

# Assignment V, Probability and Random Variables

พศวัต ถิ่นกาญจน์วัฒนา  
รหัสประจำตัวนิสิต 6410451199

1. หยิบไพ่ 2 ใบจากกองของไพ่ 8 ใบ ประกอบด้วย 4 queens และ 4 kings ถ้าไพ่อย่างน้อย 1 ใบ เป็น queen จงหาความน่าจะเป็นที่ไพ่ 2 ใบดังกล่าวเป็น queen ทั้งสองใบ

$$\begin{aligned} |E| &= 3 & |S| &= 7 & p(E) &= \frac{|E|}{|S|} \\ & & & & &= \frac{3}{7} \end{aligned}$$

2. จงหาความน่าจะเป็นในการเลือกตัวเลข 6 ตัว ที่ตรงกับรางวัลที่หนึ่งทุกตัว โดยลำดับของตัวเลขไม่มีความสำคัญ กำหนดให้จำนวนเลขที่เลือกมีค่าตั้งแต่ 1 จนถึงค่าต่อไปนี้

1) 40

$$\begin{aligned} |E| &= 1 & |S| &= {}^{40}C_6 & p(E) &= \frac{|E|}{|S|} \\ & & &= \frac{40!}{(40-6)! \cdot 6!} & &= \frac{1}{3,838,380} \\ & & &= 3,838,380 \end{aligned}$$

2) 48

$$\begin{aligned} |E| &= 1 & |S| &= {}^{48}C_6 & p(E) &= \frac{|E|}{|S|} \\ & & &= \frac{48!}{(48-6)! \cdot 6!} & &= \frac{1}{12,271,512} \\ & & &= 12,271,512 \end{aligned}$$

3) 56

$$\begin{aligned} |E| &= 1 & |S| &= {}^{56}C_6 & p(E) &= \frac{|E|}{|S|} \\ & & &= \frac{56!}{(56-6)! \cdot 6!} & &= \frac{1}{32,468,436} \\ & & &= 32,468,436 \end{aligned}$$

4) 64

$$\begin{aligned}
 |E| &= 1 & |S| &= {}^{64}C_6 & p(E) &= \frac{|E|}{|S|} \\
 & & &= \frac{64!}{(64-6)! \cdot 6!} & &= \frac{1}{74,974,368} \\
 & & &= 74,974,368 & &
 \end{aligned}$$

3. จงหาความน่าจะเป็นในการเลือกไพ่ 5 ใบ ที่ประกอบด้วย 2 ข้าวหลามตัด 3 โพดำ 6 โพแดง 10 ดอกจิก และ King โพแดง

$$\begin{aligned}
 |E| &= 51^4 \times 4 & |S| &= 52^5 & p(E) &= \frac{|E|}{|S|} \\
 &= 27,060,804 & &= 380,204,032 & &= \frac{27,060,804}{380,204,032} \\
 & & & & &\approx \mathbf{0.0711744266}
 \end{aligned}$$

4. จงหาความน่าจะเป็นในการทอยลูกเต๋าสี่เหลี่ยม 1 ลูก จำนวน 6 ครั้ง โดยไม่ปรากฏหน้าที่เป็นเลขคู่เลย

$$\begin{aligned}
 |E| &= 3^6 & |S| &= 6^6 & p(E) &= \frac{|E|}{|S|} \\
 &= 729 & &= 46,656 & &= \frac{729}{46,656} \\
 & & & & &= \mathbf{0.015625}
 \end{aligned}$$

5. จงหาความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไขที่บิตสตริงความยาว 4 มีบิต 0 ติดกันอย่างน้อย 2 ตัว โดยกำหนดให้บิตแรกมีค่าเป็น 1

$$\begin{aligned}
 |E| &= 2^2 & |S| &= 2^4 & p(E) &= \frac{|E|}{|S|} \\
 &= 4 & &= 16 & &= \frac{4}{16} \\
 & & & & &= \frac{1}{4} \\
 & & & & &= \mathbf{0.25}
 \end{aligned}$$

6. ครอบครัวหนึ่งมีลูก 5 คน จงหาความน่าจะเป็นที่ลูกคนแรกเป็นผู้ชาย หรือสองคนสุดท้ายเป็นผู้หญิง เมื่อ

1) ผู้ชายหรือผู้หญิงมีความน่าจะเป็นเท่ากัน

$$\begin{aligned}
 \text{Define} & \quad \text{ความน่าจะเป็นของผู้ชาย} ::= p(E_1) \\
 \text{Define} & \quad \text{ความน่าจะเป็นของผู้หญิง} ::= p(E_2) \\
 \text{Let} & \quad p(E_1) = p(E_2) & (1) \\
 & \quad 1 = p(E_1) + p(E_2) \\
 & \quad 1 = 2 \cdot p(E_1) & ; \quad (1) \\
 & \quad p(E_1) = \frac{1}{2} \\
 & \quad p(E_1) = p(E_2) = 0.5 & (2)
 \end{aligned}$$

$ E_1  = 2^4$ $= 4$  $p(E_1) = \frac{16}{32}$ $= 0.5$		$ E_2  = 2^3$ $= 8$  $p(E_2) = \frac{8}{32}$ $= 0.25$
---	--	---

$$\begin{aligned}
 p(E) &= p(E_1) + p(E_2) \\
 &= 0.5 + 0.25 \\
 &= \mathbf{0.75}
 \end{aligned}$$

2) ความน่าจะเป็นของผู้ชายเป็น 0.51

<i>Define</i>	ความน่าจะเป็นของผู้ชาย $::= p(E_1)$
<i>Define</i>	ความน่าจะเป็นของผู้หญิง $::= p(E_2)$
<i>Let</i>	$p(E_1) = 0.51$ <span style="float: right;">(1)</span> $1 = p(E_1) + p(E_2)$ $1 = 0.51 + p(E_2)$ <span style="float: right;">;</span> <span style="float: right;">(1)</span> $p(E_2) = 1 - 0.51$ $= 0.49$

$ E_1  = 2^4$ $= 4$  $p(E_1) = \frac{16}{32}$ $= 0.5$		$ E_2  = 2^3$ $= 8$  $p(E_2) = \frac{8}{32}$ $= 0.25$
---	--	---

$$\begin{aligned}
 p(E) &= 0.51(p(E_1)) + p(E_2) \\
 &= 0.51(0.5) + 0.25 \\
 &= 0.255 + 0.25 \\
 &= \mathbf{0.505}
 \end{aligned}$$

7. สมมติให้ 2% ของคนที่ไม่ใช้ฝิ่นมีผลทดสอบการใช้ฝิ่นเป็น positive (หรือเรียกอีกอย่างหนึ่งว่า 2% เป็น false positive) และ 5% ของคนที่ใช้ฝิ่นมีผลทดสอบการใช้ฝิ่นเป็น negative (หรือเรียกอีกอย่างหนึ่งว่า 5% เป็น false negative) และมีคน 1% ที่เป็นผู้ใช้ฝิ่น จงหา

กำหนดให้	$U$ เป็น <i>universe</i> และ $ U $	$= 100$
กำหนดให้	เซตของคนที่ใช้ฝิ่น	$::= A$
กำหนดให้	เซตของคนที่ไม่ใช้ฝิ่น	$::= B$
กำหนดให้	เซตของคนที่ได้ผลการทดสอบเป็น positive	$::= C$
กำหนดให้	เซตของคนที่ได้ผลการทดสอบเป็น negative	$::= D$
โจทย์กำหนด	2% เป็น <i>false positive</i> :	$ B \cap C  = 2$
โจทย์กำหนด	5% เป็น <i>false negative</i> :	$ A \cap D  = 5$
โจทย์กำหนด	1% เป็นคนที่ใช้ฝิ่น :	$ A  = 1$

- 1) ความน่าจะเป็นที่คนที่ทดสอบการใช้ฝิ่นได้ผล negative ไม่ได้ใช้ฝิ่น

$$\text{true negative} = B \cap D$$

$$|A| = 1$$

$$|A'| = |U - A|$$

$$= 100 - 1$$

$$= 99$$

- 2) ความน่าจะเป็นที่คนที่ทดสอบการใช้ฝิ่นได้ผล positive เป็นผู้ใช้ฝิ่น

8. สมมติให้คนไข้ 8% เป็นผู้ติดเชื้อไวรัสสายพันธุ์ใหม่กว่า นอกจากนั้นพบว่า 98% ของคนไข้ที่เป็นผู้ติดเชื้อไวรัสสายพันธุ์ใหม่กว่ามีผลการทดสอบเป็น positive และ 3% ของคนไข้ที่ไม่เป็นผู้ติดเชื้อไวรัสสายพันธุ์ใหม่กว่ามีผลการทดสอบเป็น positive จงหา

- 1) ความน่าจะเป็นที่คนไข้ที่มีผลการทดสอบ positive เป็นผู้ติดเชื้อ

- 2) ความน่าจะเป็นที่คนไข้ที่มีผลการทดสอบ positive ไม่เป็นผู้ติดเชื้อ

- 3) ความน่าจะเป็นที่คนไข้ที่มีผลการทดสอบ negative เป็นผู้ติดเชื้อ

- 4) ความน่าจะเป็นที่คนไข้ที่มีผลการทดสอบ negative ไม่เป็นผู้ติดเชื้อ

9. จงหา expected value ของผลรวมของการโยนลูกเต๋า 2 ลูก โดยลูกเต๋าดำแต่ละลูกมี biased ที่จะออกเลข 3 เป็นสองเท่าของเลขอื่น ๆ
10. ในการสอบวิชา 01418000 ข้อสอบประกอบด้วยคำถามแบบถูก/ผิด จำนวน 50 ข้อ ข้อละ 2 คะแนน และคำถามแบบเลือกตอบ 4 ตัวเลือก จำนวน 25 ข้อ ข้อละ 4 คะแนน ความน่าจะเป็นที่แบ่งตอบคำถามแบบ ถูก/ผิดได้ถูกต้องคิดเป็น 0.9 และความน่าจะเป็นที่จะตอบคำถามแบบเลือกตอบได้ถูกต้องคิดเป็น 0.8 จงหา expected value ของคะแนนที่แบ่งจะได้
11. ป๋องใส่ลูกบอล  $m$  ลูกลงในถัง  $n$  ใบแบบสุ่มและกระจายไปในถังทุก ๆ ใบเท่า ๆ กัน จงหา
- 1) ความน่าจะเป็นที่ถังใบแรกไม่มีลูกบอล
  - 2) Expected value ของจำนวนถังที่ไม่มีลูกบอล
12. จงหาค่า variance ของจำนวน success ในการทำ Bernoulli trials จำนวน  $n$  ครั้งในแต่ละครั้งมีความน่าจะเป็นของ success เป็น  $p$  และความน่าจะเป็นของ failure เป็น  $q$