Recordar Analisis Avanzado 1er Parcial

Supremos

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ acotado superiormente y $s \in \mathbb{R}$. Decimos que s el supremo de A ($s = \sup(A)$) si

(i) s es cota superior ($a \leq s \ \forall a \in A$)

(ii) si s' es cota superior de $A \Rightarrow s' \geq s$ (s es la más chica de las cotas sup)

Axioma de Completitud → Importante siempre verificar hipotesis

Dado $A \subseteq \mathbb{R}$ no vacío y acotado superiormente $\Rightarrow \exists \sup(A)$

Equivalencia → útil para probar cosas

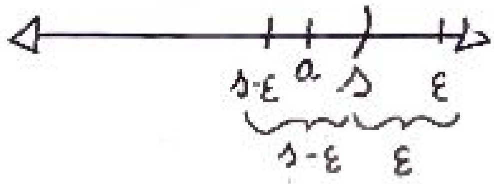
Sea $A \subseteq \mathbb{R}$, no vacío y acotado superiormente.

Entonces $s = \sup(A) \Leftrightarrow$

(i) s es cota superior de A

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists a_\varepsilon \in A / s - \varepsilon < a_\varepsilon \leq s$

→ como s es la mejor cota, no va a haber nada entre un elemento de A y s, salvo otro elto. de A



Principio de Arquímedes

$\mathbb{N}$ no está acotado superiormente → $\forall x \in \mathbb{R} \ \exists n \in \mathbb{N}$ con $x \leq n$

$\forall y > 0 \ \exists n \in \mathbb{N} / 0 < \frac{1}{n} < y$ → "Arquimedes 2"

Infimos

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$, acotado inferiormente e $i \in \mathbb{R}$. Decimos que i es el infimo de A ($i = \inf(A)$) si

(i) i es cota inferior ($i \leq a \ \forall a \in A$)

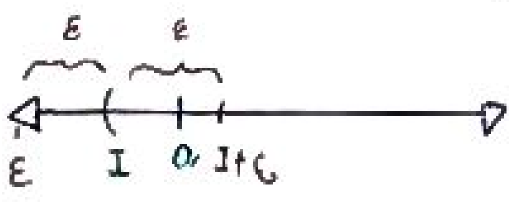
(ii) si i' es cota inferior de $A \Rightarrow i' \leq i$ (i es la más grande de todas las cot…

Equivalencia → útil para probar cosas:

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$, no vacío y acotado inferiormente. Entonces $i = \inf(A) \Leftrightarrow$

(i) i es cota inferior

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists a_\varepsilon \in A / i \leq a_\varepsilon < i + \varepsilon$



Teorema → Se deduce del axioma de Completitud

Si $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ y acotado inferiormente $\Rightarrow \exists \, i = \inf(A)$

Sucesiones

Una sucesión es una función $a: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Notamos: $a(n) = a_n \in \mathbb{R}$ Notamos $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ la sucesión entera

Convergencia de Sucesiones → Probar que algo tiene límite, es usar la def.

Sea $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión, $l \in \mathbb{R}$

Decimos que (a_n) converge a l $\left(a_n \xrightarrow[n \to \infty]{} l,\ \lim_{n \to \infty} a_n = l \right)$ si

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ / \ n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - l| < \varepsilon$$ n_0 depende de ε

– Cuando quiero ver que algo no converge!! niego la definición.

$$\forall l \in \mathbb{R} \ / \ \exists \varepsilon > 0 \ \forall n_0 \in \mathbb{N} \ / \ \exists n \geq n_0, \ |a_n - l| \geq \varepsilon$$

Divergencia a infinito

Decimos que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge a $\pm$ infinito si

$$\forall M > 0 \ (\text{o } M < 0) \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geq n_0, \ a_n > M \ (\text{o } a_n < M)$$

Sucesión acotada → Siempre que en la hip. diga acotado (planteo def)

Una sucesión está acotada si el conjunto $\{a_n \ n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$ es acotado (superior e inferiormente)

Es decir

$$\exists M > 0 \text{ tq } |a_n| \leq M \ \forall n \in \mathbb{N}$$

– Si una sucesión tiene límite $\Rightarrow$ está acotada

Sucesiones Monótonas

Decimos que $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ es monótona creciente si $n > m \Rightarrow a_n \geq a_m$ (decreciente si $a_n \leq a_m$) puede ser estrictamente monótona.

Teorema: Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monótona creciente (o decreciente) y acotada.
Entonces $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} s$, donde $s = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$
(si es decreciente, $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} i = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$)

Equivalencia de supremo - sucesión
Sea $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ y acotado superiormente. Entonces $s = \sup(A) \Leftrightarrow$
1) s es cota superior de A
2) $\exists (a_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq A / \lim_{n\to\infty} a_n = s$ (Existe una sucesión en A que converge al supremo)

Subsucesiones $\rightarrow$ $\boxed{\text{Idea}}$, Me quedo con algunos términos, pero infinitos
Sea $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathbb{R}$.
Una subsucesión $(a_{n_j})_{j=1}^{\infty}$ es un subconjunto de $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ con la propiedad de que $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$,

Propiedad:
Sea $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión y $(a_{n_j})_{j=1}^{\infty}$ es una subsucesión si
$$\lim_{n\to\infty} a_n = l \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_{n_j}$$
$\rightarrow$ Es decir, si tengo una sucesión que tiende a algo cualquier subsucesión tiene que tender a ese algo.

$\boxed{\text{Def Subsucesión}}$
Sea $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estrictamente creciente y $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ una sucesión.
Definimos $(b_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$, $b_k = a_{\sigma(k)}$ Notación: $b_k = a_{\sigma(k)} = a_{n_k}$, $\sigma(k) = n_k$
$\rightarrow$ una subsucesión

$\rightarrow$ Forma de probar que una sucesión converge:
$(x_n)_{n \geq 1} \subseteq \mathbb{R}$ y $l \in \mathbb{R}$
Si toda subsucesión $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ tiene una subsubsucesión $(x_{n_{k_j}})_{j \in \mathbb{N}}$ que converge a l $\Rightarrow$ la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a l.
$\rightarrow$ Si logro demostrar que todas sus subsucesiones convergen a l.

Cardinalidad

Sean x, y dos conjuntos.
Decimos que x e y son coordinables (Tienen el mismo cardinal) si existe $f: x \to y$ biyectiva. Notación $x \sim y$ $\sim$ es una relación de equivalencia

Conjuntos Numerables

Un conjunto se dice numerable si $x \sim \mathbb{N}$ ($\#x = \aleph_0$)
⇝ Es numerable si es coordinable con los naturales.

Contable → Se dice Contable o a lo sumo numerable si es Finito o numerable

Teorema Sea A numerable. Entonces $B \neq \emptyset$, $B \subseteq A \Rightarrow B$ es contable
(dentro de un numerable, siempre hay un contable)

Teorema Sea A infinito. Entonces existe $B \subseteq A$ numerable

⇝ Los conjuntos numerables en el fondo son sucesiones ⇝

Orden entre cardinales

- $\#A = \#B$ si $A \sim B$ ($f: A \to B$ biyectiva)
- $\#A \leq \#B$ si $\exists f: A \to B$ inyectiva (o $\exists g: B \to A$ sobreyectiva)
- $\#A < \#B$ si $\#A \leq \#B$ y $A \not\sim B$

Teorema de Cantor - Schroder - Bernstein

$$\text{si } \#A \leq \#B \text{ y } \#B \leq \#A \Rightarrow \#A = \#B$$

→ Para probar que dos conjuntos son coordinables, a veces es más fácil encontrar dos inyectivas de A a B y de B a A, que una biyectiva.

Teorema de Cantor

Dado A un conjunto, $\#A < \#P(A)$

Hipótesis del Continuo $\Rightarrow$ no hay nada en el medio entre $\#\mathbb{N}$ y $c = \#\mathbb{R}$

Teorema $\mathbb{R}$ no es numerable $(\aleph_0 < c)$

Lema Sean A, B y C conjuntos tales que $A \sim B$. Entonces

(1) $C^A \sim C^B$ (2) $A^C \sim B^C$ $\mid A^B = \{f : B \to A, f \text{ función}\}$

Ley Exponencial

A, B y C conjunto $\Rightarrow (A^B)^C \sim A^{B \times C}$

$\#\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ Como $c = 2^{\aleph_0}$, $\#\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = c^{\aleph_0} \Rightarrow (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = c$

sucesiones

$\Rightarrow$ Hay tantas sucesiones de números reales como números reales

---

Cosas útiles para las demostraciones

- Unión de numerables es numerable (aplicable a conjuntos y familias de conjuntos (ej 2 y 6))
- $A \subseteq B$, A contable y $B \setminus A$ infinito
  - $\to \exists C \subseteq B \setminus A \,/\, C \sim C \cup A$ (ej 3) $\Rightarrow$ ejemplo $\#\mathbb{I} = \#\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = c$
  - $\to B \setminus A \sim B$
- $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos y $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, se puede hallar (Ej 5) una sucesión $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de disjuntos tal que ① $B_n \subseteq A_n$ y ② $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$
- $P(A) \sim \{0,1\}^A$ (polinomios característicos) (ej 8) $\#P(A) = 2^n$
- $\#\mathbb{R}^{\mathbb{R}} > c$
- $\mathbb{R} \sim (0,1)$
- $\mathbb{N} \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
- $\mathbb{R} \sim \mathbb{R} \times \mathbb{N}$
- $\mathbb{R} \sim \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
- $\mathbb{R} \sim 2^{\aleph_0}$
- $P(\mathbb{N}) \sim 2^{\aleph_0} \Rightarrow \mathbb{R} \sim P(\mathbb{N})$

Espacios Métricos

Métrica

Una métrica o distancia en M (con M un conjunto) es una función $d: M \times M \to \mathbb{R}$ que cumple.

① $d(x,y) \geq 0 \quad \forall x,y \in M$ y $d(x,y)=0 \iff x=y$ (Positivo)

② $d(x,y) = d(y,x)$ (simétrica)

③ $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \quad \forall x,y \in M$ (desigualdad Triangular Δ)

(M,d) se llama Espacio Métrico

Distancia discreta

$$\delta \,, \quad \delta(x,y) = \begin{cases} 0 & si \quad x=y \\ 1 & si \quad x \neq y \end{cases}$$

se puede definir para cualquier conjunto M

Distancias en $\mathbb{R}^n$

① distancia euclidea $d_2(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2\right)^{1/2}$

② $d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$ ③ $d_\infty(x,y) = \max\{|x_i - y_i|, 1 \leq i \leq n\}$

Distancias en espacios de funciones

$M = \mathcal{C}([a,b]) = \{f: [a,b] \to \mathbb{R} \text{ continuas}\}$

$d_\infty(f,g) = \max\limits_{a \leq x \leq b} |f(x) - g(x)|$ $\quad d_1(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$

Topología en Espacios Métricos

- La bola abierta de centro x y radio r $B(x,r) = \{y \in M : d(x,y) < r\}$
- La bola cerrada de centro x y radio r $B[x,r] = \overline{B}(x,r) = \{y \in M : d(x,y) \leq r\}$
- La esfera de centro x y radio r $S(x,r) = \{y \in M : d(x,y) = r\}$

$$B(x,r) \subseteq B[x,r] \quad ; \quad B[x,r] = B(x,r) \cup S(x,r)$$

Acotados

Sean (M,d) un e.m. Sea $E \subseteq M$. Decimos que E es acotado si $\boxed{\exists c>0 \text{ tq } d(x,y) \leq c \ \forall x,y \in E}$ equivalentemente si

$$\boxed{\exists x_0 \in E,\ r>0 \,/\, E \subseteq B(x_0,r)}$$

(Es decir, si puedo meter a todo el conjunto en una bolita)

Si E es acotado, defino el diametro de E como

$$\text{diam}(E) = \sup\{d(x,y) : x,y \in E\}$$

Punto interior

(M,d) un e.m

Sea $E \subseteq M$, $x \in E$. Decimos que x es un punto interior de E si $\exists r>0 \,/\, B(x,r) \subseteq E$

(si puedo centrar una bolita en ese punto tal que quede dentro de E)

El **Interior** de E es el conjunto de los puntos interiores

$$E^\circ = \{x : x \text{ es punto interior}\} \qquad \boxed{E^\circ \subseteq E}$$

Abiertos

Sea $A \subseteq M$ un subconjunto, A es Abierto si $A^\circ = A$

Equiv $\forall a \in A\ \exists r>0 \,/\, B(a,r) \subseteq A \rightsquigarrow$ todos los puntos de A, son interiores

Teorema $\rightsquigarrow$ unión arbitraria de abiertos es abierto.

Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ familia de conjuntos abiertos. Entonces $A = \bigcup_{i\in I} A_i$ es abierto

Teorema $\rightsquigarrow$ Intersección finita de abiertos es abierto.

Sean $A_1, \dots, A_n \subseteq (M,d)$ abiertos. Entonces $A = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ es abierto.

$\rightsquigarrow$ no vale para intersecciones infinitas $\rightsquigarrow$

Prop $\rightsquigarrow$ E° es el abierto más grande adentro de E

Sean $E \subseteq M$, sea $A \subseteq E$ abierto. Entonces $A \subseteq E^\circ$

Punto de adherencia (M,d) un e.m, $x \in M$, $E \subseteq M$, decimos que x es punto de adherencia de E si $\boxed{\forall r>0 \ B(x,r) \cap E \neq \emptyset}$
(todos los puntos de adentro son de adherencia)

La **Clausura** de E es el Conjunto de puntos de adherencia
$\overline{E} = \{x : x \text{ es punto de adherencia}\}$ $\quad E \subseteq \overline{E}$

En general, no es cierto que $\overline{B(x,r)} = B[x,r]$

Cerrados

Sea $F \subseteq M$, decimos que F es cerrado si $F = \overline{F}$

Teorema ⟶ intersección arbitraria de cerrados es cerrado
Si $\{F_i\}_{i \in I}$ Cerrados $\Rightarrow F = \bigcap_{i \in J} F_i$ es Cerrado

Teorema ⟶ unión finita de cerrados es cerrado
si $\{F_i\}_{i \in I}$ Cerrados $\Rightarrow F = \bigcup_{i=1}^{n} F_i$ es Cerrado

$F \subseteq M$ es Cerrado $\Leftrightarrow F^c$ es abierto ⟶ Importante

Puntos de Acumulación

Sea (M,d) e.m, $E \subseteq M$, $x \in M$ se dice punto de acumulación de E si $\boxed{\forall r>0 \ B(x,r) \cap E \neq \emptyset \text{ y } B(x,r) \cap E \neq \{x\}}$

Equiv. $\boxed{\forall r>0 \ B(x,r) \cap E}$ Tiene infinitos elementos

$E' = \{\text{puntos de acumulación}\}$ ⟶ Conjunto derivado

$\boxed{\text{Prop}}$ $\overline{E} = E \cup E'$ $\qquad$ **Corolario** E es Cerrado $\Leftrightarrow E' \subseteq E$

Punto Frontera

Sea (M,d) e.m, $E\subseteq M$, $x\in M$ se dice punto frontera de E si $\boxed{\forall r>0 \ B(x,r)\cap E\neq\emptyset \ y \ B(x,r)\cap E'\neq\emptyset}$

$\partial E = \{$puntos fronteras$\}$

Prop $\bar{E} = E\cup\partial E$

Punto aisl

Sucesiones

→ es una función $F:\mathbb{N}\to M$

↳ Decimos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $x\in M$ si
$\boxed{\forall\varepsilon>0 \ \exists n_0\in\mathbb{N} \,/\, \text{si } n\geq n_0,\ d(x_n,x)<\varepsilon}$

↳ $\forall\varepsilon>0 \ \exists n_0\in\mathbb{N} \,/\, x_n\in B(x,\varepsilon) \ \forall n\geq n_0$

Métricas equivalentes

M conjunto, d_1 y d_2 dos métricas sobre M. d_1 y d_2 son equivalentes si
$\forall x\in M, \forall r>0 \ \exists r_1,r_2 \,/\, B_{d_1}(x,r_1)\subseteq B_{d_2}(x,r)$ y $B_{d_2}(x,r_2)\subseteq B_{d_1}(x,r)$

Notación = $d_1\sim d_2$

Prop Sean M conj d_1,d_2 dos métricas si $\exists C_1,C_2>0 \,/$
$C_1 d_1(x,y)\leq d_2(x,y)\leq C_2 d_1(x,y) \ \forall x,y \Rightarrow d_1\sim d_2$

⇝ d_1,d_2 métricas equiv sobre $M \Rightarrow x_n\to x$ en $(M,d_1) \Leftrightarrow x_n\to x$ en (M,d_2)

⇝ **Props** Sea (M,d) e.m, $E\subseteq M$, $x\in M$

(1) $x\in\bar{E} \Leftrightarrow \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq E \,/\, x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$

(2) $x\in E' \Leftrightarrow \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq E \,/\, x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$

Corolario. $E\subseteq M$ es cerrado $\Leftrightarrow \forall (x_n)\subseteq E$ si $x_n\to x \Rightarrow x\in E$
(si todas las sucesiones de E, convergen dentro de E)

Conjuntos Densos

Sea (M,d) e.m. $X\subseteq M$ se dice denso si $\bar{X} = M$

⇝ X (→ x grande) es denso $\Leftrightarrow \forall x$ (→ x chica) $\in M \ \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq X$ tq $x_n\to x$ ⇝

→ Cuando decimos que X es denso en un espacio M, significa que:

- No importa qué punto elijo en M (lo llamamos x), siempre vamos a poder encontrar puntos de X que estén tan cerca como quiero de x
- Es decir, para cada $x\in M$, existe una sucesión de puntos de X ($x_n\in X \ \forall n\in\mathbb{N}$) tal que esa sucesión converge a x, es decir $x_n\to x$ cuando $n\to\infty$.

Punto frontera

Sea (M,d) e.m., $E \subseteq M$, $x \in M$ se dice punto frontera de E si $\boxed{\forall r>0 \ B(x,r) \cap E \neq \emptyset \ y \ B(x,r) \cap E^c \neq \emptyset}$

$\partial E = \{$ puntos fronteras $\}$

$\boxed{\text{Prop}}$ $\bar{E} = E \cup \partial E$

Punto aislado de E, si $\boxed{\exists r>0 / B(x,r) \cap E = \{x\}}$

Punto frontera = $\forall r>0 \ B(x,r) \cap A \neq \emptyset \ \wedge \ B(x,r) \cap A^c \neq \emptyset$

$A^c = E \setminus A$

Sucesiones

una (x_n) es una función

↳ Decimos que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge

$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \ldots}$

↳ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} / x_n \in B(x,\varepsilon) \ \forall n \geq n_0$

Métricas equivalentes

M conjunto, d_1 y d_2 dos métricas sobre M.

Sucesión Acotada

$(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq M$ es una sucesión acotada si

$\boxed{\exists x \in M, \exists r>0 / x_n \in B(x,r) \ \forall n \in \mathbb{N}}$

(es acotada si puedo meter a la sucesión en una bolita)

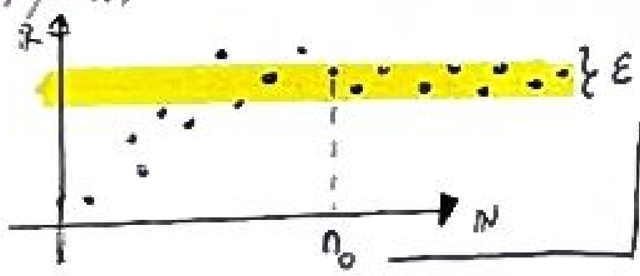
si $(x_n) \subseteq M$ es Convergente $\Rightarrow$ x_n es acotada

Sucesiones de Cauchy

Una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq M$ es de Cauchy si

$\forall \varepsilon>0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} / $ si $n, m \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon$

!! x_n, x_m no necesariamente son consecutivos



$\Rightarrow$ a partir de este n_0, todos los x_n, están a distancia menor que ε

Espacios Completos (M,d) un espacio métrico

M es Completo si Toda sucesión de Cauchy es convergente (Tiene límite en M)

Teorema $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ es Completo.

$\hookrightarrow$ Corolario = $\mathbb{R}^n$ con d_1, d_2 y d_∞ es completo

Teorema $\Rightarrow$ (Teórica pandemia)

Sea (E,d) un e.m y $(x_n)_n \subset E$

(1) Si $(x_n)_n$ es de Cauchy, entonces es acotada

(2) Si $(x_n)_n$ es convergente, es de Cauchy

(3) Si $(x_n)_n$ es de Cauchy y tiene alguna subsucesión convergente, entonces $(x_n)_n$ es convergente

Convergente $\Rightarrow$ De Cauchy

$\not\Leftarrow$ En general no vale la vuelta, salvo en completos como $\mathbb{R}$

¿Cómo probar que un espacio es completo?

- Completitud heredada ⟶ ejemplo $\mathbb{R}^n$

(1) Tomar una sucesión de Cauchy arbitraria (x_n) en el espacio E
- no asumir nada sobre (x_n) más que que es de Cauchy
- El objetivo es mostrar que tiene límite en E

(2) Analizar la estructura del espacio
- para poder manejar la sucesión, hay que entender el tipo de elementos del espacio
  - si es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, miro coordenada a coordenada
  - si es un espacio de funciones, miro punto a punto
  - si es un espacio de sucesiones, componente a componente

(3) Probar que los "componentes de la sucesión son de Cauchy
- Ejemplos ⟶
  - En $\mathbb{R}^n$, cada coordenada de la sucesión es de Cauchy en $\mathbb{R}$
  - En un espacio de funciones, $f_n(x)$ forma una sucesión de Cauchy para cada x

(4) Usar que $\mathbb{R}$ o algún otro espacio base conocido es completo
- Cada componente de la sucesión converge porque vive en un completo

(5) Definir un candidato al límite usando esos componentes
- Ejemplo = $x = \lim x_n$ ⟶ $f(x) = \lim f_n(x)$
- Ese candidato debe pertenecer al espacio original E

(6) Mostrar que $x_n \to x$ en la métrica del espacio
- verificar que la distancia entre x_n y x tiende a 0

- Ejemplos donde se aplica esta estrategia

(1) $(\mathbb{R}^n, d_1), (\mathbb{R}^n, d_2)$ etc (2) Espacios ℓ^p (sucesiones $x = (x_n)$ tales que $\sum |x_n|^p < \infty$)

Espacios ℓ^p ⟶ Sucesiones cuya norma-p es finita.

Para $1 \leq p < \infty$, el espacio ℓ^p está formado por todas las sucesiones $x = (x_1, x_2, x_3, x_4 \dots)$ tales que la suma infinita $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty$ es finita

Sin depender de un espacio base

(1) Tomar una sucesión arbitraria de Cauchy (x_n) en E

(2) Proponer o construir un candidato a límite $x \in E$
- Por construcción explícita (ej con funciones, definir $F(x) = \lim F_n(x)$)
- Propiedades del espacio (ej subsucesión convergente)

(3) Probar que ese candidato es el límite en la métrica de E
- Usar la definición de la métrica para demostrar: $\lim_{n \to \infty} d(x_n, x) = 0$
- Usualmente se logra:
  - Estimando mediante d_T
  - Usando que x_n es de Cauchy

(4) Probar que ese límite está dentro de E

Básicamente
1. Construir explícitamente el límite
2. Demostrar que la sucesión converge a él
3. Verificar que el límite pertenece al espacio.

Teorema de intersección de Cantor ⟶ Teorema de los intervalos encajados
↳ En un espacio métrico completo, la intersección de una secuencia decreciente de subconjuntos cerrados y acotados, cuyo diámetro tiende a cero, contiene exactamente un punto.
(punto 16, guía 3)