CONSTRUCCIÓN DE $\mathbb{R}$

(REF: STOLL, SET THEORY & LOGIC, 3)

IDEA: HAY SUC DE CAUCHY EN $\mathbb{Q}$ QUE NO CONV

⇝ DEFINIR $\mathbb{R} \longleftrightarrow$ SUC DE CAUCHY EN $\mathbb{Q}$, IDENTIFICANDO AQUELLOS QUE "SE PEGUEN".

PARTIMOS DE $\mathbb{Q}$.

- ES UN CUERPO ORDENADO: $m/n < m'/n'$ SI (DEF) $m'n - mn' \in \mathbb{N}$; SE CUMPLE:

$$a<b \Rightarrow a+c<b+c\,;\ \pm\cdot\pm=+,\ y\ \pm\cdot\mp=-.\ (*)$$

- ES UN "ESP. MÉTRICO", VÍA: $|x|:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}_{\geq 0}$

$$|x|=\begin{cases} x, & x\geq 0\\ -x, & x<0\end{cases}$$

SEA $A=\{(a_n)\subseteq\mathbb{Q} : (a_n)$ DE CAUCHY$\}$

1/N EN VEZ DE ε

⇝ A ES UN ANILLO: TENEMOS OPERACIONES

- $a+b=(a_n+b_n)$
- $a\cdot b=(a_n b_n)$ ⇝ DE CAUCHY PUES CAUCHY ⇒ ACOT, Y CAUCHY · ACOT ⇒ CAUCHY

QUE CUMPLEN...

1/N...

DENOTAMOS $m = \{ a \in A : \exists \lim_{n} a_n = 0 \}$;

ES UN IDEAL: CERRADO POR $+$, Y CUMPLE QUE $ab \in m$ SI $a \in A$, $b \in m$.

DADAS $a, b \in A$ DECIMOS QUE $a \sim b$ SI $a - b \in m$; ES UNA REL DE EQUIVALENCIA

OBS: m ES UNA CLASE DE EQUIV. ES DECIR, SI $a \in m$, $b \sim a$ SII $b \in m$.

DEF: $\mathbb{R} = A/\sim$.

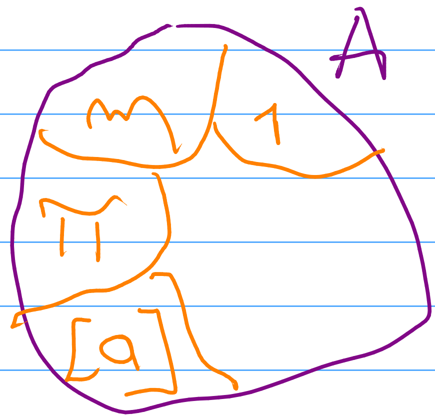
PARA $a \in A$, DENOTAMOS

$$[a] = \{ a + x : x \in m \} \in \mathbb{R}$$

$\rightsquigarrow$ CLASE DE EQUIV. DE a

ESPECIALMENTE, TENEMOS

$$0 = m = [(0, 0, \dots)]$$
$$1 = [(1, 1, \dots)]$$
$$\pi = [(3, 3.1, 3.14, \dots)]$$



$\rightsquigarrow$ $\mathbb{R}$ ES SOLO UN CONJ; QUEREMOS HACERLO UN CUERPO ORDENADO COMPLETO.

DEF: DADOS $[a], [b] \in \mathbb{R}$

- $[a] + [b] = [a+b]$
- $[a] \cdot [b] = [a \cdot b]$

} BIEN DEF: USAR m IDEAL

PROP: $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ES UN CUERPO

DEM:
- NEUTRO PARA $+$: 0
- NEUTRO PARA $\cdot$: 1

INVERSOS PARA $\cdot$: BVQ SI $a \notin m$,

$(\exists n_0 \in \mathbb{N})\ a_n \neq 0 \ \forall n \geq n_0$ (VER PRÓXIMA PROP)

$\leadsto$ SI $b = (*, \dots, *, a_{n_0}^{-1}, a_{n_0+1}^{-1}, \dots)$, $[a][b] = 1$

$\downarrow$ LUGAR n_0

PROP/DEF: $a \in A$. SUP $a \notin m$.

ENTONCES O BIEN $(\exists n_0)\ a_n > 0 \ \forall n \geq n_0$ (EN CUYO CASO DECIMOS QUE $a > 0$), O BIEN $(\exists n_0)\ a_n < 0 \ \forall n \geq n_0$ (ECCDQ $a < 0$)

DEM: COMO $\neg(\lim a_n = 0)$, $(\exists N)\ (\exists (a_{n_k}))$

$|a_{n_k}| \geq 1/N \ \forall k$. LUEGO $(\exists (a_{n_{k_l}}))$

$a_{m_{k_\ell}} \geq 1/N \ \forall \ell$ ó $(\exists (a_{m_{k_\ell}}))$

$a_{m_{k_\ell}} \leq -1/N \ \forall \ell$; SUP LO PRIMERO

TOMO m_0 CON $|a_n - a_m| < 1/N \ \forall n, m \geq m_0$.

ASÍ $a_n = \underbrace{a_n - a_{m_{k_\ell}}}_{> -1/N} + \underbrace{a_{m_{k_\ell}}}_{> 1/N} > 0, \ n \geq m_0$

$(m_{k_\ell} \geq m_0)$

$\boxtimes$

PARA $a, b \in A$ DECIMOS QUE $a < b$ SI $b - a > 0$.

PROP: $(A, >)$ ES UN ANILLO ORDENADO

(EJERCICIO, USANDO QUE $\mathbb{Q}$ LO ES...)

DEF: $[a] < [b]$ SI $b - a > 0$

(BIEN DEF: $A \ni x > 0, \ y \in m \Rightarrow x + y > 0$)

PROP: $(\mathbb{R}, <)$ ES UN CUERPO ORDENADO.

(EJERCICIO, USANDO QUE A LO ES...)

DEF: $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0. \\ -x, & x < 0. \end{cases}$

PROP: SEAN $x, y \in \mathbb{R}$.

i) $|x| = 0$ SII $x = 0$

ii) $|xy| = |x||y|$

iii) $|x+y| \leq |x| + |y|$

DEM: SEPARAR EN CASOS, USAR LA PROP ANTERIOR $\boxtimes$

$\rightsquigarrow$ $(\mathbb{R}, d)$ ES UN ESP. MÉTRICO, CON

$d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $d(x,y) = |x-y|$

PROP: SEA $i : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, $q \mapsto [(q, q, \dots)]$. ENTONCES i ES INYECTIVA Y:

- RESPETA $+, \cdot$ (IE, ES MORFISMO)
- RESPETA $|\cdot|$ (IE, ES ISOMETRÍA)
- RESPETA $>$

DEM: $(q, q, \dots) \in m \Rightarrow q = 0$. $\boxtimes$

$\rightsquigarrow$ PENSAMOS DIRECTAMENTE $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

PROP: SEA $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. ENTONCES $(\exists N \in \mathbb{N})$ CON $\varepsilon > 1/N$

DEM: VER PROP DE ARRIBA: VALE EN A $\boxtimes$

CORO: $\mathbb{N}$ NO ESTÁ ACOT SUP. EN $\mathbb{R}$.

PROP: $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$

DEM: SEA $[a] \in \mathbb{R}$. SEA $N \in \mathbb{N}$

TOMEMOS m_0 CON $|a_n - a_m| < 1/N$ $\forall m \geq m_0$.

SI $q = (a_{m_0}, a_{m_0}, \dots)$, ENTONCES $[q] \in \mathbb{Q}$

Y $|[q] - [a]| < 1/N$: $1/N \pm (a - q) > 0$

SII $1/N \pm (a_m - a_{m_0}) > 0$, $m \gg 0$ $\boxtimes$

TEO: $(\mathbb{R}, d)$ ES UN ESP. MÉTRICO COMPLETO.

LEMA: $D \subseteq E$ DENSO. SI TODA SUC. DE CAUCHY EN D CONVERGE EN E, E ES COMPLETO.

(EJERCICIO...)

DEM (DEL TEO): SEA $(i(q_m)) \subseteq i(\mathbb{Q})$ CAUCHY.

COMO i ES ISOMETRÍA, $q = (q_n) \subseteq \mathbb{Q}$

ES DE CAUCHY. AFIRMO: $i(q_n) \to [q]$.

EN EFECTO,

$$1/N \pm (q_n - q_m) > 0 \quad \text{SI } n, m \geq n_0$$

TEO: SI $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ ES ACOT SUP, TIENE UN SUPREMO.

DEM: ALGORÍTMICAMENTE, TOMEMOS b COTA SUPERIOR DE A, $a \in A$.

- SI $b = a$, LISTO: $b = \max A \ (= \sup A)$
- SI $a < b$, PONEMOS $p = \frac{a+b}{2}$.
- SI p ES COTA SUP, DEVOLVEMOS (a, p)
- SI NO TENEMOS $a' \in A$ CON $a' > p$.

  DEVOLVEMOS (a', b)

ITERAMOS; SI NO PARA, TENEMOS $(a_n) \subseteq A$
$(b_n) \subseteq \mathbb{R}$ CON

- $a_n \leq a_{n+1}$, $b_{n+1} \geq b_n$, $a_n \leq b_n$.

- $\lim_{n} b_n - a_n = 0$ $\left(b_n - a_n \leq \frac{b-a}{2^n}\right)$
- (a_n) ES DE CAUCHY: SUP $m \geq n$. ASÍ

$0 \leq a_m - a_n \leq b_n - a_n < \frac{b-a}{2^n}$

- (b_n) ES DE CAUCHY: ÍDEM

$\rightsquigarrow$ SEA $s = \lim a_n$ $(= \lim b_n)$

- s ES COTA SUP: $s < a \leq b_n \Rightarrow s < s$
- s ES LA MEJOR: $a_n \leq s' < s \Rightarrow s < s$

$\boxtimes$