ESCUELA SUPERIOR DE COMERCIO MANUEL BELGRANO

NIVEL PREGRADO

Analista Universitario en Sistemas Informáticos

Matemática Discreta y Álgebra

GUÍA N°3: MATRICES

Unidad: Matrices

Curso: 1° A y B

Docentes: Andrea Campos y Víctor Palazzesi

AÑO LECTIVO 2022

Introducción

El estudio de vectores y matrices constituye el núcleo central del Álgebra Lineal. Quien comenzó sus estudios sobre vectores fue el irlandés Sir William Hamilton (1805-1865). Ligado a este concepto se encuentra el de Matriz. Las Matrices tienen utilidades en elementos complejos como el diseño de las aplicaciones móviles y en elementos más simples como la resolución del Cubo de Rubik y la ampliación o reducción de una imagen escaneada.

Existen proyectos o aplicaciones que utilizan matrices para la localización de elementos en la vida real, en los cuales se nos sugieren diferentes rutas de acceso para acceder a ellos (como es el caso de los GPS); así también como la teledetección de imágenes satelitales para predecir fenómenos naturales.

Dentro de la Administración, son de gran utilidad a la hora de diseñar inventarios, salidas e ingresos. De esta manera se construyen grandes bases de datos que junto con un análisis estadístico adecuado se podrán realizar estimaciones y predicciones para optimizar recursos.

No hace muchos años se han realizado grandes avances en el área de la Inteligencia Artificial, la cual permite dar solución a problemas de múltiples campos de estudio.

Matrices

Se denomina **matriz** a todo conjunto de números o expresiones dispuestos en forma rectangular, determinando filas y columnas. Cada uno de los números (o expresión) que conforman la matriz se denomina elemento (o entrada). Un elemento se distingue de otro por la posición que ocupa, es decir, la fila y la columna a la que pertenece.

En la vida diaria continuamente manejamos información, la cual se puede escribir en cuadros de doble entrada.

Ejemplo 1

La sucursal A de la Empresa "Librería" registra sus ventas mensuales de libros, de acuerdo con la siguiente clasificación: "literatura", "ciencias", "artes" y "otros".

Al elaborar el informe para el primer trimestre se han registrado los siguientes datos de ventas:

Libros de Literatura	
Enero	104
Febrero	120
Marzo	118

Libros Científicos	
Enero	50
Febrero	65
Marzo	147

Libros de Arte	
Enero	191
Febrero	122
Marzo	99

Otros Libros	
Enero	285
Febrero	116
Marzo	132

El resumen de esta situación puede presentarse en forma sintética mediante la siguiente **matriz:**

$$\begin{array}{ccc} & \text{columna 1} & \\ \text{elemento}_{12} & \begin{pmatrix} 104 & 50 & 191 & 285 \\ 120 & 65 & 122 & 116 \\ 118 & 147 & 99 & 132 \end{pmatrix} & \text{fila 2} \end{array}$$

- Las **filas** representan meses del año:

  fila 1: *enero* fila 2: *febrero* fila 3: *marzo*

- Las **columnas** indican el tipo de libro según la clasificación mencionada:

  columna 1: *tipo literatura* columna 2: *tipo científico*

  columna 3: *tipo arte* columna 4: *otros*

- Cada **elemento** representa la cantidad de libros vendidos **por tipo y por mes.**

Actividad 1

Una empresa minera está estudiando un plan de inversiones para el próximo año. La gerencia general ha autorizado la evaluación de tres propuestas alternativas que implican la construcción de una planta:

a) para la producción de cobre electrolítico
b) para la producción de acero inoxidable
c) para la producción de aluminio.

A los fines de competencia de mercado se tienen algunas estimaciones preliminares:

Sin competencia la planta de cobre electrolítico puede lograr ganancias de 4,35 millones de pesos al año y con competencia en el mercado 1,82 millones de pesos anuales.

La planta de acero puede lograr 3,70 millones de pesos si es la única en su ramo, de lo contrario 2,10 millones de pesos anuales.

Finalmente, la planta de aluminio tiene asegurado un mercado estable que le redituará 2,75 millones de pesos anuales, en cualquiera de las circunstancias mencionadas.

Represente a través de una matriz, una síntesis de la situación planteada.

Actividad 2

La existencia de 5 artículos A, B, C, D, E, en una cadena de 3 almacenes I, II, III, viene indicada por la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 5 & 3 & 2 \\ 7 & 4 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

a) ¿Qué almacén dispone de mayor stock del artículo C, y cuál es esa cantidad?

b) ¿En qué almacén y de qué artículos conviene lanzar una oferta para evitar exceso de existencia?

c) ¿Representa un valor significativo la suma de los elementos de las filas? ¿y la suma de los elementos de las columnas?

Actividad 3

Un instituto mixto de enseñanza tiene 4 secciones (4 opciones). Los alumnos están distribuidos según la siguiente tabla:

	A	B	C	D
Alumnos	32	31	18	21
Alumnas	21	23	22	19

El consumo semanal por alumno de fotocopias (F), hojas de examen (E) y hoja de programación (H) según el curso viene dado por:

	A	B	C	D
F	2	2	5	3
E	1	2	3	2
M	3	3	2	3

a) Represente en una matriz el consumo total de hojas por sexo y por opciones

b) Si cada hoja sale \$0,10 represente mediante una matriz el importe semanal en fotocopias, hojas de examen y hojas de programación por alumno según la opción.

Definición

Sea $m \geq 1$ y $n \geq 1$. Se llama *matriz* $m \times n$ de números reales a un conjunto ordenado dispuesto en m filas y n columnas. Decimos que $m \times n$ es el orden o formato de la matriz.

$$\begin{array}{ccc} & \begin{array}{cccc} \phantom{a_{11}} & \phantom{a_{12}} & \text{columna } j \downarrow & \phantom{a_{1n}} \end{array} & \\ A = & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & a_{ij} & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \longrightarrow \text{fila } i \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Notación:

- A : el nombre de la matriz.
- a_{ij} : el nombre del elemento que se encuentra en la fila i y la columna j

Ejemplo 2:

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B \text{ es una matriz } 3 \times 2 \text{ (tres filas y dos columnas)}$$

$b_{12} = 9$ (se lee “b sub-uno-dos”)

$b_{31} = 1$ (se lee “b sub-tres-uno”)

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 4 \\ 6 & 9 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \text{ es una matriz } 4 \times 2 \text{ (4 filas y 2 columnas)}$$

Actividad 4

Dada la matriz: $T = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 5 \\ 4 & 6 & 9 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Indique los valores numéricos de:

a) $t_{13} =$ b) $t_{23} =$ c) $t_{32} =$

Actividad 5

Los siguientes son los elementos de la matriz *P:* $p_{23} = 5$, $p_{22} = 6$, $p_{12} = -3$, $p_{21} = 1$, $p_{11} = 0$ y $p_{13} = 8$. Represente la matriz P

Actividad 6

Indique cual es el orden de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 5 \\ 8 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4{,}3 \end{pmatrix} \qquad C = (0)$$

Vectores

Un vector fila de n componentes (o entradas) se define como una matriz $1 \times n$:

$$\left(x_{11}, x_{12}, \cdots, x_{1n}\right)$$

Un vector columna de n componentes (o entradas) se define como una matriz $n \times 1$:

$$\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix}$$

En ambas definiciones, x_1 se denomina la **primera componente**, x_2 la **segunda componente**, y así sucesivamente. En términos generales, x_k se denomina la **k-ésima componente** del vector. También suele decirse que el vector es de dimensión n.

Observación: Si bien en la definición se establece que las componentes son "números", en algunas aplicaciones suelen utilizarse *vectores lógicos* ("TRUE", "FALSE", "FALSE", "TRUE") o *vectores de caracteres* ("rojo", "azul", "negro",…); entre otros.

Ejemplo 3:

$D = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 1 \end{pmatrix}$ es un vector fila de dimensión 3 y $E = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ es un vector columna de dimensión 3.

Matrices iguales

Sean A una matriz $m \times n$ y B una matriz $r \times p$. A y B son iguales si se cumple que:

- $m = r$ y $n = p$,
- $a_{ij} = b_{ij}$ para cualquier i y para cualquier j.

La igualdad de matrices se reduce por lo tanto la igualdad entre elementos.

Actividad 7

Indique los valores de c_{21} y de c_{23} para que $A = C$ siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ c_{21} & -1 & c_{23} \end{pmatrix}$$

Matriz Nula

Es la matriz cuyos elementos son todos nulos.

Ejemplo 4:

Las matrices A y B son nulas: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Matriz Cuadrada

Es una matriz $m \times n$ en la que $m = n$. El orden de una matriz cuadrada es directamente n.

En una matriz cuadrada los elementos $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ forman lo que se llama la *diagonal principal*.

Nota: si $n \neq m$ la matriz se llama *rectangular*.

Ejemplo 5

La matriz S es cuadrada de orden 2 (o dimensión 2) y la matriz R es cuadrada de orden 3 (o dimensión 3)

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \sqrt{3} \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 3 & 9 \\ 4 & \sqrt{5} & 4 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 6

En la matriz V (cuadrada de orden 2):

$$V = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \pi & 2 \end{pmatrix}$$

Los elementos de la diagonal principal son 1 y 2

Matriz Diagonal

Es una matriz cuadrada en la que todos sus elementos **no diagonales** son nulos.

En símbolos A es diagonal si se cumple que $a_{ij} = 0$ para todo $i \neq j$

Ejemplo 7:

Las matrices D y L son matrices diagonales.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Matriz Identidad

Es una matriz diagonal en la que todos los elementos de la diagonal son iguales a la unidad.

En símbolos, I es identidad si se verifica que $a_{ij} = 1$ para $i = j$, y $a_{ij} = 0$ para todo $i \neq j$.

Ejemplo 8:

Las siguientes son matrices identidad de orden 2 y 3 respectivamente

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

OPERACIONES CON MATRICES

Matriz Transpuesta de una Matriz

La transpuesta de una matriz $A_{m\times n}$, es una matriz de orden $n \times m$ que se obtiene intercambiando filas por columnas (o lo que es lo mismo columnas por filas). El elemento a_{ij} de la matriz A, ocupa el lugar a_{ji} en la matriz transpuesta de A.

La matriz transpuesta de A se simboliza por A^t.

Ejemplo 9:

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & \sqrt{5} \\ 0 & 9 \\ -7 & 8 \end{pmatrix}$, su matriz traspuesta es $A^t = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -7 \\ \sqrt{5} & 9 & 8 \end{pmatrix}$

Matriz Simétrica

Una matriz cuadrada A es simétrica si se cumple que: $A = A^t$

Ejemplo 10:

Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

su transpuesta es $A^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

Como $A = A^t$ entonces A es simétrica.

Adición de Matrices

Dadas dos matrices A y B ambas de orden $m \times n$ se define la **matriz suma** C de orden $m \times n$ tal que: $C = A + B$.

Cada elemento de la matriz C cumple con la condición: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Ejemplo 11:

Dadas las matrices: $Q = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$ $\quad R = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

Entonces:

$$N = Q + R$$
$$N = \begin{pmatrix} (1+2) & (3+(-2)) \\ ((-4)+(-3)) & 5+1 \end{pmatrix}$$
$$N = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -7 & 6 \end{pmatrix}$$

Actividad 8

Sean: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y B=$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

Determine en caso que sea posible:

a) $A + B$

b) $A^t + B$

c) $A + B^t$

Producto de un escalar por un matriz

Sea A una matriz $m \times n$ y λ un número real, la matriz $C = \lambda \cdot A$ es una matriz $m \times n$ cuyos elementos resultan de multiplicar cada elemento de la matriz A por el número λ.

Ejemplo 12:

Dada $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $\lambda = -2$. Calcule $\lambda \cdot A$

$$\lambda \cdot A = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -6 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Propiedades de la adición de matrices, y producto de un escalar por una matriz:

Sean A, B y C matrices del mismo orden. α y β dos números reales

a) $A + B = B + A$
b) $(A + B) + C = A + (B + C)$
c) $\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$
d) $(\alpha \cdot \beta) \cdot A = \alpha \cdot (\beta \cdot A)$
e) $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$

Multiplicación de matrices

Suponga que la siguiente matriz P, corresponde a los precios de venta en \$ (columna 1) y en US\$ (columna 2) según el tipo de libro, en la librería A (presentada al inicio de esta guía):

$$A = \begin{pmatrix} 104 & 50 & 191 & 285 \\ 120 & 65 & 122 & 116 \\ 118 & 147 & 99 & 132 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad P = \begin{pmatrix} 1474 & 8{,}19 \\ 1647 & 9{,}15 \\ 1044 & 7{,}82 \\ 967 & 7{,}24 \end{pmatrix}$$

¿Cuánto se recaudó según cada mes durante el primer trimestre?

Si se quiere saber esta respuesta para el mes de Febrero, observe que deben sumarse los productos entre la cantidad de libros de cada tipo y su respectivo precio en \$:

$$120 \cdot 1474 + 65 \cdot 1647 + 122 \cdot 1044 + 116 \cdot 967 = 523475$$

Y para saber la recaudación en US\$ para el mismo mes:

$$120 \cdot 8{,}19 + 65 \cdot 9{,}15 + 122 \cdot 7{,}82 + 116 \cdot 7{,}24 = 3371{,}43$$

Entonces puede obtenerse una nueva matriz 3×2 que reúna las recaudaciones en ambas monedas para cada uno de los meses:

$$R = \begin{pmatrix} 710645 & 4866,28 \\ 523475 & 3371,43 \\ 632301 & 4041,33 \end{pmatrix}$$

Piense en cómo se obtuvieron los elementos $r_{11}, r_{12}, r_{21}, r_{22}, \ldots$

¿Qué hubiera pasado si P tenía menos de 4 filas o más de 4 filas?

Sea A una matriz $m \times n$ y B una matriz $n \times p$. Se define matriz producto $C = A \cdot B$ a la matriz donde cada c_{ij} se calcula de la siguiente manera:

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nk}$$

$$c_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk}$$

Es decir, si A es de orden $m \times n$ y B de orden $n \times p$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{ij} & \cdots & b_{ip} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i1} & \cdots & c_{ij} & \cdots & c_{ip} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mj} & \cdots & c_{mp} \end{pmatrix}$$

<u>*Observación*</u>: según la definición, para poder realizar el producto entre dos matrices, debe cumplirse que el número de columnas de la primera matriz coincida con el número de filas de la segunda matriz. En caso de que esta condición no se cumpla, no podrá obtenerse el producto entre dichas matrices.

Ejemplo 13: Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \\ 5 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 1 \\ 3 & 8 & -2 \end{pmatrix}$. Calcule $A \cdot B$

A es una matriz 4×2, B es una matriz 2×3, por lo tanto, la matriz producto es de orden 4×3

Para calcular c_{11}, se toman los elementos de la fila 1 de la primera matriz y los elementos de la columna 1 de la segunda matriz:

$$\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix} \qquad \begin{aligned}c_{11}&=1\cdot0+0\cdot3\\&=0\end{aligned}$$

$c_{11}=0$

Para calcular c_{32} se toman los elementos de la fila 3 de la primera matriz y los elementos de la columna 2 de la segunda matriz

$$\begin{pmatrix}5 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6\\8\end{pmatrix} \qquad \begin{aligned}c_{32}&=5\cdot6+4\cdot8\\&=62\end{aligned}$$

Así, los elementos de la matriz $C=A\cdot B$ son:

$$\begin{array}{lll}
c_{11}=1\cdot0+0\cdot3=0 & c_{12}=1\cdot6+0\cdot8=6 & c_{13}=1\cdot1+0\cdot(-2)=1\\
c_{21}=(-2)\cdot0+3\cdot3=9 & c_{22}=(-2)\cdot6+3\cdot8=12 & c_{23}=(-2)\cdot1+3\cdot(-2)=-8\\
c_{31}=5\cdot0+4\cdot3=12 & c_{32}=5\cdot6+4\cdot8=62 & c_{33}=5\cdot1+4\cdot(-2)=-3\\
c_{41}=0\cdot0+1\cdot3=3 & c_{42}=0\cdot6+1\cdot8=8 & c_{43}=0\cdot1+1\cdot(-2)=-2
\end{array}$$

Es decir, la matriz producto $A\cdot B$ es; $C=\begin{pmatrix}0 & 6 & 1\\9 & 12 & -8\\12 & 62 & -3\\3 & 8 & -2\end{pmatrix}$

Actividad 10

Determine los valores de c_{12}, c_{32} y de c_{41}:

$$\begin{pmatrix}3 & 2 & 5\\4 & 1 & 6\\2 & 3 & 1\\5 & 2 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1\\5 & 0\\1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}21 & c_{12}\\19 & 28\\20 & c_{32}\\c_{41} & 5\end{pmatrix}$$

Actividad 11

La empresa K, fabricante de aparatos de televisión, desea calcular el número de materiales tipo I y II necesarios para programar el proceso de producción de tres modelos diferentes A, B y C.

En la siguiente tabla se detallan los requerimientos de materiales según el modelo:

partes / modelo	A	B	C
I	13	18	20
II	2	3	4

Para el mes de enero se ha recibido el siguiente plan de producción:

- 120 unidades del modelo A, 240 del modelo B y 100 del modelo C.
- Para el mes de febrero se estima producir: 60 unidades del modelo A, 120 del B y 90 del modelo C.
  a) Sintetice la información en forma matricial.
  b) Determine el número de partes que se requieren para ambos meses.

Determinante

Dada una matriz cuadrada $n \times n$ se puede asociar a ella un número llamado determinante.

Las propiedades de este número son de gran utilidad en el estudio del álgebra de matrices y en la resolución de problemas a través de éstas.

Simbólicamente: $|\,A\,|$ representa el determinante de la matriz A.

También se puede escribir

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$ (es decir la matriz entre **“barras”**)

Cálculo del determinante

Caso 1:

Para el caso de una matriz de orden 2:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

el determinante se calcula como la diferencia entre el producto de los elementos de la diagonal principal y el producto de los elementos de la contradiagonal:

$$|A| = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$$

Ejemplo 14:

Calcule el determinante de $B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

$$\det(B) = 3 \cdot 2 - 4 \cdot (-5) \quad \Rightarrow \quad \det(B) = 26$$

Caso 2:

Para el caso de una matriz de **orden mayor que 2** se puede calcular por diferentes métodos:

Veremos dos de estos métodos a través de un ejemplo:

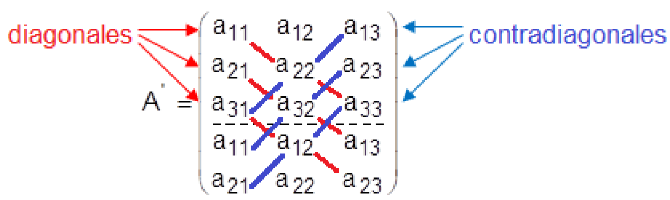
I) Método de Sarrus
II) Método de los cofactores

Método de Sarrus

Este método es útil para matrices de orden 3

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

1) Para calcular el determinante de la matriz A, **ampliamos** la matriz agregando las dos primeras filas:



2) Calculamos la suma de los productos de los elementos de las "diagonales" y la suma de los productos de los elementos de las "contra-diagonales":

$$D = (a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}) + (a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13}) + (a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23})$$
$$C = (a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13}) + (a_{11} \cdot a_{32} \cdot a_{23}) + (a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33})$$

3) El determinante de la matriz A es la diferencia entre estas sumatorias, es decir:

$$|A| = D - C$$

Ejemplo 15:

Calcule por el método de Sarrus el determinante de la matriz G siendo: $G = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 10 \end{pmatrix}$

Ampliamos la matriz G: $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 10 \\ \hdashline 4 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$|G| = 4 \cdot 0 \cdot 10 + (-1) \cdot 4 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 \cdot 0 - (3 \cdot 0 \cdot (-1) + 4 \cdot 4 \cdot 0 + (-1) \cdot 2 \cdot 10)$

$|G| = 24$

Método de los cofactores

Antes de comentar este método, se define **menor** y **cofactor** de un elemento de una matriz.

Sea A una matriz cuadrada. El **menor** del elemento a_{ij} (denotado por m_{ij}) es el determinante de la matriz que resulta de eliminar la fila i y la columna j de A.

El **cofactor** de un elemento es igual al determinante de la matriz que queda al eliminar la fila y columna de ese elemento por $(-1)^{i+j}$.

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot m_{ij}$$

El método de los cofactores es aplicable a **cualquier matriz cuadrada.**

Sea:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

1) Se toma una fila para el desarrollo tratando de que esta contenga la mayor cantidad de 1 o 0 posibles, para simplificar el cálculo.

2) A cada elemento de la fila i elegida, a_{ij}, se lo multiplica por su **cofactor**.

3) El determinante de la matriz A es igual a la suma de los productos anteriores.

Veamos el cálculo del determinante para la matriz A tomando la primera fila como fila a desarrollar.

$$|A| = a_{11}.(-1)^{1+1}.\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}.(-1)^{1+2}.\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}.(-1)^{1+3}.\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Donde $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$ representa el determinante de la matriz $\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$. Es decir, la matriz A sin la fila 1 y columna 2.

Ejemplo 16:

Calcule por el método de cofactores el determinante de la matriz G siendo: $G = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 10 \end{pmatrix}$

Si se elige la fila 1 entonces $i = 1$

$$\begin{aligned} |G| &= 4 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 10 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 4 \cdot 0 - 2 \cdot (-10) - 1 \cdot (-4) \\ &= 24 \end{aligned}$$

- Elija otra fila distinta de la primera y utilícela para calcular el determinante de G por el método de cofactores, para comprobar que el resultado es el mismo.

Propiedades de los determinantes:

a) Si se intercambian entre si dos filas el determinante **sólo** cambia de signo, pero el valor absoluto se mantiene invariable.

b) El determinante de una matriz es igual al de su transpuesta.

c) Si una matriz tiene una fila nula su determinante es cero.

d) Si una matriz tiene dos filas iguales su determinante es cero.

e) Si multiplicamos una fila de una matriz por un número, su determinante queda multiplicado por ese número.

<u>*Nota*</u>: Hemos visto el cálculo del determinante a través de filas, y analizado sus propiedades a partir de las filas. Todas estas propiedades y desarrollo son válidos si consideramos las columnas. Téngase en cuenta que se consideran filas o columnas. Nosotros trabajaremos, siempre haciendo operaciones sobre las filas, pero con toda confianza puede elegir trabajar con columnas.

Actividad 12

Calcule el determinante de la matriz A utilizando los dos métodos, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Matrices Inversibles

Actividad 13

Calcule $A \cdot B$ y $B \cdot A$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -3 \\ -3 & 7 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Inversa de una Matriz

Sean A y B matrices cuadradas de orden n, se dice que B es matriz inversa de A si se cumple que:

$$A \cdot B = I_n \quad \wedge \quad B \cdot A = I_n$$

Se dice entonces que A es una matriz ***inversible***.

Propiedad: unicidad de la matriz inversa

Sean A, B y C matrices cuadradas de orden n, tales que $A \cdot B = B \cdot A = I_n$ y $A \cdot C = C \cdot A = I_n$

Entonces $B = C$.

Es decir que, si una matriz es inversible, su inversa es única.

Notación:

Si A es inversible, su inversa se denota A^{-1}

Actividad 14

Determine A^{-1} y B^{-1}, siendo A y B las matrices de la Actividad 13

Cálculo de la matriz inversa

Método de la Adjunta

Dada una matriz cuadrada A, se llama ***matriz Adjunta de A***, y se denota ***Adj(A)*** a la matriz *traspuesta* de la matriz que se obtiene de sustituir cada elemento a_{ij} de A por el cofactor de a_{ij}.

Para calcular la inversa de la matriz A, inversible, utilizaremos la siguiente relación:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot Adj(A)$$

Actividad 15

Calcule la inversa de la matriz D:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ -2 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

Método de Gauss (Promesa para el futuro).

En la próxima unidad estudiaremos este método para calcular la inversa.

Propiedades de la inversa:

a) La matriz identidad es inversible y coincide con su inversa:

$$I_n^{-1} = I_n$$

b) Si A y B son matrices inversibles, la matriz $A \cdot B$ es inversible y:

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

c) Si la matriz A es inversible, la transpuesta de A es inversible y:

$$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$$

d) El determinante de la matriz inversa de una matriz A es igual al inverso multiplicativo del determinante de la matriz A:

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

e) Una matriz cuadrada es inversible si y sólo si su determinante es distinto de 0.

Ejercicios y problemas

1) Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad C = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 0 & -2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$

Calcule:

a) $2 \cdot A - B$ **b)** $-C + A - 0{,}5 \cdot B$ **c)** $B \cdot A^t$

d) $A - 3 \cdot B$ **e)** $A \cdot B^t$ **f)** $A \cdot B^t \cdot C$

2) Si A es una matriz de tamaño 2×3, B es 3×5, C es 5×3 y D es 3×2, ¿cuál de los siguientes productos está definido?

a) $A \cdot D^t$ **b)** $B \cdot A$ **c)** $D \cdot B$ **d)** $A \cdot C^t$

Definiciones:

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz. A es una **matriz triangular superior** si: $a_{ij} = 0$ para $i > j$.

Es decir, todos los elementos por debajo de la diagonal principal son iguales a 0

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz. A es una **matriz triangular inferior** si: $a_{ij} = 0$ para $i < j$

Es decir, todos los elementos por encima de la diagonal principal son iguales a 0

Observación: Una matriz diagonal es tanto triangular superior como triangular inferior.

Propiedad: El determinante de una matriz triangular (superior o inferior) es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.

3) Calcule el determinante de la matriz A de orden 5×5, sabiendo que es triangular inferior y que $a_{33} = 0$.

4) Dadas las siguientes matrices:

a) calcule el determinante en los casos que sea posible. Justifique.

b) Determine la matriz inversa de las que son inversibles. Justifique.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 2 & 0 \\ 3 & 8 & 0 & 1 \\ 4{,}5 & 2{,}5 & 1 & 0 \\ 6 & 7 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 6 & 7 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 2 \\ 3 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

5) Dadas las matrices A, B y C:

$$A = \begin{pmatrix} 20 & 50 \\ 30 & 60 \\ 30 & 32 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 45 & 20 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Las columnas de la matriz A representan los litros de vino y limonada que se han echado en tres tipos de bidones B_1, B_2 y B_3, para producir cocteles. La matriz B representa los precios por litros de cada uno de los dos líquidos. Y la matriz C la cantidad de bidones de cada tipo que una empresa dedicada a realizar eventos ha adquirido.

a) Calcule la matriz $A \cdot B^t$, ¿cuál es el significado real de esa matriz?

b) Determine el resultado de $C \cdot A \cdot B^t$ y explique el significado de dicha matriz.

6) Un supermercado vende 98 latas de arvejas, 75 de choclo y 200 de salsa de tomate el día viernes. El día sábado vende 122 latas de arvejas, 90 de choclo y 215 de salsa de tomate. Los precios por unidad de cada uno de los productos son respectivamente, US$35, US$50 y US$70.

Determine la matriz cuyos elementos muestren los ingresos obtenidos en concepto de ventas los días viernes y sábado respectivamente. (*Plantee y resuelva la operación entre matrices correspondiente*)

7) Una firma de automóviles dispone de dos plantas de fabricación una en España y otra en Inglaterra, en los que fabrica dos modelos de coches M1 y M2, de tres colores negro, blanco y rojo. Su capacidad de producción diaria en cada planta está dada por las siguientes matrices (A para España y B para Inglaterra).

$$A = \begin{pmatrix} 300 & 95 \\ 250 & 100 \\ 200 & 100 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 190 & 90 \\ 200 & 100 \\ 150 & 80 \end{pmatrix}$$

a) Si se eleva la producción en España un 20% y se disminuye en Inglaterra un 10%, obtenga la matriz que representa la nueva producción diaria de la firma según el modelo y el color.

b) Determine una matriz que sintetice la producción total diaria de cada modelo.

c) Escriba una matriz que premultiplicada a la matriz A devuelva una matriz que contenga la producción diaria de la planta de España según el modelo y sólo para los colores negro y blanco. (*Es decir que la nueva matriz debe tener las dos primeras filas de A*).

8) Un constructor hace una urbanización con tres tipos de viviendas: sencillas, normales y de lujo. Cada vivienda sencilla tiene 1 ventana grande, 7 medianas y 1 pequeña. Cada vivienda normal tiene 2 ventanas grandes, 9 medianas y 2 pequeñas. Y cada vivienda de lujo tiene 4 ventanas grandes, 10 medianas y 3 pequeñas. Cada ventana grande tiene 4 cristales y 8 bisagras, cada ventana mediana tiene dos cristales y 4 bisagras; y cada ventana pequeña tiene 1 cristal y 2 bisagras.

a) Escriba una matriz que describa el número y tamaño de ventanas en cada tipo de vivienda; y otra matriz que exprese el número de cristales y el número de bisagras en cada tipo de ventana.

b) Calcule una matriz que exprese el número de cristales y de bisagras necesarias en cada tipo de vivienda.

9) Una fábrica produce 3 artículos y tiene 4 clientes. El resumen mensual de ventas se anota en una matriz, donde cada cliente dispone de un vector fila cuyas componentes indican las cantidades adquiridas de cada artículo. Sea E la matriz de ventas de enero:

$$E = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 2 \\ 3 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

Durante el mes de febrero se han realizado las siguientes ventas: el primer cliente ha comprado 5 unidades del primer artículo, 2 del segundo y 3 del tercero; el segundo cliente, 6 unidades de cada uno; el tercero sólo 4 unidades del primer artículo y el cuarto no ha comprado nada.

a) Construya la matriz de ventas del mes de febrero.
b) Determine la matriz que sintetice las ventas conjuntas del mes de enero y febrero.
c) Encuentre la variación de las ventas de febrero en relación con las de enero.
d) Si las ventas del mes de marzo han duplicado las de enero y las de abril han cuadruplicado las de marzo. ¿Cuál habrá sido el total de ventas en el primer cuatrimestre (según cada cliente por cada artículo)?
e) Aplique transformaciones a la matriz E, de tal manera que mediante operaciones, se obtenga una matriz que contenga las ventas de los artículos 2 y 3 y sólo para los clientes 2, 3 y 4.

10) Una empresa manufacturera se dedica a la fabricación de tres productos. La siguiente tabla muestra el número de horas-máquina requeridas por cada unidad de dichos productos:

	Producto 1	**Producto 2**	**Producto 3**
Fresadora	7	8	5
Torno	10	9	7
Molino	5	3	2
Perforadora	2	3	1

La producción semanal es de 60 unidades del producto 1, 40 del producto 2 y 90 del producto 3.

El costo de la hora de cada máquina es de US$5 en la fresadora, US$15 en el torno, US$7 en el molino y US$2 en la perforadora.

Obtenga las matrices que representan:

a) Las horas semanales utilizadas de cada máquina.
b) El costo de producción por unidad de cada producto.
c) El costo total de la producción semanal.

11) En una academia de idiomas se enseña inglés y portugués en cuatro niveles y dos modalidades: presencial y a distancia. Las siguientes tablas indican, en la primera, la cantidad de alumnos en cada nivel según el idioma que estudia y la segunda el porcentaje de alumnos (los mismos para los dos idiomas) que eligen la modalidad presencial o a distancia para cada uno de los niveles:

	1° nivel	2°nivel	3° nivel	4° nivel
Inglés	130	120	210	130
Portugués	160	80	130	60

	1° nivel	2°nivel	3° nivel	4° nivel
Presencial	20%	25%	40%	75%
A distancia	80%	75%	60%	25%

a) Obtenga la matriz que proporciona el número de estudiantes por modalidad e idioma.

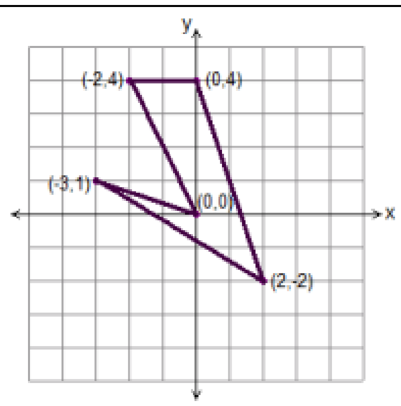
b) Sabiendo que la academia cobra $1500 por persona en la modalidad presencial y $2000 en la modalidad a distancia, halle la matriz que expresa el monto ingresado en cada uno de los idiomas.

12) En un Instituto de Enseñanza Obligatoria hay alumnos de tres pueblos A, B y C, distribuidos por cursos según la matriz D. Una empresa de transporte elabora dos rutas "a" y "b". Los kilómetros que recorrerían los alumnos de cada pueblo se muestran en la matriz E:

$$D = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 26 & 24 \\ 12 & 50 & 75 & 96 \\ 98 & 125 & 190 & 212 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 20 & 32 & 9 \\ 46 & 24 & 8 \end{pmatrix}$$

Si el precio por alumno y kilómetro recorrido es de US$12 exprese matricialmente lo que recaudaría la empresa de transporte por curso para cada itinerario.

13) Un objeto en un sistema de coordenadas puede ser representado por una matriz que contiene las coordenadas de cada punto esquina. Por ejemplo, a continuación, se da una figura en el plano y la matriz que la representa:



$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 4 \\ 0 & 4 \\ 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

En gráficas por computadora generalmente se muestran los objetos rotando en el espacio. La rotación se hace multiplicando la matriz de las coordenadas por la matriz de rotación. La matriz de rotación es:

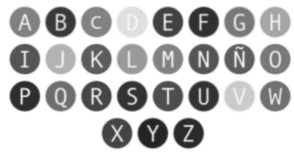
$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Esta matriz rota la figura un ángulo θ, en el sentido de las agujas del reloj.

Sea $\theta = 52^{\text{o}}$. Obtenga la matriz que contiene las coordenadas de los vértices de la figura rotada y represéntela gráficamente para verificar.

14) Una aplicación de las matrices es su utilización para codificar mensajes. Numeramos el alfabeto, por ejemplo: $A = 0$, $B = 1$, $\cdots$, $Z = 26$, espacio=27. Para la codificación se utiliza una matriz cuadrada (de cualquier orden) como clave:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$



Se escriben las palabras en matrices con tantas filas como el orden de la matriz clave, (en el ejemplo, 2 filas) para poder multiplicarlas por la izquierda de dicha matriz.

Si la palabra es “matemática” matemáticamatemática=[12, 0, 20, 4, 12, 0, 20, 8, 3, 0]

$$P = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 20 & 4 & 12 \\ 0 & 20 & 8 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

El mensaje codificado es la matriz $A \cdot P$

a) Encuentre la matriz $A \cdot P$

b) ¿Cómo se decodifica un mensaje? Encuentre la matriz $A \cdot P$

c) Si quisiera “fabricar” una matriz clave: ¿Qué condición es necesaria para que el sistema funcione?

d) ¿Qué mensaje contiene la siguiente matriz?

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 54 & 58 & 23 & 55 \\ 0 & 32 & 36 & 30 & 2 \end{pmatrix}$$

Respuestas a las actividades

Actividad 1

$$\begin{pmatrix} 4{,}35 & 3{,}70 & 2{,}75 \\ 1{,}82 & 2{,}10 & 2{,}75 \end{pmatrix}$$

- las columnas corresponden a los tres tipos de inversión
- las filas a la eventualidad que exista en el mercado competencia
- los elementos representan la utilidad estimada, por tipo de planta y por situación competitiva.

Actividad 2

Las columnas representan las cantidades de los 5 artículos en cada sucursal. Las filas las tres sucursales.

a) El almacén II posee 5 artículos C.

b) En el almacén III hay 7 artículos A y también en total hay 13 artículos A, por lo que convendría lanzar una oferta de este.

c) La suma de los elementos de las filas en este caso no es significativa, ya que representa el total de artículos por almacén; la suma de las columnas representa la existencia total de cada artículo, por lo tanto, a los fines de abastecimiento puede ser significativa.

Actividad 3

a) $\begin{pmatrix} 192 & 217 & 180 & 168 \\ 126 & 161 & 220 & 152 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}3 \end{pmatrix}$

Actividad 4

a) 5 **b)** 9 **c)** 2

Actividad 5

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 8 \\ 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Actividad 6

A es de orden 2×3; B es de orden 3×1; C es de orden 1 (1×1).

Actividad 7

$c_{21} = 2$, $c_{23} = 0$

Actividad 8

a) A y B son dos matrices de distinto orden por lo tanto no se pueden sumar

b) $A^t = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, por lo tanto: $A^t + B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

c) $B^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, por lo tanto: $A + B^t = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Actividad 10

$c_{12} = 3 .1 + 2 .0 + 5 .4 \Leftrightarrow c_{12} = 23$

$c_{32} = 2 .1 + 3 .0 + 1 .4 \Leftrightarrow c_{32} = 6$

$c_{41} = 5 .2 + 2 .5 + 0 .1 \Leftrightarrow c_{41} = 20$

Actividad 11

a) $A = \begin{pmatrix} 13 & 18 & 20 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ requerimiento de partes por modelo.

$B = \begin{pmatrix} 120 & 60 \\ 240 & 120 \\ 100 & 90 \end{pmatrix}$ representa el plan de producción

b) Se puede determinar con $A \times B$ (¡Ojo! Si definió a B con otro formato, deberá tener cuidado con la multiplicación que plantea. Puede usar transpuestas para conseguir que las condiciones para multiplicar se cumplan).

$A \times B = \begin{pmatrix} 7880 & 470 \\ 1360 & 840 \end{pmatrix}$

Actividad 12

$|A| = 11$

Actividad 13

$A \cdot B = I_3$ y $B \cdot A = I_3$

Actividad 14

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -3 \\ -3 & 7 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Actividad 15

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Respuestas Ejercicios y Problemas

1)

a) $\begin{pmatrix} 6 & 15 \\ -2 & 6 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} -29 & -18 & -5 \\ 10 & 8 & 2 \\ 1 & -7 & -1 \end{pmatrix}$ **e)** $\begin{pmatrix} -29 & 10 & 1 \\ -18 & 8 & -7 \\ -5 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 5 & 10{,}5 \\ -1 & 5 \\ 1{,}5 & 1{,}5 \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} 8 & 20 \\ -1 & -2 \\ -9 & 4 \end{pmatrix}$ **f)** $\begin{pmatrix} 55 & 67 \\ 57 & 38 \\ 13 & 11 \end{pmatrix}$

2) Sólo d)

3) $\det(A) = 0$

4) a) $\det(A) = 2$, $\det(B) = 1$, $\det(C) = 0$, $\det(D) = 2$ $\det(D) = 2$

b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{5}{2} \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ $B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -4 & 5 & -2 \end{pmatrix}$ $D^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -6 & -1 \\ 17 & 10 & -54 & -8 \\ -10 & -\frac{11}{2} & 32 & 5 \\ -6 & -\frac{7}{2} & 19 & 3 \end{pmatrix}$

5)

a) $A \cdot B^t = \begin{pmatrix} 1900 \\ 2550 \\ 1990 \end{pmatrix}$ Precios por cada uno de los tres bidones.

b) $C \cdot A \cdot B^t = \begin{pmatrix} 39150 \end{pmatrix}$ Ganancia por la venta de todos los bidones.

6) $V = \begin{pmatrix} 98 & 122 \\ 75 & 90 \\ 200 & 215 \end{pmatrix}$

Representa la cantidad de artículos vendidos según el día. Las filas se corresponden con (“Arvejas”, “Choclo”, “Salsa de Tomate”) y las columnas con (“Viernes”, “Sábado”).

$P = \begin{pmatrix} 35 & 50 & 70 \end{pmatrix}$

Precios unitarios de los artículos según el orden mencionado: (“Arvejas”, “Choclo”, “Salsa de Tomate”).

$P \cdot V$ representa las ganancias por día por las ventas de estos artículos:

$P \cdot V = \begin{pmatrix} 21180 & 23820 \end{pmatrix}$

7)

a) $1,2 \cdot A + 0,9 \cdot B = \begin{pmatrix} 531 & 195 \\ 480 & 210 \\ 375 & 192 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot A + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 1290 & 565 \end{pmatrix}$

c) $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

8)

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 2 & 9 & 2 \\ 4 & 10 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

b) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 19 & 38 \\ 28 & 56 \\ 39 & 78 \end{pmatrix}$

9)

a) $F = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 6 & 6 & 6 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $E + F = \begin{pmatrix} 14 & 7 & 5 \\ 9 & 14 & 6 \\ 4 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 1 \end{pmatrix}$

c) $F - E = \begin{pmatrix} -4 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 6 \\ 4 & 0 & 0 \\ -6 & -7 & -1 \end{pmatrix}$

d) $E + F + 2E + 4F = \begin{pmatrix} 52 & 25 & 21 \\ 39 & 54 & 30 \\ 20 & 0 & 0 \\ 18 & 21 & 3 \end{pmatrix}$

e) $X \cdot E \cdot Y$ siendo $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

10)

a) $\begin{pmatrix} 7 & 8 & 5 \\ 10 & 9 & 7 \\ 5 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 60 \\ 40 \\ 90 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1190 \\ 1590 \\ 600 \\ 330 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 5 & 15 & 7 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 8 & 5 \\ 10 & 9 & 7 \\ 5 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 224 & 202 & 146 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 224 & 202 & 146 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 60 \\ 40 \\ 90 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34660 \end{pmatrix}$

11)

a) $\begin{pmatrix} 130 & 120 & 210 & 140 \\ 160 & 80 & 130 & 60 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \\ 0,25 & 0,75 \\ 0,4 & 0,6 \\ 0,75 & 0,25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 245 & 355 \\ 149 & 281 \end{pmatrix}$

b) $M = \begin{pmatrix} 1077500 \\ 785500 \end{pmatrix}$

12) $12 \cdot \begin{pmatrix} 20 & 32 & 9 \\ 46 & 24 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 10 & 26 & 24 \\ 12 & 50 & 75 & 96 \\ 98 & 125 & 190 & 212 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17112 & 35100 & 55560 & 65520 \\ 17280 & 31920 & 31920 & 61248 \end{pmatrix}$

13) $$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & -4 \\ 0 & 4 \\ 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,615 & -0,788 \\ 0,788 & 0,615 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -4,38 & -0,844 \\ 3,15 & 2,46 \\ -0,346 & -2,81 \\ -1,06 & 2,98 \end{pmatrix}$$