UBA - exactas
Departamento de Matemática

Análisis Avanzado - Integral de Lebesgue 3

Segundo cuatrimestre de 2021

Daniel Carando - Victoria Paternostro

Dto. de Matemática - FCEN - UBA

Integral de Lebesgue de funciones no negativas.

Sea $f : E \to \mathbb{R}$ una función medible tal que $f \geq 0$ en E.

$f : E \to [0, +\infty)$

Definimos la integral de Lebesgue de f como

$$\to \quad \int_E f\, d\mu := \sup\{\int_E \varphi\, d\mu : \varphi \text{ es simple } 0 \leq \varphi \leq f\}.$$

$$\varphi = \sum_{n=1}^{N} c_n \chi_{E_n} \quad \Rightarrow \quad \int \varphi\, d\mu = \sum_{n=1}^{N} \underbrace{c_n}_{\geq 0} \underbrace{\mu(E_n)}_{\in [0, +\infty]}.$$

Si $c_n = 0$ y $\mu(E_n) = +\infty$

consideramos "$0 \cdot +\infty = 0$"

Todo lo que vimos la vez pasada vale

si $f : E \to [0, +\infty]$ (si f vale $+\infty$ en algunos puntos)

Integral de Lebesgue de funciones no negativas.

Sea $f : E \to [0, +\infty]$ una función medible.

Definimos la integral de Lebesgue de f como

$$\int_E f \, d\mu := \sup\{ \int_E \varphi \, d\mu : \varphi \text{ es simple } \ 0 \leq \varphi \leq f\}.$$

Integral de Lebesgue de funciones no negativas.

Sea $f : E \to [0, +\infty]$ una función medible.
Definimos la integral de Lebesgue de f como

$$\int_E f\, d\mu := \sup\{ \int_E \varphi\, d\mu : \varphi \text{ es simple } 0 \leq \varphi \leq f\}.$$

Definición
Sea $f \geq 0$ medible. Decimos que f es integrable en E si

$$\int_E f\, d\mu < +\infty.$$

Integral de Lebesgue de funciones no negativas.

Sea $f : E \to [0, +\infty]$ una función medible.
Definimos la integral de Lebesgue de f como

$$\int_E f\, d\mu := \sup\{\int_E \varphi\, d\mu : \varphi \text{ es simple } 0 \leq \varphi \leq f\}.$$

Definición

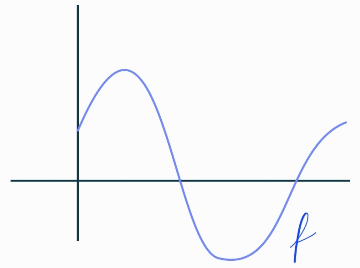
Sea $f \geq 0$ medible. Decimos que f es integrable en E si

$$\int_E f\, d\mu < +\infty.$$

Por lo que vimos en la clase pasada, si f es integrable entonces $f(x) < +\infty$ para casi todo $x \in E$.

Notación:

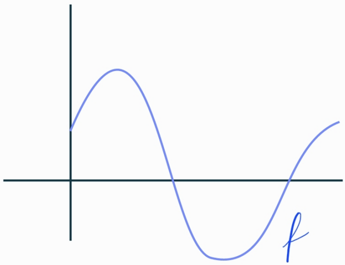
Sea f medible.



Notación:

Sea f medible.

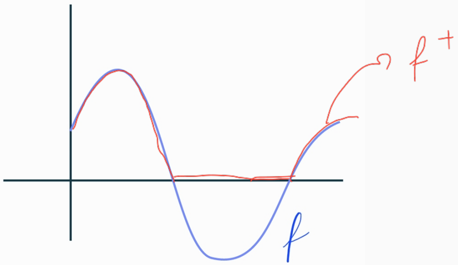
$$f^+ = \max\{f, 0\}$$



Notación:

Sea f medible.

$$f^+ = \max\{f, 0\} = \begin{cases} f(x), & \text{si } f(x) \geq 0 \\ 0, & \text{si } f(x) < 0. \end{cases}$$

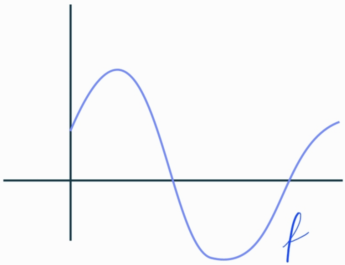


Notación:

Sea f medible.

$$f^+ = \max\{f, 0\} = \begin{cases} f(x), & \text{si } f(x) \geq 0 \\ 0, & \text{si } f(x) < 0. \end{cases}$$

$$f^- = \underbrace{-\min\{f, 0\}} = \underbrace{\max\{-f, 0\}}$$

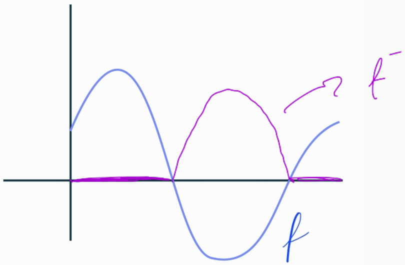


Notación:

Sea f medible.

$$f^+ = \max\{f, 0\} = \begin{cases} f(x), & \text{si } f(x) \geq 0 \\ 0, & \text{si } f(x) < 0. \end{cases}$$

$$f^- = -\min\{f, 0\} = \max\{-f, 0\} = \begin{cases} 0, & \text{si } f(x) \geq 0 \\ -f(x), & \text{si } f(x) < 0. \end{cases}$$



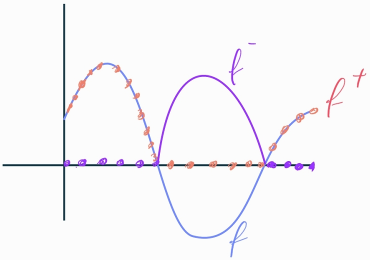
Notación:

Sea f medible.

$$f^+ = \max\{f, 0\} = \begin{cases} f(x), & \text{si } f(x) \geq 0 \\ 0, & \text{si } f(x) < 0. \end{cases}$$

$$f^- = -\min\{f, 0\} = \max\{-f, 0\} = \begin{cases} 0, & \text{si } f(x) \geq 0 \\ -f(x), & \text{si } f(x) < 0. \end{cases}$$

f^+ y f^- son medibles



Notación:

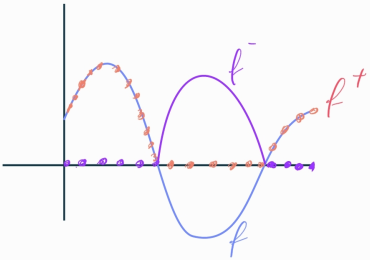
Sea f medible.

$$f^+ = \max\{f, 0\} = \begin{cases} f(x), & \text{si } f(x) \geq 0 \\ 0, & \text{si } f(x) < 0. \end{cases}$$

$$f^- = -\min\{f, 0\} = \max\{-f, 0\} = \begin{cases} 0, & \text{si } f(x) \geq 0 \\ -f(x), & \text{si } f(x) < 0. \end{cases}$$

f^+ y f^- son medibles

$\underbrace{f^+ \geq 0}$, $\underbrace{f^- \geq 0}$



Notación:

Sea f medible.

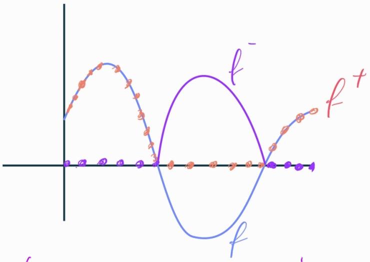
$$f^{+} = \max\{f, 0\} = \begin{cases} f(x), & \text{si } f(x) \geq 0 \\ 0, & \text{si } f(x) < 0. \end{cases}$$

$$f^{-} = -\min\{f, 0\} = \max\{-f, 0\} = \begin{cases} 0, & \text{si } f(x) \geq 0 \\ -f(x), & \text{si } f(x) < 0. \end{cases}$$

f^{+} y f^{-} son medibles

$f^{+} \geq 0, \ f^{-} \geq 0$

$f = f^{+} - f^{-}$



$f^+(x) - f^-(x)$ = EJERCICIO (repasar en casa)

Notación:
Sea f medible.

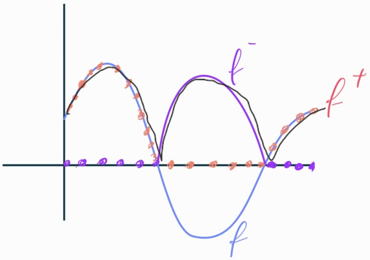
$$f^+ = \max\{f, 0\} = \begin{cases} f(x), & \text{si } f(x) \geq 0 \\ 0, & \text{si } f(x) < 0. \end{cases}$$

$$f^- = -\min\{f, 0\} = \max\{-f, 0\} = \begin{cases} 0, & \text{si } f(x) \geq 0 \\ -f(x), & \text{si } f(x) < 0. \end{cases}$$

f^+ y f^- son medibles

$f^+ \geq 0$, $f^- \geq 0$

$f = f^+ - f^-$ $\qquad$ $|f| = f^+ + f^-$



Definición

Sea f medible. Decimos que $\int_E f\,d\mu$ existe si

$$\int_E f^+\,d\mu < +\infty \qquad \text{ó} \qquad \int_E f^-\,d\mu < +\infty.$$

Definición

Sea f medible. Decimos que $\int_E f\, d\mu$ existe si

$$\int_E f^+\, d\mu < +\infty \qquad \text{ó} \qquad \int_E f^-\, d\mu < +\infty.$$

En ese caso, definimos

$$\int_E f\, d\mu = \int_E f^+\, d\mu - \int_E f^-\, d\mu.$$

$(f = f^+ - f^-)$

Definición

Sea f medible. Decimos que $\int_E f\,d\mu$ existe si

$$\int_E f^+\,d\mu < +\infty \qquad \text{ó} \qquad \int_E f^-\,d\mu < +\infty.$$

En ese caso, definimos

$$\boxed{\int_E f\,d\mu = \int_E f^+\,d\mu - \int_E f^-\,d\mu.}$$

Decimos que f es integrable en E si $\int_E f\,d\mu$ existe y es un número finito.

si $\int f^+ d\mu < +\infty$

ó $\int f^- d\mu < +\infty$

EJERCICIO

Si $\mu(E) < +\infty$, f medible y acotada $\Rightarrow$ f INTEGRABLE EN E

Propiedades:

Sean f, g medibles.

Propiedades:

Sean f, g medibles.

1. Si $\int_E f\, d\mu$ existe, entonces $\left|\int_E f\, d\mu\right| \leq \int_E |f|\, d\mu$.

DEMI: $\left|\int_E f\, d\mu\right| \underset{\text{DEF}}{=} \left|\int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu\right| \underset{\text{DESIG TRIANG}}{\leq}$

$\leq \left|\int_E f^+ d\mu\right| + \left|-\int_E f^- d\mu\right| = \int_E \underbrace{f^+}_{\geq 0} d\mu + \int_E \underbrace{f^-}_{\geq 0} d\mu =$

$\underset{\text{LINEALIDAD DE INT DE NO NEGATIVAS}}{=} \int_E f^+ + f^- d\mu = \int_E |f|\, d\mu$

Propiedades:

Sean f, g medibles.

1. Si $\int_E f\,d\mu$ existe, entonces $\left|\int_E f\,d\mu\right| \leq \int_E |f|\,d\mu$.
2. f es integrable si y sólo si $|f|$ lo es.

$\Leftarrow$) SALE DE (1) y de: $\int f^+ \leq \int |f|$

$\int f^- \leq \int |f|$

$\Rightarrow$) f INT $\Rightarrow$ $\int f = \int f^+ - \int f^-$ $\boxed{\text{EXISTE Y es FINITO}}$ $\rightarrow$ $\underbrace{(f^+ \leq |f| \text{ y } f^- \leq |f|)}_{\underbrace{f^+}_{\geq 0} + \underbrace{f^-}_{\geq 0} = |f|}$

$\Rightarrow \int f^+ < +\infty$ y $\int f^- < +\infty$

$\Rightarrow \int |f| = \int (f^+ + f^-) = \int f^+ + \int f^- < +\infty.$

Propiedades:
Sean f, g medibles.

1. Si $\int_E f\,d\mu$ existe, entonces $\left|\int_E f\,d\mu\right| \leq \int_E |f|\,d\mu$.
2. f es integrable si y sólo si $|f|$ lo es.
3. Si f es integrable entonces f es finita en ctp de E.

Ejercicio (usar 2 y las props análoga para no negativas).

Propiedades:

Sean f, g medibles.

1. Si $\int_E f\, d\mu$ existe, entonces $\left|\int_E f\, d\mu\right| \leq \int_E |f|\, d\mu$.
2. f es integrable si y sólo si $|f|$ lo es.
3. Si f es integrable entonces f es finita en ctp de E.
4. Si $f \leq g$ en ctp de E y sus integrales en E existen, entonces $\int_E f\, d\mu \leq \int_E g\, d\mu$.

MONOTONÍA

EJ: IDEA $f \leq g$ ctp $\underset{\text{VER}}{\Rightarrow}$ $f^+ \leq g^+$ ctp

$g^- \leq f^-$ ctp.

con esto y la monotonía para no negativas sale.

Propiedades:

Sean f, g medibles.

1. Si $\int_E f\,d\mu$ existe, entonces $\left|\int_E f\,d\mu\right| \leq \int_E |f|\,d\mu$.
2. f es integrable si y sólo si $|f|$ lo es.
3. Si f es integrable entonces f es finita en ctp de E.
4. Si $f \leq g$ en ctp de E y sus integrales en E existen, entonces $\int_E f\,d\mu \leq \int_E g\,d\mu$.
5. Si $\int_E f\,d\mu$ existe y $c \in \mathbb{R}$, entonces $\int_E cf\,d\mu = c\int_E f\,d\mu$.

• si $c \geq 0$ usar $(cf)^+ = c\cdot(f^+)$

$(cf)^- = c\cdot(f^-)$

y probar la prop.

• ver qué pasa para $c = -1$. (o $c < 0$).

Propiedades:

Sean f, g medibles.

1. Si $\int_E f\,d\mu$ existe, entonces $\left|\int_E f\,d\mu\right| \leq \int_E |f|\,d\mu$.
2. f es integrable si y sólo si $|f|$ lo es.
3. Si f es integrable entonces f es finita en ctp de E.
4. Si $f \leq g$ en ctp de E y sus integrales en E existen, entonces $\int_E f\,d\mu \leq \int_E g\,d\mu$.
5. Si $\int_E f\,d\mu$ existe y $c \in \mathbb{R}$, entonces $\int_E cf\,d\mu = c\int_E f\,d\mu$.
6. Si f y g son integrables entonces $f+g$ lo es y

$$\int_E f+g\,d\mu = \int_E f\,d\mu + \int_E g\,d\mu.$$

LINEALIDAD

NO LO HACEMOS (SEPARAR EN DONDE $f, g, f+g$ SON (C/U) NEG O POSIT

Teorema de la convergencia Monótona

Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles en E.

1. Si existe φ integrable en E tal que $\varphi \leq f_n \leq f_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\mu = \int_E \lim_{n\to\infty} f_n \, d\mu.$$

EJ: VER QUE LA HIPÓTESIS "$\varphi \leq f_n$" ES NECESARIA.

Teorema de la convergencia Monótona

Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles en E.

1. Si existe φ integrable en E tal que $\boxed{\varphi \leq f_n \leq f_{n+1}}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces
$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\mu = \int_E \lim_{n\to\infty} f_n \, d\mu. \quad = f$$

2. Si existe φ integrable en E tal que $f_{n+1} \geq f_n \geq \varphi$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces
$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\mu = \int_E \lim_{n\to\infty} f_n \, d\mu.$$

IDEA (1) $\quad g_n = f_n - \varphi \qquad g = f - \varphi$

$\Rightarrow 0 \leq g_n \leq g_{n+1} \qquad g = \lim g_n \Longrightarrow \lim \int g_n = \int g$

$g_n \geq 0$

$\lim \int f_n - \varphi \quad " \quad \int f - \varphi \quad "$

FALTA (NO LO HACEMOS): VER QUE PODEMOS SEPARAR LA INT. (NO SABEMOS QUE f_n o f SON INTEG.

Teorema de la convergencia Monótona con hipótesis ctp

Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles en E.

1. Si existe φ integrable en E tal que $\varphi \leq f_n$ ctp para todo $n \in \mathbb{N}$ y $f_n \leq f_{n+1}$ ctp para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\mu = \int_E \lim_{n\to\infty} f_n \, d\mu.$$

$\to$ $A_n = \{x \in E \,/\, f_n(x) < \varphi(x)\}$ $\quad \mu(A_n) = 0$

$\to$ $B_n = \{x \in E \,/\, f_n(x) > f_{n+1}(x)\}$ $\quad \mu(B_n) = 0$

$C = \left(\bigcup_n A_n\right) \cup \left(\bigcup_n B_n\right) \Rightarrow \mu(C) = 0$ $\qquad$ MEDIB $\tilde{E} = E \setminus C$.

- $\int_E h \, d\mu = \int_{\tilde{E}} h \, d\mu$ $\forall h$ donde EXISTA LA INTEG

$\varphi \leq f_n \leq f_{n+1}$ en $\tilde{E}$.

VALE TEO ANTERIOR EN $\tilde{E}$

$\Rightarrow$ TAMBIÉN EN E

Lema de Fatou

Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles definidas en E. Si existe ϕ integrable en E tal que $\underbrace{f_n \geq \phi}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\int_E \liminf_{n\to+\infty} f_n \, d\mu \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_E f_n \, d\mu.$$

IDEA: $g_n = f_n - \phi \geq 0$, USAR FATOU P/ NO NEGAT Y VER QUE SE PUEDE SEPARAR LAS INTEGRALES.

EL TEO VALE CON "$f_n \geq \phi$ CTP"

Teorema de Convergencia Dominada (MAYORADA)

Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles definidas en E tal que existe $f = \underbrace{\lim_{n\to+\infty} f_n}$. Si existe ϕ integrable tal que $\boxed{|f_n| \le \phi}$ en E para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\underbrace{\lim_{n\to+\infty} \int_E f_n \, d\mu = \int_E f \, d\mu.}$$

IDEA:

$$\underbrace{|f_n|} \le \underbrace{\phi} \iff -\phi \le f_n \le \phi \Longrightarrow$$

$$0 \le \underbrace{f_n + \phi} \le \underbrace{2\phi}_{\text{INTEGRABLE}} \qquad g_n = f_n + \phi \searrow f + \phi \qquad \text{aplicamos TCD a } f_n + \phi.$$

$$\lim_n \int f_n + \phi = \int f + \phi \Longrightarrow \underbrace{\lim_n \int f_n} + \cancel{\int \phi} = \underbrace{\int f} + \cancel{\int \phi}$$

f_n, f INTEG (VER)

Teorema (continuidad absoluta de la integral)

Sea f integrable en E. Entonces, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } A \subseteq E \text{ es medible con } \mu(A) < \delta \implies \left| \int_A f \, d\mu \right| < \varepsilon.$$

EJERCICIO (USAR QUE VALE PARA NO NEGATIVAS Y ALGO DE ESTA CLASE)

Teorema (Riemann implica Lebesgue)

Sea I un intervalo cerrado y acotado y $f : I \to \mathbb{R}$ una función acotada.

Si f es integrable Riemann, entonces es integrable Lebesgue y ambas integrales coinciden.

$I = [a,b]$

Si f TIENE PRIMITIVA F en $[a,b]$.

$$\int_I f \, d\mu = F(b) - F(a)$$

$$\underbrace{\int_{[0,1]} x^2 \, d\mu}_{\text{LEB}} = \underbrace{\int_0^1 x^2 \, dx}_{\text{RIEMANN}} = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = 1/3.$$