Análisis Avanzado - Funciones medibles

Segundo cuatrimestre de 2021

Daniel Carando - Victoria Paternostro

Dto. de Matemática - FCEN - UBA

$[0,1] = A \cup B$, con $A \cap B = \emptyset$.

Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{si } x \in A \\ 5, & \text{si } x \in B. \end{cases}$$

IDEA

$\int f = 2\mu(A) + 5\mu(B)$

(si A y B son medibles).

FUNCIONES SIMPLES

La función característica de $A \subset \mathbb{R}$ es $\chi_A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in A \\ 0, & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

La función característica de $A \subset \mathbb{R}$ es $\chi_A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in A \\ 0, & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

Definición

Sea $E \subset \mathbb{R}$ Una partición de E es una colección de conjuntos $(E_n)_n$ de conjuntos disjuntos dos a dos tales que

$$E = \bigcup_n E_n.$$

La función característica de $A \subset \mathbb{R}$ es $\chi_A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\underbrace{\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in A \\ 0, & \text{si } x \notin A. \end{cases}}$$

Definición

Sea $E \subset \mathbb{R}$ Una partición de E es una colección de conjuntos $(E_n)_n$ de conjuntos disjuntos dos a dos tales que

$$E = \underbrace{\bigcup_n E_n}.$$

Si E es medible, decimos que la partición es medible si cada E_n es medible.

Definición

$E \subset \mathbb{R}$

Una función $f : E \to \mathbb{R}$ se dice simple si existe una partición de E en finitos conjuntos $E_1, \dots, E_N$ y números $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \mathbb{R}$ tales que

$$E = \bigcup_{n=1}^{N} E_n$$

$$\longrightarrow \quad f(x) = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \underbrace{\chi_{E_n}(x)}_{= \begin{cases} 1 & \text{si } x \in E_n \\ 0 & \text{si } x \notin E_n \end{cases}}.$$

$$E_n \cap E_m = \emptyset \quad n \neq m$$

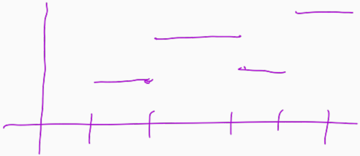
$$\longrightarrow \quad \underbrace{f(x) = \alpha_n \quad \text{si } x \in E_n}$$

Definición

Una función $f : E \to \mathbb{R}$ se dice simple si existe una partición de E en finitos conjuntos $E_1, \dots, E_N$ y números $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \mathbb{R}$ tales que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \, \chi_{E_n}(x).$$

Si los E_n son intervalos, decimos que f es simple escalonada o escalonada a secas.



ESCALONADA

Observación

$f: E \to \mathbb{R}$ $\quad E \subset \mathbb{R}$

- Las funciones simples son las funciones que toman finitos valores (su imagen es un conjunto finito).

f simple $\iff$ $\mathrm{Im}\, f$ es un conj finito.

$\Rightarrow)$ Si $\underbrace{f = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \chi_{E_n}}$ $\Rightarrow$ $\mathrm{Im}\, f = \underbrace{\{\alpha_1, \dots, \alpha_N\}}$.

$\Leftarrow)$ si $\underbrace{\mathrm{Im}\, f} = \underbrace{\{\beta_1, \dots, \beta_M\}}_{\text{(distintos)}}$. $\quad E_m = \underbrace{\{x \in E : f(x) = \beta_m\}}$.

$\Rightarrow$ $\underbrace{f = \sum_{m=1}^{M} \beta_m \chi_{E_m}}$ $\Rightarrow$ f es simple.

Observación

- Las funciones simples son las funciones que toman finitos valores (su imagen es un conjunto finito).
- Una función simple $f : E \to \mathbb{R}$ siempre se puede pensar como definida en todo $\mathbb{R}$, extendiéndola para que valga 0 fuera de E. La extensión sigue siendo simple porque a lo sumo agregamos un elemento a la imagen.

$f : E \to \mathbb{R}$ simple

$\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ / $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in E \\ 0 & \text{si } x \notin E. \end{cases}$

$\tilde{f}$ SIMPLE

Observación

- Las funciones simples son las funciones que toman finitos valores (su imagen es un conjunto finito).
- Una función simple $f : E \to \mathbb{R}$ siempre se puede pensar como definida en todo $\mathbb{R}$, extendiéndola para que valga 0 fuera de E. La extensión sigue siendo simple porque a lo sumo agregamos un elemento a la imagen.

Observación

- Si f es una función simple, entonces $|f|$, f^2, e^f son funciones simples.

• si $\operatorname{Im} f$ FINITA $\Rightarrow$ $\operatorname{Im} |f|$ FINITA

$\operatorname{Im}(f^2)$

$\operatorname{Im}(e^f)$

OTRA FORMA:

si $f = \sum_{n=1} \alpha_n \chi_{E_n}$

$$\boxed{|f(x)| = \sum |\alpha_n| \chi_{E_n}}$$

(EJERCICIO).

Observación

- Las funciones simples son las funciones que toman finitos valores (su imagen es un conjunto finito).
- Una función simple $f : E \to \mathbb{R}$ siempre se puede pensar como definida en todo $\mathbb{R}$, extendiéndola para que valga 0 fuera de E. La extensión sigue siendo simple porque a lo sumo agregamos un elemento a la imagen.

Observación

- Si f es una función simple, entonces $|f|$, f^2, e^f son funciones simples.
- Si f y g son simples y $s, t \in \mathbb{R}$, entonces $sf + tg$ es simple.

c.l. de simples es simple

$\operatorname{Im} f = \{\alpha_1, \dots, \alpha_N\}$ $\quad \operatorname{Im} g = \{\beta_1, \dots, \beta_M\}$

$\Rightarrow \underbrace{\operatorname{Im}(sf + tg)}_{\text{FINITO}} \subseteq \{s\alpha_n + t\beta_m : 1 \le n \le N,\ 1 \le m \le M\}$ FINITO

$\hookrightarrow$ PENSAR.

Sea $f : E \to \mathbb{R}$ una función simple que se escribe

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \, \chi_{E_n}(x)$$

con los E_n disjuntos dos a dos.

Sea $f : E \to \mathbb{R}$ una función simple que se escribe $E = \bigcup_{n=1}^{N} E_n$.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \, \chi_{E_n}(x)$$

con los E_n disjuntos dos a dos. Decimos que f es simple medible si cada E_n es medible. (E TIENE QUE SER MEDIBLE)

Sea $f : E \to \mathbb{R}$ una función simple que se escribe

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \, \chi_{E_n}(x)$$

con los E_n disjuntos dos a dos. Decimos que f es simple medible si cada E_n es medible. A partir de ahora, cuando decimos *simple* nos referiremos a *simple medible*.

OBS: f SIMPLE MEDIBLE $\forall\, a \in \mathbb{R}$

$\to \{x \in E \,/\, f(x) = a\}$ MEDIBLE ✓

$\{x \in E \quad f(x) \leq a\}$ " UNIÓN DE ALGUNOS E_n

$= \emptyset$ salvo para $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$

Sea $f : E \to \mathbb{R}$ una función simple que se escribe

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \, \chi_{E_n}(x)$$

con los E_n disjuntos dos a dos. Decimos que f es simple medible si cada E_n es medible. A partir de ahora, cuando decimos *simple* nos referiremos a *simple medible*.

Definición

Sean $E \in \mathcal{M}$ y $f : E \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ (f puede valer $+\infty$ o $-\infty$ en algunos puntos).

Sea $f : E \to \mathbb{R}$ una función simple que se escribe

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \, \chi_{E_n}(x)$$

con los E_n disjuntos dos a dos. Decimos que f es simple medible si cada E_n es medible. A partir de ahora, cuando decimos *simple* nos referiremos a *simple medible*.

Definición

Sean $E \in \mathcal{M}$ y $f : E \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ (f puede valer $+\infty$ o $-\infty$ en algunos puntos). Decimos que f es medible si para todo $a \in \mathbb{R}$ el conjunto

$$\{x \in E : f(x) \leq a\} = f^{-1}((-\infty, a])$$

es medible.

Ejemplo

- Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua, entonces es medible.

$$\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \leq a\} = f^{-1}(\underbrace{(-\infty, a]}_{\text{CERRADO}}) \quad \text{CERRADO}$$

CERRADO $\Rightarrow$ ES

f CONT MEDIBLE

Ejemplo

- Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua, entonces es medible.
- Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es creciente, entonces es medible. (ÍDEM DECREC)

f CREC (O DECREC):

(EJERCICIO)

$\{x \in \mathbb{R} \,/\, f(x) \leq a\} \rightarrow$ INTERVALO

$\Rightarrow$ MEDIBLE

Ejemplo

- Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua, entonces es medible.
- Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es creciente, entonces es medible.
- Si f es simple medible entonces es medible.

Proposición

Sea E medible y $f : E \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Son equivalentes:

(a) f es medible (para todo $a \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{x \in E : f(x) \leq a\}$ es medible).

Proposición

Sea E medible y $f : E \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Son equivalentes:

(a) f es medible (para todo $a \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{x \in E : f(x) \leq a\}$ es medible).

(b) Para todo $a \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{x \in E : f(x) < a\}$ es medible.

por (a) es medible.

(a) ⇒ (b) $\{x \in E : f(x) < a\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x \in E \,/\, f(x) \leq a - 1/n\}$

$f(x) < a \iff \exists n \,/\, f(x) \leq a - 1/n \iff \exists n \,/\, x \in$

Proposición

Sea E medible y $f : E \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Son equivalentes:

(a) f es medible (para todo $a \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{x \in E : f(x) \leq a\}$ es medible).

(b) Para todo $a \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{x \in E : f(x) < a\}$ es medible.

(c) Para todo $a \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{x \in E : f(x) \geq a\}$ es medible.

(b) $\Rightarrow$ (c)

$$\{x \in E / f(x) \geq a\} = E \setminus \{x \in E / f(x) < a\}$$

$$\underbrace{= \underbrace{E}_{\text{med}} \cap \underbrace{\left(\mathbb{R} \setminus \underbrace{\{x \in E / f(x) < a\}}_{\text{med} \times (b)}\right)}_{\text{med } (\mathcal{M}\ \sigma\text{-álg})}}_{\text{med } (\mathcal{M}\ \sigma\text{-álg})}$$

Proposición

Sea E medible y $f : E \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Son equivalentes:

(a) f es medible (para todo $a \in \mathbb{R}$, el conjunto $\underbrace{\{x \in E : f(x) \leq a\}}_{=\{f \leq a\}}$ es medible).

(b) Para todo $a \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{x \in E : f(x) < a\}$ es medible.

(c) Para todo $a \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{x \in E : f(x) \geq a\}$ es medible.

(d) Para todo $a \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{x \in E : f(x) > a\}$ es medible.

$(c) \Rightarrow (d)$ $\quad \{x \in E / f(x) > a\} = \{f > a\}.$

NOTACIÓN

$\{f > a\} = \bigcup_{m} \underbrace{\{f \geq a + 1/m\}}_{\text{med } \forall m \ (x\ (c))} \rightarrow$ MED.

EJ

$(d) \Rightarrow (a)$ $\quad \{f \leq a\} = E \setminus \underbrace{\{f > a\}}_{\text{med x } (d)}$ MED.

- Combinación lineal de medibles es medible. $\rightarrow$ si está definida.

DEM: VEAMOS que si f, g MED y $f+g$ ESTÁ DEFINIDA (NO VALE $(+\infty)+(-\infty)$ o $(-\infty)+(+\infty)$) $\Rightarrow f+g$ MED.

Sea $\underbrace{\{q_n : n \in \mathbb{N}\}}$ NUMERACIÓN DE $\mathbb{Q}$.

x cumple : $\underbrace{f(x)+g(x)>a} \iff f(x)>a-g(x) \iff \underbrace{\exists n \,/\, \overbrace{f(x)>q_n>a-g(x)}}$

$$\{f+g>a\} = \bigcup_n \underbrace{\{f>q_n\}}_{\text{MED}} \cap \underbrace{\{g>a-q_n\}}_{\text{MED}} \quad \text{MED}$$

- Combinación lineal de medibles es medible.
- Producto de medibles es medible.

DEM: h MED $\Rightarrow$ h^2 MED:

$a<0$, $\{h^2 \leq a\}$ VACÍO (MED)

$a \geq 0$ $\{h^2 \leq a\} = \{-\sqrt{a} \leq h \leq a\} =$

$\{-\sqrt{a} \leq h\} \cap \{h \leq a\}$ MEDIBLE

f, g MED, $f \cdot g = \dfrac{(f+g)^2 - (f-g)^2}{4}$ MEDIBLE

- Combinación lineal de medibles es medible.
- Producto de medibles es medible.
- Supremo o ínfimo de una suc. de funciones medibles es medible.

$(f_n)_n$, f_n med. p/ todo n.

$f(x) = \sup_n f_n(x)$

$\circ$ $\underbrace{\sup_n f_n(x) > a}$ $\iff$ $\exists n$ / $\underbrace{f_n(x) > a}$

$\underbrace{\{f > a\}} = \bigcup_n \underbrace{\{f_n > a\}}$ MEDIBLE

(Cada f_n es med.)

$\inf_n f_n = - \sup_n (-f_n)$

- Combinación lineal de medibles es medible.
- Producto de medibles es medible.
- Supremo o ínfimo de una suc. de funciones medibles es medible.
- Límite puntual de una suc. de funciones medibles es medible.

f_n med $\forall n$ y $\exists\, f(x) = \underbrace{\lim_n f_n(x)}_{\exists \text{ el lím}}$ $\forall x \in E$ $\Rightarrow f$ MED

Sea $a \in \mathbb{R}$, $\boxed{f(x) > a} \Leftrightarrow \exists m \,/\, \underbrace{f(x)}_{\substack{\shortparallel \\ \lim_k f_k(x)}} > \underbrace{a + \frac{1}{m}} \Leftrightarrow$

$\exists m$

$\exists n \,/\, f_k(x) > a + 1/m \quad \forall k \geq n.$

$\{f > a\} = \bigcup_m \bigcup_n \bigcap_{k \geq n} \underbrace{\{f_k > a + 1/m\}}_{\text{MED } \forall k,\, m}$. MED

Ejercicio:

Teorema

Sea $f : E \to [0, +\infty]$ medible. Entonces, existe una sucesión creciente $(f_n)_n$ de funciones simples no negativas que converge puntualmente a f en E:

Teorema

Sea $f : E \to [0, +\infty]$ medible. Entonces, existe una sucesión creciente $(f_n)_n$ de funciones simples no negativas que converge puntualmente a f en E:

$$0 \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \quad \forall x \in E, n \in \mathbb{N} \quad \text{y} \quad f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad \forall x \in E.$$

Teorema

Sea $f : E \to [0, +\infty]$ medible. Entonces, existe una sucesión creciente $(f_n)_n$ de funciones simples no negativas que converge puntualmente a f en E:

$$0 \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \quad \forall x \in E, n \in \mathbb{N} \quad \text{y} \quad f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad \forall x \in E.$$

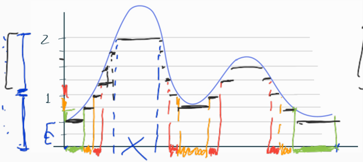
Si f es acotada, la sucesión converge a f uniformemente en E.

Teorema

Sea $f : E \to [0, +\infty]$ medible. Entonces, existe una sucesión creciente $(f_n)_n$ de funciones simples no negativas que converge puntualmente a f en E:

$$0 \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \quad \forall x \in E, n \in \mathbb{N} \quad \text{y} \quad f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad \forall x \in E.$$

[Si f es acotada, la sucesión converge a f uniformemente en E.]



PARA CADA n, miramos el conj

$\boxed{E^n = \{x \in E / f(x) < n\}}$ y lo partimos

en $E^n_j = \{x \in E / \frac{j-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{j}{2^n}\}$

$= f^{-1}\left(\left[\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n}\right)\right)$ $\quad j = 1, 2, \ldots, n2^n$

$n = 2$ $\quad 2 \cdot 2^2 = 8$ CONJ.

$E^2_1 = f^{-1}([0, \frac{1}{4})) = \emptyset$

$E^2_2 = \emptyset$

$E^2_3 = f^{-1}([\frac{2}{4}, \frac{3}{4}))$ $\quad E^2_4$ $\quad E^2_5$

Obs: $E^n_j = \{f < \frac{j}{2^n}\} \cap \{f \geq \frac{j-1}{2^n}\}$

MED $\forall j, \forall n$

$E_j^n = \{ x : \frac{j-1}{2^n} \le f(x) < \frac{j}{2^n} \}$. $j = 1, 2, \ldots, n2^n$

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{j-1}{2^n} & x \in E_j^n \iff \frac{j-1}{2^n} \le f(x) < \frac{j}{2^n} \\ n & \text{si } f(x) \ge n \end{cases}$$

f_n SIMPLE $\forall n$. (TOMA FINITOS VALORES), MEDIBLE) (VER)

EJ: $f_n(x) \le f_{n+1}(x)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in E$.

VEAMOS QUE $\boxed{\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)}$ $\forall x \in E$.

$\boxed{\text{si } f(x) = +\infty}$

$\Rightarrow f(x) \ge n \ \forall n \Rightarrow f_n(x) = n \ \forall n$

$f_n(x) = n \longrightarrow +\infty = f(x)$.

Si $f(x) \in [0,+\infty) \Rightarrow \exists n_0 / f(x) < n_0 \leq n$

Dado $n \geq n_0$, $x \in E_j^n$ p/ algún j. $\forall n \geq n_0$

$$\underbrace{f(x) < n}_{\downarrow} \Rightarrow \overbrace{\frac{j-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{j}{2^n}}^{1/2^n}$$

$$\frac{j-1}{2^n} = f_n(x).$$

$$\Rightarrow 0 \leq |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2^n} \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow f_n(x) \to f(x)$$

---

f acot $\Rightarrow \exists M_0 \in \mathbb{N} / f(x) \leq M_0 \;\; \forall x \in E.$

Si $n > M_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq 1/2^n \quad \forall x \in E$

$f_n \rightrightarrows f$ UNIF EN E.

Definición

Decimos que una propiedad vale en casi todo punto si el conjunto de los x en los que no vale tiene medida 0.

(si la prop vale en todo x salvo en los x dentro de un conj. de medida 0)

* $f_n \to f$ c.t.p. ($f_n(x) \to f(x)$ $\forall x \notin N$ con $\mu(N) = 0$).

- $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 5 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ $\quad f = 5$ en casi todo punto.

- CASI TODO PUNTO DE $\mathbb{R}$ ES IRRACIONAL