ESPACIOS NORMADOS

"OPERADOR"

RECORDAR: $T: E \to F$ T LINEAL SON EQUIV:

- T ES CONT;
- ⊛ $(\exists m) \ \|Tx\|_F \leq m\|x\|_E \ \forall x \in E$;
- $\forall A \subseteq E$ ACOT, $TA \subseteq F$ ACOT

EN TAL CASO, SE DEFINE

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \inf\{m \geq 0 : \text{VALE } ⊛\}$$

EJEMPLOS:

1) $E = F = C([0,1])$, CON $\|\ \|_\infty$.

FIJO $g \in E$, Y DEFINO $\underbrace{Tf}_{\in E} = \underbrace{g f}_{\in E}$

- T LINEAL ✓
- $|(Tf)(x)| = |\underbrace{g(x)}_{\|g\|_\infty}| \underbrace{|f(x)|}_{\leq \|f\|_\infty}|$

$\leq \|g\|_\infty \|f\|_\infty$

ASÍ (TOMO SUP) $\|Tf\|_\infty \leq \|g\|_\infty \|f\|_\infty$

$\therefore$ T ES ACOT y $\|T\| \leq \|g\|_\infty$

TOMANDO $f \equiv 1$, TENGO

$Tf = g$ y $\|f\| = 1$

ASÍ, $\|T\| = \sup_{h \neq 0} \frac{\|Th\|_\infty}{\|h\|_\infty} \geq \frac{\|g\|_\infty}{1} = \|g\|_\infty$

$\therefore \|T\| = \|g\|_\infty$

2) ÍDEM, PERO CAMBIANDO $\|\ \|_\infty$ POR $\|\ \|_1$ y TOMANDO $g(x) = x$. ASÍ:

$\|Tf\|_1 = \int_0^1 |Tf(x)|\, dx$

$= \int_0^1 \underbrace{|x|}_{\leq 1} \cdot |f(x)|\, dx \leq \int_0^1 |f(x)|\, dx = \|f\|_1$

$\therefore$ T ACOT y $\|T\| \leq 1$

Obs: Tomo $f_m(x) = x^m$

Notar que $T f_m = f_{m+1}$;

Además $\|f_m\|_1 = \int_0^1 x^m \, dx = \frac{1}{m+1}$

Así, $\dfrac{\|\overbrace{T f_m}^{f_{m+1}}\|_1}{\|f_m\|_1} = \dfrac{m+1}{m+2} \xrightarrow[m \to +\infty]{} 1$

$\therefore \quad \|T\| \geq 1$,

Luego, $\|T\| = 1$

Ejercicio: ver que $(\nexists f)$

$$\|Tf\|_1 = \|f\|_1$$

3) $E = C[0,1]$ con $\|\cdot\|_1$

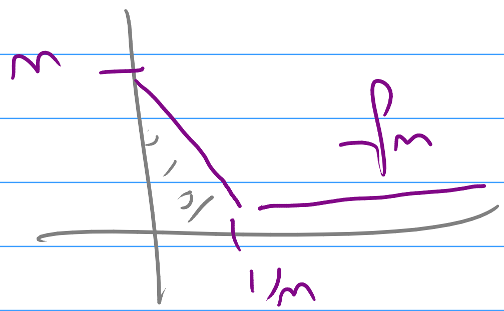
$F = C[0,1]$ con $\|\cdot\|_\infty$

Defino $T : E \to F$, $Tf = f$

T cont sii $(\exists M)$

$$\boxed{\|f\|_\infty = \|Tf\|_F \leq M \|f\|_E = M \cdot \|f\|_1}$$

VEAMOS QUE NO EXISTE TAL M:



$$\|f_m\|_\infty = m, \quad \|f_m\|_1 = 1/2$$

RECORDAR: SEA $T: E \to \mathbb{R}$. SON EQUIV:

- T CONT
- $Nu\,T \subseteq E$ ES CERRADO

OBS: SI $T: E \to \mathbb{R}$ ES NO NULO, $Nu\,T$ ES UN HIPERPLANO

(SI $\dim E = n$, ENTONCES COMO T SOBRE SE TIENE QUE $\dim Nu\,T = \dim E - \dim Im\,T$
$= n - 1$)

PISTA: VER QUE SI $Tv \neq 0$ ENTONCES $E = Nu\,T \oplus \langle v \rangle$

EJEMPLOS:

1) $E = \{ a \in \ell^\infty : \exists \lim a_n \}$ = SUC. ACOTADAS

SEA $T : E \to \mathbb{R}$, $Ta = \lim a_n$.

T ESTÁ ACOT: (OBS: $T \neq 0$)

$$|a_n| \leq \|a\|_\infty \quad \forall n$$

$\leadsto$ $n \to +\infty$

$$|Ta| \leq \|a\|_\infty$$

$$\therefore \|T\| \leq 1$$

LUEGO,

$$\text{Nu}\,T = \{ a \in E : \lim a_n = 0 \}$$

ES HIPERP. CERRADO $\leadsto$ VIMOS ESTO LA CLASE PASADA

2) SEA $E = \{ a \in \ell^\infty : (\exists m)\ a_n = 0 \ \forall n \geq m \}$ = $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$

DEPENDE DE a

DEFINO $T : E \to \mathbb{R}$, $Ta = \underbrace{\sum_{i \geq 1} i\, a_i}_{\text{SUMA FINITA}}$

(¡LINEAL!)

$$\text{SEA } e^{(j)} = (0, \dots, 0, \underset{\text{LUGAR } j}{1}, 0, \dots)$$

ASÍ:

- $\| e^{(j)} \|_\infty = 1$
- $T e^{(j)} = j$

$\rightsquigarrow$ T NO ES ACOT

$\left(\left(\nexists m \right) \; |Ta| \leq m \, \|a\|_\infty \right)$

LUEGO

$$H = \{ a \in E : \overbrace{\textstyle\sum_{i \geq 1} i \cdot a_i}^{Ta} = 0 \}$$

ES UN HIPERPLANO DENSO; VEÁMOSLO A MANO: QUE $\overline{H} = E$

SEA $a \in E$: $a = (a_1, \dots, a_m, 0, 0, \dots)$

SEA $\sigma = \sum_{i \geq 1} i \, a_i$ $(= Ta)$

TOMO (CON $j > m$)

$$h_j = (a_1, \dots, a_m, 0, \dots, \overbrace{-\tfrac{\sigma}{j}}^{\text{LUGAR } j}, 0, \dots)$$

Así, $h_j \in H$ y

$$n\alpha - h_j n_\alpha = |\sigma|/j \xrightarrow[j\to+\infty]{} 0$$