FUNCIONES MEDIBLES

FIJEMOS $X \subseteq \mathbb{R}$ MEDIBLE.

RECORDAR: $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ $= \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ ES MEDIBLE SI $\forall a \in \mathbb{R}$

$$\{x \in X : f(x) > a\} = \{f > a\} \subseteq \mathbb{R}$$

ES MEDIBLE (LEBESGUE).

1. Probar que dada una σ-álgebra $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X y dada $f : X \to \mathbb{R}$, son equivalentes:

   * (a) $\{x \in X : f(x) > a\} \in \mathcal{A}$ para todo $a \in \mathbb{R}$.
   (b) $\{x \in X : f(x) \leq a\} \in \mathcal{A}$ para todo $a \in \mathbb{R}$.
   (c) $\{x \in X : f(x) \geq a\} \in \mathcal{A}$ para todo $a \in \mathbb{R}$.
   (d) $\{x \in X : f(x) < a\} \in \mathcal{A}$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

   Concluir que si $X \in \mathcal{M}$ y $\mathcal{A} = \mathcal{M}$, entonces f es medible si y sólo si vale alguno de (y por lo tanto todos) los items de arriba.

EJEMPLO: $A \subseteq X$. SEA $\chi_A : X \to \mathbb{R}$

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

ENTONCES χ_A ES MEDIBLE SII A ES MEDIBLE

Dem: $\Rightarrow)$ $A = \{\chi_A > 0\}$

$(\Leftarrow)$ $\{\chi_A > a\} = \begin{cases} X, & a < 0 \\ A, & 1 > a \geq 0 \\ \phi, & a \geq 1 \end{cases}$ ⊠

OBS: SEA $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$

- f MED $\Rightarrow |f|$ MED, PUES SI $a \geq 0$:

$\{|f| > a\} = \underbrace{\{f > a\}}_{\text{MED}} \cup \underbrace{\{f < -a\}}_{\text{MED}}$ MED

SI $a < 0$, $\{|f| > a\} = X \rightsquigarrow$ MED

ALTERNATIVAMENTE:

6. Sean $f, g : E \to \mathbb{R}$ funciones medibles. Probar que:

(a) $f + g$ es medible.

(b) f^2 es medible.

(c) $f \cdot g$ es medible.

$|f| = \underbrace{f}_{\text{MED}} \cdot \underbrace{\chi_{\{f \geq 0\}}}_{\text{MED}} - \underbrace{f}_{\text{MED}} \cdot \underbrace{\chi_{\{f < 0\}}}_{\text{MED}}$ MED ✓

- AL REVÉS NO VALE: $X = \mathbb{R}$, $Y \subseteq \mathbb{R}$ NO MED

SEA $f = \chi_Y - \chi_{\mathbb{R} \setminus Y}$. ENTONCES

- $\{f > 0\} = Y \rightsquigarrow f$ NO ES MED
- $|f| \equiv 1$ ES MEDIBLE $(|f| = \chi_{\mathbb{R}})$

EJERCICIO:

- f medible $\Rightarrow$ $\overbrace{\{f=a\} \text{ med. } \forall a\in\mathbb{R}}^{\circledast}$
- $\exists$ f no med para la cual vale $\circledast$

EJEMPLO: Sea $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$. Sup que $\exists$ $Y \subseteq X$ nulo tal que

$$\underbrace{\{x\in X : f(x)\neq 0\}}_{\text{"soporte de } f\text{"}} \subseteq Y$$

Entonces f es medible.

Dem: Sea $a\in\mathbb{R}$.

$$\{f>a\} = \{f>a \text{ y } f\neq 0\} \cup \{f>a \text{ y } f=0\}$$

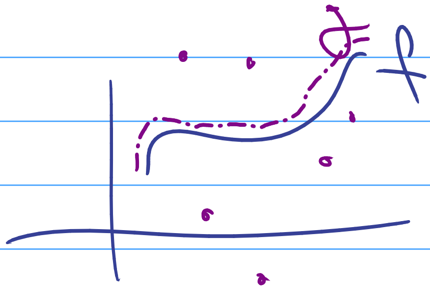
$\{f>a \text{ y } f\neq 0\}$ → nulo (pues cont. en Y), luego medible

$\{f>a \text{ y } f=0\}$ → $\emptyset$, si $a\geq 0$

$\{f>a \text{ y } f=0\}$ → $\{f=0\}$, si $a<0$ → medible, pues $\{f\neq 0\}$ medible

CORO: [SEAN $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ TALES QUE $\{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$ ES NULO.] $\circledast$

ENTONCES f ES MED SII g MED



DEF: SI VALE $\circledast$ DIREMOS QUE f Y g COINCIDEN EN CASI TODO PUNTO (C.T.P., A.E., P.P., $f(x) = g(x)$ $\forall$A)

DEM:

$$f = g + \underbrace{(f - g)}_{\text{MEDIBLE}}$$

$\Rightarrow$ f MED SII g MED

¡PERO ESTO SOLO FUNCIONA CON $\mathbb{R}$ COMO CODOMINIO! CORRECTAMENTE:

$$\{f > a\} = \{f > a \text{ y } f = g\} \overset{D}{\cup} \underbrace{\{f > a \text{ y } f \neq g\}}_{\text{MEDIBLES (PUES NULOS)}};$$

$$\qquad\qquad\quad \|$$

$$\{g > a\} = \{g > a \text{ y } f = g\} \overset{D}{\cup} \{g > a \text{ y } f \neq g\}$$

EJEMPLO: $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ COINCIDIENDO a.e.

SI SON CONTINUAS, ENTONCES $f = g$

DEM: SEA $Y = \{f \neq g\}$; Y ES NULO.

LUEGO $\underbrace{[0,1] \setminus Y}_{\text{ACÁ } f=g}$ ES DENSO $\therefore$ $f = g$ EN $[0,1]$

$\boxtimes$

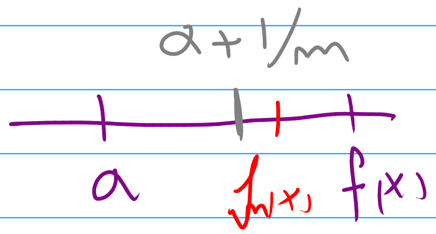
PROP: SEAN $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$;

SUP QUE $(\forall x \in X)$ $\exists \lim\limits_{n} f_n(x) =: f(x)$

ENTONCES f ES MEDIBLE SI LAS f_n LO SON.

DEM: SEA $a \in \mathbb{R}$. SEA $x \in X$. ASÍ

$f(x) > a$ SII



$(\exists m \in \mathbb{N})(\exists N \in \mathbb{N})$

$f_n(x) > a + 1/m \quad \forall n \geq N$

($\Rightarrow f(x) \geq a + 1/m$, HACIENDO $n \to +\infty$), i.e.:

$$\{f > a\} = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{N \in \mathbb{N}} \left(\bigcap_{n \geq N} \underbrace{\{f_n > a + 1/m\}}_{\text{MED}} \right) \right)$$

$\rightsquigarrow$ $\{f > a\}$ MEDIBLE $\boxtimes$