Recordar 2do Parcial Análisis Avanzado

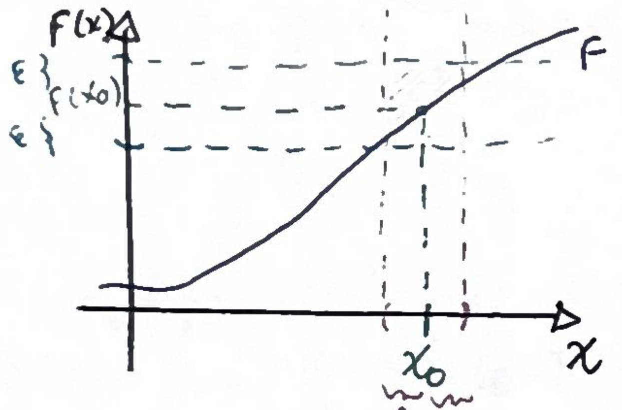
Continuidad (P4)

⤳ Hay muchas definiciones de Continuidad y todas son equivalentes

- Definición Clásica

Sean (M,d) y (N,d') e.m. $F: M \to N$, $x \in M$, F es continua en x si

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \,/\, d(x,y) < \delta \Rightarrow d'(F(y),F(x)) < \varepsilon$$ (δ depende de x_0 y ε)



- ε representa qué tan cerca queremos que estén los valores de $F(x)$ respecto de $F(x_0)$
- δ representa qué tan cerca tiene que estar x de x_0 para garantizar eso

⤳ Si me acerco lo suficiente a x_0, entonces los valores de $F(x)$ se acercan a $F(x_0)$
y viendo esto punto a punto veo que "no hay huecos"

Idea: Cualquiera sea el rango que yo mire alrededor de $F(x_0)$ ($\forall \varepsilon > 0$), deben existir puntos cerca de x_0 en un determinado rango ($\exists \delta > 0$) tal que esas imágenes provengan de esos puntitos en el dominio alrededor de x_0

Definición con Bolas abiertas

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \,/\, F(B(x,\delta)) \subseteq B(F(x),\varepsilon)$ se puede pensar como:

Para cada $\varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ Tq $F(y) \in B(F(x,\varepsilon))$, $y \in B(x,\delta)$

- Esto dice que para cada bola $B(F(x),\varepsilon)$ en la imagen, existe una bola $B(x,\delta)$ tal que: $F(B(x,\delta)) \subseteq B(F(x),\varepsilon)$

⤳ Existe una bolita que contiene puntos alrededor de x_0, tal que si le aplico F, las imágenes caen dentro de la bolita centrada en $F(x)$. (Idea del dibujo)

En otras palabras si me meto en una bola suficientemente pequeña alrededor de x, su imagen cae dentro de una bola alrededor de x

Preimagen de bolas abiertas

F continua en x_0 si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ Tq $B(x_0,\delta) \subseteq F^{-1}(B(F(x_0,\varepsilon))$

- La preimagen de una bola abierta centrada en $F(x_0)$ contiene una bola abierta centrada en x_0

Equiv: $x \in B(x_0,\delta) \Rightarrow F(x) \in B(F(x_0),\varepsilon)$

Definición con sucesiones → las continuas preservan sucesiones convergentes

$F: M \to N$, $x \in M$,

F es continua en $x \iff \forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq M / x_n \to x \Rightarrow F(x_n) \to F(x)$

Idea: Si me acerco a x a través de cualquier sucesión de puntos x_n del dominio, entonces la imagen de esa sucesión también se tiene que acercar a la imagen $F(x)$

Ejemplo de función continua

$F(x) = x^2$, veamos si es continua en $x = 2$

- Sea una sucesión cualquiera $x_n \to 2$. Por ej $x_n = 2 + \frac{1}{n} \Rightarrow x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 2$
- Evaluamos $F(x_n) = (2+\frac{1}{n})^2 = 4 + \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2} \to 4$

  y $F(x_n) \to F(2) = 4$.

  $\Rightarrow F$ es continua en $x = 2$

- En síntesis: ① Tomo una sucesión $x_n \to x$ ② Calcular $F(x_n)$ ③ Mostrar que $F(x_n) \to F(x)$

Teorema: Abiertos en Abiertos

$F: M \to N$ es continua $\iff F^{-1}(A) \subseteq M$ es abierto $\forall A \subseteq N$ abierto

En las continuas, las preimágenes de abiertos son abiertos

→ La idea es "mirar hacia atrás", si en el codominio tengo un abierto y miro de donde vino, su preimagen en una continua es abierta

Corolario: Cerrados en Cerrados

$F: M \to N$ es continua $\iff F^{-1}(F)$ es cerrado, $\forall F$ cerrado

En las continuas, las preimágenes de cerrados, son cerrados

→ Misma idea de mirar hacia atrás

Continuidad Uniforme —▷

Cuando dos puntos en M están muy cerca, sus imagenes en N también están muy cerca, sin importar donde estén originalmente

o

En la uniforme δ solo depende de ε y no del punto, es para todo x

$F:(M,d) \to (N,d')$ Decimos que …

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tq } \forall (x,y) \ldots \varepsilon}$$

Def: $F: M \to N$ es uniformemente contin…

$$\boxed{\forall (x_n)(y_n) \subseteq M \,/\, d(x_n,y_n) \to 0 \Rightarrow d'(F(x_n),F(y_n)) \to 0}$$

— Es decir si tengo dos sucesiones x_n y y_n en M que se acercan cada vez más entre sí (es decir ($d(x_n,y_n) \to 0$), entonces sus imagenes $F(x_n)$ y $F(y_n)$ en N también deben acercarse cada vez más (es decir, $d'(F(x_n),F(y_n)) \to 0$). (Para negar u.c $\exists \varepsilon_0 > 0$ y $(x_n),(y_n) \subseteq E \,/\, d(x_n,y_n) \to 0$ pero $d'(F(x_n),F(y_n)) \geq \varepsilon_0 \ \forall n \in \mathbb{N}$)

Lipschitz

$F:(M,d) \to (N,d')$ decimos que es Lipschitz si

$$\boxed{\exists C > 0 \,/\, d'(F(x),F(y)) \leq C \cdot d(x,y) \quad \forall x,y \in M}$$

⟿ la condición de Lipschitz dice que la función F no puede "estirar" las distancias más allá de un factor fijo $C > 0$.

Importante

Si $F: M \to N$ es Lipschitz $\Rightarrow$ es uniformemente continua

Tomando $\delta = \frac{\varepsilon}{C}$, tenemos que $d'(F(x),F(y)) \leq C \cdot d(x,y) < C \cdot \frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon$

Teorema de extensión uniformemente continua

Prop Sea $X \subseteq M$ un subconjunto denso ($\overline{X} = M$), (N,d') un espacio métrico completo. Sea $F: X \to N$ uniformemente continua. Entonces $\exists \tilde{F}: M \to N \,/\, \tilde{F}|_X = F$ y $\tilde{F}$ es uniformemente continua

⟿ El teorema permite "extender" funciones u.c. de un subconjunto denso a todo el espacio, preservando la continuidad uniform

⟿ Como X es u.c y N no tiene huecos (es completo), entonces se puede extender F a todo M tomando límites

Continuidad Uniforme → [redacted]

$F:(M,d) \to (N,d')$ Decimos que es uniformemente Continua si

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tq } \forall (x,y) \in M,\ \text{si } d(x,y) < \delta \Rightarrow d'(F(x),F(y)) < \varepsilon}$$

Def: $F: M \to N$ es uniformemente continua $\Leftrightarrow$

$$\boxed{\forall (x_n)(y_n) \subseteq M \,/\, d(x_n,y_n) \to 0 \Rightarrow d'(F(x_n),F(y_n)) \to 0}$$

– Es decir si tengo dos sucesiones x_n y y_n en M que se acercan cada vez más entre sí (es decir $(d(x_n,y_n) \to 0)$, entonces sus imagenes $F(x_n)$ y $F(y_n)$ en N también deben acercarse cada vez más (es decir, $d'(F(x_n),F(y_n)) \to 0$).

Para negar U.C

$\Big(\exists\, \varepsilon_0 > 0$ y $(x_n),(y_n) \subseteq E \,/\, d(x_n,y_n) \to 0$ Pero $d'(F(x_n),F(y_n)) \geq \varepsilon_0 \ \forall n \in \mathbb{N} \Big)$

Lipschitz

$F:(M,d) \to (N,d')$ decimos que es Lipschitz si

$$\boxed{\exists C > 0 \,/\, d'(F(x),F(y)) \leq C \cdot d(x,y) \quad \forall x,y \in M}$$

⟿ la condición de Lipschitz dice que la función F no puede "estirar" las distancias más allá de un factor fijo $C > 0$.

Importante

Si $F: M \to N$ es Lipschitz $\Rightarrow$ es uniformemente Continua

Tomando $\delta = \frac{\varepsilon}{C}$, tenemos que $d'(F(x),F(y)) \leq C \cdot d(x,y) < C \cdot \frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon$

Teorema de extención uniformemente continua

Prop Sea $X \subseteq M$ un subconjunto denso ($\overline{X} = M$), (N,d') un espacio métrico completo. Sea $F: X \to N$ uniformemente continua.
Entonces $\exists\, \tilde{F}: M \to N \,/\, \tilde{F}|_X = F$ y $\tilde{F}$ es uniformemente continua

⟿ El teorema permite "extender" funciones u.c. de un subconjunto denso a todo el espacio, preservando la continuidad uniforme

⟿ como X es u.c y N no tiene huecos (es completo), entonces se puede extender F a todo M tomando limites

Def Una función $F: M \to N$ se dice un[...]
F es:
① Continua ② Biyectiva

Además:
Si $\exists\, F: M \to N$ homeomorfismo decimo[...]

Obs: Si $(E,d), (E',d')$ son homeomorfos $\Rightarrow \exists$ una correspondencia entre abiertos de E y abiertos de E'

- $V \subseteq E'$ abierto $\Rightarrow F^{-1}(V) \subseteq E$ es abierto (F continua)
- $U \subseteq E$ abierto $\Rightarrow F(U) = (F^{-1})^{-1}(U)$ es abierto (F^{-1} es cont)

$\Psi: \{\text{abiertos de } E\} \to \{\text{abiertos de } E'\}$
$\Psi(U) = F(U)$ biyectiva

Def $F: M \to N$ es una isometría si
$d(x,y) = d'(F(x), F(y))\ \forall x,y \in M$ (e[...]

Obs Si F es isometría $\Rightarrow F$ es Lipschitz y es U.C

Continuidad Uniforme preserva Cauchy $\to$ Ej (14 P4)

Sean E, E' e.m y sea $F: E \to E'$ una función uniformemente continua. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $E \Rightarrow (F(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en E'

Compacidad

Def sucesiones

Sea (M,d) em, $K \subseteq M$. Decimos que K es compacto si
$\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq K \ \exists (x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ subsucesión convergente en K (i.e $\exists x \in K / x_{n_k} \to x$)

Herramienta para ver no compacidad:
Puedo ver que $\exists$ una suc que no tiene ninguna subsuc convergente (Convergente $\Rightarrow$ De Cauchy) entonces alcanza con ver que ninguna suc. es de Cauchy, pues $\neg$ Cauchy $\Rightarrow \neg$ convergente.

Si $K \subseteq M$ es compacto $\Rightarrow$ es cerrado y acotado (No siempre vale la vuelta)

Teorema (Heine-Borel) vale vuelta
Si $K \subseteq (\mathbb{R}^m, d_2)$ es cerrado y acotado $\Rightarrow$ es compacto
(vale en d_1 y d_∞ porque $\mathbb{R}$ es completo)

Def Una función $F: M \to N$ se dice un homeomorfismo si F es:

① Continua ② Biyectiva ③ F^{-1} es Continua

Además:

Si $\exists F: M \to N$ homeomorfismo decimos que M y N son homeomorfos.

Def $F: M \to N$ es una isometría si

$d(x,y) = d'(F(x), F(y)) \ \forall x,y \in M$ (si la función preserva las distancias)

Obs si F es isometría $\Rightarrow$ F es Lipschitz y $\therefore$ es U.C

Continuidad Uniforme preserva Cauchy $\to$ Ej (1 UP4)

Sean E, E' e.m y sea $F: E \to E'$ una función uniformemente continua. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $E \Rightarrow (F(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en E'

Compacidad

Def Sucesiones

sea (M,d) em, $K \subseteq M$. Decimos que K es Compacto si $\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq K / \exists (x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ subsucesión convergente en K (i.e $\exists x \in K / x_{n_k} \to$

Herramienta para ver no compacidad

Puedo ver que $\exists$ una suc que no tiene ninguna subsuc convergente (Convergente $\Rightarrow$ De Cauchy) entonces alcanza con ver que ninguna suc. es de Cauchy, pues $\neg$ Cauchy $\Rightarrow \neg$ convergente.

Si $K \subseteq M$ es compacto $\Rightarrow$ es cerrado y acotado (no siempre vale la vuelta)

Teorema (Heine-Borel) vale vuelta

Si $K \subseteq (\mathbb{R}^m, d_2)$ es cerrado y acotado $\Rightarrow$ es compacto.

(vale en d_1 y d_∞ porque $\mathbb{R}$ es Completo)

Prop (M,d) e.m, $K \subseteq M$ compacto, si $F \subseteq K$ cerrado $\Rightarrow$ F es compacto
(Cerrados dentro de compactos, son compactos)

Prop sea $\{K_i\}$ familia de compactos de M

1. $\bigcup_{i=1}^{n} K_i$ es compacta (unión finita de compactos, es compacta)
2. $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} K_i$ es compacta (intersección arbitraria de compactos, es compacta

Def Compacidad Cubrimientos

Def - Cubrimientos

sea (M,d) e.m, un subconjunto $K \subseteq M$, un cubrimiento por abiertos de K, es una familia $\{U_i\}_{i \in I}$, $U_i \subseteq M$ y $K \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$

- Un subcubrimiento es quedarme con algunos $\{U_i\}_{i \in J}$, $K \subseteq \bigcup_{i \in J} U_i$, $J \subseteq I$

K compacto $\Leftrightarrow$ $\forall \{U_i\}_{i \in I}$ abiertos con $K \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$, $\exists i_1, \dots, i_n \in I$ tales que $K \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} U_{i_k}$
(Todo cubrimiento por abiertos de K, admite un subcubrimiento finito, que contiene a K).

Obs: Si K es compacto $\Rightarrow$ K es completo.

Teorema

Si (M,d), (N,d'), $F: M \to N$ es continua.
Si $K \subseteq M$ compacto $\Rightarrow$ $F(K)$ es compacto.
(una continua manda compactos en compactos)

Teorema

Si $F: K \to \mathbb{R}$ continuo, K compacto $\Rightarrow$ F tiene máximo y mínimo.

Teorema de Heine - Cantor

$F: M \to N$ continua y M compacto.
Entonces F es uniformemente continua
(Cualquier continua en un compacto, es uniformemente continua)

Teorema de equivalencias de Compacto

Sea $K \subseteq (E,d)$. Son equivalentes

1. K es compacto
2. Toda sucesión $(x_n)_n \subseteq K$ admite una subsucesión $x_{n_j} \to x$ y $x \in K$
3. Todo subconjunto infinito $A \subseteq K$, tiene un punto de acumulación en K $(\forall A \subseteq K$ infinito, $A' \cap K \neq \emptyset)$
4. Todo cubrimiento de K, admite un subcubrimiento finito de abiertos
5. K es completo y totalmente acotado
6. Si K es finito en $(E,d) \Rightarrow K$ es compacto

Punto fijo

Def. $F: M \to M$, x es punto fijo de F si $F(x) = x$

Def.- Contractiva

$F: M,d \to N,d'$, F es contractiva si existe $0 < c < 1$ /

$$d'(F(x), F(y)) \leq c \cdot d(x,y) \quad \forall x,y \in M$$

$\Rightarrow F$ contracción $\Rightarrow F$ Lipschitz $\Rightarrow F$ unif. continua

$\boxed{\text{Prop}}$ $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $|F'(x)| \leq c < 1$ $\forall x \Rightarrow F$ es contractiva

Teorema Punto fijo de Banach

Lipschitz con $|cte| < 1$

Sea M un espacio completo, $F: M \to M$ una contracción
$\Rightarrow F$ tiene un único punto fijo

Teorema punto fijo

$F: M \to M$ continua, M compacto, $d(F(x), F(y)) < d(x,y)$ $\forall x,y \in M$
Entonces, F tiene un único punto fijo

Espacios Normados

Def - Norma

Sea E un $\mathbb{R}$ e.v. Una norma en E es una función

$\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ Tq

1. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in E$
3. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $x, y \in E$ (Desigualdad Triangular)

$\to$ Un espacio vectorial con una norma, se llama espacio Normado

$\to$ Si E es un espacio normado, entonces es un espacio métrico con la distancia $d(x,y) = \|x-y\|$
(pero no toda distancia viene de una norma)

Espacio de Banach

Un espacio normado que es completo, con la distancia heredada de la norma $d(x,y) = \|x-y\|$, se llama espacio de Banach

Obs: Si E es un espacio normado, la suma es continua en $E \times E$ y el producto es continuo en $\mathbb{R} \times E$

$\to$ las bolas tienen propiedades de traslación y dilatación.

$$B(x,r) = \{y \in E : \|x-y\| < r\}$$
$$= \{\|y\| < r, y \in E\} = B(0,r) + x = B(x,r) - x$$
$$= \{r \cdot y : \|y\| < 1\} + x$$
$$= r B(0,1) + x$$

se puede pensar que es la misma bola pero centrado en cero y después sumarle x

normas equivalentes

Dos normas en un e.v son equivalentes si

$\exists\ c, \tilde{c} > 0$ Tq $\quad c\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \tilde{c}\|x\|_2$

- En $\mathbb{R}^n$ Todas las normas son equivalentes

Normados - dimensión finita

Prop $(E, \|\cdot\|)$ con dimensión $\dim E = n \Rightarrow E$ es isométrico a $\mathbb{R}^n$

Corolario si $\dim(E) < \infty \Rightarrow$ Todas las normas son equivalentes

Corolario si $\dim(E) < \infty \Rightarrow$ es de Banach (es completo)

Corolario si $\dim(E) < \infty \Rightarrow$ los conjuntos cerrados y acotados son compactos

- **Prop PG** E un e.n. / $S \subseteq E$ subespacio, si $\dim(E) < \infty \Rightarrow S$ es cerrado

Operadores lineales continuos (Transformaciones lineales)

Sean E, F dos espacios normados sobre $\mathbb{R}$. Una aplicación $T: E \to F$ es un operador lineal continuo si

- Es una transformación lineal (u operador continuo):
  1. $T(v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$
  2. $T(v + w) = T(v) + T(w)$
  3. $T(\lambda v) = \lambda T(v)$
- Es una función continua, con las métricas que definen las normas

- **Acotados**

Un operador lineal $T: E \to F$ es acotado si

$$\exists C > 0 \text{ tq } \|T(x)\|_F \leq C\|x\|_E \quad \text{para todo } x \in E$$

Equivalentemente, T es acotado si $\sup\limits_{\substack{x \in B(0,1) \\ \|x\|_E \leq B(0,1)}} \|T(x)\|_F < \infty$

⇝ En palabras sencillas:

Imaginemos que T es un operador que "estira" vectores en el plano. Decir que T es acotado significa que hay un límite máximo para cuanto puede estirar cualquier vector.

⇝ Por ejemplo, si $C = 2$, entonces ningún vector se estirará más del doble de su longitud original

⇝ Ser acotado, significa que el operador no puede hacer crecer arbitrariamente la norma de los vectores

Teorema - Equivalencias de Continuidad

Sean E, F, espacios normados y $T: E \to F$ operador lineal.
Son equivalentes:

1. T es continuo en el origen (en el cero)
2. T es continuo en algún punto $x \in E$
3. T es continuo
4. T es uniformemente continuo
5. T es acotado
6. Para todo $A \subseteq E$ acotado, $T(A)$ es acotado

Funciones lineales

→ Una función lineal es un operador lineal $\gamma: E \to \mathbb{R}$ (E un normado)

Prop Sea $\gamma: E \to \mathbb{R}$ una función lineal. Entonces γ es continua
$\iff$ $Nu(\gamma)$ es un subespacio cerrado
↳ $\{x \in E : \gamma(x) = 0\} = \gamma^{-1}(\{0\})$

Prop ⇝ se pueden definir los operadores lineales sobre un denso.
⇝ Sean E, F normado, $D \subseteq E$ subespacio denso y F completo.
Si $T: D \to F$ lL acotada $\Rightarrow \exists\, \tilde{T}: E \to F$ lineal y continuo
tal que $\tilde{T}|_D = T$

Hiperplanos ⇝ "Subespacios maximales"

⇝ si $\dim(E) = n$ y S hiperplano $S \subseteq E \Rightarrow \dim(S) = n-1$

- Sea E un K ev y S un subespacio. Decimos que S es un hiperplano si $\forall v \in E \setminus S$ se cumple que $S \oplus \langle v \rangle = E$

$S \oplus T$ directo $\iff S \cap T = \{0_v\}$

Es decir $\forall x \in E, \exists!\, s \in S, \lambda \in K / x = s + \lambda v$
⇝ Para llegar de S a E, solo faltaba un vector.

⇝ Los hiperplanos son llamados espacios de codimensión 1

⇝ Cualquier subespacio se puede escribir como intersección de hiperplanos

Teorema

~~S es un hiperplano $\Leftrightarrow \exists\, \varphi : E \to K$ transformación lineal no nula tal que $Nu(\varphi) = S$~~ $(S = \varphi^{-1}(\{0\}))$

$\boxed{\text{Prop}}$ sea $S \subseteq E$ hiperplano. Entonces S es cerrado o es denso.

$(S$ hiperplano $\Rightarrow S = \bar{S}$ o $\bar{S} = E)$

(*) - si φ es continua $\Rightarrow$ (como preimágenes de cerrados son cerrados) S es cerrado

- si φ es discontinua $\Rightarrow$ S no es cerrado $\Rightarrow$ S es denso.

Normas de TL

$\to$ La norma de una transformación lineal es una medida de su "tamaño" o su "capacidad" para "amplificar" vectores.

Es decir, cuanto puede estirar T a los vectores del espacio normado

$\to$ Definiciones (hay varias)

- $\|T\| = \inf\{c > 0 : \|T(v)\| \leq c\|v\| \ \forall v\}$
  - $\to$ la menor constante c que satisface la desigualdad $\|T(x)\| \leq c\|x\|$, es decir es la cota más ajustada para T
  - $\to$ mínima constante c que controla el estiramiento (la del sup calcula máximo estiramiento)
- $\|T\| = \sup\limits_{\|x\| \leq 1} \|Tx\|_F$ $\to$ se mide la máxima deformación sobre imágenes que caben en un círculo de radio 1
  - ~~Tomamos todos los vectores $x \in E$ cuya norma es ≤ 1 (es decir, vectores dentro de la "bola unitaria cerrada" de E)~~
  - ~~Aplicamos T a cada uno y medimos su "tamaño" en F (con $\|Tx\|_F$)~~
  - ~~El supremo de estos valores nos da la máxima amplificación que T puede hacer sobre vectores acotados~~
- $\|T\| = \sup\limits_{\|x\|_E = 1} \|Tx\|_F$ $\to$ Mide solo las imágenes que están justo en el borde del círculo (en el peor caso)
  - ~~Similar al anterior, pero ahora solo consideramos vectores x con norma exactamente 1 (la "frontera" de la bola unitaria)~~
  - ~~Como T es lineal, los máximos estiramientos suelen ocurrir en la frontera~~

¿Por qué es equivalente al anterior?

_ Por linealidad: si $\|x\| < 1$, entonces $\|Tx\| = \left\|T\left(\|x\| \cdot \frac{x}{\|x\|}\right)\right\| = \|x\| \cdot \left\|T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| < \left\|T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\|$

$\to$ El máximo ya está capturado en los vectores de norma 1

○ $\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E}$ → mide la deformación relativa al tamaño original de cualquier imagen no nula.

○ No restringimos x a la bola unitaria, sino que consideramos todos los vectores no nulos de E

○ La fracción $\frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E}$ mide cuanto amplifica T a x en proporción a su norma original

○ El supremo de estos cocientes nos da la máxima amplificación relativa

¿Cómo se relaciona con los anteriores?

Normalizar x, equivale a trabajar solo con vectores unitarios

- ¿Por qué todas son equivalentes?

- La linealidad de T hace que el comportamiento de T en vectores unitarios determine su comportamiento en todo el espacio

- El supremo sobre $\|x\| \leq 1$ es el mismo que sobre $\|x\| = 1$ porque los máximos ocurren en la frontera.

- El cociente $\frac{\|Tx\|}{\|x\|}$ "normaliza" cualquier vector no nulo a un vector unitario.

- El ínfimo de los c, es la menor cota superior (supremo) de $\frac{\|Tx\|}{\|x\|}$ es el máximo estiramiento real de la imagen ($\inf\{c > 0 \mid \|Tx\| \leq c\|x\|\} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$)

Sucesiones de Funciones

Sucesiones de Funciones

Convergencia puntual

me importa que el codominio sea un em

Sea X un conjunto (Y, d') un e.m.

Sean $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $F: X \to Y$

Decimos que (F_n) converge puntualmente a F si $\quad n_0(\varepsilon, x)$

$F_n(x) \to F(x)$ $\forall x \in X$, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ / si $n \geq n_0$ $d'(F_n(x), F(x)) < \varepsilon$

Notación $F_n \to F$

⟶ ¿qué quiere decir? Analiza punto a punto

Para la convergencia puntual, cada "n_0" es distinto para cada punto.

- Si pensamos a las F_n como aproximaciones de F =
  Para cada x, las $F_n(x)$ se acercan a $F(x)$, pero algunos puntos pueden requerir n muy grandes para estar cerca.

Convergencia uniforme

n_0 conviva a todos. $n_0(\varepsilon)$

Sean $F_n, F: X \to Y$, decimos que F_n converge uniformemente a F si $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ / si $n \geq n_0$, $d'(F_n(x), F(x)) < \varepsilon$ $\forall x \in X$

Equivalentemente. $\sup\limits_{x\in X} d'(F_n(x), F(x)) < \varepsilon$

$\sup\limits_{x\in X} d'(F_n(x), F(x)) = d_\infty(F_n, F)$

Notación $F_n \rightrightarrows F$

⟶ ¿Qué significa esto?

El "n_0" es el mismo para todo x. El n_0 depende solo de ε, porque la velocidad de convergencia es la misma para todos los puntos x.

- Si pensamos a las F_n como aproximaciones de F:
  - Las $F_n(x)$ se acercan a F como un bloque, de manera controlada y simultánea.

Puntual ⟹ Prop. local

Uniforme ⟹ Prop. global

La diferencia principal radica en que para la puntual, cada n_0 es distinto para cada x mientras que para la uniforme, el n_0 es el mismo para todo x

$F_n \rightrightarrows F \implies F_n \to F$ puntual

Teorema

Sean (X,d), (Y,d') espacios métricos
$F_n, F: X \to Y$ / (F_n) son todas continuas y $F_n \overset{u}{\to} F$
Entonces, F es continua

↳ ¿Qué significa?
- La convergencia uniforme preserva continuidad

Es decir, si las F_n son todas continuas, si convergen uniformemente a algo, necesariamente ese algo es continuo

⇝ La puntual no pasa esto. Contraejemplo:
$F_n(x) = x^n \to F(x) = \begin{cases} 1 & x=1 \\ 0 & x \in [0,1) \end{cases}$, $F_n(x)$, $F: [0,1] \to \mathbb{R}$

Conv. Unif → preserva continuidad ⇝ continuas convergen a continuas

Uniformemente de Cauchy

Una sucesión (F_n) es uniformemente de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} / n, m \geq n_0 , d'(F_n(x), F_m(x)) < \varepsilon$$

↳ n_0 depende solo de ε
(en la puntual también de x)

Teorema

Sean $F_n: X \to Y$ uniformemente de Cauchy y completo
Entonces F_n converge uniformemente, $F_n \overset{u}{\to} F$

Obs: Si (F_n) es uniformemente de Cauchy, dado $x \in X$,
$(F_n(x))_{n \in \mathbb{N}} \subseteq Y \Rightarrow (F_n(x))$ es de Cauchy
↳ sucesión de imágenes

⇝ La convergencia uniforme preserva Cauchy

Prop Importante !!

La sucesión $(F_n)_{n \geq 1}$ no converge uniformemente a F $\Leftrightarrow$
$\exists \alpha > 0$, una subsucesión $(F_{n_k})_{k \geq 1}$ y una sucesión $(a_k)_{k \geq 1} \subseteq A$
Tales que

$$d(F_{n_k}(a_k), F(a_k)) \geq \alpha \ \forall k \in \mathbb{N}$$

Funciones acotadas - Bounded

Sea $B(X) = \{F: X \to \mathbb{R}, \text{ acotadas}\}$, es un normado

con $\|F\|_\infty = \sup_{x \in X} |F(x)|$

$\boxed{\text{Ej 4 P7}}$

$X \subseteq \mathbb{R}$, $(F_n)_{n \geq 1} \in B(X)$

Si $(F_n)_{n \geq 1}$ converge uniformemente en X, muestre que existe $M > 0$ tq $|F_n(x)| < M$ $\forall x \in X$ y todo $n \in \mathbb{N}$.

En otras palabras, la sucesión $(F_n)_{n \geq 1}$ es uniformemente acotada, o es acotada en $(B(X), \|\cdot\|_\infty)$

Propiedades

- Si K compacto, $C(K) = \{F: K \to \mathbb{R}, F \text{ continua}\}$, $\|F\|_\infty = \sup_{x \in K} |F(x)|$
- Sean $F_n, F: [a,b] \to \mathbb{R}$, continuas, $F_n \rightrightarrows F$. Entonces $\int_a^b F_n(x)\,dx \to \int_a^b F(x)\,dx$
  Preserva Integrabilidad (Riemann)
- Si $F_n, F: [a,b] \to \mathbb{R}$ / $F_n \in C^1([a,b])$, $F_n \to F$ puntualmente, $F_n' \rightrightarrows g$.
  Entonces, F es derivable y $F' = g$
  Preserva derivabilidad con hipótesis extra

En palabras sencillas

Significa que si tengo un grupo de funciones derivables F_n que se acercan a una función F punto por punto y además F_n' se acercan todas juntas (uniformemente) a una función g, entonces: F es derivable y su derivada es g.

↳ Es vital la convergencia uniforme de las F_n' actúa como freno para evitar que las pendientes de las F_n se descontrolen

↳ Ejemplo:

- Cada F_n es el perfil de una montaña rusa en el diseño n-ésimo (suave, sin picos bruscos)
- F es el diseño final al que se parecen todas las F_n

↳ Si las pendientes / (derivadas) de los diseños F_n se ajustan de manera uniforme, entonces el diseño final F también será suave y su pendiente será el límite natural de las anteriores

↳ Pero si las pendientes oscilan mucho en cada versión, aunque las F_n parezcan converger, el diseño final F podría terminar con un pico imposible (no derivable)

Teoría de la Medida

Conjuntos nulos

$A \subset \mathbb{R}$ es un conjunto nulo si para todo $\varepsilon > 0$ existen contables intervalos abiertos $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tales que $I_n = (a_n, b_n)$, $\log(I_n) = (b_n - a_n)$

① $\underbrace{A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n}_{\text{Cubrimiento de A}}$ ② $\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \log(I_n) < \varepsilon}_{\text{longitud total arbitrariamente pequeña}}$

⇝ En otras palabras = un conjunto es nulo si puede ser "cubierto" por intervalos tan pequeños como queramos, de modo que su "medida total" (suma de longitudes) sea insignificante (lo puedo tapar con algo muy chiquito

$\boxed{\text{Prop}}$ si $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$, E_n nulo $\Rightarrow$ E es nulo (la unión de nulos, es nulo)

Algunos nulos
- Todo finito es nulo
- Todo conjunto numerable
- Unión numerable de conjuntos nulos es nulo

⇝ Ej de que un numerable es nulo

- ~~El truco está en que como es numerable~~ (está en biyección con los naturales), ~~se lo puede listar.~~

$\boxed{\mathbb{Q} \text{ numerable} \Rightarrow \mathbb{Q} \text{ es nulo}}$ ⇝ sea $A = \{q_1, q_2, \dots\}$ una enumeración de $\mathbb{Q}$

cada q_n, pertenece a un intervalo I_n abierto

⇝ $A = (q_1, q_2, \dots q_n \dots) \subseteq I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_n \dots = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ ⇝ ① ~~cubrimiento de $\mathbb{Q}$~~

Sean los I_n de la sig. forma, $I_n = \left(a_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}, a_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}\right) \to \log(I_n) = \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \frac{\varepsilon}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{\varepsilon}{2} \cdot 1 < \varepsilon$ ⇝ ② ~~longitud arbitrariamente pequeña~~

↳ serie geométrica $= |r| < 1$, $\to \sum_{n=1}^{\infty} r^n = \frac{r}{1-r}$

⇝ $\frac{1/2}{1-1/2} = 1$

σ- álgebra

Sea X un conjunto y A una familia de subconjuntos de X ($A \subset P(X)$). A es una σ-algebra si:

① $X \in A$

② si $S \in A \Rightarrow \underset{X \setminus S}{\underset{\shortparallel}{S^c}} \in A$ (Cerrada por Complementos)

③ si $S_n \in A \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_n S_n \in A$ ↳ (Cerrado por uniones numerables)

⟿ En palabras sencillas

① contiene al conjunto total

② si un elemento está, su complemento también

③ cerrado bajo uniones numerables de cosas

⟿ Es decir, una σ-algebra es una colección o familia de subconjuntos que tiene como propiedades ①, ② y ③

Ej: $X = \{a, b, c\}$, σ-algebra $A = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, \{X\}\}$

Prop si S es σ-algebra de X y $A_n \in S \ \forall n \in \mathbb{N}$, entonces $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in S$

⟿ es Cerrado bajo intersecciones numerables

$\boxed{\text{Demo}}$ como $A_n \in A$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_n^c \in A \ \forall n \in \mathbb{N}$, A σ algebra

como $A_n^c \in A$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n^c \in A \ \forall n \in \mathbb{N}$

como $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n^c \in A$, $\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n^c\right)^c = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (A_n^c)^c = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in A$ ∎

Límite Superior e Inferior de Conjuntos

Sea $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una familia de subconjuntos de X.

Definimos (A_k es σ-algebra)

- $\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$ (Union infinita de intersecciones)

  Estar en Todos salvo Finitos

  "Acá están Todos los elementos que a partir de un momento ($n = 8 \Rightarrow k = n$) están en A_k"

  $\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \{x \in X : \exists n \in \mathbb{N} \text{ tq } x \in A_k \ \forall k \geq n\}$

- $\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ (Intersección infinita de uniones)

  Estar en infinitos

  "Tengo que estar en todos a partir de un momento, tengo que estar en infinitos"

  $\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \{x \in X : \forall n \geq 1, \exists k \geq n \text{ tq } x \in A_k\}$

Tenemos

$$\boxed{\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k}$$

El Límite Inferior es más $\Rightarrow$ chico que el superior

$\underbrace{\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k}_{\text{Límite Inferior}}$ — Lim Inf A_n

$\underbrace{\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k}_{\text{Límite superior}}$ — Lim Sup A_n

Corolario Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq S$ una σ-algebra, entonces, $\lim\sup_n A_n, \lim\inf_n A_n \in S$
(Inferior y superior están en la σ-algebra)

Medida de Lebesgue.

contiene todos los nulos y los intervalos abiertos

La σ-algebra $\mathcal{M}$ es la σ-algebra generada por los Intervalos abiertos y por los nulos. $\mathcal{M}$ se llama la σ-álgebra de Lebesgue

Teorema: Existencia de la medida de Lebesgue

cerrado porque puede tomar $+\infty$ como valor

$\exists!$ una Función $\mu: \mathcal{M} \to [0,+\infty]$ tal que

1. si $A=(a,b) \Rightarrow \mu(A) = b-a$ (si $a=-\infty \vee b=+\infty \Rightarrow \mu(A)=+\infty$)
2. si $(A_n) \subseteq \mathcal{M} \Rightarrow \mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)$ (σ-aditividad)
   si los A_n son disyuntas dos a dos
   $\Rightarrow \mu(\dot{\bigcup}_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)$
3. $A\in\mathcal{M} \Rightarrow \mu(A) = \inf\{\mu(U): A\subseteq U, U \text{ abierto}\}$ (σ-regularidad)

$\Rightarrow$ ¿Qué significa?

1. coincide con la longitud en intervalos
2. A_n es una colección numerable de conjuntos medibles. La medida de una unión es menor o igual que la suma de las medidas individuales.
3. Todos los abiertos son medibles, entonces la medida $\mu(A)$ puede aproximarse por medidas de conjuntos abiertos que contienen a A

Medida de los nulos

$A \subseteq \mathbb{R}$ es nulo $\Leftrightarrow \mu(A)=0$

Si A es nulo y $B\subseteq A \Rightarrow$ B es nulo $\therefore$ medible ($B\in\mathcal{M}$) y $\mu(B)=0$

$\Rightarrow$ Los nulos son los únicos conjuntos a los que si les agarro un subconjunto, es medible

Obs: $\underbrace{A, B \in \mathcal{M}}_{\text{se que son medibles}}$ (son medibles) y $\mu(B) \leq \mu(A)$

⇝ si tengo dos conjuntos, uno adentro de otro, siempre puedo pensar al más grande como el más chico unión algo ⇝ $B \subseteq A \Rightarrow A = B \dot{\cup} \underbrace{A \setminus B}_{\text{lo que falta, al poner } B}$

⇝ En general, si no sabemos que dos conjuntos son disjuntos, $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$. Pero si son disjuntos, vale la igualdad.

$\Rightarrow A, B \in \mathcal{M} \Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$, pues $A \cup B = A \dot{\cup} B \setminus A$ (*)

(*) si disjunto y se que son medibles, entonces la unión es medible ($B \setminus A \in \mathcal{M}$)

Obs: si $B \subseteq A$ y $A, B \in \mathcal{M}$, $\mu(B) < \infty \Rightarrow \mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B)$
(solo si se que uno tiene medida finita)

⇝ Todo conjunto acotado de $\mathcal{M}$, tiene medida finita ⇝
⇝ lo puedo meter en una bolita y estará acotado por el radio.

⇝ Si $A, B \in \mathcal{M}$, pruebe que $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$
⇝ la clave está en descomponer a A y B en disjuntos.

$$A = (A \setminus B) \dot{\cup} (A \cap B) \Rightarrow \mu(A) = \mu(A \setminus B) + \mu(A \cap B)$$
$$B = (B \setminus A) \dot{\cup} (B \cap A) \Rightarrow \mu(B) = \mu(B \setminus A) + \mu(B \cap A)$$
$$\begin{aligned}
\Rightarrow \mu(A) + \mu(B) &= \mu(A \setminus B) + \mu(A \cap B) + \mu(B \setminus A) + \mu(B \cap A) \\
&= (\mu(A \setminus B) + \mu(B \setminus A) + \mu(A \cap B)) + \mu(A \cap B) \\
&= \mu((A \setminus B) \dot{\cup} (B \setminus A) \dot{\cup} (A \cap B)) + \mu(A \cap B) \\
&= \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) \quad \square
\end{aligned}$$

⇝ si $A \in \mathcal{M}$ y $\mu(A) = 0 \Rightarrow A^\circ = \emptyset$.

Regularidad de $\mathcal{M}$

⇝ un conjunto medible, se puede aproximar por abiertos y cerrados

Sea $A \in \mathcal{M}$. Entonces $\underbrace{\forall \varepsilon > 0 \; \exists U \text{ abierto} / A \subseteq U \text{ y } \mu(U \setminus A) < \varepsilon}_{(1)}$
$\underbrace{\text{y } \forall \varepsilon > 0 \; \exists F \subseteq A \text{ cerrado} / \mu(A \setminus F) < \varepsilon}_{(2)}$

(1) Con los abiertos, puedo aproximar la medida por afuera, lo meto en un abierto
(2) Con los cerrados, lo puedo aproximar por adentro.

⇝ Es decir: cualquier medible A, puede ser aproximado por adentro por un conjunto cerrado F, en el sentido de que $A \setminus F$ (lo que sobra a A al remover F) tiene medida arbitrariamente pequeña ($< \varepsilon$)
(misma idea con los abiertos, pero por afuera)

Equivalencias de ser medible

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$, son equivalentes:

1. ~~$A \in \mathcal{M}$~~
2. ~~Existen una sucesión $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de conjuntos cerrados contenidos en A y un conjunto Z de medida nula tales que $A = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n\right) \cup Z$~~
3. ~~Existen una sucesión $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de conjuntos abiertos que contienen a A y un conjunto H de medida nula tales que $A = \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n\right) \setminus H$~~

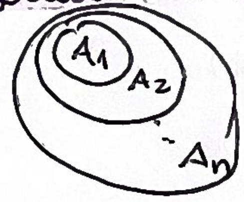
⇝ Sea $A \subseteq \mathbb{R}$. $A \in \mathcal{M} \iff \forall \varepsilon > 0$ existen conjuntos G abierto y F cerrado tales que $F \subseteq A \subseteq G$ y $\mu(G \setminus F) < \varepsilon$

⇝ Es como hacer sandwich
La diferencia $G \setminus F$ (es decir, lo que queda de G si le sacamos F) es tan pequeñita como queramos ($< \varepsilon$)
Es decir que A está "apretado" entre F y G, sin dejar mucho espacio extra.

Teorema - Continuidad de la Medida

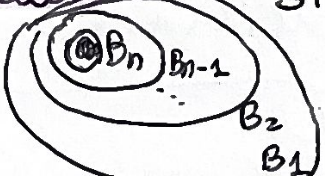
1. Sean $(A_n) \subseteq \mathcal{M}$ tq $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_n \subseteq \dots \Rightarrow \boxed{\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n)}$

⇝ Idea: si los conjuntos van "llenando" cada vez más espacio, la medida de la unión es el límite de las medidas individuales



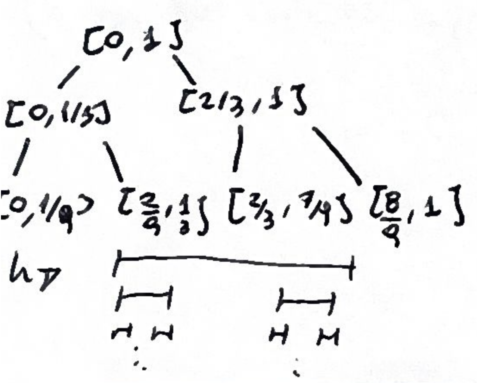
2. Sean $(B_n) \subseteq \mathcal{M}$, $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \dots \supseteq B_n$ y $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \mu(B_{n_0}) < \infty$ ($\forall n \geq n_0$)
$\Rightarrow \mu\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = \lim_{n \to \infty} \mu(B_n)$ (*)

⇝ Idea: si los conjuntos se van "encogiendo" y alguno tiene medida finita, la medida de la intersección es el límite de las medidas individuales



⇝ **Las Funciones Lipschitz preservan conjuntos Lebesgue Medibles en $\mathbb{R}^n$**

Conjunto de Cantor = subconjunto fractal del intervalo real $[0,1]$. Se construye iterativamente eliminando el tercio medio de cada segmento



$\mathcal{C} = \bigcap_{n=0}^{\infty} J_n$ es el Conjunto de Cantor

$J_0 = [0,1]$
$J_1 = [0,1/3] \cup [2/3,1]$

1. ~~$\mathcal{C}$ es cerrado (porque cada J_n lo es)~~
2. ~~$\mathcal{C}$ es medible, $\mathcal{C} \in \mathcal{M}$ ($\bigcap A_n$, $A_n \in \mathcal{M} \Rightarrow \bigcap A_n \in \mathcal{M}$)~~
3. ~~$J_0 \supseteq J_1 \supseteq \dots \Rightarrow \mu(J_0) = 1$ (Medida finita), $\mu(\mathcal{C}) = \mu(\bigcap J_n) = \lim_{n \to \infty} \mu(J_n)$~~ (*)
4. ~~$\mathcal{C}$ no es numerable, $\#\mathcal{C} = 2^{\aleph_0} = c$ (En cada nivel agrego 2^n puntos)~~

Cosas útiles !!

① Unión de medibles es medible, por lo tanto sirve disjuntar cosas.
Para ver medibilidad $\rightarrow [a,b] = \underbrace{\{a\}}_{\text{nulo EM}} \dot\cup \underbrace{(a,b)}_{\text{abierto EM}} \dot\cup \underbrace{\{b\}}_{\text{nulo EM}}$

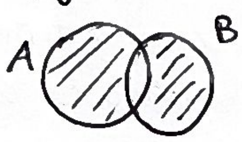
$\rightarrow A \cup B = A \dot\cup (B \setminus A)$
$= (A \setminus B) \dot\cup (B \setminus A) \dot\cup (B \cap A)$

② Leyes de De Morgan

① $\left(\bigcup_{i \in I} B_i\right)^c = \bigcap_{i \in I} B_i^c$ ② $\left(\bigcap_{i \in I} B_i\right)^c = \bigcup_{i \in I} B_i^c$

$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

③ Diferencia Simétrica $A \triangle B$



$\rightarrow A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B)$
$= (A \setminus B) \dot\cup (B \setminus A)$

Funciones Medibles P8

Funciones Simples

Una función $F: E \rightarrow \mathbb{R}$, $E \subseteq \mathbb{R}$, se dice Simple si existe una partición de E en finitos conjuntos $E_1, \dots, E_N$ y números $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \mathbb{R}$ tales que

$$F(x) = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \underbrace{\chi_{E_n}(x)}_{= \begin{cases} 1 & \text{si } x \in E_n \\ 0 & \text{si } x \notin E_n \end{cases}}$$ $\rightarrow$ característica de E_n

¿Qué es una partición?

Sea $E \subset \mathbb{R}$, una partición de E es una colección de conjuntos $(E_n)_n$ de conjuntos disjuntos dos a dos tales que $E = \bigcup_n E_n$.
Si E es Medible, decimos que la partición es medible si cada E_n es Medible

$\rightarrow$ Una función Simple: Toma un número finito de valores y, puede escribirse como una combinación lineal de funciones caracticas de conjuntos Medibles.

- Como los E_n son disjuntos, $F(x) = \alpha_n$ si $x \in E_n$ (no puede estar en más de uno)
  - $\rightarrow$ cada valor de α_n se asocia a un subconjunto E_n del dominio E.
  - $\rightarrow$ La función es constante en cada E_n, igual a α_n

Ej, $E=[0,1]\subseteq\mathbb{R}$, $F(x)=\begin{cases}1 & x\in[0,1/2)\\ 2 & x\in[1/2,1]\end{cases}$ → Es simple porque, la partición de E, los E_n son disjuntos dos a dos

1. Toma solo dos valores, $\alpha_1=1$ y $\alpha_2 (2)$ (finitos)
2. La partición de E es $E_1=[0,1/2)$ y $E_2=[1/2,1]$
3. Se puede escribir como $F(x)=1\chi_{E_1}(x)+2\chi_{E_2}(x)$

⇝ Si los E_n son intervalos, la F se dice escalonada

$$\boxed{F \text{ simple} \Leftrightarrow \operatorname{Im} F \text{ es un conj finito}}$$ ⇝ Porque toma finitos valores

⇒) si $F=\sum_{n=1}^{N}\alpha_i\chi_{E_i} \Rightarrow \operatorname{Im}F=\{\alpha_1,\dots,\alpha_N\}$

⇐) si $\operatorname{Im}F=\{\underbrace{B_1,\dots,B_m}_{\text{distintos}}\}$, $E_n=\{x\in E, F(x)=B_n\} \Rightarrow F=\sum_{n=1}^{N}B_i\cdot\chi_{in}$

Obs: Una función simple $F:E\to\mathbb{R}$ siempre se puede pensar como definida en todo $\mathbb{R}$, extendiéndola para que valga 0 fuera de E. La extensión sigue sigue siendo simple porque a lo sumo agregamos un elemento a la imagen.

⇝ Porque ponemos que valga cero fuera de E.

$F:E\to\mathbb{R}$ simple, $\tilde{F}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ / $\tilde{F}(x)=\begin{cases}F(x) & x\in E\\ 0 & x\notin E\end{cases}$, $\tilde{F}$ simple

Sigue siendo simple porque como F(x) tiene imagen finita por ser simple, al mandar los demás al cero, solo le estoy agregando un elemento a la imagen, si es que no estaba.

Obs: si F y g son simples y $s,t\in\mathbb{R}\Rightarrow sF+tg$ simple
(Combinación lineal de simples, es simple)

F es simple medible, si cada E_n es medible (E tiene que ser medible)

F Medible

Sean $E\in\mathcal{M}$ y $F:E\to\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ (F puede valer $+\infty$ o $-\infty$ en algunos puntos)
Decimos que F es medible si para todo $a\in\mathbb{R}$ el conjunto

$$\{x\in E: F(x)\le a\}=F^{-1}((-\infty,a])$$ (Preimagen medible)

es medible

- $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continua ⇒ F es medible
- $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ creciente ⇒ F es medible
- $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ decreciente ⇒ F es medible
- F es simple medible ⇒ es medible
- $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ monótona ⇒ F es medible

Prop Sea E medible y $F: E \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ - son equivalentes,

(a) F es medible ($\forall a \in \mathbb{R}, \{x \in E : F(x) \leq a\}$ es medible)

(b) $\forall a \in \mathbb{R}, \{x \in E : F(x) < a\}$ es medible (union) $\{\bigcup_n \{x \in E / F(x) \leq a - 1/n\}$
$F(x) < a \Leftrightarrow \exists n / F(n) \leq a - 1/n$

(c) $\forall a \in \mathbb{R}, \{x \in E : F(x) \geq a\}$ es medible $\to$ complemento

(d) $\forall a \in \mathbb{R}, \{x \in E : F(x) > a\}$ es medible $\to$ complemento, union.

$\to$ son equivalentes porque la medibilidad de una función puede caracterizarse usando cualquier tipo de intervalo (cerrado, abierto, semiabierto).

Propiedades

1. F, g medibles $\Rightarrow F+g$ es medible (combinación lineal de medibles es medible)
2. F, g medibles $\Rightarrow F \cdot g$ es medible (Producto de medibles es medible)
3. (F_n) suc. de funciones medibles, $F(x) = \inf_n F_n(x)$, $g(x) = \sup_n F_n(x)$ (x Fijo) son medibles
(supremo e infimo de una suc de funciones medibles es medibles)
4. (F_n) medible, $\exists \lim_{n \to \infty} F_n(x) = F(x) \Rightarrow F$ es medible.
(Limite puntual de una suc. de funciones medibles es medible)

Teorema - Teo de Aproximación por Funciones Simples.

Sea $F: E \to [0, +\infty]$ medible, Entonces, existe una sucesión creciente $(F_n)_n$ de funciones simples no negativas que converge puntualmente a F en E:

$$0 \leq F_n(x) \leq F_{n+1}(x) \quad \forall x \in E \; n \in \mathbb{N} \quad y \quad F(x) = \lim_{n \to \infty} F_n(x) \; \forall x \in E. \; (*)$$

Si F es acotado, la sucesión converge a F uniformemente en E.

$\to$ se puede aproximar a una función, por funciones simples
(*) las funciones se aproximan a la F, por abajo

¿Que quiere decir el Teorema? sea F una función que toma valores positivos $[0, +\infty]$

- Puedo construir una familia de funciones simples que se parecen cada vez más a F.
- Estas funciones simples son como escaleras que van subiendo para acercarse a F
- Cada nueva función en la sucesión es más precisa que la anterior y nunca baja de valor
- Al final estas funciones se juntan tanto a F que, en cada punto, su valor coincide exactamente con el de F

$\to$ Cualquier función medible no negativa puede ser aproximada por funciones muy sencillas (escalonadas) que van mejorando paso a paso

- Si la función no se dispara al infinito (es acotada), la aproximación es perfecta en todos lados al mismo tiempo.

Casi todo punto - CTP $\rightarrow$ Vale en CTP si el conjunto de los x en los que no vale tiene medida 0

Integración

Integral de Lebesgue de funciones simples

$E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$, E_i medible

Sea $\{E_i\}_{i=1}^{n}$ una partición medible de E y $F: E \rightarrow \mathbb{R}$ una función simple dada por $F(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}(x)$. Definimos la Integral de Lebesgue de F como

$$\int_E F \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(E_i)$$

(Base E_i, "altura" α_i)

Idea $\rightarrow$ Suma bloques horizontales ponderados por medida

- La función simple F es constante en cada subconjunto E_i (con valor α_i)
- La integral "suma" los valores α_i ponderados por el "tamaño" (medida) de los conjuntos E_i donde F toma ese valor $\rightarrow$ (se multiplica por la medida del conjunto donde la función vale α_i)
- Riemann divide el eje x en particiones. Acá, en Lebesgue, se divide el eje Y (los valores que toma F) en niveles (los α_i)
- Para cada valor α_i, se mide el conjunto E_i donde $F(x) = \alpha_i$ $\quad \chi_{E_i} = \begin{cases} 1 & x \in E_i \\ 0 & x \notin E_i \end{cases}$
- Se suman los α_i multiplicados por la medida $\mu(E_i)$

Propiedades Sean $F, g: E \rightarrow \mathbb{R}$ funciones simples y $a, b \in \mathbb{R}$. Entonces:

(a) Linealidad: $\int_E aF + bg \, d\mu = a\int_E F \, d\mu + b\int_E g \, d\mu$

(b) Monotonía: si $F \leq g$ en E, $\int_E F \, d\mu \leq \int_E g \, d\mu$

(c) $\left|\int_E F \, d\mu\right| \leq \int_E |F| \, d\mu$

Integral de Lebesgue de funciones no negativas

Sea $F: E \to [0, +\infty]$ (la funcion puede tomar el valor $+\infty$) medible.
Definimos la integral de Lebesgue como

$$\boxed{\int_E F\,d\mu := \sup\left\{ \int_E \varphi\,d\mu : \varphi \text{ es simple y } 0 \leq \varphi \leq F \right\}}$$

supremo de las integrales de las funciones simples que están por debajo de F

→ obs: el supremo puede ser $+\infty$

DEF Sea $F \geq 0$ medible. Decimos que F es integrable en E si $\int_E F d\mu < +\infty$

Teorema

Sean $F, g : E \to [0, +\infty]$ medibles. Entonces, tiene las sigs propiedades

1. Si $0 \leq F \leq g$ en $E \Rightarrow \int_E F d\mu \leq \int_E g\, d\mu$ (Monótona)
2. Si $\int_E F d\mu < \infty \Rightarrow F < \infty$ en casi todo punto de E (Si tengo una función que vale $+\infty$ en algún conjunto no nulo, su integral no puede ser finita)
3. Si $A \subseteq E$, $A \subseteq \mathcal{M} \Rightarrow \int_A F d\mu \leq \int_E F d\mu$ (Monotonía respecto de los conjuntos sobre los que integro)

Teorema de la Convergencia Monótona

Sea $(F_n)_{n \in \mathbb{N}} : E \to [0, +\infty]$, una sucesión de funciones medibles tales que $0 \leq F_n \leq F_{n+1}$ (son positivas y crecientes) $\forall n \in \mathbb{N}$.

Si $F = \lim_{n \to \infty} F_n$ entonces $\int_E F d\mu = \lim_{n \to \infty} \int_E F_n d\mu$

$\int \lim F_n d\mu$

$$\int_E F d\mu = \int_E \lim F_n d\mu$$

conmutan. Cambio, límite con integral

→ ¿Qué dice?

- Bajo monotonía y no-negatividad, el límite de las integrales, es la integral del límite, (en general no pasa)

Prop.

Sea $F \geq 0$ medible definido en E. Entonces:

$$\boxed{\int_E F d\mu = 0 \iff F = 0 \text{ en CTP de } E}$$

Teo → La integral de la serie, es la serie de las integrales

Sea $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles definidas en E, tales que $F_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ (son todas ps). Entonces

$$\int_E \sum_{n=1}^{+\infty} F_n\, du = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_E F_n\, d\mu$$

(Se prueba con convergencia Monótona y linealidad)

Limite inferior y superior

Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Definimos el límite inferior de $(a_n)_n$ como

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq n} a_k$$

$\inf\{a_1, a_2 \dots\}$
$\inf\{a_2, a_3 \dots\}$ (*)
$\inf\{a_3, \dots\}$

miro todas las colas y luego tomo supremo

(*) son conjuntos autocontenidos que van creciendo forman una sucesión creciente.

Definimos el límite superior de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como

$$\limsup_{n\to+\infty} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} a_k$$

$\Rightarrow$ misma idea, el supremo no decreciendo

Siempre existen y $\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n \Leftrightarrow \exists \lim_{n\to+\infty} a_n$

Lema de Fatou

Sea $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles definidas en E, tales que $F_n \geq 0$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Entonces

$$\boxed{\int \liminf_{n\to+\infty} F_n \, d\mu \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_E F_n \, d\mu}$$

Teorema de la Convergencia Dominada

Sea $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles definidas en E tales que $F_n \geq 0$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Supongamos que $F = \lim_{n\to+\infty} F_n$ y que existe una función ϕ medible definida en E tal que $F_n \leq \phi$ en E para todo $n\in\mathbb{N}$
es dominada porque tengo una F que es más grande
Si $\int_E \phi \, d\mu < \infty$. Entonces

$$\lim_{n\to+\infty} \int_E F_n \, d\mu = \int_E F \, d\mu$$

$$F = \lim_{n\to+\infty} F_n$$

Enunciado de clase

Sea $(F_n)_n : E \to \mathbb{R}\cup\{-\infty, +\infty\}$ medibles / $F_n \to F$. Si $\exists\, \phi$ integrable tq $|F_n| \leq \varphi \;\; \forall n\in\mathbb{N}, \forall x$

$$\Rightarrow \int_E F \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E F_n \, d\mu$$

Teorema: Continuidad absoluta de la integral

Sea $F \geq 0$ medible definida en E tal que $\int_E F\,d\mu < \infty$. Entonces, dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ tq

$$\text{si } A \subseteq E \text{ es medible con } \mu(A) < \delta \Rightarrow \int_A F\,d\mu < \varepsilon$$

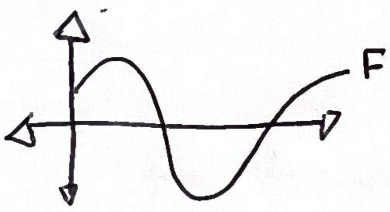
⤳ la integral depende de la medida del conjunto A y no de su forma o ubicación.
La integral es "absolutamente continua" en el sentido de que su valor puede controlarse uniformemente haciendo la medida de A suficientemente pequeña

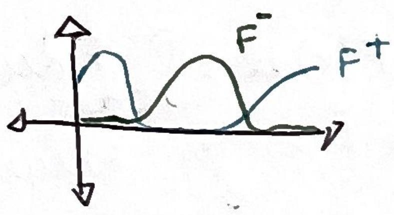
¿Cómo integramos funciones que cambian de signo?

Sea F medible

- $F^+ = \max\{F, 0\} = \begin{cases} F(x) & \text{si } F(x) \geq 0 \\ 0 & \text{si } F(x) < 0 \end{cases}$ ⤳ No pasa todo para arriba (eso es tomar módulo), sino que nos quedamos con la parte positiva y sino, vale cero

- $F^- = -\min\{F, 0\} = \max\{-F, 0\} = \begin{cases} 0 & \text{si } F(x) \geq 0 \\ -F(x) & \text{si } F(x) < 0 \end{cases}$ ⤳ lo mismo, pero lo "espejo"





- F^+ y F^- son medibles (porque son el máximo de dos medibles)
- $F^+ \geq 0$ y $F^- \geq 0$ (Ambas son positivas)
- $F = F^+ - F^-$ (Así recuperamos F)
- $|F| = F^+ + F^-$

Sea F medible. Decimos que $\int_E F\,d\mu$ existe si

$$\int_E F^+\,d\mu < +\infty \quad o \quad \int_E F^-\,d\mu < -\infty$$

En este caso, definimos

$$\boxed{\int_E F\,d\mu = \int_E F^+\,d\mu - \int_E F^-\,d\mu}$$ ⤳ $F = F^+ - F^-$

⤳ Decimos que una función F es integrable en E si $\left|\int_E F\,d\mu\right| < \infty$
Es decir si $\underbrace{\int_E F^+ < \infty \text{ y } \int_E F^- < \infty}_{\text{la integral existe.}}$ existen y son un número finito.

Propiedades Sean $F, g : E \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ medibles

1. Si $\exists \int_E F d\mu \Rightarrow \left| \int_E F d\mu \right| \leq \int_E |F| d\mu$
2. F es integrable $\Leftrightarrow |F|$ lo es
3. Si F es integrable $\Rightarrow F$ es finita en CTP de E
4. Si $F \leq g$ en CTP de E y sus integrales existen $\Rightarrow \int_E F d\mu \leq \int_E g d\mu$
5. Si $\exists \int_E F d\mu$ y $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \int_E \lambda F d\mu = \lambda \int_E F d\mu$
6. $E = A \dot{\cup} B \Rightarrow \int_E F d\mu = \int_A F d\mu + \int_B F d\mu$
7. Si F, g integrables $\Rightarrow F+g$ integrable y $\int_E F+g \, d\mu = \int_E F d\mu + \int_E g d\mu$

- Ahora el Teorema de Convergencia Monótona cambia la hipótesis de $0 \leq F_n \leq F_{n+1}$ porque simplemente está acotado por una función integrable, $\varphi \leq F_n \leq F_{n+1}$ (creciente). También puede ser decreciente.

Teorema Riemann $\Rightarrow$ Lebesgue

Si $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, integrable Riemann
$\Rightarrow F$ es integrable y $\int_a^b F(x) dx = \int_{[a,b]} F d\mu$

$\rightsquigarrow$ es decir, si es integrable Riemann, entonces es integrable Lebesgue y sus integrales coinciden

---

Lo más importante

1. F es medible si $F^{-1}\{(a, +\infty)\}$ es medible $\forall a \in \mathbb{R}$
2. F es integrable si es medible y $\int_{\mathbb{R}} |F| d\mu < \infty$ (finito)
3. F es integrable en un subconjunto $E \subseteq \mathbb{R}$ si $F \chi_E$ es integrable
4. TEO (Monótona) $(F_n)_n$ medibles, $0 \leq F_1 \leq F_2 \leq \dots \leq F_n \leq F_{n+1} \leq \dots$
   $F_n \to F$ CTP $\Rightarrow F$ medible y $\int F_n d\mu \to \int F d\mu$
5. TEO (Dominada) $(F_n)_n$ medibles, $F_n \to F$ CTP. Si $\exists \varphi$ integrable tal que
   $|F_n(x)| = \varphi(x) \; \forall x \in \mathbb{R} \; \forall n \in \mathbb{N}$
   $\Rightarrow F_n, F$ son integrables y $\int F_n d\mu \to \int F d\mu$