Análisis Matemático y Numérico

Función Lineal

Profesora: Andrea Campos
Profesor: Víctor Palazzesi (VAR)

29 de abril de 2020

Función Lineal

Actividad pág. 11

Se tiene un barril que tiene capacidad para 20 litros y se sabe que vacío pesa 2,5kg. Se le va agregando agua destilada y se quiere saber cómo varía el peso de este barril a medida que se va llenando.
El peso será una función que depende del agua agregada. Sea x la cantidad de agua y suponga que un litro de agua destilada equivale a 1kg.

Variables:

- $P(x)$: "Peso (masa) del barril (en kg)" $\longrightarrow$ Variable dependiente
- x: "Cantidad de litros de agua del barril" $\longrightarrow$ Variable Independiente

$$x \longrightarrow P(x)$$

P es una función porque a cada una de las cantidades de litros de agua que contenga el barril le corresponde un único peso del barril.

Representación como fórmula

Se buscan regularidades...

Para $x = 0 \quad \longrightarrow \quad P(0) = 2,5$

Para $x = 1 \quad \longrightarrow \quad P(1) = 2,5 + 1$

Para $x = 2 \quad \longrightarrow \quad P(2) = 2,5 + 2$

Para $x = 3 \quad \longrightarrow \quad P(3) = 2,5 + 3$

En general...

$$P(x) = 2,5 + x$$

Como la capacidad del barril es de 20 litros...

$$0 \leq x \leq 20$$

Luego,

$$\begin{aligned} \mathscr{D}_P &= [0,20] \\ &= \{x \in \mathbb{R} \;/\; 0 \leq x \leq 20\} \end{aligned} \tag{1}$$

¿Conjunto Imagen de la función P?
El menor peso del barril se obtiene cuando no tiene carga de agua, por lo tanto será 2,5kg.
El máximo peso del barril se obtendrá cuando esté completamente cargado de agua, es decir cuando contenga 20 litros de agua:

$$\begin{aligned} P(20) &= 2,5 + 20 \\ &= 22,5 \end{aligned} \tag{2}$$

Luego el máximo peso para el barril será 22,5kg.

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \mathscr{I}_P &= [2,5; 22,5] \\ &= \{y \in \mathbb{R} \;/\; 2,5 \leq y \leq 22,5\} \end{aligned} \tag{3}$$

Representación como gráfica

Otra situación...

Suponga que ahora se tiene mercurio en lugar de agua y se sabe que tres litros de mercurio pesan 40,8kg

¿Cómo se puede expresar ahora la fórmula que modela el peso del barril en función de los litros de mercurio que contiene?

Como 3 litros de Mercurio pesan 40,8kg; resulta que 1 litro de Mercurio pesa 13,6kg.

Buscando regularidades...

Para $x = 0$ $\longrightarrow$ $P(0) = 2,5$

Para $x = 1$ $\longrightarrow$ $P(1) = 2,5 + 13,6 \cdot 1$

Para $x = 2$ $\longrightarrow$ $P(2) = 2,5 + 13,6 \cdot 2$

Para $x = 3$ $\longrightarrow$ $P(3) = 2,5 + 13,6 \cdot 3$

En general...

$$P_m(x) = 2,5 + 13,6x$$

Como la capacidad del barril sigue siendo la misma (20 litros), el **dominio** de la función P_m, teniendo en cuenta el contexto del problema, sigue siendo el mismo que en el caso anterior:

$$\begin{aligned} \mathscr{D}_P &= [0, 20] \\ &= \{x \in \mathbb{R} \;/\; 0 \leq x \leq 20\} \end{aligned} \tag{4}$$

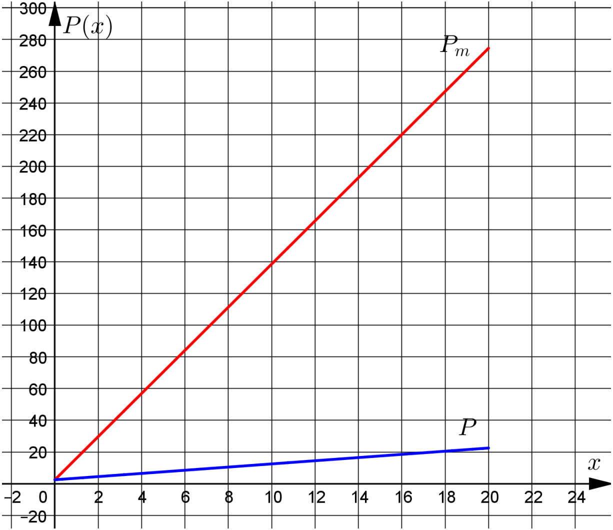
El menor peso del barril se obtiene cuando no tiene carga de mercurio, por lo tanto sigue siendo 2,5kg.
El máximo peso del barril se obtendrá cuando esté completamente cargado de mercurio, es decir cuando contenga 20 litros de mercurio:

$$\begin{aligned} P_m(20) &= 2,5 + 13,6 \cdot 20 \\ &= 274,5 \end{aligned} \tag{5}$$

Luego el máximo peso para el barril será 274,5kg.
Por lo tanto

$$\begin{aligned} \mathscr{I}_{P_m} &= [2,5; 274,5] \\ &= \{y \in \mathbb{R} \;/\; 2,5 \leq y \leq 274,5\} \end{aligned} \tag{6}$$

Representación gráfica de P_m



¿Cuánto Mercurio hay que colocar en el barril para que éste pese 270kg?

Como información se brinda un valor de la variable *Peso* y se pide hallar el valor al que le corresponde en *Cantidad de Mercurio añadido*. Es decir:

$$\begin{aligned} 270 &= 2,5 + 13,6 \cdot x \\ \Rightarrow \quad 267,5 &= 13,6 \cdot x \\ \Rightarrow \quad 19,67 &\approx x \end{aligned} \tag{7}$$

Luego, para que el barril pese 270kg es necesario añadirle aproximadamente 19,67 litros de Mercurio.

¿Tendría sentido esta misma pregunta pero para que el barril pese 300kg? ¿Por qué?

Una posible justificación se obtiene analizando el conjunto imagen, pues $300 \notin \mathscr{I}_{P_m}$
Otra posible estrategia es proceder análogamente al caso anterior:

$$\begin{aligned} & 300 = 2,5 + 13,6 \cdot x \\ \Rightarrow \quad & 297,5 = 13,6 \cdot x \\ \Rightarrow \quad & 21,88 \approx x \end{aligned} \tag{8}$$

Lo cual es un *absurdo* puesto que la capacidad máxima del barril es de 20 litros y no sería posible añadir 21,88 litros.

¿Cuánto mercurio se puede colocar en el barril para que el peso de éste no supere los 29,7kg? Exprese la solución utilizando intervalos.

$$\begin{aligned} P(x) &\leq 29,7 \\ \Rightarrow \quad 2,5 + 13,6 \cdot x &\leq 29,7 \\ \Rightarrow \quad 13,6 \cdot x &\leq 27,2 \\ \Rightarrow \quad x &\leq 2 \end{aligned} \tag{9}$$

Luego, se puede colocar no más de 2 litros de Mercurio para que el barril no supere los 29,7kg. El conjunto solución puede expresarse utilizando intervalos:

$$S = [0, 2]$$

En general...

Definición

Funciones como la del problema anterior, en la que la fórmula es

$$f(x) = ax + b$$

con a y b números reales, se las llama **funciones lineales**.
Su gráfico es una recta (semirrecta o segmento en el contexto de un problema).
El coeficiente a de la fórmula recibe el nombre de *pendiente* y b es la *ordenada al origen*

Archivo: *Gráfica de la función lineal*

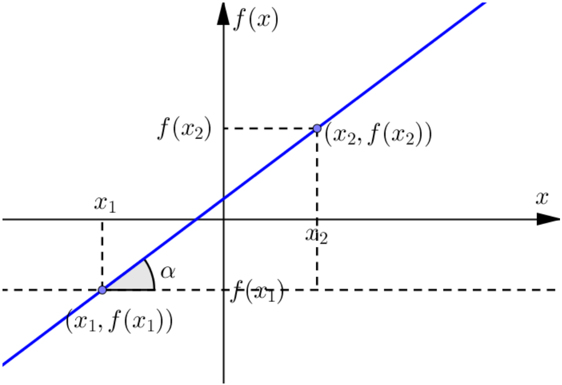
Pendiente: "a"

- Geométricamente, la pendiente de una recta se define como la tangente trigonométrica del ángulo de inclinación de la recta respecto a la horizontal.
- Representa la variación de la variable dependiente por cada unidad que varía la independiente.
- Si $a > 0$ la función es creciente, si $a = 0$ es constante y si $a < 0$ la función es decreciente.

Ordenada al Origen: "b"

- Ordenada del punto de intersección de la gráfica de f con el eje y.

Demostración...



Pendiente:

$$\begin{aligned} tg(\alpha) &= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{ax_2 + b - (ax_1 + b)}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{ax_2 - ax_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{a(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} \\ &= a \end{aligned} \tag{10}$$

Ordenada al origen:

$$\begin{aligned} f(0) &= a \cdot 0 + b \\ &= b \end{aligned} \tag{11}$$

¿No es genial?

Continuará...