PROGRAMACIÓ CIENTÍFICA. COMPLEXITAT ALGORÍSMICA I EQUACIONS DE RECURRÈNCIA.

Considerem la solució (recursiva) al problema de les torres de Hanoi : per a resoldre el problema amb n discs cal resoldre dos problemes amb $n-1$ discs i fer un moviment d'un disc. Per tant, podem plantejar el problema matemàtic de calcular quans moviments ens calen :

$$T_n = 2T_{n-1} + 1, \quad T_1 = 1$$

i volem obtenir una expressió explícita del tipus $T_n = f(n)$. De forma genèrica podem estudiar les equacions de recurrència lineals a coeficients constants

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_m a_{n-m} + g(n). \quad \forall n \geq m$$
$$a_0 = b_0, \quad a_1 = b_1, \quad \cdots \quad a_{m-1} = b_{m-1} \quad (**)$$

Si $g(n) \equiv 0$ es diu equació homogènia. Per a resoldre les equacions homogènies es considera el polinomi característic associat a l'equació :

$$q(x) = x^m - c_1 x^{m-1} - c_2 x^{m-2} - \cdots - c_m$$

Si $q(x) = (x-r_1)^{e_1}(x-r_2)^{e_2}\cdots(x-r_k)^{e_k}$ (r_i és arrel de $q(x)$ amb multiplicitat e_i) la solució general de l'equació homeogènia és

$$a_n = p_1(n) r_1^n + p_2(n) r_2^n + \cdots + p_k(n) r_k^n$$

on els $p_i(n)$ són polinomis de grau $e_i - 1$ amb coeficients a determinar per a les condicions inicials $(**)$ de la recurrència. Per a resoldre les equacions no homogènies cal fer :

a) Trobar la solució H_n de l'equació homogènia associada (sense imposar condicions inicials).
b) Trobar una solució particular P_n de la solució no homogènia (sense imposar condicions inicials).
c) La suma $H_n + P_n$ és la solució general de l'equació no homogènia.
d) Trobar els coeficients dels $p_i(n)$ imposant les condicions donades.

Com es pot trobar la solució particular P_n ?

$g(n)$		P_n
cr^n	$q(r) \neq 0$	kr^n
	$q(r) = 0($ multiplicitat $s)$	$kn^s r^n$
$Q(n)r^n$	$q(r) \neq 0$	$\left(k_0 + k_1 n + \cdots + k_t n^t\right) r^n$
	$q(r) = 0($ multiplicitat $s)$	$n^s \left(k_0 + k_1 n + \cdots + k_t n^t\right) r^n$
$Q(n)$	$k_0 + k_1 n + \cdots + k_t n^t$	
	$q(1) \neq 0$	$n^s \left(k_0 + k_1 n + \cdots + k_t n^t\right)$

Exemple 1 : (Torres de Hanoi)

$T_n = 2T_{n-1} + 1, T_1 = 1$
Polinomi característic $q(x) = x - 2$, aleshores $H_n = K2^n$.
Busquem $P_n = A, A = 2A + 1 \longrightarrow A = -1$.
Així $T_n = K2^n - 1$, i imposant $T_1 = 1$ tenim $1 = 2K - 1 \longrightarrow K = 1$.
Per tant, per a resoldre el problema de les torres de Hanoi amb n discs calen $T_n = 2^n - 1$ moviments.

Exemple 2 : (Nombres de Fibonacci)

$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}, \quad x_0 = 0, x_1 = 1$

Polinomi característic $q(x) = x^2 - x - 1$, amb arrels $x_i = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$, aleshores

$$x_n = K_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + K_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

i imposant $x_0 = 0$ i $x_1 = 1$ s'obté $K_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ i $K_2 = \frac{-1}{\sqrt{5}}$ i tenim l'expressió

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Exemple 3

$x_n = -4x_{n-1} - 4x_{n-2} + n^2, \quad x_0 = 0, x_1 = 2$

Polinomi característic $q(x) = x^2 + 4x + 4$ amb arrel doble $\alpha = -2$, aleshores $H_n = (k_0 + k_1 n)\,(-2)^n$.

Com $g(n) = n^2$ i $q(1) \neq 0$ busquem una solució particular del tipus $P_n = An^2 + Bn + C$; substituint a l'equació

$$An^2 + Bn + C = -4\left[A(n-1)^2 + B(n-1) + C\right] - 4\left[A(n-2)^2 + B(n-2) + C\right] + n^2$$

Igualant els coeficients dels monomis en n :

$$\left.\begin{array}{lc} n^2 & 9A = 1 \\ n & 9B - 24A = 0 \\ 1 & -20A + 12B - 9C = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow A = \frac{1}{9}, B = -\frac{24}{81}, C = \frac{4}{27}$$

per tant $P_n = \frac{1}{9}n^2 + \frac{24}{81}n + \frac{4}{27}$.

La solució general serà

$$H_n + P_n = (k_0 + k_1 n)\,(-2)^n + \frac{1}{9}n^2 + \frac{24}{81}n + \frac{4}{27}$$

i si imposem les condicions inicials s'obté $k_0 = -\frac{4}{27}, k_1 = -\frac{6}{81}$; aleshores la solució al nostre problema és

$$x_n = \left(-\frac{4}{27} - \frac{6}{81}n\right)(-2)^n + \frac{1}{9}n^2 + \frac{24}{81}n + \frac{4}{27}$$

Exemple 4 : (Determinant)

Per a calcular el determinant d'orde $n+1$ cal calcular $n+1$ determinants d'orde n i fer $2n$ operacions $(+, \times)$

$d_{n+1} = (n+1)d_n + 2n, \quad d_1 = 1$ (No és a coeficients constants!! Però és d'ordre 1)

Es defineix $D_n = \frac{d_n}{n!}$ i l'equació es transforma en

$$\frac{d_{n+1}}{(n+1)!} = \frac{(n+1)d_n}{(n+1)!} + \frac{2n}{(n+1)!}; \quad D_{n+1} = D_n + \frac{2n}{(n+1)!}$$

com el terme no homogeni no és cap potència (o polinomi per potència) cal trobar altres maneres de resoldre-la :

$D_{n+1} - D_n = \frac{2n}{(n+1)!}$, i $D_n - D_1 = \sum_{k=1}^{n-1}(D_{k+1} - D_k) = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{2k}{(k+1)!}$. I tornant escriure en termes de $d_i \frac{d_n}{n!} = d_1 + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{2k}{(k+1)!}$;

$$d_n = n!\left(1 + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{2k}{(k+1)!}\right)$$

EXERCICIS

Resoleu les següents equacions de recurrència, trobant la solució general (quedarà en funció de les condicions inicials) o la solució que compleix les condicions inicials si s'especifiquen.

a) $x_{n+3} = 2x_{n+2} + 5x_{n+1} - 6x_n$; amb $x_0 = 9, x_1 = -18, x_2 = 66$.

sol : $x_n = 3(3)^n - 5 + 11(-2)^n$.

b) $x_{n+4} = 8x_{n+2} - 16x_n$; amb $x_0 = -1, x_1 = 8, x_2 = 4, x_3 = 16$.

sol : $x_n = 2^{n+1} + (n-3)(-2)^n$

c) $x_n = 5x_{n-1} - 6x_{n-2} + n3^n$; amb $x_0 = 1, x_1 = 2$.

sol : $x_n = \left(\frac{3}{2}n^2 - \frac{9}{2}n + 9\right)3^n - 2^{n+3}$

d) $x_n = -3x_{n-1} - 2x_{n-2} + (-1)^n$; amb $x_0 = 2, x_1 = -3$.

sol : $x_n = n(-1)^{n+1} - (-2)^{n+1}$

e) $2x_{n+2} - 3x_{n+1} + x_n = n^2 - 4n + 3$.

sol : $x_n = c_1 + c_2 2^{-n} + \frac{1}{3}n^3 - \frac{9}{2}n^2 + \frac{127}{6}n$

f) $3x_{n+4} - 4x_{n+2} + x_n = 3^n(n-1)$.

sol : $x_n = c_1 3^{-n/2} + c_2(-3)^{-n/2} + c_3(-1)^n + c_4 + 3^n\left(\frac{1}{208}n - \frac{52}{11041}\right)$

Mireu la taula de la primera pàgina per a buscar solucions particulars de les equacions no homogènies en funció del tipus de terme no homogeni.