ESCUELA SUPERIOR DE COMERCIO MANUEL BELGRANO

NIVEL PREGRADO

Analista Universitario en Sistemas Informáticos

Análisis Matemático y Numérico

Funciones

Unidad: Funciones

Curso: 2° A y B

Docentes: Víctor Palazzesi y Andrea Campos

AÑO LECTIVO 2022

Índice

MAPA DE LA GUÍA N°1: Funciones........3
Objetivos........3
Bibliografía complementaria........3
FUNCIONES........4
Concepto de función........5
Funciones crecientes y decrecientes........8
Ejercicios y problemas........10
FUNCIÓN LINEAL........12
Ejercicios y problemas........13
FUNCIÓN CUADRÁTICA........15
Solución de una ecuación de segundo grado........16
Vértice de la parábola........18
Ejercicios y problemas........18
FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS........20
Función exponencial........20
Actividad........20
Gráfica de la función exponencial........22
Actividad........22
Asíntotas horizontales........22
La función $y = e^x$........23
Actividad........23
Actividad........24
Actividad........25
Asíntotas verticales........26
Actividad........26
Actividad........27
Propiedad de cambio de base........27
Ejercicios y problemas........27
FUNCIONES RACIONALES........30
Gráficas de funciones racionales........31
Ejercicios y problemas........32

MAPA DE LA GUÍA N°1: Funciones.

Objetivos:

- Comprender el concepto de función mediante la articulación de sus diferentes representaciones para el abordaje de situaciones problemáticas.
- Definir y reconocer las variables involucradas en una función, así también como su dominio e imagen para poder establecer los límites del modelo matemático.
- Abordar diversas problemáticas mediante el planteo y el trabajo con funciones lineales, cuadráticas, exponenciales, logarítmicas y racionales como modelos matemáticos.

Bibliografía complementaria:

- Barallobrés, G. "*Matemática 4*". Ed. Aique.
- Barallobrés, G. "*Matemática 5*". Ed. Aique.
- Bocco, M. "*Funciones Elementales para construir Modelos Matemáticos*". Colección Las Ciencias Naturales y la Matemática. (2010).
- Demana, F. "*Precálculo*". Séptima Edición. Ed. Pearson. (2007).
- Larson, R. "*Precálculo*". Octava Edición. Ed. Cengage. (2011).
- Stewart, J. "*Precálculo*". Sexta Edición. Ed. Cengage. (2012).

FUNCIONES

Quizás la idea matemática más útil para modelar el mundo real es el concepto de función que se estudiará a continuación. Este concepto indica un tipo de relación entre dos o más variables, una correspondencia que describe cómo una cantidad depende de otra/s. Dichas correspondencias pueden ser descriptas por medio de un modelo matemático que es muy útil para resolver de manera precisa el modelo específico o inclusive para efectuar mediciones. En este apartado se trabajará con las diferentes nociones del concepto de función, las cuales permitirán construir y poder interpretar diferentes modelos.

El concepto de función se basa en la idea de correspondencia. En muchas situaciones, se observa que hay una correspondencia entre una cantidad y otra, es decir, una depende de la otra; por ejemplo:

- A cada persona le corresponde una fecha de nacimiento;
- A cada producto en el mercado le corresponde un precio;
- A cada producto farmacéutico le corresponde una formulación;
- A cada triángulo le corresponde un área;
- A cada número entero le corresponde su número opuesto.

Todas estas correspondencias reúnen una serie de características propias de una función. el concepto de función indica una relación entre dos cantidades, una asociación que describe cómo una variable cambia con respecto a la otra.

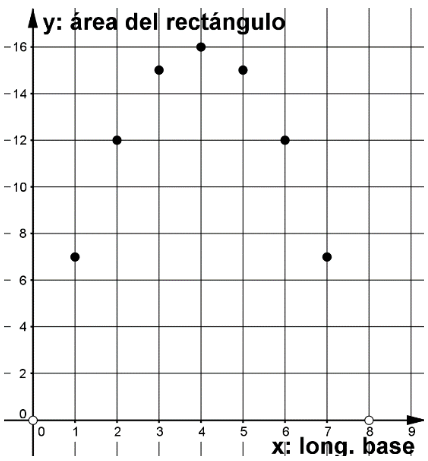
Analice la siguiente situación:

Considere un conjunto de rectángulos cuyo perímetro sea 16.

Si la longitud de uno de los lados del rectángulo es 1, la del otro lado será 7 y el área será:

$$b.h = 1.7 = 7$$

Si se trata de representar todo esto en un gráfico, asignando al eje horizontal la longitud de uno de los lados, que se puede llamar base y al vertical el área correspondiente. Se tendrá entonces:



Los ejes utilizados en el gráfico reciben el nombre de **ejes de coordenadas cartesianas rectangulares**. Al eje horizontal se lo suele llamar **x** o eje de las abscisas; la variable que se ubica sobre él, recibe generalmente el nombre de **variable independiente**. Al vertical se lo suele llamar **y** o eje de las ordenadas; sobre él se ubica la variable **dependiente**.

Para ubicar las variables sobre los ejes hay que considerar una escala conveniente en cada uno de ellos.

Puede realizarse un mismo análisis construyendo una tabla de valores si se tiene en cuenta que el perímetro siempre es 16.

Base	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Área	0	7	12	15	16	15	12	7	0

Comparando los valores del área a la derecha y a la izquierda del valor 16 puede verse que éstos se repiten. ¿Por qué?

No se considera la primera y la última columna por no tratarse de rectángulos. ¿Se podrían agregar más valores? ¿Cuántos?

¿Pueden unirse los puntos de la gráfica anterior? En caso afirmativo ¿cómo lo haría y por qué?

¿Qué valores se le puede asignar a la variable "**base**"? ¿Y a la variable "**área"**?

En el problema se relacionan **2 variables**: longitud de la base y área del rectángulo. Puede verse que a cada longitud de la base del rectángulo le corresponde un área determinada de dicho rectángulo.

Los valores de la variable **base** son elementos de un conjunto al que se llamará **conjunto de partida** y, los valores de la variable **área** son elementos de otro conjunto al que se llamará **conjunto de llegada**. Una relación de este tipo se llama **función**.

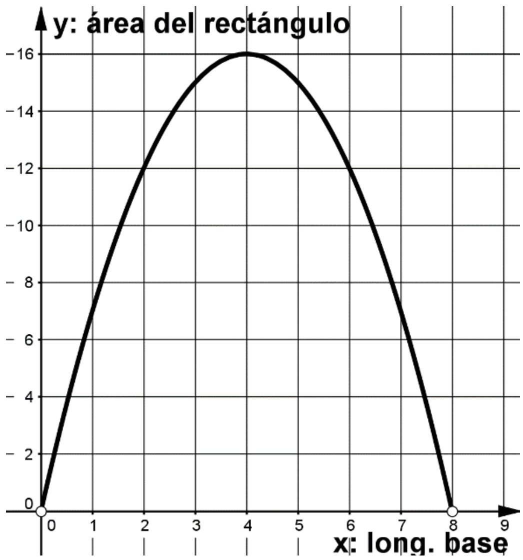
Concepto de función

Si dos conjuntos están relacionados de manera tal que a cada elemento del conjunto de partida le corresponde un único elemento del de llegada, se dice que dicha relación es una **función**.

Una función f de A (conjunto de partida o Alcance) en B (conjunto de llegada o Rango) se simbolizará $f: A \to B$. Si a todo elemento $x \in A$ le corresponde por medio de la función f el elemento $y \in B$, se dice que y es la imagen del elemento x y se lo denota $y = f(x)$.

Retomando la situación anterior, si se consideran **todos** los rectángulos de perímetro 16, se tendrán infinitos pares de valores relacionados además de los señalados. Por ejemplo, si la longitud de la base es 0,2 entonces la longitud de la altura será 7,8 $(0,2+0,2+7,8+7,8=16)$

La curva ahora sería así:



Todos los valores que puede tomar la variable **x** (longitud de la base) para los cuales la función que modela el problema tiene sentido, forman lo que se denomina **conjunto dominio de la función**.

En la situación problemática que se está analizando, el conjunto dominio está formado por todos los números reales mayores que 0 y menores que 8.

Mientras que todos los valores que puede tomar la variable **y** (área), que son los que les corresponde a algún elemento del dominio, forman el **conjunto imagen de la función**, el cual en el problema será el conjunto de todos los números reales mayores que 0 y menores que 16.

También, el dominio e imagen de una función pueden denotarse como intervalos en el caso de que sean subconjuntos de números reales. En la situación que se estudió:

$$D = (0\,,8) \quad y \quad I = (0\,,16]$$

En general…

Dada una función $f : A \to B$, al conjunto de valores del alcance A que tienen su correspondiente en el Rango se lo denomina **Dominio** de la función f. En símbolos:

$$\begin{aligned} D_f &= \{x \in A \,/\, f(x) = y,\ y \in B\} \\ &= \{x \in A \,/\, (x, y) \in f\} \end{aligned}$$

Al conjunto de valores del conjunto de llegada que son los correspondientes de algún valor del dominio se lo denomina **imagen** de la función f. En símbolos:

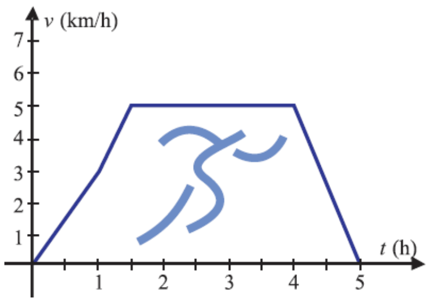
$$\begin{aligned} \mathrm{Im}_f &= \{y \in B \,/\, f(x) = y,\ x \in A\} \\ &= \{y \in B \,/\, (x, y) \in f\} \end{aligned}$$

Observación:

Por la definición de función que dice que "a todo" elemento del conjunto de partida debe corresponderle un único elemento del conjunto de llegada, se deduce que el conjunto de partida debe ser igual al dominio de dicha función. El conjunto de llegada no necesariamente debe ser igual al conjunto imagen.

Otra situación:

Una maratón es una prueba atlética de resistencia que consiste en correr a pie la distancia de 42,195 km. Un atleta que se está preparando para participar de una maratón ha registrado en su último entrenamiento las velocidades (en km/h) en cada una de las tres horas en que realizó su práctica. Los registros se pueden observar en el siguiente gráfico donde en el eje de las abscisas se detallan los tiempos **t** y en el eje de las ordenadas la velocidad **v**.



a) ¿Es esta relación una función?
b) ¿Cómo puede deducir si una gráfica corresponde o no a la de una función? Justifique.
c) ¿Cuál es su dominio? ¿Cuál es su imagen?
d) ¿A qué valor del dominio le corresponde el valor 3 en la imagen?
e) ¿Cuál es la imagen del valor 3 del dominio?
f) Describa cómo fue variando la velocidad del atleta en función del tiempo.

Analice la siguiente situación:

Si se leen los registros meteorológicos indicados en las siguientes tablas, que corresponden a pronósticos del tiempo para una misma semana del mes de Agosto en las ciudades de Rosario (Argentina) y París (Francia), ¿qué se deduce a partir de los datos?

Rosario (Argentina)					
Día	**Lunes**	**Martes**	**Miércoles**	**Jueves**	**Viernes**
Temperatura mínima (en °C)	4	3	4	7	12

París (Francia)					
Día	**Lunes**	**Martes**	**Miércoles**	**Jueves**	**Viernes**
Temperatura mínima (en °F)	61	57	54	55	55

La escala utilizada para presentar la temperatura en los dos países es distinta, mientras que en Francia se registra en grados **Fahrenheit** (°F), en Argentina se utiliza la escala en grados **Centígrados** (°C).

¿Cómo se relacionan ambos conjuntos de valores, los expresados en °C y en °F?

Mediante la fórmula $\mathbf{C = \frac{5}{9}(F - 32)}$, donde **C** es la temperatura en °C y **F** en °F.

De esta manera, puede establecerse una correspondencia entre el conjunto de valores de temperaturas expresados en °F y entre el conjunto de valores de temperaturas expresados en °C; en donde a cada elemento del primer conjunto, le corresponde un único elemento del segundo conjunto. Por la tanto, esta relación es un ejemplo de **función**.

Actividad

Complete teniendo en cuenta la fórmula establecida anteriormente,

a) 61°F equivale a ……………… **°C**
b) 57°F equivale a ……………… **°C**
c) 12,2°C equivale a …………….. **°F**
d) 12,8°C equivale a …………….. **°F**

Esta correspondencia entre las escalas de temperatura, que se analizó mediante una fórmula, también puede representarse en un plano cartesiano.

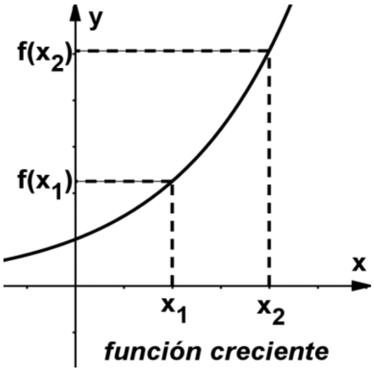
Actividad

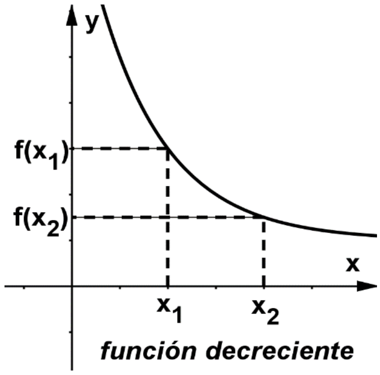
Represente gráficamente la correspondencia entre ambas escalas. Para ello, represente primero los valores encontrados hasta el momento. Luego responda las preguntas según el gráfico.

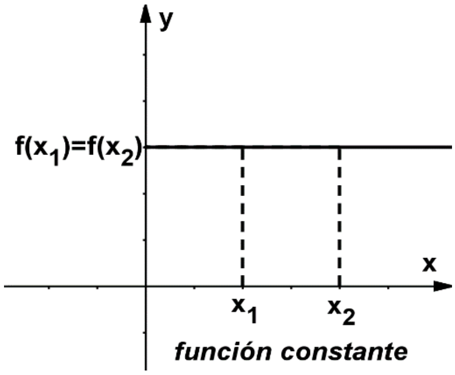
a) ¿Pueden unirse los puntos representados? ¿Por qué? En caso afirmativo, ¿Cómo los uniría y cómo justifica que esa sea la forma de unirlos?
b) ¿A cuántos °F equivalen aproximadamente 18°C?
c) ¿A cuántos °C equivalen aproximadamente 32°F?
d) ¿A partir de los cuántos °F la temperatura en °C es positiva?
e) ¿Cuáles son las ventajas y desventajas de responder las preguntas b), c) y d) mirando la gráfica, y trabajando analíticamente?
f) ¿De cuántas maneras puede representarse una función? Analice ventajas y desventajas de cada una de las representaciones.

Funciones crecientes y decrecientes

- Una función **f** se dice **constante** en un intervalo $I \subseteq D_f$ si para todo $x \in I$ es **f(x)=c**, donde **c** es un número real.
- Una función **f** se dice **creciente** en un intervalo $I \subseteq D_f$, si para todo $x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$ se verifica que $f(x_1) < f(x_2)$.
- Una función **f** se dice **decreciente** en un intervalo $I \subseteq D_f$, si para todo $x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$ se verifica que $f(x_1) > f(x_2)$.

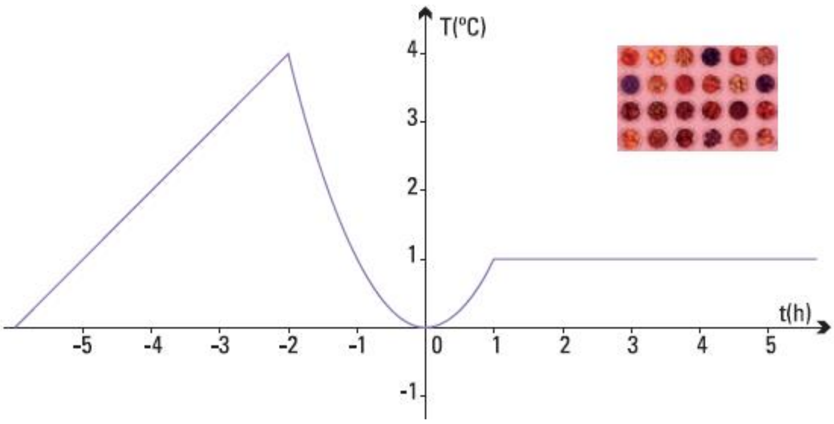






Actividad

El siguiente gráfico muestra la temperatura **T** (en °C) de una cámara en donde se guardaron semillas de maíz, desde las seis de la tarde de un día y durante las primeras seis horas del día siguiente. Indique los intervalos de tiempo para los que la función es constante, creciente y en los que la función decrece, interpretando su significado.



En muchas ocasiones, el estudio de una función a partir de su gráfico, no permite extraer con exactitud algunos valores, por diversas causas como las escalas elegidas en los ejes, o la porción de gráfica que se brinde cuando el dominio y la imagen sean conjuntos no acotados.

También se estudió que las relaciones entre dos variables pueden definirse mediante una fórmula, como en el caso de las temperaturas expresadas en °F y las expresadas en °C.

Así por ejemplo, la función definida por la fórmula $f(x)=\frac{1}{2}x$, asigna a cada número x como imagen la mitad de su valor $\frac{1}{2}x$. El dominio de la función es el conjunto de los números reales, pues a todo número real se le puede calcular su mitad. Conocer la fórmula permite indicar cuál es la imagen de cualquier número.

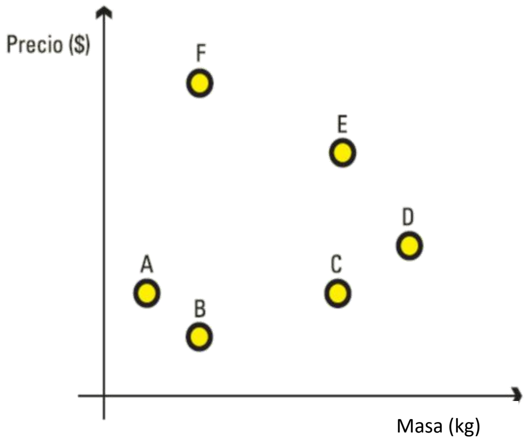
Actividad:

Dada la función definida por la fórmula $f(x)=\dfrac{1}{x}$

a) Determine el dominio y la imagen de la función.
b) Calcule $f(10)$ e interprete su significado.
c) ¿De quién es imagen el número 20?

Ejercicios y problemas

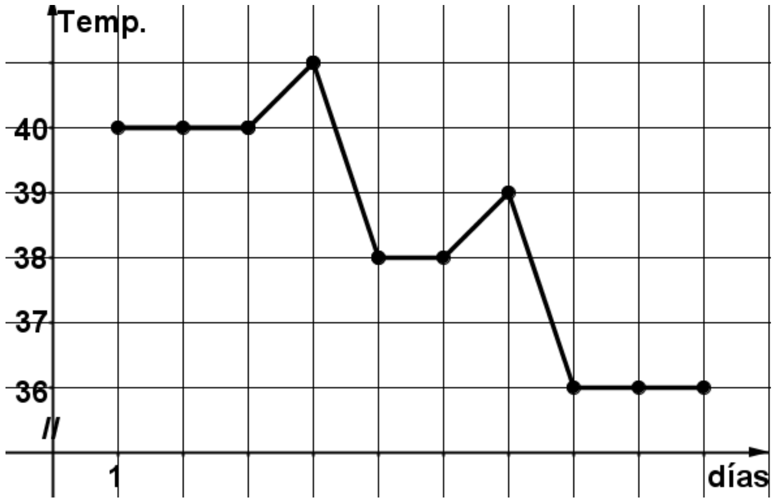
1) El siguiente gráfico representa la relación entre la masa de una bolsa de arena para la construcción y el costo de la misma. Cada uno de los puntos de la relación indica una bolsa y la letra que lo identifica muestra su marca.



a) ¿De qué marca es la bolsa de arena con mayor masa?
b) ¿De qué marca es la bolsa de arena más económica?
c) ¿Qué marcas ofrecen al mercado bolsas de arena de igual masa?
d) ¿Qué marcas ofrecen al mercado bolsas de arena de igual precio? ¿Cuál de las dos marcas tiene mayor masa?
e) ¿Qué bolsa de arena es más económica: la **F** o la **D**? ¿Por qué?

2) El siguiente gráfico muestra la evolución de la temperatura del paciente durante 10 días de internación:

a) ¿Qué significa que el par ordenado (6;38) pertenezca a la gráfica?
b) ¿Con qué temperatura se internó el paciente?
c) ¿En qué días la temperatura fue superior a 38°C?
d) ¿Qué se puede decir de la temperatura de los días 8,9 y 10?



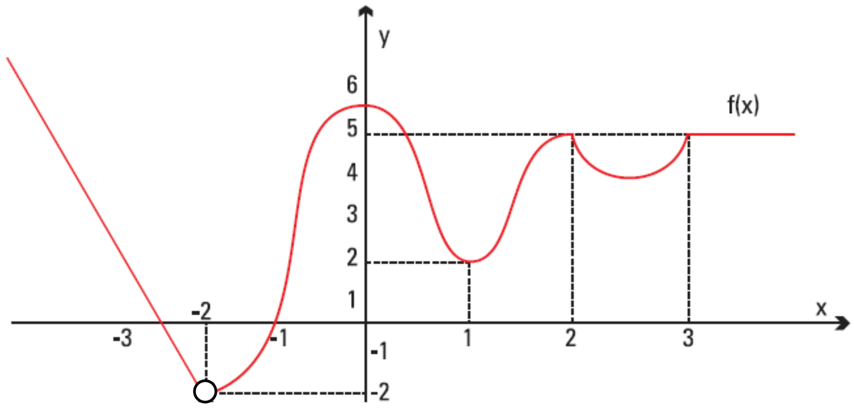
3) Un empleado de una tienda de ropa presentó a sus superiores el registro de las ganancias obtenidas durante una semana en el local.

Día	Ganancia
Lunes	\$-280
Martes	\$322
Miércoles	\$448
Jueves	\$630
Viernes	\$1120

A partir de los datos del empleado se definió la función **G(t) =** ganancia obtenida por la tienda de ropa en el día **t**.

a) ¿Cuál es el dominio para **G(t)**? ¿Y la imagen?
b) ¿Cuál es la imagen para **t =** Miércoles?
c) ¿De quién es imagen \$630?
d) ¿Qué significa que **G(Lunes) = \$-280**?
e) ¿En qué día de la semana la tienda logra su mayor ganancia?
f) ¿Es la función **G** creciente o decreciente? Justifique.

4) Para la función cuyo gráfico se presenta, determine:



a) Dominio;
b) Imagen;
c) Intersección con el eje **y**;
d) **f(1)**;
e) el o los valores de **x** cuya imagen sea 0;
f) el intervalo donde **f** es constante;
g) los intervalos donde **f** es creciente.

5) Encuentre analíticamente las intersecciones con los ejes coordenados de la gráfica de cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $y = 5x - 6$
b) $y = \sqrt{x+4}$
c) $y = 8 - 3x$
d) $y = \sqrt{2x-1}$
e) $y = x^2 - 25$
f) $y^2 = 9 - x$

6) Si se define la función definida a partir de la fórmula $f(x) = 2x^2 - 4$. Calcule el resultado de:

a) $f(0)$
b) $f(a+h)$
c) $f(2) + f(-2)$

d) $f(1).f(-3)$

e) $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

7) Las siguientes corresponden a funciones utilizadas en lenguaje de programación. Indique el dominio e imagen de cada una de ellas:

a) AND que aplicado a un vector lógico de dimensión 3 devuelve el valor lógico TRUE si las tres componentes son TRUE.

b) SUM que aplicado a un vector numérico de dimensión 10 devuelve la suma de sus componentes.

c) DET que devuelve el determinante de una matriz.

d) SQRT que devuelve la raíz cuadrada de un número.

e) PLOT que devuelve un gráfico de una relación entre variables.

FUNCIÓN LINEAL

Hasta ahora se estudió el concepto de función a través de sus diferentes representaciones. Una función puede representarse verbalmente, mediante una tabla de valores, un gráfico o una fórmula. A continuación se estudiarán algunos modelos funcionales los cuales permitirán estudiar algunas situaciones problemáticas.

Actividad

Se tiene un barril que tiene capacidad para 20 litros y se sabe que vacío pesa 2,5 kg. Se le va agregando agua destilada y se quiere saber cómo varía el peso de este barril a medida que se va llenando.

El peso será una función que depende del agua agregada. Sea x la cantidad del agua y suponga que un litro de agua destilada equivale a 1 kg.

a) ¿Cuál será la fórmula de la función que modela el problema?

b) ¿Hay restricciones para la variable x? ¿Cuál es el dominio de la función?

c) Represente gráficamente la función.

Suponga que ahora se tiene mercurio en lugar de agua y se sabe que tres litros de mercurio pesan 40,8 kg

d) ¿Cómo puede expresar ahora la fórmula de la función peso del barril?

e) ¿Cuál será su gráfico?

f) ¿Cuál es el dominio de esta nueva función?

g) ¿Cuánto mercurio hay que colocar en el barril para que éste pese 270kg?

h) ¿Tendría sentido esta misma pregunta pero para que el barril pese 300 kg? ¿Por qué?

i) ¿Cuánto mercurio se puede colocar en el barril para que el peso de éste no supere los 29,7 kg? Exprese la solución utilizando intervalos.

Definición:

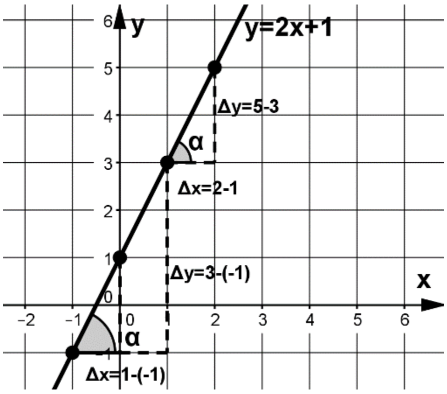
Funciones como la del problema anterior, en la que la fórmula es $f(x) = ax + b$, con **a** y **b** números reales, se las llama **funciones lineales**.

Su gráfico es una recta (semirrecta o segmento en el contexto de un problema).

El coeficiente **a** de la fórmula recibe el nombre de **pendiente** y **b** es la **ordenada al origen**.

Geométricamente, la pendiente de una recta se define como la tangente trigonométrica del ángulo de inclinación de la recta respecto a la horizontal.

Si se observa en la figura de la derecha, tomando dos puntos cualesquiera de la recta, es posible construir un triángulo rectángulo de catetos Δy y Δx. De esta manera, la tangente trigonométrica del ángulo de inclinación α de la recta con respecto a la horizontal, se corresponde con el cociente entre el cateto opuesto y la hipotenusa, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2$.



En general, dada una función lineal $f(x) = ax + b$, si se toman dos puntos genéricos $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$, puede demostrarse que el valor de la pendiente coincide con el del parámetro a. (*)

Así definida la pendiente representa la variación de la variable dependiente por cada unidad que varía la independiente.

Actividad

Abra el archivo de Geogebra[1] "Gráficos Función Lineal", mueva los deslizadores **a** y **b**, analice la gráfica y responda a las siguientes preguntas:

a) ¿Qué relación existe entre el crecimiento de una función lineal y su pendiente?
b) ¿Qué representa la ordenada al origen en el gráfico de la función?
c) Demuestre la conjetura establecida en (*)

Existen muchos fenómenos que responden o se los puede aproximar por un modelo lineal, algunos de los cuales se estudiarán en este material de estudio.

Ejercicios y problemas

8) Un técnico en equipos de música cobra una tarifa fija de $450 por revisar el quipo y realizar un diagnóstico del problema que presenta. Luego, por cada hora de trabajo que le demanda su arreglo tiene estipulado una tarifa de $100.

a) Escriba una fórmula para la función que describa la situación describiendo las variables que se relacionan.

[1] Geogebra es un software libre de geometría dinámica. Para descargarlo visite el sitio web www.geogebra.org.

b) Describa el significado de los parámetros (pendiente y ordenada al origen) en esta situación.
c) Represente gráficamente la función que modela el problema.
d) ¿Cuántas horas trabajó el técnico si a una persona le cobra $650?
e) ¿Cómo modificaría la fórmula de la función si el técnico sólo cobrara por los horas de trabajo?

9) Para una empresa el costo de producir diariamente 30 televisores es de $250000, y si su producción es de 40 unidades del mismo televisor es de $300000. Sabiendo que el costo de producción **C** de la empresa está relacionado linealmente con la cantidad **x** de televisores diarios producidos y que la capacidad máxima de producción diaria es de 50 aparatos.
a) ¿Cuál es la fórmula de la función **C(x)** que permite describir los costos de producción?
b) Estime el costo de producir 35 unidades del mismo producto en un día.
c) Si la empresa vende los televisores a $15000 cada uno, ¿cuál es la función de ingreso **I(x)** si se supone también un comportamiento lineal de la misma?
d) Estime el ingreso por vender 35 unidades del mismo producto el mismo día.
e) Represente gráficamente ambas funciones en el dominio [5 ; 50].
f) ¿Qué ganancia tendría la empresa si sólo produce y vende 10 televisores diarios? ¿Y si realiza 6 televisores?
g) ¿Le conviene a la empresa, siempre que pueda venderlos, producir a su máxima capacidad? Justifique su respuesta.

10) Pedro, que vive en una zona rural sale en su bicicleta a las 7:30 hs para ir a la escuela, que está a 2 km de su casa, y viaja a una velocidad constante de 100 metros por minuto (m/min).
a) Determine la fórmula de la distancia en función de los minutos transcurridos desde que Pedro sale de su casa para ir al colegio.
b) Explique el significado de la pendiente y de la ordenada al origen en el contexto del problema.
c) ¿Llegará Pedro a la escuela antes de las 8:00 hs?

11) En el kiosko "Todo Suelto" se vende lavandina suelta en bidones de 5 litros. Cobran $5 por el envase y $10 por litro de lavandina.
a) Construya una función lineal que modelice los datos, donde C represente el costo de compra si no se posee envase y x los litros (entre 0 y 5) de lavandina adquiridos.
b) Explique el significado de la pendiente y de la ordenada al origen en el contexto del problema.
c) ¿Cuánto deberá pagar una señora que compró 3,5 litros de lavandina y no tenía envase propio?
d) ¿Cuántos litros de lavandina se podrá comprar si sólo se dispone de $21 y tampoco tiene envase?
e) ¿Sirve el modelo para averiguar el costo de comprar 6 litros sin envase? Explique

12) Una Pyme que se dedica a la producción de remeras para promociones escolares tiene $12000 de gastos fijos mensuales, más $200 por cada remera colegial que fabrica, y vende dichas remeras a $320 cada una.
a) ¿Cuál es la fórmula de la función "costo" de la Pyme?
b) ¿Cuál es la fórmula de la función "ingreso" de la Pyme?
c) Grafique dichas funciones, considerando como dominio el intervalo [0 ; 3000].

d) Si se define como ganancia el beneficio obtenido por la empresa después de producir y vender la misma cantidad de remeras, ¿Cuál es la función ganancia para esta Pyme?

e) El dueño de la Pyme sabe que si se vende pocas remeras perderá plata, pues sus gastos fijos superarán los ingresos. ¿Cuántas remeras debe vender como mínimo para no perder dinero?

FUNCIÓN CUADRÁTICA

Hasta ahora se han estudiado modelos funcionales constantes y lineales. A continuación se trabajará con los conceptos matemáticos necesarios que sirvan para la construcción y análisis de modelos cuadráticos. En particular se estudiará a la función cuadrática, su gráfica: la parábola, y el significado de algunos de los puntos de la misma: las intersecciones con los ejes coordenados y el vértice; así como también se abordarán situaciones en las que se requiera el uso de ecuaciones de segundo grado para su resolución.

Actividad

Desde una terraza se lanza hacia arriba una pelota con una velocidad inicial distinta de 0. La altura a la que se encuentra la pelota (medida en metros) desde el suelo en función del tiempo (medido en segundos) viene dada por la fórmula $e(t) = -5t^2 + 20t + 25 \quad (t \geq 0)$:

- ¿Por qué t debe ser no negativo?
- ¿Cuánto tiempo tarda la pelota en llegar al suelo?
- ¿Cuál es la altura máxima que alcanza?
- Represente gráficamente la función teniendo en cuenta el contexto del problema, ayudándose con un graficador.

Observe que en la fórmula de la función, aparece la variable independiente elevada al cuadrado. Ya no responde al formato de la fórmula de una función lineal y como se podrá apreciar su representación gráfica es una curva llamada **parábola**.

Definición:
Se llama función cuadrática, a toda función cuya fórmula está dada por $f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$, donde a, b y c son números reales y x puede adoptar cualquier valor real.

Note que en la definición, se aclaró que el coeficiente **a** debe ser no nulo. ¿Por qué?

Solución de una ecuación de segundo grado

Ahora, volviendo al problema de la actividad, se había preguntado, en qué momento la pelota llega al suelo; es decir, se necesita conocer el valor de **t** para el cual la altura de la pelota es 0.

Si la altura de la pelota es 0, entonces se puede plantear: $0=-5\mathrm{t}^2+20\mathrm{t}+45$. Si se intenta despejar el valor de t, puede verse que no es tan sencillo.

No puede resolverse despejando mediante la propiedad uniforme como se hace en el caso de una ecuación lineal.

Pero, si se divide ambos miembros de la ecuación por -5, se obtiene:

$$0=t^2-4t-5$$

Y si se suma 9 en ambos miembros de la ecuación, se obtiene:

$$0+9=t^2-4t-5+9$$

$$\Rightarrow \quad 9=t^2-4t+4$$

El segundo miembro de la última igualdad es un trinomio cuadrado perfecto, resultado del desarrollo del cuadrado del binomio $(t-2)^2$

Recuerde que:

$$(a+b)^2=(a+b)(a+b)$$
$$=a^2+b^2+2ab$$

Sustituyendo se tiene:

$$9=(t-2)^2$$

Y tomando raíz cuadrada en ambos miembros se obtiene:

$$\pm 3=t-2$$

Por último sumando 2 en ambos miembros se obtienen dos valores de t:

$$t=5 \quad \text{o} \quad t=-1$$

Por supuesto que en el problema se desprecia la solución negativa, puesto que se había tomado t para valores no negativos.

A lo largo de la historia, matemáticos hindúes y árabes estudiaron formas de resolver ecuaciones de segundo grado. Algunos se inclinaron por deducciones geométricas, las cuales no se desarrollarán en esta oportunidad y otros mediante cálculos algebraicos. Por supuesto que en la actualidad, hay gran cantidad de applets en la Web y de softwares para computadoras o teléfonos móviles que resuelven de manera más rápida este tipo de ecuaciones.

A continuación se presenta, cómo en la india llegaron a descubrir una fórmula que permita resolver cualquier ecuación cuadrática de la forma $0=ax^2+bx+c, \quad a\neq 0,$ siguiendo un procedimiento análogo al empleado en la resolución de la última ecuación presentada.

Si se tiene la ecuación $0 = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0,$ entonces dividiendo en ambos miembros por **a** se obtiene:

$$\frac{0}{a} = \frac{ax^2 + bx + c}{a}$$

El primer miembro es nulo, y en el segundo miembro puede aplicarse la propiedad distributiva obteniendo:

$$0 = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$$

Sumando en ambos miembros $\frac{b^2}{4a^2}$ y restando $\frac{c}{a}$, queda:

$$\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}$$

El segundo miembro de la igualdad es el desarrollo de $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$, por lo tanto sustituyendo:

$$\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

Tomando raíz cuadrada en ambos miembros y operando en el radicando del primer miembro:

$$\pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = x + \frac{b}{2a}$$

Distribuyendo la raíz cuadrada respecto a la división y restando en ambos miembros $\frac{b}{2a}$, se obtiene:

$$x = \frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

De donde sumando/restando, finalmente se obtiene:

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

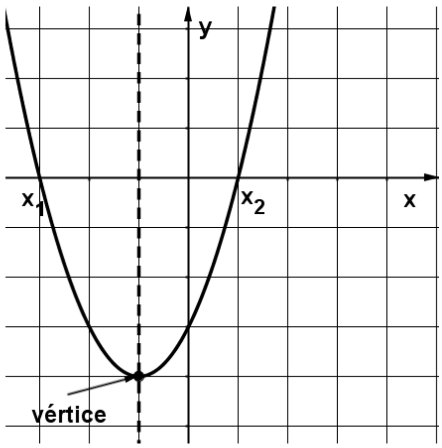
El signo ± es el que permite la obtención de las dos soluciones, siempre y cuando el radicando no sea negativo.

Vértice de la parábola

Se define al vértice de la parábola como el punto cuya ordenada es el valor máximo o mínimo que toma la función cuadrática que tiene como gráfica a dicha parábola.

En la parábola que representó en el problema de la actividad 8, las ramas se abren hacia abajo, por lo tanto, las coordenadas del vértice coinciden con el instante en que la pelota alcanza la altura máxima y con dicha altura máxima, respectivamente.

En la figura de la derecha, se ilustra otra parábola, con las ramas hacia arriba. Por lo tanto el vértice será el mínimo de la función graficada.



Por otra parte, el **eje de simetría** de la parábola, es la recta vertical que pasa por dicho vértice.

Si $f(x)=ax^2+bx+c$ es la función que se ha representado en la figura, observe que los puntos $(x_1;0)$ y $(x_2;0)$ son las intersecciones de la gráfica de la función con el eje x. Dichos valores se obtuvieron de resolver la ecuación $ax^2+bx+c=0$.

Si se denota al vértice con $v\,(x_v;y_v)$, ¿cómo pueden obtenerse ambas coordenadas?

$x_v =$

$y_v =$

De esta manera, conociendo las intersecciones de la gráfica de la función con los ejes coordenados, y las coordenadas del vértice de la parábola, puede esbozarse una gráfica más precisa, que una obtenida con una tabla de valores.

Ejercicios y problemas

13) Un fabricante de raquetas de tenis ha determinado que el costo unitario C(x) (en pesos) por la producción de **x** raquetas por día se puede modelizar por la fórmula $C(x)=0{,}1x^2-40x+5000$, donde C(x) representa los costos unitarios en $ y la capacidad de producción del fabricante es de 300 raquetas diarias.

a) ¿Cuál es el dominio de la función teniendo en cuenta el contexto del problema?
b) ¿Cuál es el significado en el problema del valor 5000 de la fórmula?
c) ¿Cuál es el número de raquetas que se deben fabricar para que el costo unitario sea mínimo?
d) ¿Cuál es el costo unitario mínimo?
e) Si se realiza la producción máxima de 300 raquetas, ¿Cuál será el costo unitario?
f) ¿Cuántas raquetas les conviene fabricar?

14) Represente gráficamente las siguientes funciones, determinando previamente las intersecciones de la gráfica con los ejes coordenados y las coordenadas del vértice.

a) $y=3x^2$

b) $y=-2x^2+2$

c) $y=\frac{1}{2}x^2+2x$

d) $y=2x^2-4x+1$

e) $y=x^2-2x+1$

15) En 1990 se introdujeron 100 truchas en un lago ubicado en la zona cordillerana en Argentina, en el cual no había registros de su existencia. Al principio la población comenzó a crecer rápidamente, pero luego distintos factores, entre ellos la falta de alimentos, determinó un decrecimiento. El número de estos salmónidos para cada año **t** si se considera como **t=0** al año 1990, se puede modelizar por: $S(t)=-1(t+5)(t-20)$

a) Grafique la función desde **t=-10** hasta **t=30**. ¿Qué años calendarios representan estos valores de **t**?

b) Indique, a partir del gráfico, el dominio de la función S para este problema.

c) ¿En qué año la población de truchas fue máxima? En dicho año, ¿cuántos ejemplares había?

d) ¿En qué año se puede estimar que se extinguirá la población de truchas en el lago?

16) Un pub abre a las 20h y cierra cuando todos los clientes se han ido. A partir de registros mensuales se obtuvo una función cuadrática permite modelizar el número de personas que hay en el pub **t** horas después de su apertura, la misma es: $P(t)=60t-10t^2$

a) Determine el número máximo de personas que van al pub una determinada noche e indicar en qué horario se produce la máxima asistencia de clientes.

b) Si se quiere ir al pub cuando haya al menos 50 personas, ¿a qué hora tendríamos que ir?

c) Si se quiere estar sentados y el pub sólo tiene capacidad para 80 personas sentadas, ¿a partir de qué hora ya es seguro que no se van a encontrar sillas?

17) Una Pyme que fabrica juegos artesanales para niños, en madera, ha estimado sus ingresos mensuales, en pesos, que se pueden representar por la función $I(x)=-4,2x^2+540x$, mientras que sus gastos (también mensuales y en pesos) pueden calcularse mediante la función $G(x)=6,6x^2+180x+1050$. En ambas funciones x representa la cantidad de juguetes producidas y/o vendidas.

a) Realice el gráfico de ambas funciones en un mismo plano cartesiano.

b) ¿Qué indica, en el contexto del problema, el valor 1050 de la función $G(x)$?

c) A partir del gráfico estime ¿Cuál es el número mínimo de unidades que debe fabricar la Pyme mensualmente para que sus ingresos superen los gastos?

d) Si se define la función que representa el beneficio obtenido por la pequeña empresa por la función $B(x)=I(x)-C(x)$, escriba la fórmula de esta función beneficio y realice su gráfico.

e) ¿Qué cantidad de unidades deben ser vendidas para que el beneficio sea máximo?

f) ¿Cuál es el máximo beneficio que podría tener esta Pyme?

g) ¿Qué nivel de producción de juguetes le significaría realizar gastos extras y por lo tanto los beneficios serían negativos?

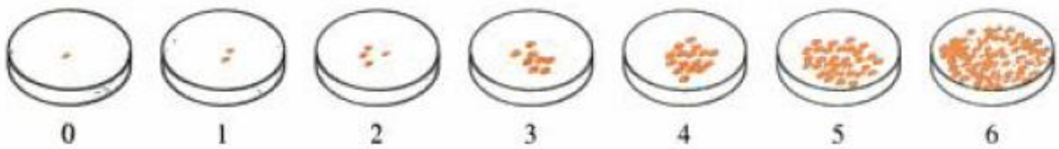
FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

En esta oportunidad se estudia una nueva clase de funciones llamadas **funciones exponenciales**. Por ejemplo, $f(x)=2^x$ es una función exponencial (con base 2). Observe la rapidez con la que crecen los valores de la función:

$$f(3)=2^3=8$$
$$f(10)=2^{10}=1024$$
$$f(30)=2^{30}=1073741824$$

Compare esto con la función $g(x)=x^2$, donde $g(30)=900$. La cuestión es cuando la variable independiente está en el exponente, incluso un cambio pequeño en la variable puede causar un cambio radical en el valor de la función.

A pesar de este enorme crecimiento, las funciones exponenciales son apropiadas para modelar situaciones como el crecimiento poblacional, para los seres vivos, desde bacterias hasta elefantes. Para entender cómo crece una población, considere el caso de una sola bacteria, que se divide cada hora. Después de una hora se tendrían dos bacterias, después de dos horas cuatro bacterias, después de tres horas 8 bacterias, etcétera. Después de x horas se tendrían 2^x bacterias. Esto da lugar a modelar la población de bacterias mediante la función $f(x)=2^x$.



El principio que gobierna el crecimiento poblacional es el siguiente: mientras más grande sea la población, mayor es el número de descendientes. Este mismo principio está presente en muchas otras situaciones de la vida real. Por ejemplo, mientras más grande sea una cuenta bancaria, más intereses se obtiene.

Las **funciones logarítmicas**, se presentan como la función inversa de una función exponencial, y se utilizan para modelar situaciones como la escala Richter para terremotos, la medición del sonido en decibeles y en química para medir el PH de algunas sustancias.

Función exponencial

Se comienza el estudio con la siguiente situación problemática.

Actividad

Suponga que se invierten $20000 en un plazo fijo electrónico a una tasa anual del 54%, es decir transcurrido un año se tiene el 54% más de lo que se tenía un año antes.

Si se toma que el saldo inicial depositado es de $20000, se puede establecer que en $t=0$ horas se tienen $20000.

Al cabo de un año se tendrán: $20000+0,54.20000=20000.(1+0,54)$, es decir el 54% más de lo que se tenía en $t=0$.

Al cabo de dos años se tendrán:

$$20000.(1+0,54)+0,54.20000.(1+0,54)=20000.(1+0,54).(1+0,54)=20000.(1+0,54)^2$$

es decir el 54% más de los que se tenía en $t=1$.

Al cabo de tres años:

$$20000.(1+0,54)^2+0,54.20000.(1+0,54)^2=20000.(1+0,54)^2.(1+0,54)=20000.(1+0,54)^3$$

Puede observar, que para obtener el saldo 10 años después, se debería conocer el saldo a los 9 años y para esto se necesita conocer el saldo a los 8 años, etcétera. Los cálculos se complican y se pierde demasiado tiempo.

El objetivo es hallar una fórmula que permita obtener directamente el saldo luego de t años, sin necesidad de realizar tantas cuentas.

Como se vio anteriormente, el saldo a los dos años, pudo expresarse en función del saldo inicial 20000. Análogamente, pudo expresarse el saldo a los tres años, en función del saldo inicial 20000.

a) ¿Cómo expresaría el saldo a los 4 años?
b) Complete la siguiente tabla:

Años transcurridos	**Saldo**
$t=0$	$20000=20000.(1,54)^0$
$t=1$	$20000.1,54=20000.(1,54)^1$
$t=2$	$20000.(1,54)^2$
$t=3$	$20000.(1,54)^3$
$t=4$	
$\vdots$	$\vdots$
t	

c) Complete: en general, el saldo luego de **t** años es: ………………………………………….

Ahora sí, si se quiere calcular el saldo 10 años después de la inversión inicial, se reduce a un simple cálculo.

d) ¿Cuál es el saldo transcurridos 10 años?

En la fórmula que se ha descubierto, el factor 20000 es el saldo inicial invertido, la base de la potencia informa sobre la proporción con la que crece el saldo y la variable **t** (tiempo) figura en el exponente de esta potencia.

e) En general, en un fenómeno de crecimiento exponencial, si se conoce la cantidad inicial C_0 y la tasa relativa de crecimiento k, la fórmula que modela el problema la cantidad en función del tiempo es: $C(t)=$……………………….

A este tipo de funciones, en la que la variable independiente figura en el exponente de una potencia, se las llama **funciones exponenciales**.

f) Construya un gráfico para la función que modela el saldo por el plazo fijo, ayudándose con un graficador.
g) ¿Qué cree que se modificaría en el gráfico si el saldo inicial fuera de $30000?
h) ¿Es verdadera la siguiente afirmación? *"A medida que el tiempo pasa, el saldo aumenta con mayor rapidez".* Justifique su respuesta.

Definición:

Recibe el nombre de **función exponencial** a toda función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cuya fórmula es $f(x)=a^x$, para todo número real positivo **a** distinto de 1.

Gráfica de la función exponencial

Actividad

Abra el archivo de Geogebra: "*Gráfica de la función exponencial*".

a) Considere la función $f(x)=a^x$, y mueva el deslizador "**a**" para observar el comportamiento de la función según el parámetro **a**. Investigue en qué casos **f** es creciente y en qué casos decreciente y las intersecciones de la gráfica con los ejes coordenados.

b) Considere el análisis realizado en el ítem anterior, pero con la función $f(x)=b.a^x$, y moviendo los deslizadores "**a**" y "**b**".

c) ¿Qué efecto producirá en la gráfica el parámetro **c** en la función $f(x)=b.a^x+c$?

d) Considere la función $f(x)=2.3^x+1$. ¿A qué valor se aproxima y cuando x toma valores negativos cada vez más grandes en valor absoluto?

e) Considere la función $g(x)=2.\left(\frac{1}{3}\right)^x+1$. ¿A qué valor se aproxima y cuando x toma valores cada vez más grandes?

Asíntotas horizontales

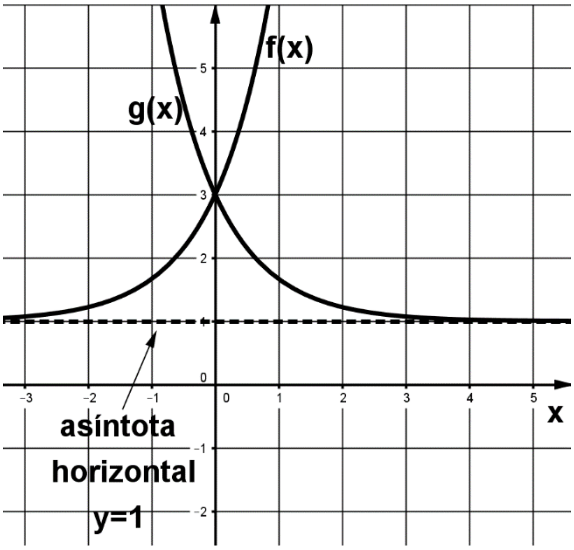
El análisis que realizó en los ítems d) y e) acerca del comportamiento de las funciones $f(x)=2.3^x+1$ y $g(x)=2.\left(\frac{1}{3}\right)^x+1$ puede escribirse simbólicamente de la siguiente manera:

$$\underset{x\to-\infty}{Lím} f(x)=1 \qquad \text{y} \qquad \underset{x\to+\infty}{Lím} g(x)=1$$

Y se leen respectivamente "el límite de la función para cuando x toma valores negativos cada vez más grandes en valor absoluto, es 1" y "el límite de la función para cuando x toma valores cada vez más grandes, 1".

El hecho de decir que **x** toma valores negativos cada vez más grandes en valor absoluto, también puede decirse de ésta otra manera equivalente: "**x** tiende a menos infinito". Análogamente que **x** tome valores cada vez más grandes, es equivalente a decir: "**x** tiende a más infinito".

En este caso, se dice que la recta $y=1$ es una **asíntota horizontal** para las funciones f(x) y $g(x)$.



Definición:

La recta $y=c$ es una **asíntota horizontal** de f si y sólo si se cumple alguna de estas condiciones:

$$\underset{x\to+\infty}{Lím}\, f(x)=c \qquad \text{o} \qquad \underset{x\to-\infty}{Lím}\, f(x)=c$$

La función $y=e^x$

La gran mayoría se pregunta por qué un número irracional tan particular como $e=2,7182818...$ aparece en las calculadoras como base de una función exponencial. ¿Será tan importante que las calculadoras le dedican una tecla especial?

Este número tan misterioso aparece en muchos procesos naturales cuando algo **aumenta** (o **disminuye**) en forma proporcional a la cantidad presente. Y esto se da continuamente en la práctica: la masa de una célula crece a medida que el tiempo pasa y lo hace presente en cada instante; la actividad de una sustancia radiactiva, medida por el número de desintegraciones por unidad de tiempo, es proporcional al número de átomos presentes en cada instante, etcétera.

Pero, ¿cómo aparece este número?

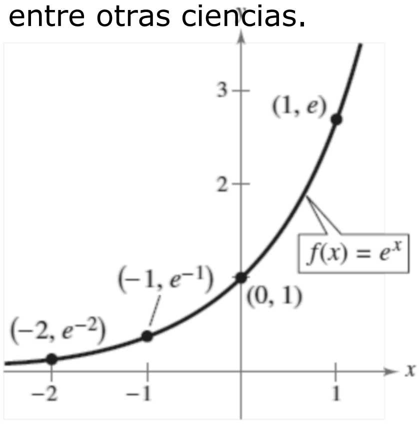
Actividad

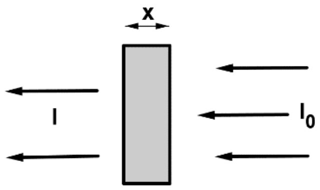
Calcule $\underset{n\to\infty}{\text{Lím}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ayudándose con la calculadora.

Este número está estrechamente relacionado con varias aplicaciones dentro de las cuales se puede mencionar a la economía, la estadística, la demografía, entre otras ciencias.

Si se considera la función $y = e^x$, puede verse que la base de la misma es un número mayor que 1, por lo tanto la función será creciente.

Esta función, y alguna de sus variantes, son particularmente útiles para describir fenómenos naturales.





Por ejemplo, la físico-química nos dice que si las radiaciones atraviesan una placa de plomo de **x** cm de espesor, puede calcularse la intensidad de radiación I que llegará luego de atravesar la placa, conociendo la intensidad I_0 que sale de la bomba, mediante la fórmula $I = I_0.e^{-0,0041x}$

Otro problema que puede considerarse es el del crecimiento de una población, que puede modelarse por la función $P(t) = P_0 e^{(a-b)t}$, siendo P_0 la población inicial, **a** la tasa de natalidad y **b** la tasa de mortalidad. Y existen muchos modelos más.

Actividad

Utilice las propiedades de la potenciación que se resumen en el cuadro de la derecha para transformar la función $f(x) = -1 + 3.\left(\frac{1}{2}\right)^{-2x+1}$ a una cuya fórmula sea $f(x) = b.a^x + c$, luego represéntela gráficamente.

Recuerde:

Si $a, b, m, n \in \mathbb{R}$ entonces

- $a^0 = 1$ si $a \neq 0$.
- $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$ si $a, b \neq 0$.
- $(a^m)^n = a^{m.n}$
- $a^m.a^n = a^{m+n}$
- $a^m : a^n = a^{m-n}$
- $(a.b)^n = a^n.b^n$
- $(a:b)^n = a^n : b^n$

Observe que para calcular la intersección de la gráfica de f con el eje x, en la actividad anterior, es necesario averiguar el valor de x tal que $\frac{3}{2} = 4^x$

Para poder dar solución a la ecuación planteada, se necesita poder recorrer el camino inverso: dado un valor de y (en el ejemplo es $3/2$) se quiere calcular el valor de x que le corresponde, según $y=4^x$. Esto es, se necesita conocer la función inversa de $y=4^x$.

Dado $y=16$, el valor de x que le corresponde es $x=2$

Este exponente recibe el nombre de **logaritmo en base 4 del número 16** y se lo simboliza $2=\log_4 16$. Si $y=64$**,** el exponente que se busca es $x=3$, por lo tanto $3=\log_4 64$

En general, dado $y=b$, el valor de x que cumple $b=4^x$ es $x=\log_4 b$

Como la función exponencial $y=4^x$ tiene dominio en todos los reales y su imagen es el conjunto de los números reales positivos, puede definirse la función inversa de $\mathbb{R}^+$ en $\mathbb{R}$, llamada **función logarítmica**.

$$g:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \,/\, g(x)=\log_4 x \quad \text{donde } x \text{ toma valores positivos.}$$

Definición:

Se llama función logarítmica, a toda función $f:\mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ de manera tal que su fórmula es $f(x)=\log_a x$, donde **a** es la base del logaritmo y es un número real positivo distinto de 1.

Si **a** es un número real positivo distinto de 1, y **b** es un número real positivo, se define:

$$\log_a b = c \quad \Leftrightarrow \quad a^c = b$$

Actividad

Abra el archivo de Geogebra: "*Gráfica de la función logarítmica*"

a) Considere la función $f(x)=\log_a x$, y mueva el deslizador "**a**" para observar el comportamiento de la función según el parámetro **a**. Investigue en qué casos **f** es creciente y en qué casos decreciente y las intersecciones de la gráfica con los ejes coordenados. Investigue además la existencia de asíntotas horizontales justificando matemáticamente.

b) Considere el análisis realizado en el ítem anterior, pero con la función $f(x)=b.\log_a x$, y moviendo los deslizadores "**a**" y "**b**".

c) ¿Cuál será el efecto en la gráfica de la función $f(x)=\log_a(x+c)$ que produce el parámetro **c**?

d) ¿Y el parámetro **d** en la gráfica de $f(x)=d+\log_a x$?

e) Considere la función $f(x)=\log_2(x-3)$. Indique su dominio y analice a qué valor se aproxima **y** cuando **x** se aproxima a 3 por valores mayores.

f) Considere la función $g(x)=-2.\log_2(x+1)$. Indique su dominio y analice a qué valor se aproxima **y** cuando **x** se aproxima a -1 por valores mayores.

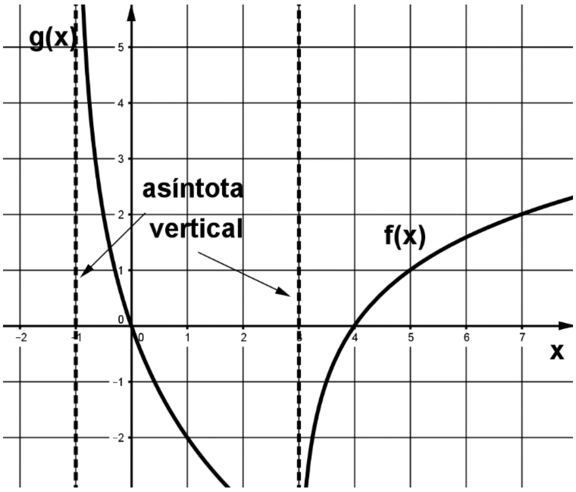
Asíntotas verticales

El análisis que realizó en los ítems d) y e) acerca del comportamiento de las funciones $f(x)=\log_2(x-3)$ y $g(x)=-2.\log_2(x+1)$ puede escribirse simbólicamente de la siguiente manera:

$$\underset{x\to 3^+}{Lím}\ f(x)=-\infty \qquad \text{y} \qquad \underset{x\to -1^+}{Lím}\ g(x)=+\infty$$

Y se leen respectivamente "el límite de la función para cuando x se aproxima a 3, por valores mayores, es menos infinito" y "el límite de la función para cuando x se aproxima a -1 por valores mayores, es más infinito".

En este caso, se dice que la recta $x=3$ es una **asíntota vertical** para la función f(x) y la recta $x=-1$ es **asíntota vertical** para la función $g(x)$.



Definición:

La recta $x=c$ es una **asíntota vertical** de la gráfica de f si y sólo si se cumple alguna de estas condiciones:

$$\underset{x\to c^+}{Lím}\ f(x)=\pm\infty \qquad \text{o} \qquad \underset{x\to c^-}{Lím}\ f(x)=\pm\infty$$

Actividad

Dada la función $f(x)=\log_a(x-c)$, donde **a** es un número real positivo y distinto de 1, ¿Cuál es la ecuación de la asíntota vertical a la gráfica de **f**? Justifique.

Actividad

Sea $y = \log_a x$ con **a** positiva y distinta de 1. ¿Cuánto vale $\log_a 1$?

Dos funciones logarítmicas importantes en las aplicaciones, son las funciones $y = \log_{10} x$ y $y = \log_e x$

Sin ir más lejos, las calculadoras tienen una tecla para cada una de ellas. Dichas teclas son **log x** y **ln x**. **Log x** significa logaritmo en base 10. Al logaritmo en base **e** se lo escribe comúnmente **ln x** y se lo llama **logaritmo natural**.

Como la calculadora trabaja solamente con base 10 y base **e**, se debe encontrar algún procedimiento para poder usarla cuando se quiera calcular logaritmos en otras bases. Los matemáticos han demostrado una fórmula que permite cambiar la base de los logaritmos.

Propiedad de cambio de base:

Cualesquiera sean **a**, **b** y **c** números reales, se cumple que: $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

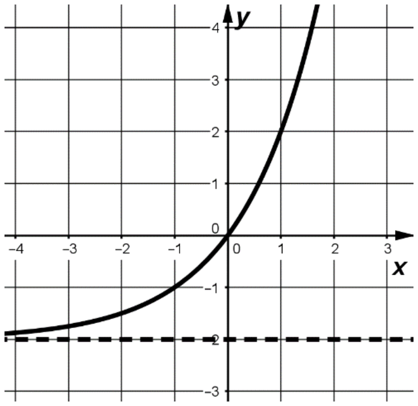
Ahora por fin… ¿Cuál es el valor de x tal que $\dfrac{3}{2} = 4^x$?

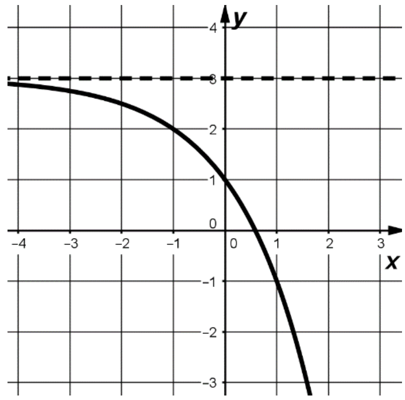
Ejercicios y problemas

18) La demanda de un nuevo producto aumenta rápidamente y luego se nivela. De experiencias de mercado ha podido aproximarse el porcentaje de compradores de dicho producto con la función $p(t) = 100 - 80 \cdot \left(\dfrac{1}{4}\right)^t$, siendo t la cantidad de meses que el producto está en el mercado.

- **a)** Calcule $p(2)$, ¿qué representa este valor?
- **b)** ¿Qué sucede con p(t) a medida que la cantidad de meses que el producto permanece en el mercado aumenta? ¿No se contradice este resultado con la afirmación del enunciado del problema que dice que la demanda aumenta rápidamente para luego nivelarse?
- **c)** ¿Qué tiempo debe transcurrir para que porcentaje de compradores sea del 90%?
- **d)** Si existen en el mercado 10000 posibles compradores, ¿a cuántos se les ha vendido el producto luego de 5 meses?
- **e)** Dé un gráfico aproximado para p(t).

19) Los siguientes gráficos corresponden a funciones cuya fórmula es $y = b.a^x + c$. Determine los valores de **a**, **b** y **c** en cada caso:

a)


b)


20) Para cada una de las siguientes funciones, determine dominio, imagen, intersecciones con los ejes coordenados, ecuaciones de las asíntotas e indique si son crecientes o decrecientes. Utilice toda esta información para esbozar sus gráficas.

a) $f(x) = 3^{2-x} + 1$

b) $g(x) = 3.e^{2x+4}$

c) $h(x) = 2.e^{x-2} + 4$

21) Por causa de un posible brote de una enfermedad se ha solicitado a toda la población de una localidad, a través de avisos en los medios de comunicación, presentarse ante la autoridad sanitaria para realizar un control médico. La siguiente función da aproximadamente la proporción de personas que se han presentado ante el médico luego de **t** días de realizado el anuncio: $C(t) = 1 - e^{-0,3t}$

a) ¿Cuál es el valor de C(3)?

b) Si en la localidad hay 5000 personas, ¿cuántas se han presentado luego de 5 días de realizado el anuncio?

c) ¿Podría ser $C(t) = 2 - e^{-0,3t}$? ¿Por qué?

d) ¿Qué sucede con C(t) a medida que **t** toma valores cada vez mayores?

e) Dé un gráfico aproximado para C(t).

Si en la localidad hay 5000 personas:

f) ¿Después de cuántos días se presentaron 3000 personas?

g) Las autoridades sanitarias se dan por satisfechas si más del 70% de la población se presenta para la revisación dentro de las dos primeras semanas. ¿Ha sido efectiva, en este sentido, la campaña publicitaria?

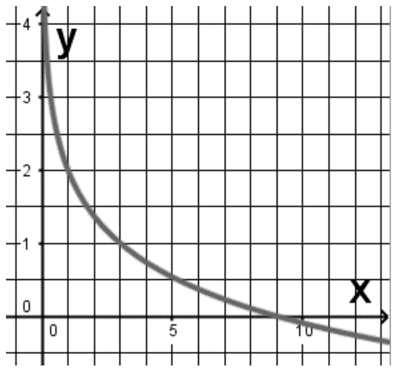
h) Suponga que se informa que se ha conseguido que el 70% de la población responda al llamado dentro de las dos semanas, a partir del momento en que se lanzó la publicidad y que la fórmula que representa la proporción de personas que se presentan luego de **t** días realizado el anuncio es del tipo $C(t) = 1 - e^{at}$. ¿Cuál será en este caso el valor de **a**?

22) Si $T(t)$ es la temperatura del cuerpo en el instante **t**, el modelo propuesto por Newton, conocido como Ley de enfriamiento de Newton, es: $T(t) = T_d.e^{-kt} + T_{amb}$, donde para el instante **t** el valor T_{amb} es la temperatura constante del ambiente donde se introduce el objeto, y T_d es la diferencia entre la temperatura inicial del objeto y la del ambiente. La constante **k** indica la rapidez de enfriamiento y depende del objeto. Una taza de café que se saca del microondas a una temperatura de 93°C se coloca en una habitación cuyo ambiente se encuentra a una temperatura de 21°C. el modelo planteado por la ley de enfriamiento de Newton es tal que **t** se mide en minutos y **T** en °C.

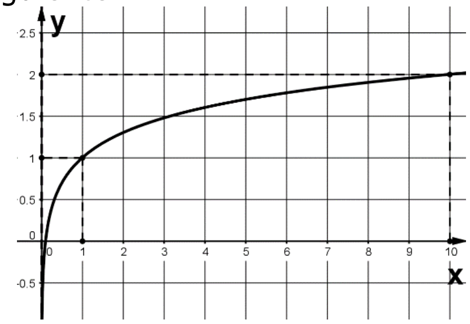
a) Sabiendo que la temperatura del café 15 minutos después de sacarla del microondas es 55°C. ¿Cuál será la temperatura del café luego de media hora de sacarla del microondas?

b) Realice un gráfico de la función que modela el problema y estime ¿cuál es la mínima temperatura que alcanzará la taza de café, independientemente del tiempo transcurrido?

23) Determine los valores de **a**, **b** y **c** de la función $y = a + \log_b(x+c)$, sabiendo que su gráfica es la que se muestra en la figura y que los puntos (1 , 2) y (9 , 0) pertenecen a dicha gráfica.



24) Determine los valores de **a** y **b** en la fórmula de la función $f(x) = a + \log_b x$ sabiendo que su gráfica es la siguiente:



25) De cada una de las siguientes funciones, determine su dominio, imagen, intersecciones con los ejes coordenados, si crece o decrece y, si existen, la ecuación de las asíntotas. Represéntelas gráficamente (sin tabla de valores).

a) $f(x) = 2\log_2(x+4)$

b) $g(x) = 1 + \log_{\frac{1}{3}}(x-3)$

26) Según el pronóstico de las Naciones Unidas, la cantidad de dióxido de carbono en la atmósfera (en partes por millón de volumen, ppm) se puede modelar por la función $C(t) = 277.e^{0,00267t}$ con $\mathbf{0 \le t \le 350}$, donde **t** es el tiempo en años desde 1750.

a) De seguir el comportamiento del modelo, ¿cuánto dióxido de carbono habrá en el 2050?

b) Según el modelo, ¿en qué década la cantidad de dióxido de carbono será de 700 ppm?

27) Un material radioactivo que se utiliza en reactores nucleares tiene un decaimiento que se modeliza por la función $P(t) = P_0.e^{-0,00248t}$, donde P_0 es la cantidad inicial de material radioactivo. Calcule la vida media del material radioactivo, es decir el tiempo que tarda en reducirse la mitad de la masa del material.

28) Después del primer mes de vida, el crecimiento de una cierta especie de árbol responde a la ecuación $\mathbf{h(t) = 25 + 12\log_{1,5} t}$, donde la altura **h** está dada en cm y **t** el tiempo en meses.

a) ¿Cuánto mide el árbol al primer mes de vida?
b) ¿Cuánto medirá el árbol a los 4 meses?
c) ¿Cuánto tiempo deberá transcurrir para que el árbol alcance una altura de 2 metros?

29) La intensidad del sonido que percibimos en nuestro oído tiene diferentes niveles. Un modelo para determinar el nivel de intensidad percibido I_p (medido en decibeles) que corresponde a la intensidad de sonido producido I es: $\mathbf{I_p = 10\log\left(\frac{I}{I_0}\right)}$ donde I_0 es un valor que corresponde al sonido más débil que puede ser detectado por nuestro oído en determinadas condiciones.

a) Encuentre la intensidad percibida si el sonido producido I tiene 10 veces más intensidad que I_0.
b) Encuentre la intensidad percibida si el sonido producido I tiene 1000 veces más intensidad que I_0.
c) Encuentre la intensidad percibida si el sonido producido I es el de la voz humana, es decir 10000 veces más que I_0.
d) Un nivel de intensidad del sonido de 141 decibeles produce ya dolor en nuestro oído. ¿cuántas veces más intenso que I_0 debe ser, aproximadamente, el sonido producido I para que el sonido que percibimos alcance este nivel?

FUNCIONES RACIONALES

Las funciones que se estudiarán a continuación son aquellas cuya fórmula resulta del **cociente entre dos expresiones polinómicas, siempre y cuando el denominador sea no nulo**. Anteriormente se trabajó con funciones polinómicas de grado 0, las cuales son las funciones constantes cuya gráfica es una recta horizontal. Después se abordaron las funciones polinómicas de primer grado, es decir las funciones afines cuya gráfica es una recta (no vertical); y por último, las funciones polinómicas de grado 2, es decir las funciones cuadráticas, cuya gráfica es una parábola.

Existen otras funciones polinómicas de grado superior, que no se estudiarán en este espacio curricular, como por ejemplo, las funciones cúbicas (polinómicas de grado 3) o las polinómicas de grado 4. De esta manera se puede generalizar que una función polinómica de **grado** n es aquella cuya fórmula es:

$$f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_o, \quad a_n \neq 0$$

Cada uno de los términos de la fórmula de la anterior función polinómica, se denomina **monomio**. Las constantes $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ son números reales llamados **coeficientes**. Los exponentes son todos números enteros no negativos. El grado de una función polinómica de una indeterminada coincide con el mayor exponente al que se ha elevado dicha indeterminada.

Definición:

Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones polinómicas con $g(x) \neq 0$. Entonces, la función dada por la expresión $r(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ es una función racional.

Son ejemplos de funciones racionales:

$$f(x)=\frac{3x^3+2x^2-6x+4}{5x^8+5x^3+6x^2}, \qquad g(x)=\frac{x^4+2}{x^2+3x-1}, \qquad h(x)=\frac{x}{x+3}$$

Gráficas de funciones racionales

A continuación se realizará el estudio analítico de algunas funciones para poder esbozar sus gráficas.

Actividad

Considere las siguientes funciones:

$$f(x)=\frac{4}{3-5x}, \qquad g(x)=\frac{4x+2}{5x+1}, \qquad h(x)=\frac{4x+2}{x^2+x-2} \qquad \text{y} \qquad j(x)=\frac{x^2-9}{x^2-2x-3}$$

Observe que en el caso de $f(x)$ se trata del cociente entre una función polinómica de grado 0 y una de grado 1, $g(x)$ es el cociente entre dos funciones polinómicas de grado 1, $h(x)$ es el cociente entre una función polinómica de grado 1 y otra de grado 2, y por último $j(x)$ es el cociente entre dos polinómicas de grado 2.

Para cada una de las funciones:

- **a)** Indique el dominio de cada una de ellas. En general, ¿qué debe tenerse en cuenta para determinar el dominio de una función racional?
- **b)** Determine analíticamente las intersecciones de la gráfica de cada una de las funciones con los ejes coordenados.
- **c)** Analice en cada caso qué sucede con los valores de y cuando x se aproxima (por derecha y por izquierda) a los valores que excluyó del dominio.

d) Analice y justifique la existencia de asíntotas horizontales y/o verticales en cada caso. Elabore y valide conclusiones que permitan determinar las ecuaciones de asíntotas de funciones racionales, en general.
e) Represente gráficamente las tres primeras funciones.

Considere ahora solo la función j. En algunos casos, la función racional puede poseer en su fórmula un numerador y denominador que poseen factores comunes.

f) Factoree numerador y denominador de $j(x)$.
g) ¿Pueden simplificarse dichos factores comunes?
h) Suponga que s es la función que se obtiene al simplificar los factores comunes de $j(x)$. ¿Se puede decir que las funciones s y j son iguales? Justifique.
i) Represente gráficamente ambas funciones.

> Recuerde:
>
> Si $a \neq 0$:
>
> - $ax+b = a\,.\left(x+\dfrac{b}{a}\right)$
> - $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$ donde x_1 y x_2 son las raíces de $ax^2+bx+c=0$

<u>*Nota*</u>:

En esta guía no se abordará el caso en que la fórmula de una función racional sea el cociente entre un polinomio de un grado mayor que otro, donde surgen asíntotas oblicuas.

Ejercicios y problemas

30) Para cada una de las siguientes funciones determine: dominio, intersecciones con los ejes coordenados, ecuaciones de sus asíntotas; luego represéntelas gráficamente.

a) $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$

b) $g(x)=\dfrac{5x}{x-1}$

c) $h(x)=\dfrac{3x^2}{x^2-1}$

d) $j(x)=\dfrac{4x}{x^2-1}$

e) $k(x)=\dfrac{7+2x}{2+x}$

f) $m(x)=\dfrac{x^2}{x^2+9}$

g) $p(x)=\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-4}$

h) $q(x)=\dfrac{x-1}{x^2-2x+1}$

i) $s(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2+2x}$

j) $t(x)=\dfrac{x^2-9}{x^2-4x+3}$

31) Una empresa generadora de energía eléctrica quema carbón para generar electricidad. El costo C (en pesos) de eliminar p % de contaminantes de la chimenea está dado por:

$$C=\frac{80000p}{100-p} \quad \text{para } 0 \le p < 100$$

Suponga que usted es miembro de una legislatura estatal que considera una ley que requeriría que la empresa eliminara el 90% de los contaminantes de sus emisiones en chimeneas. Y por ley se requiere que la remoción sea del 85%.

a) Determine el dominio de la función teniendo en cuenta el contexto del problema.
b) ¿Cuánto costo adicional tendría la compañía como resultado de la nueva ley?

c) Si se destinaran $2 millones para la remoción de contaminantes. ¿Qué porcentaje se alcanzaría a remover?
d) De acuerdo con este modelo, ¿sería posible eliminar el 100% de los contaminantes? Justifique su respuesta.
e) Determine la ecuación de la asíntota horizontal de la función que modela el problema. ¿Tiene algún significado en la situación?

32) La comisión de caza introduce 100 venados en terrenos estatales de cacería recién adquiridos. La población N de venados está modelada por

$$N = \frac{20.(5+3t)}{1+0,04t}$$

donde t es el tiempo en años desde la introducción de los mismos.
a) Encuentre las poblaciones pasados 5; 10 y 25 años.
b) ¿Cuál es el tamaño limitante de la población de venados a medida que transcurran los años? Justifique.
c) Represente gráficamente la función teniendo en cuenta el contexto del problema.

33) Después de que cierta droga se inyecta a un paciente, se vigila la concentración C de la droga en el torrente sanguíneo. En el tiempo $t \geq 0$ (en horas desde que se aplicó la droga), la concentración (en mg/L) se modela mediante:

$$C(t) = \frac{30t}{t^2+2}$$

a) ¿A cuánto se aproxima la concentración en el torrente sanguíneo al transcurrir el tiempo? Justifique.
b) Represente gráficamente la función teniendo en cuenta el contexto del problema.
c) ¿Cuánto tiempo deberá transcurrir para que la concentración sea de 7,76 mg/L?

34) Suponga que la población de conejos en una granja, está dada por el modelo $C(t) = \frac{3000t}{t+1}$, donde $t \geq 0$ es el tiempo (en meses) desde el 1 de Enero de 2017.
a) Calcule la cantidad de conejos que habrá en la granja al terminar el mes de Octubre.
b) Determine la ecuación de la asíntota horizontal de la función que modela el problema e interprete su significado en el contexto del mismo.
c) Represente gráficamente la función que modela el problema.

35) Analice si las siguientes afirmaciones son Verdaderas o Falsas justificando su respuesta.

a) El dominio de la función $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2-x-2}$ es $\mathbb{R} - \{-2,1\}$.

b) La función $g(x) = \frac{3x^2}{2x^2+4}$ toma valores cada vez más próximos a $1,5$ cuando x toma valores cada vez más grandes.

c) La función $h(x) = \frac{2x^2}{x^2-4}$ tiene como asíntotas verticales a las rectas $x = 2$ y

Respuestas a los ejercicios y problemas

1) a) D **b)** B **c)** B y F **d)**A y C. C **e)** La D, pues su ordenada (precio) es menor.

2)

a) Que a los 6 días de internación, la temperatura del paciente fue de 38°C.
b) 40°C
c) Los primeros cuatro días. El día 6 y las primeras horas del día 7.
d) Se mantuvo constante.

3)

a)D={Lunes, Martes, Miércoles, Jueves, Viernes}. I={-280, 322, 448, 630, 1120}
b)448
c)Jueves
d)Que el día Lunes hubo una pérdida de $280.
e)Viernes
f) Creciente, pues a medida que el tiempo aumenta, la ganancia también lo hace.

4)

a) $[-4,-2)\cup(-2,4]$
b) (-2 ; 7]
c) (0 ; 5,5)
d) 2
e) -2,5 y -1
f) (3,4)
g) $(-2;0)\cup(1;2)\cup(2,5;3)$

5)

a) $f\cap xx' = \left\{\left(\frac{6}{5},0\right)\right\}$ $f\cap yy' = \{(0,-6)\}$
b) $f\cap xx' = \{(-4,0)\}$ $f\cap yy' = \{(0,2),(0,-2)\}$
c) $f\cap xx' = \left\{\left(\frac{8}{3},0\right)\right\}$ $f\cap yy' = \{(0,8)\}$
d) $f\cap xx' = \left\{\left(\frac{1}{2},0\right)\right\}$ $f\cap yy' = \varnothing$
e) $f\cap xx' = \{(5,0),(-5,0)\}$. $f\cap yy' = \{(0,-25)\}$
f) $f\cap xx' = \{(9,0)\}$ $f\cap yy' = \{(0,-3),(0,3)\}$

6)

a) -4
b) $2a^2+2h^2+4ah-4$
c) 8
d) -28
e) $2h+4a$

7)

a) El dominio es el conjunto de vectores lógicos de longitud 3 y la imagen es {TRUE,FALSE}
b) $D=\mathbb{R}^{10}$, $I=\mathbb{R}$
c) El dominio es el conjunto de las matrices cuadradas $D=M_{n\times n}$ e $I=\mathbb{R}$
d) $D=[0,+\infty)$, $I=[0,+\infty)$

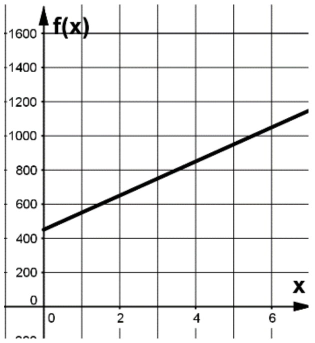
e) El dominio es el conjunto de las relaciones entre variables y la imagen es el conjunto de representaciones gráficas de las relaciones entre variables.

8)

a) $f(x) = 100x + 450$.

b) Pendiente 100: costo de 1 hora de trabajo; ordenada al origen 450: costo fijo del diagnóstico.

c)



d) 2

e) $f(x) = 100x$

9)

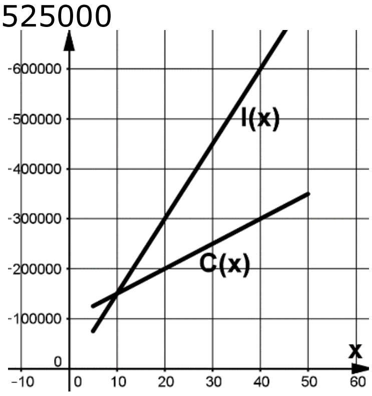
a) $C(x) = 5000x + 100000$

b) 275000

c) I(x)=15000x

d) 525000

e)



f) Por 10 televisores: 0 y por 6: -40000

g) Si, pues produciendo 50 televisores obtiene la máxima ganancia.

10)

a) d(t)=-100t+2000

b) pendiente: distancia, en metros, recorrida en un minuto. Ordenada al origen: distancia desde la casa de Pedro hasta la escuela.

c) Si, pues el tiempo máximo que le lleva el recorrido es de 20 minutos.

11)

a) C(x)=10x+5

b) Pendiente: precio por litro de lavandina; ordenada al origen precio del bidón

c) $40

d) 1,6

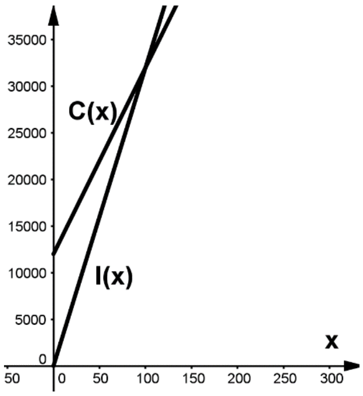
e) No, pues daría como resultado $65 cuando en realidad debe pagar por 2 bidones y los 6 litros, $70

12)

a) C(x)=200x+12000

b) I(x)=320x

c)



d) $G(x)=120x - 1200$

e) 100 remeras.

13)

a) [0 ; 300]

b) Que si no fabrica raquetas el costo será de $5000.

c) 200

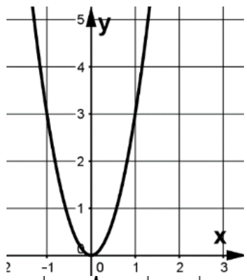
d) 1000

e) 2000

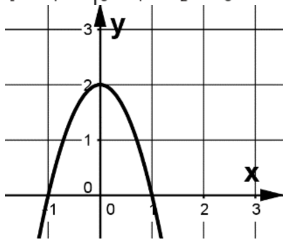
f) 200

14)

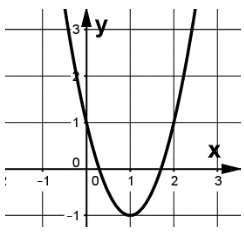
a)



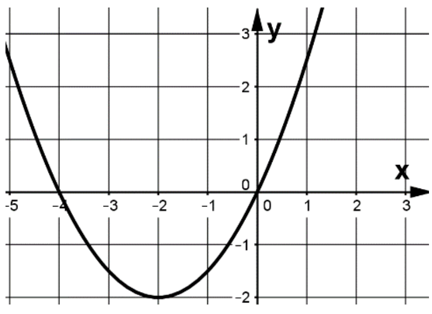
b)



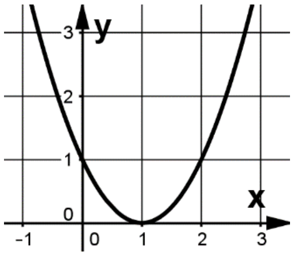
c)



d)

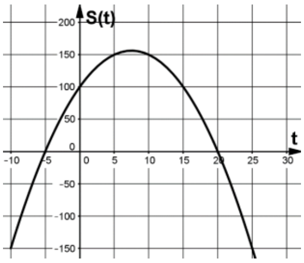


e)



15)

a)



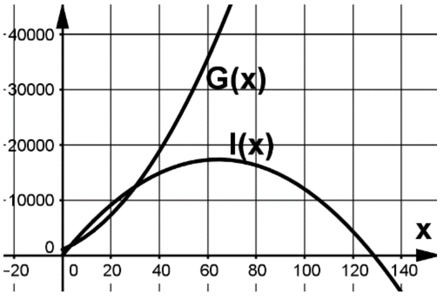
b) [-5 ; 20]
c) En junio de 1997 el número de truchas fue máximo y alcanzó los 156 ejemplares.
d) A partir de 1997 se produjo el descenso.
e) En el año 2010.

16)

a) A las 23 hs se produce la máxima asistencia de clientes, que son 90.
b) Antes de las 21 hs o después de la 1 am
c) A partir de las 22 hs

17)

a)

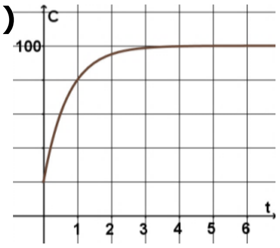


b) Gastos fijos: $1050
c) 3 unidades
d) $B(x) = -\frac{54}{5}x^2 + 360x - 1050$
e) Si se venden 17 unidades el beneficio será máximo
f) Máximo beneficio mensual $1948,8
g) Producir más de 30 unidades o menos de 3 unidades.

18)

a) 95 y significa que luego de 2 meses de estar en el mercado, hubo un 95% de compradores.
b) p(t) tiende al 100%. No se contradice, pues en el intervalo [0,1] la variación de p(t) es 60; en tanto que en [4,5] fue de 0,24. La función crece pero cada vez más lentamente.
c) 1 mes y medio
d) Aproximadamente a 9992

e)



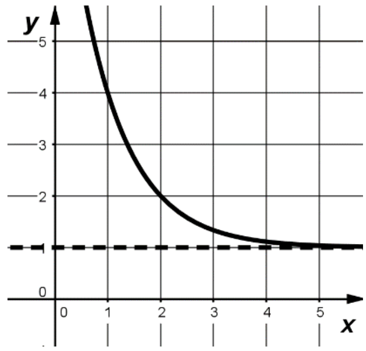
19)

a) $a = 2, b = 2, c = 2$

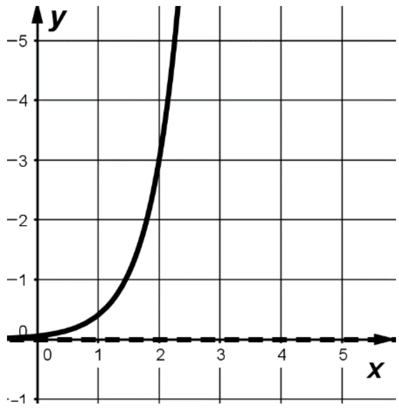
b) $a = 2, b = -2, c = 3$

20)

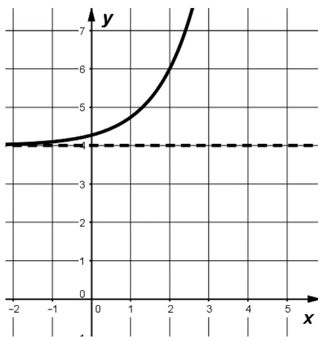
a) Dominio: $\mathbb{R}$. Imagen: $(1, +\infty)$. Asíntota horizontal: $y = 1$. Decreciente.



b) Dominio: $\mathbb{R}$. Imagen: $(0, +\infty)$. Intersección con el eje y: $(0, 3e^{-4})$. Asíntota horizontal: $y = 0$. Creciente.



c) Dominio: $\mathbb{R}$. Imagen: $(4, +\infty)$. Intersección con el eje y: $(0, 4 + 2e^{-2})$. Asíntota horizontal: $y = 4$. Creciente.



21)

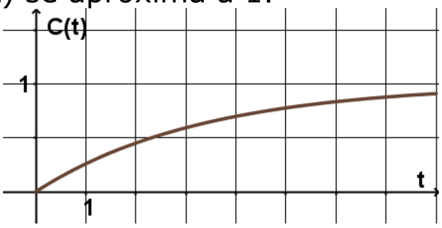
a) $C(3)=0,59$ Esto significa que el 59% de las personas se han presentado a la autoridad sanitaria luego de 3 días de realizado el anuncio.

b) Aproximadamente 3884 personas.

c) A medida que **t** aumenta, C(t) debe aproximarse a 1 (que es el 100%). En el caso de $\mathbf{C(t)=2-e^{-0,3t}}$, a medida que **t** aumenta se aproxima a 2, lo cual no tiene sentido para nuestro problema.

d) C(t) se aproxima a 1.

e)



f) t=3,5

g) si

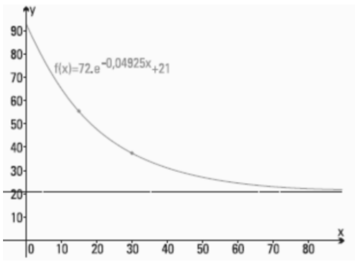
h) a=-0,086

22)

a) 55

b) 21°C

c)

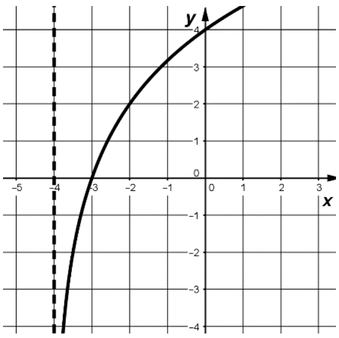


23) a=-2 b=1/3 y c=0

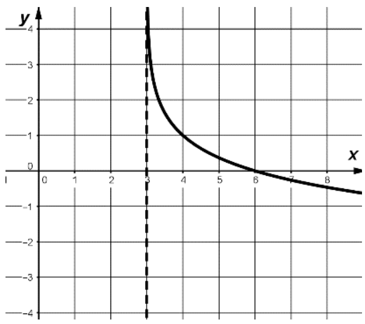
24) a=1 y b=10

25)

a)



b)



26)

a) 617,09 ppm

b) En el año 2097 aproximadamente.

27) Vida media del material radioactivo, aproximadamente, 279 años y seis meses.

28)

a) 25cm

b) 66cm aprox.

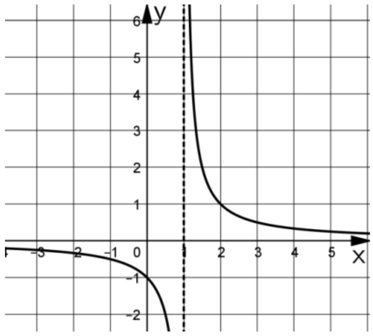
c) 30 años y 9 meses aprox.

29)

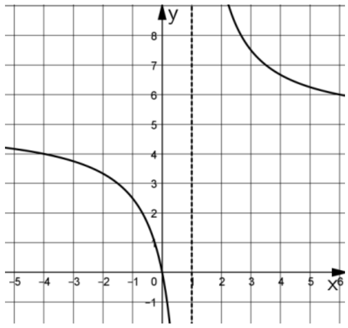
a) 10
b) 30
c) 40
d) $1{,}258925411 \times 10^{14}$

30)

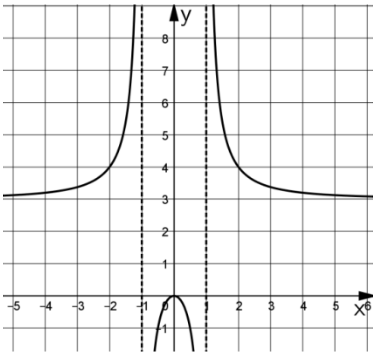
a)



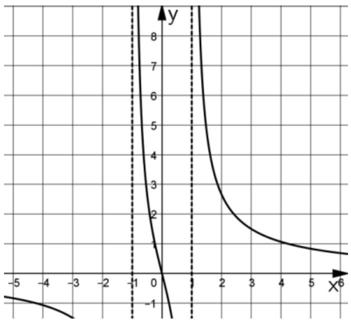
b)



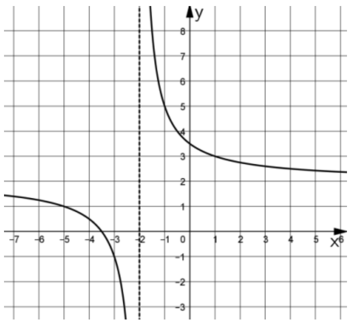
c)



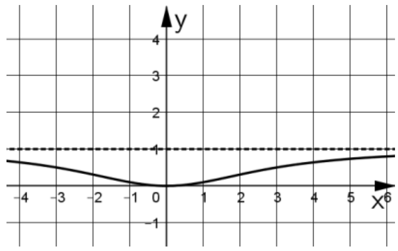
d)



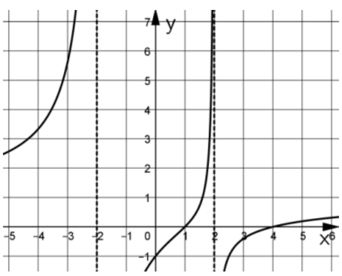
e)



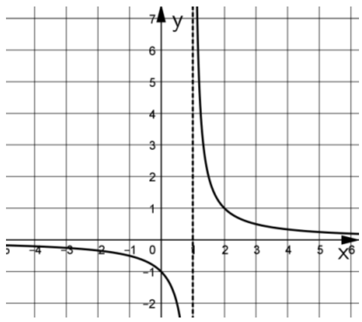
f)



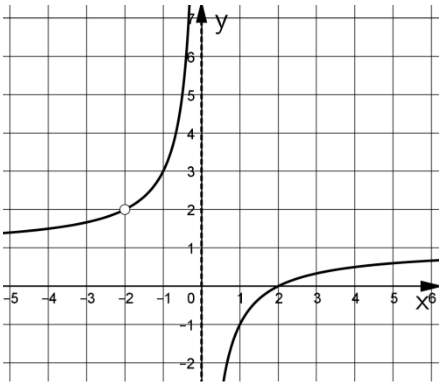
g)



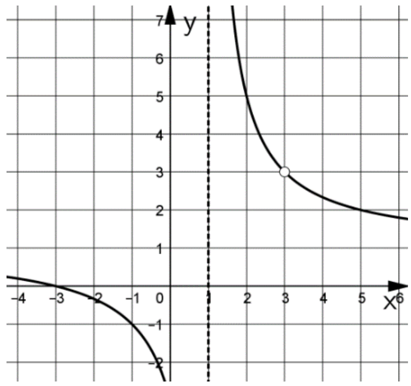
h)



i)



j)



31)

a) $[0;100)$

b) \$266666,67

c) 96,15%

d) No es posible, matemáticamente no puede dividirse por 0.

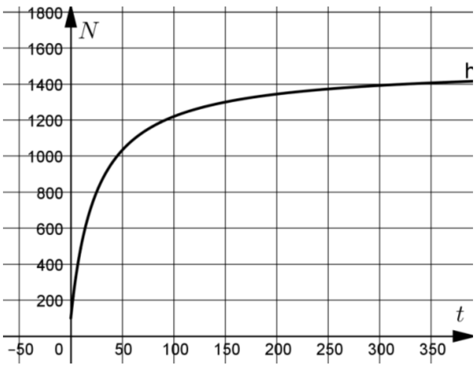
e) $y=-80000$. No tiene significado en esta situación. Que $p\to\pm\infty$ no tiene sentido ya que el dominio de la función modelo es $[0;100)$.

32)

a) $N(5)=333.\quad N(10)=500$ y $N(25)=800$

b) 1500

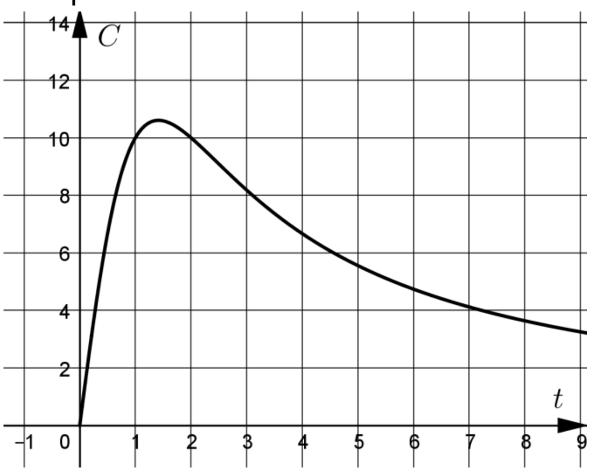
c)



33)

a) Se aproxima a 0.

b)



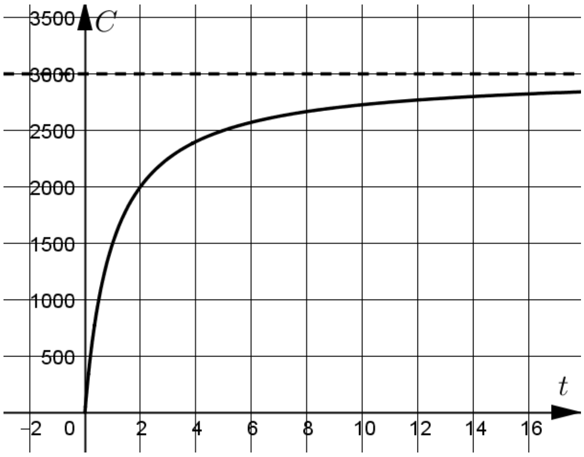
c) 0,62 hs o 3,25 hs.

34)

a) 2727

b) $y = 3000$ y es el número máximo de conejos que habrá en la granja.

c)



35)

a) F

b) V

c) V