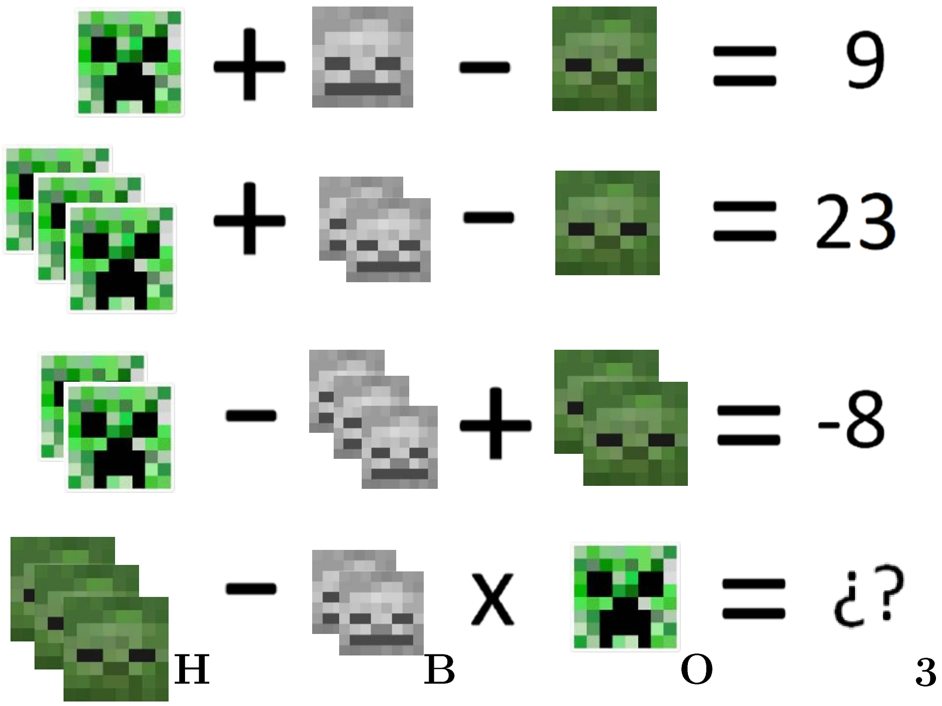
NIVEL PREGRADO

Matemática Discreta y Álgebra

GUÍA N°4: SISTEMA DE ECUACIONES



Unidad: Sistemas de Ecuaciones Lineales

Curso: 1° A y B

Docentes: Andrea Campos y Víctor Palazzesi

AÑO LECTIVO 2022

SISTEMAS DE ECUACIONES

Muchas veces se modelan situaciones por medio de ecuaciones, pero un gran número de estas situaciones contienen demasiadas variables para ser modeladas por una sola ecuación. Por ejemplo, el clima depende de la relación entre numerosas variables, incluyendo temperatura, rapidez del viento, presión del aire y humedad. En consecuencia, para modelar (y pronosticar) el clima, los científicos utilizan innumerables ecuaciones con muchas variables cada una de ellas.

Estos conjuntos de ecuaciones, llamados sistemas de ecuaciones, *trabajan juntos* para describir el clima. Sistemas de ecuaciones con cientos de variables son utilizados por líneas aéreas para establecer horarios de vuelo consistentes, así como por empresas de telecomunicaciones para hallar rutas eficientes para llamadas telefónicas.

En esta guía se estudiarán diferentes estrategias para resolver sistemas de ecuaciones que están formadas por varias ecuaciones con varias variables.

Actividad 1:

Una farmacia necesita preparar una mezcla de 60 litros que tenga 40% de ácido, utilizando tres concentraciones diferentes de ácido. La primera concentración tiene 15% de ácido, la segunda 35% y la tercera 55%. Debido a las cantidades de soluciones de ácido que dispone, necesitan utilizar el doble de la solución al 35% que la solución al 55%. ¿Cuánto deben utilizar de cada solución?

Situaciones como la anterior, en la que intervienen varias cantidades desconocidas, son más fáciles de resolver de manera rápida y organizada mediante el planteo y la resolución de un sistema de ecuaciones.

A continuación, se definen algunos conceptos previos para abordar el tema.

Definición:

Una **ecuación lineal** con **n incógnitas** es una ecuación del tipo:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = c$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ y $x_1, x_2, \ldots, x_n$ reciben el nombre de **incógnitas**, **variables** o **indeterminadas**.

Este tipo de ecuaciones se llaman *lineales* puesto que los exponentes de las incógnitas son todos iguales a 1. En el caso en que alguna incógnita tenga un exponente diferente de 1, la ecuación es *no lineal*.

- ¿Cuántas soluciones puede tener una ecuación lineal?

En algunas situaciones, como las de la actividad, interesa calcular una solución que satisfaga varias ecuaciones al mismo tiempo. Dicha solución recibe el nombre de *solución de un sistema de ecuaciones*.

Definición:

Un sistema de ecuaciones es un conjunto de **m ecuaciones** con **n incógnitas** cada una definido sobre el conjunto de los números reales. Si las m ecuaciones son lineales el sistema se llama **sistema de ecuaciones lineales**. En símbolos:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = c_2 \\ \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = c_m \end{cases}$$

donde los a_{ij}, $i = 1,2,\ldots,m$, $j = 1,2,\ldots,n$, son números reales llamados *coeficientes* del sistema, $c_1, c_2, \ldots, c_m$ también son números reales llamados *términos independientes* y $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son las incógnitas.

Una **solución** del sistema es una asignación de valores para las incógnitas que hace verdadera cada una de las ecuaciones que conforman dicho sistema.

Solución de un sistema de ecuaciones lineales

Los siguientes son dos ejemplos de sistemas de ecuaciones lineales con tres incógnitas. El segundo sistema tiene el mismo conjunto solución que el primero:

$$\begin{cases} x - 2y - z = 1 \\ -x + 3y + 3z = 4 \\ 2x - 3y + z = 10 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - 2y - z = 1 \\ y + 2z = 5 \\ z = 3 \end{cases}$$

- ¿Cuál de los dos sistemas cree es más fácil de resolver? ¿Por qué?

El objetivo será entonces analizar cómo transformar sistemas de ecuaciones como el de la izquierda a uno como el de la derecha, de manera tal que se pueda hallar el conjunto solución de manera más sencilla.

Forma triangular de un sistema de ecuaciones lineales

Se utilizará el *método de reducción* para reescribir un sistema de ecuaciones dado para transformarlo en un *sistema equivalente* de manera tal que la solución sea fácil de obtener. Dos sistemas de ecuaciones son *equivalentes* si tienen el mismo conjunto solución.

Se dice que un sistema, con el mismo número de ecuaciones que de incógnitas, está dado en forma triangular si es de la forma:

$$\begin{cases} x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + \dots + b_{1n}x_n = k_1 & \text{Ecuación 1} \\ \qquad x_2 + b_{23}x_3 + \dots + b_{2n}x_n = k_2 & \text{Ecuación 2} \\ \qquad\qquad x_3 + \dots + b_{3n}x_n = k_3 & \text{Ecuación 3} \\ \qquad\qquad\qquad \vdots & \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x_n = k_n & \text{Ecuación n} \end{cases}$$

Esta conveniente forma triangular permite averiguar el valor de x_n de la ecuación n, sustituirlo en la ecuación $n-1$ y despejar la variable x_{n-1}. Repitiendo este procedimiento se logrará averiguar el valor de cada incógnita.

Eliminación gaussiana

La transformación de un sistema de ecuaciones lineales a la forma triangular se conoce con el nombre de *eliminación gaussiana*, denominada así en honor del famoso matemático alemán Carl Gauss (1777-1855). Las operaciones necesarias para transformar un sistema de ecuaciones lineales en otro de forma triangular tienen como base a la propiedad uniforme.

Las siguientes *operaciones* permiten transformar un sistema de ecuaciones a otro sistema equivalente:

1) Multiplicar ambos miembros de una ecuación por cualquier número real no nulo.

Notación: $E_i \to kE_i, \quad k \neq 0$

2) Sumar a una ecuación un múltiplo de otra ecuación del sistema.

Notación: $E_i \to E_i + kE_j, \quad k \neq 0$

3) Intercambiar dos ecuaciones cualesquiera del sistema.

Notación: $E_i \to E_j$

Actividad 2

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones utilizando el método de eliminación gaussiana.

$$\begin{cases} 3x - 5y + z = 14 \\ x - 2y + z = 7 \\ 2x - 2y - z = 3 \end{cases}$$

El número de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales

Para un sistema de ecuaciones lineales, se cumple sólo una de las siguientes afirmaciones:

- ✓ El sistema tiene exactamente una solución.
- ✓ El sistema no tiene solución.
- ✓ El sistema tiene infinitas soluciones.

Si un sistema de ecuaciones no tiene solución se dice que dicho sistema es **incompatible**. Si el sistema tiene una única solución recibe el nombre de sistema **compatible determinado** y si el sistema tiene infinitas soluciones se llama **compatible indeterminado**.

Actividad 3

Indique el conjunto solución de cada uno de los siguientes sistemas y clasifíquelos según el número de soluciones.

a) $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ -x + 2y + z = -3 \\ 3x - 3y + 3z = 3 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ -x + 2y + z = -3 \\ 3x - 3y + 3z = 6 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ -x + 2y + z = -3 \\ 3x + y - 2z = 2 \end{cases}$

Ejercicios y Problemas

1) Determine el conjunto solución de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales y clasifíquelos según el número de soluciones:

a) $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ y + 2z = -2 \\ x + y - z = -2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ -x + 2y + 5z = 3 \\ 3x - y = 6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + y - z = -8 \\ -x + y + z = 3 \\ -2x + 4z = 18 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x - y + z + w = 0 \\ x + y + 2z + 2w = 0 \\ 2x + 2y + 3z + 4w = 1 \\ 2x + 3y + 4z + 5w = 2 \end{cases}$

2) Resuelva el acertijo de la carátula.

Matriz Asociada a un Sistema de Ecuaciones Lineales

Cuando se resuelve un sistema de ecuaciones lineales, lo que se está manipulando son los coeficientes de las variables y sus términos independientes. Por ello en esta sección se analizarán las matrices asociadas a un sistema de ecuaciones lineales para facilitar su resolución.

De esta manera puede escribirse la matriz asociada a un sistema de ecuaciones lineales cuyas entradas se corresponden con los coeficientes de las ecuaciones del sistema y los términos independientes.

A dicha matriz se la conoce con el nombre de *matriz aumentada o ampliada* del sistema de ecuaciones lineales.

Si se tiene un sistema de ecuaciones lineales cualquiera, su matriz aumentada será:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = c_1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = c_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = c_m \end{cases} \leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & c_1 \\ a_{21} & a_{21} & \cdots & a_{2n} & c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & c_m \end{array}\right]$$

Actividad 4

Escriba la matriz aumentada correspondiente al sistema de ecuaciones lineales que da solución al problema de la actividad 1.

Operaciones elementales por fila (columna)

Las operaciones estudiadas que permiten obtener sistemas de ecuaciones equivalentes a uno dado, también se aplican a las filas (o columnas) de una matriz, para obtener una *matriz equivalente por filas* a una dada.

Dichas operaciones son:

- ✓ Multiplicar una fila por un escalar no nulo.
- ✓ Sumar a una fila un múltiplo escalar de otra.
- ✓ Intercambiar dos filas.

En el caso de multiplicar una fila por un escalar no nulo, se simbolizará $F_i \to kF_i, \quad k \neq 0$ es decir a la *i-ésima* fila se le hace corresponder el producto entre k y la *i-ésima* fila.

En el caso de sumar a una fila un múltiplo escalar de otra, se simbolizará con $F_i \to F_i + kF_j, \quad k \neq 0$, es decir a la *i-ésima* fila se le hace corresponder la suma entre la *i-ésima* fila y un múltiplo escalar de la *j-ésima* fila.

Por último, el intercambio de filas se simbolizará con $F_i \leftrightarrow F_j$.

Estas operaciones serán útiles para lograr hallar una matriz equivalente por filas de manera que el sistema de ecuaciones asociado sea uno triangular.

Matriz escalonada por filas y escalonada reducida por filas

Se dice que una matriz es **escalonada por filas** (MEF) si satisface las siguientes condiciones:

1) El primer elemento distinto de cero de cada fila (leyendo de izquierda a derecha) es 1. Este se llama la *entrada inicial.*

2) La entrada inicial de cada fila está a la derecha de la entrada inicial de la fila anterior.

3) Todas las filas nulas se ubiquen en la parte inferior de la matriz.

Se dice que una matriz es **escalón reducida por filas** (MERF) si es escalonada por filas y también satisface la siguiente condición

4) Todo elemento de la columna correspondiente a una entrada inicial, excepto dicha entrada inicial, es 0.

Actividad 5

Indique si las siguientes matrices son MEF´s, MERF´s, o ninguna de ellas y luego escriba el sistema de ecuaciones asociado a cada una. Compare y responda: ¿cuál es la ventaja de hallar una MERF comparada con una MEF?

a) $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 5 \end{array}\right]$

b) $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 5 \end{array}\right]$

c) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

d) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

e) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \end{array}\right]$

f) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$

g) $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

h) $\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$

✓ Si un sistema de ecuaciones se resuelve hallando la MEF el método según se estudió se denomina *método de reducción de Gauss*. Si se resuelve hallando la MERF, el método recibe el nombre de *Gauss-Jordan.*

Ejercicios y Problemas

3) Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones lineales reduciendo las matrices asociadas respectivas:

a) $\begin{cases} x + y - z - w = 6 \\ 2x + z - 3w = 8 \\ x - y + 4w = -10 \\ 3x + 5y - z - w = 20 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y - z + w = 0 \\ 3x + 2y + w = 0 \\ 2x + 4w = 12 \\ -2x - 2z + 5w = 6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - y + 2z + w = 5 \\ -x + y + 4z - w = 3 \\ 3x - 2y - z = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y - z - w = 6 \\ 2x + z - 3w = 8 \\ x - \frac{1}{2}z + \frac{3}{2}w = -10 \\ 3x + 5y - z - w = 20 \end{cases}$

4) En total hay 100 latas de pinturas de 4 colores: blanco, negro, verde y azul. Una lata de pintura blanca cuesta \$20, la de pintura negra cuesta \$30, mientras que las de los demás colores \$25. De lunes a jueves hay 30% de descuento en las pinturas de color negro y blanco. Y los martes y viernes hay 20% de descuento en las pinturas de otros colores. Si se compran todas las latas de pintura un lunes, se pagaría \$2250. Si realizara la misma compra el día martes pagaría \$1947 y si comprara el día viernes todas las latas, menos la de color azul, pagaría \$1570. ¿Cuánto pagaría si realizara la compra de las 100 latas el día sábado?

5) **(Opcional Nivel Warden)** Sea el sistema cuya matriz aumentada es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 0 & b & 2 \\ a & a & 4 & 4 \\ 0 & a & 2 & b \end{array}\right)$$

Para cuáles valores de a y b el sistema:

a) No tiene solución;

b) Tiene solución única;

c) Tiene infinitas soluciones dependiendo de:

- **i)** Un parámetro. **ii)** dos parámetros.

Se otorgará premio a quien comparta la resolución en el Foro de Consultas de la Guía 3, justificando todos los pasos.

6) Un sistema cuya matriz aumentada es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & \alpha \\ 0 & 1 & 2 & \beta \end{array}\right)$$

Calcule α y β sabiendo que $(2;1;\beta)$ es solución del sistema. Luego, resuelva el sistema.

7) Una herencia de US\$12000 se invirtió en tres fondos: un fondo de mercado de dinero que pagaba 3% anualmente, bonos que pagaban 4% anualmente y fondos mutuos que pagaban 7% anualmente. La cantidad invertida en fondos mutuos fue US\$4000 más que la invertida en bonos. El interés total ganado durante el primer año fue de US$670. ¿Cuánto dinero se invirtió en cada fondo?

8) Una mezcla de 5kg de fertilizante A, 13kg de fertilizante B y 4kg de fertilizante C producen nutrientes óptimos para una planta. La marca comercial X contiene partes iguales de fertilizantes B y C. La marca comercial Y contiene 1 parte de fertilizante A y dos partes de fertilizante B. La marca comercial Z contiene dos partes de fertilizante A, 5 partes de fertilizante B y 2 partes de fertilizante C. ¿Cuánto necesita de cada marca para obtener la mezcla deseada?

9) Un DJ debe reproducir 32 canciones en no más de dos horas. Debe escoger las canciones de entre los últimos álbumes de rock nacional, cumbia pop y reggaetón. Desea reproducir el doble de canciones de rock nacional que de reggaetón, y cuatro canciones más de reggaetón que de cumbia pop. ¿Cuántos de cada tipo de canción debe reproducir?

10) Tres youtubers famosos: Vegetta777, Willyrex y El Rubius, construyen cada uno una granja de bolitas de slime. Entre las tres granjas se produce por hora 33000 bolitas de slime. La granja de Vegetta777 produce por hora, la misma cantidad de bolitas de slime que la producen por hora la de Willyrex y El Rubius, juntas. Si Vegetta777 dejó pasar una hora, Willyrex 5 horas y El Rubius 2, en total recolectaron 67500 bolitas de slime. ¿Cuál de las tres granjas es la más eficiente?

RESPUESTAS

1) **a)** $S=\left\{\left(-1;-\frac{4}{3};-\frac{1}{3}\right)\right\}$ **b)** $S=\{(1;-3;2)\}$ **c)** $S=\{(-1;-2;4)\}$ **d)** $S=\{(-3;-1;-1;3)\}$

2) 1200_3

3) **a)** $S=\{(6;\ -9;\ -9;\ 0)\}$ **b)** $S=\{(6;\ -9;\ -9;\ 0)\}$

c) $S=\{(20-12t\ ;\ 31-19t\ ;\ -2+2t;\ t),\ t\in\mathbb{R}\}$ **d)** $S=\left\{\left(-3;\ 5;\ \frac{1}{2};-\frac{9}{2}\right)\right\}$

4) \$2560

5)

6) $\alpha=3$ y $\beta=-1$. La solución del sistema es: $S=\{(3+t,\ -1-2t,\ t),\ t\in\mathbb{R}\}$

7) US\$2000 fondo de mercado de dinero, US\$3000 en bonos y US\$7000 en fondos mutuos.

8) 4 de X, 9 de Y y 9 de Z

9) 5 de cumbia pop, 9 de reggaetón y 18 de rock nacional

10) Vegetta777 (16500 por hora)