UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN LUIS
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS Y NATURALES
INGENIERÍA ELECTRÓNICA CON O.S.D.

Asignatura:

Comunicaciones I

Trabajo Practico N° 1

Sistemas de comunicaciones, teoría de la información y análisis de señales

Estudiantes:
Marcos Lucero
Nahuel Ramires
Agustín Cappiello

Profesores Responsables:

Alejandro Marwan Geraiges Magrini.
Roberto Kiessling.

Año:
2025

Parte I: Conceptos teóricos

1. Sistemas de Comunicación

1.1) Dibuje el diagrama de bloques de un sistema de comunicación genérico e identifique cada una de sus partes principales. Explique brevemente la función de cada bloque.

1.2) ¿Cómo se clasifican los sistemas de comunicación (sdc) según los siguientes criterios? De ejemplos de cada caso.

- Por el tipo de señal
- Por la dirección de transmisión
- Por la sincronización
- Por el medio de transmisión

2. Representación Fasorial y Análisis Frecuencial

2.1) Dada la señal $x(t) = 5\cos(2\pi \cdot 1000t + \pi/4) + 3\sin(2\pi \cdot 1500t - \pi/6)$:

a) Exprese cada componente en forma fasorial.

Para la componente $5\cos(2\pi \cdot 1000t + \pi/4)$ es:

$$X = 5\angle\,\pi/4$$

Para la componente $3\sin(2\pi \cdot 1500t - \pi/6)$ es:

Una señal $\sin(\omega t + \phi) = \cos(\omega t + \phi - \pi/2)$, entonces su fasor es:

$$X = 3\angle\,2\pi/3$$

b) Grafique el diagrama fasorial.

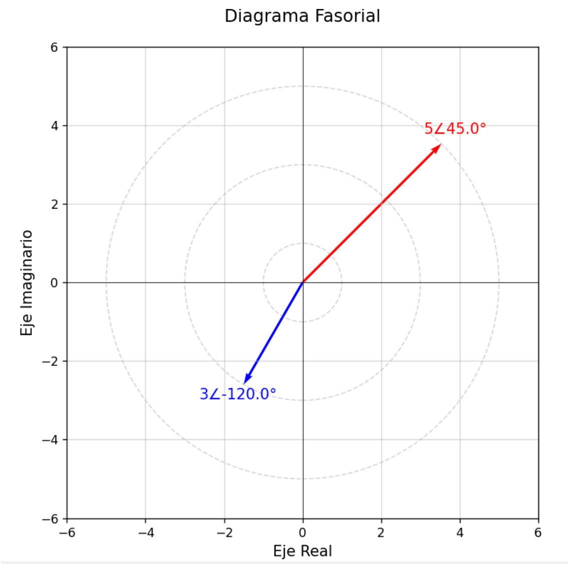


Figura 1: Diagrama Fasorial

c) Encuentre la representación exponencial compleja.

$$x(t) = 5\,\frac{e^{j(2\pi\cdot 1000t+\pi/4)} + e^{-j(2\pi\cdot 1000t+\pi/4)}}{2} + 3\,\frac{e^{j(2\pi\ 1500t-\pi/6)} - e^{-j(2\pi\cdot 1500t-\pi/6)}}{2j}$$

2.2) Explique el concepto de fasor rotante y su utilidad en el análisis de señales sinusoidales.

Un fasor rotante es un vector complejo que gira en el plano complejo con velocidad angular proporcional a la frecuencia de la sinusoide $w = 2\pi f$. Facilita el análisis de señales sinusoidales y de sistemas lineales, ya que convierte senos y cosenos en exponenciales complejas.

3. Series y Transformada de Fourier

3.1) Enuncie las condiciones de Dirichlet para la existencia de la Serie de Fourier.

- $g(t)$ es de valor único, con un número finito de máximos y mínimos en cualquier intervalo finito de tiempo.
- $g(t)$ tiene un número finito de discontinuidades en cualquier intervalo finito de tiempo.
- $g(t)$ es absolutamente integrable:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|\, dt < \infty$$

3.2) Para una señal periódica cuadrada de amplitud A y período T:

a) Calcule analíticamente los coeficientes de la Serie de Fourier

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{T}\int_{-T_1}^{T_1} Ae^{-jk\omega_0 t}\, dt \\
&= \frac{A}{T}\left[\frac{e^{-jk\omega_0 t}}{-jk\omega_0}\right]_{-T_1}^{T_1} \\
&= \frac{A}{T}\frac{e^{-jk\omega_0 T_1} - e^{jk\omega_0 T_1}}{-jk\omega_0} \\
&= \frac{A}{T}\frac{-2j\sin(k\omega_0 T_1)}{-jk\omega_0} \\
&= \frac{A}{T}\frac{2\sin(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0}
\end{aligned}$$

b) Escriba la expresión de la serie hasta el 5° armónico

$$x(t) = \sum_{k=-5}^{5} a_k e^{jk\omega_0 t}, \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$\begin{aligned}
x(t) = a_{-5}e^{-j5\omega_0 t} + a_{-4}e^{-j4\omega_0 t} + a_{-3}e^{-j3\omega_0 t} + a_{-2}e^{-j2\omega_0 t} + a_{-1}e^{-j\omega_0 t} + a_0 \\
+ a_1 e^{j\omega_0 t} + a_2 e^{j2\omega_0 t} + a_3 e^{j3\omega_0 t} + a_4 e^{j4\omega_0 t} + a_5 e^{j5\omega_0 t}.
\end{aligned}$$

c) Explique el fenómeno de Gibbs

El fénomeno de Gibbs aparece al aproximar una señal discontinua con una serie de Fourier truncada o al filtrarla con un ancho de banda limitado. Se manifiesta como un sobrepico (overshoot $\approx 9\,\%$) y oscilaciones cerca de los puntos de discontinuidad, que no desaparecen aunque se aumente el número de armónicos.

3.3) Establezca la relación entre Series de Fourier y Transformada de Fourier. ¿Cuándo se utiliza cada una? ¿A que tipo de señales se aplican? ¿Cómo son estas señales desde el punto de vista de potencia y energía?

Tanto la serie de fourier como la transformada de fourier se utilizan para representar señales discretas y continuas en el dominio de la frecuencia. Las series de fourier se utilizan para representar señales periódicas y la trasnformada de fourier para señales no periódicas. Las señales periódicas son de potencia y las señales no peródicas son de energía.

3.4) Enuncie y explique las siguientes propiedades de la Transformada de Fourier:

- Linealidad

  La Transformada de Fourier es un operador lineal. Esto significa que la suma de dos señales en el dominio del tiempo es igual a la suma de las transformadas de Fourier de dichas señales en el dominio de la frecuencia.

$$a\,x(t) + b\,y(t) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} a\,X(f) + b\,Y(f), \qquad a, b\ constantes$$

- Desplazamiento temporal

  Un retraso en el tiempo de la señal introduce un desfase lineal ($-2\pi f t_0$) en el dominio de la frecuencia. La magnitud del espectro no cambia, sólo la fase se ve afectada.

$$x(t - t_0) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} e^{-j2\pi f t_0}\,X(f)$$

- Desplazamiento frecuencial

  Multiplicar una señal por una exponencial compleja lo que hace es desplazar el espectro en frecuencia. A esto se le denomina modulación.

$$e^{j2\pi f_0 t}\,x(t) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} X(f - f_0)$$

- Escalado

  Comprimir una señal en el tiempo ($|a| > 1$) expande su espectro en frecuencia, y viceversa.

$$x(at) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} \frac{1}{|a|}\,X\left(\frac{f}{a}\right)$$

- Dualidad

  La forma de una señal en el tiempo y su espectro son "duales". Si intercambiamos los roles de tiempo y frecuencia, la transformada de la transformada evaluada en t da la señal original reflejada.

$$X(t) = \mathscr{F}\{x(t)\} \implies \mathscr{F}\{X(f)\} = x(-t)$$

- Convolución

  La convolución de dos señales en el dominio del tiempo corresponde a la multiplicación de sus transformadas de Fourier en el dominio de la frecuencia.

$$x(t) * y(t) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} X(f)\,Y(f)$$

- Parseval

  La energía total de una señal en el tiempo es igual a la energía total en el dominio de la frecuencia.

  Si $X(f) = \mathscr{F}\{x(t)\}$, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2\,df$$

4. Transformada de Hilbert y Señal Analítica

4.1) Defina la Transformada de Hilbert de una señal $x(t)$. ¿Cuál es su interpretación física?

La Transformada de Hilbert es una herramienta matemática utilizada para describir la envolvente compleja de una señal modulada con una portadora real. Se denota como $\hat{x}(t)$ y se define mediante la integral:

$$\hat{x}(t) = \mathcal{H}\{x(t)\} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x(\tau)}{t-\tau}d\tau$$

Equivalentemente, es la convolución de $x(t)$ con la función $\frac{1}{\pi t}$:

$$\hat{x}(t) = x(t) * \frac{1}{\pi t}$$

Interpretación Física:
La Transformada de Hilbert desplaza la fase de todas las componentes frecuenciales de la señal en $-90°$ (es decir, $-\frac{\pi}{2} rad$), no afecta la amplitud del espectro, solo modifica la fase. Puede verse como un filtro pasa-todo con respuesta en frecuencia:

$$H(f) = -j\cdot\text{sgn}(f) = \begin{cases} -j & \text{para } f > 0 \\ j & \text{para } f < 0 \end{cases}$$

Esto significa que para frecuencias positivas desplaza la fase $-90°$ y para frecuencias negativas desplaza la fase $+90°$.

4.2) Explique el concepto de señal analítica. ¿Cuáles son sus ventajas en el procesamiento de señales?

La señal analítica es una representación compleja de una señal real, obtenida mediante la supresión de las componentes frecuenciales negativas de la señal original. A partir de la señal analítica se deriva la señal banda base equivalente, representación también analítica conocida como envolvente compleja.Se define como:

$$x_a(t) = x(t) + j\hat{x}(t)$$

donde:

- $x(t)$ es la señal real original
- $\hat{x}(t)$ es su transformada de Hilbert

Ventajas:

- Reducción del ancho de banda: al eliminar las frecuencias negativas, el ancho de banda efectivo se reduce a la mitad.
- Facilita el análisis de envolventes y fases: la señal analítica permite definir fácilmente la envolvente compleja y la fase instantánea de una señal modulada.
- Modulación de Banda Lateral Única (SSB).
- Demodulación coherente.
- Análisis de señales pasabanda.

4.3) Si $x(t) = \cos(\omega t)$, encuentre:

a) Su transformada de Hilbert.

$$\hat{x}(t) = sin(\omega t)$$

b) La señal analítica correspondiente.

$$x_a(t) = x(t) + j\hat{x}(t) = \cos(\omega t) + j\sin(\omega t)$$

Usando la identidad de Euler:

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta,$$

con $\theta = \omega t$, resulta:

$$x_a(t) = e^{j\omega t}.$$

c) La envolvente compleja.

$$\tilde{x}(t) = x_a(t) \cdot e^{-j\omega t} = e^{j\omega t} \cdot e^{-j\omega t} = e^0 = 1.$$

5. Representación de Señales Pasabanda

5.1) Explique la diferencia entre señales de banda base y señales pasabanda.

Una forma de onda de banda base tiene una magnitud espectral diferente de cero para las frecuencias alrededor del origen (es decir, f = 0) y es despreciable en cualquier otro caso portadora.

Una forma de onda pasabanda tiene una magnitud espectral diferente de cero para las frecuencias en cierta banda concentrada alrededor de una frecuencia f =+-fc, donde fc 0. La magnitud espectral es despreciable en cualquier otro caso. A la frecuencia fc se le llama frecuencia portadora.

5.2) Describa la representación de envolvente compleja de una señal pasabanda. ¿Por qué es útil esta representación?

Una señal pasabanda real $s(t)$ con frecuencia portadora f_c puede expresarse en términos de su envolvente compleja $\tilde{s}(t)$ de la siguiente manera:
Forma general:

$$s(t) = \mathrm{Re}\left\{\tilde{s}(t)\, e^{j2\pi f_c t}\right\}$$

Descomposición en componentes:
La envolvente compleja $\tilde{s}(t)$ es una señal compleja de banda base que se escribe como:

$$\tilde{s}(t) = s_I(t) + j s_Q(t)$$

donde:

- $s_I(t)$: **Componente en fase** (parte real),
- $s_Q(t)$: **Componente en cuadratura** (parte imaginaria).

Expresión alternativa de $s(t)$:
Sustituyendo $\tilde{s}(t)$ en la forma general:

$$s(t) = s_I(t)\cos(2\pi f_c t) - s_Q(t)\sin(2\pi f_c t)$$

Forma polar de la envolvente compleja:

$$\tilde{s}(t) = a(t)\, e^{j\phi(t)}$$

donde:

- $a(t) = \sqrt{s_I^2(t) + s_Q^2(t)}$: **Envolvente real** (amplitud instantánea),
- $\phi(t) = \tan^{-1}\left(\frac{s_Q(t)}{s_I(t)}\right)$: **Fase instantánea**.

Entonces, la señal pasabanda se expresa como:

$$s(t) = a(t)\cos\big(2\pi f_c t + \phi(t)\big)$$

Esta representación es fundamental porque permite analizar y procesar señales pasabanda (de alta frecuencia) utilizando herramientas de banda base (baja frecuencia), lo que simplifica enormemente el estudio de su comportamiento espectral y temporal, reduce la complejidad computacional en simulaciones al requerir menores tasas de muestreo, y facilita la aplicación de operaciones como filtrado, convolución o transformaciones al trabajar con señales de variación lenta, manteniendo la generalidad para todo tipo de modulaciones.

5.3) Para una señal modulada $s(t) = A(t)\cos[\omega_c t + \phi(t)]$, identifique:

a) La componente en fase.

$$\begin{aligned}s(t) &= A(t)\cos[\omega_c t + \phi(t)] \\ &= A(t)\cos(\omega_c t)\cos\phi(t) - A(t)\sin(\omega_c t)\sin\phi(t)\end{aligned}$$

Comparando con la forma canónica:

$$s(t) = s_I(t)\cos(\omega_c t) - s_Q(t)\sin(\omega_c t)$$

Se identifica:

$$s_I(t) = A(t)\cos\phi(t)$$

b) La componente en cuadratura.

De la misma expansión:

$$s(t) = s_I(t)\cos(\omega_c t) - s_Q(t)\sin(\omega_c t)$$

Se identifica:

$$s_Q(t) = A(t)\sin\phi(t)$$

c)La envolvente compleja.

La envolvente compleja se define como:

$$\tilde{s}(t) = s_I(t) + j s_Q(t)$$

Sustituyendo los valores obtenidos:

$$\tilde{s}(t) = A(t)\cos\phi(t) + jA(t)\sin\phi(t) = A(t)e^{j\phi(t)}$$

6. Teoría de la Información y Capacidad de Canal

6.1) Conceptos Fundamentales:

a) Defina información e información propia (auto-información) de un evento.

La información de un evento se define como la medida de la sorpresa o la reducción en la incertidumbre que proporciona la ocurrencia de dicho evento. Por otro lado, la auto-información de un evento, se refiere a la cantidad de información asociada con la realización de un evento específico.

b) ¿Por qué se utiliza el logaritmo en la definición de información?.

El logaritmo se utiliza en la definición de información porque permite una forma conveniente de cuantificar la información de manera proporcional al grado de inusualidad del evento. Utilizar el logaritmo garantiza que la información sea aditiva para eventos independientes, lo que es fundamental en la teoría de la información. La base del logaritmo determina las unidades utilizadas para la medida de información. Por lo tanto, se emplea el logaritmo de base 2 para unidades de "bits".

c) Explique el concepto de entropía de una fuente discreta.

Entropía ($H(X)$): La *entropía* de una fuente discreta X que emite símbolos $\{x_1, x_2, \ldots, x_M\}$ con probabilidades $\{p(x_1), p(x_2), \ldots, p(x_M)\}$ se define como el valor esperado de la auto-información:

$$H(X) = E[I(x_k)] = \sum_{k=1}^{M} p(x_k) \cdot I(x_k) = -\sum_{k=1}^{M} p(x_k) \log_2 p(x_k)$$

Unidades: bits/símbolo.
Interpretación:

- $H(X)$ mide la *incertidumbre promedio* por símbolo de la fuente.
- También representa la *cantidad promedio de información* por símbolo.
- *Máxima entropía:* Ocurre cuando todos los símbolos son equiprobables:

$$H_{\text{máx}} = \log_2 M$$

- *Entropía mínima:* $H_{\min} = 0$, cuando un símbolo tiene probabilidad 1 y los demás 0.

6.2) Para una fuente binaria con probabilidades $P(0) = 0{,}3$ y $P(1) = 0{,}7$:

a) Calcule la información propia de cada símbolo.

$$I(0) = \log_2\left(\frac{1}{0{,}3}\right) \approx 1{,}737 \text{ bits}$$
$$I(1) = \log_2\left(\frac{1}{0{,}7}\right) \approx 0{,}515 \text{ bits}$$

b) Calcule la entropía de la fuente.

$$H(X) = 0{,}3 \cdot \log_2\left(\frac{1}{0{,}3}\right) + 0{,}7 \cdot \log_2\left(\frac{1}{0{,}7}\right)$$
$$\approx 0{,}3 \cdot 1{,}737 + 0{,}7 \cdot 0{,}515 \approx 0{,}881 \text{ bits/símbolo}$$

c) Compare con la entropía máxima posible.

$$H_{\text{máx}} = \log_2(2) = 1 \text{ bit/símbolo}$$

La entropía calculada (0.881 bits/símbolo) es menor porque la fuente no es equiprobable.

6.3) Capacidad de Canal:

a) Enuncie el Teorema de Shannon-Hartley.

El Teorema de Shannon-Hartley establece que la capacidad máxima de un canal de comunicación libre de ruido está limitada por el ancho de banda y la potencia de la señal, en presencia de ruido aditivo blanco gaussiano. Matemáticamente, la capacidad C del canal se calcula como C = B * log2(1 + S/N), donde B es el ancho de banda del canal, S es la potencia de la señal, y N es la densidad espectral de potencia del ruido. Este teorema es fundamental en teoría de la información y comunicaciones, estableciendo un límite teórico sobre la cantidad de información que se puede transmitir a través de un canal de comunicación dado.

b) ¿Qué representa físicamente la capacidad de canal? .

La capacidad de canal representa la cantidad máxima de información que se puede transmitir de manera confiable a través de un canal de comunicación, considerando la limitación impuesta por el ancho de banda del canal y el nivel de ruido presente.

c) Para un canal AWGN con ancho de banda $B = 4$ kHz y $SNR = 15$ dB, calcule la capacidad del canal.

Conversión de SNR de dB a lineal:

$$SNR = 10^{15/10} = 10^{1{,}5} = 31{,}62$$

Cálculo de la capacidad:

$$\begin{aligned} C &= 4000 \cdot \log_2(1 + 31{,}62) \\ &= 4000 \cdot \log_2(32{,}62) \\ &= 4000 \cdot 5{,}03 \\ &= 20,120 \text{ bps} \end{aligned}$$

7. Codificación de Fuente

7.1) Fundamentos de Codificación:

a)Explique la diferencia entre codificación de fuente y codificación de canal.

La codificación de fuente se enfoca en la compresión de datos, eliminando redundancia para optimizar el almacenamiento y ancho de banda, mientras que la codificación de canal se centra en la protección de la información, añadiendo redundancia para detectar y corregir errores introducidos por el canal de comunicación. La primera reduce la información, la segunda la aumenta con un propósito protector.

b) ¿Qué establece el Teorema de Codificación de Fuente de Shannon?.

El Teorema de Codificación de Fuente de Shannon establece que la longitud mínima promedio de una secuencia de código para representar una fuente de información es la entropía de la fuente, dividida entre el tamaño del alfabeto de destino (generalmente bits). Es decir, permite comprimir datos hasta un límite teórico fundamental, que es la cantidad de información que realmente contiene la fuente, eliminando la redundancia.

c) Defina eficiencia y redundancia de un código.

La eficiencia de un código se refiere a la relación entre la cantidad de información útil transmitida y la longitud total del mensaje codificado. Por otro lado, la redundancia de un código es la cantidad de información adicional añadida al mensaje original para permitir la detección y corrección de errores en la transmisión de datos.

7.2) Códigos de Longitud Variable:

a) Enuncie las propiedades de un código únicamente decodificable.

Las propiedades de un código únicamente decodificable son las siguientes:

- 1. No puede haber ninguna palabra de código que sea prefijo de otra palabra de código.
- 2. Cada palabra de código puede ser decodificada de manera única independientemente de las demás palabras de código.
- 3. El proceso de decodificación es determinista, es decir, no lleva a ambigüedades o múltiples interpretaciones.

Estas propiedades garantizan que el proceso de decodificación sea eficiente y sin errores, permitiendo una correcta recuperación de la información transmitida a través del código.

b) ¿Qué es la desigualdad de Kraft? ¿Cuál es su importancia?.

La Desigualdad de Kraft es una condición que debe cumplir cualquier código de prefijo (y por extensión, únicamente decodificable). Establece que:

$$\sum_{i=1}^{M} 2^{-l_i} \leq 1$$

donde l_i son las longitudes de los códigos. Si se cumple, existe un código de prefijo; si no, es imposible construirlo.

c) Explique el algoritmo de Huffman paso a paso.

Paso a Paso del Algoritmo de Huffman

1. **Paso 1**: Listar todos los símbolos con sus probabilidades (de mayor a menor)

2. **Paso 2**: Tomar los dos símbolos con menor probabilidad y combinarlos en un nuevo nodo (sumar sus probabilidades)

3. **Paso 3**:Volver a ordenar todos los nodos (símbolos y combinados) por probabilidad.

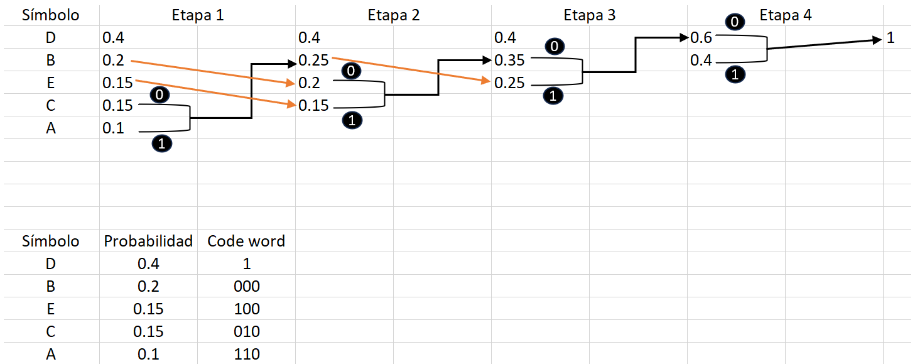
4. **Paso 4**: Combinar los dos menores nuevamente y reordenar hasta que quede un solo nodo.

5. **Paso 5**: Recorrer cada rama y formar el código único para cada símbolo.

7.3) Para el alfabeto (A, B, C, D, E) con probabilidades (0.1, 0.2, 0.15, 0.4, 0.15):
a)Calcule la entropía de la fuente.

$H(X) = 0{,}1\log_2(1/0{,}1)+0{,}2\log_2(1/0{,}2)+0{,}15\log_2(1/0{,}15)+0{,}4\log_2(1/0{,}4)+0{,}15\log_2(1/0{,}15) = 2{,}146$ bits/símbolo

b) Diseñe un código de Huffman.



Símbolo	Probabilidad	Code word
D	0.4	1
B	0.2	000
E	0.15	100
C	0.15	010
A	0.1	110

Figura 2: Diagrama de Huffman

c) Calcule la longitud media del código.

$$L = \sum_{i=1}^{n} p_i l_i = (0{,}4\times1)+(0{,}2\times3)+(0{,}15\times3)+(0{,}15\times3)+(0{,}1\times3) = 0{,}4+0{,}6+0{,}45+0{,}45+0{,}3 = 2{,}2 \text{ bits/símbolo}$$

d) Calcule la eficiencia del código.

$$\eta = \frac{H(X)}{L} \times 100\,\%$$
$$\eta = \frac{2{,}146}{2{,}22} \times 100\,\% = 97{,}54\,\%$$