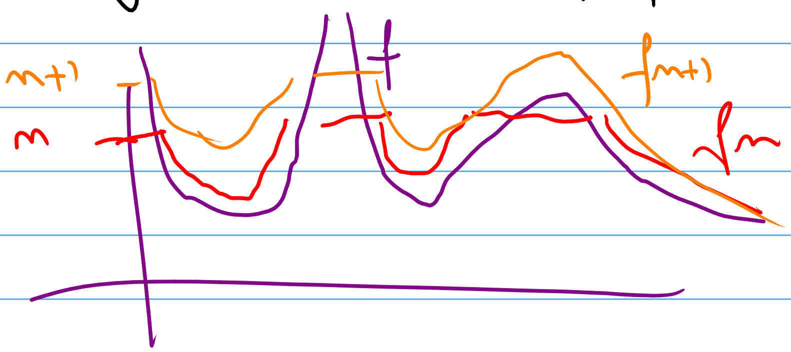
INTEGRALES

FIJEMOS $f: E \to [0,+\infty]$ MEDIBLE.

PARA CADA $m \in \mathbb{N}$ SEA $f_m: E \to [0,m]$,

$$f_m(x) = \min\{f(x), m\}$$



- f_m ES MEDIBLE, PUES $\forall a$

$$\{f_m \leq a\} = \begin{cases} E, & a \geq m \\ \{f \leq a\}, & a < m \end{cases}$$

ES MEDIBLE

- f_m ESTÁ ACOT
- $f_m(x) \nearrow f(x) \quad \forall x \in E$

(DE HECHO, SI $f(x) < +\infty$ ENTONCES $\forall m \geq f(x)$ SE TIENE $f_m(x) = f(x)$)

TEO CONV. MONÓTONA

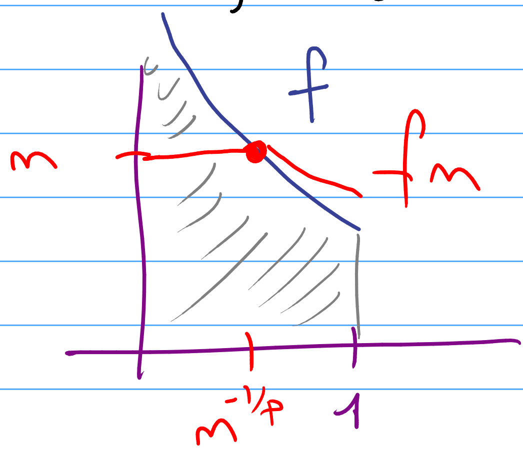
$$\int_E f_n \nearrow \int_E f$$

"BASTA CON SABER INTEGRAR ACOTADAS"

EJEMPLOS:

1) SEA $p>0$. SEA $f:[0,1] \to [0,+\infty]$,

$$f(x) = \begin{cases} 1/x^p, & x \in (0,1] \\ +\infty, & x=0 \end{cases}$$



¿$f_n(x)$? $1/x^p \leq n \iff n^{-1/p} \leq x$;

ASÍ

$$f_n(x) = \begin{cases} n, & x < n^{-1/p} \\ 1/x^p, & x \geq n^{-1/p} \end{cases};$$

$$\int_{[0,1]} f_n = \int_{[0,n^{-1/p}]} n + \int_{[n^{-1/p},1]} 1/x^p$$

ACOT, CONT, DEF EN INT. CERR.

PRIMITIVA DE $1/x^p$

$\ln(x)$, $p=1$

$\dfrac{x^{-p+1}}{-p+1}$ $p\neq 1$

$$= m \cdot m^{-1/p}$$

RIEMANN
$\Rightarrow$ LEBESGUE

$$+\begin{cases} \cancel{\ln(1)} - \ln\left(m^{-1}\right), & p=1 \\ \dfrac{1}{-p+1}\left(1-\underbrace{\left(m^{-1/p}\right)^{-p+1}}_{m^{1-1/p}}\right), & p\neq 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1+\ln(m), & p=1 \\ \dfrac{1}{1-p} + m^{1-1/p}\left(1+\dfrac{1}{p-1}\right), & p\neq 1 \end{cases}$$

ASÍ

$$\int_{[0,1]} 1/x^p = \begin{cases} +\infty & , p\geq 1, \\ \dfrac{1}{1-p} & , p<1. \end{cases}$$

EN PART, $1/x^p$ ES INTEG SII $p<1$

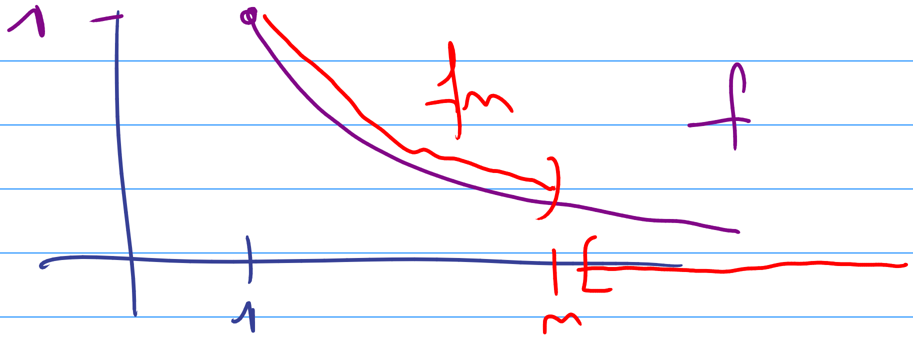
(OBS: $1/x^{1/2}$, $1/x^{1/2}$ SON INT PERO $\frac{1}{x^{1/2}}\cdot\frac{1}{x^{1/2}}$ NO)

2) $p>0$. $f:[1,+\infty)\to[0,+\infty]$, $f(x)=1/x^p$

¿CÓMO LO INTEGRO?

SEA $f_n:[1,+\infty)\to[0,+\infty]$,

$$f_m(x) = \begin{cases} f(x), & x < m \\ 0, & x \geq m \end{cases}$$



ENTONCES f_m ES MEDIBLE Y $f_m \nearrow f$;

ASÍ

$$\int_{[1,+\infty)} f \underset{\text{TEO CONV. MONÓT}}{=} \lim \int_{[1,+\infty)} f_m = \lim \int_{[1,m]} 1/x^p + \int_{[m,+\infty)} 0$$

$$= 0 \cdot \mu([m,+\infty)) = 0$$

$$\underset{\text{RIEMANN} \Rightarrow \text{LEBESGUE}}{=} \lim \int_1^m 1/x^p$$

$$= \lim_m \begin{cases} \ln(m) & p = 1 \\ \frac{1}{1-p}\left(m^{1-p} - 1\right) & p \neq 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} +\infty, & p \leq 1 \\ \frac{1}{p-1}, & p > 1 \end{cases}$$

EN PART, f ES INT SI $p>1$.

3) $p>0$, $f:[0,+\infty)\to[0,+\infty]$,

$$f(x)=\begin{cases} 1/x^p, & x\neq 0 \\ +\infty, & x=0 \end{cases}$$

ENTONCES f ES MED PERO NO ES INT
(INDEP'TE DE p)

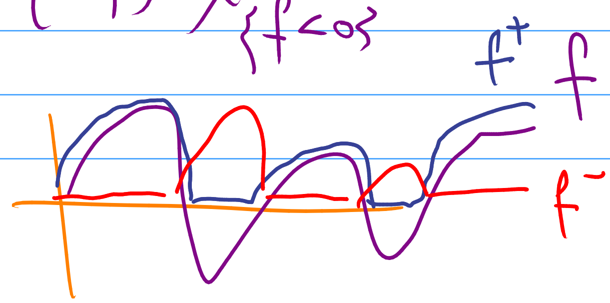
USO: $f\geq 0$, $E\subseteq E'$
$\Rightarrow \int_{E'} f \geq \int_E f$

EJERCICIO: SEA $f: E\to\overline{\mathbb{R}}$ INTEGRABLE.
PROBAR QUE SI $\left|\int_E f\right| = \int_E |f|$,
($\leq$ VALE SIEMPRE)

ENTONCES $f\geq 0$ A.E Ó $f\leq 0$ A.E.

ESCRIBAMOS $f=\underbrace{f^+}_{f\cdot\chi_{\{f\geq 0\}}}-\underbrace{f^-}_{(-f)\cdot\chi_{\{f<0\}}}$; ASÍ

- $f^+, f^-\geq 0$



- $|f| = f^+ + f^-$

ASÍ f ES INT $\underset{\text{DEF}}{\Longleftrightarrow}$ $\int_E f^+, \int_E f^- < +\infty$

$\Longleftrightarrow |f|$ ES INT; TENEMOS QUE

$$\left|\int_E f^+ - \int_E f^-\right| = \left|\int_E f\right| = \int_E |f| = \underbrace{\int_E f^+}_{=:a} + \underbrace{\int_E f^-}_{b:=}$$

<u>LEMA</u>: SEAN $a, b \geq 0$ CON

$$|a-b| = a+b$$

ENTONCES $a=0$ ó $b=0$ ///

$\therefore$ $\int_E \underbrace{f^+}_{\geq 0} = 0$ ó $\int_E \underbrace{f^-}_{\geq 0} = 0$

LUEGO,

$$\underbrace{f^+ = 0 \text{ A.E.}}_{\Rightarrow f \leq 0 \text{ A.E.}} \quad \text{ó} \quad \underbrace{f^- = 0 \text{ A.E.}}_{\Rightarrow f \geq 0 \text{ A.E.}}$$

$\boxtimes$