PRACTICA 1

① Probar que si $x < y + \varepsilon \ \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow x \leq y$

Deducir que si $|x-y| < \varepsilon \ \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow x = y$

Supongo $x > y$, Tomo $\varepsilon = \frac{x-y}{2} > 0$

$$y + \frac{x-y}{2} = \frac{2y + x - y}{2} = \frac{y+x}{2} \underset{\substack{\downarrow \\ y<x}}{<} \frac{x+x}{2} = x$$ Abs! pues $x < y + \varepsilon \Rightarrow x \leq y$

$|x-y| < \varepsilon \Rightarrow x - y < \varepsilon$ ó $y - x < \varepsilon$

$\Rightarrow x < \varepsilon + y \qquad \Rightarrow y < \varepsilon + x$

$\Rightarrow x \leq y \qquad \Rightarrow y \leq x$

Como $x \leq y$ ∧ $y \leq x \Rightarrow x = y$

Scanned with CamScanner

2) a) Sean $x, y \in \mathbb{R} / y-x>1$. Probar que $\exists\, z \in \mathbb{Z},\ x<z<y$

Si $y-x>1 \Rightarrow y>1+x$

Supongo a cota inferior máxima de x, $a \leq x$

$$a \leq x \Rightarrow a+1 \leq x+1 < y$$

Como a es ínfimo de $x \Rightarrow a+1>x$ pq la cota inferior máxima de x es x

$$x<a+1 \leq x+1<y$$

Llamo $z=a+1 \Rightarrow x<z<y$

b) Sean $x, y \in \mathbb{R} / x<y$. Probar que $\exists\, q \in \mathbb{Q},\ x<q<y$

$\underbrace{\text{Supongo } y-x>\frac{1}{b}}_{\text{por Arquímedes}}$ con $b \in \mathbb{N}$

$$by-bx>1 \Rightarrow \overbrace{\exists\, z \in \mathbb{Z} / bx<z<by}^{\text{item a}}$$

$$x<\frac{z}{b}<y$$ un entero dividido por un natural me da un racional

Llamo $q=\frac{z}{b} \Rightarrow x<q<y$

c) Sean $x, y \in \mathbb{Q} / x<y$. Probar que $\exists\, i \in \mathbb{I},\ x<i<y$

$0<y-x$ $\qquad$ $\sqrt{2}$ es un irracional

$\sqrt{2}(y-x)>0$ $\qquad$ $0<\frac{1}{\sqrt{2}}<1 \Rightarrow (y-x)\ 0<\frac{y-x}{\sqrt{2}}<y-x$

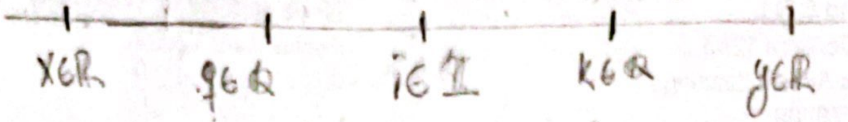
si a un racional lo divido por un irracional me queda un irracional

$$x<\underbrace{\frac{y-x}{\sqrt{2}}+x}<y$$

por prop de los irracionales si a un irracional le resto (o sumo) un racional me queda un irracional

Llamo $i=\frac{y-x}{\sqrt{2}}+x \Rightarrow x<i<y$

d) Sean $x, y \in \mathbb{R} / x < y$. Probar que $\exists\, i \in \mathbb{I}$, $x < i < y$



Por item b se que $\exists\ x < q < y$

Por item c se que $\exists\ q < i < k$

$\Rightarrow x < i < y$

3) $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ y acotado inferiormente. Probar:

$$i = \inf(A) \Leftrightarrow \begin{cases} i \leq a \ \forall a \in A \\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists a \in A / i \leq a < i + \varepsilon \end{cases}$$

$\Rightarrow$) i es cota inferior ✓

Sea $\varepsilon > 0$, sea $T = i + \varepsilon > i \Rightarrow T$ no es cota inferior

$\Rightarrow \exists a \in A / T > a$ Como ε es arbitrario vale siempre

$\Leftarrow$) i es cota inferior ✓

Supongo que i no es la mayor de las cotas inferiores

$\Rightarrow \exists T > i$ con T cota inferior de A

Sea $\varepsilon = T - i > 0 \Rightarrow \exists a \in A / a < i + \varepsilon = i + T - i = T$

$\Rightarrow \exists a \in A / a < T$ Abs!

Luego, i es la mayor de las cotas inferiores

4) b) $0 \leq \frac{1}{2^n} \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow 0 \notin B \Rightarrow B$ no tiene mínimo

c) $B \cup \{0\}$

$\frac{1}{2} = máx(B \cup \{0\}) = sup(B \cup \{0\})$ demostrado en el ej anterior

$0 = min(B \cup \{0\}) = inf(B \cup \{0\})$

d) $\{x^2 - x - 1 / x \in \mathbb{R}\}$

$V_x = \frac{-b}{2a} = \frac{1}{2} = min = inf \quad V_y = -\frac{5}{4}$

1- $-5/4 \in D$ pues $-\frac{5}{4} = \frac{1}{2}^2 - \frac{1}{2} - 1$

2- $-\frac{5}{4} \geq x^2 - x - 1 \Rightarrow -\frac{1}{4} \geq x^2 - x$ Inducción

$\nexists$ Sup(D)

supongamos que c es una cota inf de A

$\Rightarrow c \geq x \; \forall x \in D \Rightarrow -c \leq x \; \forall x \in D$

Además, $\forall n \in \mathbb{N} \; \exists x \in D / -x = n$

$\Rightarrow n \geq -c \; \forall n \in \mathbb{N}$ Abs!

Luego por Arquimedes D no es acotado sup

5) Sean $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}, A \neq \emptyset$. Probar

a) Si $\exists \sup(B) \Rightarrow \exists \sup(A)$ y $\sup(A) \leq \sup(B)$

$\exists x \in \mathbb{R} / \forall b \in B, b \leq x$

$\Rightarrow \forall a \in A, a \in B \Rightarrow a \leq x$

$\Rightarrow x$ es cota sup de A

$\sup(B)$ es cota superior de B

$\Rightarrow \sup(B)$ es cota sup de A

$\Rightarrow \sup(A) \leq \sup(B)$

b) Si $\exists \inf(B) \Rightarrow \exists \inf(A)$ y $\inf(B) \leq \inf(A)$

$\exists x \in \mathbb{R} / \forall b \in B, b \geq x$

$\Rightarrow \forall a \in A, a \in B \Rightarrow a \geq x$

$\Rightarrow x$ es cota inf de A

$\inf(B)$ es cota inferior de B

$\Rightarrow \inf(B)$ es cota inf de A

$\Rightarrow \inf(B) \leq \inf(A)$

c) Si A no está acotado $\Rightarrow$ B tampoco

Supongamos que B está acotado superiormente

$\Rightarrow \exists x \in \mathbb{R} / \forall b \in B, b \leq x$ pero como $A \subseteq B$

$\Rightarrow \forall a \in A, a \in B \Rightarrow a \leq x$ Abs! pues A no está acotado

⑥ A y $c \in \mathbb{R}$. $cA = \{ca / a \in A\}$. $-A \doteq -1.A$. Probar

a) Si A está acotado superiormente, entonces $-A$ está acotado inferiormente e $\inf(A) = -\sup(A)$

A acot sup $\Rightarrow \exists x \in \mathbb{R} / \forall a \in A, a \leq x$

$\Rightarrow -x \leq -a \Rightarrow -x$ es cota inf de $-A$

b) Si $c > 0$ y A está acotado superiormente, entonces cA está acotado superiormente y $\sup(cA) = c\sup(A)$

A acot sup $\Rightarrow \exists x \in \mathbb{R} / \forall a \in A, a \leq x$

$ca \leq cx \Rightarrow \exists y \in \mathbb{R} / \forall b \in cA, b \leq y$

$\Rightarrow c.x$ es cota sup de cA

7) $F:[a,b] \to [a,b]$ creciente. Supongamos que $f(a)>a$.

Sea $x_0 = \sup(\{x \in [a,b] / F(x) > x\})$. Probar que $f(x_0)=x_0$

Dado $\varepsilon>0$ cualquiera $\exists x \in [a,b] / f(x) > x$, vale $x \leq x_0$ y como F es creciente $f(x) \leq f(x_0)$

$\Rightarrow x_0 - \varepsilon < x < f(x) \leq f(x_0)$

$x_0 - \varepsilon < f(x_0)$

$x_0 < f(x_0) + \varepsilon \ \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow x_0 \leq f(x_0)$

Supongo que $x_0 < f(x_0)$

Se que $x_0 = \sup(A) \Rightarrow x \leq x_0 \ \forall x / x < f(x)$

Tomo $r \in \mathbb{R} / f(x_0) > r > x_0$

Como $x_0 = \sup(A)$, $r \notin A$ por lo tanto $r \geq f(r)$

$\Rightarrow f(x_0) > r \geq f(r) \Rightarrow f(x_0) > f(r)$ Abs! pq $x_0 < r$ y F creciente

$f(x_0) \leq x_0$

Como $f(x_0) \leq x_0$ y $f(x_0) \geq x_0 \Rightarrow f(x_0) = x_0$

Probar usando la definición de límite:

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{3-2n}{n+1} = -2$

Sea $\varepsilon > 0$ $|a_n+2| = \left|\frac{3-2n}{n+1}+2\right| = \left|\frac{3-2n+2n+2}{n+1}\right|$

$= \left|\frac{5}{n+1}\right| = \frac{5}{n+1} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{5}{\varepsilon} - 1 \leq n$

Tomando $n_0 \in \mathbb{N} / n_0 > \frac{5}{\varepsilon} - 1 \Rightarrow |a_n+2| < \varepsilon \ \forall n \geq n_0$

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0$

Sea $\varepsilon > 0$ $|a_n - 0| = \left|\frac{\sin(n)}{n}\right| = \frac{1}{n} \overbrace{|\sin(n)|}^{\leq 1} \leq \frac{1}{n}$

$\exists$ por Arquímedes

Sea $n_0 / \frac{1}{n_0} < \varepsilon$

$\Rightarrow \forall n \geq n_0, \ \frac{1}{n} < \varepsilon$

$\Rightarrow \left|\frac{\sin(n)}{n}\right| \leq \frac{1}{n} < \varepsilon$

c) $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n-3}{2^n+4} = 1$

Sea $\varepsilon > 0$ $|a_n - 1| = \left|\frac{2^n-3}{2^n+4} - 1\right| = \left|\frac{2^n-3-2^n-4}{2^n+4}\right|$

$= \left|\frac{-7}{2^n+4}\right| = \frac{7}{2^n+4} < \varepsilon$

$\frac{7}{\varepsilon} < 2^n + 4$

$\frac{7}{\varepsilon} - 4 < 2^n$

$\log_2\left(\frac{7}{\varepsilon} - 4\right) < n$

Tomando $n_0 \in \mathbb{N} / n_0 > \log_2\left(\frac{7}{\varepsilon} - 4\right) \Rightarrow |a_n - 1| < \varepsilon \ \forall n \geq n_0$

Scanned with CamScanner

1) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesione de reales / $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} L_1$ e $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} L_2$

Probar que si $x_n \leq y_n \; \forall n \Rightarrow L_1 \leq L_2$

Tomo el conjunto $A = \{x \in x_n \; \forall n \in \mathbb{N}\}$
$B = \{y \in y_n \; \forall n \in \mathbb{N}\}$

Como $\exists$ un $a_n \subseteq A / \lim\limits_{n\to\infty} a_n = L_1$ (específicamente x_n) $\Rightarrow Sup(A) = L_1$

Como $\exists$ un $b_n \subseteq B / \lim\limits_{n\to\infty} b_n = L_2$ (y_n) $\Rightarrow L_2 = Sup(B)$

$a \leq L_1 \; \forall a \in A$ y $b \leq L_2 \; \forall b \in B$

Qvq $\forall a \in A, b \in B \; a \leq b$

Como $x_n \leq y_n \; \forall n$

Dado que $\forall a \in A, a = x_n$ para algún n_0

Como $B = \{y \in y_n \; \forall n\} \Rightarrow \exists$ algún b en $B / b = y_n$ con $n = n_0$

Luego, como $x_n \leq y_n \; \forall n, a \leq b \; \forall a \in A, b \in B$

Supongo $L_1 > L_2$

$L_2 \geq b \; \forall b \in B \Rightarrow L_1 > b \; \forall B$

Como L_1 es $Sup(A)$ $L_1 \geq a \; \forall a \in A \Rightarrow L_1 \geq a > b$ Abs! pq $a \leq b$

$\Rightarrow L_1 \leq L_2$

Scanned with CamScanner

10) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones de reales/
$(x_n)_n$ converge a 0 e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada
Probar que $(x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0.

$(x_n)_n$ converge a 0 $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 0$

$(y_n)_n$ acotada $\Rightarrow \exists\, n>0 / |y_n| \leq n \ \forall\, n\in\mathbb{N}$

Qvq. $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = 0$

Sea $\varepsilon>0$, qvq $\exists\, n_0\in\mathbb{N} / |x_n y_n - 0.n| < \varepsilon \ \forall n > n_0$

$|x_n y_n - 0.n| = |x_n y_n| = |x_n||y_n| \leq |x_n|.n$

$\exists n' / |x_n| < \varepsilon/n \ \forall n \geq n_0$

Si tomo $n_0 = n'$ y $n \geq n_0 \Rightarrow |x_n|.n < \frac{\varepsilon}{\cancel{n}}.\cancel{n} = \varepsilon$

Scanned with CamScanner

⑪ $(x_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathbb{R}$ decreciente. Probar

a) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ acotada inferiormente $\Rightarrow$ tiene límite y

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_n / n\in\mathbb{N}\}$$

Llamo $i = \inf\{x_n / n\in\mathbb{N}\}$ y veo que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = i \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / |x_n - i| < \varepsilon \ \forall n \geq n_0$$

$$-\varepsilon < x_n - i < \varepsilon$$

$$i - \varepsilon < x_n \quad \wedge \quad x_n < \varepsilon + i$$

$$i \leq x_n \qquad x_n \leq x_{n_0} \leq \varepsilon + i \ \forall n \geq n_0$$

i cota inf

$$x_n - i \leq 0 < \varepsilon \ \forall \varepsilon$$

Sea $\varepsilon > 0$. Como $i = \inf\{x_n / n\in\mathbb{N}\}$, $\exists x_{n_0} \in \{x_n / n\in\mathbb{N}\} /$

$$x_n < x_{n_0} \leq \varepsilon + i \ \forall n \geq n_0$$

$$\Rightarrow i + \varepsilon > i \geq x_n$$

$\hookrightarrow$ i es cota inf

Luego, $i - \varepsilon < x_n < i + \varepsilon$

$$|x_n - i| < \varepsilon \ \forall n \geq n_0$$

b) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es no acotada inferiormente $\Rightarrow x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$

$(x_n)_n$ diverge a $-\infty$ si $\forall M > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / -x_n \geq M \ \forall n \geq n_0$

(13) $(x_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathbb{R}$ una sucesión no acotada superiormente.
Probar que $\exists$ una subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ que diverge a $+\infty$

x_{n_k} diverge a $+\infty$ si $\forall\, M>0\ \exists\, n_0\in\mathbb{N} / a_n \geq M\ \forall n\geq n_0$

(14) $(x_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathbb{R}$ y $L \in \mathbb{R}$.

Probar que si toda subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión $(x_{n_{k_j}})_{j\in\mathbb{N}}$ que converge a $L \Rightarrow$ la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a L.

Sea $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Veamos $a = L \Leftrightarrow |a-L| = 0$

Sea $\varepsilon > 0$ y sean $n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0$ $|x_n - x| < \varepsilon/2$

$k_0 \in \mathbb{N} / \forall k \geq k_0$ $|x_{n_k} - L| < \varepsilon/2$

$|L-x| = |L - x_{n_k} + x_{n_k} - x| \leq |L - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x|$

Si $k \geq n_0, k_0 \Rightarrow |x_{n_k} - L| < \varepsilon/2$

$\Rightarrow |x_{n_k} - x| < \varepsilon/2 \rightsquigarrow k > n_0 \Rightarrow n_k > n_0$

Como $\varepsilon > 0$ era arbitrario $\Rightarrow |x-L| < \varepsilon$ $\forall \varepsilon > 0$

Por lo tanto $|x-L| = 0$

Scanned with CamScanner