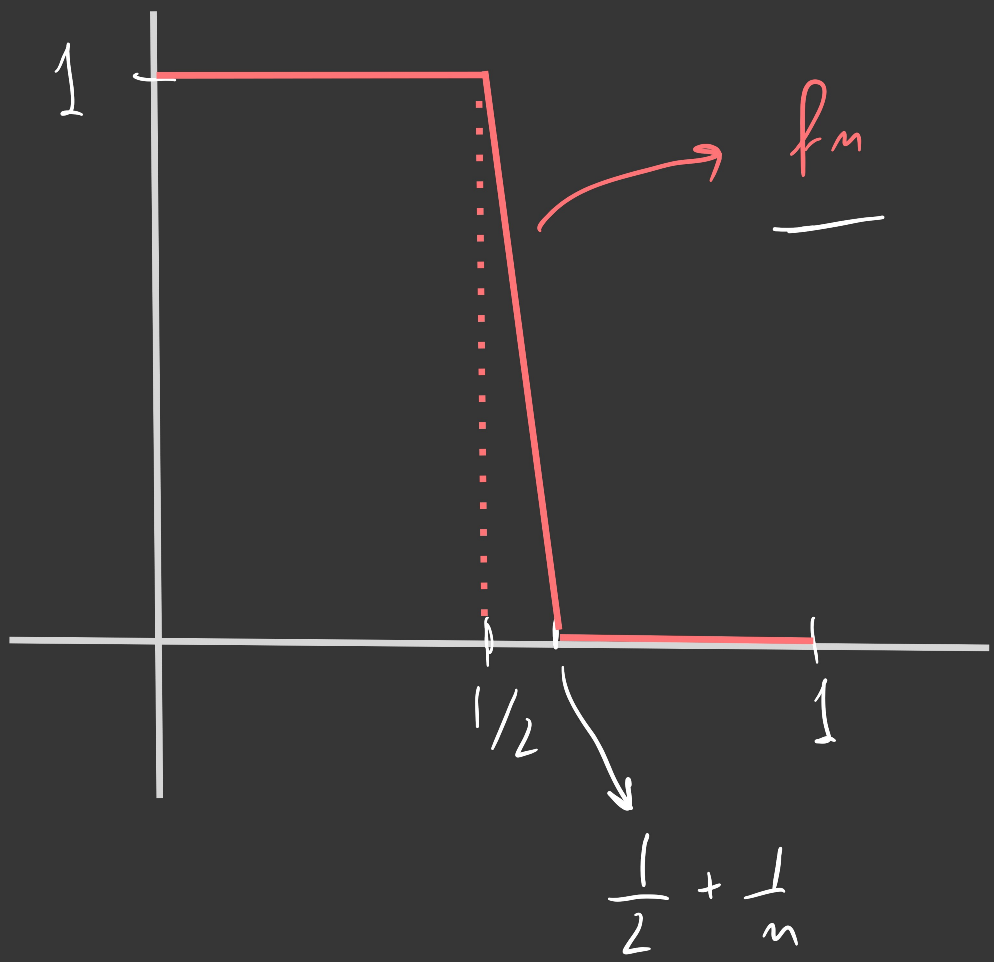
L^1 y L^2

ANÁLISIS AVANZADO

2° C 2021



$$d_1(f,g) = \int |f-g|\,dx$$

$$\|f\|_1 = \int |f|\,dx$$

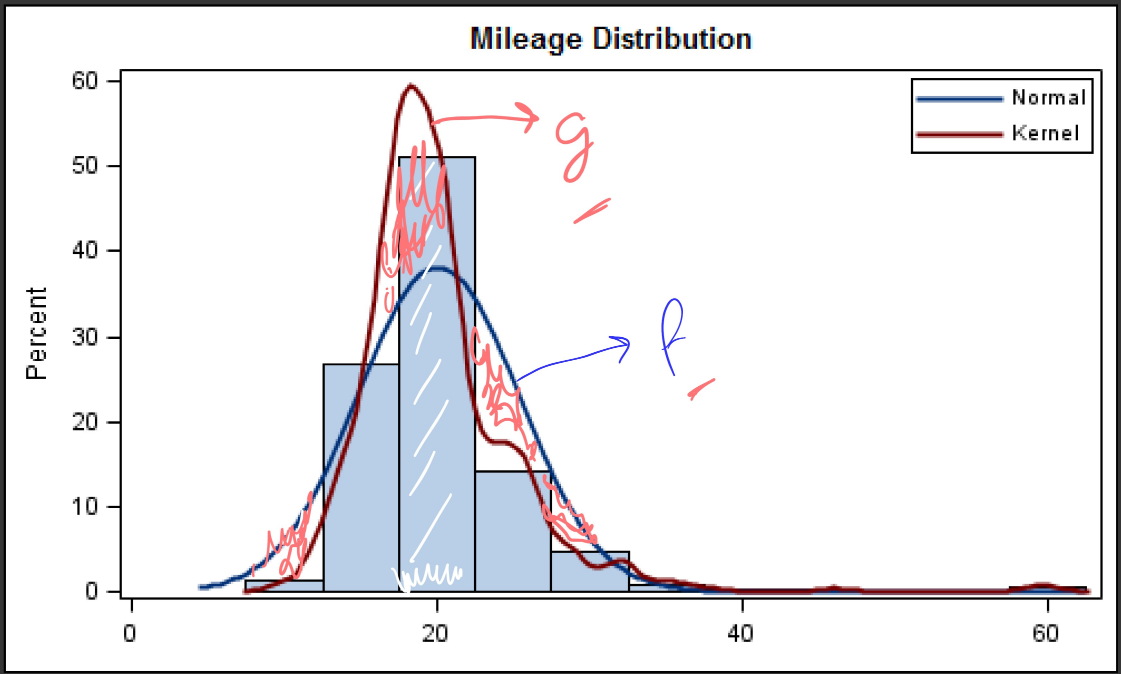
$C[0,1]$, con d_1

NO ES COMPLETO

$(f_n)_n$ es de CAUCHY con d_1.

$\nexists\, f \in C[0,1]$ / $f_n \xrightarrow{d_1} f$.

¿POR QUE NOS INTERESA d_1?



$\int_E g$ ⇝ PROPORCIÓN DE "CASOS" QUE CAEN EN E.

$\int_E |f-g|$ → DISTANCIA ENTRE DENSIDADES

¿CÓMO "COMPLETAMOS" $C[0,1]$ CON d_1?

- FUNC. INTEGRABLES RIÉMANN

    PROBLEMA: SUC. DE FUNC. INTEG. RIEMANN PUEDEN CONV. A FUNC. NO INT. RIEMANN.

- USEMOS INT DE LEBESGUE.

    "FUNCIONES INTEGRABLES LEBESGUE"

$L^1(E) = \{ f : E \to \overline{\mathbb{R}} :$ f medible y $\int_E |f| \, d\mu < +\infty \}$

$\|f\|_1 = \int_E |f| \, d\mu$ $\qquad$ $d_1(f,g) = \|f-g\|_1 = \int_E |f-g| \, d\mu$

OJO: $\|f\|_1 = 0 \iff \int_E |f| \, d\mu \iff f = 0$ en ctp de E.

EN $L^1(E)$ PENSAMOS $f = g \iff f = g$ ctp (de E).

$f \sim g \iff f = g$ ctp $\qquad$ $L^1(E) =$ "CLASES DE EQUIV".

$f \in L^1(E) \rightsquigarrow$ "f y todas las $\tilde{f}$ / $f = \tilde{f}$ ctp".

$\|f\|_1 = \int |f| \, d\mu$ $\quad \| \, \|_1$ ES NORMA EN $L^1(E)$.

TRIANGULAR ✓ $\quad$ ESCALARES ✓

$\|f\|_1 \geq 0 \quad \forall f$ ✓ $\qquad \|f\|_1 = 0 \Leftrightarrow \underbrace{f = 0}$

VALE PORQUE

AHORA $f = 0$ SIGNIFICA

$f = 0$ ctp.

$(L^1(E), \| \, \|_1)$ ES ESPACIO DE BANACH.

(ES COMPLETO)

GRACIAS A LOS TEOREMAS DE CONVERGENCIA

Obs: EN $\mathbb{R}^n$, d_2 ES MEJOR QUE d_1.

$\|x\|_2 = \langle x, x \rangle^{1/2}$ $\qquad$ $\| \|_2$ ESTA ASOCIADA A UN PROD INTERNO.

- NOCIÓN DE ORTOGONALIDAD: $\quad x \perp y \iff \langle x, y \rangle = 0.$

$\{v_1, \ldots, v_n\}$ b.o.n. de $\mathbb{R}^n$,

$$x = \langle x, v_1 \rangle v_1 + \langle x, v_2 \rangle v_2 + \cdots + \langle x, v_n \rangle v_n .$$

$L^2(E) = \{ f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ MEDIBLES / $\int |f|^2 \, d\mu < +\infty \}$

$\|f\|_2 = \left(\int_E |f|^2 \, d\mu \right)^{1/2}$ $\qquad$ $\langle f, g \rangle = \int_E f \cdot \overline{g} \, d\mu$

$\|x\|_2 = \left(\sum x_i^2 \right)^{1/2}$ $\qquad$ $\langle x, y \rangle = \sum x_i \overline{y_i}$

EN $L^2(E)$ $\quad f = g \iff f = g$ ctp.

$\| \ \|_2$ ES UNA NORMA (SE USA CAUCHY-SCHWARZ)

$\left(L^2(E), \| \ \|_2 \right)$ ES COMPLETO.

Obs: $(\mathbb{R}^n, \| \ \|_1) \longleftrightarrow (\mathbb{R}^n, \| \ \|_2)$

MISMO CONJUNTO

DISTINTA NORMA.

$(L^1(E), \| \ \|_1) \qquad (L^2(E), \| \ \|_2)$

DISTINTOS CONJ

DISTINTAS NORMAS.

$$\int_E |f| < +\infty \not\Rightarrow \int_E |f|^2 < +\infty$$

$$\not\Leftarrow$$

(VALE $\Leftarrow$ SI $\mu(E) < +\infty$)

$L^2(E) = \{ f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ MED $/ \int |f|^2 d\mu < +\infty \}$.

$\langle f, g \rangle = \int f g \, d\mu$.

$\underbrace{f \perp g \iff \int f g = 0.}$

- $S \subset L^2(E)$ SUBESP. DE FUNCIONES "BUENAS"

  ↳ CERRADO

$S =$ "POLINOMIOS DE GRADO ≤ 10".

$P_S : L^2(E) \to L^2(E)$ PROY ORTOGONAL (EXISTE).

DADA $f \in L^2(E)$, $P_S(f) \in S$ y es el pol. de gr ≤ 10

MÁS $\underbrace{\text{CERCANO}}_{\text{en } d_2}$ A f.

$\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ base ORTONORMAL DE $L^2(E)$,

- $f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, u_n \rangle \cdot u_n$ $\qquad L^2[0,1]$

$L^2[0,1]$ BASE DE FOURIÈR EN $[0,1]$

$$\left\{ \frac{1}{},\ \frac{\cos(2\pi n)}{\sqrt{2}},\ \frac{\operatorname{sen}(2\pi n)}{\sqrt{2}} : n \in \mathbb{N} \right\} \leftarrow$$

b.o.n de $L^2[0,1]$,

$$f \in L^2[0,1] \Rightarrow f = c\,1 + \sum_n a_n \cdot \frac{\cos(2\pi n)}{\sqrt{2}} + \sum_n b_n \frac{\operatorname{sen}(2\pi n)}{\sqrt{2}}$$