TD 5 à 7 (projet à rendre) calibration, ESILV, 2023-2024

Travail à rendre avant minuit dans la nuit du 21 au 22 janvier. A faire par groupe de deux étudiants (avec possibilité d'avoir un groupe de 1 s'il y a un nombre impair d'étudiants). Vous enverrez par mail un unique fichier pdf contenant vos réponses à chaque question, avec les graphiques que vous aurez générés et commentés, ainsi que **le code en annexe du pdf** (un pdf généré en LaTeX sera apprécié positivement). Analysez et commentez vos résultats à chaque question.

Tout plagiat, utilisation de ChatGPT ou d'autre logiciel générant automatiquement du texte, du code ou des images est malhonnête pour un travail académique et est donc formellement interdit. Toute infraction à cette règle pour une partie de votre travail entraînera la note de 0 pour l'ensemble du projet (et un conseil de discipline si la direction le décide). L'utilisation de librairies répondant aux questions de ce projet est également prohibée.

I – Densités risque neutre

1/ Sur les prix d'option données dans le tableau ci-après, calibrer une densité risque neutre en utilisant la formule de Breeden-Litzenberger et la technique de Shimko. Comparer avec une densité gaussienne.

Données : prix de call de maturité un an sur une même action de prix actuel 100 :

Strike	95	96	97	98	99	100	101	102	103	104
Prix	10.93	9.55	8.28	7.40	6.86	6.58	6.52	6.49	6.47	6.46

2/ Vérifier, en faisant des tirages dans cette loi implicite, si l'on trouve un prix de modèle proche du prix de marché pour toutes les options ci-dessus.

II – Interpolation et volatilité locale

En plus du tableau donné précédemment, on va utiliser pour cette partie les prix d'options suivants :

- pour des options de maturité 9 mois :

Strike	95	96	97	98	99	100	101	102	103	104
Prix	11.79	8.95	8.07	7.03	6.18	6.04	5.76	5.50	5.50	5.39

- pour des options de maturité 6 mois :

Strike	95	96	97	98	99	100	101	102	103	104
Prix	10.71	8.28	6.91	6.36	5.29	5.07	4.76	4.47	4.35	4.14

- pour des options de maturité 3 mois :

Strike	95	96	97	98	99	100	101	102	103	104
Prix	8.67	7.14	5.98	4.93	4.09	3.99	3.43	3.01	2.72	2.53

3/ Déterminez la nappe de volatilité correspondant à ces 40 options. Proposer un prix, le plus juste possible, pour une option de strike 99.50 et de maturité 8 mois (justifier la méthode retenue).

4/ Calibrer un modèle à volatilité locale de type SVI en suivant les étapes suivantes :

- écrire l'algorithme de valorisation d'une option avec le modèle SVI, par EDP d'une part et par Monte Carlo d'autre part et comparer les résultats pour plusieurs jeux de paramètres ;
- estimez les cinq paramètres permettant de réduire au plus l'erreur moyenne ;
- on fixe tous les paramètres aux valeurs estimées ci-avant (sauf a et b) et on va calibrer les deux paramètres a et b pour chaque option : vous obtiendrez donc une nappe pour chacun de ces

deux paramètres et vous introduirez une contrainte de régularisation de ces deux nappes dans votre problème d'optimisation.

5/ En utilisant les nappes obtenues pour le modèle SVI (à la dernière étape), proposer encore un prix, le plus juste possible, pour une option de strike 99.50 et de maturité 8 mois (justifier la méthode retenue).

6/ On s'intéresse maintenant au modèle PDV (path-dependent volatility), qui est un modèle où la volatilité dépend des rendements passés (comme un modèle à volatilité stochastique avec une corrélation entre les deux browniens de -1 ou 1) :

$$\sigma_t = \beta_0 + \beta_1 \sum_{t_i \leq t} K_1(t - t_i) r_{t_i} + \beta_2 \sqrt{\sum_{t_i \leq t} K_2(t - t_i) r_{t_i}^2},$$

où les r_{t_i} sont les rendements des prix sur un petit pas de temps et $K_j(\tau) = \lambda_1 \exp(-\lambda_j \tau)$. Il vous est demandé de calibrer ce modèle en suivant les étapes suivantes :

- écrire l'algorithme de valorisation d'une option avec le modèle PDV, par Monte Carlo (les seuls rendements considérés seront ceux simulés entre la date courante et la maturité) ;
- estimez les cinq paramètres permettant de réduire au plus l'erreur moyenne ;
- on fixe tous les paramètres aux valeurs estimées ci-avant (sauf β_1 et β_2) et on va calibrer les deux paramètres β_1 et β_2 pour chaque option : vous obtiendrez donc une nappe pour chacun de ces deux paramètres et vous introduirez une contrainte de régularisation de ces deux nappes dans votre problème d'optimisation.

7/ Avec ce dernier modèle, proposer encore un prix, le plus juste possible, pour une option de strike 99.50 et de maturité 8 mois (justifier la méthode retenue).

III – Test d'algorithmes d'optimisation

8/ On veut comparer la performance de trois algorithmes d'optimisation : Nelder-Mead, le recuit simulé et l'essaim particulaire. Pour simplifier le problème on réduit sa dimension et on se place donc dans le cadre d'une estimation et non plus d'une calibration. Il s'agit d'estimer le modèle SVI (à cinq paramètres) qui minimise l'écart quadratique moyen entre prix de marché et prix de modèle pour les 40 options considérées. Trouver le couple de paramètres optimal avec Nelder-Mead puis avec recuit simulé et enfin avec essaim particulaire. Comparer les résultats obtenus : précision de l'estimation, rapidité de la convergence, stabilité de la solution.