UBA - exactas
Departamento de Matemática

Análisis Avanzado - Espacios Normados 1 (1ra parte)

Primer cuatrimestre de 2021

Daniel Carando - Victoria Paternostro

Dto. de Matemática - FCEN - UBA

① $\mathbb{R}^n$ $\quad d_1, d_2, d_\infty$

② $\delta \to$ discreta

③ en $\mathbb{R}$ $\quad d(s,t) = \left| \dfrac{s}{1+|s|} - \dfrac{t}{1+|t|} \right|$

④ $C[0,1]$ $\quad d_1, d_\infty$

①, ④ $\quad d(x,y) = $ " $\| x - y \|$ "

UNA CUENTA CON $X - Y$

① y ④

VALE $\quad d(2X, 0) = 2\, d(X, 0)$

NO VALE en ② y ③

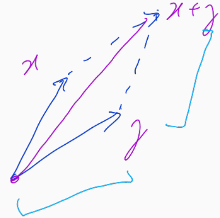
Definición

Sea E espacio vectorial (sobre $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$). Una función $\|\cdot\| : E \to [0, +\infty)$ es una **norma** si verifica las siguientes propiedades

(1) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$. DESIG. TRIANGULAR

(2) $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$.

(3) $\|x\| = 0$ si y sólo si $x = 0$.



Definición

Sea E espacio vectorial (sobre $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$). Una función $\|\cdot\| : E \to [0, +\infty)$ es una norma si verifica las siguientes propiedades

(1) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

(2) $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$.

(3) $\|x\| = 0$ si y sólo si $x = 0$.

Un espacio vectorial E con una norma se llama un espacio normado. $(E, \|\ \|)$

Definición

Sea E espacio vectorial (sobre $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$). Una función $\|\cdot\| : E \to [0, +\infty)$ es una norma si verifica las siguientes propiedades

(1) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

(2) $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$.

(3) $\|x\| = 0$ si y sólo si $x = 0$.

Un espacio vectorial E con una norma se llama un espacio normado.

Observación

Si E es un espacio normado, entonces es un espacio métrico con la distancia $d(x, y) = \|x - y\|$.

↳ EJ: VER QUE ES DISTANCIA

Definición

Sea E espacio vectorial (sobre $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$). Una función $\|\cdot\| : E \to [0, +\infty)$ es una norma si verifica las siguientes propiedades

(1) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

(2) $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$.

(3) $\|x\| = 0$ si y sólo si $x = 0$.

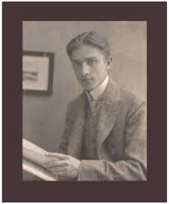
Un espacio vectorial E con una norma se llama un espacio normado.

Observación

Si E es un espacio normado, entonces es un espacio métrico con la distancia $d(x, y) = \|x - y\|$.

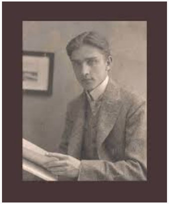
Definición

Un espacio normado que es completo con la distancia $d(x, y) = \|x - y\|$ se llama un espacio de Banach.



Stefan Banach
(1892-1945)

Teorema del punto fijo



Stefan Banach
(1892-1945)

Teorema del punto fijo

?

BANACH

Observación

Todo espacio normado es métrico, pero no todo espacio métrico es un normado.

Si (E, d) es normado (d viene de una norma)

$\Rightarrow$ · E es e.v.

· $\|x\| = \|x - 0\| = d(x, 0)$.

EJ: $(\mathbb{R}^n, \delta)$ no normado

$(\mathbb{R}, d)$ $\quad d(s,t) = \left| \frac{s}{1+|s|} - \frac{t}{1+|t|} \right|$.

Observación

Todo espacio normado es métrico, pero no todo espacio métrico es un normado.

Ejemplos de espacios normados:

$\mathbb{R}^n$ con $\| \|_1$, $\| \|_2$, $\| \|_\infty$.

son normados

$C[0,1]$, $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\, dt$

$\|f\|_\infty = \max_{0 \leq t \leq 1} |f(t)|$.

- K compacto, $C(K) = \{ f : K \to \mathbb{R} \text{ cont} \}$.

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in K} |f(x)|.$$

- X e.m., $C_b(X) = \{ f : X \to \mathbb{R} \text{ cont y acot} \}$

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

$\boxed{(C[0,1], \| \|_1) \text{ \underline{NO} BANACH}}$

LOS OTROS EJEMPLOS SON BANACH

Ejercicio

Si E es un espacio normado, la suma es continua en $E \times E$ y el producto es continuo en $\mathbb{R} \times E$.

$$\left.\begin{array}{l} + : E \times E \to E \\ \quad (x, y) \mapsto x + y \\ \\ \cdot \quad \mathbb{R} \times E \to E \\ \quad (\lambda, x) \mapsto \lambda x \end{array}\right] \quad \text{CONTINUAS}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_n \to x, \quad y_n \to y \quad \text{en } E \\ \quad \lambda_n \to \lambda \quad \text{en } \mathbb{R} \end{array}\right] \Longrightarrow \begin{array}{l} x_n + y_n \to x + y \\ \lambda_n x_n \to \lambda x \end{array}$$

Ejercicio

Si E es un espacio normado, la suma es continua en $E \times E$ y el producto es continuo en $\mathbb{R} \times E$.

Observación

En los espacios normados pasan algunas cosas que vemos en $\mathbb{R}^n$ pero no en métricos generales:

$$\overline{B}(x,r) = \overline{B(x,r)} \quad , \quad \text{diám}(B(x,r)) = 2r.$$

$$x \neq 0, \quad \left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| = 1 \quad , \quad \left\| \frac{\lambda x}{\|x\|} \right\| = |\lambda|$$

$$B(x,r) = x + B(0,r) = \{x+y : y \in B(0,r)\}.$$

$$\text{EJ} = x + r\,B(0,1) = \{x + ry : y \in B(0,1)\}$$