_n \longrightarrow z$. En efecto como f es continua si $x_n \longrightarrow x$ entonces $z_n = f(x_n) \longrightarrow f(x) = z$, por lo tanto (z_n) converge en $f(X)$ y luego $f(X)$ es completo.

Dado que todo subespacio completo de un subespacio métrico es cerrado, por lo anterior probamos que la imagen de todo cerrado propio de M es cerrado en N. Ahora, si M es completo, entonces es cerrado y por ende, su imagen es cerrada en N. Luego f lleva cerrados en cerrados, concluyendo así que es una aplicación cerrada. □

---

8. Espacios métricos compactos

Problema 8.1. *Sean A y B subconjuntos disjuntos no vacíos en el espacio métrico compacto M. Si $d(A,B) = 0$ entonces existe $p \in \partial(A) \cap \partial(B)$*

Demostración. Dado que M es compacto entonces es completo. Como $d(A,B) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$ existen x_n e y_n en A y B tales que $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$. Esto define las sucesiones (x_n) en A e (y_n) en B. Defina la sucesión (z_n) por x_i si $n = 2i$ e y_i si $n = 2i+1$. Es claro que (z_n) es de Cauchy en M y por ende convergente en el espacio. Supongamos que $z_n \to p$. Note que (x_n) e (y_n) al ser subsucesiones de (z_n) son también convergentes y lo hacen hacia el punto p. Note que p es límite de una sucesión en A y otra en $M - A$ (pues $B \subset M - A$), luego $p \in \partial A$. De modo análogo se concluye que $p \in \partial B$. □

Problema 8.2. *Sean $K \subset V \subset M$ donde K es compacto y V es abierto en M. Pruebe que existe $r > 0$ tal que $\cup_{x\in K} B(x;r) \subset V$*

Primera demostración. Sea $(C_\lambda)_{\lambda\in L}$ un cubrimiento por abiertos de K tal que $C \subset V$ (que existe, pues V es abierto). Dado que K es compacto, existe subcobertura finita C. Así, para cada $x \in K$ existe λ_i tal que $x \in C_{\lambda_i}$ y en virtud de esto existe r_{x_i} tal que $B(x; r_{x_i}) \subset C_{\lambda_i}$, para algún $i = 1, \ldots, n$. Así, sean $r_i = \sup_{r_{x_i}}$, por cada i. Luego $r = \max\{r_1, \ldots, r_n\}$. Luego es claro que $\cup_{x\in K} B(x;r) \subset V$. □

Segunda demostración. El problema equivale a mostrar que existe $r > 0$ tal que

$$B(K;r) \subset V$$

(bola de centro K y radio r). Por contradicción supongamos que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe una sucesión (x_n) en $B(K; \frac{1}{n})$ tal que $x \notin V$. □

Problema 8.3. *Sean* $K = \bigcap_{\lambda \in L} K_\lambda$ *la intersección de una familia de compactos en el espacio métrico* M *y* U *un abierto conteniendo a* K*. Pruebe que existen* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in L$ *tales que* $K_{\lambda_1} \cap \ldots \cap K_{\lambda_n} \subset U$*. Si la familia* (K_λ) *fuera una cadena entonces* $K \subset U$ *implica* $K_\lambda \subset U$ *para algún* λ*. Si* $K_1 \supset K_2 \supset \ldots$ *y* $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \subset U$ *entonces existe* n_0 *tal que* $n > n_0$ *implica* $K_n \subset U$*.*

Demostración. □

Problema 8.4. *Pruebe que un espacio métrico* M *es totalmente acotado si y solamente si toda sucesión en* M *posee una subsucesión de Cauchy.*

Demostración. Sea (x_n) una sucesión en M y sea $\varepsilon > 0$. Como M es totalmente acotado existen $a_1, \ldots, a_n \in M$ tales que

$$M = B\left(a_1; \frac{\varepsilon}{2}\right) \cup \ldots \cup B\left(a_n; \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Así, existe $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $x_n \in B(a_j; \varepsilon)$ para infinitos x_n. Sea $y_n = x_{\varphi(n)}$ la subsucesión contenida en $B(a_j; \varepsilon)$. Es claro que (y_n) es de Cauchy. Por lo tanto, dado $\varepsilon > 0$ y una sucesión en M siempre podemos extraer una subsucesión de Cauchy.

Recíprocamente, sea (x_n^1) una sucesión en M. Por hipótesis, (x_n^1) posee una subsucesión de Cauchy, la cual es acotada y por ende está totalmente contenida en una bola de radio ε_1 digamos B_1. Sea x_n^2 una sucesión tal que $x_n^2 \notin B_1$. Por hipótesis posee una subsucesión de Cauchy la cual está acotada y por ende está totalmente contenida en una bola de radio B_2. Se continua el proceso, el cual es finito pues de no serlo se define la sucesión y_n definida de modo que $y_n = x^n$ seguir redactando assadasd □

Problema 8.5. *Sea* M *compacto. Una sucesión de puntos* $x_n \in M$ *es convergente si y solamente si posee un único valor de adherencia. Muestre, por medio de un ejemplo, que la compacidad de* M *es una hipótesis necesaria.*

Demostración. Sea (x_n) una sucesión convergente en M, es decir $x_n \to L \in M$. Sea $(y_n) = (x_\varphi(n))$. Dado que (x_n) es convergente, $y_n \to L$. Luego L es el único valor de adherencia. Por otro lado, sea (x_n) una sucesión con un único valor de adherencia. Mostremos que (x_n) es convergente. Dado que (x_n) posee un valor de adherencia, entonces existe una subsucesión $y_n = x_\varphi(n)$ convergiendo a él. Ahora considere la subsucesión sin ... seguir escribiendo. □

Problema 8.6. *Sean* M, N *espacios métricos. Pruebe que la clausura de un conjunto equicontino* $E \subset \mathcal{C}_0(M; N)$ *es equicontinuo. Idem para conjuntos uniformementes equicontinuos.*

Demostración. Sea $a \in M$ y $\varepsilon > 0$. Dado $g \in \overline{E}$, existe $f \in B\left(g; \frac{\varepsilon}{3}\right) \cap E$. Como E es equicontinuo existe $\delta > 0$ tal que si $d(x,a) < \delta$ entonces $d(f(x), f(a)) < \frac{\varepsilon}{3}$. Así:

$$d(g(x), g(a)) \leq d(g(x), f(x)) + d(f(x), f(a)) + d(f(a), g(a)) < \varepsilon.$$

Por lo tanto $\overline{E}$ es equicontinuo.

Para conjuntos uniformemente equicontinuos la demostración es análoga.

□

- **Eder Contreras Ordenes** Estudiante de Licenciatura en matemáticas, Universidad de chile.