

Introduction aux statistiques

Matthieu Cisel - Ingénieur - Sciences Po

Novembre 2024

1 Introduction

Vous trouverez dans Datacamp deux cours d'introduction à la régression, l'un sur R, l'autre sur Python. Vous devez obtenir le certificat du cours correspondant au langage retenu. Certaines parties des cours portent sur la prédiction, qui ne sera pas mobilisée dans le cadre de ce projet. Néanmoins, cette perspective peut être utile. Par ailleurs, nous travaillerons avec des régressions multiples, qui sont abordées, sur le plan technique, uniquement dans les cours "Intermediate regression". Si leur suivi n'est pas obligatoire, les vidéos correspondantes pourront vous être utiles le cas échéant, pour des explications complémentaires. Vous réaliserez un notebook séparé pour le projet portant sur le MOOC et pour les exercices d'approfondissement (conception de plans expérimentaux, puissance de test, etc.).

Nous allons dans ce cours nous concentrer sur divers aspects du modèle linéaire (régression linéaire simple, test de Student, ANOVA), ainsi que sur la régression logistique. Nous apprendrons par exemple à décrire les résultats d'une table d'ANOVA ou d'odds-ratios. Le jeu de données utilisés dans ce projet porte sur des learning analytics issus de différentes itérations d'un MOOC (le MOOC Effectuation, appelé MOOC1). Il s'agit de retrouver certains des résultats obtenus dans un article intitulé "A Tale of Two MOOCs", publié en 2015. La focale porte sur l'engagement des apprenants, et notamment sur le visionnage de vidéos et la réalisation de quiz. En premier lieu, nous allons définir des catégories de participants sur la base de leur engagement.

2 Préparation du jeu de données

Nous vous fournissons des données sur des questionnaires et des logs issus de différentes itérations de différents MOOC. Votre première mission correspond à reconstituer une base de données rectangulaire avec tous les fragments que nous vous proposons. Par exemple, `usages.effec.1` porte sur les logs de la première itération du MOOC Effectuation. Vous allez devoir utiliser des commandes comme `merge` (base), `full-join`, `rbind` ou `rbind.fill` (pour R), ou leurs équivalents

Python. Vous devez commencer par faire un "column bind" pour lier les données de logs et les données de questionnaires pour une itération donnée.

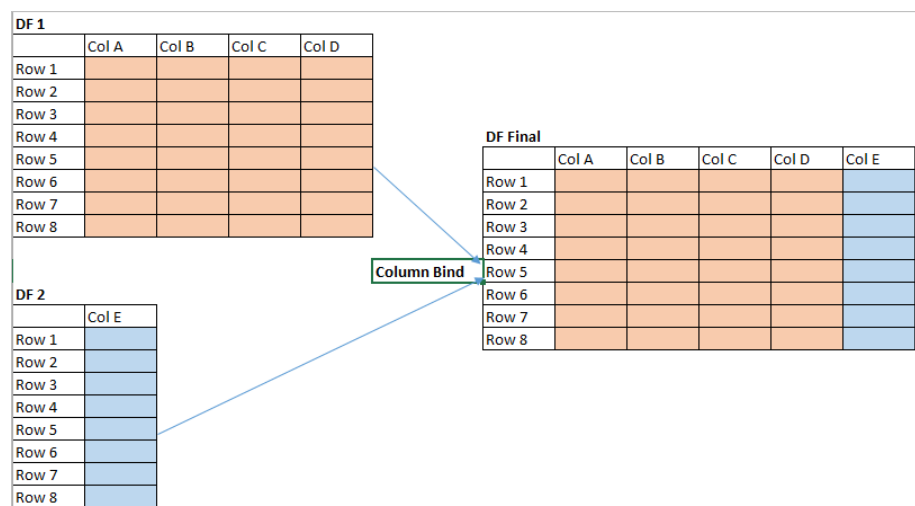


Figure 1: Column Bind

Vous devez ensuite réaliser un "row bind" pour rassembler les données issues de différentes itérations d'un MOOC donné. Avant la création de ce jeu de données global, créez une colonne intitulée itération (avec mutate, etc.) pour garder en mémoire le numéro d'itération correspondant. Vous allez constater que les différents jeux de données n'ont pas le même nombre de colonnes, car le nombre de vidéos ou de quiz a évolué d'une itération à l'autre. Vous allez ensuite simplifier le jeu de données, en ne conservant, comme variables issues des questionnaires, que les seuls éléments que vous allez mobiliser dans les analyses (HDI, et genre). C'est la commande select dans dplyr.

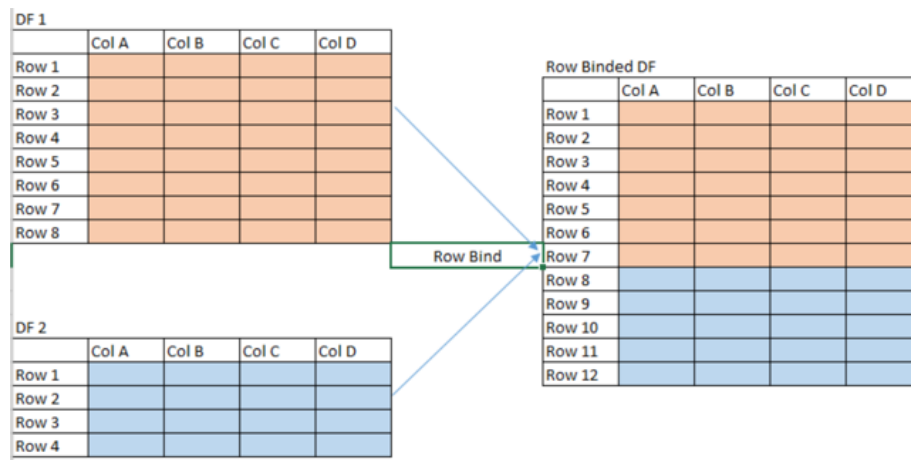


Figure 2: Row Bind

L'intégralité des étapes demandées est résumée dans le schéma ci-dessous. Les numéros sur les flèches représentent l'ordre dans lequel doivent être opérées les opérations de fusion.

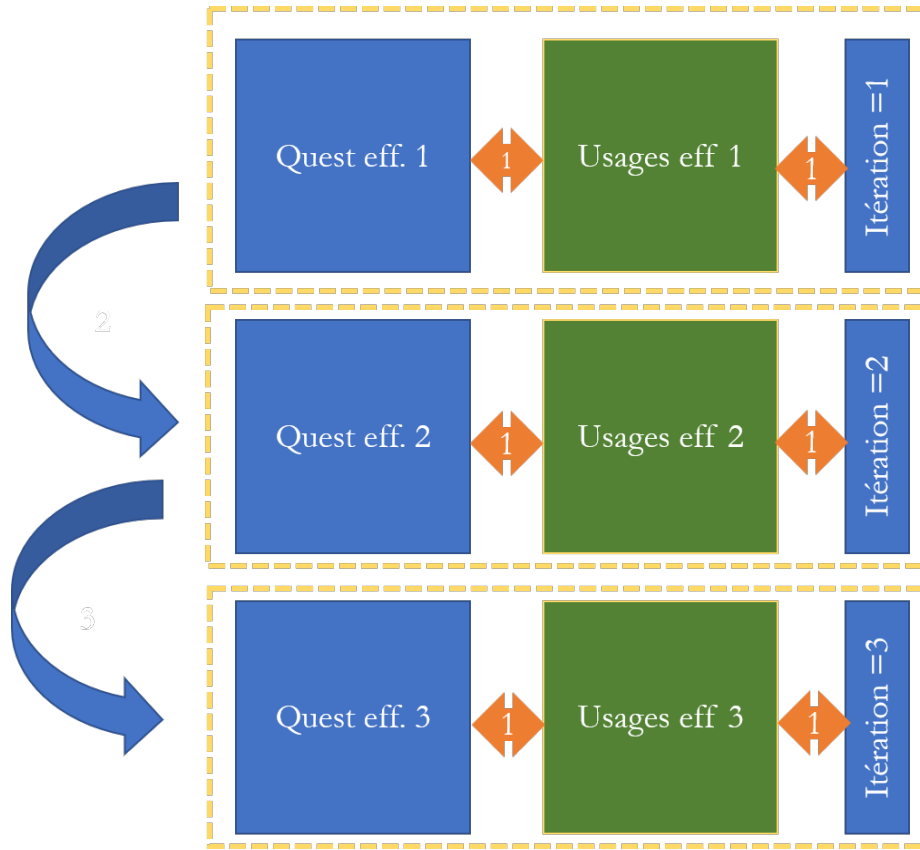


Figure 3: Schématisation de la préparation des données

Créez une nouvelle variable correspondant au nombre de vidéos visionnées pour un apprenant donné, et du nombre de quiz réalisés. En termes d'indices, nous pouvons vous donner les termes `colSums` ou `rowSums` (sur `R`), dont le fonctionnement est illustré dans la colonne ci-dessous. Faites un "count" de chacune des catégories concernant l'HDI (Human Development Index). Nous avons B (Bas), M (Moyen), H (Haut), et TH (Très haut). Créez une nouvelle variable HDI où vous regroupez dans une catégorie intermédiaire (I) les modalités M et H. Vous pourrez comparer votre travail à la colonne `Country_HDI.fin` (où nous avons fait en amont la manipulation).

```

> myMat
      [,1] [,2] [,3] [,4] [,5]
[1,]    1    6   11   16   21
[2,]    2    7   12   17   22
[3,]    3    8   13   18   23
[4,]    4    9   14   19   24
[5,]    5   10   15   20   25
> colSums(myMat) # sum of each column
[1]  15  40  65  90 115

```

Figure 4: Faire une somme sur l'ensemble d'une colonne

3 Description du jeu de données

Votre rapport devra suivre de manière linéaire les instructions contenues dans ce photocopié. La différence avec votre notebook Jupyter résidera dans les paragraphes de description et d'interprétation.

3.1 Typologie d'apprenants

Voici comment nous avons construit la typologie d'apprenants :

- S'ils ont passé l'examen ou obtenu le certificat, nous parlons de "Compléter". Exam.bin, bin pour binaire, variable booléenne avec 1= obtention. Même logique pour le certificat.
- Si un quiz (Quizz.1.bin=1 si le quizz 1 a été fait) a été réalisé ou un devoir soumis (Assignment.bin=1), mais le certificat n'a pas été obtenu / examen pas réalisé, on parle de "disengaging learners".
- Si aucun quiz n'a été réalisé et aucun devoir soumis (Assignment.bin=0), mais que l'apprenant a visualisé plus de 6 vidéos, nous parlons d'auditeur ("auditing learner"). Les vidéos sont numérotées par semaine et par place dans la séquence. La première vidéo de la semaine 1 est donc S1.L1, et cela se termine par S5.L5. Cette variable prend la valeur 1 si la vidéo a été visionnée, 0 sinon.
- Si en plus de ne pas avoir fait de quiz/devoir, moins de 6 vidéos (strictement moins) ont été visionnées, c'est un "bystander".

Réalisez une table donnant, en lignes les proportions des quatre types d'apprenants que nous avons définis (bystander, auditing, completer, disengaging), et en distinguant en colonne les 3 itérations. Vous devez trouver une approche pour fournir de manière synthétique le nombre de personnes concernées par itération. La table devra ressembler à ce que l'on obtient ci-dessous, sur le plan esthétique.

Variables	Nombre	Pct. Manquant
1 Date de premiere inscription en doctorat	63976	85,71%
2 Identifiant auteur	317655	29,04%
3 Langue de la these	383879	14,24%
4 Date de soutenance	390898	12,68%
5 Year	390898	12,68%
6 Identifiant etablissement	430559	3,82%
7 Mise a jour dans theses.fr	447467	0,04%
8 Directeur de these	447629	0,00%
9 Directeur de these (nom prenom)	447629	0,00%
10 Titre	447635	0,00%
11 Discipline	447639	0,00%
12 Etablissement de soutenance	447640	0,00%
13 Auteur	447644	0,00%
14 Identifiant directeur	447644	0,00%
15 Statut	447644	0,00%
16 Identifiant de la these	447644	0,00%
17 Accessible en ligne	447644	0,00%
18 Publication dans theses.fr	447644	0,00%

Figure 3 : Taux de données manquantes pour chaque variable

Figure 5: Table satisfaisante sur le plan esthétique

Représentez ensuite une table des données manquantes comme ci-dessous.

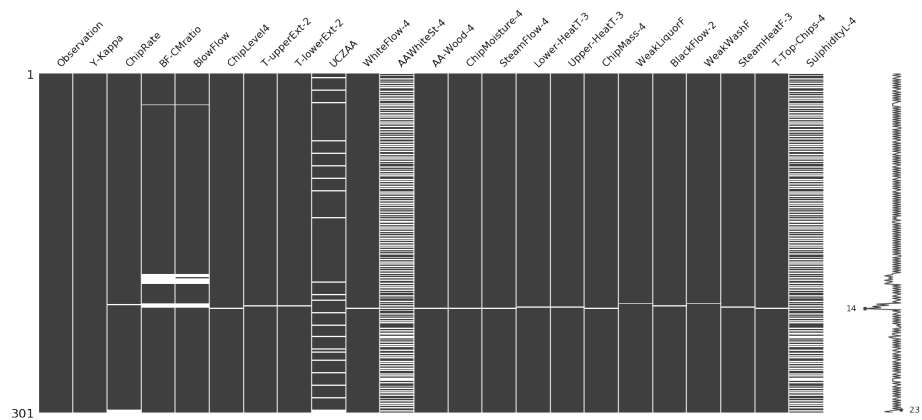


Figure 6: Données manquantes

4 Chi2 et mosaic plot

Vous allez dans un premier temps croiser les variables HDI et Gender; vous devez trouver vous-mêmes les commandes nécessaires. Cette recherche autonome fait partie du projet. Réalisez un test d'indépendance fondé sur le chi2. Faites un mosaic plot concernant les résidus de ce chi 2 (cf. figure ci-dssous). Sachez que la représentation des couleurs d'un mosaic plot de chi 2, sur Python, est sous-optimale. Que représentent les couleurs bleues et rouges? Pourquoi n'est-il pas possible que toutes les cases soient bleues ou rouges ?

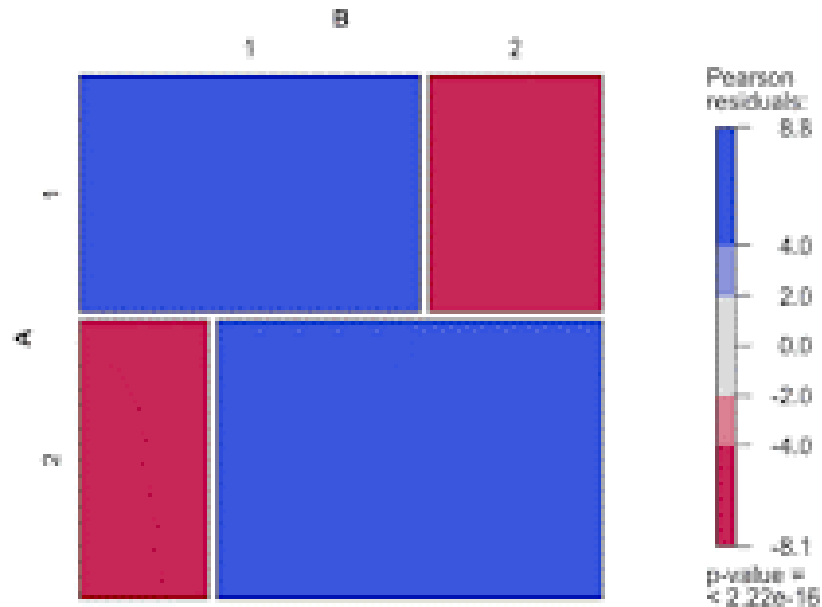


Figure 7: Mosaic plot en Python

En Python (bibliothèque `scipy`), la création des échelles de couleurs peut être fastidieuse; cantonnez-vous à représenter un mosaic plot sans résidus. Décrivez en quelques lignes les résultats obtenus, en fournissant les résultats des tests du χ^2 (valeur du χ^2 , et p -value). Calculez le V de Cramer. Que représente cette métrique ? Proposez ensuite un paragraphe visant à interpréter ces résultats.

5 Modèle linéaire, tests non paramétriques

5.1 Sur des données-type

En utilisant le fameux jeu de données IRIS (la fleur), que vous trouverez en ligne, faites une représentation graphique de la largeur du pétale en fonction de la longueur du pétale, en choisissant un symbole différent par espèce (sous la forme d'un scatterplot). Vous fitterez une régression linéaire simple que vous afficherez ensuite dans le nuage de points, pour le couple de variables de votre

choix. Calculez le coefficient de corrélation de Pearson correspondant.

Toujours avec ce jeu de données, affichez à travers un boxplot la largeur du pétale en fonction de l'espèce. Faites ensuite une ANOVA pour calculer la force du lien entre ces deux variables, et affichez les deux tables correspondantes (somme des carrés d'une part, et statistiques inférentielles d'autre part). Discutez les valeurs de F et les p-values associées. Faites un diagnostic du modèle (qqplot). L'utilisation du modèle linéaire était-elle pertinente dans ce cas précis ? Dans le cas contraire, quel test non-paramétrique aurait-on pu utiliser ?

5.2 Application aux données des MOOC

Nous allons dans un premier temps faire comme si la variable "Nombre de vidéos vues" était normalement distribuée (ce n'est pas le cas), et appliquer d'abord un test de Student, en comparant le nombre de vidéos vues selon les genres. Réalisez le test. Faites la même chose avec un test non-paramétrique. Incorporez les résultats de ce dernier dans le rapport à travers un paragraphe de description, suivi d'un paragraphe d'interprétation.

Utilisez une régression linéaire, avec un test de corrélation de Pearson, puis de Spearman, pour établir le lien entre nombre de quiz réalisés et nombre de vidéos visionnées. Faites un scatterplot pour représenter ce lien. Vous ne présenterez dans le rapport que les résultats du Spearman.

Nous allons maintenant utiliser une ANOVA pour évaluer l'effet, sur le nombre de vidéos vues, de l'HDI et du genre, sans nous intéresser aux interactions entre ces variables dans un premier temps (et ce même si les conditions de validité d'application ne sont pas réunies). Vous allez devoir présenter deux tables d'ANOVA. Dans la première, vous présentez l'ANOVA dans son ensemble, avec les sommes de carrés, le F, comme dans la Figure 6, mais en utilisant un format de table satisfaisant sur le plan esthétique. Dans R, il faut par exemple utiliser la commande `mod=lm(y ~ x1+x2)` où `x1=HDI` et `x2=Gender`, et faire un `anova` et/ou un `summary` de `mod`. Présentez et interprétez les tables, en fournissant les p-values, les valeurs de F avec les ddl correspondant ($F(ddl1, ddl2)=\dots$) Expliquez dans un paragraphe à part pourquoi vous obtenez la valeur 1 pour Genre, et la valeur 2 pour HDI, en ce qui concerne les degrés de liberté (ddl, ou df en anglais).

Analysis of Variance Table

Response: n.videos

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)
Gender	1	2252	2252	13.437	0.000248 ***
HDI	2	102869	51435	306.961	< 2.2e-16 ***
Residuals	9833	1647626	168		

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.'

Figure 8: Table d'ANOVA

Vous devez ensuite présenter les résultats de l'ANOVA avec cette fois-ci les statistiques inférentielles (les estimations des effets associés à une modalité donnée). La Figure 7 vous éclairera à cet égard. Pourquoi y-a-t'il un écart-type associé aux estimations des paramètres ? Comment est-calculé le test t correspondant à chaque paramètre (dans la table d'ANOVA qui n'est pas focalisée sur les sommes de carrés). Proposer une table affichant les η^2 pour chaque variable. A quoi correspondent-ils ?

```
Call:
lm(formula = n.videos ~ Gender + HDI + Gender * HDI, data = full_df)

Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-17.684 -11.345  -3.535   14.465   26.821

Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)      8.1794     0.3838  21.313 < 2e-16 ***
Genderune femme      1.6077     0.9881   1.627  0.10375
HDIH                5.1653     0.6964   7.418 1.29e-13 ***
HDIH                9.3552     0.4250  22.014 < 2e-16 ***
```

Figure 9: ANOVA et présentation de statistiques inférentielles

Vous devez ensuite introduire dans le modèle un paramètre d'interaction entre le genre et l'IDH dans votre modèle, pour obtenir une table comme dans la Figure 8. Qu'est-il arrivé à l'effet "Femme" sur le nombre de vidéos, comment l'interprétez-vous ? Pourquoi est-il, en fait, interdit d'utiliser une ANOVA de cette manière ? Appliquer l'équivalent non-paramétrique et fournir la table

afférente.

```

Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)      8.1794    0.3838  21.313 < 2e-16 ***
Genderune femme    1.6077    0.9881   1.627  0.10375
HDII              5.1653    0.6964   7.418 1.29e-13 ***
HDITH            9.3552    0.4250  22.014 < 2e-16 ***
Genderune femme:HDII -3.7571    1.3984  -2.687  0.00723 **
Genderune femme:HDITH -1.4578    1.0351  -1.408  0.15903
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 12.94 on 9831 degrees of freedom
(18633 observations deleted due to missingness)

```

Figure 10: Visualiser des interactions entre variables indépendantes

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F-Value	P-Value
weld\$fgage	2	278.60	139.30	12.74	0
weld\$time	4	385.53	96.38	8.82	0
weld\$fgage : weld\$time	8	597.07	74.63	6.83	0
Residuals	15	164.00	10.93	-	-

Figure 11: Exemple de table d'ANOVA correctement représentée

6 Régressions logistiques

6.1 Données du MOOC, variables booléennes et odd ratios

Nous allons nous intéresser maintenant à la régression logistique. Nous allons commencer par nous pencher sur une variable booléenne, l'obtention du certificat et/ou la réalisation de l'examen final. Mobiliser les mêmes variables que précédemment (genre et HDI), mais sans prendre en compte l'interaction entre ces variables. Faites une table d'odd-ratios, puis le forest plot correspondant. Sur R, il vous faudra remplacer le `lm` par un `glm` (generalized linear model), en rappelant dans le code quel type de `glm` vous allez mobiliser (binomial ou

Poisson). Pensez à passer les coefficients du modèle à l'exponentielle, le cas échéant. Vous pouvez vous inspirer de la figure ci-dessous. Il est obligatoire de rapporter les p-values sous formes d'astérisque, les intervalles de confiance (non présentés ci-dessous), et la modalité de référence doit apparaître dans la table, comme ci-dessous (avec le label Réf).

	MOOC1 V1	MOOC1 V2	MOOC1 V3
Women		Ref.	
Men	1.11	0.98	0.99
Low management positions		Ref.	
Higher management positions	0.99	0.87	1.66*
Jobseeker	0.98	0.77	1.54
Students	1.25*	0.71	2.33***
Others	0.76	0.73	1.68*
HDI Low		Ref.	
HDI Intermediate	0.85	0.87	0.68
HDI Very High	1.22*	1.57	0.61*

Figure 12: Table d'odds-ratios mettant en évidence les seuls OR

Vous décrirez les résultats du modèle en rapportant dans le texte des odd ratios avec les p-values correspondantes; vous confronterez ces résultats avec ceux des études précédentes sur le nombre de vidéos, et expliquerez dans un paragraphes à part pourquoi un odd-ratio ne correspond pas stricto sensus à un risk relatif (risk ratio) Rappelez dans quelles conditions risk ratios et odd ratios convergent.

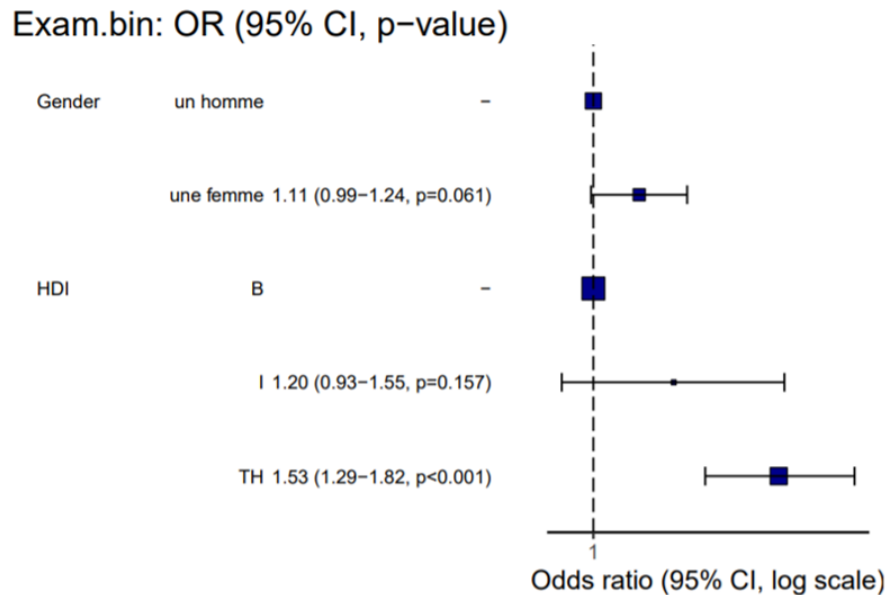


Figure 13: Représentation des odds-ratios via un forest plot

6.2 Traitement de données de comptage-type : la loi de Poisson

Nous vous avons fourni un jeu de données sur une compétition de mathématiques, faisant le lien entre les notes en mathématiques des candidats dans leur institution d'origine, et le nombre de récompenses (prix dans des concours, etc.) qu'ils ont obtenues. Faites un échantillon aléatoire de 80% des données, que vous appellerez `training_data`. Sur cet échantillon, regardez la distribution des données, pour les deux variables concernées. Fitez un modèle de Poisson (régression logistique) sur les données d'entraînement. Faites un diagnostic du modèle (qq-plot, etc.). Que représente un qqplot au juste ?

Affichez ensuite sur un même graphique la relation entre les variable note (en X) et récompenses (en Y), avec d'une part les données empiriques, et d'autre part les prédictions réalisées par le modèle à partir des données d'entraînement. Faites de même sur les données test, et calculez l'erreur du modèle pour les données d'entraînement d'une part, et pour les données de test d'autre part (vous identifierez en premier lieu le type d'erreur convenable pour ce type de modèle).

6.3 Données du MOOC, diagnostics et loi de Poisson

Nous allons cette fois revenir sur les données du MOOC à travers la variable nombre de vidéos vues, mais en mobilisant un modèle de Poisson (qui n'est à nouveau pas tout à fait adapté). Représentez la distribution de la variable, comme ci-dessous. Selon vous, pourquoi la variable ne suit-elle pas tout à fait une loi de Poisson (compte tenu du fait que l'on étudie un MOOC) ? Est-ce un problème pour l'analyse ?

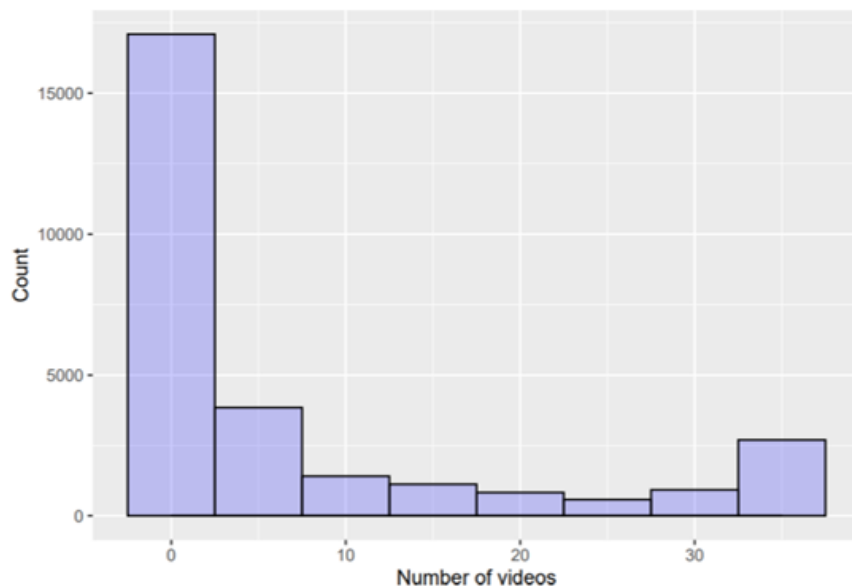


Figure 14: Distribution d'une variable suivant une loi de Poisson

Produisez ensuite les graphes ci-dessous, pour tester la normalité de la variable. Expliquez quelle forme devrait avoir un qqplot, et ce à quoi correspond l'homoscedasticité. Quelle forme devrait avoir le scatterplot si la variable était normalement distribuée.

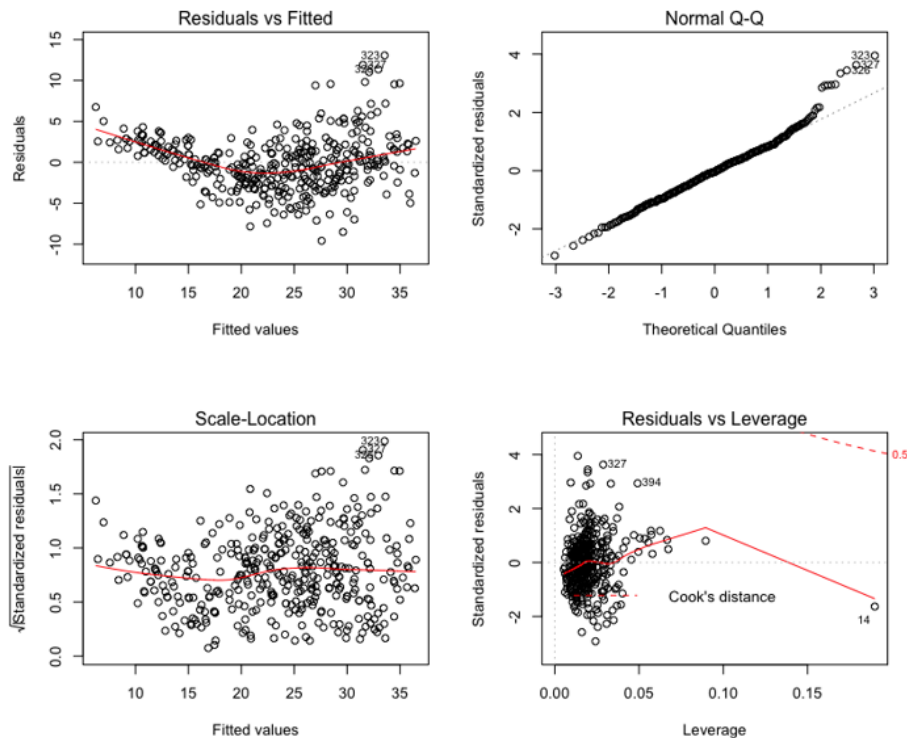


Figure 15: Normalité de la distribution de la variable : quelques graphes

Mobilisez un glm avec une loi de Poisson, en conservant les variables indépendantes mobilisées pour la régression logistique binomiale (Genre et IDH). Décrivez les résultats.

Proposez à partir de la feuille de variables fournie en cours une série d'analyses fondées exclusivement sur les variables.

7 Exercices d'approfondissement : de l'ANOVA en autonomie à la multicolinéarité

Un jeu de données pensé spécifiquement pour mettre en pratique vos compétences nouvellement acquises et traiter la multicollinéarité vous est fourni dans le paragraphe suivant (en lien). Mobilisez-le pour montrer votre maîtrise du concept de FIV (facteur d'inflation de la variance). Vous rédigerez dans votre document en Latex un paragraphe d'explication, accompagné des tables pertinentes

correspondantes.

En particulier, vous réaliserez à partir du jeu de données suivant trouvé sur Kaggle une analyse de type ANOVA (la variable réponse est le prix), avec les mêmes deux tables vues au cours des exercices précédents, avant de mener une étude de la multicollinéarité. Identifiez avec un corrélogramme (heatmap) quelles variables sont corrélées entre elles, supprimez les plus corrélées de votre modèle omnibus, et regardez comment évolue le FIV après cette manipulation.