INTEGRALES I

NOT: $E \subseteq \mathbb{R}$ MEDIBLE, FIJO

RECORDAMOS: $f: E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ SIMPLE y MEDIBLE, ESTO ES:

$$f \overset{(*)}{=} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}, \quad \text{CON}$$

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i, \quad E_i \text{ MEDIBLE}, \quad \alpha_i \geq 0;$$

$$\tilde{I}(f) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, \mu(E_i)$$

RECORDAR: $f: E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ MEDIBLE. DEFINIMOS

$$\int_E f = \sup \{ \tilde{I}(g) : g \leq f, \ g \text{ SIMPLE} \}$$

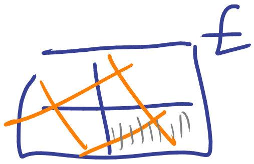
PROP: f SIMPLE. ENTONCES $\int_E f = \tilde{I}(f)$.

DEM: $\exists$ VQ SI $g \leq f$ ES SIMPLE, ENTONCES

$$\tilde{I}(g) \leq \tilde{I}(f) \quad \text{(i.e., } \tilde{I}(f) \text{ ES MÁX DEL CONJ)}$$

f COMO EN $(*)$; $g = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \chi_{D_j}$ CON

$E = \bigcup_{j=1}^{m} D_j$, D_j MED.



Tenemos $(\forall i)$ $E_i = \biguplus_{j=1}^{m} E_i \cap D_j$

~> Luego $\chi_{E_i} = \sum_{j=1}^{m} \chi_{E_i \cap D_j}$; además

$m(E_i) = \sum_{j=1}^{m} m(E_i \cap D_j)$.

Notar: $\alpha_i \geq \beta_j$ siempre que $E_i \cap D_j \neq \emptyset$,

pues $f \geq g$.

Luego $\alpha_i \, m(E_i \cap D_j) \geq \beta_j \, m(E_i \cap D_j)$

siempre (aún cuando $E_i \cap D_j = \emptyset$)

Así, $\tilde{I}(f) = \sum_i \alpha_i \, m(E_i)$

$= \sum_i \alpha_i \sum_j m(E_i \cap D_j)$

$= \sum_j \sum_i \alpha_i \, m(E_i \cap D_j)$ $\quad = 0$, si $E_i \cap D_j = \emptyset$

$\geq$ (luego)

$\sum_j \sum_i \beta_j \, m(D_j \cap E_i) = \sum_j \beta_j \, m(D_j) = \tilde{I}(g)$

$D_j = \biguplus_i D_j \cap E_i$

PROP: SEA $f: E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ MEDIBLE. SEA $a>0$, Y SEA

$$g: aE \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \qquad g(x) = f(x/a)$$

(EJ 14 PB: $aE := \{ae : e \in E\}$ ES MED Y

$$\mu(aE) = a\mu(E))$$

ENTONCES, g ES MEDIBLE Y

$$\int_{aE} g = a \int_E f .$$

$$\left(\int_{aE} f(x/a)\,dx \underset{\substack{y = x/a \\ dy = dx/a}}{=} a \int_E f(y)\,dy \right)$$

DEM: g ES MEDIBLE PUES $(\forall b)$

$$\{g > b\} = \{x \in E : f(\overbrace{x/a}^{y}) > b\}$$

$$= a \underbrace{\{y \in E : f(y) > b\}}_{\text{MEDIBLE}} \to \text{MED}$$

(EJ 14 P.B)

• SUP f SIMPLE: $f = \sum \alpha_i \chi_{E_i}$

CON $E = \bigcup_i E_i$, E_i MEDIBLE

ENTONCES $g(x) = f(x/a) = \sum \alpha_i \underbrace{\chi_{E_i}(x/a)}_{= \chi_{aE_i}(x)}$,

OBS: $x/a \in E_i$ SII $x \in aE_i$

i.e. $g = \sum \alpha_i \chi_{aE_i}$

$\rightsquigarrow$ g ES SIMPLE;

ASÍ

EJ 14, P2

$$\int_{aE} g = \sum \alpha_i \mu(aE_i) =$$
$$= \sum \alpha_i a \mu(E_i) = a \sum \alpha_i \mu(E_i)$$
$$= a \int_E f$$

- CASO GENERAL:

(• f MED $\Rightarrow \exists (f_n)$ SUC. DE SIMPLES, MED, CON $f_n \nearrow f$

• TEO CONV. MONÓTONA: SI $\underbrace{f_n}_{\text{TODAS MED, } \geq 0} \nearrow f$ ENTONCES $\int f_n \nearrow \int f$)

TOMEMOS (f_n) SUC. DE SIMPLES CON $f_n \nearrow f$

SEA $g_n(x) = f_n(x/a)$.

ENTONCES

- g_n SIMPLES
- $\underbrace{g_n(x)}_{f_n(x/a)} \nearrow g(x) = f(x/a) \ \forall x$

LUEGO, POR EL TEO CONV. MONÓTONA:

$$\int_{aE} g \underset{\text{TCM}}{=} \lim \int_{aE} g_n \underset{\text{SIMPLES}}{=} \lim a \int_E f_n$$

$$= a \lim \int_E f_n \underset{\text{TCM}}{=} a \int_E f$$

$\boxtimes$