UBA - exactas
Departamento de Matemática

Análisis Avanzado - Medida 1

Primer cuatrimestre de 2021

Daniel Carando - Victoria Paternostro

Dto. de Matemática - FCEN - UBA

OBJETIVO: • INTEGRAR MÁS FUNCIONES QUE CON LA INTEGRAL DE RIEMANN

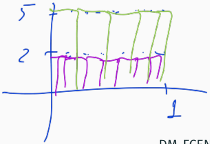
• OBTENER RESULTADOS DE CONVERGENCIA:

$$\underline{f_n} \to \underline{f} \text{ EN } \underline{\text{ALGÚN SENTIDO}} \Rightarrow \int \underline{f_n} \to \int \underline{f}$$

$$f:[0,1] \to \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 5 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \ (x \in [0,1]) \end{cases}$$

<u>NO</u> INT. RIEMANN



$$g(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \in \{0, 1/2, 3/4\}. \\ 5 & \text{si } x \in [0,1] \setminus \{0, 1/2, 3/4\}. \end{cases}$$

$$\to \int_0^1 g(x)\,dx \underset{\downarrow}{=} \int_0^1 5\,dx$$

g VALE 5 salvo "$\overbrace{\text{MUY POCOS}}^{\text{FINITOS}}$ PUNTOS"

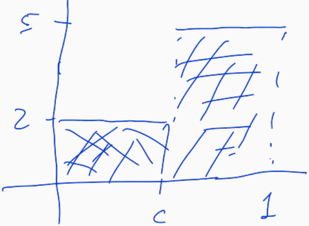
$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 5 & \text{si } x \notin \mathbb{Q},\ x \in [0,1]. \end{cases}$$

f VALE 5 SALVO POCOS PUNTOS

↳ NUMERABLES

Para $0 < c < 1$, sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{si } 0 \leq x \leq c \\ 5, & \text{si } c < x \leq 1. \end{cases}$$



$$\int_0^1 f = 2(c-0) + 5(1-c) = 2\,\mathrm{long}((0,c)) + 5\,\mathrm{long}((c,1))$$

$$= 2\,\mu((0,c)) + 5\,\mu((c,1))$$

MEDIDA

Escribamos el intervalo $[0,1]$ como una unión disjunta de dos conjuntos:

$$[0,1] = A \cup B \quad , \text{con } A \cap B = \emptyset.$$

Escribamos el intervalo $[0,1]$ como una unión disjunta de dos conjuntos:

$$[0,1] = A \cup B \quad , \text{con } A \cap B = \emptyset.$$

Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \underline{2}, & \underline{\text{si } x \in A} \leftarrow \\ 5, & \text{si } x \in B. \leftarrow \end{cases}$$

IDEA:

$$\int_0^1 f = 2\mu(A) + 5\mu(B)$$

MEDIDA DE A

MEDIDA DE B

NECESITAMOS SABER MEDIR CONJUNTOS DE $\mathbb{R}$.

Tomemos $A = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ y $B = [0, 1] \setminus \mathbb{Q} = [0, 1] \cap \mathbb{I}$.

Tomemos $A = [0,1] \cap \mathbb{Q}$ y $B = [0,1] \setminus \mathbb{Q} = [0,1] \cap \mathbb{I}$.
Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{si } x \in \mathbb{Q},\ 0 \leq x \leq 1 \\ 5, & \text{si } x \notin \mathbb{Q},\ 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

$$\int_0^1 f \underset{\downarrow}{=} 2\mu(\underbrace{\mathbb{Q} \cap [0,1]}) + 5\mu(\underbrace{[0,1] \setminus \mathbb{Q}}).$$

DEBERÍA SER

NO SON INTERVALOS

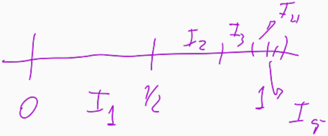
Queremos definir una noción de medida para conjuntos que no sean necesariamente intervalos y que cumpla algunas propiedades *razonables*.

PROPS RAZONABLES: $A \subset B \Rightarrow \mu(A) \le \mu(B)$

$$\boxed{\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) \quad (\text{si } A \cap B = \emptyset)}$$

$$\mu(A \cup B) \le \mu(A) + \mu(B)$$

$$\mu(A + c) = \mu(A) \quad \forall c \in \mathbb{R}$$



$$[0,1] = \bigcup_k I_k \qquad I_k \cap I_\ell = \emptyset \quad k \ne \ell.$$

$$\text{long}([0,1]) = 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\text{long}(I_k)}_{1/2^k}$$

QUEREMOS: $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \quad \left(A_n \cap A_m = \emptyset,\ n \ne m\right)$

El primer paso es definir los conjuntos que "miden cero".

El primer paso es definir los conjuntos que “miden cero”.
Todavía no tenemos una medida definida, pero podemos calcular longitudes de intervalos:

El primer paso es definir los conjuntos que “miden cero”.
Todavía no tenemos una medida definida, pero podemos calcular longitudes de intervalos:

Si $U = (a, b)$, $a < b$, su longitud es

$$\operatorname{long}(U) = \begin{cases} b - a, & \text{si } a, b \text{ son finitos} \\ +\infty, & \text{si alguno es infinito.} \end{cases}$$

El primer paso es definir los conjuntos que “miden cero”.
Todavía no tenemos una medida definida, pero podemos calcular longitudes de intervalos:

Si $U = (a, b)$, $a < b$, su longitud es

$$\operatorname{long}(U) = \begin{cases} b - a, & \text{si } a, b \text{ son finitos} \\ +\infty, & \text{si alguno es infinito.} \end{cases}$$

Definición

Decimos que $A \subset \mathbb{R}$ es un conjunto nulo si para todo $\varepsilon >$ o existen contables intervalos abiertos $(U_n)_{n \in J}$ tales que

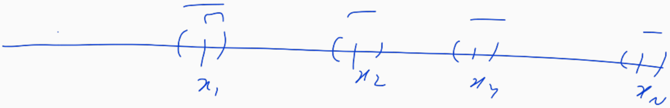
$$A \subset \bigcup_{n \in J} U_n \quad \text{y} \quad \sum_{n \in J} \operatorname{long}(U_n) < \varepsilon.$$

Ejemplo

1. Todo conjunto finito es nulo.

$A = \{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$. Dado $\varepsilon > 0$,

$$\rightarrow A \subset \bigcup_{j=1}^{N} \underbrace{\left(x_j - \frac{\varepsilon}{4N}, x_j + \frac{\varepsilon}{4N}\right)}_{U_j} \qquad \mu(U_j) = \frac{\varepsilon}{2N}$$



$$\sum_{j=1}^{N} \operatorname{long}(U_j) = N \frac{\varepsilon}{2N} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Ejemplo

1. Todo conjunto finito es nulo.
2. Todo conjunto numerable es nulo. EJERCICIO

Ejemplo

1. Todo conjunto finito es nulo.
2. Todo conjunto numerable es nulo.
3. Unión numerable de conjuntos nulos es nulo.

Obs: HAY CONJUNTOS NULOS DE CARDINAL c.

(EJEMPLO: CONJ. DE CANTOR).

Definición

Sea X un conjunto y $\mathcal{A}$ una familia de subconjuntos de X (o sea, $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$).

Definición

Sea X un conjunto y $\mathcal{A}$ una familia de subconjuntos de X (o sea, $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$). Decimos que $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra si $X \in \mathcal{A}$ y es cerrada por complementos (respecto a X) y uniones numerables.

$X \in \mathcal{A}$, si $A \in \mathcal{A} \Rightarrow X \setminus A \in \mathcal{A}$.

Si $A_n \in \mathcal{A}$ $\forall n \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

$A_n \in \mathcal{A}$ $\forall n$, $\bigcap_n A_n = X \setminus \left[\bigcup_n (X \setminus A_n)\right] \in \mathcal{A}$.

$\emptyset \in \mathcal{A}$ $\quad \emptyset = X \setminus \underbrace{X}_{\in \mathcal{A}}$

Definición

Sea X un conjunto y $\mathcal{A}$ una familia de subconjuntos de X (o sea, $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$). Decimos que $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra si $X \in \mathcal{A}$ y es cerrada por complementos (respecto a X) y uniones numerables.

Ejemplo

1. $\mathcal{A} = \{\emptyset, X\}$

Definición

Sea X un conjunto y $\mathcal{A}$ una familia de subconjuntos de X (o sea, $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$). Decimos que $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra si $X \in \mathcal{A}$ y es cerrada por complementos (respecto a X) y uniones numerables.

Ejemplo

1. $\mathcal{A} = \{\emptyset, X\}$
2. Fijado $B \subset X$, $\mathcal{A} = \{\emptyset, B, X \setminus B, X\}$ ✓

Definición

Sea X un conjunto y $\mathcal{A}$ una familia de subconjuntos de X (o sea, $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$). Decimos que $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra si $X \in \mathcal{A}$ y es cerrada por complementos (respecto a X) y uniones numerables.

Ejemplo

1. $\mathcal{A} = \{\emptyset, X\}$
2. Fijado $B \subset X$, $\mathcal{A} = \{\emptyset, B, X \setminus B, X\}$
3. $\mathcal{A} = \{A \subset \mathbb{R} : A \text{ finito o } \mathbb{R} \setminus A \text{ finito}\}$ NO es σ-álgebra

Definición

Sea X un conjunto y $\mathcal{A}$ una familia de subconjuntos de X (o sea, $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$). Decimos que $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra si $X \in \mathcal{A}$ y es cerrada por complementos (respecto a X) y uniones numerables.

Ejemplo

1. $\mathcal{A} = \{\emptyset, X\}$
2. Fijado $B \subset X$, $\mathcal{A} = \{\emptyset, B, X \setminus B, X\}$
3. $\mathcal{A} = \{A \subset \mathbb{R} : A \text{ finito o } \mathbb{R} \setminus A \text{ finito}\}$ NO es σ-álgebra
4. $\mathcal{A} = \{A \subset \mathbb{R} : A \text{ contable o } \mathbb{R} \setminus A \text{ contable}\}$ SÍ (EJERC.)

Definición

La σ-álgebra $\mathcal{M}$ generada por los intervalos abiertos y los conjuntos nulos de $\mathbb{R}$ es la σ-álgebra de ~~de~~ conjuntos medibles Lebesgue.

$$\mathcal{M} = \bigcap_{\substack{\mathcal{A}\ \sigma\text{-álg.} \\ \text{que contiene a los} \\ \text{int. ab. y a los} \\ \text{nulos.}}} \mathcal{A} \quad \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$$

$\mathcal{M}$ es una σ-álg.

EN $\mathcal{M}$ están los inter. ab., los nulos y lo que obtengamos uniendo, intersecando, tomando complementos repetidas veces.

EJEMPLO: $[1,4] = \underbrace{(1,4)}_{\in\mathcal{M}} \cup \underbrace{\{1\}}_{\in\mathcal{M}} \cup \underbrace{\{4\}}_{\in\mathcal{M}} \in \mathcal{M}$

$= \mathbb{R} \setminus \left((-\infty,1) \cup (4,+\infty) \right) \in \mathcal{M}.$

Definición

La σ-álgebra $\mathcal{M}$ generada por los intervalos abiertos y los conjuntos nulos de $\mathbb{R}$ es la σ-álgebra de de conjuntos medibles Lebesgue.

IDEA: "MEDIR" LOS CONJUNTOS MEDIBLES

$$\underline{A \in \mathcal{M}} \rightsquigarrow \underline{\mu(A) \in \mathbb{R}}$$

$$\underbrace{\mu : \underline{\mathcal{M}} \longrightarrow \underbrace{[0, +\infty]}}.$$

Teorema (existencia de la *medida de Lebesgue*)

Existe una única función μ de $\mathcal{M}$ en $[0, +\infty]$ tal que

- Si $A = (a, b)$, entonces $\mu(A) = \underbrace{b - a}_{}$.

long. de (a, b)

Teorema (existencia de la *medida de Lebesgue*)

Existe una única función μ de $\mathcal{M}$ en $[0, +\infty]$ tal que

- Si $A = (a, b)$, entonces $\mu(A) = b - a$.
- Si $A_n \in \mathcal{M}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

Teorema (existencia de la *medida de Lebesgue*)

Existe una única función μ de $\mathcal{M}$ en $[0, +\infty]$ tal que

- Si $A = (a, b)$, entonces $\mu(A) = b - a$.
- Si $A_n \in \mathcal{M}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

Si los A_n son disjuntos dos a dos, entonces

$$\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

σ - aditividad

Teorema (existencia de la *medida de Lebesgue*)

NO LO PROBAMOS.

Existe una única función μ de $\mathcal{M}$ en $[0, +\infty]$ tal que

- Si $A = (a, b)$, entonces $\mu(A) = b - a$.
- Si $A_n \in \mathcal{M}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

  Si los A_n son disjuntos dos a dos, entonces

$$\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

- Si $A \in \mathcal{M}$, entonces

los ab. son medibles

REGULARIDAD

$$\mu(A) = \inf\{\mu(U) : U \supset A,\ U \text{ abierto}\}.$$

Observación

La medida del vacío es cero: $\boxed{\mu(\emptyset) = 0.}$

$A_1 = (0,1)$ $\quad$ $A_n = \phi$ $\quad \forall n \geq 2.$

$(0,1) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \qquad A_n \cap A_m = \phi$

$\Rightarrow$ TEO $\underbrace{\mu((0,1))}_{\substack{\shortparallel \\ 1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \underbrace{\mu(0,1)}_{\substack{\shortparallel \\ 1}} + \sum_{n=2}^{\infty} \mu(\phi)$

$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \underbrace{\mu(\phi)}_{\geq 0} = 0 \quad \Rightarrow \mu(\phi) = 0.$

Observación

La medida del vacío es cero: $\mu(\emptyset) = 0.$

Observación

Si $A, B \in \mathcal{M}$, entonces $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$.

$A_1 = A, \quad A_2 = B \quad A_n = \emptyset \quad \forall n \geq 3.$

$$\mu(A \cup B) = \mu\Big(\bigcup_n A_n\Big) \leq \sum_n \mu(A_n) = \overset{0}{''}$$

$$= \mu(A) + \mu(B) + \sum_{n=3}^{+\infty} \overbrace{\mu(\emptyset)}$$

$$= \mu(A) + \mu(B)$$

Observación

La medida del vacío es cero: $\mu(\emptyset) = 0.$

Observación

Si $A, B \in \mathcal{M}$, entonces $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$.

Si $A \cap B = \emptyset$, entonces $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.

MISMA CUENTA (donde decía $\leq$ ponemos $=$)

Definimos por un lado los conjuntos nulos y, ahora que tenemos la medida de Lebesgue, podemos considerar los conjuntos que miden 0. ¿Son los mismos conjuntos?

Definimos por un lado los conjuntos nulos y, ahora que tenemos la medida de Lebesgue, podemos considerar los conjuntos que miden 0. ¿Son los mismos conjuntos? **¡Sí!**

Definimos por un lado los conjuntos nulos y, ahora que tenemos la medida de Lebesgue, podemos considerar los conjuntos que miden 0. ¿Son los mismos conjuntos? **¡Sí!**

Proposición

Todo abierto de $\mathbb{R}$ es unión contable de intervalos abiertos.

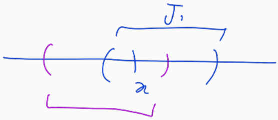
$V \subseteq \mathbb{R}$ abierto. Dado $x \in V$ $\exists\, \varepsilon > 0 \,/\, (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset V$

Sea I_x el MAYOR INTERVALO ABIERTO /

$x \in I_x \subset V$

Obs: $x, y \in V$ $\quad x \in I_x \subset V$

$y \in I_y \subset V$



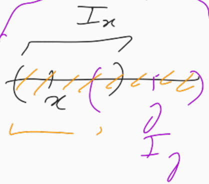
$J_1 \cup J_2$ es un int. ab

$x, y \in V \qquad x \in I_x \subset V \quad , \quad y \in I_y \subset V$

$\Rightarrow \quad I_x \cap I_y = \emptyset \quad$ ó $\quad I_x \cap I_y \neq \emptyset$

$\Downarrow$

$I_x = I_y$



NO PUEDE SER

$I_x \cup I_y$ es intervalo

$x \in I_x \cup I_y \subset V$

$$V = \bigcup_{x \in V} I_x = \bigcup_{j \in J} I_{x_j}$$

$\downarrow$

TACHAMOS LOS REPETIDOS

$$V = \bigcup_{j \in J} I_{x_j}$$

I_{x_j} interv. ab. no vacío

$I_{x_j} \cap I_{x_k} = \emptyset \quad i \neq j$

$\Longrightarrow$ J es CONTABLE

EJ PR.

CARDINALIDAD