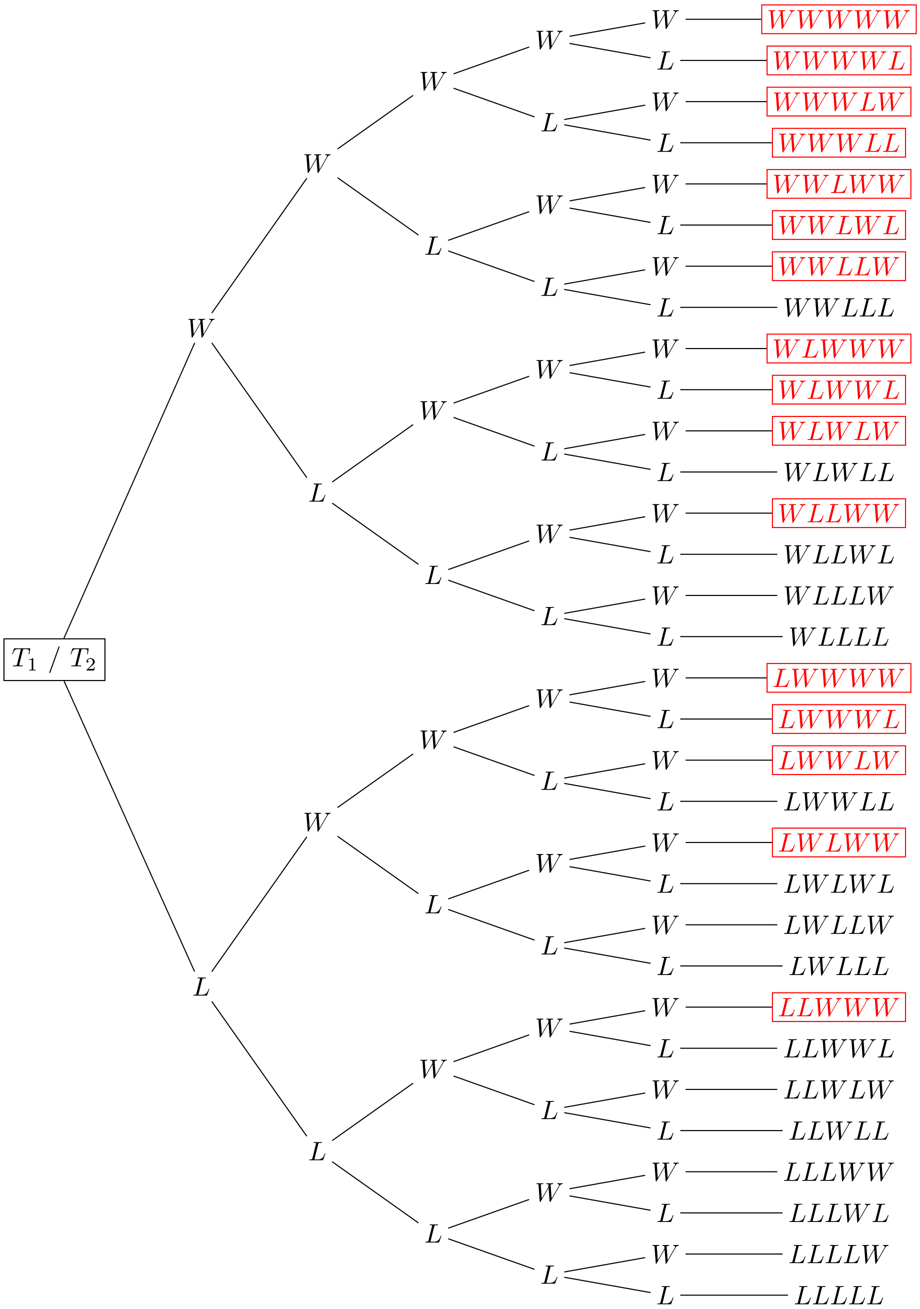
# Assignment IV, Basic Counting

พศวัต ถิ่นกาญจน์วัฒนา
รหัสประจำตัวนิสิต 6410451199

1. จงหาจำนวนวิธีทั้งหมดในการชนะ 3 เกมจากทั้งหมด 5 เกม ระหว่างผู้เล่น 2 คน คือ $T_1$ และ $T_2$ และอยากทราบว่าผู้เล่นทั้ง 2 คน จะสามารถชนะเกมได้ทีมละกี่เกม (อาจใช้ Tree diagram)

เกมที่ 1 เกมที่ 2 เกมที่ 3 เกมที่ 4 เกมที่ 5



2. จงหาจำนวนวิธีทั้งหมดในการจัดที่นั่งให้คน 4 คนในโต๊ะกลม โดยการจัดที่นั่งที่คนด้านซ้ายและขวาเป็นคนเดิม ถือว่าเป็นการจัดที่นั่งซ้ำ

$$\begin{aligned} circular\ arrangement\ of\ n - object :: &= (n-1)! \\ &= (4-1)! \\ &= \mathbf{6} \end{aligned}$$

3. จงหาจำนวนสมาชิกของ $|A \cup B|$ เมื่อ $|A| = 12$ และ $|B| = 18$ เมื่อแต่ละกรณีต่อไปนี้เป็นจริง

   1) $|A \cap B| = \phi$

$$\begin{aligned} |A \cup B| &= |A| + |B| - |A \cap B| \\ &= 12 + 18 - 0 \\ &= \mathbf{30} \end{aligned}$$

   2) $|A \cap B| = 1$

$$\begin{aligned} |A \cup B| &= |A| + |B| - |A \cap B| \\ &= 12 + 18 - 1 \\ &= \mathbf{29} \end{aligned}$$

   3) $|A \cap B| = 6$

$$\begin{aligned} |A \cup B| &= |A| + |B| - |A \cap B| \\ &= 12 + 18 - 6 \\ &= \mathbf{24} \end{aligned}$$

   4) $A \subseteq B$

$$\begin{aligned} |A \cup B| &= |A| + |B| - |A \cap B| \\ &= 12 + 18 - 12 \\ &= \mathbf{18} \end{aligned}$$

4. อักขระภาษาอังกฤษประกอบด้วยพยัญชนะ 21 ตัว สระ 5 ตัว จงหาสตริงของอักขระตัวเล็ก (lowercase) ความยาว 6 ที่ประกอบด้วย

   1) มีสระ 1 ตัว

$$\begin{aligned} {}_{21}C_5 \ \times \ {}_5C_1 &= \frac{21!}{16! \times 5!} \times \frac{5!}{4! \times 1!} \\ &= 20,349 \times 5 \\ &= \mathbf{101,745\ strings} \end{aligned}$$

2) มีสระ 2 ตัว โดยสามารถเลือกสระซ้ำได้

$$
\begin{aligned}
{}_{21}C_4 \ \times \ {}_5C_2 &= \frac{21!}{17! \times 4!} \times \frac{5!}{3! \times 2!} \\
&= 5,985 \times 10 \\
&= \mathbf{59,850 \ strings}
\end{aligned}
$$

3) มีสระอย่างน้อย 1 ตัว

$$({}_5C_1 \ \times \ {}_{21}C_5) + ({}_5C_2 \ \times \ {}_{21}C_4) + ({}_5C_3 \ \times \ {}_{21}C_3) + ({}_5C_4 \ \times \ {}_{21}C_2) + ({}_5C_5 \ \times \ {}_{21}C_1) + ({}_5C_5 \ \times \ 5)$$

4) มีสระอย่างน้อย 2 ตัว

$$({}_5C_2 \ \times \ {}_{21}C_4) + ({}_5C_3 \ \times \ {}_{21}C_3) + ({}_5C_4 \ \times \ {}_{21}C_2) + ({}_5C_5 \ \times \ {}_{21}C_1) + ({}_5C_5 \ \times \ 5)$$

5. การจับสลากของเลข 1 ถึง 100 เพื่อมอบรางวัลจำนวน 4 รางวัล ประกอบด้วยรางวัลที่ 1, 2, 3 และรางวัลพิเศษ จงหาจำนวนวิธีในการมอบรางวัลทั้งสี่ภายใต้เงื่อนไข ดังนี้

1) ไม่มีกติกาเพิ่มเติม

$$
\begin{aligned}
{}_{100}C_4 &= \frac{100!}{(100-4)!} \\
&= \frac{100!}{96!} \\
&= 97 \times 98 \times 99 \times 100 \\
&= \mathbf{94,109,400 \ ways}
\end{aligned}
$$

2) ผู้ที่ถือสลากหมายเลข 47 ได้รับรางวัลพิเศษ

$$
\begin{aligned}
{}_{99}C_3 &= \frac{99!}{(99-3)!} \\
&= \frac{99!}{96!} \\
&= 97 \times 98 \times 99 \\
&= \mathbf{941,094 \ ways}
\end{aligned}
$$

3) ผู้ที่ถือสลากหมายเลข 47 ได้รับรางวัลใดรางวัลหนึ่งในสี่รางวัล

$$
\begin{aligned}
{}_{99}C_3 &= \frac{99!}{(99-3)!} \times 4 \\
&= \frac{99!}{96!} \times 4 \\
&= (97 \times 98 \times 99) \times 4 \\
&= 941,094 \times 4 \\
&= \mathbf{3,764,376 \ ways}
\end{aligned}
$$

4) ผู้ที่ถือสลากหมายเลข 19, 47, 73 หรือ 97 เป็นหมายเลขของรางวัลทั้งสี่

$$
\begin{aligned}
{}_{96}C_3 \ \times \ {}_4C_1 &= \frac{96!}{(96-3)!} \times \frac{4!}{(4-1)!} \\
&= \frac{96!}{93!} \times \frac{4!}{3!} \\
&= (94 \times 95 \times 96) \times 4 \\
&= 857,280 \times 4 \\
&= \mathbf{3,429,120\ ways}
\end{aligned}
$$

6. จงหาจำนวนเต็มบวกมีค่าไม่เกิน 1,000 ที่หารด้วย 7 หรือ 11 ลงตัว

$$
\begin{aligned}
A &= \{x \mid \frac{x}{7} = 0 \ \land \ x \leq 1,000\} \\
|A| &= \lfloor \frac{1,000}{7} \rfloor \\
&= 142 \\
B &= \{y \mid \frac{y}{11} = 0 \ \land \ y \leq 1,000\} \\
|B| &= \lfloor \frac{1,000}{11} \rfloor \\
&= 90 \\
C &= \{z \mid z \in A \ \lor \ z \in B \ \land \ z \notin A \cap B\} \\
|C| &= (|A| \cup |B|) - (|A| \cap |B|) \\
&= |A| + |B| - |A \cap B| - |A \cap B| \\
&= |A| + |B| - 2|A \cap B| \\
&= 142 + 90 - 2(\lfloor \frac{1,000}{7 \times 11} \rfloor) \\
&= 232 - 2(12) \\
&= \mathbf{208\ numbers}
\end{aligned}
$$

7. จงหาจำนวนวิธีเลือกไพ่ 5 ใบ โดยมีไพ่อย่างน้อย 1 ใบจากแต่ละ suit

$$
\begin{aligned}
({}_{13}C_1 \ \times \ 3) \ + \ {}_{13}P_2 &= \left(\frac{13!}{(13-1)!} \ \times \ 3\right) + \left(\frac{13!}{(13-2)! \cdot 2!}\right) \\
&= (13 \times 3) + \left(\frac{12 \cdot 13}{2}\right) \\
&= 39 \times \frac{156}{2} \\
&= 39 \times 78 \\
&= \mathbf{3,042\ ways}
\end{aligned}
$$

8. กำหนดให้ไพ่หนึ่งสำรับมี 52 ใบ จงหาจำนวนวิธีในการแจกไพ่จำนวน 5 ใบให้กับผู้เล่น 4 คน

$$
\begin{aligned}
{}_{52}P_5 \ + \ {}_{47}P_5 \ + \ {}_{42}P_5 \ + \ {}_{37}P_5 &= \frac{52!}{(52-5)!\cdot 5!} + \frac{47!}{(47-5)!\cdot 5!} + \frac{42!}{(42-5)!\cdot 5!} + \frac{37!}{(37-5)!\cdot 5!} \\
&= \frac{52!}{47!\cdot 5!} + \frac{47!}{42!\cdot 5!} + \frac{42!}{37!\cdot 5!} + \frac{37!}{32!\cdot 5!} \\
&= \frac{48\cdot 49\cdot 50\cdot 51\cdot 52}{5!} + \frac{43\cdot 44\cdot 45\cdot 46\cdot 47}{5!} + \frac{38\cdot 39\cdot 40\cdot 41\cdot 42}{5!} \\
&\quad + \frac{33\cdot 34\cdot 35\cdot 36\cdot 37}{5!} \\
&= \frac{311,875,200}{120} + \frac{184,072,680}{120} + \frac{102,080,160}{120} + \frac{52,307,640}{120} \\
&= \frac{311,875,200 + 184,072,680 + 102,080,160 + 52,307,640}{120} \\
&= \frac{650,335,680}{120} \\
&= \mathbf{5,419,464 \ ways}
\end{aligned}
$$

9. จงหาจำนวนวิธีในการหยิบลูกบอลลักษณะเดียวกันจำนวน 10 ลูกใส่ในตะกร้า 8 ตะกร้าที่มีหมายเลข 1 ถึง 8 ติดอยู่ที่ด้านข้างตะกร้าแต่ละใบ

$$
\begin{aligned}
{}_{10}P_8 &= \frac{10!}{(10-8)!\cdot 8!} \\
&= \frac{10!}{2!\cdot 8!} \\
&= \frac{9\times 10}{2} \\
&= \mathbf{45 \ ways}
\end{aligned}
$$

10. จงหาจำนวนคำตอบที่เป็นไปได้ของสมการ $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k$ เมื่อ $x_i \geq 0$

$$\binom{\mathbf{k+n-1}}{\mathbf{n}} \ \mathbf{answers}$$

11. จาก Binomial theorem จงกระจายพจน์ทั้งหมดของ

1) $(x+1)^4$

$$
\begin{aligned}
(x+1)^4 &= \binom{4}{0}x^0 + \binom{4}{1}x^1 + \binom{4}{2}x^2 + \binom{4}{3}x^3 + \binom{4}{4}x^4 \\
&= \mathbf{1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4}
\end{aligned}
$$

2) $(2+y)^4$

$$
\begin{aligned}
(2+y)^4 &= \binom{4}{0}2^4y^0 + \binom{4}{1}2^3y^1 + \binom{4}{2}2^2y^2 + \binom{4}{3}2^1y^3 + \binom{4}{4}2^0y^4 \\
&= 16 + (4\times 8y) + (6\times 4y^2) + (4\times 2y^3) + y^4 \\
&= \mathbf{16 + 32y + 24y^2 + 8y^3 + y^4}
\end{aligned}
$$

12. โยนเหรียญจำนวน 10 ครั้ง แต่ละครั้งออกหัวหรือก้อยด้วยความน่าจะเป็นที่เท่ากัน ให้หาค่าต่อไปนี้

1) จำนวน outcomes ที่เป็นไปได้ทั้งหมด

$$\begin{aligned} n(E) &= n(E_1) \times n(E_2) \times n(E_3) \times n(E_4) \times n(E_5) \times n(E_6) \times n(E_7) \times n(E_8) \times n(E_9) \times n(E_{10}) \\ &= 2^{10} \\ &= \mathbf{1,024\ outcomes} \end{aligned}$$

2) จำนวน outcomes ที่ออกหัวจำนวน 2 ครั้ง

$$\begin{aligned} n(E) &= (n(E_1) \times n(E_2) \times n(E_3) \times n(E_4) \times n(E_5) \times n(E_6) \times n(E_7) \times n(E_8)) \times 2 \\ &= 2^8 \times 2 \\ &= 256 \times 2 \\ &= \mathbf{512\ outcomes} \end{aligned}$$

3) จำนวน outcomes ที่ออกก้อยอย่างมาก 3 ครั้ง

$$\begin{aligned} n(E) &= (n(E_1) \times n(E_2) \times n(E_3) \times n(E_4) \times n(E_5) \times n(E_6) \times n(E_7)) \times 3 \\ &= 2^7 \times 3 \\ &= 128 \times 3 \\ &= \mathbf{384\ outcomes} \end{aligned}$$

4) จำนวน outcomes ที่ออกหัวและก้อยในจำนวนที่เท่ากัน

$$\begin{aligned} n(E) &= 5 \times 5 \\ &= \mathbf{25\ outcomes} \end{aligned}$$