PRACTICA 8:

(1) Sea X un conjunto y sea $\mathcal{A} = \{A \subseteq X : A \text{ es contable o } X \setminus A \text{ es contable}\}$
Probar que $\mathcal{A}$ es una σ-algebra.

1- $\mathcal{A} \neq \emptyset$

$\emptyset \in X$ y $\emptyset$ es contable $\Rightarrow \emptyset \in \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A} \neq \emptyset$

2- Sea $A \subseteq \mathcal{A}$ contable; $A^c = X \setminus A \in \mathcal{A}$ por definición

Sea $X \setminus A \subseteq \mathcal{A} / X \setminus A$ es contable

$A = (X \setminus A)^c = (X \setminus (X \setminus A))$ contable $\Rightarrow A \in \mathcal{A}$

3- Sea $A_n \in \mathcal{A}$ $\forall n / A_n$ es contable $\forall n$

$\bigcup_n A_n \in \mathcal{A}$ ya que unión de contables es contable

Sea $A_n \in \mathcal{A}$ $\forall n$ $/ \exists A_{n_0} \in \mathcal{A}$ que no es contable

$\Rightarrow X \setminus A_{n_0}$ es contable

$$\left(\bigcup_n A_n\right)^c = \bigcap_n A_n^c \subseteq A_{n_0}^c$$

Scanned with CamScanner

(2) Sea $\mathcal{X}$ un conjunto y sea $\mathcal{A}$ una σ-álgebra de subconjuntos de $\mathcal{X}$. Probar que:

a) $\emptyset \in \mathcal{A}$

Como $\mathcal{A}$ es una σ-algebra $\Rightarrow$ si $X \in \mathcal{A}$, $X^c \in \mathcal{A}$

$X^c = \emptyset \Rightarrow \emptyset \in \mathcal{A}$

b) Si $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{A}$ y $A \Delta B \in \mathcal{A}$

$$A \setminus B = A \cap X \setminus B = \mathcal{X} \setminus \underbrace{\left(\underbrace{(\mathcal{X} \setminus A)}_{\in A \Rightarrow \in \mathcal{A} \text{ por } 2} \cup \underbrace{(\mathcal{X} \setminus \mathcal{X} \setminus B)}_{\in B \Rightarrow \in \mathcal{A}} \right)}_{\in \mathcal{A} \text{ por } 3}$$

$$A \Delta B = \underbrace{\underbrace{A \setminus B \cup B \setminus A}_{\in \mathcal{A} \text{ por lo demostrado arriba}}}_{\in \mathcal{A} \text{ por } 3}$$

c) $\mathcal{A}$ es cerrada por intersecciones numerables

Sea $A_n / n \in \mathbb{N} \,/\, A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow$ qvq $\bigcap_n A_n \in \mathcal{A}$

$\mathcal{X} \setminus A_n \in \mathcal{A} \ \forall n \in \mathbb{N}$ por 2-

$$\Rightarrow \bigcup_n \mathcal{X} \setminus A_n \in \mathcal{A} \underset{\text{de Morgan}}{=} \mathcal{X} \setminus \bigcap A_n$$

$$\Rightarrow \mathcal{X} \setminus \left(\mathcal{X} \setminus \bigcap_n A_n\right) = \bigcap_n A_n \in \mathcal{A}$$

Probar que todo subconjunto numerable de $\mathbb{R}$ es nulo

A_n nulo $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_n A_n$ nulo

$\bigcup_n A_n \leq \sum_n A_n = 0 \Rightarrow$ La unión es nulo. ✓

Sabemos que $A = \bigcup_n \{A_n\}$ (unión numerable de elementos)

y como $\{A_n\}$ es el conjunto que tiene un solo elemento, es un conjunto medible nulo. Y como unión numerable de nulos es nulo, A es nulo.

Scanned with CamScanner

1) Probar que para todos $a,b \in \mathbb{R}$ los intervalos $[a,b)$, $[a,b]$, $[a,+\infty)$ son medibles Lebesgue, y calcular su medida

En $\mathbb{R}$, la σ-algebra de los conjuntos medibles Lebesgue, es la σ-algebra generada por los conjuntos nulos y los conj abiertos

$[a,b) = \{a\} \cup (a,b)$

$\{a\}$ es nulo $\Rightarrow \{a\} \in \mathcal{M}_e$

$(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ abierto $\Rightarrow (a,b) \in \mathcal{M}_e$ $\quad \mu([a,b)) = 0 + b - a$

$[a,b] = \{a\} \cup \{b\} \cup (a,b)$

$\{a\}$ es nulo $\Rightarrow \{a\} \in \mathcal{M}_e$

$\{b\}$ en nulo $\Rightarrow \{b\} \in \mathcal{M}_e$

$(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ abierto $\Rightarrow (a,b) \in \mathcal{M}_e$ $\quad \mu([a,b]) = 0 + b - a + 0$

$[a,+\infty) = \{a\} \cup (a,+\infty)$

$\{a\}$ es nulo $\Rightarrow \{a\} \in \mathcal{M}_e$

$(a,+\infty)$ abierto $\Rightarrow (a,+\infty) \in \mathcal{M}_e$ $\quad \mu([a,+\infty)) = 0 + \infty - a = \infty$

(5)

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$

a) Probar que si A es abierto $\Rightarrow A \in \mathcal{M}_e$.

Vale por def

b) Deducir que si A es cerrado $\Rightarrow A \in \mathcal{M}_e$

$A \subseteq \mathbb{R}$ cerrado

$X \setminus A \subseteq \mathbb{R}$ es abierto

$\Rightarrow X \setminus A \in \mathcal{M}_e$

$\Rightarrow A \in \mathcal{M}_e$ por ser complemento de abiertos.

⑥ Calcular la medida de Lebesgue de $\mathbb{Q}$ y la de los irracionales del $[0,1]$ ¿Por qué son medibles estos conjuntos?

$\mathbb{Q}$ es numerable $\Rightarrow$ $\mathbb{Q}$ es nulo $\Rightarrow$ $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_e$

Como $\mathbb{Q}$ es nulo, $\mu(\mathbb{Q})=0$

$$\underbrace{\mathbb{Q}^c}\cap\overbrace{[0,1]}^{\text{cerrado}\Rightarrow\in\mathcal{M}_e}$$

Complemento de medibles es medible

$$(\mathbb{Q}^c\cap[0,1]) \overset{\circ}{\cup} (\mathbb{Q}\cap[0,1])=[0,1]$$

$$\Rightarrow \mu(\mathbb{Q}^c\cap[0,1])+\underbrace{\mu(\mathbb{Q}\cap[0,1])}=\mu([0,1])$$

vale 0 pq vive en $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q}$ es nulo

$$\mu(\mathbb{Q}^c\cap[0,1])=1-0=1$$

(7) Probar que todo conjunto acotado de M_e tiene medida finita. Mostrar un conjunto de M_e que tenga medida de Lebesgue finita pero que no sea acotado

Sea $A=[a,b]$, $\mu(A)=b-a$ finito

$\mu(\mathbb{Q})=0$ pero $\mathbb{Q}$ no es acotado

Scanned with CamScanner

(8) Si $A, B \in \mathcal{M} \Rightarrow \mu(A\cup B)+\mu(A\cap B)=\mu(A)+\mu(B)$

$A=(A\setminus B)\cup(A\cap B)$

$B=(B\setminus A)\cup(A\cap B)$

$$\mu(A)+\mu(B)=\mu(A\setminus B)+\mu(A\cap B)+\mu(B\setminus A)+\mu(A\cap B)$$

$$=\underbrace{\mu((A\setminus B)\dot{\cup}(A\cap B)\dot{\cup}(B\setminus A))}_{\mu(A\cup B)}+\mu(A\cap B)$$

$$=\mu(A\cup B)+\mu(A\cap B)$$

Scanned with CamScanner

9

Sea $A \in \mathcal{M}_e$. Probar que si $\mu(A)=0 \Rightarrow A^\circ = \emptyset$ ¿Vale la vuelta?

$\mu(A)=0 \Rightarrow A$ es nulo $\Rightarrow \forall \varepsilon>0, \exists \{I_n\}_{n\in J}$ intervalos /

$A \subseteq \bigcup_{n\in J} I_n$ y $\sum_{n\in J} \operatorname{long}(I_n) < \varepsilon$

$x \in A^\circ$ si $\exists r>0 / B(x,r) \subseteq A$

$A^\circ = \emptyset \Leftrightarrow \forall x \in A, B(x,r) \not\subseteq A \ \forall r>0$

Supongamos $A^\circ \neq 0 \Rightarrow \exists x \in A, r>0 / \underbrace{B(x,r)}_{\in \mathcal{M}_e \text{ por ser abierto}} \subseteq A$

$\Rightarrow \mu(B(x,r)) \leq \mu(A)$

$\mu((-r,x)\cup[x,r)) \leq \mu(A)$

$x+r+r-x = 2r \leq \mu(A)$

pero $0 < 2r \leq \mu(A) \Rightarrow \mu(A) > 0$ Abs! pues $\mu(A)=0$

$\Rightarrow A^\circ = \emptyset$

No vale la vuelta ya que si tomamos $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} = A$

$\underbrace{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}_{=\mathbb{Q}^c} \in \mathcal{M}_e$ y $(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})^\circ = \emptyset$

$\mu(\mathbb{R}) = \mu(\mathbb{Q} \dot\cup (\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})) = \mu(\mathbb{Q}) + \mu(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = 0 + \mu(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = +\infty$

(4) Sea $A \subseteq [0,1] \in \mathcal{M}_e / \mu(A) = 1$. Probar que A es denso

A es denso en $[0,1] \Leftrightarrow \overline{A} = [0,1]$

Sea $x \in [0,1] \setminus \overline{A} = ([0,1] \setminus A)^{\circ} = \emptyset$

ej 7) Guia 5) ej 9) G8

$\mu([0,1] \setminus A) = \mu([0,1]) - \mu(A) = 1 - 1 = 0$ ✓

Scanned with CamScanner

(11) Sea $A \subseteq \mathbb{R}$. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes

a) $A \in \mathcal{M}_e$ $\Longleftrightarrow$ b) Existen una sucesión $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de conjuntos cerrados contenidos en A y un conjunto Z de medida nula tales que $A = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n\right) \cup Z$

b $\Rightarrow$ a) Los cerrados $\in \mathcal{M}_e$ $\bigcup F_n \in \mathcal{M}_e$ y como $\mu(Z)=0 \Rightarrow Z \in \mathcal{M}_e$

a $\Rightarrow$ b) $A \in \mathcal{M}_e$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\exists F_n \subseteq A$, F_n cerrado y $\mu(A \setminus F_n) < \frac{1}{n}$

$$A = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n\right) \cup \underbrace{\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A \setminus F_n\right)}_{Z}$$

Qvq $\mu(Z) = 0$

$$\underset{Z \subseteq A\setminus F_n \forall n}{\mu(Z) \leq} \mu(A \setminus F_n) < \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow \mu(Z) = 0$$

a) $A \in \mathcal{M}_e$ $\Longleftrightarrow$ c) Existen una sucesión $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de conjuntos abiertos que contienen a A y un conjunto H de medida nula tales que $A = \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n\right) \setminus H$

c $\Rightarrow$ a) Los abiertos $\in \mathcal{M}$ $\bigcup G_n \in \mathcal{M}_e$ y como $\mu(H)=0 \Rightarrow H \in \mathcal{M}_e$

a $\Rightarrow$ c) Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\exists G_n \supseteq A$, G_n abierto y $\mu(G_n \setminus A) < \frac{1}{n}$

$$A = \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n\right) \setminus \underbrace{\left(\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n\right) \setminus A\right)}_{H}$$

Qvq $\mu(H) = 0$

$$\underset{H \subseteq G_n \setminus A \forall n}{\mu(H) \leq} \mu(G_n \setminus A) < \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow \mu(H) = 0$$

(12) Sea $A \subseteq \mathbb{R}$. Probar que $A \in \mathcal{M}_e \iff \forall \varepsilon > 0$ existen conjuntos G abierto y F cerrado tales que $F \subseteq A \subseteq G$ y $\mu(G \setminus F) < \varepsilon$

$\Rightarrow$) Sea $A \in \mathcal{M}_e$

Por prop se que $\forall \varepsilon > 0, \exists F \subseteq A$ cerrado $/ \mu(A \setminus F) < \varepsilon/2$

Dado $\varepsilon > 0, \exists G$ abierto $/ G \supseteq B$ y $\mu(G \setminus B) < \varepsilon/2$

$G \setminus F = (G \setminus A) \cup (A \setminus F)$

$\mu(G \setminus F) \leq \mu(G \setminus A) + \mu(A \setminus F) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$

$\Leftarrow$) Sean G y $F / F \subseteq A \subseteq G$ y $\mu(G \setminus F) < \varepsilon \ \forall \varepsilon > 0$

Sea $\varepsilon = 1 \ \exists G_1, F_1 / F_1 \subseteq A \subseteq G_1, \mu(G_1 \setminus F_1) < 1$

$\varepsilon = \frac{1}{2} \ \exists G_2, F_2 / F_2 \subseteq A \subseteq G_2, \mu(G_2 \setminus F_2) < 1/2$

$\vdots$

$\varepsilon = \frac{1}{n} \ \exists G_n, F_n / F_n \subseteq A \subseteq G_n, \mu(G_n \setminus F_n) < 1/n$

$$A = \bigcup_n F_n \cup \underbrace{\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A \setminus F_n \right)}_{Z}$$

$$Z = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A \setminus F_n \subseteq \underbrace{\bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n \setminus F_n}_{\text{si es medible}}$$

$\Rightarrow Z$ es conj nulo

$\Rightarrow \mu(Z) = 0$

$\mu\left(\bigcap_n G_n \setminus F_n\right) = 0$

$\Rightarrow$ es conj nulo

$\Rightarrow$ Por es (11) $A \in \mathcal{M}_e$

Scanned with CamScanner

(13) Sea $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}$ y $B \in \mathcal{M}$ / $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n \Delta B) = 0$. Probar que $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(B)$

$$\underbrace{|\mu(A_n) - \mu(B)|}_{\to 0} = |\mu((A_n \cap B) \cup (A_n \setminus B)) - \mu((A_n \cap B) \cup (B \setminus A_n))|$$

$$= |\cancel{\mu(A_n \cap B)} + \mu(A_n \setminus B) - \cancel{\mu(A_n \cap B)} - \mu(B \setminus A_n)|$$

$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

$$= |\mu(A_n \setminus B) - \mu(B \setminus A_n)|$$

$$\leq \mu(A_n \setminus B) + \mu(B \setminus A_n)$$

$$= \mu((A_n \setminus B) \dot\cup (B \setminus A_n))$$

$$= \mu(A_n \Delta B) < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

$$\Rightarrow \exists n_0 / \mu(A_n \Delta B) < \varepsilon \ \forall n \geq n_0$$

(11) Recordemos que para $c \in \mathbb{R}$ y $A \subseteq \mathbb{R}$ denotamos $cA = \{ca : a \in A\}$

a) Probar que si $A \in \mathcal{M}_e \Rightarrow cA \in \mathcal{M}_e$

$$A \in \mathcal{M}_e \underset{\text{ej 11}}{\Rightarrow} A = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n\right) \cup Z$$

$$cA = \Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{cF_n}_{\text{cerrado} \Rightarrow \in \mathcal{M}_e}\Big) \cup \underbrace{(cZ)}_{\text{mide } 0} \Rightarrow cA \in \mathcal{M}_e$$

cZ es nulo:

Dado $\varepsilon > 0$. Como Z es nulo $\Rightarrow \exists (I_n)_n$ intervalos /

$$Z \subseteq \bigcup_n I_n \text{ y } \sum_n \operatorname{long}(I_n) < \varepsilon/c$$

$$cZ \subseteq \bigcup_n c\,\underbrace{I_n}$$

$$\sum_n \operatorname{long}(cI_n) = c \sum_n \underbrace{\operatorname{long}(I_n)}_{< \varepsilon/c} < \varepsilon$$

$\Rightarrow cZ$ es nulo

b) Probar que si $c > 0 \Rightarrow \mu(cA) = c\mu(A)$

1- Sea A un intervalo:

$$A = (a, b) \Rightarrow \mu(A) = b - a$$

$$cA = (ca, cb) \Rightarrow \mu(cA) = c(b-a) = c\mu(A)$$

2- Sea A abierto:

$$A = \dot{\bigcup_n} I_n \Rightarrow \mu(A) = \sum_n \mu(I_n)$$

$$cA = \dot{\bigcup_n} cI_n \Rightarrow \mu(cA) = \sum_n \mu(cI_n) \overset{1-}{=} \sum_n c\mu(I_n) = c\mu(A)$$

(14) b) 3- Sea A arbitrario:

$\mu(A) = \inf\{\mu(G) : G \supseteq A, G \text{ abierto}\}$

$\mu(cA)$:

Sea G abierto / $A \subseteq G \Rightarrow cA \subseteq cG$

$\mu(cA) = \mu(cG) \overset{3-}{\leq} c\mu(G)$

$\dfrac{\mu(cA)}{c} = \mu(G) \;\forall\, G$ abierto / $A \subseteq G$

$\underset{\text{Tomo inf}}{\Longrightarrow} \dfrac{\mu(cA)}{c} = \mu(A)$

$\Rightarrow \mu(cA) = c\,\mu(A)$

$c\mu(A) = c\mu\left(\frac{1}{c} \cdot c \cdot A\right) = k \cdot \frac{1}{2}\,\mu(cA) = \mu(cA)$

$c\mu(A) = \mu(cA)$

c) Que se puede decir de $\mu(cA)$ en el caso $c<0$?

Lo mismo de arriba pero con módulo

(15) Probar que existe una función sobreyectiva $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ que vale 0 en casi todo punto de $[0,1]$. Puede una función tal ser continua?

Sea $\mathcal{C}$ el conjunto de Cantor

Como $\mathcal{C}\sim\mathbb{R} \Rightarrow \exists\, g:\mathcal{C}\to\mathbb{R}$ biy

Sea $f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$

$$f(x)=\begin{cases} g(x) & \text{si } x\in\mathcal{C} \\ 0 & \text{si } x\in[0,1]\setminus\mathcal{C}\end{cases}$$

Como $[0,1]$ es compacto, si fuera continua $\mathbb{R}$ tendría que ser compacto

Abs! $\Rightarrow f$ no es continua