UBA - exactas
Departamento de Matemática

Análisis Avanzado - Espacios Normados 1 (2da parte)

Segundo cuatrimestre de 2021

Daniel Carando - Victoria Paternostro

Dto. de Matemática - FCEN - UBA

Normas equivalentes

En $\mathbb{R}^n$, $\| \ \|_1$, $\| \ \|_2$, $\| \ \|_\infty$.

$\|x\|_\infty = \max(|x_1|, \dots, |x_n|) \le |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| = \|x\|_1$

$\|x\|_1 \le n \|x\|_\infty$ (EJERCICIO)

$$\boxed{\|x\|_\infty \le \|x\|_1 \le n \|x\|_\infty} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

$$d_\infty(x,y) \le d_1(x,y) \le n\, d(x,y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

Suc. conv., suc. de Cauchy, conj. abt, conj. ac., conj. cerrados, conj. compactos para $\| \ \|_\infty$ y para $\| \ \|_1$ son los mismos.

EJERCICIO: ¿QUÉ RELAC. TIENEN $\| \ \|_1$ y $\| \ \|_2$, $\| \ \|_\infty$ y $\| \ \|_2$?

Definición $\to \| \ \|_1 , \| \ \|_2$

Dos normas en un espacio vectorial son equivalentes si existen $c, \tilde{c} > 0$ tales que

$$c\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \tilde{c}\|x\|_2.$$

Si $\| \ \|_1$ y $\| \ \|_2$ son equiv., $x_n \to x$ en $\| \ \|_1 \Leftrightarrow x_n \to x$ en $\| \ \|_2$.

(CAUCHY, AB, CERR, ETC).

OBS: EN $\mathbb{R}^n$, $\| \ \|_1$ y $\| \ \|_\infty$ son equivalentes

$\| \ \|_\infty, \| \ \|_2$ son equiv., $\| \ \|_1, \| \ \|_2$ son equiv.

En $C[0,1]$, $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\,dx$

$$\|f\|_\infty = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|$$

$\|\ \|_1$ y $\|\ \|_\infty$ <u>NO</u> son equivalentes.

$\|f\|_1 \leq \|f\|_\infty \ \forall f$ pero $\nexists\ c>0$ /

$$\underbrace{\|f\|_\infty \leq c\,\|f\|_1}\quad \forall f\in C[0,1].$$

Ejercicio

Las normas $\| \|_1$ y $\| \|_2$ en E son equivalentes si y sólo si la función identidad $id : (E, \| \|_1) \to (E, \| \|_2)$ es bi-Lipschitz.

LIPSCHITZ CON INVERSA LIPSCHITZ.

Teorema

En $\mathbb{R}^n$ todas las normas son equivalentes.

DEM: veamos que toda norma es equiv. a $\| \ \|_1$

$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$.

Dada $\| \ \|$ una norma cualquiera, q v q $\exists\, c, \tilde{c} > 0$ /

$$c\|x\|_1 \leq \boxed{\|x\| \leq \tilde{c}\|x\|_1} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

$e_k = (0, 0, \underbrace{1}_{k}, 0 \dots 0)$. $\quad x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$.

$$\|x\| = \|x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n\| \leq \|x_1 e_1\| + \|x_2 e_2\| + \dots + \|x_n e_n\|$$

$$= \underbrace{|x_1|}\,\underbrace{\|e_1\|}_{\leq M} + \underbrace{|x_2|}\,\underbrace{\|e_2\|}_{\leq M} + \dots + \underbrace{|x_n|}\,\underbrace{\|e_n\|}_{\leq M} \leq M(|x_1| + \dots + |x_n|) \boxed{\leq M\|x\|_1}$$

$$\boxed{M = \max(\|e_1\|, \|e_2\|, \dots, \|e_n\|)}$$

$\tilde{c} = M$.

Falta ver que $\exists\, c > 0 \,/\, c\|x\|_1 \leq \|x\| \;\; \forall x \in E$.

Obs: si $x = 0$, cualquier c sirve.

Podemos buscar c que sirva $\forall x \neq 0$.

$g : (\mathbb{R}^n, \| \|_1) \to \mathbb{R} \qquad g(x) = \|x\|$ EJERC.

g es CONTINUA: $|g(x) - g(y)| = \big| \|x\| - \|y\| \big| \leq$

$\|x - y\| \leq \tilde{c} \|x - y\|_1 = \tilde{c}\, d_1(x, y)$ $\quad$ g LIPSCHITZ $\therefore$ g CONT

↳ PÁG ANTERIOR

$S = \{ x \in \mathbb{R}^n \,/\, \|x\|_1 = 1 \}$ S es CERRADO Y ACOT.

(EN $\| \|_1$). $\Longrightarrow$ S es COMPACTO EN $(\mathbb{R}^n, \| \|_1)$.

$\therefore$ g alcanza máx y mín en S.

$\boxed{g(x) = \|x\|}$ tiene máx y mín en $S = \{x \in \mathbb{R}^n \,/\, \|x\|_1 = 1\}$

$\boxed{m = \min_{x \in S} \underbrace{|g(x)|}_{\geq 0}}$ $m \geq 0$. Veamos que $m > 0$:

$m = g(y)$ $y \in S \Rightarrow m = \|y\|$ $y \in S$.

Como $y \in S$, $\|y\|_1 = 1 \Rightarrow y \neq 0 \Rightarrow \underbrace{\|y\|}_{= m} \neq 0$. $\therefore m > 0$

Si $\underbrace{x \neq 0}$. $\underbrace{\frac{x}{\|x\|_1}} \in S \Rightarrow g\left(\frac{x}{\|x\|_1}\right) \geq m$.

$\Rightarrow \left\| \frac{x}{\|x\|_1} \right\| \geq m$. $\Rightarrow \frac{1}{\|x\|_1} \|x\| \geq m \Rightarrow$

$\Rightarrow \|x\| \geq \underbrace{m \|x\|_1}$ $c = m > 0$

$\boxed{c\|x\|_1 \leq \|x\| \quad \forall x \neq 0}$

¡Pero para $x = 0$ TAMBIÉN VALE! $\therefore \exists\, c > 0 \,/\, c\|x\|_1 \leq \|x\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

Espacios normados de dimensión finita

Proposición

Si E es un espacio normado de dimensión $n \in \mathbb{N}$, entonces existen un isomorfismo lineal de $T : E \to \mathbb{R}^n$

Proposición

Si E es un espacio normado de dimensión $n \in \mathbb{N}$, entonces existen un isomorfismo lineal de $T : E \to \mathbb{R}^n$ y una norma en $\mathbb{R}^n$ tal que T es una isometría.

$(E, \| \ \|_E)$ $\quad$ $(\mathbb{R}^n, \| \ \|_0)$

↳ EXISTE

EXISTE $T : (E, \| \ \|_E) \to (\mathbb{R}^n, \| \ \|_0)$ /

T ISOMETRÍA $\quad$ $\| Tx - Ty \|_0 = \| x - y \|_E$.

$\forall x, y \in E$.

Proposición

Si E es un espacio normado de dimensión $n \in \mathbb{N}$, entonces existen un isomorfismo lineal de $\underbrace{T : E \to \mathbb{R}^n}$ y una norma en $\mathbb{R}^n$ tal que T es una isometría.

$T^{-1}(z) \leftarrow z$

como $\dim E = \dim \mathbb{R}^n$, $\exists\, T : E \to \mathbb{R}^n$ ISOMORFISMO.

$z \in \mathbb{R}^n$, definimos $\boxed{\|z\|_0 := \|T^{-1}z\|_E}$

EJERCICIO: $\|\ \|_0$ ES UNA NORMA.

T ISOMETRÍA: $\boxed{d_0(Tx, Ty)} = \|Tx - Ty\|_0 \overset{\text{POR DEF}}{=}$

$\|T^{-1}(Tx - Ty)\|_E = \|T^{-1}(T(x-y))\|_E = \|x-y\|_E$

$= \boxed{d_E(x,y)}$ $\therefore$ T es ISOMETRÍA (T es BIYECTIVA)

Corolario

Si E es un espacio normado de dimensión $n \in \mathbb{N}$, entonces es uniformemente homeomorfo a $(\mathbb{R}^n, \| \|_2)$ (donde el homeomorfismo es un isomorfismo lineal).

→ bi-Lipschitz

$$\begin{tikzcd}
(E, \| \|_E) \arrow[r, "T"'] \arrow[rr, bend left, "id \circ T \\ \text{bi-Lipschitz}"] & (\mathbb{R}^n, \| \|_0) \arrow[r, "id"', "\text{bi-Lipschitz}" below] & (\mathbb{R}^n, \| \|_2)
\end{tikzcd}$$

↓

ISOMORFISMO ISOMÉTRICO (PROP ANTERIOR)

↳ $\| \|_0$ y $\| \|_2$ son equiv. (son normas en $\mathbb{R}^n$)

$id \circ T : (E, \| \|_E) \to (\mathbb{R}^n, \| \|_2)$ ES bi-Lipschitz ∴ HOMEO UNIFORME

$\xRightarrow{EJ}$ $id : (\mathbb{R}^n, \| \|_0) \to (\mathbb{R}^n, \| \|_2)$ es bi-Lipschitz.

Corolario

Todo espacio normado de dimensión finita es completo (es Banach).

$$(E, \| \|_E) \xrightarrow{\boxed{id \circ T}} (\mathbb{R}^n, \| \|_2)$$

↳ bi-Lipshitz

Si $(x_n)_n \subset E$ de Cauchy $\Rightarrow$ $((id \circ T)(x_n))_n$ es de Cauchy en $(\mathbb{R}^n, \| \|_2)$ $\Rightarrow \exists\, z \in \mathbb{R}^n \,/\, (id \circ T)(x_n) \to z$

↳ $(\mathbb{R}^n, \| \|_2)$ COMPLETO

$\Rightarrow$ $x_n \to (id \circ T)^{-1}(z)$ $\Rightarrow$ (x_n) CONVERGE en $(E, \| \|_E)$

$(id \circ T)^{-1}$ CONT

$\therefore$ $(E, \| \|_E)$ es completo.

Corolario

Todo espacio normado de dimensión finita es completo (es Banach).

Corolario

En un espacio normado de dimensión finita, los conjuntos cerrados y acotados son compactos.

DEM: EJERCICIO.

$id \circ T : (E, \| \; \|_E) \to (\mathbb{R}^n, \| \; \|_2)$

Sea $A \subset E$, cerrado y acotado . . . .