SERIES DE FUNCIONES

$$f(x) = \sum_{n\geq 1} f_n(x) = \lim_{N \to +\infty} \underbrace{\sum_{n=1}^{N} f_n(x)}_{F_N(x)}$$

EJEMPLO:

CONSIDEREMOS

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{x^n / n!}_{=: f_n(x)} \quad (*) \qquad (f_0 = 1)$$

Criterio de Weierstrass $f_n : X \to \mathbb{R}$ X conj.

Supongamos dado n existe $c_n \geq 0$ tal que $|f_n(x)| \leq c_n$ para todo $x \in X$. Si $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ converge, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge absoluta y uniformemente a una función (acotada) de X en $\mathbb{R}$.

FIJEMOS $M > 0$ y TOMEMOS $X = [-M, M]$

- $$\left| x^n / n! \right| \leq \underbrace{M^n / n!}_{=: c_n} \quad \forall x \in X$$
- $\sum_{n\geq 0} c_n < +\infty$? SI: POR D'ALEMBERT

$$\frac{C_{m+1}}{C_m} = \frac{M^{m+1}}{(m+1)!}\,\frac{m!}{M^m} = \frac{M}{m+1} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$$

LUEGO, $f(x)$ CONV. $\underbrace{\text{ABS}}$ Y $\underbrace{\text{UNIF}}$ EN X

$\Rightarrow$ PUNTUAL, ASÍ QUE DEFINE UNA FUNCIÓN EN X

$\Rightarrow$ f ES CONT EN X

¿ES DERIVABLE?

Proposición
Sean F_n de clase C^1 en $[a,b]$, $F_n \to f$ puntualmente en $[a,b]$, y $F_n' \rightrightarrows g$.
Entonces, f es derivable y $f' = g$.

TENEMOS $F_N(x) = \underbrace{\sum_{m=0}^{N} x^m/m!}_{\text{DE CLASE } C^1}$;

$F_N(x) \to f(x) \quad \forall x.$

¿ $\exists g \,/\, F_N' \rightrightarrows g$? SÍ:

$$F_N'(x) = \sum_{m=1}^{N} \frac{\cancel{m}\, x^{m-1}}{\cancel{m!}\,(m-1)!}$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1} x^m/m! \rightrightarrows f(x)$$

(VIMOS)

ASÍ, f ES DERIV Y $f' = f$

ADEMÁS: $f(0) = 1$

EC. DIFERENCIAL QUE SATISFACE e^x

EJEMPLO: SEA $x > 0$. COMO $0 < e^{-x} < 1$,

$$f(x) = \frac{1}{1-e^{-x}} = \sum_{m \geq 0} \underbrace{e^{-mx}}_{(e^{-x})^m = f_m(x)} .$$

¿VALE QUE, $\forall x \in \mathbb{R}$,

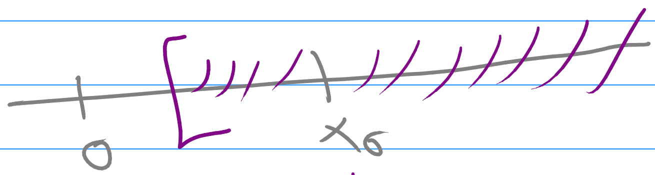
$$F(x) := \frac{e^{-x}}{(1-e^{-x})^2} = \sum_{m \geq 0} -m\, e^{-mx} \ ? \quad \text{SÍ:}$$

SEA $F_N(x) = \sum_{m=0}^{N} -m\, e^{-mx}$; $\in C^1$

QUE F_N CONV. UNIFORMEMENTE ;

$X =$

BVQ LO HACE EN $[a, +\infty)$ $\forall a > 0$



$a = x_0/2$

USEMOS WEIERSTRASS:

$$\left| -n e^{-nx} \right| = n e^{-nx} \overset{x \geq a}{\leq} \underbrace{n e^{-na}}_{C_n}$$

COMO $\sum_{n \geq 0} C_n < +\infty$ (D'ALEMBERT),

LO HACE.

¿CONV. UNIF EN $(0, +\infty)$? NO:

1. Sea Y un espacio métrico y sea A un conjunto. Sea $f : A \to Y$, y para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : A \to Y$.

Probar que la sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ *no* converge uniformemente a f si y sólo si existen $\alpha > 0$, una subsucesión $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ de $(f_n)_{n\geq 1}$ y una sucesión $(a_k)_{k\geq 1}$ en A tales que $d(f_{n_k}(a_k), f(a_k)) \geq \alpha$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

$$\left| F_N(a_N) - F(a_N) \right| = \left| \sum_{n=0}^{N} f_n(a_N) - \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(a_N) \right|$$

$$= \left| \sum_{n>N} f_n(a_N) \right| = \sum_{n>N} n e^{-n a_N}$$

$$\geq \underbrace{(N+1)}_{\geq 1} e^{-(N+1)a_N} \geq e^{-(N+1)a_N}$$

$$= e^{-1} =: \alpha$$

$a_N = \frac{1}{N+1}$

10. Si $(a_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de escalares (reales o complejos) tal que $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge absolutamente, entonces las dos series de funciones

$$\sum_{n\geq 1} a_n \cos nx \qquad \text{y} \qquad \sum_{n\geq 1} \overset{a_n}{b_n} \sin nx$$

convergen absoluta y uniformemente en $\mathbb{R}$ a funciones continuas.

EJEMPLO: $f(x) = \sum_{m\geq 1} \underbrace{\frac{2(-1)^{m+1}}{m}} \sin(mx)$;

$a_m \rightsquigarrow$ ¿DE DÓNDE SALIÓ?

$$\sum_{m\geq 1} |a_m| = 2 \sum_{m\geq 1} 1/m = +\infty$$

¡PERO LA SERIE CONVERGE!

DE HECHO, $f(x) = x \quad \forall x \in (-\pi, \pi)$

OBS:

- $$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(mx)\, dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \sin(mx)\, dx$$

$$\underset{\text{PARTES}}{=} \frac{2(-1)^{m}}{m}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{x\cos(mx)}_{\text{IMPAR}}\,dx$$

$$= 0$$

¿PUEDO DERIVAR DENTRO DE LA SERIE?

NO:
$$x = f(x) = \underbrace{\sum_{m\geq 1} \frac{2(-1)^{m+1}}{m} \operatorname{sen}(mx)}_{\text{DERIVO:}}$$

$$\underbrace{\sum_{m\geq 1} 2(-1)^{m+1} \cos(mx)}_{\text{NO CONV. PARA } x=0 \text{ (POR EJ)}}$$

¿PUEDO INTEGRAR DENTRO DE LA SERIE?

(ESTOY USANDO ESTO)

9. Sea X un espacio métrico y sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones continuas de X a $\mathbb{R}$ tal que $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformemente en X. Probar que:

(a) La función suma $f = \sum_{n\geq 1} f_n$ es continua en X.

(b) Si $X = [a,b]$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{n\geq 1} \int_a^b f_n(x)\,dx$.

$$\frac{x^2}{2} = \int_0^x f(t)\,dx = \sum_{m\geq 1} \int_0^x \frac{2(-1)^{m+1}}{m} \operatorname{sen}(mt)\,dt$$

$$= \sum_{m\geq 1} \frac{2(-1)^{m+1}}{m} \overbrace{\int_0^x \sin(mt)\,dt}^{-\frac{\cos(mt)}{m}\Big|_0^x}$$

$$= \sum_{m\geq 1} \frac{2(-1)^{m+1}}{m^2}\left(1-\cos(mx)\right)$$

$$= 2\left(\underbrace{\sum_{m\geq 1} \frac{(-1)^{m+1}}{m^2}}_{=\pi^2/12} - \underbrace{\sum_{m\geq 1} \frac{(-1)^{m+1}}{m^2}\cos(mx)}_{\text{VALE USAR EL EJ!}}\right)$$

Así, $\displaystyle \frac{1}{2}\overbrace{f(x)}^{x^2/2} - \pi^2/12 = \sum_{m\geq 1} \frac{(-1)^m \cos(mx)}{m^2}$