

Optativa 4rt curs de Biotecnologia

# Modelització i simulació de biosistemes

Control metabòlic P2

Joan Albiol

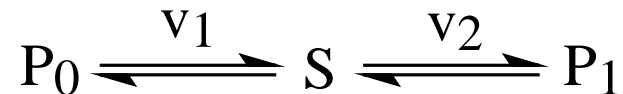
Departament d'Enginyeria Química  
Escola d'Enginyeria  
Universitat Autònoma de Barcelona



# Teoria del Control Metabòlic (Metabolic Control Theory)

## Exemple senzill d'aplicació:

Determinació de coeficients de control de flux a partir dels teoremes



Teorema del sumatori:  $C_{v_1}^J + C_{v_2}^J = C_1^J + C_2^J = 1$

Teorema de la connectivitat:  $C_1^J e_S^1 + C_2^J e_S^2 = 0$

Aïllant els coeficients de control:  $C_1^J = \frac{e_S^2}{e_S^2 - e_S^1}$  i  $C_2^J = \frac{-e_S^1}{e_S^2 - e_S^1}$

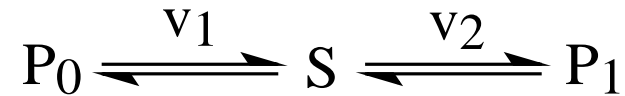
Com que:  $e_S^1 = \frac{\partial \ln v_1}{\partial \ln S} < 0$  i  $e_S^2 = \frac{\partial \ln v_2}{\partial \ln S} > 0$  llavors  $C_1^J > 0$  i  $C_2^J > 0$

Ambdues reaccions tenen coeficients de control de flux positius i per tant amb control positiu del flux. Accelerar qualsevol augmenta el flux.

# Teoria del Control Metabòlic (Metabolic Control Theory)

## Exemple senzill d'aplicació:

Determinació de coeficients de control de concentració a partir de teoremes



Teorema del sumatori:  $C_{v_1}^S + C_{v_2}^S = C_1^S + C_2^S = 0$

Teorema de la connectivitat:  $C_1^S e_S^1 + C_2^S e_S^2 = -1$

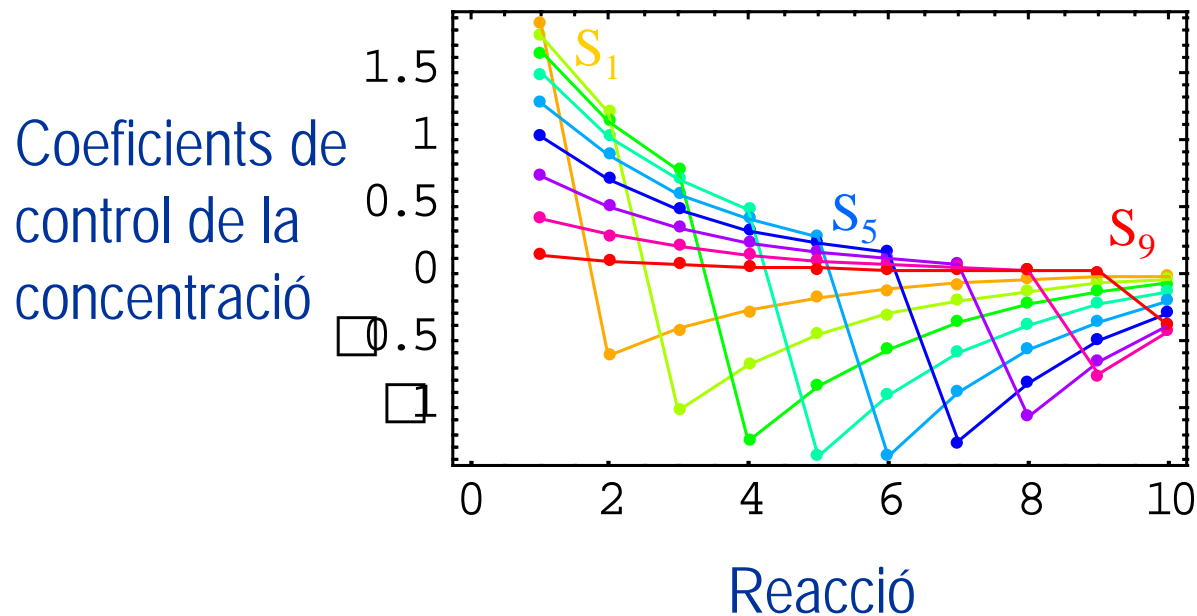
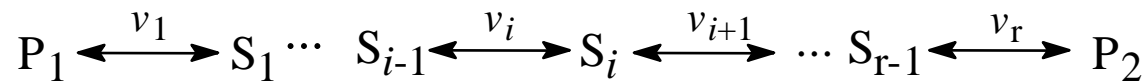
Aïllant els coeficients de control:  $C_1^S = \frac{1}{e_S^2 - e_S^1}$  i  $C_2^S = \frac{-1}{e_S^2 - e_S^1}$

Com que:  $e_S^1 = \frac{\partial \ln v_1}{\partial \ln S} < 0$  i  $e_S^2 = \frac{\partial \ln v_2}{\partial \ln S} > 0$  llavors  $C_1^S > 0$  i  $C_2^S < 0$

Les reaccions productores tenen coeficients de control de concentració positius (augmenten la concentració) i les reaccions consumidores el tenen negatiu (disminueixen la concentració)

# Exemples modificant diferents reaccions

Exemple per una via sense embrancaments llarga:

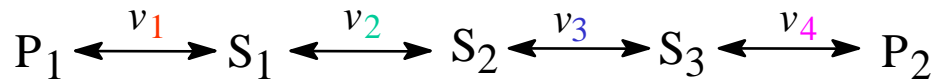


Les reaccions productores tenen coeficients de control positius i les reaccions consumidores el tenen negatiu.

# Exemples modificant diferents reaccions

Exemple de via sense embrancaments:

Suposem cinètica d'acció de masses reversible amb  $K_{eq}=2$



Paràmetres:  $k_{+i} = 2, k_{-i} = 1, q_i = 2$

$$v_i = E_i (k_{+i} S_{i-1} - k_{-i} S_i) \quad q_i = k_{+i} / k_{-i} = K_{eq}$$

$$P_1 = P_2 = 1 \quad E_i = 1$$

Flux al SS:  $J = 1$

CCF

	(v1)	(v2)	(v3)	(v4)
(v1)	0.533333	0.266667	0.133333	0.0666667
(v2)	0.533333	0.266667	0.133333	0.0666667
(v3)	0.533333	0.266667	0.133333	0.0666667
(v4)	0.533333	0.266667	0.133333	0.0666667

CCC

	(v1)	(v2)	(v3)	(v4)
S1	0.466667	-0.266667	-0.133333	-0.0666667
S3	0.266667	0.133333	0.0666667	-0.466667
S2	0.4	0.2	-0.4	-0.2

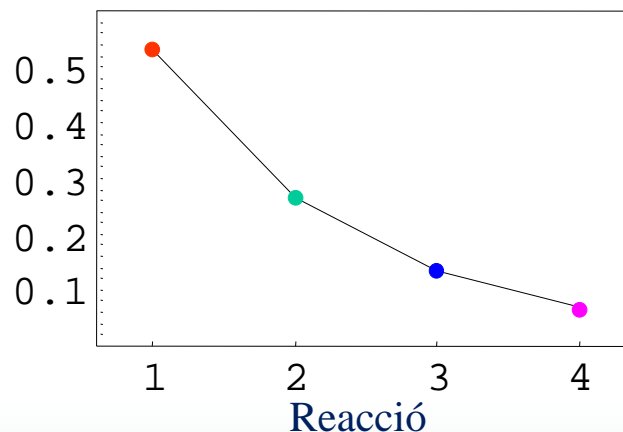
Elasticitats:

	S1	S3	S2
(v1)	-1	0	0
(v2)	2	0	-1
(v3)	0	-1	2
(v4)	0	2	0

Coefficients de control del flux Incrementem l'enzim:  $E_1 \rightarrow E_1 + 1\%$

Canvi de flux:  $J \rightarrow J + C_1 * 1\% = 1.0053$

$$C_k^J = \frac{E_k}{J} \frac{\partial J}{\partial E_k}$$



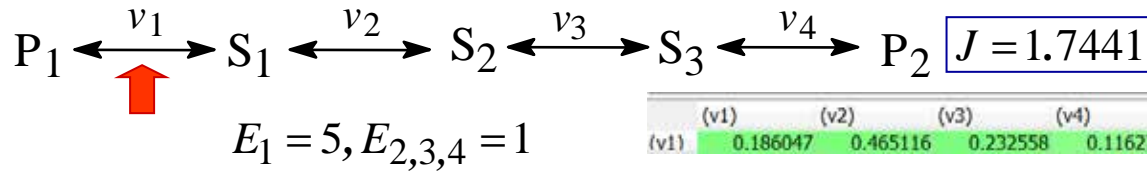
	Name	Flux (mmol/s)	Chemical Eq
1	v1	1.00531	S0 = S1
2	v2	1.00531	S1 = S2
3	v3	1.00531	S2 = S3
4	v4	1.00531	S3 = S4

	Name	Type	Concentration (mmol/ml)
1	S1	reactions	1.00464
2	S2	reactions	1.00398
3	S3	reactions	1.00265

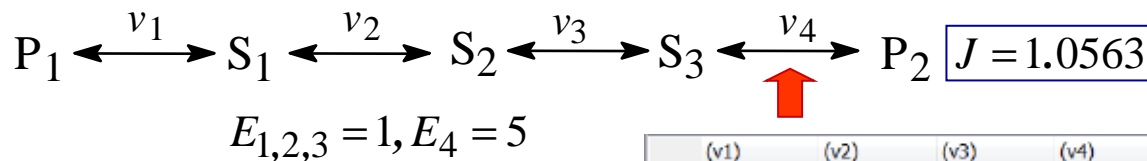
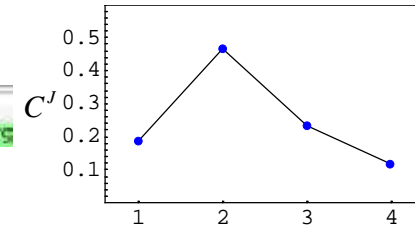
# Exemples modificant diferents reaccions

## Exemple de via sense embrancaments II:

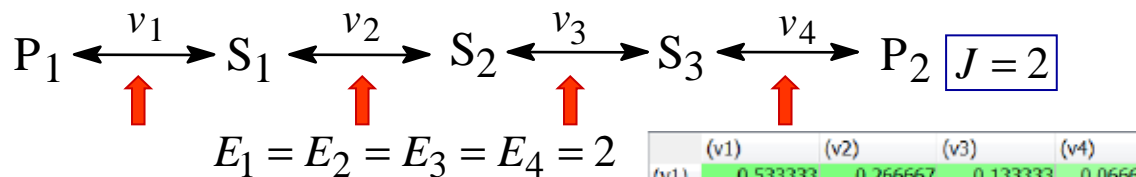
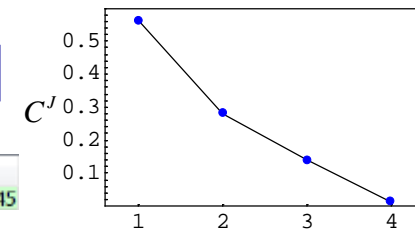
Efectes sobre el flux en estat estacionari de diferents canvis enzimàtics



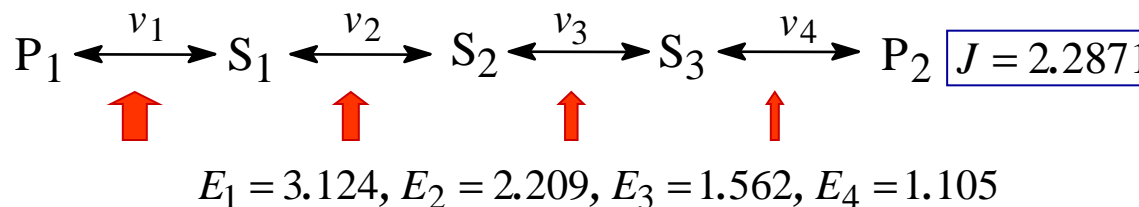
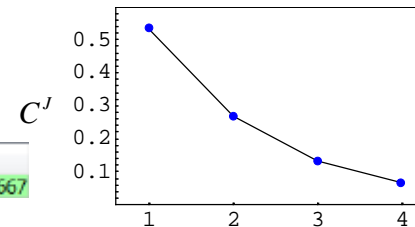
	(v1)	(v2)	(v3)	(v4)
(v1)	0.186047	0.465116	0.232558	0.116275



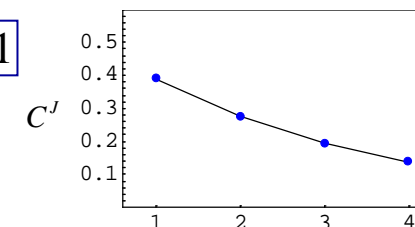
	(v1)	(v2)	(v3)	(v4)
(v1)	0.56338	0.28169	0.140845	0.0140845



	(v1)	(v2)	(v3)	(v4)
(v1)	0.533333	0.266667	0.133333	0.0666667



	(v1)	(v2)	(v3)	(v4)
(v1)	0.390489	0.276153	0.195282	0.138076



$$C_i^J = \frac{E_i}{E_{total}}$$

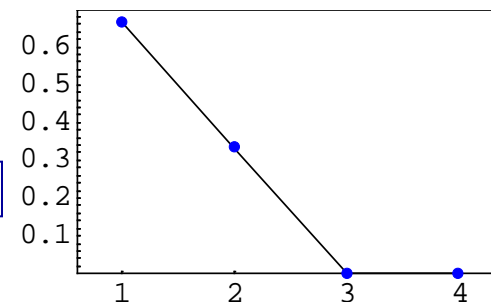
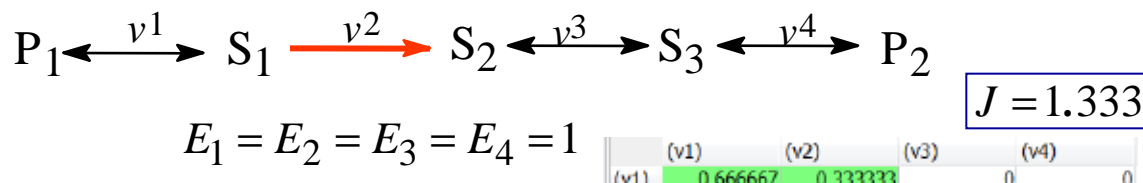
Relació de cada enzim òptima respecte el total presenta igual relació als CCF finals

# Exemples modificant diferents reaccions

Exemple de via sense embrancaments:

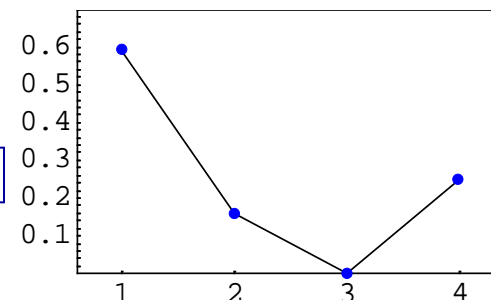
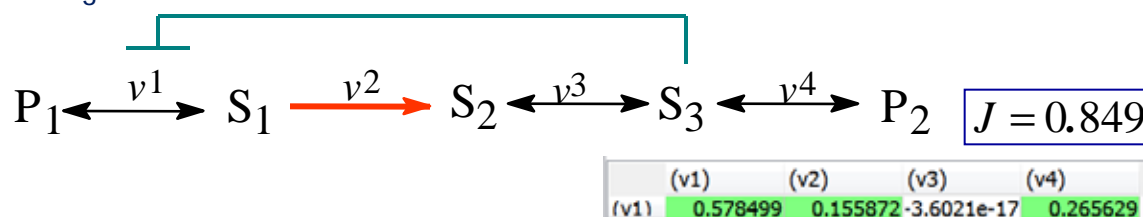
Efectes sobre el flux en estat estacionari quan hi ha passos irreversibles o retroinhibició

v2 irreversible

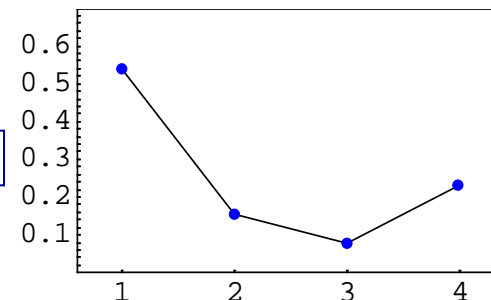
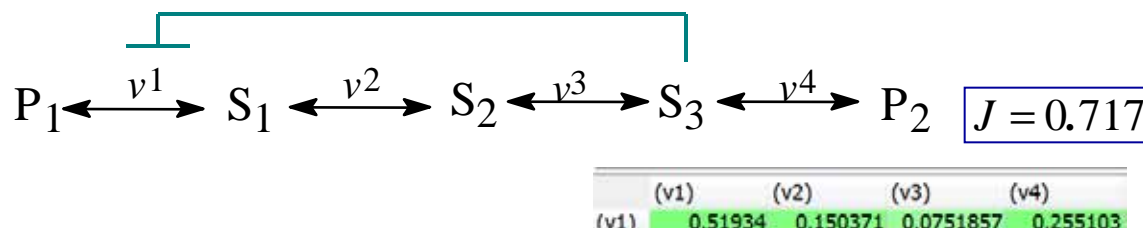


v2 irreversible

Feedback S<sub>3</sub> a v1



Feedback S<sub>3</sub> a v1



A partir del sistema d'equacions habitual és pot deduir una expressió matricial per calcular els coeficients de control a partir de les elasticitats

$$\frac{ds}{dt} = \mathbf{N} \mathbf{v}[\mathbf{s}, \mathbf{p}] \Rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{C}^J \\ \mathbf{C}^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{K} & -\varepsilon_s \mathcal{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathcal{L} \end{bmatrix}$$

Separant els termes dependents i independents:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}^{J_i} \\ \mathbf{C}^{J_d} \\ \mathbf{C}^{s_i} \\ \mathbf{C}^{s_d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{K} & -\varepsilon_s \mathcal{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n-r} & \mathbf{0} \\ \mathcal{K}_0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_r \\ \mathbf{0} & \mathcal{L}_0 \end{bmatrix}$$

Matriu d'enllaç

Kernel

r=rang  
n= num.  
fluxes

On les matrius són les versions **re-escalades**:

$$\mathbf{C}^J = (\mathbf{D}^J)^{-1} \cdot \bar{\mathbf{C}}^J \cdot \mathbf{D}^J$$

$$\mathbf{C}^s = (\mathbf{D}^s)^{-1} \cdot \bar{\mathbf{C}}^s \cdot \mathbf{D}^J$$

$$\varepsilon_s = (\mathbf{D}^J)^{-1} \cdot \bar{\varepsilon}_s \cdot \mathbf{D}^s$$

$$\mathbf{R}_p^J = (\mathbf{D}^J)^{-1} \cdot \bar{\mathbf{R}}_p^J \cdot \mathbf{D}^p$$

$$\mathbf{R}_p^s = (\mathbf{D}^s)^{-1} \cdot \bar{\mathbf{R}}_p^s \cdot \mathbf{D}^p$$

$$\mathbf{R}_T^J = (\mathbf{D}^J)^{-1} \cdot \bar{\mathbf{R}}_T^J \cdot \mathbf{D}^T$$

$$\mathbf{R}_T^s = (\mathbf{D}^s)^{-1} \cdot \bar{\mathbf{R}}_T^s \cdot \mathbf{D}^T$$

$$\mathcal{L} = (\mathbf{D}^s)^{-1} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{D}^{s_i}$$

$$\mathcal{K} = (\mathbf{D}^J)^{-1} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{D}^{J_i}$$

$$\mathcal{N}_R = (\mathbf{D}^{s_i})^{-1} \cdot \mathbf{N}_R \cdot \mathbf{D}^J$$

$$\mathcal{M} = (\mathbf{D}^{s_i})^{-1} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{D}^{s_i}$$

Agafant només els independents:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}^{J_i} \\ \mathbf{C}^{s_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{K} & -\varepsilon_s \mathcal{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n-r} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_r \end{bmatrix}$$

Ajuntant en una sola matriu els termes:

$$\mathbf{C}^i = [\mathbf{C}^{J_i} \quad \mathbf{C}^{s_i}]^T$$

$$\mathbf{E} = [\mathcal{K} \quad -\varepsilon_s \mathcal{L}]$$

Quedaria el sistema senzill:  $\mathbf{C}^i \mathbf{E} = \mathbf{I}_n$  Equivalent a:  $\mathbf{E} \mathbf{C}^i = \mathbf{I}$

Que permet calcular els coeficients de control a partir de les elasticitats:  $\mathbf{C}^i = \mathbf{E}^{-1}$

I els coeficients dependents:

$$\mathbf{C}^{s_d} = \mathcal{L}_0 \mathbf{C}^{s_i}$$

$$\mathbf{C}^{J_d} = \mathcal{K}_0 \mathbf{C}^{J_i}$$



# Teoremes en forma matricial (forma alternativa)

$$\begin{matrix} & E_1 & E_2 & E_3 \\ \begin{matrix} J \\ X_1 \\ X_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ & & \\ & & \end{bmatrix} & \cdot & \begin{matrix} J & X_1 & X_2 \\ \begin{bmatrix} \blacksquare & & \\ \blacksquare & & \\ \blacksquare & & \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} \blacksquare & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

$$\sum_{i=1}^n C_i^J = 1$$

T. Sumatori CCF

$$\begin{matrix} J \\ X_1 \\ X_2 \end{matrix} \begin{bmatrix} \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \cdot \begin{matrix} J & X_1 & X_2 \\ \begin{bmatrix} & \blacksquare & \\ & \blacksquare & \\ & \blacksquare & \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} & \blacksquare & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

$$\sum_{i=1}^n C_i^{X_j} = 0$$

T. Sumatori CCC

$$\begin{matrix} J \\ X_1 \\ X_2 \end{matrix} \begin{bmatrix} & & \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ & & \end{bmatrix} \cdot \begin{matrix} J & X_1 & X_2 \\ \begin{bmatrix} \blacksquare & & \\ \blacksquare & & \\ \blacksquare & & \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} & & \\ \blacksquare & & \\ & & \end{bmatrix}$$

$$\sum_{i=1}^n C_i^J \varepsilon_{X_j}^i = 0$$

T. Connectivitat de flux

$$\begin{matrix} J \\ X_1 \\ X_2 \end{matrix} \begin{bmatrix} & & \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ & & \end{bmatrix} \cdot \begin{matrix} J & X_1 & X_2 \\ \begin{bmatrix} & \blacksquare & \\ & \blacksquare & \\ & \blacksquare & \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} & & \\ & \blacksquare & \\ & & \end{bmatrix}$$

$$\sum_{i=1}^n C_i^{X_j} \varepsilon_j^i = -1$$

T. Connectivitat de la concentració (i = j)

$$\begin{matrix} J \\ X_1 \\ X_2 \end{matrix} \begin{bmatrix} & & \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ & & \end{bmatrix} \cdot \begin{matrix} J & X_1 & X_2 \\ \begin{bmatrix} & & \blacksquare \\ & & \blacksquare \\ & & \blacksquare \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} & & \\ & & \blacksquare \\ & & \end{bmatrix}$$

$$\sum_{i=1}^n C_i^{X_j} \varepsilon_k^i = 0$$

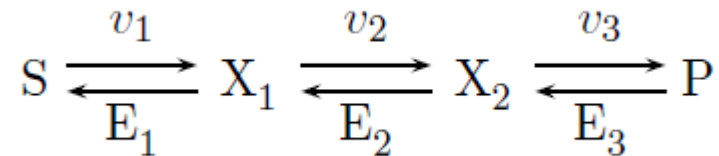
T. Connectivitat de la concentració (i <> k)

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{M}$$

(aquí la M no és la matriu identitat)

# Càlculs de coeficients de control en forma matricial

Exemple 1 (forma alternativa amb signes negatius a la dreta)



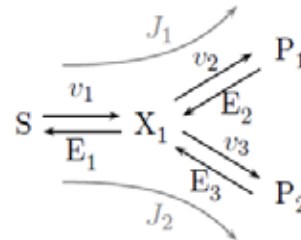
$$\begin{array}{c} J_1 \\ X_1 \\ X_2 \end{array} \begin{array}{c} E_1 \quad E_2 \quad E_3 \\ \left[ \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ \varepsilon_1^1 & \varepsilon_1^2 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2^2 & \varepsilon_2^3 \end{array} \right] \end{array} \begin{array}{c} J_1 \quad X_1 \quad X_2 \\ \left[ \begin{array}{ccc} C_1^J & C_1^{X_1} & C_1^{X_2} \\ C_2^J & C_2^{X_1} & C_2^{X_2} \\ C_3^J & C_3^{X_1} & C_3^{X_2} \end{array} \right] \end{array} \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{E}^{-1} \cdot \mathbf{M}$$

$$\begin{array}{cc} \text{CCF} & \text{CCC} \\ \left[ \begin{array}{c} C_1^J \\ C_2^J \\ C_3^J \end{array} \right] & \left[ \begin{array}{cc} C_1^{X_1} & C_1^{X_2} \\ C_2^{X_1} & C_2^{X_2} \\ C_3^{X_1} & C_3^{X_2} \end{array} \right] \end{array} = \frac{1}{\varepsilon_1^1 \varepsilon_2^2 - \varepsilon_1^1 \varepsilon_2^3 + \varepsilon_1^2 \varepsilon_2^3} \begin{bmatrix} \varepsilon_1^2 \varepsilon_2^3 & \varepsilon_2^2 - \varepsilon_2^3 & -\varepsilon_1^2 \\ -\varepsilon_1^1 \varepsilon_2^3 & \varepsilon_2^3 & \varepsilon_1^1 \\ \varepsilon_1^1 \varepsilon_2^2 & -\varepsilon_2^2 & \varepsilon_1^2 - \varepsilon_1^1 \end{bmatrix}$$

# Càlculs de coeficients de control en forma matricial

## Exemple 2 (forma alternativa amb signes negatius a la dreta)



kernel

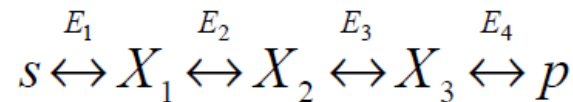
$$\begin{array}{c} J_1 \\ J_2 \\ X_1 \end{array} \begin{bmatrix} E_1 & E_2 & E_3 \\ J_1 & J_2 & X_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ \varepsilon_1^{X_1} & \varepsilon_2^{X_1} & \varepsilon_3^{X_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1^{J_1} & C_1^{J_2} & C_1^{X_1} \\ C_2^{J_1} & C_2^{J_2} & C_2^{X_1} \\ C_3^{J_1} & C_3^{J_2} & C_3^{X_1} \end{bmatrix} \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{E}^{-1} \cdot \mathbf{M}$$

CCF      CCC

$$\begin{bmatrix} C_1^{J_1} & C_1^{J_2} \\ C_2^{J_1} & C_2^{J_2} \\ C_3^{J_1} & C_3^{J_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1^{X_1} \\ C_2^{X_1} \\ C_3^{X_1} \end{bmatrix} = -\frac{1}{\varepsilon_1^{X_1} - \varepsilon_2^{X_1} - \varepsilon_3^{X_1}} \begin{bmatrix} \varepsilon_2^{X_1} + \varepsilon_3^{X_1} & \varepsilon_2^{X_1} + \varepsilon_3^{X_1} & 1 \\ -\varepsilon_1^{X_1} & -\varepsilon_1^{X_1} & -1 \\ -\varepsilon_1^{X_1} & -\varepsilon_1^{X_1} & -1 \end{bmatrix}$$

Exemple 1: aplicació del mètode matricial per un sistema senzill  
(versió sense signes negatius a la dreta)

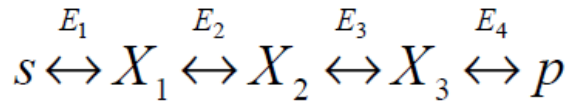


$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \epsilon_{X_1}^1 & \epsilon_{X_1}^2 & \cdots & \epsilon_{X_1}^L \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \epsilon_{X_{L-1}}^1 & \epsilon_{X_{L-1}}^2 & \cdots & \epsilon_{X_{L-1}}^L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1^J & -C_1^{X_1} & \cdots & -C_1^{X_{L-1}} \\ C_2^J & -C_2^{X_1} & \cdots & -C_2^{X_{L-1}} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ C_L^J & -C_L^{X_1} & \cdots & -C_L^{X_{L-1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{EC} = \mathbf{I}$$

## Exemple de càlcul matricial per sistemes sense branques

## Esquema

Concentracions al estat estacionari de  
substrats i enzims

$$s=1; p=0.01; E_1 = E_2 = E_3 = E_4 = 1;$$

## Cinètiques

$$v_1 = E_1 \frac{k_{cat,1} (s - \frac{X_1}{K_{eq,1}})}{s + K_{m,1} + \frac{X_1}{K_{eq,1}}} \quad v_2 = E_2 \frac{k_{cat,2} (X_1 - \frac{X_2}{K_{eq,2}})}{X_1 + K_{m,2} + \frac{X_2}{K_{eq,2}}} \frac{1}{1 + \frac{X_3}{K_I}}$$

$$v_3 = E_3 \frac{k_{cat,3} (X_2 - \frac{X_3}{K_{eq,3}})}{X_2 + K_{m,3} + \frac{X_3}{K_{eq,3}}} \quad v_4 = E_4 \frac{k_{cat,4} (X_3 - \frac{p}{K_{eq,4}})}{X_3 + K_{m,4} + \frac{p}{K_{eq,4}}}$$

## Matriu elasticitats

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \varepsilon_{X_1}^1 & \varepsilon_{X_1}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{X_2}^2 & \varepsilon_{X_2}^3 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{X_3}^2 & \varepsilon_{X_3}^3 & \varepsilon_{X_3}^4 \end{pmatrix}$$

## Paràmetres cinètics

$$k_{cat,1} = 2, k_{cat,2} = 5, k_{cat,3} = k_{cat,4} = 1$$

$$K_{eq,1} = K_{eq,2} = K_{eq,3} = K_{eq,4} = 1$$

$$K_{m,1} = K_{m,2} = K_{m,3} = K_{m,4} = 1$$

$$K_I = 0.1$$

# Exemple de càlcul matricial per sistemes sense branques

Valors numèrics

Matriu elasticitats

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -3.5189 & 2.7384 & 0 & 0 \\ 0 & -2.2998 & 1.4456 & 0 \\ 0 & -0.6872 & -0.8693 & 0.8690 \end{pmatrix}$$

Càlcul coeficients de control:

$$\begin{pmatrix} C_1^J & -C_1^{X_1} & -C_1^{X_2} & -C_1^{X_3} \\ C_2^J & -C_2^{X_1} & -C_2^{X_2} & -C_2^{X_3} \\ C_3^J & -C_3^{X_1} & -C_3^{X_2} & -C_3^{X_3} \\ C_4^J & -C_4^{X_1} & -C_4^{X_2} & -C_4^{X_3} \end{pmatrix} = \mathbf{E}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1353 & -0.2457 & -0.1872 & -0.1557 \\ 0.1739 & 0.0494 & -0.2406 & -0.2001 \\ 0.2766 & 0.0786 & 0.3090 & -0.3183 \\ 0.4142 & 0.1177 & 0.1188 & 0.6741 \end{pmatrix}$$

CCF                      CCC

## Conclusions generals:

- La sobre-expressió d'un sol enzim té rarament un efecte important sobre el flux de la via
- Es comprova a la pràctica que els enzims altament regulats no son necessàriament les millors dianes per a l'enginyeria genètica
- El concepte de 'pas limitant' d'una via és un concepte excessivament simplificat
- El control sobre el flux d'una via està distribuït entre múltiples enzims
- Es necessita la sobre expressió de múltiples enzims per aconseguir un efecte important sobre el flux de la via

Els sistemes metabòlics son xarxes i el seu comportament depèn de l'estructura de la xarxa i de les propietats dels seus components