1 Teórica 04/09

1.1 Definiciónes de función

Def 1.1.1 (Función): Sea $f : A \to B$ es una función *bien definida* sí:

$$\forall a \in A, \exists! b \in B : f(a) = b$$

Def 1.1.2 (Función Inyectiva): Sea $f : A \to B$ decimos que es inyectiva sí:

$$\forall a_1, b_1 : f(a_1) = f(b_1) \Leftrightarrow a_1 = b_1$$

Def 1.1.3 (Función suryectiva): Sea $f : A \to B$ decimos que es suryectiva sí:

$$\forall b \in B, \exists a \in A : f(a) = b$$

Def 1.1.4 (Función Biyectiva): Sea $f : A \to B$ es biyectiva sí es *inyectiva* y *suryectiva* a la vez.

Lema 1.1.1 (Composición de funciones biyectivas):

Sean $f : B \to C$ y $g : A \to B$ biyectivas, demostrar que $h = f \circ g$ es también biyectiva.

Demo

1. inyectiva

g es inyectiva. Por lo tanto, $\forall x_1, x_2 \in A : x_1 = x_2 \Leftrightarrow g_1(x_1) = g_2(x_2)$.

f es inyectiva. Por lo tanto, $\forall y_1, y_2 \in B : y_1 = y_2 \Leftrightarrow f(y_1) = f(y_2)$.

Particularmente, $\forall x_1, x_2 \in A : x_1 = x_2 \Leftrightarrow g(x_1) = g(x_2) \Leftrightarrow f \circ g(x_1) = f \circ g(x_2)$, pues $g(x_1), g(x_2)$ son dos elementos cualquiera de B.

Con lo cual, la composición es inyectiva

2. suryectiva

(i) g es suryectiva. Por lo tanto, $\forall y \in B, \exists x \in A : g(x) = y$.

(ii)f es suryectiva. Por lo tanto, $\forall z \in C, \exists y \in B : f(y) = Z$.

Particularmente, $\forall z \in C, \exists y \in B : f(y) = z$, además por (ii) $\exists x \in A : g(x) = y$. Es decir, $\forall z \in C, \exists x \in A : f \circ g(x) = z$.

Con lo cual, la composición es suryectiva.

3. Biyectiva

Cómo la composición es inyectiva y suryectiva, cumple la condición de ser biyectiva. ■

1.2 Cardinabilidad.

Def 1.2.1 (Conjuntos cardinables): Sean A y B conjuntos, decimos que

$$A \sim B$$

Sí, y sólo sí, $\exists f : A \to B$ biyectiva

Ejemplo 1.2.1 (conjuntos cardinables):

$\{a, b, c\} \sim \{1, 2, 3\}$

$\mathbb{N} \sim \{k \in \mathbb{N} : k = 2n, n \in \mathbb{N}\}$
Pues $f(n) = 2n$ es biyectiva

$\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}\{0\}$
Pues

$$f = \begin{cases} \frac{n}{2} \text{ si } & n \equiv 0(2) \\ -\frac{n-1}{1} \text{ si } & n \equiv 1(2) \end{cases}$$

$\mathbb{N} \sim \mathbb{N} \cup \{0\}$
Pues $f = n - 1$ es biy.

$\mathbb{N} \sim \mathbb{Q}^{+}$ (ejercicio)

Propiedad 1.2.1:

En el espacio de **todos** los conjuntos, $A \sim B$ es una relación de equivalencia

Demo

1. Reflexividad
$A \sim A$ pues existe $f(a) = \mathrm{id}(a)$, que es biyectiva.

2. Simetría
$A \sim B \Leftrightarrow B \sim A$. Pues $A \sim B$ implica que $\exists f : A \to B$, que es biyectiva, luego $\exists g : B \to A$ tal que $g = f^{-1}$, pues existe la inversa de f, es decir $B \sim A$.

3. Transitividad
Si $A \sim B$ y $B \sim C$, entonces existen dos funciones $f : A \to B$ biyectiva, luego $g : B \to C$ biyectiva, y finalmente, $h : A \to C$ tal que $h = f \circ g$.

Propiedad 1.2.2:

Si $A \sim C$ y $B \sim D$, entonces vale que

$$A \times B \sim C \times D$$

Demo
Cómo $A \sim C \Leftrightarrow \exists f : A \to C$ biyectiva, de igual forma, $B \sim D \Leftrightarrow \exists g : B \to D$ biyectiva.

Por lo tanto, existe $h : A \times B \to C \times D$ tal que $h(a, b) = (f(a), g(b))$. Queremos ver que h sea biyectiva.

1. Inyectividad

Sean (a, b) y (a', b') tales que $h(a, b) = h(a', b')$. Esto sólo ocurre sí

$$\begin{cases} f(a) = f(a') \\ g(b) = g(b') \end{cases}$$

Lo cual, cómo f, g son inyectivas,

$$\begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$$

Es decir, $(a, b) = (a', b')$

Por lo tanto, h es inyectiva.

2. Suryectividad

Sean $(c, d) \in C \times D$ quiero ver si exsite $(a, b) \in A \times B$ tal que $h(a, b) = (c, d)$.

Notemos que, $\exists a \in A : f(a) = c$, pues f es suryectiva. Luego, $\exists b \in B : g(b) = d$, pues g es suryectiva. Por lo tanto, $\exists (a, b) \in A \times B : h(a, b) = (f(a), f(b)) = (c, d)$, tal cómo queríamos ver.

3. Biyectividad

Cómo h es inyectiva y suryectiva, entonces es biyectiva.

Propiedad 1.2.3: Si $A \sim C$, $B \sim D$, tales que $A \cap B = \emptyset$ y $C \cap D = \emptyset$, entonces vale que

$$A \cup B \sim C \cup D$$

Demo
Sabemos que $\exists f : A \to C$ biyectiva y $\exists g : B \to D$ también biyectiva.

Por lo tanto, proponemos la siguiente función:

$$h = \begin{cases} f(x) \text{ si } & x \in A \\ g(x) \text{ si } & x \in B \end{cases}$$

1. Inyectiva

Sean $x_1, x_2 \in A \cup B$ tales que $h(x_1) = h(x_2)$, quiero ver que $x_1 = x_2$.

Notemos que hay tres posibilidades:
1) $x_1, x_2 \in A$
2) $x_1, x_2 \in B$
3) $x_1 \in A$ y $x_2 \in B$

Cómo $A \cap B = \emptyset$ sabemos que no puede existir el mismo elemento en los dos conjuntos a la vez, y descartamos $x_1 \in A \cap B$, etc.

Sea (1), tenemos que $h(x_1) = h(x_2) \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$ pues f es inyectiva.

Sea (2), tenemos que $h(x_1) = h(x_2) \Leftrightarrow g(x_1) = g(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$ pues g es inyectiva.

Sea (3), tenemos que $h(x_1) = h(x_2) \Leftrightarrow f(x_1) = g(x_2)$, pero cómo $f(x_1) \in C$ y $g(x_2) \in D$, lo anterior implica que $\exists y \in C \cap B : y = f(x_1) = g(x_2)$, lo cual es absurdo pues $C \cap D = \emptyset$. La contradicción parte de suponer que (3) y la hipótesis pueden ocurrir al mismo tiempo, por lo tanto, (3) nunca puede ocurrir.

Vale inyectividad en (1) y (2), y (3) es imposible. Por lo tanto, $h(x)$ es inyectiva.

2. Suryectiva

Sean $y \in C \cup D$ quiero ver que $\exists x \in A \cup B : h(x) = y$. Nuevamente, tenemos dos casos:

1) $y \in C$
2) $y \in D$

Si vale (1), sabemos que $\exists x \in A : h(x) = f(x) = y$, pues f es suryectiva. Cómo $x \in A \Rightarrow x \in A \cup B$. Por lo tanto $\exists x \in A \cup B : h(x) = y$

Si vale (2), sabemos que $\exists x \in B : h(x) = g(x) = y$, pues g es suryectiva. Cómo $x \in B \Rightarrow x \in A \cup B$. Por lo tanto exists $x \in A \cup B : h(x) = y$.

Cómo se cunoke (1) y (2), $\exists x \in A \cup B : h(x) = y, \forall y \in C \cup D$. Es decir h es suryectiva.

3. Biyectiva

Cómo h es inyectiva y suryectiva, entonces es biyectiva, tal cómo queríamos probar. ■

Def 1.2.2 (Conjunto Finito):

Decimos que A es finito sí

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : A \sim \{1, ..., n_0\}$$

Def 1.2.3 (Conjunto Numerable):

Decimos que A es numerable sí

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : A \sim \mathbb{N}$$

Def 1.2.4 (Conjunto Contable):

Decimos que A es contable si es finito o numerable

Propiedad 1.2.4: Si $A \neq \emptyset \wedge A \subset B \wedge B$ es finito, entonces A es finito.

Demo

Por inducción en $n = \#B$

1. Caso base
Si $n = 1$ y $A \subset B$, entonces $A = B$ (pues $A \neq \emptyset$), por lo tanto $\#A = \#B = 1$, y por lo tanto A es cardinable.

Nota 1.2.1: Sea B tal que $\#B = n + 1$ y $A \subset B$.

Sea $f : B \to \{1, ..., n + 1\}$ biyectiva.

Sea $b_0 = f^{-1}(b + 1)$

Sea $\tilde{B} = B - \{b_0\}$, y por lo tanto $\#\tilde{B} = n$

Sea $g : \tilde{B} \to \{1, ..., n\}$ tal que $g(b) = f(b)$

Finalmente g es biyectiva.

DESAFÍO: demostrar porqué

2. Paso inductivo
Si vale para n, quiero ver que vale para $n + 1$

Sea $\tilde{A} \subset B$ tal que

$$\tilde{A} = \begin{cases} A \text{ si } \ b_0 \notin A \\ A - \{b_0\} \text{ si } \ b_0 \in A \end{cases}$$

Por hipótesis inductiva, $\tilde{A}$ es finito.

Es decir, $\exists m \in \mathbb{N} : \tilde{A} \sim \{1, ..., m\}$

Sí $A = \emptyset$, entonces $A = \{b_0\}$, y $\#A = 1$; y por lo tanto A es finito.

Si $A \neq \emptyset$, se abren dos opciones:

1) $A = \tilde{A}$ y, por hipótesis inductiva, es A es finito, luego $\tilde{A}$ también por ser el mismo conjunto.

2) $A = \tilde{A} \cup \{b_0\}$

Cómo sé que $\tilde{A} \cap \{b_0\} = \emptyset$, y también sé que $\tilde{A} \sim \{1, ..., m\}$, puedo plantear $\{b_0\} \sim \{m + 1\}$. Luego, $\{1...m\} \cap \{m + 1\} = \emptyset$, y por lo tanto $A \cup \{b_0\} \sim \{1...m\} \cup \{m + 1\}$, que equivale a decir que $A \sim \{1...m + 1\}$, y por lo tanto A es un conjunto finito.

Teo 1.2.1: $\#\{1, ..., n\} = \#\{1, ..., m\} \Leftrightarrow n = m$

Demo

$\Leftarrow$) sale de forma directa,

Si $n = m$, entonces $\{1, ..., m\} = \{1, ..., n\} \Rightarrow \#\{1...m\} = \#\{1...n\}$.

$\Rightarrow$)

Si $n > m$, entonces vale la siguiente implicancia

$$\{1...m\} \subset \{1...n\} \Rightarrow \{1...m\} \subset \{1...m + 1\} \subseteq \{1...n\}$$

Por lo tanto

$$\begin{gathered} \#\{1...m\} < \#\{1...m + 1\} \leq \#\{1...n\} \\ \Rightarrow \#\{1...m\} < \#\{1...n\} \end{gathered}$$

Lo cual es absurdo, pues contradice la hipótesis. La contradicción parte de suponer que alguno de los dos (m, n) es mayor que el otro (es decir, $m \neq n$). Por lo tanto, deben ser igual.

$n = m$.

■

2 Teórica 09/09

Def 2.1 (Conjunto Finito): Se dice A un conjunto finito si $\exists m_0 \in \mathbb{N} : \{1, ..., m_0\} \sim A$

Def 2.2 (Conjunto Numerable): Se dice A un conjunto numerable si $A \sim \mathbb{N}$

Def 2.3 (Conjunto Contable): Se dice A un conjunto contable si es *finito o numerable*

Proposición 2.1: Si $A \subset B$ y B es contable, entonces A es contable

Demo

Este problema tiene tres opciones:

Si B es finito, entonces A es finito.

Pues $\exists n \in \mathbb{N} : \{1...n\} \sim B$. Y, por lo tanto, cómo $A \subset B$, $\exists m < n \in \mathbb{N} : \{1...m\} \sim A$, con lon cual A es finito, es decir *contable*.

Si B es infinito, A puede ser finito o infinito.
i) A es finito, luego $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \{1...n_0\} \sim A$, con lo cual es finito, y por lo tanto *contable*
ii) A es infinito

Me interesa encontrar $h : \mathbb{N} \to A$ que sea biyectiva

Sé que $\exists f : \mathbb{N} \to B$ biyectiva (pues B es contable).

Luego, llamo $M = f^{-1}(A)$. Notemos que A no es finito, entonces M tampoco lo es.

Construimso $h : \mathbb{N} \to A$ de la siuiente forma.

Sea M_n un conjunto tal que

$$\begin{aligned} M_1 &= M - \min\{M\} \\ M_2 &= M_1 - \min\{M_1\} \\ M_{n+1} &= M_n - \min\{M_n\} \end{aligned}$$

Ejemplo 2.1: *Ejemplo:*

$$\begin{aligned} M_3 &= M_2 - \min\{M_2\} \\ M_3 &= M_1 - \min\{M_1\} - \min\{M_1 - \min\{M_1\}\} \end{aligned}$$

Nota 2.1: Así podemos construir sucesivos M_n. Notemos que M_{n+1} es M pero "quitándoles" m-mínimos, es cómo si lo estuvieramos desarmando de atrás para adelante, ¡y para esto usamos una notación recursiva!

Desafío

1. Probar que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n = M$
2. Probar que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} M_n = M$

Sea $h : \mathbb{N} \to A$ tal que

$$\begin{aligned} h(1) &= f(\min\{M\}) \in A \\ h(2) &= f(\min\{M_1\}) \in A \\ h(n+1) &= f(\min\{M_n\}) \in A \end{aligned}$$

Notemos que h está bien definida, pues agarra números naturales y los manda a un elemento en A.

Probemos que h es inyectiva:

Sean $m, n \in \mathbb{N} : m < n$ (y por lo tanto distintos).

Alerta ❌ 2.1:

¿En esta demo no debería usase $n + 1$? Pues pasamos de $h(n) = h(m)$ a $\min\{M_n\} = \min\{M_m\}$.

Si $h(n) = h(m)$, entonces $f^{-1}(h(n)) = f^{-1}h(n)$ —pues f es inyectiva—, luego $\min\{M_n\} = \min\{M_m\}$. ¡Absurdo! $\min\{M_m\} \notin M_n$. El absurdo viene de suponer que $m \neq n$. Por lo tanto, $h(n) = h(m) \Leftrightarrow m = n$, es decir, es inyectiva ■

Hago la cuentita un poco más despacio

$$\begin{aligned} h(n) &= h(m) \\ f^{-1}(h(n)) &= f^{-1}(h(m)) \\ f^{-1}(f(\min\{M_n\})) &= f^{-1}(f(\min\{M_m\})) \\ \min\{M_n\} &= \min\{M_m\} \end{aligned}$$

Nota 2.2: Observación: Esto sólo vale para $2 > n > m$. ¿Qué pasa en los otros casos? **Desafío**

Probemos que h es suryectiva:

Sea $a \in A$, entonces $\exists m \in M$ tal que$f(m) = a$. Esto vale pues A es un subconjunto de B, y f es biyectiva $\mathbb{N} \to B$.

Hay una cantidad finita (o ningúna) de números en M que son menores a m.

Si hay s números menores a m (es decir $\#\{k \in M, k < m, m \in M\} = s$)

Entonces $m = \min\{M_{s+1}\}$, con lo cual $h(s+2) = f(\min\{M_{s+1}\})$, y finalmente $f(m) = a$.

De nuevo, hago la cuentita más despacio

$$h(s+2) = f(\min\{M_{s+1}\}) = f(m) = a$$

Luego, encontramos un $n \in \mathbb{N}$ tal que $h(n) = a, \forall a \in A$. Particularmente, $n = s + 2$

Def 2.4: Sean A, B dos conjuntos, decimos que $\#A \leq \#B$ sí existe una función $f : A \to B$ que es inyectiva

Proposición 2.2: Sean A, B dos conjuntos, $\#A \leq \#B$ ssi $\exists g : B \to A$ sobreyectiva.

Demo
$\Rightarrow)$

Sea $f : A \to B$ inyectiva. Sea $a_0 \in A$

Sea $g : B \to A$ tal que

$$g(b) = \begin{cases} f^{-1}(b) & \text{si} \quad \exists a \in A : f(a) = b \\ a_0 & \text{si} \quad \nexists a \in A : f(a) = b \end{cases}$$

Observemos lo siguiente, a_0 es un elemento cualquiera de A. Luego, cómo la función es inyectiva, podemos tener una inversa en una parte del conjunto de B.

De acá, la idea es "intuitiva". Tomamos el pedazo de B que tiene inversa de f; desde ahí, construimos g. Todos los elementos de B que no tengan una inversa de f en A, los mandamos a a_0. Listo, tenemos una función sobreyectiva.

Cómo $g \circ f(a) = \mathrm{id}(a)$, tenemos que g es sobreyectiva

$\Leftarrow$)

Sea $g : B \to A$ es sobreyectiva.

Defino $f : A \to B$ de la siguiente forma:

$f(a) = b \in B$ tal que $g(b) = a$. Luego $g \circ f = \mathrm{id}_A$, tenemos que f es inyectiva

Desafío 2.1: Demostrar que si $g \circ f = \mathrm{id}$, entonces g es sobreyectiva y f es inyectiva.

Desafío 2.2: Sí A es infinito, demostrar que $\#N \leq \#A$

"Los numerables son el infinito más chico que hay"

Def 2.5: Sea A un conjunto. Decimos que $P(A)$ es el conjunto de todos los subconjuntos de A (particularmente, incluye al vacío).

Teo 2.1: Sea $A \neq \emptyset$ un conjunto

$\#A \leq P(A)$, y, además $\#A \neq P(A)$

(podemos decir que $\#A < P(A)$)

Esto equivale a mostrar que

$\exists f : A \to B$ inyectiva y $\nexists f : A \to B$ biyectiva.

Demo

Pruebo que existe función inyectiva
Sea $f : A \to P(A)$ tal que $f(a) = \{a\}$. Esta función es inyectiva.

Pruebo que existe función biyectiva
Supongamos que tengo $f : A \to P(A)$ biyectiva.

Particularmente, en $P(A)$ existe un conjunto B tal que

$$B = \{a \in A : a \notin f(a)\} \subset P(A)$$

Cómo f es sobreyectiva (pues es biyectiva), tengo que

$\forall C \in P(A), \exists a \in A : f(a) = C$. Particularmente, $\exists b \in A : f(b) = B$. Luego, tenemos dos casos:

i) $b \in B \Rightarrow b \notin f(b) \Rightarrow b \notin B$

$$\text{i) } b \in B \Rightarrow b \notin f(b) \Rightarrow b \notin B, \text{ ¡Abs!}$$
$$\text{ii) } b \notin B \Rightarrow b \notin f(b) \Rightarrow b \in B, \text{ ¡Abs!}$$

El absurdo parte de suponer que existe una biyección $A \to P(A)$, pues hemos creado un conjunto que pertenece a $P(A)$, y sin embargo es absurdo que f llegue a él. Luego, debemos concluir que no existe una biyección posible. ■.

3 Teórica 16/09

Repaso

Def 3.1: Dado $E \neq \emptyset$, $d : E \times E \to \mathbb{R}$ se dice *distancia* o métrica si verfica $\forall x, y, z \in E$ las siguientes propiedades

1. $d(x, y) \geq 0$
2. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
3. $d(x, y) = d(y, x)$
4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Agora sem

3.1 Espacios de funciones

Def 3.1.1: Podemos trabajar en el espacio de todas las funciones contínuas dentro de un intervalo con la siguiente notación:

$$C[a, b] = \{f : [a, b] \to [a, b] \text{ contínuas}\}$$

Tomemos en cuenta que $[a, b]$ es un intervalo cerrado en $\mathbb{R}$, pero podría ser abierto (a, b), o semi-abierto $[a, b)/(a, b]$

3.2 Ejemplos de espacios métricos

Ejemplo 3.2.1:

Tenemos el siguiente espacio métrico: $(C[a, b], d_1)$ dónde

$$d_1 = \int_a^b |f(x) - g(x)| \, \mathrm{d}x$$

Notemos que en el intervalo abierto $C(0, 1)$ no sirve, pues

$$d_1\left(\frac{1}{x}, 0\right) = \int_0^x \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \infty$$

(*Básicamente, lo anterior es una demo por contraejemplo*)

En $C[a, b]$ notemos que

$$d_1(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| \, \mathrm{d}x$$

está bien definida, pues $d_1(f,g)$ existe y es finito $\forall f, g$ contínuas en $C[a,b]$

Veamos si cumple las propiedades

¿vale que $d_1(f,g) \geq 0$? (1)
¿no era suficiente chequear que valía des. triangular? Quizás era más un bodrio.

Si $f \neq g$, $\exists c \in [a,b] : f(c) \neq g(c)$

Cómo f, g son contínuas, $\exists I \subset [a,b]$ tal que $f(x) \neq g(x), \forall x \in I$. Por lo tanto

$$0 \leq \int_I |f(x) - g(x)| \, \mathrm{d}x \leq \int_a^b |f(x) - g(x)| \, \mathrm{d}x = d_1(f,g)$$

¿vale que $d_1(f,f) = 0$? (2)

$$d_1(f,f) = \int_a^b |f(x) - f(x)| \, \mathrm{d}x = 0$$

Además, $d(f,g) = d(g,f)$ (3)

¿Vale desigualdad triangular? (4)

Sean $f, g, h \in C[a,b]$

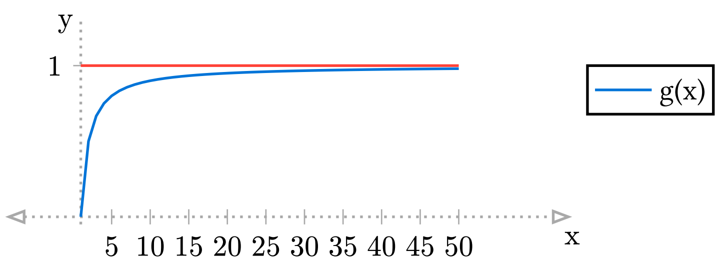
$$\begin{aligned}
d(f,g) &= \int_a^b |f(x) - g(x)| \, \mathrm{d}x \\
&= \int_a^b |f(x) - h(x) + h(x) - g(x)| \, \mathrm{d}x \\
&\leq \int_a^b |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)| \, \mathrm{d}x \\
&= \int_a^b |f(x) - h(x)| \, \mathrm{d}x + \int_a^b |h(x) - g(x)| \, \mathrm{d}x \\
&= d(f,h) + d(h,g)
\end{aligned}$$

Luego, vale desigualdad triangular
Efectivamente, era más fácil primero provar la triangular, y desde esta sale $d(x,y) \geq 0$ siempre

Ejemplo 3.2.2: Tenemos el siguiente espacio métrico: $(C[a,b], d_\infty)$ dónde

$$d_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|$$

Veamos el siguiente ejemplo



En este caso "visualmente" vemos que $d_\infty(1, g) = 1$, pues $\sup_{x \in [1,50]} |1 - f(x)| = 1$

Desafío 3.2.1: Probar las propiedades de la distancia en d_∞

Ejemplo 3.2.3: Métrica Discreta (δ)

Para E un conjunto:

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = y \\ 1 & \text{si} \quad x \neq y \end{cases}$$

Desafío 3.2.2: Probar las propiedades de la distancia en δ

Ejemplo 3.2.4: Sea (E, d) un espacio métrico

Defino $\tilde{\delta}$

$$\tilde{\delta}(x, y) = \begin{cases} d(x, y) & \text{si} \quad d(x, y) < 1 \\ 1 & \text{si} \quad d(x, y) \geq 1 \end{cases}$$

Notemos que $\left(E, \tilde{\delta}\right)$ también es un espacio métrico

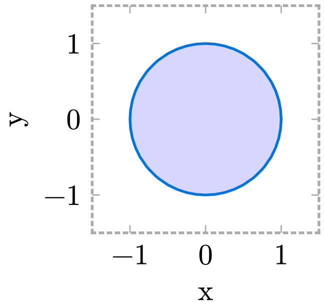
Def 3.2.1: Sea (E, d) e.m, $x \in E$ y $r > 0$

1. $B(x, r) = \{y \in E : d(x, y) < r\}$
2. $\overline{B}(x, r) = \{y \in E : d(x, y) \leq r\}$
3. $S(x, r) = \{y \in E : d(x, y) \leq r\}$

Obs: $\overline{B}(x, r) = B(x, r) \cup S(x, r)$

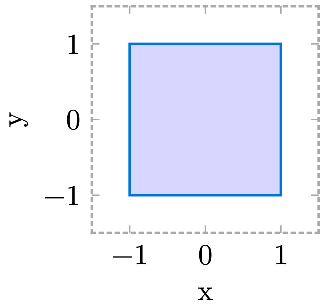
Ejemplo 3.2.5: En $(\mathbb{R}^2, d_2)$

$$B(0,1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : d_2(x,y) < 1\}$$
$$B(0,1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$$



Ejemplo 3.2.6: En $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$

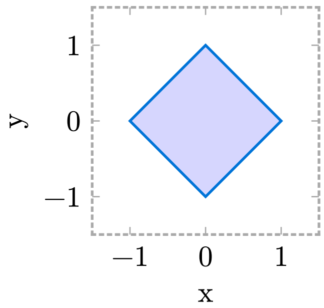
$$B_\infty(0,1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : d_\infty(x,y) < 1\}$$
$$B_\infty(0,1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sup\{|x|,|y|\} < 1\}$$



¿es esto lo mismo que $\|\cdot\|_\infty$? Es decir, ¿$\sup\{|x|,|y|\} = \mathtt{max}\{|x_i - y_i|\}$?

Ejemplo 3.2.7: En $(\mathbb{R}^2, d_1)$

$$B_1(0,1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : d_1(x,y) < 1\}$$
$$B_1(0,1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| < 1\}$$



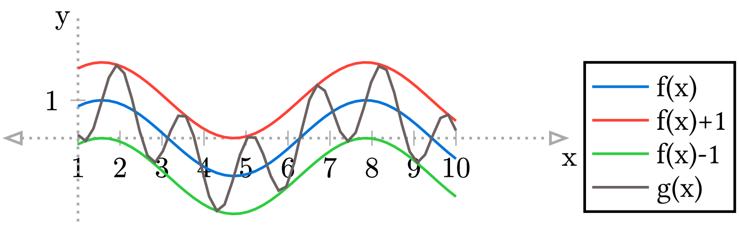
Nota 3.2.1: Si (E, d) e.m., d es una distancia discreta y $x \in E$

1. $B(x, \frac{1}{2}) = \{x\}$
2. $\overline{B}(x, 1) = E$
3. $S(x, \frac{1}{2}) = \emptyset$
4. $S(x, 1) = E - \{S\}$

No entendí nada

Ejemplo 3.2.8: En $(C[a, b], d_\infty)$, sea $f \in C[a, b]$

Podemos ver "visualmente" que $g \in B(f, 1)$



Def 3.2.2: Sea (E, d) un e.m. y $M \subseteq E$

M es acotado ssi $\exists x_0 \in E$ y $\exists r > 0 : M \subseteq B(x, r)$

Def 3.2.3: Sea (E, d) un e.m., $M \subseteq E$ y D el conjunto de todas las distancias...

$$D = \{d(x, y) : x, y \in M\} \subset \mathbb{R}$$

El díametro de $M = \sup(D) \subset \mathbb{R}$, es decir

$$\sup_{x,y \in M} (d(x, y)) = \operatorname{diam}(M)$$

Proposición 3.2.1: Sea (E, d) un e.m $M \subseteq E$

M es acotado ssi $\operatorname{diam}(M) < \infty$

Demo

$\Rightarrow)$
Sí M es acotado qvq $\exists r > 0 : d(x, y) < r, \forall x, y \in M$.

Cómo M es acotado, entonces $\exists x_0 \in E, s > 0$,tales que $M \subset B(x_0, r)$ *(no entendí naidas)*

Sean $x, y \in M$, entonces

$$\begin{aligned} d(x,y) &\leq d(x,x_0) + d(x_0,y) \\ &\leq s + s \qquad \leq 2s \end{aligned}$$

$\Leftarrow$)

Supongamos que $\operatorname{diam}(M) = D < \infty$, qvq $\exists x_0 \in E, r > 0 : M \subseteq B(x_0, r)$

Sea un $x \in M$ cualquiera, lo fijo.

Afirmo que $M \subseteq B(x, 2D)$

En efecto, si $y \in M \Rightarrow d(x,y) \leq \operatorname{diam}(M) = D < 2D$

obs: $\operatorname{diam}(B(x,r)) \leq 2r$.

Si (E,d) e.m y d es discreta. Entonces $\operatorname{diam}\left(B\left(x, \frac{1}{4}\right)\right) = 0$

creo que entendí un poco más, pero tampoco, nai nai

Def 3.2.4: Seas (E,d) e.m, $M \subseteq E$

Decimos que x es *punto interior de M* ssi $\exists r > 0 : B(x,r) \subseteq M$

Usamos M^o para notar el interior de M.

$M^o = \{x \in E : x \text{ es punto interior de M}\}$ $M^o = \{x \in E : \exists r > 0 : B(x,r) \subseteq M\}$

Obs: $M^o \subseteq M$

Ejemplo 3.2.9: En $(\mathbb{R}, |\cdot|)$

$[a,b]^o = (a,b)$

Ejemplo 3.2.10: En $(\mathbb{R}^2, d_1)$

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y > 0\}^o = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$$

COMPLETAR CON GRAFIQUITO

Ejemplo 3.2.11: $\mathbb{R}^o = \mathbb{R}$

Ejemplo 3.2.12: En $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, $\mathbb{Z}^o = \emptyset$

COMPLETAR CON GRAFIQUITO

Ejemplo 3.2.13: En $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, $\mathbb{Q}^o = \emptyset$

COMPLETAR CON GRAFIQUITO

Def 3.2.5: Sea (E, d) e.m y $A \subseteq E$

A se dice abierto ssi $A = A^o$

Ejemplo 3.2.14: $(a, b) \subset (\mathbb{R}, |\cdot|)$ **¿?**

Ejemplo 3.2.15: En (E, d), si tenemos $x \in E$ y $r > 0$, demostrar que $B(x, r)$ es abierto.

Sea $y \in B(x, r)$, cómo $d(x, y) < r$

Planteamos

$$s = \frac{r - d(x, y)}{2}$$

Sea $z \in B(x, s)$ qvq $d(z, x) < 1 \leq B(y, s) \subseteq B(x, r)$ **¿Esto está mal copiado? Me parece también que esta demo la vi en otro lado (El Marsden). Es básicamente demostrar que cualquier B(x,r) es abierto. Sienot que lo puedon reescribir por mi cuenta**

$$d(z, x) \leq d(z, y) + d(y, x) < s + d(x, y) = \frac{r - d(x, y)}{2} + d(y, x) = \frac{r}{2} + \frac{d(x, y)}{2} \leq \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$$

Luego $d(z, x) < r$ y, por lo tanto $z \in B(x, r)$

Propiedades 3.2.1: Sea (E, d) un e.m, y además $M, N \subset E$

1. $M^o \subseteq M$
2. Si $M \subset N \Rightarrow M^o \subset N^o$
3. Si $M \subset N$ y M es abierto, entonces $M \subset N^o$
4. $M^o = \{x \in E : x \in G, G \subset M \text{ abierto}\}$

Demo (1)
Si $M^o = \emptyset$ vale.

Si $M^o \neq \emptyset$, por lo tanto $\exists x \in M^o$, con lo cual $\exists r > 0 : x \in B(x, r) \subseteq M$, es decir $x \in M$.

Desafío 3.2.3: Demostrar (2) y (3)

(3) sale con la propiedad (2) y $M = M^o$, sí M es abierto. Además N^o es el abierto más grande dentro de N

Demo (4)
$\subseteq$)
Si $x \in M^o$, entonces $\exists r > 0 : B(x,r) \subseteq M$, cómo $B(x,r)$ es abierto, entonces x pertence a "algún" G abierto, que es subconjunto de M, tal cómo queríamos ver

$\supseteq$
Sea $x \in E$ y G es abierto en E tal que $x \in G \subseteq M$, por (2) tenemos que $G = G^o$. Por lo tanto $\exists r > 0 : B(x,r) \subseteq G \subseteq M$. Luego, $x \in M$.

4 Teórica 18-09

Repaso Sea (E,d) un e.m., $M \subseteq E$ y $x \in E$
1. x es punto interior de M si $\exists r > 0 : B(x,r) \subseteq M$
2. $M^o = \{x \in E : x \text{ es punto interior de M}\}$
3. $M^o \subseteq M$
4. Si $M^o = M$ se dice que M es abierto
5. $B(x,r) = B(x,r)^o$ —pues es abierto—.
6. $M^o = \{x \in E, \exists r > 0 : x \in B(x,r) \subseteq M\}$

La clave:

$$M^o = \{x \in E : x \in G \subseteq M, G = G^o\}$$

Proposición 4.1: Sea (E,d) un e.m, $(M_i)_{i \in I} \subseteq E$ tq M_i es abierto $\forall i \in I$. Entonces, $\bigcup_{i \in I} M_i$ es abierto

Otra forma de plantearlo:

$$(M_i)_{i \in I} \subseteq E : M_i = M_i^o \forall i \in I \Rightarrow \bigcup_{i \in I} M_i = \left(\bigcup_{i \in I} M_i\right)^o$$

Demo

$\supseteq$)

$\left(\bigcup_{i \in I} M_i\right)^o \subseteq \bigcup_{i \in I} M_i$ vale por definición.

$\subseteq$)

Sea $x \in \bigcup_{i \in I} M_i, \exists k \in I : x \in M_k$, cómo M_k es abierto, entonces $x \in M_k^o$, y por lo tanto, $x \in \left(\bigcup_{i \in I} M_i\right)^o$

Por doble inclusión, vale la igualdad.

Corolario 4.1: Sea (E, d) un e.m, $M \subseteq E \Rightarrow M^o$ es abierto

Demo
Sabemos que $M^o = \{x \in E : x \in G \subseteq M \;\text{ y }\; G = G^o\}$, por lo tanto $M^o = \bigcup_{G \subseteq M} G$. Por la proposición anterior $\bigcup_{G \subseteq M} G = \left(\bigcup_{G \subseteq M} G\right)^o$, con lo cual $M^o = (M^o)^o$, lo que lo hace a su vez un conjunto abierto.

Proposición 4.2: Sean (E, d) un e.m. y $M_i ... M_n \subseteq E : M_i = M_i^o$ (es decir, es abierto) entonces $\bigcap_{i=1}^m M_i \neq \emptyset$ es abierto.

Otra notación

$$M_i \subseteq E : M_i = M_i^o, \forall i \in I \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{m} M_i = \left(\bigcap_{i=1}^{m} M_i\right)^o$$

Demo
Por definición, $\left(\bigcup_{i \in I} M_i\right)^o \subseteq \bigcup_{i \in I} M_i$. Luego, falta demostrar que $\bigcup_{i \in I} M_i \subseteq \left(\bigcup_{i \in I} M_i\right)^o$

Sea $x \in \bigcup_{i \in I} M_i$, sabemos que $x \in M_i, \forall i \in I$. Luego, sabemos que cada M_i es abierto, luego, $M_i = M_i^o$. Por lo tanto, $\forall i \in I, \exists r_i > 0 : B(x, r_i) \subseteq M_i$. Particularmente $\exists r > 0 : r = \min\{r_1\}$.

Notemos que $B(x, r) \subseteq B(x, r_i) \subseteq M_i$, pues $r \leq r_i$. Por lo tanto $\left(x \in \bigcup_{i \in I} M_i\right)^o$

Finalmente, cómo vale la doble inclusión, $\bigcup_{i \in I} M_i = \left(\bigcup_{i \in I} M_i\right)^o$

Nota 4.1: Lo anterior NO VALE para conjuntos infinitos, sólo para conjuntos finitos.

Hay que analizar particularmente cada caso para descartarlos.

Ejemplo 4.1: En $\mathbb{R}$, $M_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$

$$0 \in M_n \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow 0 \in \bigcap_{\mathrm{i}=1}^{\infty} M_{\mathrm{i}}$$

Aún más, se puede probar usando arquímedes que

$$\{0\} = \bigcap_{\mathrm{i}=1}^{\infty} M_{\mathrm{i}}$$

Además $\{0\}^o = \emptyset$, pues si $r > 0 \Rightarrow B(0, r) \nsubseteq \{0\} \Rightarrow 0 \notin \{0\}^o$

Notemos que M_n **no es abierto**

Ejemplo 4.2: $M_n = \left(-1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right)$ con $M_0 = (-1, 1)$.

Luego, $\bigcap_{\mathrm{i}=0}^{\infty} M_{\mathrm{i}} = (-1, 1)$, y por lo tanto **es abierto**.

Def 4.1: Sea (E, d) un e.m. $M \subseteq E$,

Se dice que $x \in E$ punto de adherencia de M ssi $\forall r > 0, B(x, r) \cap M \neq \emptyset$

Ejemplo 4.3: En $\mathbb{R}$, $M = (0, 1)$ $x = 1$ es punto de adherencia

Def 4.2: Sea (E, d) un e.m y $M \subseteq E$

Llamamos "la clausra de M" $\overline{M} = \{\text{todos los puntos de adherencia}\}$.

Es decir:

$$\overline{M} = \{x \in E : \forall r > 0, B(x, r) \cap M \neq \emptyset\}$$

Ejemplo 4.4:
1. En $\mathbb{R}$, $\overline{(0, 1)} = [0, 1]$
2. En $(\mathbb{R}^n, d_2)$, $\overline{B(0, r)} = \overline{B}(0, r)$

Nota 4.2: Esto es un toque tricky, no sé cómo ponerlo en palabras, pero ahí va el ejemplo del profe.

Ejemplo 4.5: Sea $E = [0, 1] \cup \{2\}$, vamos a trabajar en $(E, |\cdot|)$, un e.m

Notemos que:
1. $B(0, 1) = (0, 1)$
2. $B(0, 2) = [0, 1]$
3. $\overline{B}(0, 2) = E$

Particularmente $2 \notin \overline{B(0, 2)}$. Notemos que para $r = \frac{1}{2}$, $B\left(2, \frac{1}{2}\right) \cap E = \emptyset$, entonces 2 **no es punto de adherencia**.

Atento: $2 \notin \overline{B(0, 2)}$ PERO $2 \in \overline{B}(0, 2)$

Hacer el grafiquito en $\mathbb{R}^2$ boneto y enchufarlo acá

Ejemplo 4.6:
1. $\overline{B}(0,2) = \{x \in E : d(x,0) \leq 2\}$
2. $\overline{B(0,2)} = \{x \in E : \forall r > 0, B(x,r) \cap B(0,2) \neq \emptyset\}$

Proposición 4.3: Sea (E,d) un e.m., $x \in E$ con $r > 0$

$\overline{B(x,r)} \subseteq \overline{B}(x,r)$

Demo

Sea $y \in \overline{B(x,r)}$ qvq $d(x,y) \leq r$

Si $\frac{1}{n} > 0$, entonces $B(x,r) \cap B\left(x, \frac{1}{n}\right) \neq \emptyset$

Sea $y_n \in \overline{B(x,r)} : y_n \in B(x,r) \cap B\left(x, \frac{1}{n}\right)$, entonces

$$d(x,y) \leq d(x,y_n) + d(y_n,y) < r + \frac{1}{n}$$

Es decir

$$\forall n \in \mathbb{N}, d(x,y) < r + \frac{1}{n} \Rightarrow d(x,y) \leq r$$

Por lo tanto $y \in \overline{B}(x,r)$

Def 4.3: Sea $(E.d)$ un e.m y $M \subseteq E$,

M se dice cerrado si $\overline{M} = M$

Nota 4.3: $\overline{\overline{B(x,r)}} = \overline{B(x,r)}$

Por lo tanto, $\overline{B}(x,r)$ es cerrada.

Puede ocurrir que $\overline{B(x,r)} \neq \overline{B}(x,r)$

Proposición 4.4: Sea (E,d) un e.m. $M \subseteq E$

M es abierto ssi $E - M$ es cerrado

Más simbólicamente

$$M = M^o \Leftrightarrow E - M = \overline{E - M}$$

Demo

$\Leftarrow$)

Sea $x \in M$ qvq $\exists \varepsilon > 0 : B(x,\varepsilon) \subseteq M$, es decir, quiero ver que $x \in M^o$.

Supongo que no, dónde $\varepsilon > 0, \exists z \in E : z \in B(x, \varepsilon) \land z \notin M$.
Entonces $x \in B(x, \varepsilon) \cap (E - M) \neq \emptyset$, y por lo tanto $x \in \overline{E - M} \Rightarrow x \in (E - M)$ (pues $\overline{E - M} = E - M$ ya que $E - M$ es cerrado).

Notemos que esto es absurdo **porqué? Ni idea bro**

$\Rightarrow$)
Sea $x \in \overline{M - N}$ qvq $x \in E - M$

Si $x \in \overline{M - N} \Rightarrow \forall r > 0, \exists z \in B(x, r) \cap (E - M)$ [esto quiere decir que que $B(x, r) \cap (E - M) \neq \emptyset$]. Lo cual quiere decir que $z \notin M$, y por ende, $B(x, r) \nsubseteq M$.

Luego, $\forall r > 0, B(x, r) \nsubseteq M \Rightarrow x \notin M^o \Rightarrow x \notin M$ (pues $M^o = M$). Finalmente $x \in E - M$.

Corolario 4.2: Sea (E, d) un e.m con $M \subseteq E$

$E - M = (E - M)^o$

Demo

Sea $x \in \left(E - \overline{M}\right) \Leftrightarrow x \in \overline{M} \Leftrightarrow \exists r > 0 : B(x, r) \cap M = \emptyset \Leftrightarrow \exists r > 0 : B(x, r) \subseteq (E - M) \Leftrightarrow x \in (E - M)^o$

Proposición 4.5: Sea (E, d) un e.M
1. Sean $(M_i)_{i \in I} \neq \emptyset$ cerrados, entonces $\bigcap_{i \in I} M_i \neq \emptyset$ es cerrado
$$(M_i)_{i \in I} = (M_i)_{i \in I} \Rightarrow \bigcap_{i \in I} M_i = \overline{\bigcap_{i \in I} M_i}$$
2. Sean $M_1, \ldots, M_n$ cerrados, entonces $\bigcup_{i=1}^{n} M_i$ es cerrado
$$M_1 = \overline{M_1}, \ldots, M_n = \overline{M_n} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} M_i = \overline{\bigcup_{i=1}^{n} M_i}$$

Demo (1)
$\bigcap_{i=1}^{m} M_i$ es cerrado ssi $E - \left(\bigcap_{i=1}^{m} M_i\right)$ es abierto.
Cómo $E - \left(\bigcap_{i=1}^{m} M_i\right) = \bigcup (E - M_i)$ y $E - M_i$ son abiertos, entonces $\bigcup (E - M_i)$ es abierto.

Desafío 4.1: Demostrar (2)

Nota 4.4: Sea (E, d) un e.m.
1. E es abierto, entonces $\emptyset$ es cerrado.
2. E es cerrado, entonces $\emptyset$ es abierto.

Nota 4.5: En $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, notemos que $Q \subset \mathbb{R}$:

1. ¿Es $\mathbb{Q}$ abierto? No, $\mathbb{Q}^o = \emptyset$.
2. ¿ Es $\mathbb{Q}$ cerrado? No, $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Ocurre lo mismo con $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Que algo sea cerrado o abierto es relativo a quién es (E, d).