UBA - exactas
Departamento de Matemática

Análisis Avanzado - Sucesiones y series de funciones 1

Primer cuatrimestre de 2021

Daniel Carando - Victoria Paternostro

Dto. de Matemática - FCEN - UBA

En lo que sigue, A es un conjunto y X, Y son espacios métricos.

EJEMPLO: $f_n(x) = \dfrac{nx+1}{n}$ $\qquad f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

p/c/ $x \in \mathbb{R}$ $\quad f_n(x) = \dfrac{nx+1}{n} = \dfrac{\cancel{n}x}{\cancel{n}} + \dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} x$

Sea $f(x) = x$.

p/c/ $x \in \mathbb{R}$, $\quad f_n(x) \to f(x)$ $\quad (\text{en } \mathbb{R})$

$f_n(8) = \dfrac{n8+1}{n} \longrightarrow 8 = f(8)$

En lo que sigue, A es un conjunto y X, Y son espacios métricos.

Definición

La sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones de A en Y converge puntualmente a $f : A \to Y$ si para todo $x \in A$,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

EJEMPLOS: 1) $f_n(x) = \dfrac{nx+1}{n}$ $\quad f(x) = x$

$\Rightarrow f_n$ conv. PUNTUALMENTE a f.

2) $f_n(x) = \cos(nx)$ $\quad f_n(\pi) = \cos(n\pi) = \begin{cases} 1 & n \text{ par} \\ -1 & n \text{ impar} \end{cases}$

$\Rightarrow f_n$ NO CONV. PUNTUALM. A NINGUNA f.

$$\boxed{\begin{array}{l} f_n : [0,1] \to \mathbb{R} \\ f_n(x) = x^n \end{array}} \quad C^\infty \qquad (x \in [0,1])$$

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} x^n = \begin{cases} 1 & x=1 \\ 0 & 0 \le x < 1 \end{cases}$$

$$f_n \to f \quad \text{PUNTUALM} \qquad \underbrace{f(x) = \begin{cases} 1 & x=1 \\ 0 & 0 \le x < 1 \end{cases}}_{\text{DISCONTINUA}}$$

Obs: $f_n \to f$ PUNTUALM. $\Rightarrow \forall x, \ \boxed{\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)}$

$\forall x \in A$: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \to$ depende de ε y de x

$$d'(f_n(x), f(x)) < \varepsilon \qquad \forall n \ge n_0$$

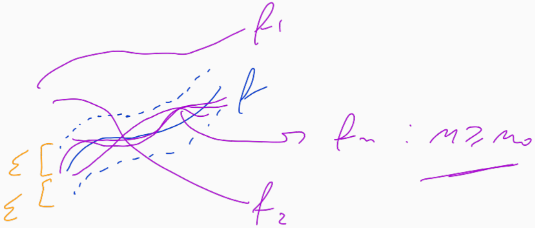
Definición

La sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones de A en Y converge uniformemente a $f : A \to Y$ si dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ se tiene

$$d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$$

para todo $x \in A$.

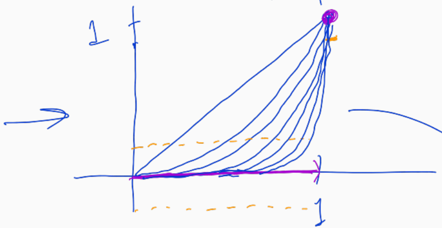
depende de ε (y sirve $\forall x$).



$f_n \to f$.

NOTACIÓN: $f_n \rightrightarrows f$ ó $f_n \xrightarrow{u} f$ (f_n conv. unif a f)

EJEMPLOS: 1) $f_n(x) = x^n$ $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$



$$f(x) = \begin{cases} 1 & x = 1 \\ 0 & 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

todas las f_n se escapan de la banda. $\Rightarrow f_n \not\rightrightarrows f$ (EJERCICIO).

2) $f_n(x) = \dfrac{\cos x}{n}$ $f_n(x) \to 0$ PUNTUALMENTE.

$$|f_n(x) - 0| = \left|\frac{\cos x}{n}\right| \leq \frac{1}{n} < \varepsilon$$

Si $n_0 > 1/\varepsilon$, $|f_n(x) - 0| < \varepsilon \ \forall n \geq n_0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Teorema

Si una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones continuas de X en Y converge uniformemente a $f : X \to Y$, entonces f es continua.

DEM: f_n cont $\forall n$, $f_n \rightrightarrows f$.

q.v.q. f cont.

$x_0 \in X$, Dado $\varepsilon > 0$ (q.v.q. $\exists \delta > 0$ / si $d(x, x_0) < \delta$ $\Rightarrow d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$)

$\exists n_0 \in \mathbb{N}$ / $d'(f_n(x), f(x)) < \varepsilon/3$ $\forall n \geq n_0$. $\forall x \in X$

f_{n_0} es cont en x_0. $\Rightarrow \exists \delta > 0$ /

si $d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon/3$

Si $d(x, x_0) < \delta$

$$\underbrace{d'(f(x), f(x_0))}_{} \leq \underbrace{d'(f(x), f_{n_0}(x))}_{< \varepsilon/3} + \underbrace{d'(f_{n_0}(x), f_{n_0}(x_0))}_{< \varepsilon/3}$$

$$+ \underbrace{d'(f_{n_0}(x_0), f(x_0))}_{< \varepsilon/3} < \varepsilon.$$

f CONT en x_0

(x_0 es arbitrario)

PENSAR: $f_n \rightrightarrows f$

$\rightarrow$ f_n unif cont $\overset{?}{\Rightarrow}$ f unif cont

$\rightarrow$ f_n cont $\overset{?}{\Rightarrow}$ f cont

$\rightarrow$ f_n deriv $\overset{?}{\Rightarrow}$ f deriv

Proposición
Sea $f_n \rightrightarrows f$, con $f_n, f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continuas. Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\int_a^b f_n(t)dt}_{\in\mathbb{R}} = \underbrace{\int_a^b f(t)dt}_{\in\mathbb{R}}.$$

DEM: dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, n_0 \,/\, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/2(b-a)$ $\forall n \geq n_0$, $\forall x \in [a,b]$.

$$\left| \int_a^b f_n(t)\,dt - \int_a^b f(t)\,dt \right| = \left| \int_a^b f_n(t) - f(t)\,dt \right| \leq$$

$$\leq \int_a^b \underbrace{|f_n(t) - f(t)|}_{< \varepsilon/2(b-a)}\,dt \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot (b-a) = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

$$\therefore \int_a^b f_n(t)\,dt \to \int_a^b f(t)\,dt$$

Proposición

Sean f_n de clase C^1 en $[a, b]$, $f_n \to f$ puntualmente en $[a, b]$, y $f_n' \rightrightarrows g$. Entonces, f es derivable y $f' = g$.

$f_n \to f$ PUNT, $f_n' \rightrightarrows g$ $\Rightarrow$ f deriv. y $f' = g$.

IDEA (COMPLETAR): 1° g es continua (x TEO)
(pues f_n' cont $f_n' \rightrightarrows g$)

2°) $\to$ $f_n(x) - f_n(a) = \int_a^x f_n'(t)\,dt$ (BARROW / TFC)

$f_n(x) \to f(x)$, $f_n(a) \to f(a)$, $\int_a^x f_n'(t)\,dt \to$ PROP $\int_a^x g(t)\,dt$

EJ: SEGUIR. (T.F.C)

K compacto

$(f_n)_n \subset C(K)$, $\boxed{f \in C(K)}$

$$f_n \to f \text{ en } \|\ \|_\infty .$$

$$\Updownarrow$$

$$f_n \rightrightarrows f$$

Definición

Una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones de A en Y es uniformemente de Cauchy si dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que — depende sólo de ε.

$$d(f_n(x), f_m(x)) < \varepsilon$$

para todos $m, n \overset{\geq n_0}{\cancel{\in \mathbb{N}}}$ y todo $x \in A$.

Definición

Una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones de A en Y es uniformemente de Cauchy si dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(f_n(x), f_m(x)) < \varepsilon$$

para todos m, n $\cancel{\in \mathbb{N}}$ $\geq n_0$ y todo $x \in A$.

Teorema

Si la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones de A en $\mathbb{R}$ es uniformemente de Cauchy, entonces converge uniformemente a una función $f : A \to \mathbb{R}$.

DEM: Obs. Si $(f_n)_n$ es unif de Cauchy

$\Rightarrow$ p/c/ $x \in A$, $(f_n(x))_n \subset \mathbb{R}$ es de Cauchy. (PENSAR)

Como $\mathbb{R}$ es completo, $(f_n(x))_n$ es conv. en $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exists \lim_{n\to+\infty} f_n(x).$

Definimos $\underbrace{f : A \to \underline{\mathbb{R}}}$ como $\boxed{f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)}$

q v q $\underline{f_n} \rightrightarrows \underline{f}$. $\underline{\text{Sea } \varepsilon > 0.}$

Como $(f_n)_n$ es unif de Cauchy, $\underline{\exists n_0 \in \mathbb{N}}$ /

$\to \quad d'(f_n(x), f_m(x)) < \varepsilon/2 \quad \forall \underline{n}, m \geq n_0, \quad \forall \underline{x \in A}.$

POR UN RATITO, FIJEMOS $\underline{x}$ y $\underline{n}$.

$$0 \leq \underbrace{\overbrace{|f_n(x) - f_m(x)|}}_{} < \underline{\varepsilon/2} \quad \forall \underline{m} \geq n_0$$

$f_m(x) \xrightarrow{m\to+\infty} f(x)$

$\to |f_n(x) - f(x)| \quad \Rightarrow \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon.$

$\left.\begin{array}{l}\forall n \geq n_0 \\ \forall x \in A\end{array}\right]$

$\therefore f_n \rightrightarrows f$

$\boxed{C(K)}$ K compacto. $(f_n) \subset C(K)$

PENSAR

- $(f_n)_n$ unif de Cauchy $\Longleftrightarrow$ $(f_n)_n$ es de Cauchy en $\| \|_\infty$

- $f_n \rightrightarrows f$ $\Longleftrightarrow$ f_n conv. a f en $\| \|_\infty$

↳ NECESARIAM CONTINUA.

TEO: $(C(K), \| \|_\infty)$ ES COMPLETO.

(EJERCICIO)

X MÉTRICO

$\to C_b(X) = \{ f : \underline{X} \to \mathbb{R} ; f$ CONT Y $\underline{\text{ACOTADA}} \}$.

$\to B(X) = \{ f : X \to \mathbb{R} , f$ ACOTADA$\}$. $\leftarrow$

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

¿SON COMPLETOS?