

(Universidade de São Paulo)
Trabalho 01 - Temperaturas no Grafo de Manhattan

Métodos do Cálculo Numérico I – SME0205

Docente: Antonio Castelo Filho

Julia Guazzelli Monteiro – 15465383

Vinícius de Sá Ferreira – 15491650

26 abr. 2025

1 Modelagem do problema

Suponha $T : \mathbb{N} \times (\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^-) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $T(x, t) = \text{temperatura no ponto } x \text{ ao tempo } t$. Temos a equação do calor em 1D da seguinte forma

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2}$$

onde $\alpha > 0$ é a difusão térmica. Assim podemos fazer a aproximação por série de Taylor para um t_0 fixo, ao redor de x

$$\begin{aligned} T(x+1) &= \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{T^{(j)}(x)(x+1-x)^j}{j!} = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{T^{(j)}(x)}{j!} = T(x) + T'(x) + \frac{T''(x)}{2} + \frac{T^{(3)}(x)}{6} + \frac{T^{(4)}(x)}{24} + \dots \\ T(x-1) &= \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{T^{(j)}(x)(x-1-x)^j}{j!} = \sum_{j=0}^{+\infty} (-1)^j \frac{T^{(j)}(x)}{j!} = T(x) - T'(x) + \frac{T''(x)}{2} - \frac{T^{(3)}(x)}{6} + \frac{T^{(4)}(x)}{24} - \dots \\ T(x+1) + T(x-1) &= 2T(x) + T''(x) + \frac{T^{(4)}(x)}{12} + \dots \\ T''(x) &= T(x+1) - 2T(x) + T(x-1) - \frac{T^{(4)}(x)}{12} - \dots \\ \therefore T''(x) &= T(x+1) - 2T(x) + T(x-1) - \mathcal{O}(1) \end{aligned}$$

logo se definirmos $T_i(t) := T(t, i)$, teremos

$$\frac{dT_i(t)}{dt} = \alpha(T_{i+1}(t) - 2T_i(t) + T_{i-1}(t))$$

Portanto, se tivermos $T(t) = \begin{bmatrix} T_1(t) \\ T_2(t) \\ T_3(t) \\ \vdots \\ T_n(t) \end{bmatrix}$, podemos reescrever a equação em função do Laplaciano L do grafo, dado por $L = G - A$, com G a matriz diagonal com o grau de arestas para cada vértice e A a matriz

de adjacência. Note que

$$LT = \left(\begin{bmatrix} G_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & G_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & G_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & G_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} & & & & \\ & & & & \\ & & A & & \\ & & & & \\ & & & & \end{bmatrix}_{n \times n} \right) \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ \vdots \\ T_n \end{bmatrix}_{n \times 1} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ \vdots \\ C_n \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

em que, para $i = 1, 2, 3, \dots, n$ teremos

$$C_i = G_i T_i - \sum_{j \rightarrow i} T_j$$

onde $j \rightarrow i$ indica os vizinhos de i , aqueles que estão conectados com i . No caso 1D, o grau de um ponto i interno é de 2 e possui 2 pontos conexos, o sucessor e o antecessor, logo teremos a equação

$$\frac{dT_i(t)}{dt} = \alpha(T_{i+1}(t) - 2T_i(t) + T_{i-1}(t)) = -\alpha(2T_i(t) - T_{i-1}(t) - T_{i+1}(t)) = -\alpha(G_i T_i(t) - \sum_{j \rightarrow i} T_j(t)) = -\alpha(LT)_i$$

Portanto, temos

$$\frac{dT}{dt} = -\alpha LT \quad (*)$$

Uma forma de estender $T(t)$ para \mathbb{R} é com $T(t) = e^{(-\alpha Lt)} T(0)$, onde $T(0) = T_0$. Assim

$$\frac{dT}{dt} = \frac{d}{dt}[e^{(-\alpha Lt)} T(0)] = -\alpha L e^{(-\alpha Lt)} T(0) = -\alpha L(e^{(-\alpha Lt)} T(0)) = -\alpha LT(t)$$

que satisfaz (*). Por fim, se fizermos $\lim_{t \rightarrow +\infty} T(t) = T_\infty = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$, $c_i \in \mathbb{R}$, logo $\frac{dT}{dt} = \vec{0}$ e a equação fica da seguinte forma

$$\frac{dT}{dt} = -\alpha LT_\infty = \vec{0}$$

$$LT_\infty = \vec{0}$$

$$T_{i+1}(t) - 2T_i(t) + T_{i-1}(t) = 0$$

$$\therefore T_i(t) = \frac{T_{i-1}(t) + T_{i+1}(t)}{2}$$

Agora, podemos adicionar condições de contorno, então teremos para b o vetor com a temperatura em alguns pontos

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= -\alpha LT + b = 0 \\ \alpha LT &= b \end{aligned}$$

Com a matriz de penalidades, ajustamos a contribuição resultando em

$$(L + P)T = Pb$$

2 Métodos diretos

2.1 Método de Cholesky

Suponhamos que M seja uma matriz triangular simples, mais precisamente, uma matriz pequena, triangular e bem-comportada, então, pela teoria, achar na M^{-1} explicitamente não seria algo muito complexo. Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Acharemos U^{-1} usando $[U|I] \rightarrow [I|U^{-1}]$:

$$\begin{aligned} [U|I] &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & 3/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/4 \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & -3/8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/4 \end{array} \right] &\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & -1/8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/4 \end{array} \right] \\ U^{-1} &= \left[\begin{array}{ccc} 1/2 & -1/2 & -1/8 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Mas se tivermos uma matriz geral (não necessariamente triangular), mas invertível, de entradas significativamente grandes (com linhas, colunas na casa dos milhares), então o número de operações para computar a inversa explicitamente pelo algoritmo de Gauss-Jordan (demonstrado de forma simplificada no exemplo acima com a matriz triangular) cresceria cubicamente com o tamanho N da matriz, ou seja, seria $O(N^3)$ no que tange à análise assintótica. Pois, em termos simples, há $O(N)$ passos principais (um para cada coluna/pivô) na eliminação, e em cada passo, se opera em $O(N)$ linhas abaixo/acima do pivô, afetando $O(N)$ elementos em cada linha - as colunas à direita. A complexidade vem de algo como $O(N$ passos) * $O(N$ linhas afetadas) * $O(N$ operações por elemento) = $O(N^3)$. Para o computador, calcular a inversa explicitamente é, portanto, custoso. Para o humano, bem, deixaremos a discussão de lado.

Para contra-atacar o alto custo da complexidade computacional na resolução do sistema $Mx = k$, assumindo que a matriz seja simétrica e def. positiva, podemos pensar em fatorizar a matriz em questão em $M = LL^T$, onde L é uma matriz triangular inferior (e L^T é triangular superior). A própria fatorização de Cholesky tem um custo da ordem de $O(N^3)$ (embora geralmente com uma constante menor que a da inversão). Mas a vantagem crucial vem a seguir: em vez de calcular M^{-1} , resolvemos o sistema original $(LL^T)x = k$ em duas etapas, introduzindo $y = L^Tx$:

1. Resolver $Ly = k$ para y usando substituição **direta**.
2. Resolver $L^Tx = y$ para x usando substituição **retroativa**.

Cada uma dessas etapas de substituição tem um custo muito menor, da ordem de $O(N^2)$. Portanto, após o custo inicial da fatorização ($O(N^3)$), a solução do sistema em si é muito menos complexa ($O(N^2)$) do que calcular a inversa completa ($O(N^3)$) e depois multiplicar por k ($O(N^2)$). É nisso que o algoritmo de Cholesky se baseia para ser eficiente na resolução de sistemas lineares.

2.1.1 Conexão com o código

A fatoração da decomposição da matriz M no produto de uma matriz triangular inferior L e sua transposta L^T é realizada pela função abaixo no código.

```

    # Calcula a decomp. de Cholesky: M = L*L^T
151 L = la.cholesky(M, lower=True)
    
```

Depois de obter L , a solução é encontrada resolvendo dois sistemas triangulares sequencialmente e retornando o vetor x :

```

8   # Calcula a decomp. de Cholesky: M = L*L^T
7   L = la.cholesky(M, lower=True)
6
5   # Resolve a matriz triangular L*y = c
4   y = la.solve_triangular(L, c, lower=True)
3
2   # Resolve a transposta da matriz triâng L^T*x = y
1   x = la.solve_triangular(L.T, y, lower=False)
158
1   return x
2
NORMAL main.py

```

unix | utf-8 | python 61% 158:0

Embora a etapa de fatoração ainda domine a complexidade ($O(N^3)$), a constante multiplicativa é menor do que em métodos como LU ou QR para matrizes densas, o cálculo de comparação do tempo de execução será discutido mais posteriormente.

2.2 Método LU

Fazendo uma breve comparação com o método de Cholesky, o algoritmo LU não requer que a matriz M seja simétrica ou definida positiva, basta que ela seja quadrada e invertível - isso generaliza as aplicações de uma forma significativa.

Porém mesmo para matrizes quadradas e invertíveis com entradas muito grandes, calcular a inversa M^{-1} diretamente (explicitamente) ou usar métodos muito básicos tende a ser computacionalmente caro (complexidade $O(N^3)$) e propenso a erros numéricos.

A saída seria usar a decomposição LU que se consiste em fatorar a matriz M de forma a simplificar a resolução do sistema. E para evitar divisões por zero ou números muito pequenos, o processo pode incluir pivotamento, que troca as linhas da matriz durante a fatoração. Em suma, isso resulta na decomposição:

$$PM = LU$$

onde:

- P é uma matriz de permutação;
- L é uma matriz triangular inferior;
- U é uma matriz triangular superior.

2.2.1 Resolução do Sistema com Decomposição LU

Com essa fatoração, o sistema $MT = c$ se torna $LUT = Pc$. Podemos resolver isso em duas etapas, envolvendo sistemas triangulares, que já sabemos que são mais fáceis e rápidos de resolver (complexidade $O(N^2)$ cada):

1. Resolver $Ly = Pc$ para achar um vetor intermediário y . (Note que aplicamos a permutação P ao vetor c).
2. Resolver $UT = y$ para achar a solução final T

A etapa mais custosa ainda é a fatoração $PM = LU$, que tem complexidade $O(N^3)$ (aproximadamente $\frac{2}{3}N^3$ operações para matrizes densas). Em teoria, esse método tem a mesma ordem de complexidade de Cholesky, mas na prática LU geralmente requer mais operações por não explorar a simetria da matriz (quando presente).

2.2.2 Conexão com o código

Fatoração da matriz PM no produto LU :

```
2 def funcao_lu(M,c):
1 •   #Calculando a decomposicao LU: M= P*L*U, onde P eh uma matriz de permutacao
164 •   P,L,U = la.lu(M)
1
```

Ao obter P , L , e U , encontramos T resolvendo os dois sistemas triangulares sequencialmente, como implementado na função `funcao_lu`:

```
2 •   #Resolvendo Ly=Pc
3 •   Pc= P @ c
4 •   y = la.solve_triangular(L, Pc, lower=True)
5
6 •   #Resolve Ux=y
7 •   x = la.solve_triangular(U, y, lower=False)
8
9 •   return x
10
COMMAND main.py | +
/la.lu
```

Parent 3730, Main T
device-id: 'glib'
irefox:3730): Glib
as no property name0
Parent 3730, Main T
device-id: 'glib'

unix | utf-8 | python 63% 164:10 .b
as no property name0
Parent 3730, Main T

2.3 Método QR

De praxe, a decomposição QR é outro método fundamental para resolver sistemas lineares, porém com uma excelente estabilidade numérica, sendo particularmente robusto mesmo para matrizes mal-condicionadas. O método é aplicável a matrizes quadradas invertíveis gerais e não requer simetria ou definição positiva, também é a base para muitos algoritmos de autovalores e problemas de mínimos quadrados.

A ideia central da decomposição QR é fatorar a matriz M no produto de uma matriz ortogonal Q e uma matriz triangular superior R :

$$M = QR$$

onde:

- Q é uma matriz ortogonal. Isso significa que suas colunas formam um conjunto orthonormal de vetores, e sua transposta é comutativa à sua inversa ($Q^T Q = Q Q^T = I$, onde I é a matriz identidade). Multiplicar por Q ou Q^T preserva normas e ângulos, o que contribui para a estabilidade numérica.
- R é uma matriz triangular superior.

Com a fatoração $M = QR$, o sistema original $MT = c$ se torna $QRT = c$. Para isolar T , multiplicamos ambos os lados pela transposta (que é a inversa) de Q :

$$\begin{aligned} Q^T(QRT) &= Q^T c \\ (Q^T Q)RT &= Q^T c \\ IRT &= Q^T c \\ RT &= Q^T c \end{aligned}$$

Isso resulta em um sistema triangular superior $RT = Q^T c$, que pode ser resolvido eficientemente por substituição retroativa (complexidade $O(N^2)$).

A etapa computacionalmente mais intensiva é a própria fatoração $M = QR$. Existem diferentes algoritmos para computá-la (como Gram-Schmidt modificado, transformações de Householder ou rotações de Givens). Para matrizes densas, a complexidade da fatoração QR é geralmente $O(N^3)$, tipicamente com uma constante maior do que a da decomposição LU (aproximadamente $\frac{4}{3}N^3$ operações usando Householder). Portanto, embora seja muito estável, tende a ser mais custoso que LU ou Cholesky (quando aplicável) para a simples solução de sistemas lineares quadrados.

2.3.1 Conexão com o código

Fatoração da matriz M no produto QR :

```
4
3 def funcao_qr(M, c):
2
1 •    #Calculando a decomp. QR: M=QR
178 •    Q, R = la.qr(M)
1
```

Após obter Q e R , a solução T é encontrada calculando $Q^T c$ e depois resolvendo o sistema triangular $RT = Q^T c$, como implementado na função `funcao_qr`:

```
7
6 •    #Resolvendo Rx=Q.Tc
5 •    Qtc = Q.T @ c
4 •    x = la.solve_triangular(R, Qtc, lower=False)
3
2
1 •    return x
184
```

2.4 Resultados

Os tempos de execução registrados para cada método foram plotados no gráfico de barras, observada na [Figura 5](#) para 9 pontos e na [Figura 11](#), para 435 pontos. Ao fazer a análise, observa-se que, para a matriz M específica deste problema, que é simétrica e definida positiva (se trata de um grafo), o método de Cholesky apresentou o melhor desempenho, sendo o mais rápido entre as implementações baseadas em decomposição.

Isso está de acordo com a teoria e o que foi estudado nas análises dos métodos que conduzimos, pois Cholesky explora a simetria da matriz, resultando em aproximadamente metade das operações de ponto flutuante em comparação com a decomposição LU para matrizes densas (aproximadamente $\frac{1}{3}N^3$ vs $\frac{2}{3}N^3$ operações para a fatoração). A função `numpy.linalg.solve`, sendo uma aplicação altamente otimizada (frequentemente baseada em implementações LAPACK), apresentou um desempenho muito competitivo, potencialmente detectando a natureza da matriz e utilizando um solver apropriado internamente.

Além do mais, no que tange à análise minuciosa, a decomposição LU foi mais lenta que Cholesky, como esperado, por ser um método mais geral. A decomposição QR, embora robusta numericamente, tende a ser a mais custosa computacionalmente para a solução de sistemas lineares (com uma constante associada à complexidade $O(N^3)$ tipicamente maior, como $\frac{4}{3}N^3$ para métodos baseados em Householder), o que se refletiu em seu tempo de execução sendo o mais elevado entre os quatro métodos testados.

Em suma, para o sistema linear derivado deste problema específico, a decomposição de Cholesky é a escolha mais eficiente em termos de tempo de execução, devido às propriedades favoráveis da matriz M . A função genérica `numpy.linalg.solve` também se mostrou extremamente eficaz. A escolha entre LU e QR dependeria de um balanço entre generalidade, custo computacional e requisitos de estabilidade numérica, sendo QR preferível em casos de matrizes mal-condicionadas, apesar de seu maior custo.

3 Métodos iterativos

3.1 Gauss-Jacobi

Queremos resolver o sistema $Mx = c$, em que $M = (L + P)T$ e $c = Pb$. Assim, temos

$$\begin{aligned} Mx &= c \\ (M - D + D)x &= c \\ (M - D)x + Dx &= c \\ (M - D)x^{(k)} + Dx^{(k+1)} &= c \\ Dx^{(k+1)} &= (D - M)x^{(k)} + c \\ x^{(k+1)} &= D^{-1}(D - M)x^{(k)} + D^{-1}c \\ x^{(k+1)} &= (I - D^{-1}M)x^{(k)} + D^{-1}c \\ x^{(k+1)} &= Cx^{(k)} + g \end{aligned}$$

Como D é a diagonal de M , o determinante é o produtório da diagonal e M que é não-nulo, então D é inversível.

3.2 Gauss-Seidel

Queremos resolver o sistema $Mx = c$, em que $M = (L + P)T$ e $c = Pb$. Assim, façamos $M = L + R$, onde L é a matriz triangular inferior de M e R , a triangular superior sem a diagonal, então

$$\begin{aligned} Mx &= c \\ (L + R)x &= c \\ Lx + Rx &= c \\ Lx^{(k+1)} + Rx^{(k)} &= c \\ Lx^{(k+1)} &= -Rx^{(k)} + c \\ x^{(k+1)} &= (-L^{-1}R)x^{(k)} + L^{-1}c \\ x^{(k+1)} &= Cx^{(k)} + g \end{aligned}$$

Como L é triangular inferior, o determinante é o produtório da diagonal de M que é não-nulo, então L é inversível.

3.3 Gradientes conjugados

Queremos resolver o sistema $Mx = c$, em que $M = (L + P)T$ e $c = Pb$. Considere a função

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Mx - c^T x$$

onde M é simétrica positiva definida (SPD). Note que

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} x_i x_j - \sum_{i=1}^n c_i x_i \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_k} &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} (x_i \delta_{ik} + x_j \delta_{jk}) \right) - c_k = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n m_{ik} x_i + \sum_{j=1}^n m_{kj} x_j \right) - c_k \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^n m_{kj} x_j \right) - c_k = \sum_{j=1}^n m_{kj} x_j - c_k \\ \therefore \nabla f(x) &= Mx - c \end{aligned}$$

Assim, queremos encontrar x (que é único, porque M é SPD) tal que $\nabla f(x) = 0 \iff Mx - c = 0 \iff Mx = c$.

Começamos com um chute inicial x_0 , então teremos um resíduo $r_0 = c - Mx_0 = -\nabla f(x_0)$. Teremos a direção inicial dada por $p_0 = r_0$, assim atualizamos

$$x_1 = x_0 + \alpha p_0$$

Temos que $r_1^T \cdot r_0 = 0$, porque são ortogonais, e $r_1 = c - Mx_1$, então

$$\begin{aligned} r_1^T \cdot r_0 &= 0 \\ (c - Mx_1)^T \cdot r_0 &= 0 \\ [c - M(x_0 + \alpha p_0)]^T \cdot r_0 &= 0 \\ (c - Mx_0)^T \cdot r_0 - \alpha(Mp_0)^T \cdot r_0 &= 0 \\ (c - Mx_0)^T \cdot r_0 - \alpha(Mp_0)^T \cdot p_0 &= 0 \\ (c - Mx_0)^T \cdot r_0 &= \alpha(Mp_0)^T \cdot p_0 \\ \alpha &= \frac{(c - Mx_0)^T \cdot r_0}{(Mp_0)^T \cdot p_0} \\ \alpha &= \frac{r_0^T \cdot r_0}{p_0^T \cdot M \cdot p_0} \end{aligned}$$

Agora fazemos $r_1 = r_0 - \alpha(Mp_0)$ e a direção deve ser atualizada de forma conjugada, isto é, $p_{k+1}^T \cdot M \cdot p_k = 0$. Então podemos fazer

$$\begin{aligned} p_1 &= r_1 + \beta p_0 \\ p_1^T \cdot M \cdot p_0 &= 0 \\ (r_1 + \beta p_0)^T \cdot M \cdot p_0 &= 0 \\ r_1^T \cdot M \cdot p_0 + \beta(p_0^T \cdot M \cdot p_0) &= 0 \\ \beta(p_0^T \cdot M \cdot p_0) &= -r_1^T \cdot M \cdot p_0 \\ \beta &= -\frac{r_1^T \cdot M \cdot p_0}{p_0^T \cdot M \cdot p_0} = -\frac{r_1^T \cdot M \cdot p_0}{r_0^T \cdot M \cdot p_0} \end{aligned}$$

Como $r_1 = r_0 - \alpha(Mp_0)$, temos $\frac{1}{\alpha}(r_0 - r_1) = M \cdot p_0$, então

$$\begin{aligned} \beta &= -\frac{r_1^T \cdot \left[\frac{1}{\alpha}(r_0 - r_1) \right]}{r_0^T \cdot \left[\frac{1}{\alpha}(r_0 - r_1) \right]} = -\frac{\cancel{r_1^T \cdot r_0} - r_1^T \cdot r_1}{\cancel{r_0^T \cdot r_0} - \cancel{r_0^T \cdot r_1}} = -\frac{-r_1^T \cdot r_1}{r_0^T \cdot r_0} \\ \beta &= \frac{r_1^T \cdot r_1}{r_0^T \cdot r_0} \end{aligned}$$

Portanto, as etapas são

1. Chute inicial x_0 ;
2. $p_0 = r_0 = c - Mx_0$;
3. $\alpha = \frac{r_k^T \cdot r_k}{p_k^T \cdot M \cdot p_k}$;
4. $x_{k+1} = x_k + \alpha p_k$;
5. $r_{k+1} = r_k - \alpha(M \cdot p_k)$;
6. $\beta = \frac{r_{k+1}^T \cdot r_{k+1}}{r_k^T \cdot r_k}$;
7. $p_{k+1} = r_{k+1} + \beta p_k$;
8. Volta para o passo 3, enquanto $\|r_{k+1}\| > \text{tol}$.

3.4 Resultados

Pontos	Tolerância		Gauss-Jacobi	Gauss-Seidel	Gradientes Conjugados
9	10^{-1}	k	13000	7129	630
		t	19 min	11 min	1 min
435	10^{-3}	k	1261	647	251
		t	3 min	2 min	30 s

É possível observar os tempos exatos de execução na Figura 6 para 9 pontos e na figura Figura 12, para 435 pontos.

4 Resultado obtido

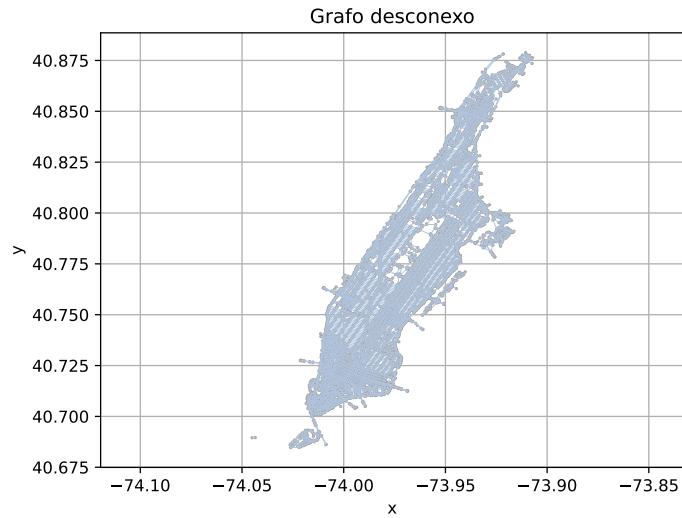


Figura 1

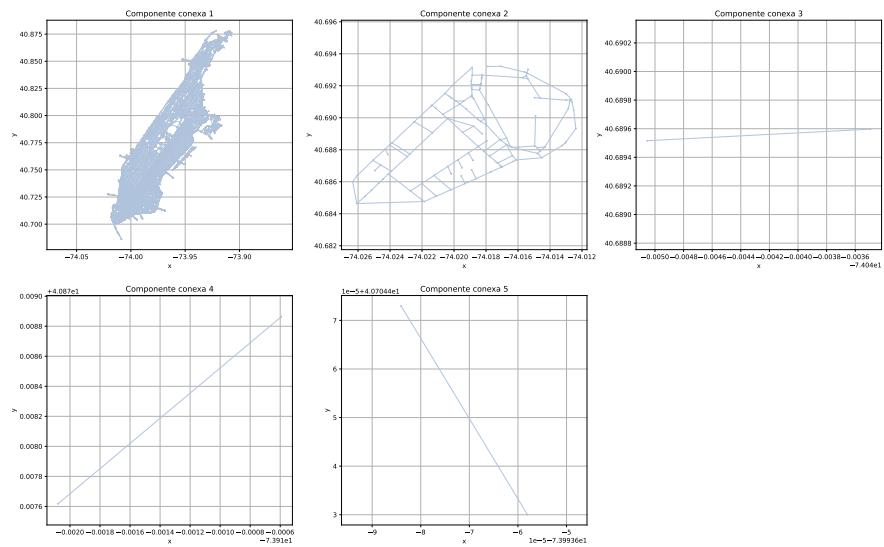


Figura 2

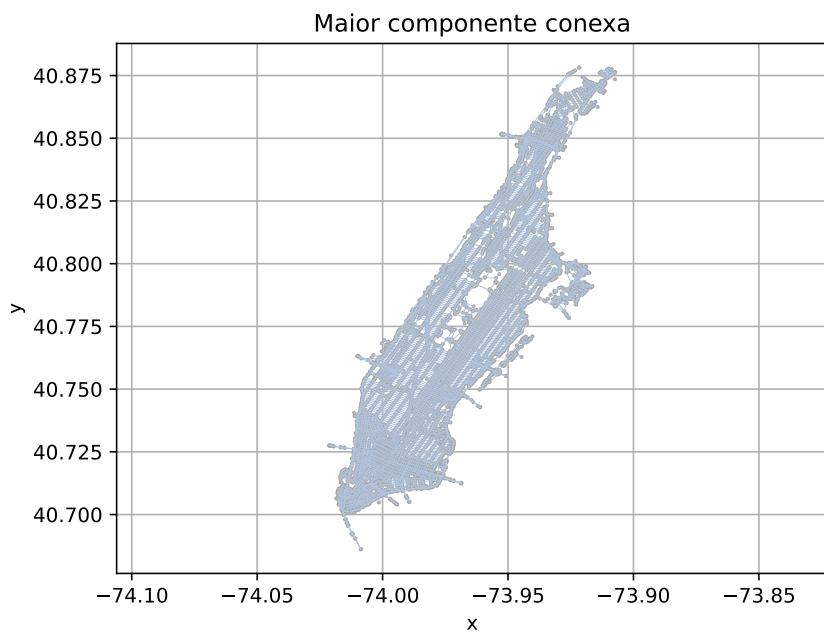


Figura 3

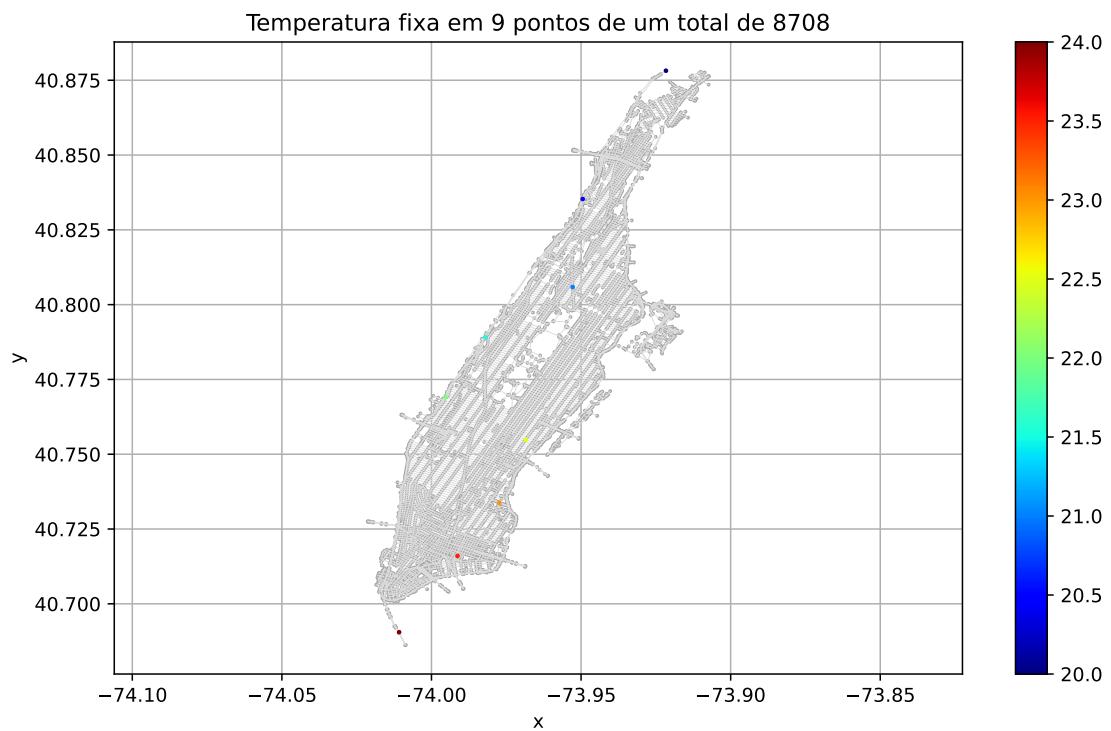


Figura 4

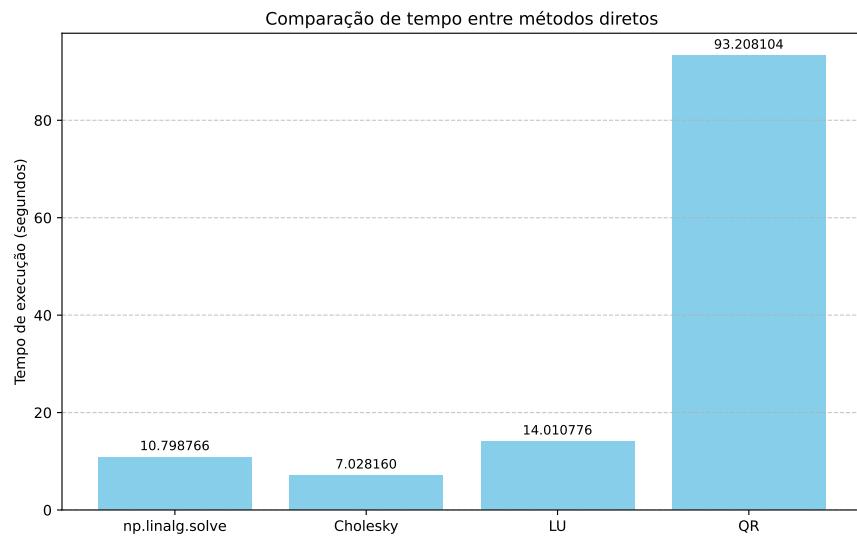


Figura 5

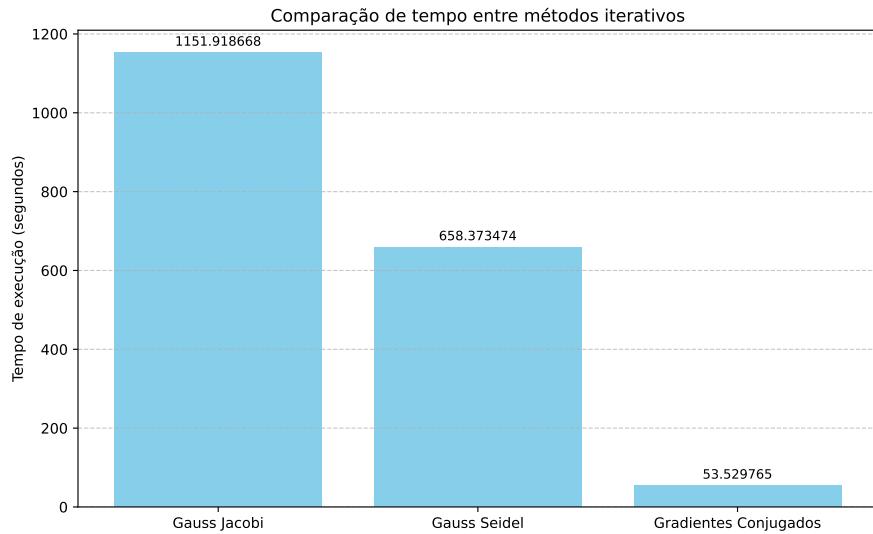


Figura 6

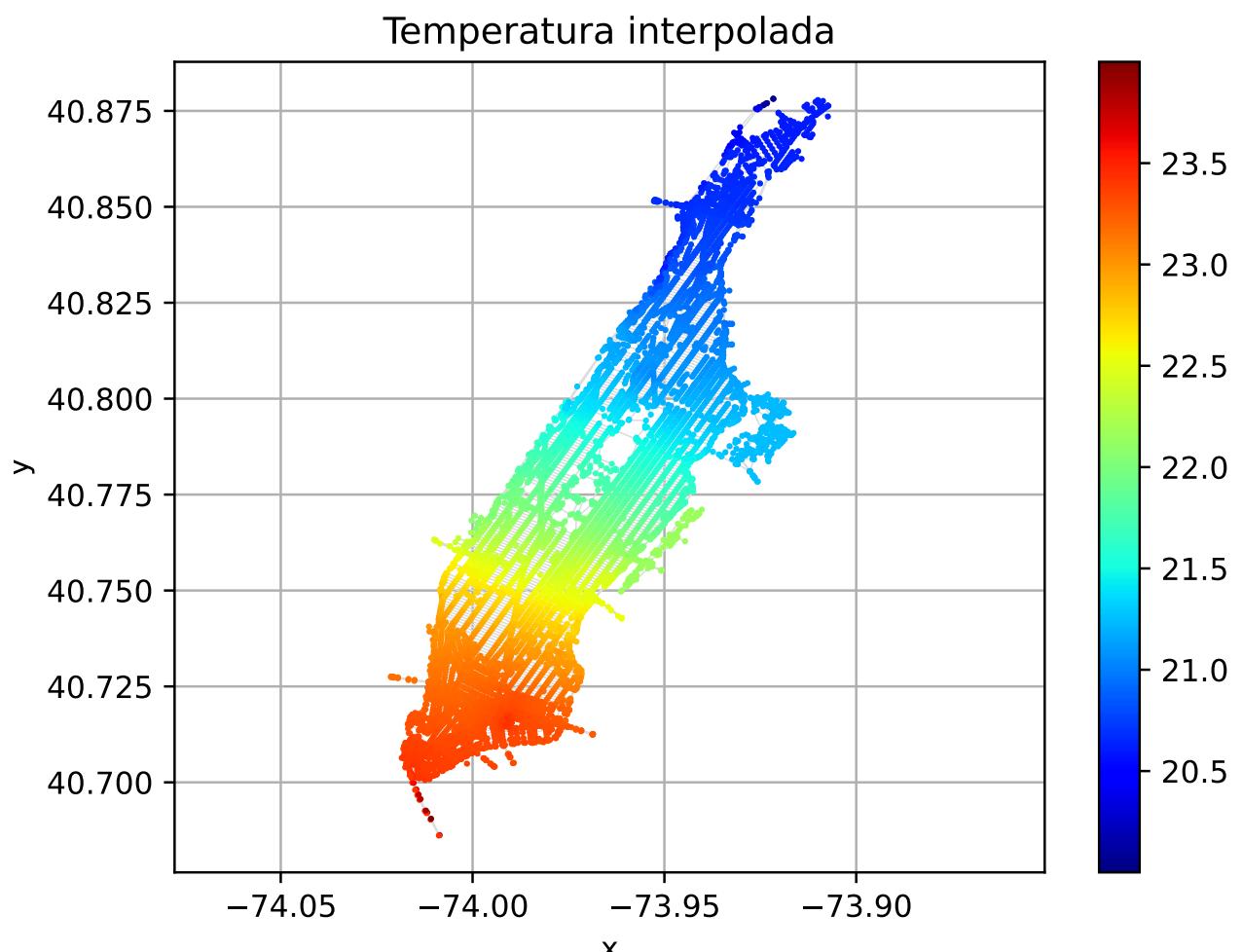


Figura 7

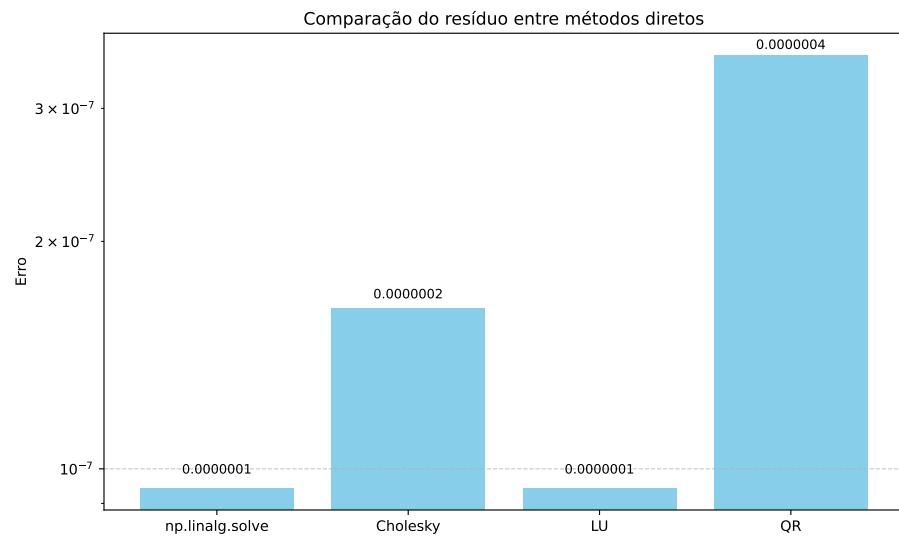


Figura 8

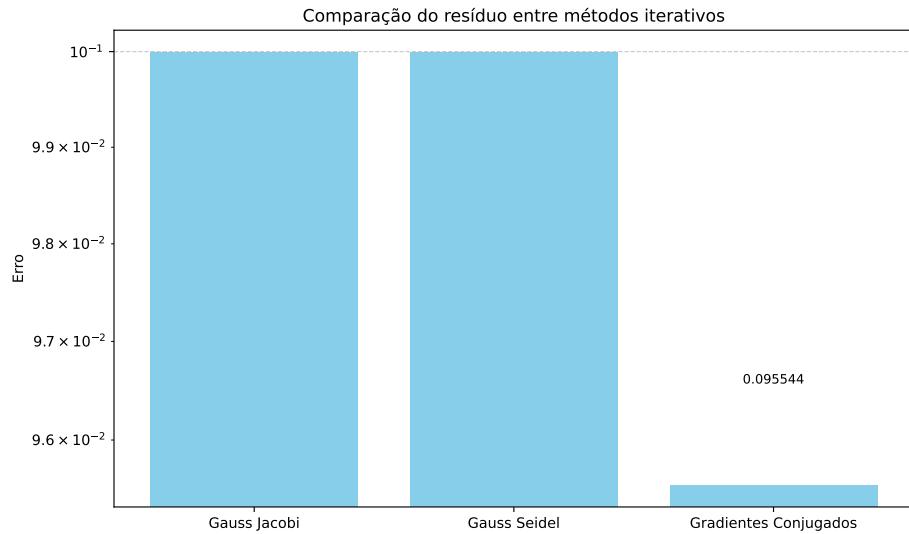


Figura 9

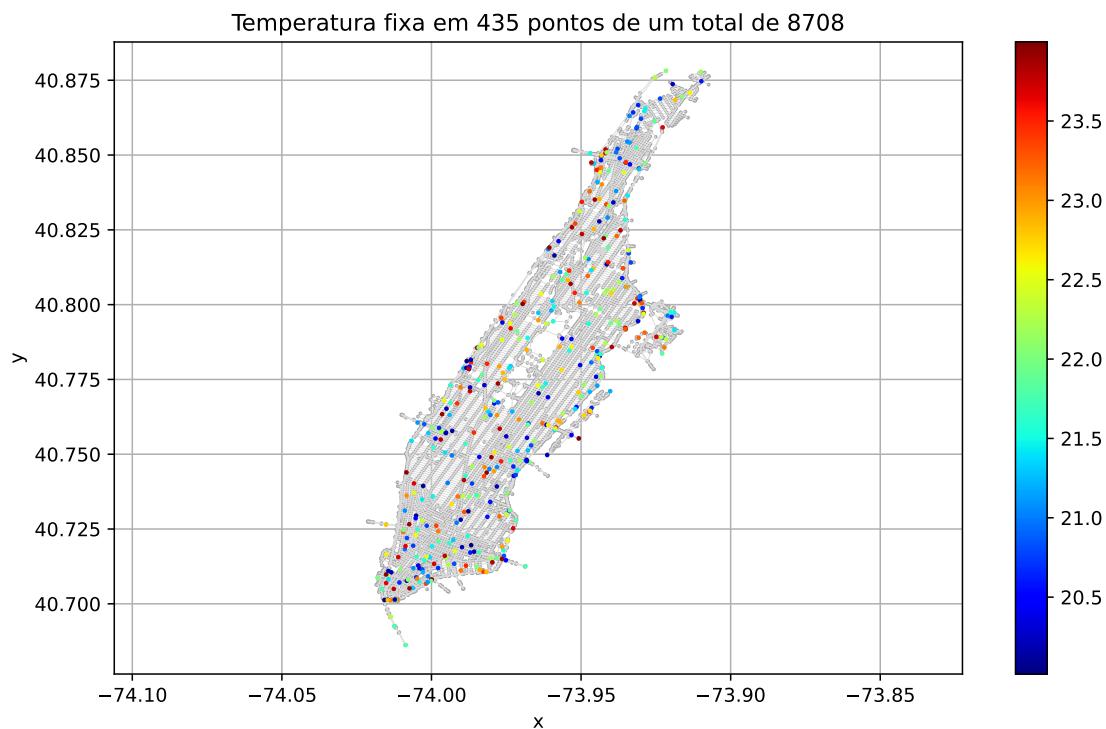


Figura 10

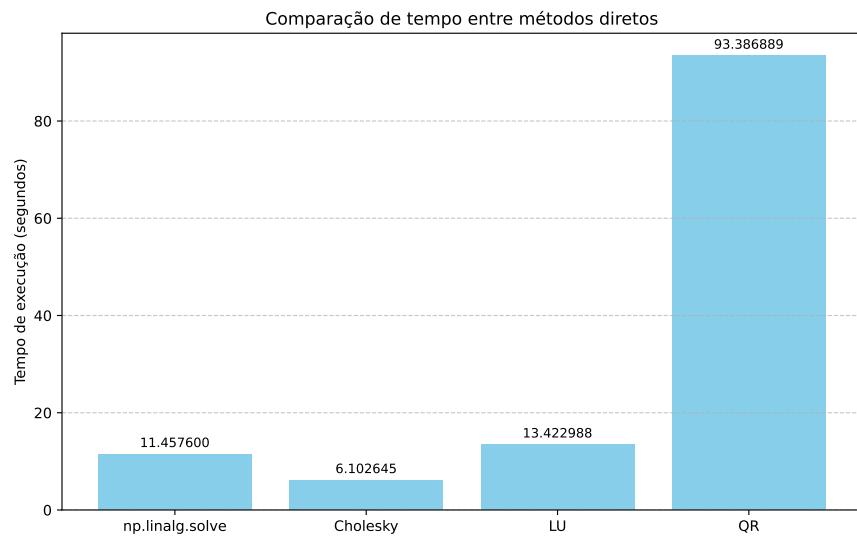


Figura 11

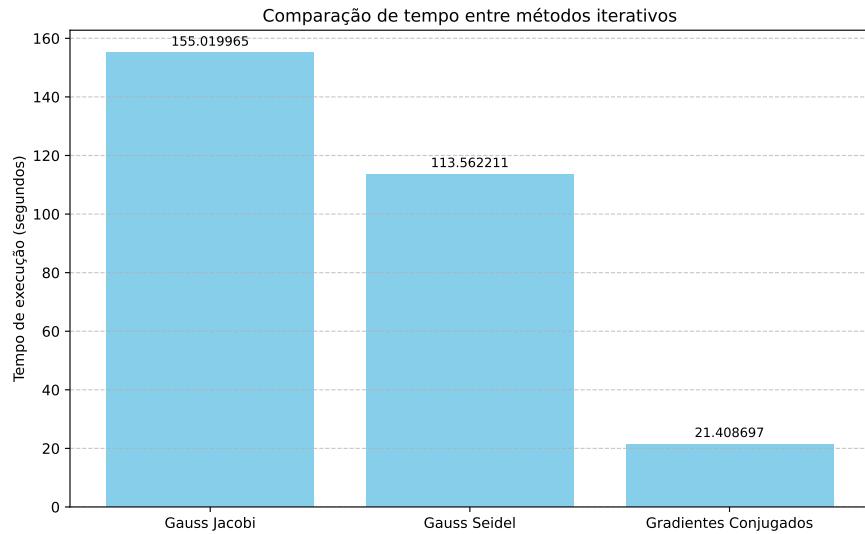


Figura 12

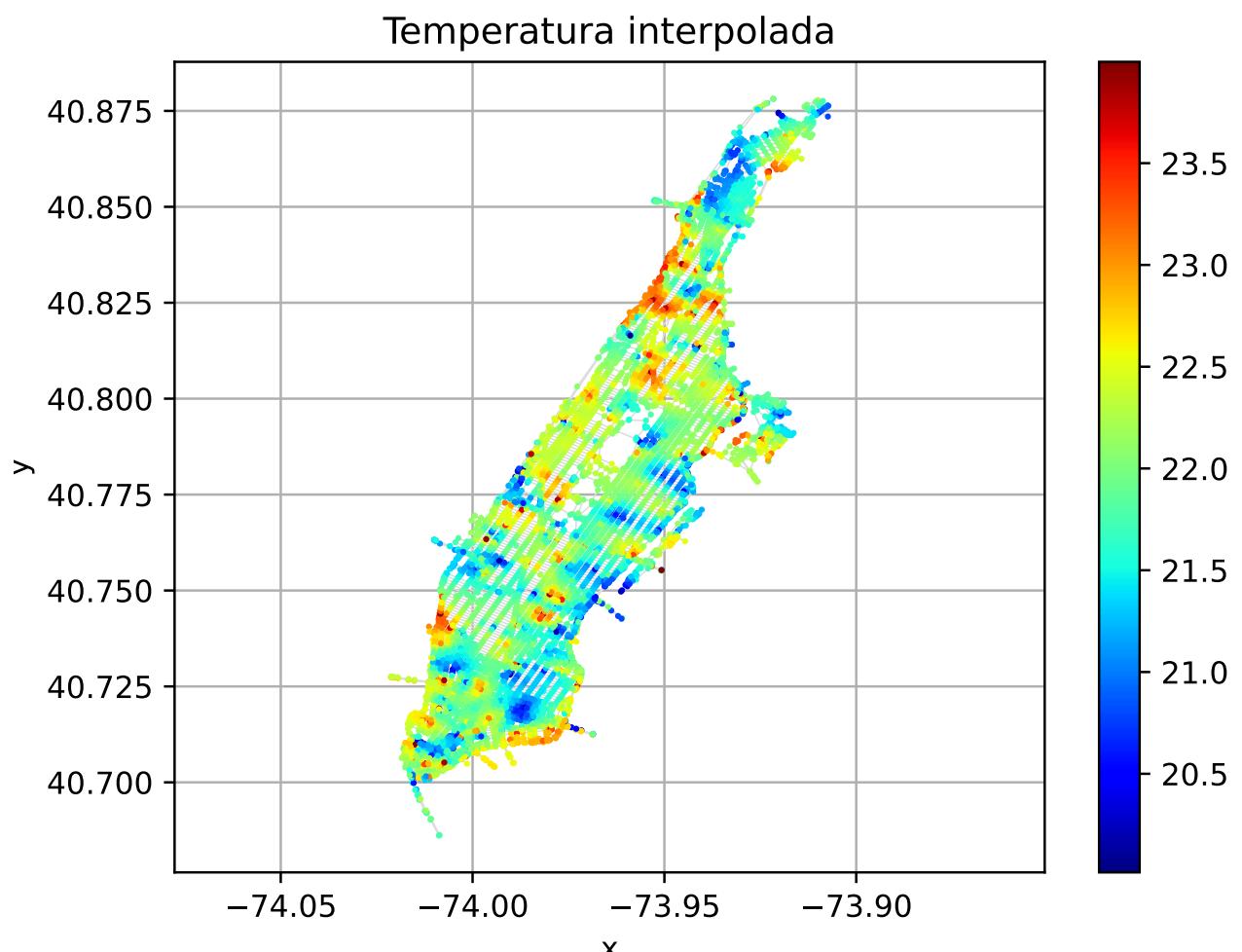


Figura 13

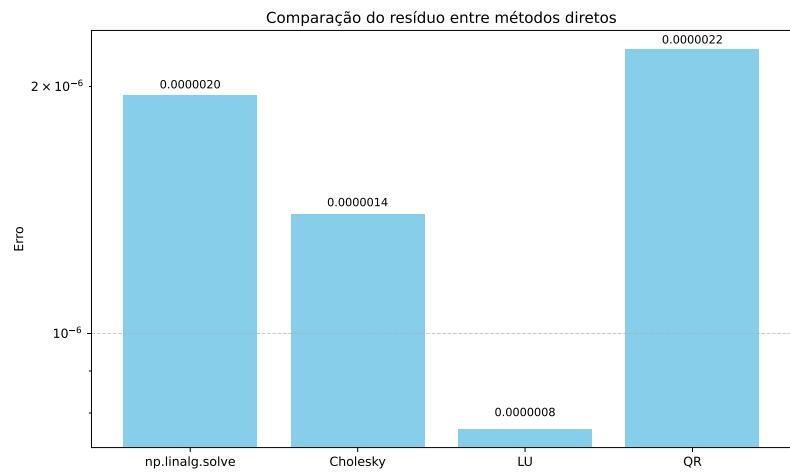


Figura 14

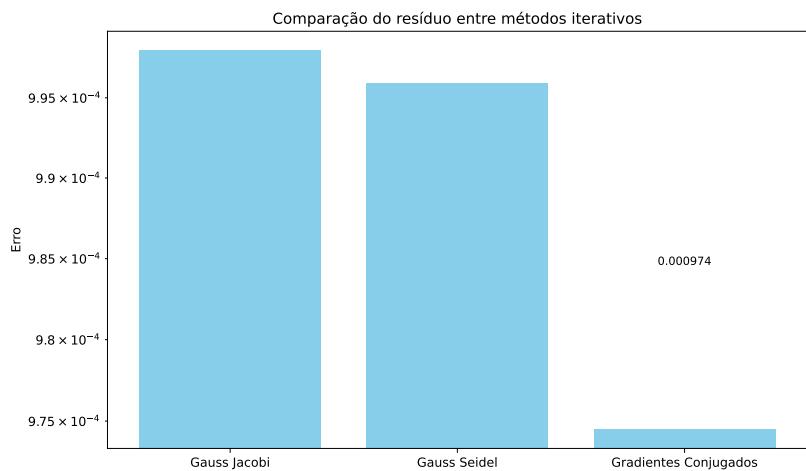


Figura 15