UBA - exactas
Departamento de Matemática

Análisis Avanzado - Integral de Lebesgue 1

Segundo cuatrimestre de 2021

Daniel Carando - Victoria Paternostro

Dto. de Matemática - FCEN - UBA

Recordemos.....

Recordemos.....

Definición

Una función $f : E \to \mathbb{R}$ se dice simple si existe una partición de E en finitos conjuntos $E_1, \dots, E_N$ y números $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \mathbb{R}$ tales que

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \, \chi_{E_n}(x).}$$

$E_1, \dots, E_N \in \sigma$

son disj $\wedge$ $E = \bigcup_{n=1}^{N} E_n$

f toma finitos valores $\alpha_1, \dots, \alpha_N$.

Recordemos.....

Definición

Una función $f : E \to \mathbb{R}$ se dice simple si existe una partición de E en finitos conjuntos $E_1, \ldots, E_N$ y números $\alpha_1, \ldots, \alpha_N \in \mathbb{R}$ tales que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \, \chi_{E_n}(x).$$

Observación

- Si f es una función simple, entonces $|f|$, f^2, e^f son funciones simples.

Recordemos.....

Definición

Una función $f : E \to \mathbb{R}$ se dice simple si existe una partición de E en finitos conjuntos $E_1, \dots, E_N$ y números $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \mathbb{R}$ tales que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \, \chi_{E_n}(x).$$

Observación

- Si f es una función simple, entonces $|f|$, f^2, e^f son funciones simples.
- Si f y g son simples y $s, t \in \mathbb{R}$, entonces $sf + tg$ es simple.

Definición

Sean $E \in \mathcal{M}$ y $f : E \to R \cup \{\pm\infty\}$ (f puede valer $+\infty$ o $-\infty$ en algunos puntos). Decimos que f es medible si para todo $a \in \mathbb{R}$ el conjunto

$$\boxed{\{x \in E : f(x) \leq a\}} = f^{-1}((-\infty, a])$$

es medible.

Observación

Definición

Sean $E \in \mathcal{M}$ y $f : E \to R \cup \{\pm\infty\}$ (f puede valer $+\infty$ o $-\infty$ en algunos puntos). Decimos que f es medible si para todo $a \in \mathbb{R}$ el conjunto

$$\{x \in E : f(x) \leq a\}$$

es medible.

Observación

- Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua, entonces es medible.

Definición

Sean $E \in \mathcal{M}$ y $f : E \to R \cup \{\pm\infty\}$ (f puede valer $+\infty$ o $-\infty$ en algunos puntos). Decimos que f es medible si para todo $a \in \mathbb{R}$ el conjunto

$$\{x \in E : f(x) \leq a\}$$

es medible.

Observación

- Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua, entonces es medible.
- Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es monótona creciente, entonces es medible.

Definición

Sean $E \in \mathcal{M}$ y $f : E \to R \cup \{\pm\infty\}$ (f puede valer $+\infty$ o $-\infty$ en algunos puntos). Decimos que f es medible si para todo $a \in \mathbb{R}$ el conjunto

$$\{x \in E : f(x) \leq a\}$$

es medible.

Observación

- Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua, entonces es medible.
- Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es creciente, entonces es medible.
- Si f es simple medible entonces es medible.

Definición

Sean $E \in \mathcal{M}$ y $f : E \to R \cup \{\pm\infty\}$ (f puede valer $+\infty$ o $-\infty$ en algunos puntos). Decimos que f es medible si para todo $a \in \mathbb{R}$ el conjunto

$$\{x \in E : f(x) \leq a\}$$

es medible.

Observación

- Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua, entonces es medible.
- Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es creciente, entonces es medible.
- Si f es simple medible entonces es medible.
- Combinación lineal de medibles es medible.

Definición

Sean $E \in \mathcal{M}$ y $f : E \to R \cup \{\pm\infty\}$ (f puede valer $+\infty$ o $-\infty$ en algunos puntos). Decimos que f es medible si para todo $a \in \mathbb{R}$ el conjunto

$$\{x \in E : f(x) \leq a\}$$

es medible.

Observación

- Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua, entonces es medible.
- Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es creciente, entonces es medible.
- Si f es simple medible entonces es medible.
- Combinación lineal de medibles es medible.
- Producto de medibles es medible.

Definición

Sean $E \in \mathcal{M}$ y $f : E \to R \cup \{\pm\infty\}$ (f puede valer $+\infty$ o $-\infty$ en algunos puntos). Decimos que f es medible si para todo $a \in \mathbb{R}$ el conjunto

$$\{x \in E : f(x) \leq a\}$$

es medible.

Observación

- Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua, entonces es medible.
- Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es creciente, entonces es medible.
- Si f es simple medible entonces es medible.
- Combinación lineal de medibles es medible.
- Producto de medibles es medible.
- Supremo o ínfimo de una suc. de funciones medibles es medible.

Definición

Sean $E \in \mathcal{M}$ y $f : E \to R \cup \{\pm\infty\}$ (f puede valer $+\infty$ o $-\infty$ en algunos puntos). Decimos que f es medible si para todo $a \in \mathbb{R}$ el conjunto

$$\{x \in E : f(x) \leq a\}$$

es medible.

Observación

- Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua, entonces es medible.
- Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es creciente, entonces es medible.
- Si f es simple medible entonces es medible.
- Combinación lineal de medibles es medible.
- Producto de medibles es medible.
- Supremo o ínfimo de una suc. de funciones medibles es medible.
- Límite puntual de una suc. de funciones medibles es medible.

$(f_n)_n$ med /
$f = \lim f_n$, f resulta medible.

Teorema

Sea $f : E \to [0, +\infty]$ medible. Entonces, existe una sucesión creciente $(f_n)_n$ de funciones simples no negativas que converge puntualmente a f en E:

$$0 \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \quad \forall x \in E, n \in \mathbb{N} \quad \text{y} \quad \boxed{f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)} \quad \forall x \in E.$$

Teorema

$f \geq 0.$

Sea $f : E \to [0, +\infty]$ medible. Entonces, existe una sucesión creciente $(f_n)_n$ de funciones simples no negativas que converge puntualmente a f en E:

$$0 \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \quad \forall x \in E, n \in \mathbb{N} \quad \text{y} \quad f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad \forall x \in E.$$

Si f es acotada, la sucesión converge a f uniformemente en E.

Teorema

Sea $f : E \to [0, +\infty]$ medible. Entonces, existe una sucesión creciente $(f_n)_n$ de funciones simples no negativas que converge puntualmente a f en E:

$$0 \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \quad \forall x \in E, n \in \mathbb{N} \quad \text{y} \quad f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad \forall x \in E.$$

Si f es acotada, la sucesión converge a f uniformemente en E.

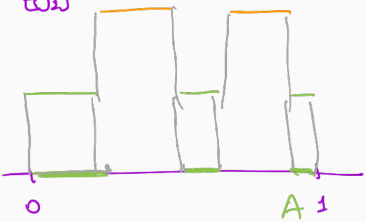
medibles

$$[0,1] = A \cup B \quad \text{, con } A \cap B = \emptyset.$$

Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{si } x \in A \\ 5, & \text{si } x \in B. \end{cases}$$

“$\int_{[0,1]} f \, d\mu = 2\mu(A) + 5\mu(B)$”



De acá en más E siempre va a ser un subconjunto medible de $\mathbb{R}$.

De acá en más E siempre va a ser un subconjunto medible de $\mathbb{R}$.

Integral de Lebesgue de funciones simples

Sean $\{E_i\}_{i=1}^n$ una partición medible de E y $f : E \to \mathbb{R}$ una función simple dada por

$$\boxed{f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, \chi_{E_i}(x).}$$

Definimos la integral de Lebesgue de f como

$$\boxed{\int_E f \, d\mu := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, \mu(E_i).}$$

Proposición

Sean $f, g : E \to \mathbb{R}$ funciones simples y $a, b \in \mathbb{R}$. Entonces:

Proposición

Sean $f, g : E \to \mathbb{R}$ funciones simples y $a, b \in \mathbb{R}$. Entonces:

simple

(a) **Linealidad**: $\int_E \boxed{af + bg}\, d\mu = a \int_E f \, d\mu + b \int_E g \, d\mu$.

Proposición

Sean $f, g : E \to \mathbb{R}$ funciones simples y $a, b \in \mathbb{R}$. Entonces:

(a) Linealidad: $\int_E af + bg \, d\mu = a \int_E f \, d\mu + b \int_E g \, d\mu$.

(b) Monotonía: si $f \leq g$ en E, $\int_E f \, d\mu \leq \int_E g \, d\mu$.

Proposición

Sean $f, g : E \to \mathbb{R}$ funciones simples y $a, b \in \mathbb{R}$. Entonces:

(a) **Linealidad**: $\int_E af + bg \, d\mu = a \int_E f \, d\mu + b \int_E g \, d\mu$.

(b) **Monotonía**: si $f \le g$ en E, $\int_E f \, d\mu \le \int_E g \, d\mu$.

(c) $|\int_E f \, d\mu| \le \int_E |f| \, d\mu$.

Dem (a). f, g simples $\Rightarrow$ $f = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \chi_{E_i}$ $\wedge$ $g = \sum_{j=1}^{M} \beta_j \chi_{\tilde{E}_j}$

Miramos $A_{ij} := E_i \cap \tilde{E}_j$ $\Rightarrow$ si $x \in A_{ij}$ $\Rightarrow$ $af(x) + bg(x) = a\alpha_i + b\beta_j$

$\Rightarrow af + bg = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} (a\alpha_i + b\beta_j) \chi_{A_{ij}}$.

$\Rightarrow \int_E af + bg \, d\mu = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} (a\alpha_i + b\beta_j) \mu(A_{ij})$ (def).

$$= \sum_i \sum_j a\alpha_i \mu(A_{ij}) + \sum_i \sum_j b\beta_j \mu(A_{ij}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} a\alpha_i \underbrace{\sum_{j=1}^{M} \mu(E_i \cap \tilde{E}_j)}_{\mu\left(\underbrace{\bigcup_{j=1}^{M} E_i \cap \tilde{E}_j}_{E_i}\right)} + \sum_{j=1}^{M} b\beta_j \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \mu(E_i \cap \tilde{E}_j)}_{\mu(\tilde{E}_j)}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} a\,\alpha_i \mu(E_i) + b \sum_{j=1}^{M} \beta_j \mu(\tilde{E}_j) = a\int_E f\,d\mu + b\int_E g\,d\mu.$$

(b) $f \leq g \Rightarrow \int_E f\,d\mu = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i\, \mu(E_i)$

$$= \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} \alpha_i\, \mu(\underline{E_i \cap \tilde{E}_j})$$

$$\underset{f(x) \leq g(x)}{\leq} \sum_i \sum_j \beta_j\, \mu(E_i \cap \tilde{E}_j)$$

$$= \sum_j \beta_j \sum_i \mu(E_i \cap \tilde{E}_j) = \sum \beta_j\, \mu(\tilde{E}_j) = \int_E g\,d\mu.$$

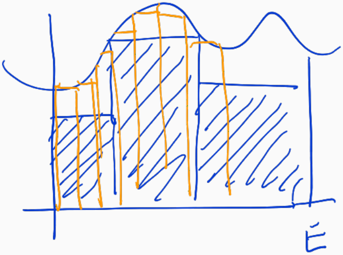
(c) $\left| \int_E f\,d\mu \right| = \left| \sum_i \alpha_i\, \mu(E_i) \right| \leq \sum |\alpha_i|\, \mu(E_i) = \int_E |f|\,d\mu.$ $\boxtimes$

Integral de Lebesgue de funciones no negativas.

Sea $f : E \to \mathbb{R}$ una función medible tal que $f \geq 0$ en E. Definimos la integral de Lebesgue de f como

$$\int_E f\, d\mu := \sup\{ \int_E \varphi\, d\mu : \varphi \text{ es simple } 0 \leq \varphi \leq f\}.$$

Obs: el sup. puede ser $+\infty$



Teorema

Sean $f, g : E \to \mathbb{R}$ funciones medibles y no negativas en E. La integral de Lebesgue tiene las siguientes propiedades:

Teorema

Sean $f, g : E \to \mathbb{R}$ funciones medibles y no negativas en E. La integral de Lebesgue tiene las siguientes propiedades:

(a) Si $0 \leq f \leq g$ en E, $\int_E f\, d\mu \leq \int_E g\, d\mu$. (monótona)

Teorema

Sean $f, g : E \to \mathbb{R}$ funciones medibles y no negativas en E. La integral de Lebesgue tiene las siguientes propiedades:

(a) Si $0 \leq f \leq g$ en E, $\int_E f\, d\mu \leq \int_E g\, d\mu$.

(b) Si $\int_E f\, d\mu < \infty$, entonces $f < \infty$ en casi todo punto de E.

Teorema

Sean $f, g : E \to \mathbb{R}$ funciones medibles y no negativas en E. La integral de Lebesgue tiene las siguientes propiedades:

(a) Si $0 \leq f \leq g$ en E, $\int_E f \, d\mu \leq \int_E g \, d\mu$.

(b) Si $\int_E f \, d\mu < \infty$, entonces $f < \infty$ en casi todo punto de E.

(c) Si $A \subseteq E$ es medible, entonces $\int_A f \, d\mu \leq \int_E f \, d\mu$.

Dem: (a) φ simple $\mid 0 \leq \varphi \leq f \Rightarrow 0 \leq \varphi \leq f \leq g$

$$\Rightarrow \int_E \varphi \, d\mu \leq \int_E g \, d\mu \quad \forall \varphi \text{ simple} \mid 0 \leq \varphi \leq f \quad (g \geq f)$$

$$\Rightarrow \int_E f \, d\mu \leq \int_E g \, d\mu \quad \text{(x prop. de supremo).}$$

(b) Si $\int_E f\,d\mu < \infty$ sup $E_1 = \{x \in E : f(x) = +\infty\}$.

Si $\mu(E_1) > 0 \Rightarrow$ defino $g_n = n\chi_{E_1} \Rightarrow g_n$ simple en E

y $g_n \leq f$ en $E \Rightarrow \underbrace{\int_E g_n\,d\mu}_{n\underbrace{\mu(E_1)}_{>0}\longrightarrow +\infty} \leq \int_E f\,d\mu < \infty$ ABS!

$\Rightarrow \mu(E_1) = 0$.

(c) $A \subseteq E$ med $\wedge$ φ simple en A / $0 \leq \varphi \leq f$

$\Rightarrow \tilde{\varphi} = \varphi + 0\chi_{E\setminus A}$ es simple en E $\wedge$ $0 \leq \tilde{\varphi} \leq f$.

$\Rightarrow \int_A \varphi\,d\mu = \int_E \tilde{\varphi}\,d\mu \leq \int_E f\,d\mu$

$\Rightarrow \int_A f\,d\mu \leq \int_E f\,d\mu$.

Lema

Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles definidas en E tales que $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Lema

Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles definidas en E tales que $0 \le f_n \le f_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

$\varphi(x) \le \lim_{n\to\infty} f_n(x) \; \forall x \in E$

Si φ es una función simple tal que $0 \le \varphi \le \lim_{n\to\infty} f_n$, entonces

$$\int_E \varphi \, d\mu \le \lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\mu.$$

Dem: como $0 \le f_n(x) \le f_{n+1}(x) \; \forall x \in E \; \forall n \in \mathbb{N}$,

$\forall x \; \exists \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ es medible y $0 \le \int_E f_n \, d\mu \le \int_E f_{n+1} \, d\mu \; \forall n$

$\Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\mu$ (eventualmente es ∞).

- Como φ es medible $\Rightarrow \varphi = \sum_{j=1}^{M} \alpha_j \chi_{A_j}$

  y $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \cdots < \alpha_n$.

Sea $\varepsilon > 0$ / $0 < \varepsilon < \alpha_1 \Rightarrow \varphi - \varepsilon = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \varepsilon) \chi_{A_i} \Rightarrow$

$\varphi - \varepsilon$ es simple y $\varphi - \varepsilon \geq 0$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $E_n = \{x \in E : f_n(x) > \varphi(x) - \varepsilon\}$.

$\Rightarrow E_n$ es medible $\forall n$. Además, si $x \in E_n \Rightarrow$

$f_{n+1}(x) \underset{(\text{hip})}{\geq} f_n(x) > \varphi(x) - \varepsilon \Rightarrow x \in E_{n+1} \Rightarrow \boxed{E_n \subseteq E_{n+1} \ \forall n.}$

Más aún, $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$: si $x \in E \wedge x \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \Rightarrow$

$f_n(x) \leq \varphi(x) - \varepsilon \ \forall n \Rightarrow \varphi(x) \leq \lim_{n \to \infty} f_n(x) \leq \varphi(x) - \varepsilon$ ABS!

$\Rightarrow \boxed{E = \bigcup_n E_n.} \Rightarrow \mu(E_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} \mu(E).$

Separamos en 2 casos:

1º. Sup que $\mu(E) < \infty$. $\Rightarrow \mu(E \setminus E_n) = \mu(E) - \underbrace{\mu(E_n)}_{\substack{\downarrow n \to \infty \\ \mu(E)}}$

$\Rightarrow \mu(E \setminus E_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$.

simples $\Rightarrow$ lineal

$$\boxed{\int_E f_n \, d\mu} \geq \int_{E_n} f_n \, d\mu \geq \int_{E_n} \varphi - \varepsilon \, d\mu = \boxed{\underbrace{\int_{E_n} \varphi \, d\mu}\ - \varepsilon \, \mu(E_n)}$$

$$\boxed{\int_{E_n} \varphi \, d\mu} = \int_E \varphi \cdot \chi_{E_n} \, d\mu = \int_E \varphi \, (\chi_E - \chi_{E \setminus E_n}) \, d\mu$$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{son simples}}}{=} \int_E \varphi \, \chi_E \, d\mu - \int_E \varphi \, \chi_{E \setminus E_n} \, d\mu \underset{\substack{\downarrow \\ \varphi \leq \alpha_M}}{\geq} \boxed{\int_E \varphi \, d\mu - \alpha_M \underbrace{\int_E \chi_{E \setminus E_n}}_{\mu(E \setminus E_n)}}$$

$$\int_E f_n \, d\mu \geq \int_{E_n} \varphi \, d\mu - \varepsilon\mu(E_n) \geq \int_E \varphi \, d\mu - \alpha_m \underbrace{\mu(E\setminus E_n)}_{\to 0} - \underbrace{\varepsilon\mu(E_n)}_{\to 0}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \int_E f_n \, d\mu \geq \int_E \varphi \, d\mu \Rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\mu \geq \int_E \varphi \, d\mu .$$

2do caso: $\mu(E) = +\infty$. $\Rightarrow \mu(E_n) \longrightarrow +\infty$.

$$\int_E f_n d\mu \geq \int_{E_n} f_n \, d\mu \geq \int_{E_n} \varphi - \varepsilon \, d\mu \geq \int_{E_n} (\alpha_1 - \varepsilon) \, d\mu = (\alpha_1 - \varepsilon)\underbrace{\mu(E_n)}_{\downarrow \, +\infty}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\mu = +\infty \geq \int_E \varphi \, d\mu . \quad \boxtimes$$

Teorema de la convergencia Monótona

Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles definidas en E tales que $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Teorema de la convergencia Monótona

Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles definidas en E tales que $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Si $f = \lim_{n\to\infty} f_n$, entonces

$$\int_E \lim_{n\to\infty} f_n \, d\mu = \int_E f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\mu.$$

Dem: Como observamos antes, $\exists \lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\mu$

y como $f_n \leq f \;\; \forall n \Rightarrow \int_E f_n \, d\mu \leq \int_E f \, d\mu$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\mu \leq \int_E f \, d\mu.$

Sea φ simple / $0 \leq \varphi \leq f = \lim f_n$

$\Longrightarrow$ Lema $\displaystyle\int_E \varphi \, d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\mu$

$\Longrightarrow$ def de $\displaystyle\int_E f$ $\qquad \displaystyle\int_E f \, d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\mu.$

$$\therefore \int_E f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\mu. \qquad \boxtimes$$