



UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN LUIS  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS Y NATURALES  
INGENIERÍA ELECTRÓNICA CON O.S.D.

**Asignatura:**

# Comunicaciones I

## Trabajo Practico N° 2

### **“Multipath, interferencias, ruido - Señales y Procesos Aleatorios”**

**Estudiantes:**

Marcos Lucero  
Nahuel Ramires  
Agustín Cappiello

**Profesores Responsables:**

Alejandro Marwan Geraiges Magrini.  
Roberto Kiessling.

**Año:**

2025

## Índice

1. Actividad 1	1
2. Actividad 2	4
3. Actividad 3	5
4. Actividad 4	8
5. Actividad 5	12
6. Actividad 6	14
7. Actividad 7	17
8. Actividad 8	18

### 1. Actividad 1

Una antena transmisora emite una señal cosenoidal  $x(t) = A \cos(2\pi f_t t)$ , donde  $A = 17\text{ W}$  y  $f_t = 532\text{ kHz}$ . La antena receptora capta dos señales provenientes de dicha antena transmisora. La primera de ellas recorre el camino directo, con una distancia recorrida  $D_1$ . Mientras que la segunda, debido a una reflexión en un obstáculo, recorre una distancia  $D_2$ . Ambas señales sufren distintas atenuaciones, se suponen que son también aproximadamente cosenoidales y que viajan a la velocidad de la luz en el vacío, no sufriendo ninguna distorsión en su recorrido. Para el ejercicio debe considerarse los siguientes valores de atenuación y distancia:

$$\begin{array}{ll} A_1 = 10\% & A_2 = 25\% \\ D_1 = 11\text{ km} & D_2 = 14,5\text{ km} \end{array}$$

a) Si las señales recibidas se suman en la antena receptora. ¿Cuál es el resultado de esto? Graficar.

Las señales recibidas se expresan de la siguiente manera:

$$y_1(t) = 0,9 \cdot 17 \cos(2\pi f_1(t - \tau_1))$$

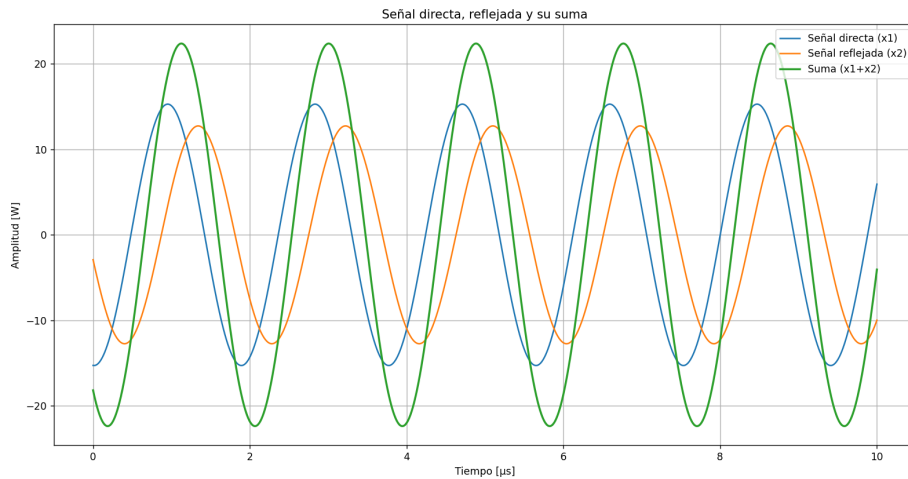
$$y_2(t) = 0,75 \cdot 17 \cos(2\pi f_1(t - \tau_2))$$

donde los retardos temporales son calculados como:

$$\tau_1 = \frac{D_1}{c} = \frac{11000}{3 \times 10^8} = 36,67 \mu s$$

$$\tau_2 = \frac{D_2}{c} = \frac{14500}{3 \times 10^8} = 48,33 \mu s$$

La señal resultante es la suma de la señal transmitida por un camino directo y de la señal reflejada  $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$



**Figura 1:** Señal resultante a 532 kHz.

En la Fig. 1 se observa la señal cosenoidal transmitida en su camino directo y reflejado, la suma de las dos es la que llega a la antena receptora. Como se observa, tienen diferente amplitud y fase debido a las atenuaciones y un retardo temporal por las diferentes distancias.

**b) Suponer ahora que la frecuencia aumenta a 600 kHz. ¿Qué sucede? Graficar.**

Hay dos trayectorias:

$$D_1 = 11 \text{ km} \quad D_2 = 14,5 \text{ km.}$$

La diferencia es:

$$\Delta D = D_2 - D_1 = 3,5 \text{ km} = 3500 \text{ m.}$$

El retardo entre ambas:

$$\Delta \tau = \frac{\Delta D}{c} = \frac{3500}{3 \cdot 10^8} \approx 1,1667 \times 10^{-5} \text{ s.}$$

La diferencia de fase entre ellas es:

$$\Delta \varphi = 2\pi f \Delta \tau.$$

Las dos señales quedan en fase cuando su diferencia de fase es un múltiplo entero de  $2\pi$ :

$$\Delta \varphi = 2\pi n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$2\pi f \Delta \tau = 2\pi n \implies f = \frac{n}{\Delta \tau}.$$

Para  $\Delta \tau = 1,1667 \times 10^{-5} \text{ s}$ :

$$f_n = \frac{n}{1,1667 \times 10^{-5}}.$$

Para  $n = 7$ :

$$f_7 = \frac{7}{1,1667 \times 10^{-5}} = 600 \text{ kHz.}$$

A  $f = 600 \text{ kHz}$  la diferencia de fase es:

$$\Delta\phi = 2\pi f \Delta\tau = 2\pi \cdot 600000 \cdot 1,1667 \times 10^{-5} = 2\pi \cdot 7 = 14\pi,$$

que es exactamente 7 ciclos completos de diferencia. Por lo tanto, las señales quedan en fase. Por lo tanto, la señal resultante se observa en la Fig. 2.

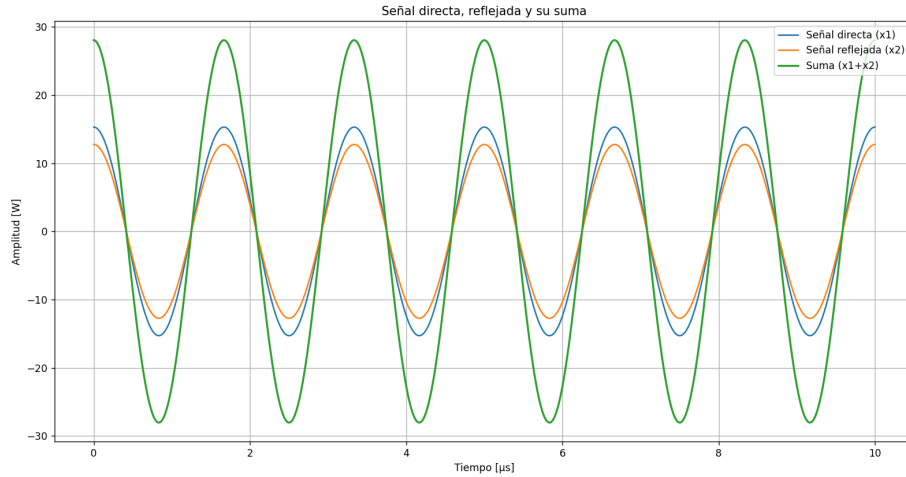


Figura 2: Señal resultante a 600 kHz.

**c) Suponer que las señales sufren la misma atenuación. ¿Existe alguna frecuencia a la cual la señal recibida sea nula? Explicar el concepto.**

Cuando ambas señales sufren la misma atenuación, sus amplitudes se igualan, creando las condiciones ideales para que ocurra **interferencia destructiva total**. Para que la señal recibida sea nula, deben cumplirse dos condiciones fundamentales:

1. **Igualdad de amplitudes:**  $A_1 = A_2$
2. **Desfase de 180°:**  $\Delta\phi = (2k + 1)\pi$  rad, donde  $k = 0, 1, 2, \dots$

La diferencia de fase entre ambas señales está determinada por la relación:

$$\Delta\phi = 2\pi f \frac{\Delta D}{c}$$

Donde:

- $\Delta D = D_2 - D_1 = 3,5 \text{ km} = 3500 \text{ m}$
- $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$

Para obtener cancelación total:

$$2\pi f \frac{\Delta D}{c} = (2k + 1)\pi$$

Simplificando:

$$2f \frac{\Delta D}{c} = 2k + 1$$

$$f = \frac{(2k + 1)c}{2\Delta D}$$

Calculando las primeras tres frecuencias críticas donde se produce cancelación total:

- $k = 0: f_0 = \frac{3 \times 10^8}{7000} \approx 42,857 \text{ kHz}$
- $k = 1: f_1 = \frac{3 \cdot 3 \times 10^8}{7000} \approx 128,571 \text{ kHz}$
- $k = 2: f_2 = \frac{5 \cdot 3 \times 10^8}{7000} \approx 214,286 \text{ kHz}$

El fenómeno descrito constituye un caso clásico de **interferencia por multitrayectoria** en sistemas de comunicaciones. Las frecuencias en las que se produce cancelación total aparecen equiespaciadas en el dominio frecuencial, formando un patrón periódico cuya periodicidad depende directamente de la diferencia de caminos  $\Delta D$ . Matemáticamente, existe un conjunto infinito y discreto de frecuencias críticas dadas por la expresión:

$$f_k = \frac{(2k+1)c}{2\Delta D}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

donde  $c$  es la velocidad de la luz. Este resultado tiene implicancias directas en el diseño de sistemas de comunicación, donde resulta esencial evitar la transmisión en dichas frecuencias críticas o, alternatively, implementar técnicas de diversidad como el uso de múltiples antenas o saltos en frecuencia para mitigar los efectos adversos de la interferencia por multitrayectoria.

## 2. Actividad 2

En un sistema determinado de comunicaciones, en el que una señal sinusoidal  $x(t) = A \sin(2\pi f t)$  pasa a través de un filtro lineal de fase no constante. La respuesta en frecuencia del filtro es  $H(f) = |H(f)| e^{j\beta(f)}$ , donde  $\beta(f) = -\alpha f$  es la fase dependiente de la frecuencia.

$$\tau_p = \frac{\beta(f)}{2\pi f} \quad \tau_g = -\frac{1}{2\pi} \frac{d\beta(f)}{df}$$

a) Calcular el retardo de fase y retardo de grupo.

$$\tau_p = \frac{\beta(f)}{2\pi f} = \frac{-\alpha f}{2\pi f} = -\frac{\alpha}{2\pi}$$

$$\tau_g = -\frac{1}{2\pi} \frac{d\beta}{df} = -\frac{1}{2\pi} (-\alpha) = \frac{\alpha}{2\pi}$$

b) ¿El retardo de fase y el retardo de grupo es constante o depende de la frecuencia?

Ambos son constantes ya que son independientes de la frecuencia.

c) ¿Qué significa un retardo de grupo constante para la propagación de un paquete de ondas?

Un retardo de grupo constante significa que todas las componentes espectrales del paquete son retrasadas por la misma cantidad de tiempo.

d) ¿Cuál es la diferencia práctica entre el retardo de fase y el retardo de grupo en la transmisión de una señal modulada?

El retardo de fase se refiere al retraso o adelanto que sufre la fase de una componente sinusoidal de frecuencia.

El retardo de grupo determina el retraso de la envolvente o del paquete de señales, por lo tanto es el que importa para la transmisión de información modulada (la moduladora se transporta por la envolvente).

e) Si a la salida del sistema de comunicaciones se obtiene una señal compuesta por múltiples frecuencias, ¿por qué es importante el retardo de grupo para mantener la forma de la señal en la salida del sistema?

Es importante el retardo de grupo cuando una señal está compuesta por múltiples frecuencias porque garantiza que la forma de la señal compuesta (su envolvente) se conserve al pasar por el sistema. Si no es constante, se produce dispersión y distorsión temporal.

### 3. Actividad 3

Se tiene la función de densidad de la Fig. 3

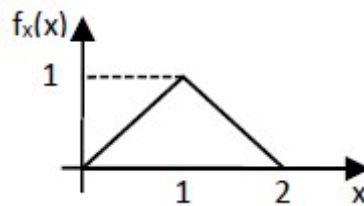


Figura 3: Función de densidad triangular.

La función de densidad se describe analíticamente como:

$$f_X(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2 - x, & 1 < x \leq 2, \\ 0, & \text{otro caso.} \end{cases}$$

**a) Calcular analíticamente la media, la varianza y la desviación estándar.**

La media es:

$$\begin{aligned} \mu_x &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_0^1 x \cdot x dx + \int_1^2 x \cdot (2 - x) dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 (2x - x^2) dx \\ &= \int_0^1 x^2 dx + \left( \int_1^2 2x dx - \int_1^2 x^2 dx \right) = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 + \left( x^2 \Big|_1^2 - \frac{x^3}{3} \Big|_1^2 \right) \\ &= \frac{1}{3} + \left[ (4 - 1) - \left( \frac{8}{3} - \frac{1}{3} \right) \right] = \frac{1}{3} + \left( 3 - \frac{7}{3} \right) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1 \end{aligned}$$

La varianza es:

$$\begin{aligned} \sigma_x^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x)^2 f_X(x) dx = \int_0^1 (x - 1)^2 x dx + \int_1^2 (x - 1)^2 (2 - x) dx \\ &= \int_0^1 (x^2 - 2x + 1)x dx + \int_1^2 (x^2 - 2x + 1)(2 - x) dx \\ &= \int_0^1 (x^3 - 2x^2 + x) dx + \int_1^2 (2x^2 - 4x + 2 - x^3 + 2x^2 - x) dx \\ &= \int_0^1 (x^3 - 2x^2 + x) dx + \int_1^2 (-x^3 + 4x^2 - 5x + 2) dx \\ &= \left[ \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_0^1 + \left[ -\frac{x^4}{4} + \frac{4x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 2x \right]_1^2 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{12} + \left( \frac{2}{3} - \frac{7}{12} \right) - \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$$

Por último, la desviación estandar se calcula como la raíz cuadrada positiva de la varianza  $\sigma_x^2$ , entonces:

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2} = \sqrt{\frac{1}{6}} \approx 0,4082$$

**b) Calcular y graficar la función de distribución acumulada.**

La función de distribución se define como:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^0 f_x(t) dt$$

Por lo tanto, realizando los cálculos correspondientes se tiene que:

- Para  $x \leq 0$ :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^0 0 dt = 0$$

- Para  $0 \leq x \leq 1$ :

$$F_X(x) = \int_0^x t dt = \frac{t^2}{2} \Big|_0^x = \frac{x^2}{2}$$

- Para  $1 \leq x \leq 2$ :

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_0^1 t dt + \int_1^x (2-t) dt = \frac{t^2}{2} \Big|_0^1 + \left( 2t - \frac{t^2}{2} \right) \Big|_1^x \\ &= \frac{1}{2} + \left( 2x - \frac{x^2}{2} - 2 + \frac{1}{2} \right) = 2x - \frac{x^2}{2} - 1 \end{aligned}$$

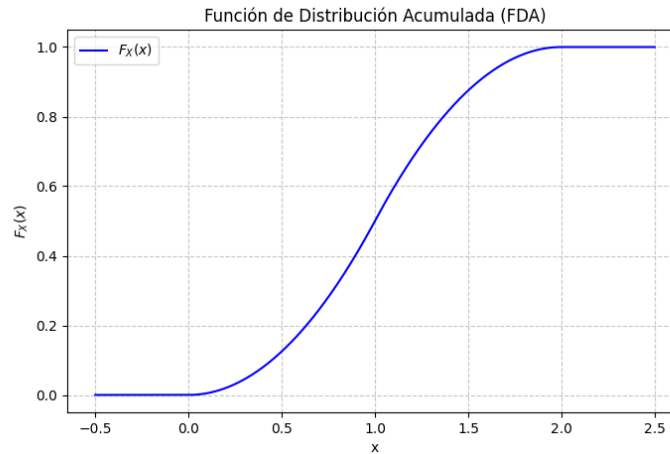
- Para  $x > 2$ :

$$F_X(x) = \int_0^1 t dt + \int_1^2 (2-t) dt = \frac{1}{2} + \left( 4 - 2 - \frac{3}{2} \right) = 1$$

Finalmente se obtiene que la función de distribución acumulada es:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{x^2}{2}, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2x - \frac{x^2}{2} - 1, & 1 \leq x \leq 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}$$

En la Fig.4 se puede observar que la función de distribución acumulada es nula para valores menores o iguales 0 y posee amplitud unitaria para valores mayores o iguales a 2.



**Figura 4:** Función de distribución acumulada  $F_X(x)$ .

**c) Calcular de la probabilidad  $P(0,75 \leq X \leq 1,75)$**

Para determinar la probabilidad de que la variable aleatoria  $X$  se encuentre en el intervalo  $[0,75, 1,75]$ , se utiliza la propiedad fundamental de la función de distribución acumulada (FDA):

$$P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$$

Aplicando esta propiedad:

$$P(0,75 \leq X \leq 1,75) = F_X(1,75) - F_X(0,75)$$

Primero, evaluamos la FDA en  $x = 0,75$ , correspondiente al intervalo  $[0, 1]$ :

$$F_X(0,75) = \frac{0,75^2}{2} = 0,28125$$

Luego, evaluamos la FDA en  $x = 1,75$ , correspondiente al intervalo  $[1, 2]$ :

$$F_X(1,75) = 2(1,75) - \frac{(1,75)^2}{2} - 1 = 0,96875$$

Finalmente, reemplazando en la expresión de la probabilidad:

$$P(0,75 \leq X \leq 1,75) = 0,96875 - 0,28125 = 0,6875$$

**d) Realizar un código que permita generar vector de 500 muestras aleatorias y graficar el histograma de esas muestras. Luego calcular la media y la varianza.**

En la Fig.5 se muestra el histograma de 500 muestras aleatorias generado en python. Además, en la Fig.6 se muestran los resultados obtenidos de la media y la varianza, dichos resultados se obtienen de aplicar las funciones `mean()` para el cálculo de la media y la función `var()` para el cálculo de la varianza, estas funciones se encuentran en la biblioteca `numpy`.



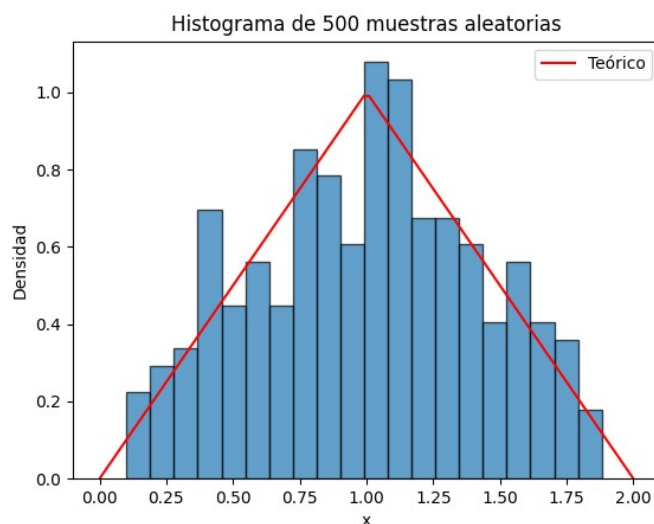


Figura 5: Histograma.

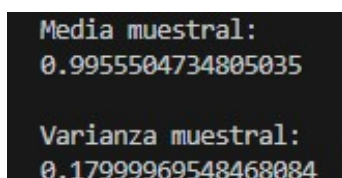


Figura 6: Varianza y media.

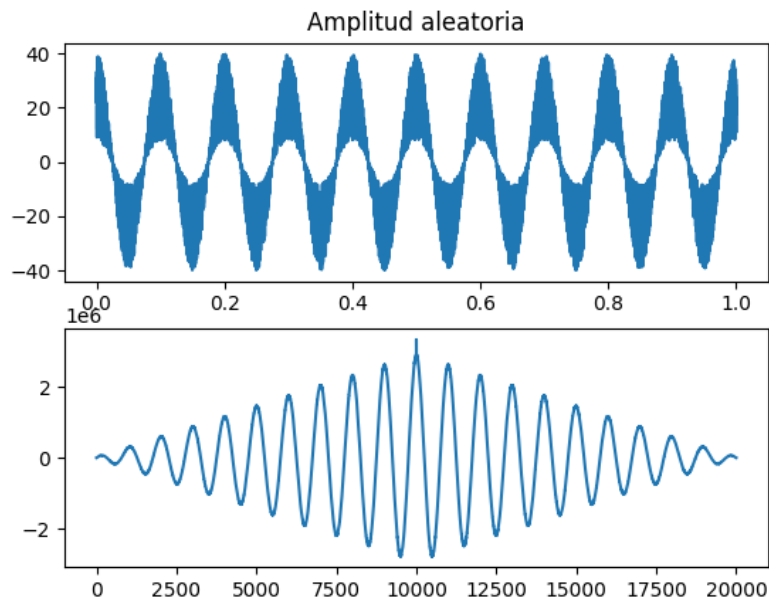
#### 4. Actividad 4

**Graficar las señales senoidales correspondientes que cumplan las siguientes condiciones:**

a) Señal de amplitud  $A$  aleatoria uniforme, distribuida entre  $[8, 40]$ .

$$x(t) = A \cos(2\pi 10t)$$

La gráfica muestra una señal con amplitud modulada aleatoriamente en cada  $t$ , oscilando entre aproximadamente  $-40$  y  $40$ , con una frecuencia base de  $10$  Hz. La variabilidad de  $A$  crea una envolvente irregular alrededor de la senoidal. La autocorrelación presenta un pico máximo cercano a  $125000$  en  $\tau = 0$ , con oscilaciones a  $10$  Hz que decaen gradualmente, reflejando la modulación aleatoria. En una senoidal pura con  $A \approx 19,99$  fijo, la señal oscilaría entre  $\pm 19,99$ , y la autocorrelación sería más regular.

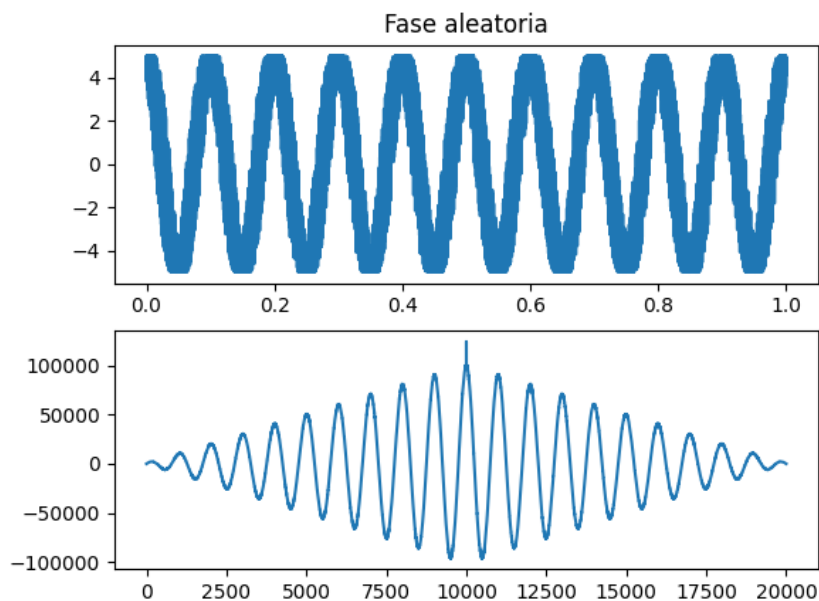


**Figura 7:** Señal con amplitud aleatoria y su autocorrelación.

**b) Señal de fase  $\Theta$  aleatoria uniforme, distribuida entre  $[-\pi, \pi]$ .**

$$x(t) = 5 \cos(2\pi 10t + \theta)$$

La gráfica muestra una señal con amplitud constante de 5, modulada por una fase variable en cada  $t$  dentro de  $[-0,25\pi, 0,25\pi]$ , resultando en una senoidal de 10 Hz con distorsiones. La autocorrelación tiene un pico máximo cercano a 12500 en  $\tau = 0$ , con oscilaciones a 10 Hz que decaen, afectadas por la variabilidad de  $\theta$ . En una senoidal pura con  $\theta \approx 2,83$  rad fijo, la señal sería una senoidal desplazada, y la autocorrelación sería más uniforme.

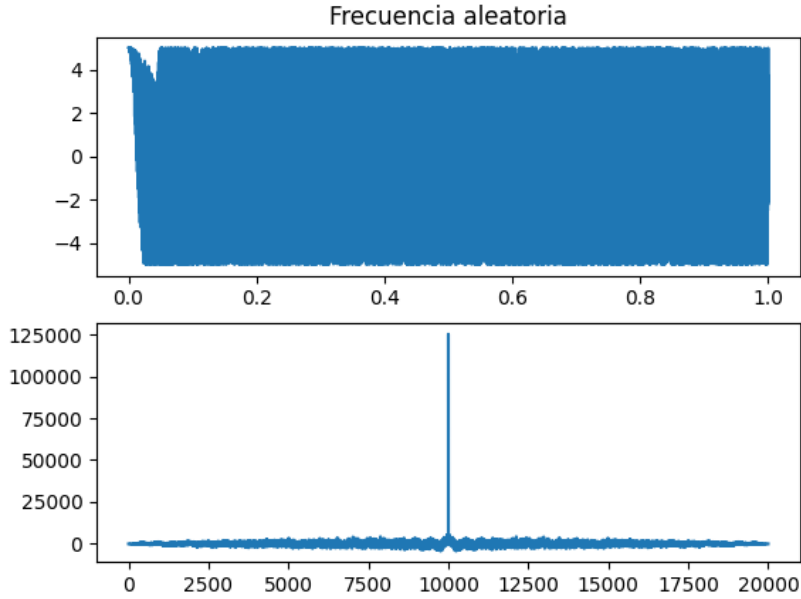


**Figura 8:** Señal con fase aleatoria y su autocorrelación.

**c) Señal de frecuencia  $f$  aleatoria uniforme, distribuida entre  $[0, 20]$ .**

$$x(t) = 5 \cos(2\pi f t)$$

La gráfica muestra una señal con amplitud constante de 5, pero con frecuencia variable en cada  $t$  dentro de  $[3, 20]$  Hz, resultando en una forma de onda no periódica que parece ruido, oscilando entre aproximadamente  $-4$  y  $4$ . La autocorrelación presenta un pico máximo cercano a 125000 en  $\tau = 0$ , con una estructura difusa debido a la variabilidad de  $f$ . En una senoidal pura con  $f \approx 14,64$  Hz fijo, la señal tendría  $\approx 14,64$  ciclos en 1 s, y la autocorrelación mostraría oscilaciones claras a esa frecuencia.

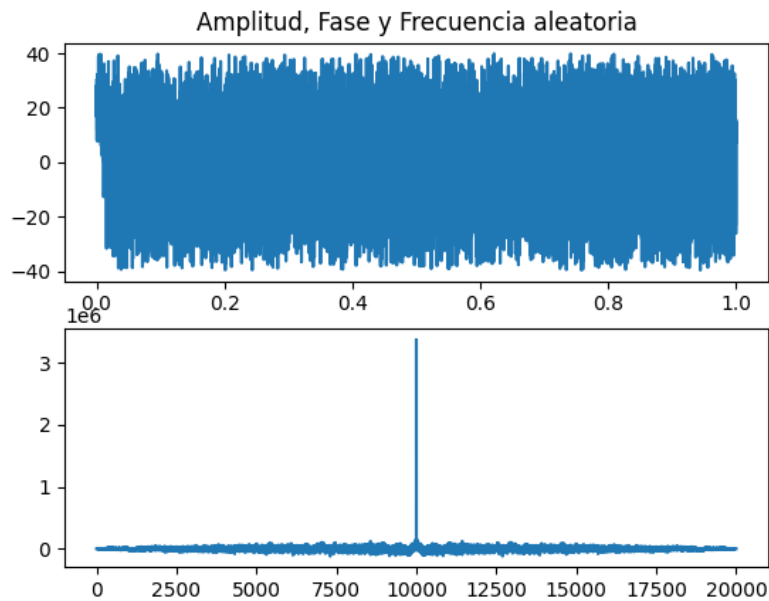


**Figura 9:** Señal con frecuencia aleatoria y su autocorrelación.

**d) Señal de amplitud, fase y frecuencia aleatoria, distribuidas de igual forma que los puntos anteriores.**

$$x(t) = A \cos(2\pi f t + \theta)$$

La gráfica combina las modulaciones aleatorias de  $A$  (en  $[8, 40]$ ),  $\theta$  (en  $[-0, 25\pi, 0, 25\pi]$ ) y  $f$  (en  $[3, 20]$ ), resultando en una señal altamente distorsionada que oscila entre aproximadamente  $-40$  y  $40$ . La autocorrelación tiene un pico máximo cercano a 3 en  $\tau = 0$ , con una estructura ruidosa y sin periodicidad clara debido a la combinación de variabilidades. En una senoidal pura con  $A \approx 19,99$ ,  $\theta \approx 2,83$  rad y  $f \approx 14,64$  Hz, la señal sería una senoidal clara, y la autocorrelación reflejaría la frecuencia de 14.64 Hz.



**Figura 10:** Señal con amplitud, fase y frecuencia aleatorias y su autocorrelación.

**Además, graficar la auto-correlación para todos los puntos anteriores. ¿Qué información se obtienen al observar la gráfica de auto-correlación?**

La autocorrelación  $R_{xx}(\tau)$  mide la similitud de  $x(t)$  consigo misma en diferentes retardos  $\tau$ :

$$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t+\tau) dt$$

Para señales de duración finita (1 s), la autocorrelación tiene una envoltura triangular. Basado en las gráficas generadas:

- **Frecuencia:** En (a) y (b), las autocorrelaciones muestran oscilaciones a 10 Hz, pero con ruido debido a la modulación aleatoria de  $A$  y  $\theta$ . En (c) y (d), la variabilidad de  $f$  elimina la periodicidad clara, resultando en autocorrelaciones difusas.
- **Energía:** El valor en  $\tau = 0$  es proporcional a la energía ( $R_{xx}(0) = \int x^2(t) dt$ ). En (a) y (d), los picos (125000 y 3, respectivamente) reflejan la mayor amplitud variable, mientras que en (b) y (c) (12500 y 125000) corresponden a  $A = 5$  con modulación.
- **Fase:** La autocorrelación es invariante a  $\theta$ , pero la variabilidad en (b) y (d) introduce ruido que distorsiona esta propiedad.
- **Estructura:** Para senoidales puras,  $R_{xx}(\tau)$  tendría oscilaciones cosenoidales claras dentro de una envoltura triangular. Las gráficas actuales muestran distorsiones debido al ruido introducido por parámetros variables.

En conclusión, las autocorrelaciones reflejan las propiedades energéticas de las señales, pero la modulación aleatoria en las gráficas generadas introduce ruido que oculta la periodicidad esperada en señales senoidales puras.

## 5. Actividad 5

En el trabajo práctico anterior se analizó espectralmente una señal compuesta por tres sinusoides de frecuencias 50 Hz, 120 Hz y 200 Hz, con diferentes amplitudes y fases (constantes).

a) Graficar la señal total en el dominio del tiempo y en el dominio de la frecuencia (mediante la Transformada Rápida de Fourier, FFT).

La señal total del práctico anterior es la siguiente:

$$x(t) = 1,0 \cos(2\pi 50t) + 0,5 \cos(2\pi 120t) + 0,3 \cos(2\pi 200t)$$

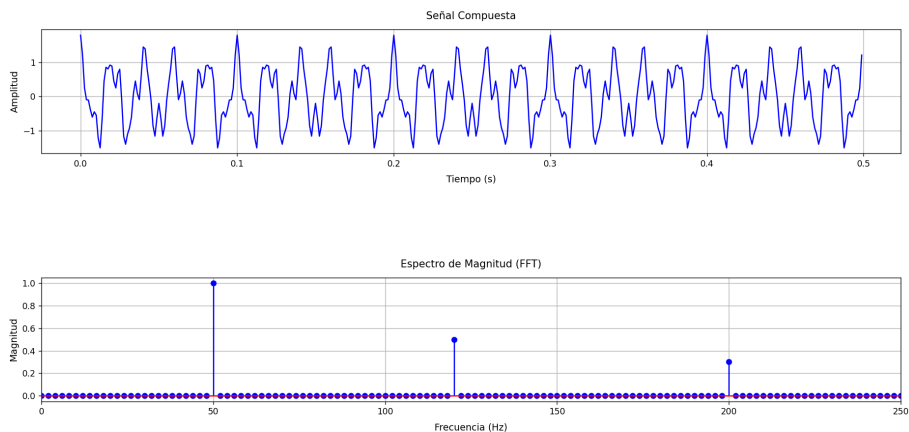


Figura 11: Señal total.

b) Incorporar a la señal ruido blanco gaussiano en dos escenarios:

- Ruido bajo: el nivel de ruido no es suficiente para ocultar las componentes sinusoidales.
- Ruido alto: el nivel de ruido es suficiente para enmascarar las componentes de la señal.

Para cada caso, representar nuevamente la señal tanto en el tiempo como en el espectro de frecuencias y analizar cómo varían la visibilidad de las componentes espectrales.

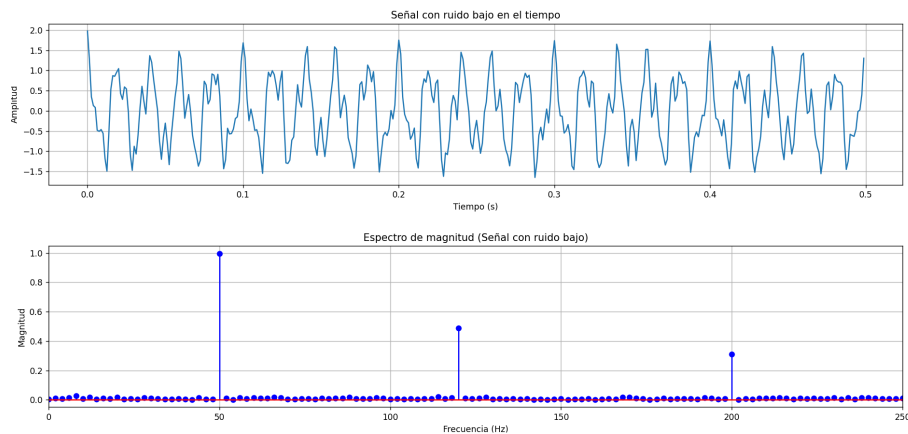
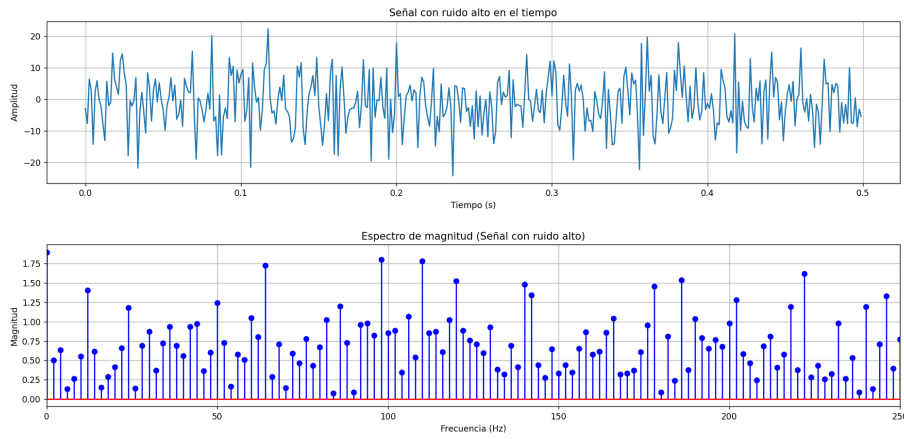


Figura 12: Señal con ruido blanco gaussiano bajo.



**Figura 13:** Señal con ruido blanco gaussiano alto.

En las Figuras 5 se observan la gráfica de la señal total con ruido bajo agregado.

Al comparar la señal total con las versiones con ruido, se logra verificar que en el dominio del tiempo la misma no posee ruido, presenta una forma suave y definida, mientras que con ruido bajo aparecen pequeñas variaciones sin perder la forma general. Mientras que con ruido alto la forma original se pierde debido a las variaciones aleatorias. En el dominio de la frecuencia, la señal total sin ruido, muestra tres picos en 50 Hz, 120 Hz y 200 Hz, con las frecuencias fuera de las mencionadas en casi cero. Al añadir ruido bajo los picos siguen visibles aunque surge un nivel de ruido en todo el espectro (piso de ruido). En cambio, con ruido alto ese piso aumenta y los picos se atenúan o se confunden con el ruido. Esto quiere decir que un ruido creciente degrada la forma temporal y espectral, dificultando identificar las componentes de la señal original.

Por último, se calcula la relación señal-ruido (SNR) para la señal compuesta con amplitudes  $A_1 = 1,0$ ,  $A_2 = 0,5$  y  $A_3 = 0,3$ . La potencia media de la señal compuesta se calcula como  $A_i^2/2$ .

El ruido añadido es blanco y gaussiano con media cero y desviación estándar  $\sigma$ , por lo que su potencia es  $\sigma^2$ . La relación señal-ruido en decibelios se calcula mediante  $\text{SNR}_{\text{dB}} = 10\log_{10}(P_{\text{señal}}/P_{\text{ruido}})$ . Para el caso de ruido bajo se obtiene un SNR elevado, lo que implica que las componentes espectrales son claramente visibles, mientras que para el caso de ruido alto la potencia de ruido domina a la de la señal y se dificulta identificar las componentes de la señal total.

$$P_{\text{señal}} = \frac{A_1^2}{2} + \frac{A_2^2}{2} + \frac{A_3^2}{2} = \frac{1^2 + 0,5^2 + 0,3^2}{2} = \frac{1 + 0,25 + 0,09}{2} = 0,67$$

$$P_{\text{ruidobajo}} = \sigma_{\text{bajo}}^2 = 0,1^2 = 0,01 \quad \text{y} \quad P_{\text{ruidoalto}} = \sigma_{\text{alto}}^2 = 8^2 = 64$$

$$\text{SNR}_{\text{bajo}} = 10\log_{10}\left(\frac{0,67}{0,01}\right) = 10\log_{10}(67) = 18,3 \text{ dB}$$

$$\text{SNR}_{\text{alto}} = 10\log_{10}\left(\frac{0,67}{64}\right) = 10\log_{10}(0,01047) = -19,8 \text{ dB}$$

## 6. Actividad 6

Considerar el diagrama ilustrado en la Fig. 14. Se tiene la primera etapa con un filtro pasa banda, al cual ingresa ruido blanco Gaussiano, de media cero y densidad espectral de potencia  $N_0/2$ . Seguido a ello se tiene un modulador producto y finalmente un filtro pasa bajo. Las respuestas en frecuencia de ambos filtros pueden observarse en las Fig. 15 y Fig. 16.

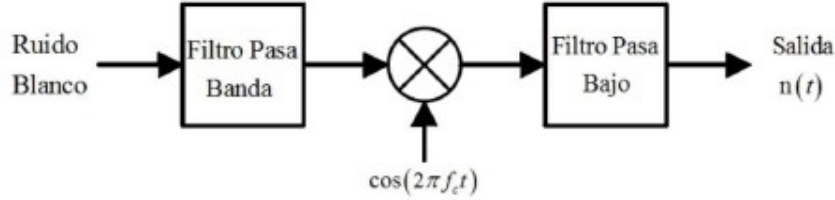


Figura 14: Esquema de la actividad 6.

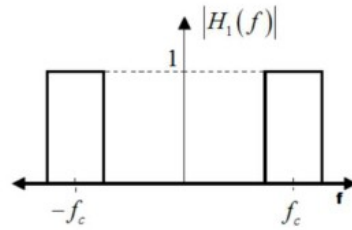


Figura 15: Respuestas en frecuencia del filtro pasa banda.

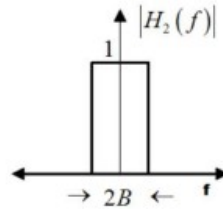


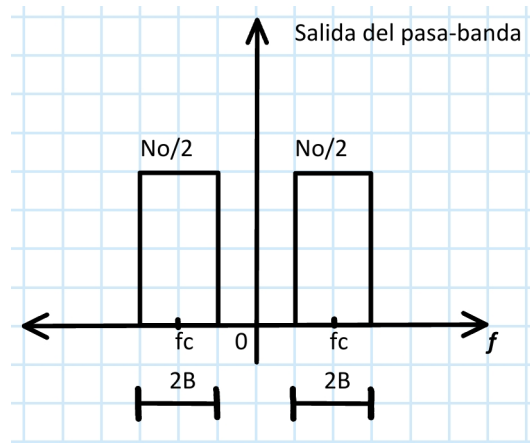
Figura 16: Respuestas en frecuencia del filtro pasa bajo.

a) Calcular la densidad espectral de potencia y la función autocorrelación de  $n(t)$ . Graficar que se obtiene a la salida de cada filtro y del modulador producto (no debe usar el programa).

La densidad espectral de potencia del ruido  $n(t)$  en la salida del filtro pasabanda es:

$$S_{NP_{Banda}}(f) = \begin{cases} \frac{N_0}{2} & -f_c - B < f < -f_c + B \\ \frac{N_0}{2} & f_c - B < f < f_c + B \\ 0 & \text{o.c.} \end{cases}$$

El gráfico de la densidad espectral de potencia a la salida del filtro pasabanda se observa en la Fig. 17.



**Figura 17:** Densidad espectral de potencia del filtro pasabanda.

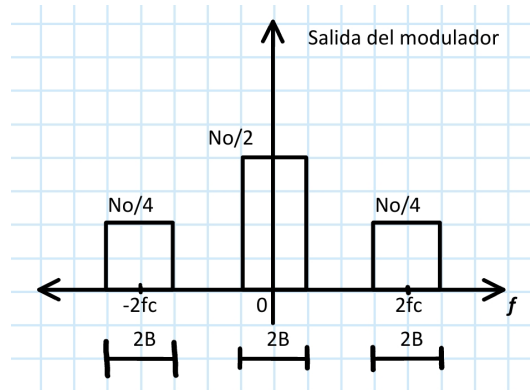
Luego, la salida del filtro pasabanda se multiplica por la señal portadora  $\cos(2\pi f_c t)$ , donde la transformada de Fourier de dicha portadora es:

$$\cos(2\pi f_c t) = \frac{1}{2} [\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)]$$

Al multiplicar en el dominio del tiempo, se realiza una convolución en el dominio de la frecuencia, por lo que la densidad espectral de potencia en la salida del modulador producto es:

$$S_{N_{Modulador}}(f) = \begin{cases} \frac{N_0}{4} & -2f_c - B < f < -2f_c + B \\ \frac{N_0}{2} & -B < f < B \\ \frac{N_0}{4} & 2f_c - B < f < 2f_c + B \\ 0 & \text{o.c.} \end{cases}$$

El gráfico de la densidad espectral de potencia a la salida del modulador producto se observa en la Fig. 18.



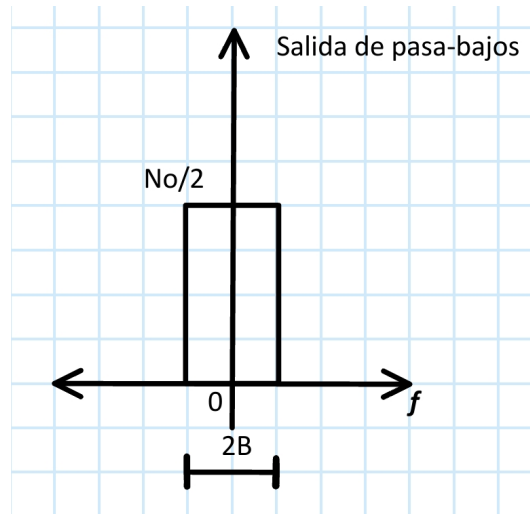
**Figura 18:** Densidad espectral salida modulador.

Finalmente, la salida del modulador producto ingresa al filtro pasabajo, por lo que la densidad espectral de potencia en la salida del filtro pasabajo es:

$$S_{N_{PasaBajo}}(f) = \begin{cases} \frac{N_0}{2} & -B < f < B \\ 0 & \text{o.c.} \end{cases}$$

El gráfico de la densidad espectral de potencia a la salida del filtro pasabajo se observa en la Fig. 19.





**Figura 19:** Densidad espectral salida filtro pasa bajo.

La función de autocorrelación se obtiene a partir de la transformada inversa de la densidad espectral de potencia, es decir:

$$R_{n(t)}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{N_{pasaBajo}}(f) e^{j2\pi f\tau} df$$

Reemplazando la densidad espectral de potencia obtenida en la salida del filtro pasabajo, se tiene:

$$R_{n(t)}(\tau) = \int_{-B}^B \frac{N_0}{2} e^{j2\pi f\tau} df$$

Resolviendo la integral se obtiene:

$$R_{n(t)}(\tau) = N_0 B \text{sinc}(2B\tau)$$

#### **b) Calcular la media y la varianza de $n(t)$ .**

El ruido blanco gaussiano de entrada tiene media cero, y los filtros lineales e invariantes en el tiempo (filtro pasa banda y filtro pasa bajo) no alteran la media si la entrada tiene media cero. Esto se deduce de la siguiente ecuación:

$$\mu_Y = \mu_X \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1) d\tau_1 = \mu_X H(0)$$

Por lo tanto, como la media  $\mu_x$  del ruido en la entrada es cero, entonces la media de  $n(t)$  es:

$$\mu_{n(t)} = \mu_x H(0) = 0 \cdot 1 = 0$$

Para calcular la varianza se utiliza la siguiente ecuación:

$$\sigma_x^2 = E[x^2] - \mu_x^2$$

Por propiedad de autocorrelación se tiene que  $R_x(0) = E[x^2]$ , reemplazando se obtiene lo siguiente:

$$\sigma_x^2 = R_x(0) - 0 = N_0 B \text{sinc}(0)$$

$$\sigma_x^2 = N_0 B$$

c) ¿Cuál es la tasa a la cual  $n(t)$  puede ser muestreada, de manera tal de que las muestras resultantes sean no correlacionadas?

Para que las muestras resultantes sean no correlacionadas se busca que la función de autocorrelación sea igual a 0. Entonces, teniendo en cuenta la Ecuación 8, esta función da 0 cuando el valor dentro del seno cardinal es un entero

$$2B\tau = k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Entonces

$$\tau = \frac{k}{2B}$$

$$f_{\text{muestreo}} = \frac{2B}{k}$$

Por lo tanto, la tasa de  $n(t)$  debe ser al menos  $2B$  muestras por segundo para que las muestras resultantes sean no correlacionadas.

## 7. Actividad 7

En la Fig. 20 podrá observar el diagrama en bloques simplificado de un receptor de televisión satelital (similar a los que se encuentran en centros de distribución CATV Community Antenna Television). La temperatura de ruido antena-línea de alimentación es 50 K. Calcular la temperatura equivalente de ruido del sistema.

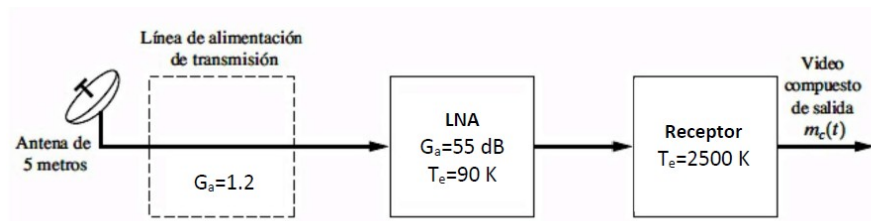


Figura 20: Diagrama en bloques.

Utilizando la fórmula de Friis, la cual permite expresar la temperatura de ruido equivalente de un sistema compuesto por varias etapas en función de las temperaturas de ruido y ganancias de cada etapa, se tiene que:

$$T_{eq} = T_1 + \frac{T_2}{G_1} + \frac{T_3}{G_1 G_2} + \dots$$

Para proceder con los cálculos se necesita convertir las ganancias de dB a unidades lineales utilizando la fórmula:

$$G_{linear} = 10^{\frac{G_{dB}}{10}}$$

Al realizar las conversiones requeridas se obtienen los siguientes valores:

- $G_1 = 1,2$
- $G_2 = 316227,766$

Ahora, se sustituyen los valores conocidos en la fórmula de Friis:

$$T_{eq} = 50k + \frac{900k}{1,2} + \frac{2500k}{1,2 \times 316227,766} = 125,0088k$$

Por lo tanto, la temperatura equivalente de ruido del sistema es igual a 125,0088K.

## 8. Actividad 8

En un determinado circuito se tienen tres amplificadores conectados en cascada, tal como se puede observar en la Fig.

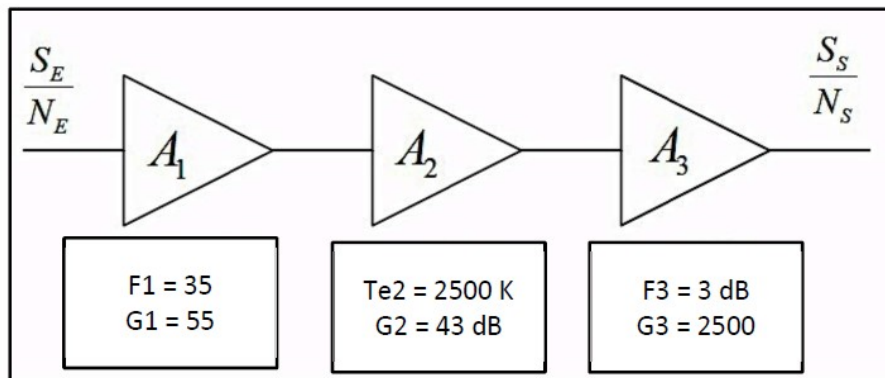


Figura 21: Circuito en cascada.

**Calcular:**

**a) La figura de ruido total, suponiendo la temperatura ambiente  $T = 290 \text{ K}$ .**

Se procede a convertir los datos a la escala lineal ya que estos deberán de estar en una misma escala. Por lo tanto, se obtiene que:

- $F_2 = \frac{290[K] + 2500[K]}{290[K]} = 9,62$
- $G_2 = 10^{\frac{43}{10}} = 19952,62315$
- $F_3 = 10^{\frac{3}{10}} = 1,99526$

La figura de ruido total se calcula como:

$$F = F_1 + \frac{F_2 - 1}{G_1} + \frac{F_3 - 1}{G_1 G_2}$$

Reemplazando los valores correspondientes se obtiene que la figura de ruido total es:

$$F = 35 + \frac{9,62 - 1}{55} + \frac{1,99526 - 1}{55 * 19952,62315} = 35,1567$$

**b) La temperatura equivalente de ruido total.**

Para realizar el cálculo de la temperatura equivalente de ruido total, la temperatura de cada amplificador deberá de estar en grados kelvin. Por lo tanto, al realizar dicha conversión se obtiene que:

- $T_1 = T * (F_1 - 1) = 290[K] * (35 - 1) = 9860[K]$
- $T_3 = T * (F_3 - 1) = 290[K] * (10^{\frac{3}{10}} - 1) = 288,6261[K]$

La temperatura equivalente de ruido total se calcula como:

$$T_e = T_1 + \frac{T_2}{G_1} + \frac{T_3}{G_1 * G_2}$$

Al reemplazar los valores correspondientes se obtiene que la temperatura de ruido total es:

$$T_e = 9860[K] + \frac{2500[K]}{55} + \frac{288,6162[K]}{55 * 19952,62315} = 9905,455[K]$$

**c) Intercambiar los amplificadores A1 y A3. Calcular nuevamente la figura de ruido total, y explicar que sucede.**

Al intercambiar los amplificadores  $A_1$  y  $A_3$  la ecuación de la figura de ruido total es:

$$F = F_3 + \frac{F_2}{G_3} + \frac{F_1}{G_3 * G_2}$$

Reemplazando los datos de los incisos anteriores se obtiene que la nueva figura de ruido total es:

$$F = 1,99526 + \frac{9,62}{2500} + \frac{35}{2500 * 19952,63215} = 1,999$$

Al comparar éste nuevo resultado con el obtenido en el inciso a) se observa que el valor de la nueva figura de ruido total disminuye con respecto a la del inciso a). Por lo tanto, se concluye que para obtener una figura de ruido pequeña, la primer etapa de la conexión en cascada deberá tener una alta ganancia, además también se concluye que la figura de ruido total  $F$  es dominada por la figura de ruido de la primer etapa.

**d) Suponer que ingresa a la cascada de amplificadores una señal con una potencia de  $20 \times 10^{-9}$  W. Calcular la relación señal ruido tanto en la entrada, como en la salida de dicha cascada, considerando  $\Delta f = 150 \text{ kHz}$ .**

La potencia de ruido disponible a la entrada del circuito se calcula como:

$$N_1 = k * T * \Delta f$$

donde:

- $K = 1,380649 \times 10^{-23} [\frac{J}{K}]$ .
- $\Delta f$  es el ancho de banda estrecho centrado en  $f$ .
- $T$  es la temperatura ambiente en grados kelvin [K]

Al reemplazar dichos valores se obtiene que la potencia de ruido disponible a la entrada es:

$$N_1 = 1,380649 \times 10^{-23} [\frac{J}{K}] * 290[K] * 150[kHz] = 6,0058 \times 10^{-16} [W]$$

Realizando el cociente entre la señal de potencia  $20 \times 10^{-9} [W]$  a la entrada que ingresa al circuito con la potencia de ruido a la entrada  $N_1$  se obtiene la relación señal-ruido de la entrada de la fuente  $SNR_s(f)$ . Por lo tanto, se obtiene que:

$$SNR_s(f) = \frac{20 \times 10^{-9} [W]}{6,0058 \times 10^{-16} [W]} = 33,3011 \times 10^7.$$

La figura de ruido total se puede expresar como:

$$F = \frac{SNR_s(f)}{SNR_o(f)}$$

Despejando  $SNR_o(f)$  y reemplazando los datos se obtiene que la relación señal-ruido  $SNR_o(f)$  en la salida es:

$$SNR_o(f) = \frac{SNR_s(f)}{F} = \frac{33,3011 \times 10^7}{35,156} = 9,4722$$