بسم الله الرحمن الرحیم

فَضْلُ الْعِلْمِ اَفضَلُ مِنْ فَضْلِ الْعِبَادَةِ

فضیلت علم بیش‌تر از فضیلت عبادت است.

پیامبر اعظم (ص)

مهارت حل مساله در معادلات دیفرانسیل

(جلد اول)

معادلات دیفرانسیل معمولی

مولف: مهرداد نجف‌پور

سرشناسنامه: نجف‌پور، مهرداد،۱۳۷۰-

عنوان و نام پدیدآور: مهارت حل مساله در معادلات دیفرانسیل، نویسنده: مهرداد نجف‌پور.

مشخصات نشر: تهران: مهرداد نجف‌پور، ۱۳۹۶.

مشخصات ظاهری: ۲ج.

شابک ج.۱: ۵-۸۴۹۶-۰۴-۶۰۰-۹۷۸، ج.۲: ۲-۸۴۹۷-۰۴-۶۰۰-۹۷۸، دوره: ۹-۸۴۹۸-۰۴-۶۰۰-۹۷۸

وضعیت فهرست نویسی: فیپا

یادداشت: کتابنامه.

مندرجات: ج.۱. معادلات دیفرانسیل معمولی، ج.۲. معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی.

موضوع: معادلات دیفرانسیل.

موضوع : Differential equations

موضوع : معادله‌های دیفرانسیل – مسائل، تمرین‌ها و غیره (عالی)

موضوع : Differential Equations – Problems, exercices, etc. (Higher)

شماره کتابشناسی ملی: ۴۸۵۸۸۳۸

مهارت حل مساله در معادلات دیفرانسیل معمولی

مولف: مهرداد نجف‌پور

چاپ نخست: ۱۳۹۶

شمارگان: ۲۵۰۰ نسخه

قیمت: ۲۰۰۰۰۰ ریال

مرکز پخش: ۰۹۱۲۶۳۴۵۰۸۸

تقدیم به

آنان که پس از گذراندن این درس، هم‌چنان این
کتاب را در کتاب‌خانه خود دارند !

پیش‌گفتار

بسیاری از قوانین حاکم بر پدیده‌های طبیعی در قالب معادلات دیفرانسیل بیان می‌شوند. معمولا برای مدل‌سازی و تحلیل پدیده‌هایی که در توصیف آن‌ها مقادیر یک یا چند متغیر در ارتباط با مقادیر و تغییرات آن متغیرها بیان شود از معادلات دیفرانسیل استفاده می‌شود. درک مفاهیم و توانایی حل مسائل معادلات دیفرانسیل از ملزومات هندسه، فیزیک، شیمی و رشته‌های مهندسی می‌باشد.

امروزه کتاب‌های بسیاری تحت عنوان Differential Equation چاپ می‌شود که تعدادی از آن‌ها به زبان فارسی هم ترجمه شده‌اند. در مورد کتب فارسی متاسفانه تعداد کتب کنکوری بر تعداد کتب استدلالی غالب است، درصورتی که برای دانش‌جوی سال اول نیاز به کتب تحلیلی و استدلالی به مراتب بیش‌تر از کتب صرفا محاسباتی و نکته‌ای است چرا که اغلب دانش‌جویان در دوران دبیرستان تحت تاثیر فضای مسموم کنکور بوده‌اند و علت عدم موفقیت آن‌ها در امتحانات دروسی چون ریاضی عمومی و معادلات دیفرانسیل استدلال نادقیق و ضعف آن‌ها در مسائل تحلیلی است.

در پایان تشکر می‌کنم از خانم زهره فتحی دانش‌جوی دکتری ریاضی محض دانش‌گاه صنعتی امیرکبیر که زحمت مطالعه و ویرایش کتاب حاضر را کشیدند.

مولف، مدعی خالی از اشکال بودن کتاب حاضر نیست؛ لذا از اساتید، دانش‌جویان و دیگر علاقه‌مندان دعوت می‌شود نظرات خود را به نشانی الکترونیکی مولف ارسال نمایند.

مهرداد نجف‌پور

مهر ۱۳۹۶

mehrdad-n12@aut.ac.ir

@Mehrdad_Najafpour

فهرست مطالب

مقدمه[1]

بسیاری از مسائلی که در آن‌ها تغییرات بسیار کوچک مطرح است با معادلات دیفرانسیل مدل‌سازی و تحلیل می‌شوند. بسته به این که متغیر مورد بحث به یک یا چند متغیر وابسته است، معادله دیفرانسیل نظیر **معمولی** یا **با مشتقات جزئی** نامیده می‌شود. جلد اول این کتاب به معادلات دیفرانسیل معمولی و جلد دوم به معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی اختصاص دارد. در آموزش سنتی معادلات دیفرانسیل، معمولا بخش عمده کتاب به روش‌هایی برای یافتن جواب معادلات دیفرانسیل مختلف اختصاص دارد. از سوی دیگر امروزه هر نوع معادله دیفرانسیل با استفاده از نرم‌افزارهای مختلف به سادگی قابل حل و تحلیل است. در این کتاب سعی بر این بوده که روی‌کردهای زیر در نظر گرفته شوند.

مفهوم‌سازی: در فصول اول و دوم دانش‌جو به این درک می‌رسد که با وجود این که بسیاری از مسائل مهندسی غیرخطی هستند اما سریع‌ترین و به صرفه‌ترین راه‌کار تحلیل خطی مساله است.

الگوسازی: این دیدگاه مد نظر است که به جای ارائه دستورالعمل‌های مختلف برای حل انواع مسائل و حفظی شدن درس، دانش‌جو با الگو برداری از مسائل قبلی و استدلال

[1] از آن جایی که در مورد شیوه جدانویسی و پیوسته‌نویسی اصول دقیق و به اصطلاح ریاضی ”خوش تعریف“ از سوی فرهنگستان محترم زبان و ادبیات فارسی وجود ندارد و شیوه‌نامه‌های املایی موجود بعضا دارای تناقض و سلیقه‌ای می‌باشند، لذا در این کتاب کلیه کلمات مگر اسامی ساده و اسامی خاص تا حد امکان جدا نوشته شده است.

اکتشافی بتواند مساله جدید را حل کند.

دقیق بودن و در عین حال درگیر اثبات نشدن: از آن‌جایی که این کتاب برای نخستین درس معادلات است، تلاش شده اثبات قضایا ارائه نشود اما عموما ایده اثبات قضایا در نهان حل مثال‌های عددی مطرح شده. هم‌چنین مواقعی که لازم بوده برای جلوگیری از ساده انگاری، دقت بیش‌تر به خرج داده شود، اشاره شده که چرا لازم است تامل شود.

همان طور که از عنوان کتاب پیداست، کتابی که در دست دارید نه یک کتاب حل المسائل است و نه یک کتاب مرجع که به صورت کلاسیک قضایا و برهان‌شان را هم‌راه با مثال‌های آن ارائه دهد، بلکه کتابی برای آموزش سریع و تمرین در زمین حل مساله است. مسائل کتاب حاضر با دقت و وسواس از بیش از ۲۰ منبع گزینش و در بخش‌های مختلف کتاب طبقه‌بندی شده‌اند، هر جا که لازم بوده با هدف هدایت ذهن دانش‌جو و ایجاد پلی بین مفاهیم مساله‌هایی طرح و در لابه‌لای سوالات تزریق شده‌اند تا دانش‌جو بین مسائلِ پراکنده رها نشود. پیش‌نهاد اکید می‌شود که هنگام شروع مطالعه هر فصل، تک تک بخش‌های آن را به ترتیب کتاب پیش روید، چرا که:

۱ جهت یادآوری رئوس و نکات هر مبحث و تثبیت آن‌ها در ذهن، در ابتدای هر فصل درس‌نامه‌ای مختصر که برای هر مسائل تقریبا کافی است، قرار دارد. پس از بیان هر قضیه، کاربردهای آن در مثال‌های بعد آن بررسی شده‌اند . این‌ها مواد لازم برای ذهن دانش‌جویی است که می‌خواهد درسی را یاد بگیرد. پیش‌نهاد می‌گردد پس از درک تعاریف و قضایا شروع به حل مثالی که بعد از آن آمده داشته باشید. اگر کار پیش نرفت، چند سطر اول حل را مطالعه نمایید و سپس به تلاشتان برای حل ادامه دهید. اگر بازهم تلاش نافرجام ماند قسمت دیگری از حل را مطالعه کنید و ... .

۲ پس از آموزش درس نوبت به حل مساله می‌رسد. تعدادی مساله که صفت ''سوال'' به آن‌ها داده شده به منظور انسجام بخشیدن به ذهن به جزئی‌ترین شکل ممکن تفکیک شده

و همراه با حل‌شان در قسمت دوم هر فصل آورده شده‌اند، چرا که بنابر گفته جورج پولیا؛ استاد بزرگ آموزش ریاضی ''دانش‌جو می‌تواند برای حل مساله‌ها از کار مستقل و شخصی خود تاجایی که ممکن است استفاده نماید، ولی در صورتی که دانش‌جو را با مساله‌ای که قرار است حل کند تنها بگذاریم و به او کمکی نکنیم، یا این کمک به اندازه کافی نباشد؛ ممکن است اصلا نتواند پیش‌رفت کند؛ و اگر بیش از اندازه به او یاری شود دیگر کاری باقی نمی‌ماند که او انجام دهد.''

۳ پس از تامل کافی روی چند مساله، فکر کردن و دیدن حل آن‌ها نوبت به آن است که دانش‌جو به این باور برسد که خودش توانایی حل مساله را دارد و از پس آن‌ها بر می‌آید، برای این هدف، تعدادی تمرین آورده‌ایم. تمرین‌ها دارای پاسخ در انتهای کتاب هستند، اگر نتوانستید تمرینات را حل کنید، در ابتدا سعی کنید حالت خاصی از مساله را به مساله‌ای که در قسمت مسائل با حل، حل آن را دیده‌اید تبدیل کنید. اگر باز هم مساله دست نخورده باقی ماند لازم است مجددا به بخش‌های قبل برگردید و آن‌قدر روی درس و مثال‌هایش تسلط پیدا کنید تا تمرینات قابل حل شوند. اگر در این مرحله به دنبال دیدن حل تمرینات هستید، نباید انتظار پیش‌رفت از خودتان داشته باشید.

۴ اگر مسابقات ریاضی را به عنوان یک تفریح فکری قلمداد می‌کنید، آخرین بخش هر فصل، یعنی مسائل خلاقانه برای شما جالب خواهند بود. در این قسمت تعدادی سوال تحت عنوان ''مساله'' آمده‌اند، بعضی از آن‌ها ممکن است در وهله اول تکانی نخورند اما پس از ساعتی فکر کردن احتمالا ایده‌هایی به ذهنتان خطور کند که البته ممکن است راه‌گشا و کارآمد نباشند. گاهی اوقات هم پس از ساعت‌ها فکر کردن روی چنین مسائلی لازم است تا چرک‌نویس‌های خود را به کلی دور بریزد و مسیر جدیدی را برای حمله به مساله بیازمایید. چراکه به گفته اردوش، ریاضی‌دان بزرگ؛ مسائلی که ارزش حل کردن دارند با مقاومت در برابر ما ارزش خود را نشان می‌دهند. در مجموع، چه مساله حل شود و یا این‌که معما گونه

گوشه ذهنتان را درگیر کند، مطمئن باشد با گذشت زمان پیش‌رفت قابل توجهی در خود حس خواهید کرد.

۵ سوالات امتحانی چند سال اخیر دانش‌گاه‌های برتر در ضمیمه پایانی کتاب آورده شده‌اند. از آن‌جایی که باور داریم نمونه سوال امتحانی و حل‌شان جایی برای یادگیری نیست، لذا هنگامی که درس را به خوبی فراگرفتید، ترتیب منطقی مطالب و ایده‌های حل مسائل در ذهنتان نقش بست و تعداد قابل توجهی تمرین حل کرده‌اید و آماده‌اید در امتحان شرکت کنید به این بخش مراجعه نمایید. پاسخ امتحانات نیز در انتهای کتاب آمده، چرا که پس از مطالعه کتاب انتظار می‌رود دانش‌جو توانایی حل آن‌ها را داشته باشد. تاکید می‌شود این بخش صرفا برای کاهش استرس و افزایش اعتماد به نفس آمده است.

۱

معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

در آغاز این فصل با توصیف و مدل‌سازی پدیده‌های فیزیکی، انگیزه مطالعه معادلات دیفرانسیل را ایجاد می‌کنیم. منظور از معادله دیفرانسیل، معادله‌ای است که در آن علاوه بر متغیر مستقل x و متغیر وابسته y، مشتقات متغیر وابسته y نیز وجود دارد. در ادامه پس از بیان مقدمات و تعاریف اولیه به روش‌های حل معادلات مرتبه اول می‌پردازیم. نهایتا در پایان فصل با بررسی کاربردی هندسی از معادلات مرتبه اول به تثبیت این مطالب می‌پردازیم.

۱.۱ درس‌نامه

۱.۱.۱ مدل‌سازی به کمک معادلات دیفرانسیل

این فصل را با چند مثال از مدل‌سازی به کمک معادلات دیفرانسیل آغاز می‌کنیم.

مثال ۱.۱.۱. فرض کنید بانکی به سپرده‌گذاران خود با نرخ سالیانه ۱۸ درصد به طور مرکب سود می‌دهد. معادله دیفرانسیلی برای توصیف مقدار سرمایه $c(t)$ در زمان t به دست آورید. فرض کنید سرمایه‌گذار تا زمان t پولی واریز یا برداشت نمی‌کند.

حل: در این دست مسائل که به **مسائل رشد و زوال** معروف هستند، **تغییرات تابع** متناسب مقدار تابع است؛ مثلا در این مثال داریم $\frac{dc(t)}{dt} = \frac{۱۸}{۱۰۰}c(t)$. مساله جمعیت نیز مشابه این مساله است.

مثال ۲.۱.۱. بنابر اصل تبرید نیوتن، تغییرات دمای یک جسم با اختلاف دمای آن جسم و دمای فضایی که در آن قرار دارد متناسب است. فرض کنید دمای جسمی که در هوای $۲۰^\circ C$ قرار دارد در مدت بیست دقیقه از $۱۰۰^\circ C$ به $۶۰^\circ C$ برسد، دمای این جسم پس از چه مدتی به $۳۰^\circ C$ می‌رسد؟

حل: بنابر قانون تبرید نیوتن دمای این جسم دارای مدل $\frac{dT}{dt} = k(T-۲۰)$ است، با توجه به مشاهده این‌که دمای جسم در مدت بیست دقیقه از $۱۰۰^\circ C$ به $۶۰^\circ C$ می‌رسد، مقدار k را پیدا می‌کنیم.

$$\frac{dT}{T-۲۰} = kdt \Longrightarrow \int_{۱۰۰}^{۶۰} \frac{dT}{T-۲۰} = \int_{۰}^{۲۰} kdt \Longrightarrow k = \frac{۱}{۲۰}\ln\frac{۱}{۲},$$

اکنون زمانی که طول می‌کشد تا دمای جسم از $۱۰۰^\circ C$ به $۳۰^\circ C$ برسد را حساب می‌کنیم:

$$\int_{۱۰۰}^{۳۰} \frac{dT}{T-۲۰} = \int_{۰}^{۲۰} \frac{۱}{۲۰}\ln\frac{۱}{۲}dt \Longrightarrow t = ۶۰min.$$

مثال ۳.۱.۱. معادله دیفرانسیلی بیابید که پاسخ آن دسته منحنی‌هایی باشد که طول قطعه قائم بر آن‌ها بین نقطه $p(x,y)$ روی آن و محور xها برابر فاصله نقطه $p(x,y)$ تا مبدا مختصات باشد.

حل: خط قائم بر منحنی مطلوب در نقطه $p(x,y)$ دارای شیب $-\frac{۱}{y'}$ است، اگر این خط محور xها را در نقطه $M(a,۰)$ قطع کند بنابر رابطه شیب خط مقدار a به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\frac{y-۰}{x-a} = -\frac{۱}{y'} \Longrightarrow a = x + yy',$$

اکنون از $\overline{MP} = \overline{OP}$ نتیجه می‌شود $(x+yy'-x)^۲ + (۰-y)^۲ = x^۲ + y^۲$ و از این رابطه معادله دیفرانسیل منحنی مطلوب به صورت $y^۲y'^۲ = x^۲$ به دست می‌آید.

۲.۱.۱ تعاریف اولیه و تغییر متغیرها، مسائل مقدماتی، قضیه وجود و یک‌تایی جواب

تعریف ۴.۱.۱ (مرتبه). بالاترین مرتبه مشتق موجود در یک معادله دیفرانسیل، مرتبه آن معادله نامیده می‌شود.

تعریف ۵.۱.۱ (درجه). بزرگ‌ترین توانِ جمله دارای بیش‌ترین مرتبه مشتق در معادله، درجه آن معادله نامیده می‌شود.

مثال ۶.۱.۱. معادله $x^{۲}y'' + xy' + (x^{۲} - \alpha^{۲})y = ۰$ مرتبه دوم از درجه یک و معادله $x^{۲}y'' - y''' = \sqrt{۱ - y'''}$ مرتبه سوم از درجه دو است چرا که این معادله به صورت $(y''')^{۲} - ۲x^{۲}y'''y'' + y''' + x^{۴}(y'')^{۲} - ۱ = ۰$ مرتب می‌شود و درجه این عبارت نسبت به y''' برابر دو است.

برای بسیاری از معادلات دیفرانسیل ارائه جواب صریح امکان‌پذیر نیست و در مساله مورد نظر تنها خواص جواب و یا توصیف جواب مدنظر است. یا این که اگر بدانیم معادله جواب دارد و این جواب یک‌تا است با روش‌های عددی با هر تقریب دل‌خواه، مطلوب مورد نظر حاصل می‌شود. در دو مثال زیر تنها رفتار جواب بدون حل معادله مدنظر است.

مثال ۷.۱.۱. فرض‌کنید $f(x)$ تابعی پیوسته و مثبت باشد. اگر y جواب معادله دیفرانسیل $y'' = f(x)y$ باشد، نشان دهید yy' تابعی صعودی است.

حل: از آن‌جایی که معادله داده شده مرتبه دوم است و مشتق دوم y در آن ظاهر شده، بنابراین y قطعا دوبار مشتق‌پذیر است. کافی است نشان دهید $(yy')'$ نامنفی است. با مشتق‌گیری داریم:

$$(yy')' = y'^{۲} + yy'' = y'^{۲} + \frac{y''}{f(x)}y'',$$

و عبارت اخیر نامنفی است، چرا که $f(x)$ تابعی مثبت است.

مثال ۸.۱.۱. فرض g تابعی پیوسته و f تابعی دوبار مشتق‌پذیر روی مجموعه اعداد حقیقی باشد که در معادله دیفرانسیل $f''(x) - f'(x)g(x) - f(x) = 0$ صدق می‌کند با فرض این که می‌دانیم $f(x_1) = f(x_2) = 0$، نشان دهید f روی $[x_1, x_2]$ ثابت صفر است.

حل: گیریم f روی $[x_1, x_2]$ ثابت صفر نباشد، پس x_0ای در این بازه موجود است که $f(x_0) \neq 0$. فرض کنید $f(x_0) > 0$ (برای حالت $f(x_0) < 0$، f را به $-f$ تبدیل کنید تا مساله مانند همین حالت شود)؛ چون f بر $[x_1, x_2]$ پیوسته است و $f(x_1) = f(x_2) = 0 < f(x_0)$، تابع f در (x_1, x_2) دارای نقطه ماکسیمم موضعی c است. چون f بر (x_1, x_2) مشتق‌پذیر است، بنابر آزمون‌های مشتق $f'(c) = 0$ و $f''(c) < 0$ است، یعنی $f''(c) - f'(c)g(c) - f(c) < 0$ ، که این تناقض است. پس f روی $[x_1, x_2]$ ثابت صفر است.

اکنون به مساله تغییر متغیر و بازنویسی معادله برحسب متغیرهای جدید می‌پردازیم. تغییر متغیر و بازنویسی معادله از این جهت حائز اهمیت است که در بسیاری از مواقع می‌توان یک معادله با ظاهری نامانوس را به معادله‌ای شناخته شده تبدیل کرد. از آن‌جایی که فرآیند تغییر متغیر تنها به اطلاعاتی در حد ریاضی عمومی نیازمند است، این بخش را در این قسمت بدون در نظر گرفتن روش حل معادله مطرح می‌کنیم.

فرض کنید $y = f(x)$ جوابی برای معادله دیفرانسیل $F(x, y, y', .., y^{(n)}) = 0$ باشد. متغیر x متغیر مستقل و متغیر y متغیر وابسته نامیده می‌شود. تغییر متغیر ممکن است تنها در متغیر مستقل، تنها در متغیر وابسته و یا همزمان در متغیر مستقل و وابسته صورت گیرد.

حالت اول: تغییر متغیر در متغیر مستقل

مثال ۹.۱.۱. معادله $3x^3y''' + 4x^2y'' + 5xy' - 2y = 0$ را بر اساس تغییر متغیر $x = e^t$ بازنویسی کنید.

حل: در این مثال تنها متغیر مستقل تغییر کرده، لذا کافی است مشتقات متغیر وابسته

y را نسبت به متغیر مستقل قدیم یعنی x بر حسب مشتقات y نسبت به متغیر مستقل جدید یعنی x به دست آوریم، با فرض $y' = \frac{dy}{dx}$ و $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$ مساله را حل می‌کنیم. دقت کنید چون $x = e^t$ پس $x = e^t = \frac{dx}{dt}$، اکنون با مشتق‌گیری زنجیری داریم:

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = xy',$$

$$\begin{aligned}\ddot{y} = \frac{d\dot{y}}{dt} &= \frac{d}{dt}(xy') \\ &= \frac{d}{dx}(xy')\frac{dx}{dt} \\ &= (y' + xy'')x = x^۲y'' + xy',\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dddot{y} = \frac{d\ddot{y}}{dt} &= \frac{d}{dt}(x^۲y'' + xy') \\ &= \frac{d}{dx}(x^۲y'' + xy')\frac{dx}{dt} \\ &= (۲xy'' + x^۲y''' + y' + xy'')x = x^۳y''' + ۳x^۲y'' + xy',\end{aligned}$$

از محاسبات بالا نتیجه می‌شود $\dot{y} = xy'$، $x^۲y'' = \ddot{y} - \dot{y}$ و $x^۳y''' = \dddot{y} - ۳\ddot{y} + ۲\dot{y}$، پس معادله با متغیر جدید به صورت زیر است:

$$۳(\dddot{y} - ۳\ddot{y} + ۲\dot{y}) + ۴(\ddot{y} - \dot{y}) + ۵(\dot{y}) - ۲y = ۳\dddot{y} - ۱۱\ddot{y} - ۹\dot{y} - ۲y = ۰.$$

حالت دوم: تغییر متغیر در متغیر وابسته

مثال ۱۰.۱.۱. معادله دیفرانسیل زیر را بر اساس تغییر متغیر $y = \frac{۱}{\sin x}\frac{u'(x)}{u(x)}$ بازنویسی کنید.

$$y' + (۲ + \cot x)y + (\sin x)y^۲ + \frac{۱}{\sin x} = ۰.$$

حل: در این مساله تنها متغیر وابسته y تغییر کرده، با مشتق‌گیری از تغییر متغیر داده شده $y' = \frac{۱}{u\sin x}(u'' - \frac{u'^{۲}}{u} - u'\cot x)$ به دست می‌آید و با جای‌گذاری در معادله داده شده نتیجه می‌شود $u'' + ۲u' + u = ۰$. (چرا؟)

حالت سوم: تغییر متغیر هم‌زمان در متغیر مستقل و وابسته

مثال ۱۱.۱.۱. معادله $y' = \frac{(x+y)^{۲} - (x-y)}{(x-y) + (x+y)^{۲}}$ را بر اساس تغییر متغیرهای $u = x+y$ و $v = x - y$ بازنویسی کنید.

حل: در این مثال متغیرهای مستقل و وابسته تواما تغییر می‌کنند، یعنی معادله $F(x, y, y') = ۰$ به صورت $G(u, v, v') = ۰$ تغییر می‌کند. از تغییر متغیرهای داده شده داریم:

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \frac{۱}{۲}(u + v) \\ y = \frac{۱}{۲}(u - v) \end{cases}$$

پس مشتق نسبت به متغیرهای قدیم بر حسب مشتق نسبت به متغیرهای جدید برابر است با:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{du - dv}{du + dv} = \frac{۱ - \frac{dv}{du}}{۱ + \frac{dv}{du}} = \frac{۱ - v'}{۱ + v'},$$

اکنون با جای‌گذاری در معادله نتیجه می‌شود $\frac{u^{۲} - v}{v + u^{۲}} = \frac{۱ - v'}{۱ + v'}$، این تساوی نیز نتیجه می‌دهد $v' = \frac{v}{u^{۲}}$.

توجه کنید که راه حل

$$\begin{aligned} y' = \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dv}\frac{dv}{du}\frac{du}{dx} \\ &= \frac{۱}{\frac{dv}{dy}} \times v' \times \frac{du}{dx} = \frac{۱}{-۱}v' \times ۱ = -v', \end{aligned}$$

غلط است، چرا که u و v تواما به x و y وابسته هستند، یعنی توسط نگاشتی مانند $\varphi : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}^۲$، (x,y) به (u,v) نگاشته می‌شود. در این حالت تنها می‌توان گفت $dxdy = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}dudv$، نه $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv}\frac{dv}{du}\frac{du}{dx}$.

مثال ۱۲.۱.۱. معادله دیفرانسیل $۴x^۲y'' - ۸xy' + ۹(x^۳ - \frac{۵}{۴})y = ۰$ را بر اساس تغییر متغیرهای $z = x\sqrt{x}$ و $y = x\sqrt{x}u$ بازنویسی کنید.

حل: تغییر متغیرهای $z = x\sqrt{x}$ و $y = x\sqrt{x}u$ نشان می‌دهد هم متغیر مستقل تغییر کرده هم متغیر وابسته. به عبارت دیگر معادله‌ای که جواب آن $y(x)$ است قرار است به معادله‌ای با جواب $u(z)$ تبدیل شود، بنابراین لازم است مشتقات y نسبت به x را بر حسب مشتقات u نسبت به z به دست آوریم:

$$\begin{aligned}
y' = \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(zu) \\
&= \frac{dz}{dx}u + z\frac{du}{dx} \\
&= \frac{dz}{dx}u + z\frac{du}{dz}\frac{dz}{dx} \\
&= (u + z\frac{du}{dz})\frac{dz}{dx} \\
&= (u + z\frac{du}{dz})(\frac{۳}{۲}\sqrt{x}) = \frac{۳}{۲}z^{\frac{۴}{۳}}u'_z + \frac{۳}{۲}z^{\frac{۱}{۳}}u,
\end{aligned}$$

هم‌چنین

$$\begin{aligned}
y'' = \frac{dy'}{dx} &= \frac{dy'}{dz}\frac{dz}{dx} \\
&= \frac{d}{dz}(\frac{۳}{۲}z^{\frac{۴}{۳}}u'_z + \frac{۳}{۲}z^{\frac{۱}{۳}}u)\frac{dz}{dx} \\
&= (\frac{۳}{۲}z^{\frac{۴}{۳}}u''_z + \frac{۷}{۲}z^{\frac{۱}{۳}}u'_z + \frac{۱}{۲}z^{-\frac{۲}{۳}}u)(\frac{۳}{۲}z^{\frac{۱}{۳}}) \\
&= \frac{۹}{۴}z^{\frac{۵}{۳}}u''_z + \frac{۲۱}{۴}z^{\frac{۲}{۳}}u'_z + \frac{۳}{۴}z^{-\frac{۲}{۳}}u,
\end{aligned}$$

با جای‌گذاری عبارات به دست آمده در معادله اصلی نتیجه می‌شود:

$$4(z^2)^2\left(\frac{1}{4z}u''_z + \frac{1}{z^2}u'_z - \frac{1}{4z^3}u\right) + \left(z^2 - \frac{5}{4}\right)zu = 0,$$

معادله اخیر نیز به صورت $z^2u''_z + zu'_z + (z^2 - \frac{9}{4})u = 0$ مرتب می‌شود. در فصل سوم خواهیم دید که این معادله، معادله بسل از مرتبه $\frac{3}{2}$ نامیده می‌شود.

قضیه وجود و یک‌تایی جواب معادلات مرتبه اول

معادله دیفرانسیل $y' = f(x,y)$ را با شرط اولیه $y(x_0) = y_0$ در نظر بگیرید. فرض کنید روی مستطیل $[a,b]\times[c,d]$ توابع f و $\frac{\partial f}{\partial x}$ پیوسته و کران‌دار باشند. در این صورت شعاع r موجود است که معادله مذکور به همراه شرط اولیه داده شده، در بازه $(x_0 - r, x_0 + r)$ دارای جواب یک‌تا باشد.

مثال ۱۳.۱.۱. نشان دهید $y_1(t) = 1 - t$ و $y_2(t) = -\frac{t^2}{4}$ جواب‌هایی برای معادله

$$y' = \frac{-t + (t^2 + 4y)^{\frac{1}{2}}}{2}, y(2) = -1,$$

هستند. دامنه اعتبار این جواب‌ها کجاست؟ چرا وجود دو جواب، قضیه یک‌تایی جواب را نقض نمی‌کند؟

حل: تابع $y_1(t) = 1 - t$ در معادله صدق می‌کند، چرا که $y_1(2) = -1$ و $y'_1(t) = -1$، پس:

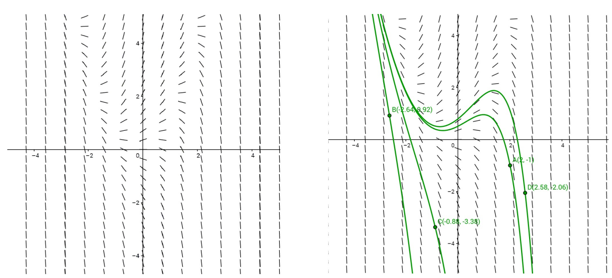
$$\frac{-t + (t^2 + 4y_1)^{\frac{1}{2}}}{2} = \frac{-t + (t^2 + 4 - 4t)^{\frac{1}{2}}}{2} = \frac{-t + t - 2}{2} = -1 = y'_1(t),$$

تابع $y_2(t) = -\frac{t^2}{4}$ نیز در معادله صدق می‌کند، چرا که $y_2(2) = -1$ و $y'_2(t) = -\frac{t}{2}$، پس:

$$\frac{-t + (t^2 + 4y_2)^{\frac{1}{2}}}{2} = \frac{-t + (t^2 - t^2)^{\frac{1}{2}}}{2} = -\frac{t}{2} = y'_2(t),$$

همچنین روشن است که دامنه تعریف هر دو جواب سرتاسر اعداد حقیقی است. با فرض $y' = f(t,y)$ باید توجه کرد که $t = ۲$ در محدوده پیوستگی $\frac{\partial f}{\partial t}$ نیست، زیرا $\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{-۱ + \frac{t}{\sqrt{t^۲ + ۴y}}}{۲}$ و $۰ = ۴ - ۴ = (t^۲ + ۴y)|_{t=۲}$ مخرج را صفر می‌کند، بنابر این قضیه یک‌تایی جواب نقض نمی‌شود.

یک روش برای تحلیل معادله $y' = f(x,y)$ بررسی میدانِ شیب این معادله است. منظور از میدان شیب، رسم تمام جواب‌های معادله در صفحه است. برای رسم میدان شیب $y' = f(x,y)$ کافی برای مقادیر مختلف $y' = m$ دسته منحنی $f(x,y) = m$ را رسم کنیم و روی آن‌ها شیب m قرار دهیم.



شکل ۱.۱: برای $y' = y - x^۲$ در سمت چپ میدان شیب و در سمت راست میدان شیب به همراه چند جواب معادله رسم شده

۳.۱.۱ معادلات دیفرانسیل جدایی‌پذیر

تعریف ۱۴.۱.۱. معادله دیفرانسیل $M(x,y)dx + N(x,y)dy = ۰$ را جدایی‌پذیر گوییم، هرگاه متغیرهای x و y در عبارت‌های M و N جدا شوند. یعنی بتوان نوشت $M(x,y) = f_۱(x)g_۱(y)$ و $N(x,y) = f_۲(x)g_۲(y)$.

روش حل معادلات جدایی‌پذیر

معادله جدایی‌پذیر $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ را در نظر بگیرید. برای حل با بازنویسی معادله به صورت $f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0$ و تفکیک آن به معادله $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx = -\frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy$ می‌رسیم که با انتگرال‌گیری از دو طرف جواب معادله به دست می‌آید.

مثال ۱۵.۱.۱. معادله دیفرانسیل $y' = y^2$ را حل کنید.

حل: با نوشتن $y' = \frac{dy}{dx}$، معادله داده شده به صورت $dx = \frac{dy}{y^2}$ در می‌آید که معادله‌ای جدایی‌پذیر است و دارای جواب زیر می‌باشد،

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int dx \Longrightarrow -\frac{1}{y} = x + c \Rightarrow y = -\frac{1}{x+c}.$$

مثال ۱۶.۱.۱. معادله دیفرانسیل $y' = e^{x+y}$ را حل کنید.

حل: معادله داده شده به صورت $e^x dx = \frac{dy}{e^y}$ نوشته می‌شود که معادله‌ای جدایی‌پذیر است و دارای جواب زیر می‌باشد،

$$\int \frac{dy}{e^y} = \int e^x dx \Longrightarrow -e^{-y} = e^x + c \Rightarrow y = -\ln(-e^x + c).$$

گاهی اوقات معادله دیفرانسیل $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ جدایی‌پذیر نیست، اما با تغییر متغیر $u = u(x,y)$ به یک معادله جدایی‌پذیر تبدیل می‌شود.

مثال ۱۷.۱.۱. معادله دیفرانسیل $y' = (x+y)^2$ را حل کنید.

حل: با تغییر متغیر $u = x + y$، معادله داده شده به صورت $u' - 1 = u^2$ در می‌آید که معادله‌ای جدایی‌پذیر است و دارای جواب زیر می‌باشد،

$$\frac{du}{1+u^2} = \int dx \Longrightarrow \tan^{-1} u = x+c \Rightarrow u = \tan(x+c) \Rightarrow y = \tan(x+c) - x.$$

نتیجه ۱۸.۱.۱. *معادله دیفرانسیل $y' = f(ax+by+c)$ با تغییر متغیر $u = ax+by+c$ به معادله‌ای جدایی‌پذیر تبدیل خواهد شد.*

مثال ۱۹.۱.۱. معادله دیفرانسیل $y(xy+1)dx + x(1+xy+x^2y^2)dy = 0$ را به کمک تغییر متغیر $u = xy$ حل کنید.

حل: از $u = xy$ نتیجه می‌شود $y = \frac{u}{x}$، پس $y' = \frac{xu'-u}{x^2}$. معادله داده شده به صورت $y' = -\frac{y(xy+1)}{x(1+xy+x^2y^2)}$ مرتب می‌شود که با متغیر جدید به صورت زیر در می‌آید:

$$\frac{xu'-u}{x^2} = -\frac{u(u+1)}{x^2(1+u+u^2)},$$

از تساوی اخیر نتیجه می‌شود $xu' = \frac{u^3}{1+u+u^2}$، لذا با انتگرال‌گیری داریم:

$$\int \frac{1+u+u^2}{u^3} = \int \frac{dx}{x}$$

$$-\frac{1}{2}u^{-2} - u^{-1} + \ln u = \ln x + c,$$

با جای‌گذاری $u = xy$ در تساوی اخیر نتیجه می‌شود به جواب $\ln y - \frac{1}{2x^2y^2} - \frac{1}{xy} = c$ می‌رسیم.

۴.۱.۱ معادلات دیفرانسیل هم‌گن

تعریف ۲۰.۱.۱. معادله دیفرانسیل $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ را هم‌گن گوییم، هرگاه توابع M و N هر دو هم‌گن و از یک درجه باشند. یعنی برای هر ضریب حقیقی λ داشته باشیم $M(\lambda x, \lambda y) = \lambda^d M(x,y)$ و $N(\lambda x, \lambda y) = \lambda^d N(x,y)$.

روش حل معادلات همگن

با تغییر متغیر $u(x,y) = \frac{y}{x}$ یعنی $y = xu$ معادله همگن

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = \circ,$$

به معادله‌ای جدایی‌پذیر تبدیل خواهد شد. در حین انجام محاسبات دقت کنید که $y' = \frac{dy}{dx}$ و $u' := \frac{du}{dx}$ بنابراین:

$$y' = \frac{d}{dx}(xu) = u + xu'.$$

مثال ۲۱.۱.۱. معادله دیفرانسیل $y' = \frac{y}{x + \sqrt{xy}}$ را حل کنید.

حل: صورت و مخرج y' هر دو همگن از درجه یک هستند، لذا معادله همگن است. با تغییر متغیر $y = xu$ و $y' = u + xu'$ داریم:

$$u + xu' = \frac{xu}{x + \sqrt{xxu}} = \frac{u}{۱ + \sqrt{u}},$$

تساوی بالا به صورت $\frac{dx}{x} + \frac{u\sqrt{u}}{۱ + \sqrt{u}}du = \circ$ مرتب می‌شود که معادله‌ای جدایی‌پذیر است و دارای جواب:

$$\ln x - ۲u^{-\frac{۱}{۲}} + \ln u = \circ,$$

لذا معادله داده شده دارای جواب $\ln y = c + ۲\sqrt{\frac{x}{y}}$ می‌باشد.

تذکر ۲۲.۱.۱. معادله دیفرانسیل $y' = f\left(\frac{ax + by + c}{a'x + b'y + c'}\right)$ را در نظر بگیرید. با نام‌گذاری خطوط $ax + by + c = \circ$ و $a'x + b'y + c' = \circ$ به l و l' دو حالت پیش می‌آید:

الف) دو خط l و l' موازی هستند: در این صورت با تغییر متغیر $u = ax + by$ معادله بالا به معادله‌ای همگن تبدیل خواهد شد.

ب) دو خط l و l' متقاطع هستند: در این صورت با تغییر متغیرهای $X = x + x_0$ و $Y = y + y_0$ که نقطه (x_0, y_0) نقطه تلاقی دو خط l و l' است، معادله بالا به معادله‌ای همگن تبدیل خواهد شد.

مثال ۲۳.۱.۱. معادله دیفرانسیل $y' = \dfrac{x+y-3}{2x+y-4}$ را حل کنید.

حل: دو خط $x+y-3=0$ و $2x+y-4=0$ یک‌دیگر را در $(1,2)$ قطع می‌کنند. پس تغییر متغیرهای $x = X + 1$ و $y = Y + 3$ کارآمد است. با این تغییر متغیرها به معادله همگن $Y' = \dfrac{X+Y}{2X+Y}$ می‌رسیم که با فرض $Y = Xu$ داریم:

$$u + Xu' = \frac{X + Xu}{2X + Xu},$$

با مرتب‌سازی تساوی بالا به معادله جدایی‌پذیر $\dfrac{dX}{X} = -\dfrac{u+2}{u^2+u-1}du$ می‌رسیم که دارای جواب

$$X = e^{-(\frac{1}{2}\ln(u^2+u-1)-\frac{3\sqrt{5}}{5}\tanh^{-1}(\frac{\sqrt{5}}{5}(2u+1)))},$$

است، پس

$$x = e^{-(\frac{1}{2}\ln((\frac{y-2}{x-1})^2+\frac{y-2}{x-1}-1)-\frac{3\sqrt{5}}{5}\tanh^{-1}(\frac{\sqrt{5}}{5}(2\frac{y-2}{x-1}+1)))} + 1.$$

مثال ۲۴.۱.۱. معادله $y' = \dfrac{x^2+y^2+2}{x^2+y^2-4}\dfrac{x}{y}$ را حل کنید.

حل: ثابت‌های ۲ و ۴- در صورت و مخرج مزاحم همگنی معادله هستند. با در نظر گرفتن $x^2+y^2+2 = X+Y$ و $x^2+y^2-4 = X-Y$ می‌توان حدس زد تغییر متغیرهای $x^2 = X+1$ و $y^2 = Y-3$ کارآمد است. با این تغییر متغیرها

$$\frac{dY}{dX} = \frac{2x\,dx}{2y\,dy} = (\frac{y}{x})\frac{dy}{dx},$$

لذا معادله داده شده به صورت

$$\frac{x}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{X+Y}{X-Y}\frac{x}{y},$$

در می‌آید که با حذف $\frac{x}{y}$ به معادله همگن $\frac{dY}{dX} = \frac{X+Y}{X-Y}$ می‌رسیم. با تغییر متغیر $Y = Xu$ و $Y' = u + Xu'$ داریم:

$$u + Xu' = \frac{X + Xu}{X - Xu} = \frac{۱ + u}{۱ - u},$$

تساوی بالا به صورت $Xu' = \frac{۱ + u^۲}{۱ - u}$ مرتب می‌شود که معادله‌ای جدایی‌پذیر است و دارای جواب:

$$\tan^{-۱} u - \frac{۱}{۲}\ln(۱ + u^۲) = \ln X + c,$$

لذا معادله داده شده دارای جواب

$$\tan^{-۱} \frac{y^۲ + ۳}{x^۲ - ۱} - \frac{۱}{۲}\ln(۱ + (\frac{y^۲ + ۳}{x^۲ - ۱})^۲) = \ln(x^۲ - ۱) + c,$$

می‌باشد.

۵.۱.۱ معادلات دیفرانسیل کامل

تعریف ۲۵.۱.۱. فرض کنید مشتقات جزئی تابع $u : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}$ موجود باشند، در این صورت دیفرانسیل کامل این تابع را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy.$$

مثال ۲۶.۱.۱. دیفرانسیل کامل تابع $u = \sin(xy) + \sin ۵x + \cos ۷y$ را به دست آورید.

حل: بنابر تعریف دیفرانسیل کامل، داریم:

$$\begin{aligned} du &= \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy \\ &= (y\cos(xy) + ۵\cos ۵x)dx + (x\cos(xy) - ۷\sin ۷y)dy. \end{aligned}$$

تعریف ۲۷.۱.۱. معادله دیفرانسیل $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ را کامل می‌نامیم، هرگاه تابع مشتق‌پذیر $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ موجود باشد که $du = M(x,y)dx + N(x,y)dy$. در این حالت $u(x,y)$ را تابع پتانسیل $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ می‌نامند. روشن است که جواب عمومی معادله $M(x,y)dx+N(x,y)dy = 0$ به صورت $u(x,y) = c$ خواهد بود. (چرا؟)

قضیه ۲۸.۱.۱. *فرض کنید توابع $M, N : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ در ناحیه بدون حفره U دارای مشتقات جزئی باشند، در این صورت معادله دیفرانسیل $M(x,y)dx+N(x,y)dy = 0$ کامل است، اگر و تنها اگر $M_y = N_x$. در درس معادلات دیفرانسیل معمولی غالبا ناحیه U بدون حفره است.*

مثال ۲۹.۱.۱. نشان دهید معادله دیفرانسیل

$$(e^x \sin y - 2y \sin x)dx + (e^x \cos y + 2 \cos x)dy = 0,$$

کامل است.

حل: با مشتق‌گیری جزئی داریم:

$$\begin{aligned} M_y &= \frac{\partial}{\partial y}(e^x \sin y - 2y \sin x) \\ &= e^x \cos y - 2 \sin x, \\ N_x &= \frac{\partial}{\partial x}(e^x \cos y + 2 \cos x) \\ &= e^x \cos y - 2 \sin x, \end{aligned}$$

چون دامنه تعریف M و N کل صفحه $\mathbb{R}^2$ و فاقد حفره است. تساوی $M_y = N_x$ کامل بودن معادله را نتیجه می‌دهد.

روش حل معادلات دیفرانسیل کامل

معادله دیفرانسیل کامل $M(x,y)dx + N(x,y)dy = ۰$ را در نظر بگیرید، به دنبال تابعی هستیم که $du = M(x,y)dx + N(x,y)dy$. در این صورت جواب عمومی معادله مذکور $u(x,y) = c$ است. از کامل بودن معادله نتیجه می‌شود تابع u چنان موجود است که $\frac{\partial u}{\partial x} = M(x,y)$. با انتگرال‌گیری از دو طرف این رابطه نسبت به x نتیجه می‌شود $u(x,y) = \int M(x,y)dx + c(y)$ ♣ دقت کنید که چون نسبت متغیر x انتگرال گرفته‌ایم، ثابت انتگرال‌گیری می‌تواند هر تابعی برحسب y باشد، از این رو $c(y)$ نوشتیم. اکنون چون معادله کامل است باید $\frac{\partial}{\partial y}(\int M(x,y)dx + c(y)) = N(x,y)$، از این تساوی به سادگی $c(y)$ به دست می‌آید.

مثال ۳۰.۱.۱. معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$(۶x^۵y^۳ + ۴x^۳y^۵)dx + (۳x^۶y^۲ + ۵x^۴y^۴)dy = ۰.$$

حل: با مشتق‌گیری جزئی داریم:

$$\begin{aligned} M_y &= \frac{\partial}{\partial y}(۶x^۵y^۳ + ۴x^۳y^۵) \\ &= ۱۸x^۵y^۲ + ۲۰x^۳y^۴, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_x &= \frac{\partial}{\partial x}(۳x^۶y^۲ + ۵x^۴y^۴) \\ &= ۱۸x^۵y^۲ + ۲۰x^۳y^۴, \end{aligned}$$

چون دامنه تعریف M و N کل صفحه $\mathbb{R}^۲$ و فاقد حفره است. تساوی $M_y = N_x$ کامل بودن معادله را نتیجه می‌دهد اکنون فرض کنید $u(x,y) = c$ جواب معادله باشد، در این

صورت $(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) = (۶x^۵y^۳ + ۴x^۳y^۵, ۳x^۶y^۲ + ۵x^۴y^۴)$. با انتگرال‌گیری نسبت به x از $\frac{\partial u}{\partial x} = ۶x^۵y^۳ + ۴x^۳y^۵$ داریم $u(x, y) = x^۶y^۳ + x^۴y^۵ + c(y)$. حال اگر از $u(x, y) = x^۶y^۳ + x^۴y^۵ + c(y)$ نسبت به y مشتق بگیریم و برابر $۳x^۶y^۲ + ۵x^۴y^۴$ قرار دهیم، نتیجه می‌شود $c'(y) = ۰$. لذا $c(y) = c$، بنابراین جواب معادله داده شده به صورت زیر است:

$$u(x, y) = x^۶y^۳ + x^۴y^۵ = c.$$

مثال ۳۱.۱.۱. معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$(ye^{xy} \cos ۲x - ۲e^{xy} \sin ۲x + ۲x)dx + (xe^{xy} \cos ۲x - ۳)dy = ۰.$$

حل: با مشتق‌گیری جزئی داریم:

$$\begin{aligned} M_y &= \frac{\partial}{\partial y}(ye^{xy} \cos ۲x - ۲e^{xy} \sin ۲x + ۲x) \\ &= e^{xy} \cos ۲x + xye^{xy} \cos ۲x - ۲xe^{xy} \sin ۲x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_x &= \frac{\partial}{\partial x}(xe^{xy} \cos ۲x - ۳) \\ &= e^{xy} \cos ۲x + xye^{xy} \cos ۲x - ۲xe^{xy} \sin ۲x, \end{aligned}$$

چون دامنه تعریف M و N کل صفحه $\mathbb{R}^۲$ و فاقد حفره است، تساوی $M_y = N_x$ کامل بودن معادله را نتیجه می‌دهد. اکنون فرض کنید $u(x, y) = c$ جواب معادله باشد، در این صورت $(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) = (ye^{xy} \cos ۲x - ۲e^{xy} \sin ۲x + ۲x, xe^{xy} \cos ۲x - ۳)$. انتگرال‌گیری نسبت به y از معادله $\frac{\partial u}{\partial y} = xe^{xy} \cos ۲x - ۳$ نتیجه می‌دهد $u(x, y) = e^{xy} \cos ۲x - ۳y + c(x)$. حال اگر از $u(x, y) = e^{xy} \cos ۲x - ۳y + c(x)$ نسبت به x مشتق بگیریم و برابر $ye^{xy} \cos ۲x - ۲e^{xy} \sin ۲x + ۲x$ قرار دهیم، نتیجه می‌شود

$c'(x) = ۲x$. لذا $c(x) = x^۲$، بنابراین $u(x,y) = e^{xy}\cos ۲x - ۳y + x^۲ = c$ جواب معادله داده شده است.

در بیش‌تر مواقع معادله دیفرانسیل $M(x,y)dx + N(x,y)dy = ۰$ کامل نیست، اما تابعی چون $F(x,y)$ چنان موجود است که معادله دیفرانسیل $FMdx+FNdy = ۰$ کامل باشد. چنین تابع F عامل انتگرال‌ساز برای معادله $M(x,y)dx+N(x,y)dy = ۰$ نامیده می‌شود. به علاوه اگر $u(x,y) = c$ جوابی برای معادله $FMdx + FNdy = ۰$ باشد، در این صورت $u(x,y) = c$ جوابی برای $Mdx + Ndy = ۰$ نیز می‌باشد، چرا که F ناصفر است.

مثال ۳۲.۱.۱. نشان دهید $F(x,y) = \tan x$ یک عامل انتگرال‌ساز برای معادله دیفرانسیل زیر می‌باشد.

$$(۳\tan x - ۲\cos y)\sec^۲ x dx + \tan x \sin y dy = ۰.$$

حل: با ضرب $F(x,y) = \tan x$ در M و N و مشتق‌گیری جزئی داریم:

$$\begin{aligned}
(FM)_y &= \frac{\partial}{\partial y}(\tan x(۳\tan x - ۲\cos y)\sec^۲ x)\\
&= ۲\tan x \sin y \sec^۲ x,\\
(FN)_x &= \frac{\partial}{\partial x}(\tan x \tan x \sin y)\\
&= ۲\tan x \sin y \sec^۲ x,
\end{aligned}$$

چون دامنه تعریف M و N کل صفحه $\mathbb{R}^۲$ و فاقد حفره است. $(FM)_y = (FN)_x$ نشان می‌دهد $F(x,y) = \tan x$ عامل انتگرال‌سازی برای معادله است.

مثال ۳۳.۱.۱. مقادیر α و β را چنان بیابید که $F(x,y) = x^\alpha y^\beta$ عامل انتگرال‌سازی برای معادله دیفرانسیل $y(x^۳ - y)dx - x(x^۳ + y)dy = ۰$ باشد. سپس این معادله را حل کنید.

حل: با ضرب $F(x,y)=x^{\alpha}y^{\beta}$ در M و N و مشتق‌گیری جزئی داریم:

$$\begin{aligned}(FM)_y &= \frac{\partial}{\partial y}(x^{\alpha+3}y^{\beta+1}-x^{\alpha}y^{\beta+2})\\ &= (\beta+1)x^{\alpha+3}y^{\beta}-(\beta+2)x^{\alpha}y^{\beta+1},\\ (FN)_x &= \frac{\partial}{\partial x}(-x^{\alpha+4}y^{\beta}-x^{\alpha+1}y^{\beta+1})\\ &= -(\alpha+4)x^{\alpha+3}y^{\beta}-(\alpha+1)x^{\alpha}y^{\beta+1},\end{aligned}$$

شرط $(FM)_y=(FN)_x$ ایجاب می‌کند

$$(\beta+1)x^{\alpha+3}y^{\beta}-(\beta+2)x^{\alpha}y^{\beta+1}=-(\alpha+4)x^{\alpha+3}y^{\beta}-(\alpha+1)x^{\alpha}y^{\beta+1},$$

دستگاه بالا دارای جواب $\alpha=-2$ و $\beta=-3$ می‌باشد، پس $F(x,y)=x^{-2}y^{-3}$ عامل انتگرال‌سازی برای معادله داده شده می‌باشد. با ضرب عامل انتگرال‌ساز در معادله به معادله $(\frac{x}{y^2}-\frac{1}{x^2y})dx-(\frac{x^2}{y^3}+\frac{1}{xy^2})dy=0$ می‌رسیم. اکنون فرض کنید $u(x,y)=c$ جواب معادله باشد، در این صورت $(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y})=(\frac{x}{y^2}-\frac{1}{x^2y},-(\frac{x^2}{y^3}+\frac{1}{xy^2}))$. انتگرال‌گیری نسبت به x از معادله $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{y^2}-\frac{1}{x^2y}$ نتیجه می‌دهد $u(x,y)=\frac{x^2}{2y^2}+\frac{1}{xy}+c(y)$. حال اگر از $u(x,y)=\frac{x^2}{2y^2}+\frac{1}{xy}+c(y)$ نسبت به y مشتق بگیریم و برابر $-(\frac{x^2}{y^3}+\frac{1}{xy^2})$ قرار دهیم، نتیجه می‌شود $c'(y)=0$. لذا $c(y)=c$، بنابراین $u(x,y)=\frac{x^2}{2y^2}+\frac{1}{xy}=c$ جواب معادله داده شده است.

اکنون سوالی که در این‌جا مطرح می‌شود این است که چه‌طور برای یک معادله می‌توان عامل انتگرال‌ساز پیدا کرد؟ پاسخ به این سوال در حالت کلی امکان‌پذیر نیست. فرض کنیم F یک عامل انتگرال‌ساز برای معادله $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ باشد، بیاییم

ببینیم عامل انتگرال‌ساز چه شرایطی باید داشته باشد.

$$
\begin{aligned}
&(FM)_y = (FN)_x \\
&\Rightarrow F_yM + FM_y = F_xN + FN_x \\
&\Rightarrow FM_y - FN_x = F_xN - F_yM \\
&\Rightarrow M_y - N_x = \frac{F_x}{F}N - \frac{F_y}{F}M \\
&\qquad = N\frac{\partial}{\partial x}(\ln F) - M\frac{\partial}{\partial y}(\ln F),
\end{aligned}
$$

اکنون فرض کنید عامل انتگرال‌ساز F تابعی از $z = z(x,y)$ باشد، در این صورت عبارت بالا برابر است با:

$$
\begin{aligned}
&= N\frac{\partial}{\partial x}(\ln F(z)) - M\frac{\partial}{\partial y}(\ln F(z)) \\
&= Nz_x\frac{F'}{F} - Mz_y\frac{F'}{F},
\end{aligned}
$$

و این یعنی $\frac{M_y - N_x}{Nz_x - Mz_y} = \frac{F'}{F}$. رابطه اخیر در بسیاری از موارد مشخص می‌کند عامل انتگرال‌ساز چه وضعیتی باید داشته باشد. چرا که اولا $f(z) = \frac{\partial}{\partial z}(\ln F)$ تنها تابعی از z می‌شود و ثانیا عامل انتگرال‌سازی به شکل زیر قابل ارائه است:

$$
F(z) = e^{\int f(z)dz}.
$$

در ادامه به بررسی چند حالت خاص می‌پردازیم:

پیدا کردن عامل انتگرال‌ساز

به حالات خاص زیر توجه کنید:

★ اگر F تنها تابعی از x باشد، در این صورت $z_y = 0$. در نتیجه اگر $\dfrac{M_y - N_x}{N}$ تنها تابعی از x مانند $f(x)$ باشد، آن‌گاه $f(x) = \dfrac{M_y - N_x}{N} = z_x \dfrac{F'}{F} = \dfrac{d}{dx}(\ln F)$ و در نتیجه عامل انتگرال‌ساز برابر است با:

$$F(x,y) = e^{\int f(x)dx}.$$

★ اگر F تنها تابعی از y باشد، در این صورت $z_x = 0$. در نتیجه اگر $\dfrac{M_y - N_x}{M}$ تنها تابعی از y مانند $g(y)$ باشد، آن‌گاه $g(y) = \dfrac{M_y - N_x}{M} = -z_y \dfrac{F'}{F} = \dfrac{d}{dy}(\ln F)$ و در نتیجه عامل انتگرال‌ساز برابر است با:

$$F(x,y) = e^{-\int g(y)dy}.$$

★ اگر F تابعی از $z = xy$ باشد، در این صورت $z_x = y$ و $z_y = x$. در نتیجه اگر $\dfrac{M_y - N_x}{yN - xM}$ تنها تابعی از xy مانند $h(xy)$ باشد، آن‌گاه $h(z) = \dfrac{M_y - N_x}{yN - xM} = \dfrac{F'}{F} = \dfrac{d}{dz}(\ln F)$ و در نتیجه عامل انتگرال‌ساز برابر است با:

$$F(x,y) = e^{\int h(z)dz}.$$

مثال ۳۴.۱.۱. ابتدا یک عامل انتگرال‌ساز برای معادله دیفرانسیل

$$\left(\frac{y}{x}\ln(\ln y) + \frac{2}{3}xy^4\right)dx + \left(\frac{\ln x}{\ln y} + x^2y^3\right)dy = 0,$$

بیابید، سپس آن را حل کنید.

حل: برای معادله داده شده $M_y - N_x = \frac{۲}{۳}xy^۳ + \frac{\ln\ln y}{x} \neq ۰$، پس معادله کامل نیست. توجه کنید که $\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{\frac{۲}{۳}xy^۳ + \frac{\ln\ln y}{x}}{\frac{\ln x}{\ln y} + x^۲y^۳}$ و $\frac{M_y - N_x}{M} = \frac{۱}{y}$، پس معادله داده شده دارای عامل انتگرال‌سازی بر حسب y به صورت زیر است:

$$F(x,y) = e^{-\int \frac{۱}{y}dy} = e^{-\ln y} = \frac{۱}{y},$$

با ضرب عامل انتگرال‌ساز به معادله $(\frac{\ln(\ln y)}{x}\frac{۲}{۳}xy^۳)dx + (\frac{\ln x}{y\ln y} + x^۲y^۲)dy = ۰$ می‌رسیم. اکنون فرض کنید $u(x,y) = c$ جواب معادله باشد، در این صورت $(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) = (\frac{\ln(\ln y)}{x}\frac{۲}{۳}xy^۳, \frac{\ln x}{y\ln y} + x^۲y^۲)$. انتگرال‌گیری نسبت به y از $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\ln x}{y\ln y} + x^۲y^۲$ نتیجه می‌دهد $u(x,y) = (\ln\ln y)\ln x + \frac{x^۲y^۳}{۳} + c(x)$. حال اگر از $u(x,y) = (\ln\ln y)\ln x + \frac{x^۲y^۳}{۳} + c(x)$ نسبت به x مشتق بگیریم و برابر $\frac{\ln(\ln y)}{x}\frac{۲}{۳}xy^۳$ قرار دهیم، نتیجه می‌شود $c'(x) = ۰$. لذا $c(x) = c$، بنابراین

$$u(x,y) = (\ln\ln y)\ln x + \frac{x^۲y^۳}{۳} + \frac{۱}{xy} = c,$$

جواب معادله داده شده است.

مثال ۳۵.۱.۱. ابتدا یک عامل انتگرال‌ساز برای معادله دیفرانسیل

$$(۲y + ۳xy^۲)dx + (x + ۲x^۲y)dy = ۰,$$

بیابید، سپس آن را حل کنید.

حل: برای معادله داده شده $M_y - N_x = ۲xy + ۱ \neq ۰$، پس معادله کامل نیست. توجه کنید که $\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{۱}{x}$ و $\frac{M_y - N_x}{M} = \frac{۲xy + ۱}{۲y + ۳xy^۲}$، پس معادله داده شده

دارای عامل انتگرال‌سازی بر حسب x به صورت زیر است:

$$F(x,y)=e^{\int \frac{1}{x}dx}=e^{\ln x}=x,$$

با ضرب عامل انتگرال‌ساز به معادله $(2xy+3x^2y^2)dx+(x^2+2x^3y)dy=0$ می‌رسیم. اکنون فرض کنید $u(x,y)=c$ جواب معادله باشد، در این صورت $(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y})=(2xy+3x^2y^2,x^2+2x^3y)$. انتگرال‌گیری نسبت به x از $\frac{\partial u}{\partial x}=2xy+3x^2y^2$ نتیجه می‌دهد $u(x,y)=x^2y+x^3y^2+c(y)$. حال اگر از $x^2y+x^3y^2+c(y)$ نسبت به y مشتق بگیریم و برابر x^2+2x^3y قرار دهیم، نتیجه می‌شود $c'(y)=0$. لذا $c(y)=c$، بنابراین $u(x,y)=x^2y+x^3y^2=c$ جواب معادله است.

مثال ۳۶.۱.۱. ابتدا یک عامل انتگرال‌ساز برای معادله $(3x+\frac{6}{y})+(\frac{x^2}{y}+3\frac{y}{x})y'=0$ بیابید، سپس آن را حل کنید.

حل: برای معادله داده شده

$$\frac{M_y-N_x}{yN-xM}=\frac{-\frac{6}{y^2}-\frac{2x}{y}+\frac{3y}{x^2}}{\frac{3y^2}{x}-2x^2-\frac{6x}{y}}=\frac{1}{xy}=\frac{1}{z},$$

پس معادله داده شده دارای عامل انتگرال‌سازی بر حسب xy به صورت زیر است:

$$F(x,y)=e^{\int \frac{1}{z}dz}=e^{\ln z}=z=xy,$$

با ضرب عامل انتگرال‌ساز به معادله $(3x^2y+6x)dx+(x^3+3y^2)dy=0$ می‌رسیم. اکنون فرض کنید $u(x,y)=c$ جواب معادله باشد. انتگرال‌گیری نسبت به x از $\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2y+6x$ نتیجه می‌دهد $u(x,y)=x^3y+3x^2+c(y)$. حال اگر از $x^3y+3x^2+c(y)$ نسبت به y مشتق بگیریم و برابر x^3+3y^2 قرار دهیم، نتیجه می‌شود $c'(y)=3y^2$. لذا $c(y)=y^3$، بنابراین $u(x,y)=x^3y+3x^2+y^3=c$ جواب معادله است.

معمولا به جز سه حالتی که عامل انتگرال‌ساز تنها تابعی از x، y و یا xy باشد، در صورت مساله گفته می‌شود عامل انتگرال‌ساز به چه صورتی است، چرا که تشخصی نوع عامل انتگرال‌ساز کار چندان ساده‌ای نیست و ارزش علمی خاصی هم ندارد. به مثال زیر دقت کنید:

مثال ۳۷.۱.۱. ابتدا یک عامل انتگرال‌ساز به صورت تابعی از $x + y^۲$ برای معادله دیفرانسیل $(۳y^۲ - x)dx + (۲y^۳ - ۶xy)dy = ۰$ بیابید، سپس آن را حل کنید.

حل: در این مثال گفته شده عامل انتگرال‌ساز برحسب $z = x + y^۲$ می‌باشد. لذا عامل انتگرال‌ساز $F(z) = e^{\int f(z)dz}$ است، که

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{M_y - N_x}{Nz_x - Mz_y} \\ &= \frac{۶y - (-۶y)}{(۲y^۳ - ۶xy)(۱) - (۳y^۲ - x)(۲y)} \\ &= \frac{۱۲y}{-۴y^۳ - ۴xy} = -\frac{۱}{۳}\frac{۱}{x + y^۲} = -\frac{۱}{۳}\frac{۱}{z}, \end{aligned}$$

پس عامل انتگرال‌ساز برابر است با:

$$\begin{aligned} F(z) = e^{\int f(z)dz} &= e^{\int -\frac{۱}{۳}\frac{۱}{z}dz} \\ &= e^{-\frac{۱}{۳}\ln z} \\ &= z^{-\frac{۱}{۳}} = \frac{۱}{(x + y^۲)^۳}, \end{aligned}$$

با ضرب عامل انتگرال‌ساز به معادله $\frac{۳y^۲ - x}{(x + y^۲)^۳}dx + \frac{۲y^۳ - ۶xy}{(x + y^۲)^۳}dy = ۰$ می‌رسیم. اکنون فرض کنید $u(x, y) = c$ جواب معادله باشد، در این صورت

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{۳y^۲ - x}{(x + y^۲)^۳},$$

با انتگرال‌گیری از $\frac{3y^2-x}{(x+y^2)^3}$ نسبت به x داریم $u(x,y)=\frac{x-y^2}{(x+y^2)^2}+c(y)$. حال اگر از $u(x,y)=\frac{x-y^2}{(x+y^2)^2}+c(y)$ نسبت به y مشتق بگیریم و برابر $\frac{2y^3-6xy}{(x+y^2)^3}$ قرار دهیم، نتیجه می‌شود $c'(y)=0$. لذا $c(x)=c$، بنابراین $u(x,y)=\frac{x-y^2}{(x+y^2)^2}=c$ جواب معادله داده شده است.

۶.۱.۱ معادلات خطی مرتبه اول

منظور از معادله خطی مرتبه اول، معادله‌ای به صورت $p_1(x)y'+p_0(x)y=r(x)$ می‌باشد. در این قسمت تنها به روش حل معادلات خطی مرتبه اول می‌پردازیم. در بخش ۱.۱.۲ فصل دوم صفحه ۶۴ به طور مبسوط به بحث معادلات خطی خواهیم پرداخت.

معادلات خطی مرتبه اول

فرض کنید p و q توابعی پیوسته باشند، در این صورت پاسخ $y'+p(x)y=q(x)$ با فرض $y_1=e^{-\int p(x)dx}$ به صورت زیر به دست می‌آید.

$$y=y_1\left(\int\frac{q(x)}{y_1}dx+c\right)=cy_1+\left(\int\frac{q(x)}{y_1}dx\right)y_1=cy_1+uy_1,\quad ♣$$

خواهیم دید که y_1 پایه جواب، $y_h=cy_1$ جواب همگن، $y_p=\left(\int\frac{q(x)}{y_1}dx\right)y_1$ جواب خصوصی و $y=y_h+y_p$ جواب عمومی نام دارد.

مثال ۳۸.۱.۱. معادله $(3x^4y-1)dx+x^5dy=0$ را حل کنید.

حل: معادله داده شده به صورت $y'+\frac{3}{x}y=\frac{1}{x^5}$ مرتب می‌شود. در این صورت

$$y_1=e^{-\int p(x)dx}=e^{-\int\frac{3}{x}dx}=e^{-3\ln x}=x^{-3},$$

پس جواب عمومی معادله برابر است با:

$$\begin{aligned} y &= y_۱(\int \frac{q(x)}{y_۱}dx + c) \\ &= x^{-۳}(\int \frac{\frac{۱}{x^۵}}{x^{-۳}}dx + c) \\ &= x^{-۳}(\int x^{-۲}dx + c) \\ &= x^{-۳}(-x^{-۱} + c) = -x^{-۴} + cx^{-۳}. \end{aligned}$$

مثال ۳۹.۱.۱. معادله $y' \cos y + x \sin y = x$ را حل کنید.

حل: معادله مذکور به شکل داده شده خطی نیست، اما با کمی دقت متوجه می‌شویم مشتق $\sin y$ به صورت $y' \cos y$ است. لذا با فرض $z = \sin y$ معادله داده شده به $z' + xz = x$ تبدیل می‌شود. پایه جواب این معادله به صورت $z_۱ = e^{-\int p(x)dx} = e^{-\int xdx} = e^{-\frac{x^۲}{۲}}$ است، پس جواب همگن برابر $z_h = cz_۱ = ce^{-\frac{x^۲}{۲}}$ است. از طرفی جواب خصوصی به صورت $z_p = uz_۱$ است که

$$u(x) = \int \frac{q(x)}{y_۱}dx = \int \frac{x}{e^{-\frac{x^۲}{۲}}}dx = e^{\frac{x^۲}{۲}},$$

بنابراین $z_p = e^{\frac{x^۲}{۲}}e^{-\frac{x^۲}{۲}} = ۱$، لذا جواب عمومی برابر است با:

$$y = \sin^{-۱} z = \sin^{-۱}(z_h + z_p) = \sin^{-۱}(ce^{-\frac{x^۲}{۲}} + ۱).$$

مثال ۴۰.۱.۱. معادله $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos y}{x \sin y + \cos y}$ را حل کنید.

حل: معادله داده شده خطی نیست، اما بازنویسی آن به صورت $\frac{dx}{dy} = \frac{x \sin y + \cos y}{\cos y} = x \tan y + ۱$ خطی است. پایه جواب این معادله به صورت $x_۱ = e^{-\int p(y)dy}$

$\dfrac{1}{\cos y} = e^{-\ln\cos y} = e^{-\int -\tan y dy}$ است، پس جواب همگن برابر $x_h = cx_1$ $\dfrac{c}{\cos y}$ است. از طرفی جواب خصوصی به صورت $x_p = ux_1$ است که

$$u(y) = \int \frac{q(y)}{x_1}dy = \int \cos y dy = \sin y,$$

بنابراین $x_p = \sin y\dfrac{1}{\cos y} = \tan y$، لذا جواب عمومی برابر است با:

$$x = x_h + x_p = \frac{c}{\cos y} + \tan y.$$

۷.۱.۱ معادلاتی که با تغییر متغیر به خطی مرتبه اول تبدیل می‌شوند

بسیاری از معادلات غیرخطی مرتبه اول با تغییر متغیر مناسبی به معادله‌ای خطی تبدیل می‌شوند. در این قسمت به دو معادله برنولی[1] و ریکاتی[2] می‌پردازیم.

معادله برنولی

برای عدد حقیقی $\alpha \neq 0, 1$ معادله $y' + p(x)y = q(x)y^\alpha$ معادله برنولی از مرتبه α نامیده می‌شود.

★ روش حل: با ضرب $y^{-\alpha}$ در دو طرف معادله و به کارگیری تغییر متغیر $u = y^{1-\alpha}$، به معادله‌ای خطی و مرتبه اول از u بر حسب x می‌رسیم، چرا که:

$$y^{-\alpha}y' + p(x)y^{1-\alpha} = q(x) \Longrightarrow$$
$$\frac{1}{1-\alpha}u' + p(x)u = q(x).$$

مثال ۴۱.۱.۱. اگر $y' - y = xy^5$ و $y(\frac{1}{4}) = 1$، جواب معادله محور yها را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند.

[1] ۱۷۸۲-۱۷۰۰ دانیل برنولی: فیزیک‌دان، ریاضی‌دان، اقتصاددان و پزشک سوئیسی

[2] ۱۷۵۴-۱۶۷۶ یاکوب ریکاتی: ریاضی‌دان ایتالیایی

حل: معادله داده شده برنولی مرتبه ۵ است، با تغییر متغیر $u = y^{-4}$ و $u' = -4y^{-5}y'$ به معادله خطی $u' + 4u = -4x$ می‌رسیم که دارای جواب

$$
\begin{aligned}
u(x) &= e^{-\int 4dx}\left(\int -4xe^{\int 4dx}dx + c\right)\\
&= e^{-4x}\left(\int -4xe^{4x}dx + c\right)\\
&= e^{-4x}\left(-xe^{4x} + \frac{1}{4}e^{4x} + c\right) = -x + \frac{1}{4} + ce^{-4x},
\end{aligned}
$$

شرط $y(\frac{1}{4}) = 1$ نتیجه می‌دهد $c = e$، پس

$$
y(0) = \left(\frac{1}{4} + e\right)^{-\frac{1}{4}}.
$$

مثال ۴۲.۱.۱. جواب عمومی معادله $y' + y = y^2(\cos x - \sin x)$ را به دست آورید.

حل: معادله داده شده برنولی مرتبه ۲ است، با تغییر متغیر $u = y^{-1}$ و $u' = -y^{-2}y'$ به معادله خطی $u' - u = \sin x - \cos x$ می‌رسیم که دارای جواب

$$
\begin{aligned}
u(x) &= e^{\int dx}\left(\int (\sin x - \cos x)e^{\int -dx}dx + c\right)\\
&= e^{x}\left(\int \frac{\sin x - \cos x}{e^{x}}dx + c\right)\\
&= e^{x}\left(-e^{-x}\sin x + c\right) = -\sin x + ce^{x},
\end{aligned}
$$

می‌باشد. پس جواب معادله داده شده $y = \dfrac{1}{-\sin x + ce^{x}}$ می‌باشد.

معادله ریکاتی

معادله به صورت $y'+p_2(x)y^2+p_1(x)y=q(x)$ با شرط ناصفر بودن $p_2(x)$ معادله ریکاتی نامیده می‌شود.

★ روش حل: برای حل معادله ریکاتی باید یکی از جواب‌های آن مانند y_1 را بدانیم. در این صورت جواب کلی معادله به صورت $y=y_1+\frac{1}{z}$ است، که با جای‌گذاری y، معادله‌ای مرتبه اول و خطی از z بر حسب x به دست می‌آید. ♣

مثال ۴۳.۱.۱. می‌دانیم $y_1=1-4x$ یکی از جواب‌های معادله

$$y'=y^2+8xy+16x^2-5,$$

است. جواب کلی این معادله را به دست آورید.

حل: معادله داده شده ریکاتی است، با تغییر متغیر $y=1-4x+\frac{1}{z}$ داریم:

$$-4-\frac{z'}{z^2}=(1-4x+\frac{1}{z})^2+8x(1-4x+\frac{1}{z})+16x^2-5,$$

تساوی بالا به صورت $-z'=1+2z$ مرتب می‌شود که معادله‌ای جدایی‌پذیر است و دارای جواب

$$\frac{1}{2}\ln(1+2z)=-x+c,$$

از این‌جا $z=\frac{1}{2}(e^{-2x+2c}-1)$ به دست می‌آید و جواب مساله به صورت زیر است:

$$y=1-4x+\frac{2}{Ce^{-2x}-1}.$$

مثال ۴۴.۱.۱. می‌دانیم $y_1=\sec x$ یکی از جواب‌های معادله

$$y'=2\tan x\sec x-y^2\sin x,$$

است. جواب کلی این معادله را به دست آورید.

حل: معادله داده شده ریکاتی است، با تغییر متغیر $y = \sec x + \frac{۱}{z}$ داریم:

$$\tan x \sec x - \frac{z'}{z^۲} = ۲ \tan x \sec x - (\sec^۲ x + \frac{۱}{z^۲} + ۲\frac{\sec x}{z}) \sin x,$$

تساوی بالا به صورت $z' - (۲ \tan x)z = \sin x$ مرتب می‌شود که معادله‌ای خطی است و دارای جواب

$$\begin{aligned} z(x) &= e^{-\int -۲ \tan x dx} (\int (\sin x) e^{\int ۲ \tan x dx} dx + c) \\ &= e^{-۲ \ln|\cos x|} (\int (\sin x) ۲ \ln|\cos x| dx + c) \\ &= \frac{۱}{\cos^۲ x} (-\frac{۱}{۳} \cos^۳ x + c) = -\frac{۱}{۳} \cos x + \frac{c}{\cos^۳ x}, \end{aligned}$$

از این‌جا $z = -\frac{۱}{۳} \cos x + \frac{c}{\cos^۳ x}$ به دست می‌آید و جواب مساله به صورت زیر است:

$$y = ۲ \tan x \sec x + \frac{۱}{-\frac{۱}{۳} \cos x + \frac{c}{\cos^۳ x}}.$$

۸.۱.۱ معادلات مرتبه اول با درجه بیش از یک

در این قسمت به دسته‌بندی حالات خاص معادلات مرتبه اول با درجه بیش از یک می‌پردازیم.

دسته اول: حداقل یکی از متغیرهای x، y یا y' در معادله وجود ندارد.

دسته دوم: هر سه متغیر x، y و y' در معادله وجود دارند اما یکی را می‌توان برحسب دوتای دیگر به دست آورد.

دسته اول حالات خاص

حداقل یکی از متغیرهای x، y یا y' در معادله وجود ندارد.

★حالت اول: متغیر مستقل x در معادله وجود ندارد، این معادلات خودگردان نامیده می‌شوند.

★حالت دوم: متغیر وابسته y در معادله وجود ندارد، این معادلات مستقل از تابع نامیده می‌شوند.

روش حل حالت اول و دوم: با فرض $y' = p$، p را پیدا کرده و سپس انتگرال می‌گیریم.

★حالت سوم: متغیرهای x و y هر دو در معادله وجود ندارد.

روش حل: تجزیه صورت معادله منظور ایجاد رابطه‌ای ساده‌تر برای y'.

مثال ۴۵.۱.۱. معادله $x = \ln y' + \sin y'$ را حل کنید.

حل: معادله داده شده فاقد y یعنی مستقل از تابع است. با فرض $y' = p$ داریم:

$$x = \ln p + \sin p,$$

با مشتق‌گیری نسبت به x داریم:

$$1 = \frac{p'_x}{p} + p'_x \cos p,$$

تساوی بالا به صورت $1 = p'_x(\frac{1}{p} + \cos p)$ مرتب می‌شود و از برابری $p'_x = pp'_y$ نتیجه می‌شود:

$$1 = pp'_y(\frac{1}{p} + \cos p),$$

مرتب شده تساوی بالا $\frac{1}{p'_y} = \frac{1}{p} + \cos p$ است که معادله‌ای جدایی‌پذیر و دارای جواب

$$y = \int (1 + p\cos p)dp = p + p\sin p + \cos p + c,$$

می‌باشد. هر دو متغیر x و y بر حسب پارامتر p به دست آمدند بنابراین جواب معادله خم پارامتری

$$\gamma(t) = (\ln t + \sin t, t + t\sin t + \cos t + c),$$

است.

مثال ۴۶.۱.۱. معادله $۳y'^{۵} + ۴y'^{۴} - y' = ۰$ را حل کنید.

حل: معادله داده شده فاقد هر دو متغیر x و y. با فرض $y' = p$ به معادله جبری $۳p^{۵} + ۴p^{۴} - p = ۰$ می‌رسیم. این معادله که چندجمله‌ای از درجه فرد است، دست‌کم دارای یک جواب $p = c$ است، یعنی $y' = c$. این معادله دارای جواب $y = cx + c_۱$ است، از این‌جا $c = \frac{y - c_۱}{x}$ به دست می‌آید، لذا جواب معادله به صورت زیر است:

$$۳(\frac{y - c_۱}{x})^{۵} + ۴(\frac{y - c_۱}{x})^{۴} - (\frac{y - c_۱}{x}) = ۰.$$

دسته دوم حالات خاص

هر سه متغیر x، y و y' در معادله $F(x, y, y') = ۰$ وجود دارند اما یکی را می‌توان برحسب دوتای دیگر به دست آورد.

★حالت اول: متغیر y' را می‌توان به صورت $y' = f(x, y)$ به دست آورد.

روش حل: معادله را به جدایی‌پذیر، هم‌گن، کامل و ... تبدیل می‌کنیم.

★حالت دوم: متغیر y را می‌توان به صورت $y = f(x, y')$ به دست آورد.

روش حل: با فرض $y' = p$، هر کجا $\frac{dy}{dx}$ داشتیم، قرار می‌دهیم p.

★حالت سوم: متغیر x را می‌توان به صورت $x = f(y, y')$ به دست آورد.

روش حل: با فرض $y' = p$، هر کجا $\frac{dx}{dy}$ داشتیم، قرار می‌دهیم $\frac{۱}{p}$.

مثال ۴۷.۱.۱. معادله $xyy'^{۲} - (۲x^{۲} + y^{۲})y' + ۲xy = ۰$ را حل کنید.

حل: معادله داده شده معادله‌ای درجه دوم برحسب y' با ضرایب برحسب x و y است.
از حل این معادله داریم:

$$y' = \frac{2x^2 + y^2 \pm (2x^2 - y^2)}{2xy} = \frac{2x}{y}, \frac{y}{x},$$

معادله $y' = \frac{2x}{y}$ جدایی‌پذیر است و دارای جواب $\frac{1}{2}y^2 = x^2 + c$، هم‌چنین معادله $y' = \frac{y}{x}$ نیز جدایی‌پذیر است و دارای جواب $y = cx$. پس جواب عمومی مساله برابر است با:

$$(\frac{1}{2}y^2 - x^2 - c)(y - cx) = 0.$$

مثال ۴۸.۱.۱. جواب عمومی معادله $4y = 8xy' + 8x^2 + y'^2$ را به دست آورید.

حل: معادله داده شده به صورت $y = f(x, y')$ است، با جای‌گذاری $y' = p$ داریم:

$$4y = 8xp + 8x^2 + p^2,$$

با مشتق‌گیری نسبت به x داریم:

$$4yp = 8p + 8xp' + 16x + 2pp',$$

تساوی بالا به صورت $(p + 4x)(4 + 2p') = 0$ مرتب می‌شود. $p + 4x = 0$ به جواب غیرعادی $y = -2x^2$ و از $4 + 2p' = 0$ نتیجه می‌شود $y' = p = -2$، یعنی $y = -2x + c$ که به جواب عمومی $4y = 8x(-2x + c) + 8x^2 + (-2)^2$ یعنی $2x^2 + y = 2cx + 1$ منجر می‌شود.

مثال ۴۹.۱.۱. معادله $\frac{1}{2}\ln(1 + y'^2) - \ln y' - x + 2 = 0$ را حل کنید.

حل: معادله داده شده به صورت $x = f(y, y')$ می‌باشد. با فرض $y' = p$ داریم:

$$x = \frac{1}{2}\ln(1 + p^2) - \ln p + 2,$$

مشتق‌گیری نسبت به x نتیجه می‌دهد:

$$۱ = \frac{۱}{۲}\frac{۲pp'_x}{۱ + p^۲} - \frac{p'_x}{p},$$

تساوی بالا به صورت $(\frac{p}{۱+p^۲} - \frac{۱}{p})p'_x = ۱$ مرتب می‌شود. اکنون بنابر برابری $pp'_y = \frac{dy}{dx}\frac{dp}{dy} = \frac{dp}{dx} = p'_x$ به معادله جدایی‌پذیر $-dy = \frac{dp}{۱+p^۲}$ می‌رسیم که دارای جواب عمومی $\tan^{-۱} p = -y + c$ می‌باشد. با جای‌گذاری $y' = p = \tan(y - c)$ در معادله داده شده جواب $\ln|\sin(c-y)| + x - ۲ = ۰$ برای آن به دست می‌آید.

۹.۱.۱ جواب‌های غیرعادی و نقاط خاص

یک معادله دیفرانسیل ممکن است دارای جوابی باشد که از جواب عمومی به دست نمی‌آید. این‌گونه از جواب‌ها که جواب غیرعادی نامیده می‌شود دارای این ویژگی هستند که خم جواب بر تک‌تک خم‌های جواب عمومی مماس است، آن هم تنها در یک نقطه بر هریک. این فصل را با بیان نقاط خاص و جواب‌های غیرعادی معادلات دیفرانسیل به با تاکید بر معادله کلرو [۳] و معادله لاگرانژ [۴] که تعمیم معادله کلرو است، به پایان می‌بریم.

تعریف ۵۰.۱.۱ (نقاط خاص). منظور از نقاط خاص منحنی $F(x,y) = ۰$، نقاطی است که در آن‌ها نتوان خط مماسی یک‌تا بر منحنی رسم کرد.

نقاط خاص منحنی $F(x,y) = ۰$ از اشتراک جواب‌های $\frac{\partial F}{\partial x} = ۰$ و $\frac{\partial F}{\partial y} = ۰$ به دست می‌آیند.

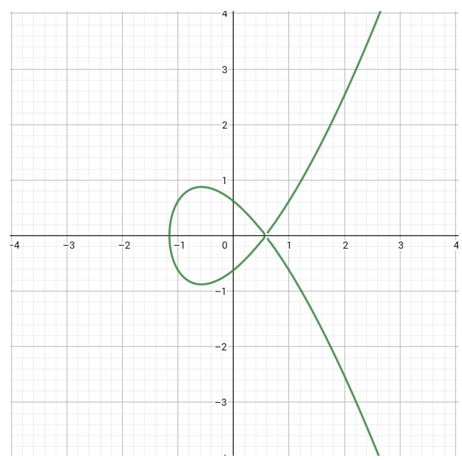
مثال ۵۱.۱.۱. برای اعداد ثابت a و b خم $y^۲ = x^۳ + ax + b$ خم بیضوی نامیده می‌شود. خم‌های بیضوی در هندسه جبری، نظریه اعداد و رمزنگاری استفاده می‌شوند. نقاط خاص خم بیضوی $y^۲ = x^۳ - x + \frac{۲}{۳\sqrt{۳}}$ را پیدا کنید.

---

[۳] ۱۷۱۳-۱۷۶۵الکسی کلود دُکلِرو: ریاضی‌دان، ستاره‌شناس، ژئوفیزیک‌دان، و روشن‌فکر فرانسوی

[۴] ۱۷۳۶-۱۸۱۳ژوزف لویی لاگرانژ: ریاضی -فیزیک‌دان فرانسوی

حل: از حل $\frac{\partial F}{\partial x} = ۳x^{۲} - ۱ = ۰$، $x = \pm\frac{۱}{۳\sqrt{۳}}$ و از حل $\frac{\partial F}{\partial y} = -۲y = ۰$، $y = ۰$ به دست می‌آید. از بین نقاط $(\frac{۱}{۳\sqrt{۳}}, ۰)$ و $(-\frac{۱}{۳\sqrt{۳}}, ۰)$ تنها نقطه $(\frac{۱}{۳\sqrt{۳}}, ۰)$ روی خم $y^{۲} = x^{۳} - x + \frac{۲}{۳\sqrt{۳}}$ قرار دارد. لذا $(\frac{۱}{۳\sqrt{۳}}, ۰)$ تنها نقطه خاص خم است.

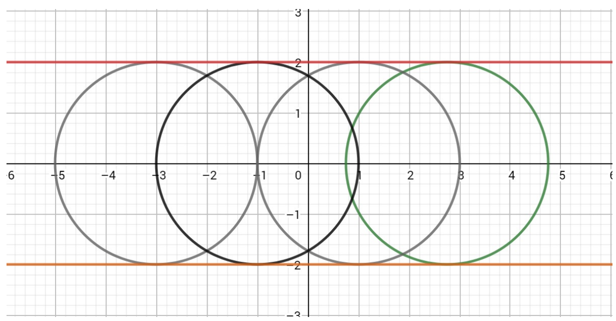


شکل ۲.۱: خم بیضوی $y^{۲} = x^{۳} - x + \frac{۲}{۳\sqrt{۳}}$

تعریف ۵۲.۱.۱ (جواب غیرعادی). منظور از یک جواب غیرعادی برای معادله دیفرانسیل $F(x, y, y') = ۰$، جوابی است که از جواب عمومی به دست نمی‌آید. معمولا جواب غیرعادی بر تک‌تک خم‌های جواب عمومی مماس است، آن هم تنها در یک نقطه بر هریک خم‌ها.

برای پیدا کردن جواب‌های غیرعادی معادله $F(x, y, y') = ۰$، با نام‌گذاری $y' = p$، کافی است p را از $F(x, y, p) = ۰$ و $\frac{\partial F}{\partial p} = ۰$ حذف کنیم. توجه به این نکته ضروری است که جواب به دست آمده ممکن است در معادله اصلی صدق نکند که در این صورت جواب غیرعادی نیست.

مثال ۵۳.۱.۱. جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y^{۲}(۱ + y'^{۲}) = ۴yy'$ دسته دوایر $(x - c)^{۲} + y^{۲} = ۴$ و جواب غیرعادی آن دو خط $y = ۲$ و $y = -۲$ است که بر جواب عمومی مماس است.



شکل ۳.۱: جواب عمومی و غیرعادی $y^{۲}(۱ + y'^{۲}) = ۴$

معادله کلرو

معادله $y = xy' + f(y')$ معادله کلرو نامیده می‌شود. با نام‌گذاری $y' = p$ و مشتق‌گیری داریم:

$$p = p + xp' + f'(p)p' \Rightarrow p'(x + f'(p)) = ۰,$$

★ جواب عمومی: از $p' = ۰$ یعنی $p = c$ به صورت خطوط $y = cx + f(c)$ به دست می‌آید.

★ جواب غیرعادی: با حذف p از $x + f'(p) = ۰$ و $y = xp + f(p)$ به دست می‌آید، که اگر p را نتوان به سادگی حذف کرد، خم جواب به صورت پارامتری قابل بیان است.

مثال ۵۴.۱.۱. جواب عمومی و غیرعادی معادله $x = \frac{y}{y'} + y'^{۲}$ را به دست آورید.

حل: معادله بالا را به صورت $y = xy' - y'^{۳}$ مرتب می‌شود که معادله‌ای کلرو است. با فرض $y' = p$ و مشتق‌گیری نسبت به x داریم:

$$p = p + xp' - ۳p^{۳}p',$$

پس $xp' - ۳p^{۳}p' = ۰$، یعنی $p'(x - ۳p^{۲}) = ۰$. $p' = ۰$ به $p = c$ منجر می‌شود که جواب عمومی $y = cx - c^{۳}$ به دست می‌آید. از $x - ۳p^{۲} = ۰$ نیز جواب غیرعادی به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} y &= xy' - y'^{۳} \\ &= xp - p^{۳} \\ &= x(\pm\sqrt{\frac{x}{۳}}) - (\pm\sqrt{\frac{x}{۳}})^{۳} = \pm\frac{۲x\sqrt{x}}{۳\sqrt{۳}}. \end{aligned}$$

مثال ۵۵.۱.۱. معادله کلرویی تشکیل دهید که $y = x - x^{۳}$ جواب غیرعادی آن باشد.

حل: کافی است تابع داده شده را در صورت کلی معادله کلرو یعنی $y = xy' + f(y')$ جای‌گذاری کنیم تا f پیدا شود، با جای‌گذاری داریم:

$$x - x^{۳} = x(۱ - ۳x^{۲}) + f(x - x^{۳}),$$

از تساوی بالا $f(۱-۳x^{۲}) = ۳x^{۳}$ به‌دست می‌آید، و از این‌جا داریم $f(u) = ۲(\frac{۱ - u}{۳})^{\frac{۳}{۲}}$، پس معادله مطلوب به صورت زیر است:

$$y = xy' + ۲(\frac{۱ - y'}{۳})^{\frac{۳}{۲}}.$$

معادله لاگرانژ

معادله $y = xf(y') + g(y')$ معادله لاگرانژ نامیده می‌شود. با نام‌گذاری $y' = p$ و مشتق‌گیری داریم:

$$p = f(p) + xp'f'(p) + p'g'(p) \Rightarrow p - f(p) = p'(xf'(p) + g'(p)),$$

★ جواب عمومی: با فرض ناصفر بودن $p - f(p)$، عبارت بالا به صورت زیر که معادله‌ای خطی است، بازنویسی می‌شود:

$$\frac{dx}{dp} = \frac{f'(p)}{p - f(p)}x + \frac{g'(p)}{p - f(p)},$$

از حل معادله بالا x به صورت تابعی از p به دست می‌آید. اکنون برای جواب عمومی کافی است p را از $x = x(p)$ و $y = xf(p) + g(p)$ حذف کنیم. که اگر p را نتوان به سادگی حذف کرد، خم جواب به صورت پارامتری قابل بیان است.

★ جواب غیرعادی: با جای‌گذاری ریشه‌های $p - f(p) = ۰$ در $y = xf(p) + g(p)$ به دست می‌آید.

مثال ۵۶.۱.۱. معادله $y'^۳ + y'^۲ = e^y$ را حل کنید.

حل: معادله بالا را به صورت $y = \ln(y'^۳ + y'^۲)$ مرتب می‌شود که معادله‌ای لاگرانژ است. با فرض $y' = p$ و مشتق‌گیری داریم:

$$p = \frac{۳p^۲p' + ۲pp'}{p^۳ + p^۲},$$

از تساوی بالا نتیجه می‌شود $p(\frac{۳p + ۲}{p^۳ + p^۲}p' - ۱) = ۰$. p نمی‌تواند صفر باشد، چون $y'^۳ + y'^۲ = e^y > ۰$. از $\frac{۳p + ۲}{p^۳ + p^۲}p' - ۱ = ۰$ معادله جدایی‌پذیر $\frac{۳p + ۲}{p^۳ + p}dp = dx$

منجر می‌شود که دارای جواب زیر است،

$$۳\tan^{-۱} p + \ln \frac{p^۲}{p^۲ + ۱} = x,$$

پس جواب خاص به صورت خم پارامتری

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) = (۳\tan^{-۱} t + \ln \frac{t^۲}{t^۲ + ۱}, \ln(t^۳ + t^۲)),$$

می‌باشد.

۲.۱ مسائل حل شده

۱.۲.۱ مدل‌سازی به کمک معادلات دیفرانسیل و تغییر متغیر

سوال ۱.۲.۱. فرض کنید معادله مکان–زمان ذره‌ای در معادله دیفرانسیل $\ddot{x} + \cos x = ۰$ صدق می‌کند.

الف) اگر جرم ذره $m = ۱$ باشد، بنابر قانون دوم نیوتن $F = ma$، پس $F = -\cos x$. از طرفی می‌دانیم انرژی پتانسیل ذره در معادله $F = -\frac{dU}{dx}$ صدق می‌کند. انرژی پتانسیل این ذره را بیابید.

ب) نشان دهید انرژی مکانیکی $E(x) = U(x) + \frac{۱}{۲}mv^۲$ در طول مسیر حرکت ثابت است.

حل: الف) برای یافتن انرژی پتانسیل کافی است معادله $\frac{dU}{dx} = \cos x$ را حل کنیم که دارای جواب $U(x) = \sin x + c$ است.

ب) با مشتق‌گیری نسبت t داریم:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dU}{dx}\frac{dx}{dt} + v\frac{dv}{dt} = -a(t)v(t) + v(t)a(t) = ۰,$$

لذا انرژی مکانیکی در طول مسیر ثابت است.

سوال ۱.۲.۲. شکل آینه مقعری را تعیین کنید که پرتو نوری که از چشمه نور واقع در مبدا مختصات بر آینه می‌تابد، به موازات محور xها بازتاب شود.

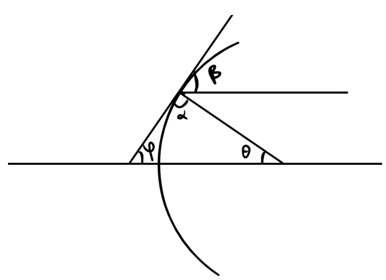
حل: فرض کنید زاویه پرتو تابش با افق θ و با آینه α باشد، هم‌چنین خط مماس بر آینه در نقطه تابش محور xها را با زاویه φ قطع کند. چون پرتو بازتاب موازی محور xها است، زاویه بازتابش β با زاویه φ برابر است، از طرفی زاویه بازتابش β با زاویه تابش α برابر است، پس $\alpha = \beta = \varphi$. زاویه خارجی θ نیز برابر مجموع زوایای α و φ یعنی برابر ۲β است. اکنون از تساوی $\theta = ۲\beta$ نتیجه می‌شود،

$$\tan\theta = \tan ۲\beta = \frac{۲\tan\beta}{۱ - \tan^{۲}\beta},$$

دقت کنید که $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$ و $\tan\beta = y'$ پس،

$$\frac{y}{x} = \frac{۲y'}{۱ - y'^{۲}} \Longrightarrow y' = \frac{-x \pm \sqrt{x^{۲} + y^{۲}}}{y},$$

معادله دیفرانسیلی است که شکل آینه در آن صدق می‌کند.



سوال ۱.۲.۳. معادله $y = ۲xy' + \tan^{-۱}(xy'^{۲})$ را حل کنید.

حل: با تغییر متغیر $u = xy'^{۲}$ به معادله $y = \pm ۲\sqrt{xu} + \tan^{-۱} u$ می‌رسیم. با مشتق‌گیری داریم $y' = \pm\dfrac{u + xu'}{\sqrt{xu}} + \dfrac{u'}{۱ + u^{۲}}$. اکنون توجه کنید

$$u = x\left(\pm\frac{u + xu'}{\sqrt{xu}} + \frac{u'}{۱ + u^{۲}}\right)^{۲} = \frac{x(x + u')^{۲}}{xu} + \frac{xu'^{۲}}{(۱ + u^{۲})} \pm \frac{۲xu'(u + xu')}{\sqrt{xu}(۱ + u^{۲})},$$

تساوی بالا به صورت $u' = 0$ مرتب می‌شود، پس $u = c$ و جواب عمومی معادله داده شده $y = \pm 2\sqrt{cx} + \tan^{-1} c$ است.

۲.۲.۱ معادلات دیفرانسیل جدایی‌پذیر

سوال ۴.۲.۱. جواب عمومی معادله $4y = 8xy + 8x^2 + y'^2$ را بیابید.

حل: با مشتق‌گیری به معادله $4y' = 8y' + 8xy'' + 16x + 2y'y''$ می‌رسیم که به صورت $(y' + 4x)(4 + 2y'') = 0$ مرتب می‌شود و دارای جواب زیر است.

$$(y + 2x^2 + c)(y + x^2 + cx + c) = 0.$$

سوال ۵.۲.۱. با تغییر متغیر مناسب معادله $2xy^3 + 3x^2y^2y' = 0$ را به معادله‌ای جدایی‌پذیر تبدیل و آن را حل کنید.

حل: با فرض $z = y^3$ به معادله جدایی‌پذیر $x^2z' + 2xz = 0$ می‌رسیم که دارای جواب $z = \frac{c}{x^2}$ است، لذا جواب مساله $y = \frac{c}{\sqrt[3]{x^2}}$ می‌باشد.

۳.۲.۱ معادلات دیفرانسیل هم‌گن

سوال ۶.۲.۱. معادله $y' \ln \frac{y+x}{x+3} = \frac{y+x}{x+3} - \ln \frac{y+x}{x+3}$ را حل کنید.

حل: دو خط $x + y = 0$ و $x + 3 = 0$ یک‌دیگر را در $(-3, 3)$ قطع می‌کنند. پس تغییر متغیرهای $x = X - 3$ و $y = Y + 3$ کارآمد است. با این تغییر متغیرها به معادله هم‌گن

$$Y' \ln \frac{Y+X}{X} = \frac{Y+X}{X} - \ln \frac{Y+X}{X},$$

می‌رسیم که با فرض $Y = Xu$ به معادله جدایی‌پذیر $\frac{dX}{X} = \frac{\ln(u+۱)}{(۱-\ln(u+۱))(u+۱)}du$ می‌رسیم که دارای جواب

$$\ln X = -\ln(u+۱) - \ln(۱-\ln(u+۱)) + \ln c,$$

است، پس

$$\ln\frac{y+x}{x+۳} = \frac{c}{x+y} + ۱.$$

۴.۲.۱ معادلات دیفرانسیل کامل

سوال ۷.۲.۱. با فرض $xM \neq yN$ نشان دهید $F = \frac{۱}{xM-yN}$ عامل انتگرال‌سازی برای معادله

$$Mdx + Ndy = yf(xy)dx + yg(xy)dy,$$

می‌باشد.

حل: توجه کنید که

$$F = \frac{۱}{xM-yN} = \frac{۱}{xyf(xy)-xyg(xy)} = \frac{۱}{xy}\frac{۱}{f(xy)-g(xy)},$$

پس $FM = \frac{۱}{x}\frac{f(xy)}{f(xy)-g(xy)}$ و $FN = \frac{۱}{y}\frac{g(xy)}{f(xy)-g(xy)}$، با مشتق‌گیری داریم:

$$(FM)_y = \frac{f(xy)g'(xy) - f'(xy)g(xy)}{(f(xy)-g(xy))^۲}$$
$$(FN)_x = \frac{f(xy)g'(xy) - f'(xy)g(xy)}{(f(xy)-g(xy))^۲},$$

لذا $F = \frac{۱}{xM-yN}$ فاکتور انتگرال‌سازی برای معادله داده شده است.

۵.۲.۱ معادلات خطی مرتبه اول

سوال ۸.۲.۱. اگر $y' = \frac{y}{x} + \frac{۲x^۳ \cos x^۲}{y}$ و $y(\sqrt{\pi}) = ۰$، $y(\sqrt{\frac{\pi}{۲}})$ را بیابید.

حل: معادله داده شده به صورت $yy' - \frac{۱}{x^۲}y^۲ = ۲x^۳ \cos x^۲$ مرتب می‌شود. جمله yy' نشان می‌دهد تغییر متغیر $u = y^۲$ احتمالا کارآمد است. با این تغییر متغیر به معادله $u' - \frac{۲}{x}u = ۴x^۳ \cos x^۲$ می‌رسیم که جواب عمومی آن برابر است با:

$$\begin{aligned} u(x) &= e^{-\int -\frac{۲}{x}dx}\left(\int ۴x^۳ \cos x^۲ e^{\int -\frac{۲}{x}dx} dx + c\right) \\ &= x^۲\left(\int ۴x \cos x^۲ dx + c\right) \\ &= cx^۲ + ۲x^۲ \sin x^۲, \end{aligned}$$

شرط $y(\sqrt{\pi}) = ۰$ نتیجه می‌دهد $c = ۰$، پس

$$y(\sqrt{\frac{\pi}{۲}}) = \sqrt{۲\frac{\pi}{۲}\sin\frac{\pi}{۲}} = \sqrt{\pi}.$$

سوال ۹.۲.۱. پاسخ عمومی معادله دیفرانسیل $x^۳y' + ۳x^۲y = \cos x e^{\sin x}$ را بیابید.

حل: راه کلاسیک و استفاده از فرمول به انتگرالی منجر می‌شود که به سادگی به دست نمی‌آید. اما توجه به این نکته که $(x^۳y)' = ۳x^۲y + x^۳y'$ باعث می‌شود معادله داده شده به صورت $(x^۳y)' = (e^{\sin x})'$ در بیابید که از این تساوی نتیجه می‌شود $x^۳y = e^{\sin x} + c$ و لذا جواب معادله $y = \frac{e^{\sin x}}{x^۳} + cx^{-۳}$ می‌باشد.

سوال ۱۰.۲.۱. پاسخ عمومی معادله دیفرانسیل $y' + ۱۶\pi^۲y = \sum_{n=۱}^{N} a_n \cos(n\pi x)$ را بیابید.

حل: پایه جواب معادله داده شده عبارت است از:

$$y_۱ = e^{-\int p(x)dx} = e^{-\int ۱۶\pi^۲ dx} = e^{۱۶\pi^۲ x},$$

لذا جواب عمومی برابر است با:

$$\begin{aligned}
y &= y_۱(\int \frac{q(x)}{y_۱}dx + c)\\
&= e^{۱۶\pi^۲ x}(\int e^{-۱۶\pi^۲ x}\sum_{n=۱}^{N} a_n \cos(n\pi x)dx + c)\\
&= e^{۱۶\pi^۲ x}(\sum_{n=۱}^{N} a_n(\int e^{-۱۶\pi^۲ x}\cos(n\pi x)dx) + c)\\
&= e^{۱۶\pi^۲ x}(\sum_{n=۱}^{N} a_n \frac{e^{۱۶\pi^۲ x}}{\pi(n^۲ + ۲۵۶\pi^۲)}(n\sin(n\pi x) + ۱۶\pi\cos(n\pi x) + c)\\
&= \frac{۱}{\pi}\sum_{n=۱}^{N}(\frac{na_n}{n^۲ + ۲۵۶\pi^۲}\sin(n\pi x) + \frac{۱۶\pi a_n}{n^۲ + ۲۵۶\pi^۲}\cos(n\pi x)) + ce^{۱۶\pi^۲ x}.
\end{aligned}$$

۶.۲.۱ معادلاتی که با تغییر متغیر به خطی مرتبه اول تبدیل می‌شوند

سوال ۱۱.۲.۱. جواب عمومی معادله $xy' + y = xy^۳$ را به دست آورید.

حل: معادله داده شده برنولی مرتبه ۳ است، با تغییر متغیر $u = y^{-۲}$ و $u' = -۲y^{-۳}y'$ به معادله خطی $u' + \frac{۲}{x}u = -۲$ می‌رسیم که دارای جواب

$$\begin{aligned}
u(x) &= e^{\int \frac{۲}{x}dx}(\int -۲e^{-\int \frac{۲}{x}dx}dx + c)\\
&= e^{۲\ln x}(\int -۲e^{-۲\ln x}dx + c)\\
&= x^۲(\int \frac{-۲}{x^۲}dx + c) = ۲x + cx^۲,
\end{aligned}$$

می‌باشد. پس جواب معادله داده شده $y^{-۲} = ۲x + cx^۲$ می‌باشد.

۷.۲.۱ معادلات مرتبه اول با درجه بیش از یک

سوال ۱۲.۲.۱. جواب عمومی و غیرعادی معادله $y = xy' + y'^۲$ را بیابید.

حل: معادله داده شده کلرو است، جواب عمومی آن $y = cx + c^۲$ و جواب غیرعادی آن $y = -\frac{x^۲}{۴}$ می‌باشد.

سوال ۱۳.۲.۱. جواب عمومی معادله $y^{\frac{۲}{۳}} + y'^{\frac{۲}{۳}} = a^{\frac{۲}{۳}}$ را به دست آورید.

حل: معادله داده شده را می‌توان به صورت $(\frac{y}{a})^{\frac{۲}{۳}} + (\frac{y'}{a})^{\frac{۲}{۳}} = ۱$ بازنویسی کرد. با تغییر متغیرهای $\frac{y}{a} = \sin^۳\theta$ و $\frac{y'}{a} = \cos^۳\theta$ نتیجه می‌شود:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(a\sin^۳\theta) = ۳a\sin^۲\theta\cos\theta\frac{d\theta}{dx},$$

از طرفی $y' = a\cos^۳\theta$، پس $۳\tan^۲\theta d\theta = dx$. معادله اخیر جدایی‌پذیر است و دارای جواب $۳(۱ + \tan\theta) = x + c$ است. لذا جواب عمومی معادله داده شده به صورت $۳(۱ + \frac{y^{\frac{۱}{۳}}}{\sqrt{a^{\frac{۲}{۳}} - y^{\frac{۲}{۳}}}}) = x + c$ می‌باشد.

۳.۱ مسائل تمرینی

تمرین ۱.۳.۱. معادله دیفرانسیل تشکیل دهید که جواب آن $y = \frac{e^x}{c_۱e^{۲x} + c_۲}$ باشد.

تمرین ۲.۳.۱. معادله $y' = \frac{x - e^{-x}}{y + e^y}$ را حل کنید.

تمرین ۳.۳.۱. معادله $y' = ۸۱x^۲ + ۱۸xy + y^۲$ را حل کنید.

تمرین ۴.۳.۱. معادله $y' = -\frac{۴x + ۲y + ۱۵}{۲x + y + ۷}$ را حل کنید.

تمرین ۵.۳.۱. معادله $(x + y - ۱)^۲dy = ۲(y + ۲)^۲dx$ را حل کنید.

تمرین ۶.۳.۱. با استفاده از تغییر متغیر $y = t^\alpha$ معادله دیفرانسیل

$$y(۱ + \sqrt{x^۲y^۴ + ۱})dx + ۲xdy = ۰,$$

را حل کنید.

تمرین ۱.۳.۷. معادله $y' = (\sin^{۲} x - y)\cos x$ را حل کنید.

تمرین ۱.۳.۸. معادله $e^x(y' + ۳) = ۴\cos x$ را حل کنید.

تمرین ۱.۳.۹. معادله $xdy - (y + xy^{۳}(۱ + \ln x))dx = ۰$ را حل کنید.

تمرین ۱.۳.۱۰. می‌دانیم $y_{۱} = \frac{۱}{x}$ جوابی برای معادله $y' = y^{۲} - \frac{۲}{x}$ است. جواب عمومی این معادله را بیابید.

تمرین ۱.۳.۱۱. معادله $(y^{۲} + ۳\sin x)y' = \cos x$ را حل کنید.

تمرین ۱.۳.۱۲. نشان دهید یک عامل انتگرال‌ساز معادله $y' - f(\frac{y}{x}) = ۰$ عبارت است از $\mu(x,y) = \frac{۱}{xf(\frac{y}{x}) - y}$.

تمرین ۱.۳.۱۳. معادله $(y^{۲} + ۳\sin x)y' = \cos x$ را حل کنید.

تمرین ۱.۳.۱۴. جواب عمومی و خاص معادله $y = xy' + e^{y'}$ را به دست آورید.

تمرین ۱.۳.۱۵. جواب عمومی و خاص معادله $xy'^{۲} = y - y'^{۳}$ را به دست آورید.

تمرین ۱.۳.۱۶. جواب عمومی معادله $x = y' + \sin y$ را به دست آورید.

تمرین ۱.۳.۱۷. جواب عمومی معادله $x = y' + \sin y$ را به دست آورید.

تمرین ۱.۳.۱۸. معادله $y = (y' - ۱)e^{y'}$ را حل کنید.

تمرین ۱.۳.۱۹. جواب غیرعادی $y = xy' + \frac{y'}{\sqrt{۱ + y'^{۲}}}$ را بیابید.

۴.۱ مسائل خلاقانه

مساله ۱.۴.۱. فرض کنید $p, q : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ توابعی پیوسته باشند. اگر $y_1(x)$ جوابی برای معادله همگن $y' + p(x)y = 0$ روی فاصله I باشد، نشان دهید تابع $u : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ موجود است که $y = uy_1$ جوابی برای معادله غیرهمگن $y' + p(x)y = q(x)$ باشد.

مساله ۲.۴.۱. فرض کنید جواب عمومی معادله $Mdx + Ndy = 0$، $u(x, y) = c$ باشد. اگر $F_1(x, y)$ و $F_2(x, y)$ دو عامل انتگرال‌ساز برای این معادله باشند، نشان دهید $\dfrac{F_2}{F_1}$ تابعی از u است.

پیوست ۱: کاربردهای معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

تعریف ۳.۴.۱ (دسته منحنی). منظور از یک دسته منحنی، معادله‌ای است به صورت $F(x,y,c)=0$ که به ازای هر c_0 در دامنه تعریف‌اش، $F(x,y,c_0)=0$ یک منحنی در صفحه xy باشد.

مثال ۴.۴.۱. دسته منحنی $(x-c)^2+y^2=4$ را توصیف کنید. معادله دیفرانسیلی بیابید که جواب عمومی آن این دسته منحنی باشد.

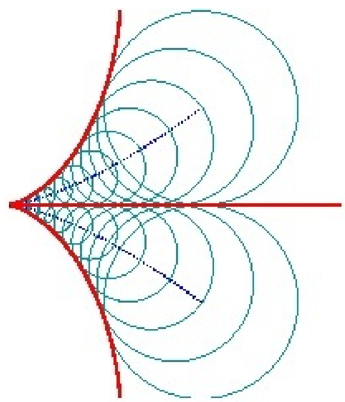
حل: دسته منحنی داده شده دسته دوایری به مرکز $(c,0)$ و شعاع ۲ است. برای پیدا کردن معادله دیفرانسیلی که جواب عمومی آن دسته منحنی $F(x,y,c)=0$ باشد، کافی است c را از دستگاه زیر حذف کنیم،

$$\begin{cases} F(x,y,c)=0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y,c)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-c)^2+y^2=4 \\ 2(x-c)+2yy'=4 \end{cases},$$

از معادله دوم $x-c=2-yy'$ به دست می‌آید که جای‌گذاری آن در معادله دسته منحنی نتیجه می‌دهد $y(1+y'^2)=4y'$.

تعریف ۵.۴.۱ (پوش مماس). منحنی $C(x,y)=0$ را پوش مماس دسته منحنی

$F(x,y,c) = 0$ می‌نامیم، هرگاه برای هر c_0، $C(x,y) = 0$ در یک نقطه بر منحنی $F(x,y,c_0) = 0$ مماس باشد.



شکل ۴.۱: پوش مماس

در واقع برای معادله دیفرانسیل $F(x,y,y') = 0$، پوشِ مماسِ جواب عمومی، اگر جوابی از معادله باشد، جواب غیرعادی است.

پیدا کردن پوش دسته منحنی $F(x,y,c) = 0$

پوش مماس دسته منحنی $F(x,y,c) = 0$ دارای این ویژگی است که $\frac{\partial F}{\partial c} = 0$.
بنابراین برای پیدا کردن پوش مماس کافی است c را از $F(x,y,c) = 0$ و $\frac{\partial F}{\partial c} = 0$ حذف کرد.
★ باید بررسی کرد که منحنی به دست آمده از روش بالا، پوش مماس است یا نه، چرا که ممکن است پوش مماس نباشد و نقاط غیرعادی معادله را مشخص کند.

مثال ۶.۴.۱. پوش مماس دسته منحنی $(x-c)^2 + y^2 = 4$ را بیابید.

حل: برای حذف c از دستگاه

$$\begin{cases} F(x,y,c) = ۰ \\ \dfrac{\partial F}{\partial c}(x,y,c) = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-c)^۲ + y^۲ = ۴ \\ -۲(x-c) = ۰ \end{cases},$$

کافی است از معادله دوم $x = c$ را در معادله اول قرار دهیم که $(x-x)^۲ + y^۲ = ۴$ نتیجه می‌دهد $y = \pm ۲$.

مثال ۷.۴.۱. پوش مماس دسته منحنی $y = cx + \dfrac{۱}{c}$ را بیابید.

حل: کافی است c را از دستگاه زیر حذف کنیم:

$$\begin{cases} F(x,y,c) = ۰ \\ \dfrac{\partial F}{\partial c}(x,y,c) = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = cx + \dfrac{۱}{c} \\ ۰ = x - \dfrac{۱}{c^۲} \end{cases},$$

از معادله دوم $x = \dfrac{۱}{c^۲}$ به دست می‌آید که جای‌گذاری آن در معادله دسته منحنی نتیجه می‌دهد $y = c(\dfrac{۱}{c^۲}) + \dfrac{۱}{c} = \dfrac{۲}{c}$، اکنون با توان دو رساندن نتیجه می‌شود $y^۲ = \dfrac{۴}{c^۲} = ۴x$.

مثال ۸.۴.۱. پوش مماس دسته منحنی $(x-c)^۳ = (y-c)^۲$ را بیابید.

حل: با مشتق‌گیری نسبت به c داریم:

$$\begin{cases} F(x,y,c) = ۰ \\ \dfrac{\partial F}{\partial c}(x,y,c) = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-c)^۳ = (y-c)^۲ \\ -۳(x-c)^۲ = -۲(y-c) \end{cases},$$

از حل دستگاه بالا $c = x$ و $c = x - \dfrac{۴}{۹}$ به دست می‌آید. از $c = x$ نتیجه می‌شود $y = x$ و از $c = x - \dfrac{۴}{۹}$ نتیجه می‌شود $y = x - \dfrac{۴}{۲۷}$. اکنون مکان نقاط غیرعادی این دسته منحنی را پیدا می‌کنیم.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y,c) = ۰ \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y,c) = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۳(x-c)^۲ = ۰ \\ ۲(y-c)^۲ = ۰ \end{cases},$$

از حل دستگاه بالا $y = x$ به دست می‌آید. لذا $y = x$ مکان نقاط غیرعادی این دسته منحنی و $y = x - \frac{۴}{۲۷}$ پوش مماس است.

تعریف ۹.۴.۱ (دو دسته منحنی متقاطع با زوایه α). دسته منحنی‌های $F(x, y, c) = ۰$ و $G(x, y, c) = ۰$ را در نظر بگیرید. این دو دسته منحنی را متقاطع با زاویه α گوییم، هرگاه هر منحنی از یک دسته، تمام منحنی‌های دسته دیگر را با زاویه α قطع کند. در این صورت $G(x, y, c) = ۰$ را مسیرهای با زاویه α، $F(x, y, c) = ۰$ می‌نامیم و برعکس.

پیدا کردن مسیرهای با زاویه α برای دسته منحنی $F(x, y, c) = ۰$

دسته منحنی $F(x, y, c) = ۰$ را در نظر بگیرید. برای پیدا کردن مسیرهای با زاویه α این دسته منحنی، به روش زیر عمل می‌کنیم.

۱) با حذف c از $F(x, y, c) = ۰$ و $\frac{\partial F}{\partial x} = ۰$، معادله دیفرانسیلی می‌یابیم که پاسخ عمومی آن دسته منحنی $F(x, y, c) = ۰$ باشد.

۲) می‌دانیم اگر y' شیب منحنی‌های دسته منحنی $F(x, y, c) = ۰$ و Y' شیب منحنی‌های مسیرهای با زاویه α باشد، رابطه زیر برقرار است:

$$\tan\alpha = \frac{y' - Y'}{۱ + y'Y'},$$

لذا کافی است از رابطه بالا، Y' را بر حسب y' به دست آورده و در معادله دیفرانسیلی که به دست آوردیم جای‌گذاری کنیم.

۳) پاسخ معادله دیفرانسیل به دست آمده، مسیرهای با زاویه α است.

مثال ۱۰.۴.۱. مسیرهای با زاویه ۳۰ درجه دوایر $x^۲ + y^۲ = c^۲$ را بیابید.

حل: ابتدا با حذف c از دستگاه زیر معادله دیفرانسیل این دوایر را پیدا می‌کنیم،

$$\begin{cases} F(x,y,c)=0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y,c)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=c^2 \\ 2x+2yy'=0 \end{cases},$$

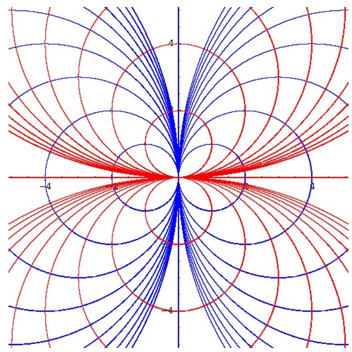
از معادله دوم $y'=-\dfrac{x}{y}$ به دست می‌آید. اکنون Y' برحسب y' از $\tan 30=\dfrac{y'-Y'}{1+y'Y'}$ به صورت $Y'=\dfrac{2y'-\sqrt{3}}{\sqrt{3}y'+2}$ به دست می‌آید. لذا پاسخ معادله $-\dfrac{x}{y}=\dfrac{2y'-\sqrt{3}}{\sqrt{3}y'+2}$ مسیرهای 30° دسته دوایر داده شده است. معادله اخیر به صورت $y'=\dfrac{2x-\sqrt{3}y}{-\sqrt{3}x-2y}$ مرتب می‌شود که معادله‌ای همگن است. با تغییر متغیر $y=xu$ به معادله جدایی‌پذیر $\dfrac{dx}{x}=-\dfrac{\sqrt{3}+2u}{2+2u^2}du$ می‌رسیم که دارای جواب

$$-\frac{\ln(u^2+1)+\tan^{-1}u}{2}+c=\ln x,$$

است که به صورت $\ln(x\sqrt{u^2+1})+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\tan^{-1}u=c$ مرتب می‌شود. بنابراین معادله مسیرهای 30° به صورت زیر است.

$$\ln(x^2+y^2)+\sqrt{3}\tan^{-1}\frac{y}{x}=c_1.$$

در ادامه برای حالت خاص $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$، مسیرهای قائم بر دسته منحنی‌ها را پیدا می‌کنیم.



شکل ۵.۱: دسته منحنی‌های متعامد

پیدا کردن مسیرهای قائم دسته منحنی در مختصات دکارتی

دسته منحنی $F(x,y,c)=0$ را در نظر بگیرید. برای پیدا کردن مسیرهای قائم این دسته منحنی، به روش زیر عمل می‌کنیم.

۱) با حذف c از $F(x,y,c)=0$ و $\dfrac{\partial F}{\partial x}=0$، معادله دیفرانسیلی می‌یابیم که پاسخ عمومی آن دسته منحنی $F(x,y,c)=0$ باشد.

♣

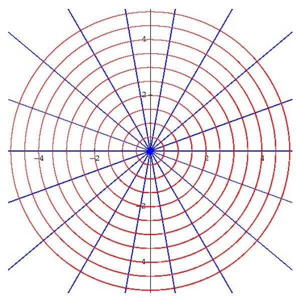
۲) می‌دانیم اگر y' شیب منحنی‌های دسته منحنی $F(x,y,c)=0$ و Y' شیب منحنی‌های مسیرهای قائم باشد، رابطه $y'Y'=-1$ برقرار است. لذا کافی است $Y'=-\dfrac{1}{y'}$ را در معادله دیفرانسیلی که به دست آوردیم جای‌گذاری کنیم.

۳) پاسخ معادله دیفرانسیل به دست آمده، مسیرهای قائم است.

مثال ۱۱.۴.۱. مسیرهای قائم دوایر $x^2+y^2=c^2$ را بیابید.

حل: بنابر مثال ۱۰.۴.۱ در صفحه ۵۶ دسته دوایر داده شده در معادله دیفرانسیل $y'=-\dfrac{x}{y}$ صدق می‌کنند. با جای‌گذاری $-\dfrac{1}{y'}$ به جای y' برای مسیرهای قائم به معادله

$y' = \dfrac{y}{x}$ می‌رسیم که دارای جواب $\ln y = \ln x + c_{\circ}$ یا $y = cx$ می‌باشد. همان‌طور که مشاهده می‌کنیم مسیرهای قائم بر این دسته دوایر هم مرکز، دسته خطوط گذرا از مبدا هستند.



شکل ۶.۱: مسیرهای قائم دوایر هم مرکز

مثال ۱۲.۴.۱. برای هر ثابت λ نشان دهید دسته مقاطع مخروطی $\dfrac{x^{۲}}{c} + \dfrac{y^{۲}}{c-\lambda} = ۱$ خودمتعامدند.

حل: کافی است نشان دهیم معادله مسیرهای قائم دسته مخروط‌های داده شده بر دسته منحنی واقع است. معادله دیفرانسیل این دسته منحنی از قرار زیر است.

$$\begin{cases} F(x,y,c) = \circ \\ \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y,c) = \circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^{۲}}{c} + \dfrac{y^{۲}}{c-\lambda} = ۱ \\ \dfrac{۲x}{c} + \dfrac{۲yy'}{c-\lambda} = \circ \end{cases},$$

از معادله دوم $c = \dfrac{x}{x+yy'}$ به دست می‌آید که جای‌گذاری آن در معادله اول نتیجه می‌دهد $(x+yy')(x - \dfrac{y}{y'}) = \lambda$. اکنون اگر به جای y' قرار دهیم $-\dfrac{۱}{y'}$ به معادله دیفرانسیل $(x - \dfrac{y}{y'})(x+yy') = \lambda$ می‌رسیم که همان معادله قبلی است. لذا دسته منحنی مذکور خود متعامد است.

پیدا کردن مسیرهای قائم دسته منحنی در مختصات قطبی

دسته منحنی $F(r,\theta,c) = ۰$ را در نظر بگیرید. برای پیدا کردن مسیرهای قائم این دسته منحنی، به روش زیر عمل می‌کنیم.

۱) با حذف c از $F(r,\theta,c) = ۰$ و $\dfrac{\partial F}{\partial \theta} = ۰$، معادله دیفرانسیلی می‌یابیم که پاسخ عمومی آن دسته منحنی $F(x,y,c) = ۰$ باشد.

۲) می‌دانیم اگر $y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{r'\cos\theta - r\sin\theta}{r'\sin\theta + r\cos\theta}$ شیب منحنی‌های دسته منحنی ♣ $F(x,y,c) = ۰$ و Y' شیب منحنی‌های مسیرهای قائم باشد، رابطه $y'Y' = -۱$ برقرار است، یعنی $Y' = -\dfrac{r'\sin\theta + r\cos\theta}{r'\cos\theta - r\sin\theta}$. لذا کافی است $-\dfrac{r^۲}{r'}$ را به جای r' در معادله دیفرانسیلی که به دست آوردیم جای‌گذاری کنیم.

۳) پاسخ معادله دیفرانسیل به دست آمده، مسیرهای قائم است.

مثال ۱۳.۴.۱. ابتدا مسیرهای قائم دسته دل‌گون $r = c(۱ + \sin\theta)$ را بیابید و سپس پوشِ مماسِ این مسیرهای قائم را به دست آورید.

حل: معادله دیفرانسیل دسته دل‌گون بالا به صورت زیر است:

$$\begin{cases} F(r,\theta,c) = ۰ \\ \dfrac{\partial F}{\partial \theta}(r,\theta,c) = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = c(۱ + \sin\theta) \\ r' = c\cos\theta \end{cases},$$

از دستگاه بالا $-\dfrac{۱ + \sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{r}{r'}$ به دست می‌آید که جای‌گذاری $-\dfrac{r^۲}{r'}$ به جای r' به معادله $\dfrac{۱ + \cos\theta}{\sin\theta} = \dfrac{r'}{r}$ منجر می‌شود که دارای جواب $r = c(۱ + \cos\theta)$ است. اکنون برای یافتن پوش مماس این مسیرهای قائم کافی است از دستگاه زیر c را حذف کنیم.

$$\begin{cases} F(r,\theta,c) = ۰ \\ \dfrac{\partial F}{\partial c}(r,\theta,c) = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = c(۱ + \cos\theta) \\ ۰ = ۱ + \cos\theta \end{cases},$$

از دستگاه بالا $r = 0$ یعنی مبدا به دست می‌آید. همان‌طور که در شکل می‌بینیم این نقطه غیرعادی دسته دل‌گون داده شده است.

تمرینات

تمرین ۱: معادله مسیرهای قائم بر دسته منحنی‌های $xy = c$ را بیابید.

تمرین ۲: فرض کنید $\lambda > 0$ عدد ثابتی باشد، معادله مسیرهای قائم بر دسته منحنی‌های $y = c(x + \lambda)\lambda^x$ را بیابید.

تمرین ۳: معادله مسیرهای قائم بر دسته منحنی‌های $y = \dfrac{c}{1 - \sin x}$ را بیابید.

تمرین ۴: مسیرهای قائم دسته منحنی‌های $r^{-1} = \sin^2\theta + c$ را بیابید.

۲

معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم و بالاتر

هدف اصلی این فصل بررسی معادلات خطی است، چرا که اکثر پدیده‌های فیزیکی یا دارای رفتار خطی هستند یا به صورت خطی تقریب زده می‌شوند و در نتیجه مدل‌سازی و تحلیل این پدیده‌ها به معادلات خطی منجر می‌شود. برای بررسی معادلات خطی، در ابتدا به معادلات خطی با ضرایب ثابت و در ادامه به بررسی معادلات خطی با ضرایب متغیر می‌پردازیم. جواب عمومی معادلات خطی از دو بخش تشکیل شده، قسمت اول جواب هم‌گن یا پاسخ گذرا و قسمت دوم جواب خصوصی یا پاسخ ماندگار نام دارد. لازمه حل معادلات خطی پیدا کردن پایه جواب است. برای معادلات با ضرایب ثابت، پایه جواب به کمک معادله مشخصه پیدا

می‌شود، جواب خصوصی نیز به روش‌های عمل‌گر وارون، ضرایب نامعین و تغییر پارامتر لاگرانژ مشخص می‌شود. در مورد معادلات با ضرایب متغیر، تنها برای معادلات مرتبه اول روش مشخصی وجود دارد و برای معادلات مرتبه دوم به بالاتر فرمول بسته‌ای وجود ندارد. در حالت خاص معادلات مرتبه دوم تنها دانستن یک جواب غیربدیهی برای پیدا کردن پایه جواب کافی است، چرا که جواب دوم از طریق فرمول کاهش مرتبه آبل به دست می‌آید. با دانستن پایه جواب معادلات خطی با ضرایب دل‌خواه، جواب خصوصی از طریق روش تغییر پارامتر لاگرانژ به دست می‌آید.

۱.۲ درس‌نامه

۱.۱.۲ معادلات دیفرانسیل خطی

در بخش ۶.۱.۱ فصل اول با معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه اول آشنا شدیم. در این قسمت به بررسی معادلات دیفرانسیل خطی از مراتب بالاتر می‌پردازیم. یادآوری می‌کنیم که یک معادله دیفرانسیل خطی از مرتبه n دارای نمایشی به صورت،

$$p_n(x)y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + p_1(x)y' + p_0(x)y = f(x),$$

است که در این کتاب فرض می‌کنیم ضرایب معادله یعنی $p_i(x)$ها توابعی پیوسته‌اند. هم‌چنین این معادله را هم‌گن می‌نامیم هرگاه $f(x) = 0$.

قضیه ۱.۱.۲. *مجموعه جواب‌های معادله دیفرانسیل خطی مرتبه n و هم‌گن $p_n(x)y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0$ تشکیل یک فضای برداری از بعد n می‌دهد.*

معنای قضیه بالا این است که:

اولا: اگر y_1 و y_2 دو جواب برای این معادله باشند، برای هر عدد حقیقی c، $y_1 + cy_2$ نیز

جوابی برای این معادله است. یعنی فضای جواب‌ها نسبت به جمع و ضرب اسکالر بسته است.

ثانیا: n جواب مستقل خطی y_1، y_2، ...، y_n موجودند که هر جواب معادله بالا را بتوان به صورت ترکیب خطی این جواب‌ها نوشت. این جواب‌ها را **پایه جواب همگن** می‌نامند. با مفهوم استقلال خطی بردارها در ریاضی عمومی آشنا شدید، استقلال خطی توابع در ادامه تعریف خواهد شد.

قضیه ۲.۱.۲. *فرض‌کنید y_1، y_2، ...، y_n، n جواب مستقل خطی برای معادله دیفرانسیل خطی مرتبه n و همگن با ضرایب پیوسته،*

$$p_n(x)y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0,$$

باشند. در این صورت توابع مشتق‌پذیر u_1، u_2، ...، u_n، موجودند که

$$y_p = u_1y_1 + u_2y_2 + \ldots + u_ny_n,$$

جوابی برای معادله غیرهمگن با ضرایب پیوسته،

$$p_n(x)y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_1(x)y' + p_0(x)y = f(x),$$

باشد.

مشابه قضیه ۱.۱.۲ برای معادلات خطی غیرهمگن می‌توان گفت:

قضیه ۳.۱.۲. *فرض‌کنید y_1، y_2، ...، y_n، n جواب مستقل خطی برای معادله دیفرانسیل خطی مرتبه n و همگن با ضرایب پیوسته،*

$$p_n(x)y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0,$$

باشند. در این صورت جواب معادله غیر همگن به صورت

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + \ldots + c_ny_n + y_p,$$

است.

مثال ۴.۱.۲. می‌دانیم سه تابع $y_1 = x^2 + 1$، $y_2 = x^2 + 2x^{-2}$ و $y_3 = x^2 + 2 + x^{-2}$ سه جواب معادله با ضرایب پیوسته $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$ در بازه $t > 0$ هستند، جواب معادله $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ را بیابید.

حل: *از قضیه بالا نتیجه می‌شود که اگر y_1 و y_2 دو جواب معادله خطی غیرهم‌گن باشند، $y_2 - y_1$ یک جواب برای معادله هم‌گن است، پس $y_2 - y_1 = 2x^{-2} - 1$ و $y_3 - y_2 = 2 - x^{-2}$ دو جواب برای معادله هم‌گن مرتبه دوم $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ هستند، بنابراین جواب معادله هم‌گن به صورت $y = c_1(2x^{-2} - 1) + c_2(2 - x^{-2})$ است.*

نتیجه: پاسخ معادلات دیفرانسیل خطی

معادله دیفرانسیل خطی غیر هم‌گن مرتبه n با ضرایب پیوسته

$$p_n(x)y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + p_1(x)y' + p_0(x)y = f(x),$$

را در نظر بگیرید. همچنین فرض کنید y_1، y_2، ...، y_n یک پایه جواب برای معادله هم‌گن باشد، در این صورت جواب عمومی معادله به صورت $y = y_h + y_p$ است که:

$$y_h = c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_ny_n,$$

$$y_p = u_1y_1 + u_2y_2 + \dots + u_ny_n,$$

در علوم مهندسی پاسخ هم‌گن y_h را **پاسخ ورودی صفر** یا **پاسخ گذرا** و پاسخ غیر هم‌گن y_p را **جواب خصوصی** یا **پاسخ ماندگار** می‌نامند.

سوالاتی که مطرح می‌شوند:

سوال اول: مستقل خطی بودن جواب‌ها به چه معنا است و چه‌طور بررسی می‌شود؟

سوال دوم: پایه جواب چه‌طور به دست می‌آید؟

سوال سوم: ضرایب c_i به چه چیزی وابسته هستند؟ چه‌طور به دست می‌آیند؟

سوال چهارم توابع u_i به چه چیزی وابسته هستند؟ چه‌طور به دست می‌آیند؟

در ادامه این بخش به بررسی پاسخ سوال اول می‌پردازیم. بخش ۲.۱.۲ به پاسخ سوال دوم و بخش‌های ۳.۱.۲، ۴.۱.۲ و ۵.۱.۲ به پاسخ سوال چهارم اختصاص دارند. برای پاسخ به سوال سوم توجه به این نکته ضروری است که برای مشخص شدن n ضریب مجهول c_i به n شرط اولیه یا مرزی پاسخ معادله خطی مرتبه n احتیاج داریم که با جای‌گذاری این شرایط در جواب عمومی $y = y_h + y_p$، ضرایب c_i معلوم می‌شوند.

تعریف ۵.۱.۲ (استقلال و وابستگی خطی). توابع $f_1, .., f_n : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را در I مستقل خطی نامند، هرگاه $\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n = 0$ نتیجه دهد، $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$، به عبارت دیگر هیچ کدام از f_iها را نتوان برحسب مابقی آن‌ها نوشت. در غیر این‌صورت این توابع را وابسته خطی می‌نامند.

مثال ۶.۱.۲. آیا $f(x) = \sin x$ و $g(x) = \cos x$ در $V = C^0([0, 2\pi])$ مستقل خطی هستند؟

حل: فرض کنیم $\lambda_1 \sin x + \lambda_2 \cos x = 0$، کافی است نشان دهیم $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. عبارت $\lambda_1 \sin x + \lambda_2 \cos x = 0$ یک اتحاد است، یعنی برای هر $x \in [0, 2\pi]$ برقرار است. با جای‌گذاری $x = \frac{\pi}{2}$ نتیجه می‌شود $\lambda_1 = 0$ و با جای‌گذاری $x = \pi$ نتیجه می‌شود $\lambda_2 = 0$. لذا $\lambda_1 \sin x + \lambda_2 \cos x = 0$ تنها هنگامی اتفاق می‌افتد که $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$؛ بنابراین مجموعه $\{\sin x, \cos x\}$ مستقل خطی است.

مثال ۷.۱.۲. آیا $f(x) = \cos 2x$، $g(x) = \sin^2 x$ و $h(x) = \cos^2 x$ در فضای $V = C^0([0, 2\pi])$ مستقل خطی هستند؟

حل: فرض کنیم $\lambda_1 \cos 2x + \lambda_2 \cos^2 x + \lambda_3 \sin^2 x = 0$، اگر تساوی $\lambda_1 \cos 2x +$

$\lambda_۲ \cos^۲ x + \lambda_۳ \sin^۲ x = ۰$ تنها هنگامی اتفاق بیفتد که $\lambda_۱ = \lambda_۲ = \lambda_۳ = ۰$، سه تابع بالا مستقل خطی هستند و در غیر این‌صورت وابسته خطی‌اند. اتحاد مثلثاتی $\cos ۲x = \cos^۲ x - \sin^۲ x$ نتیجه می‌دهد:

$$(۱)\cos ۲x + (-۱)\cos^۲ x + (۱)\sin^۲ x = ۰,$$

بنابراین مجموعه $\{\cos ۲x, \cos^۲ x, \sin^۲ x\}$ وابسته خطی است.

بررسی استقلال یا وابستگی خطی توابع جز در موارد خاص به سادگی امکان‌پذیر نیست. برای توابع مشتق‌پذیر به کمک مفهوم رانسکین می‌توان استقلال خطی را بررسی کرد.

تعریف ۸.۱.۲ (رانسکین[۱]). توابع دست‌کم $(n-۱)$ بار مشتق‌پذیر $f_۱$، $f_۲$، ... و f_n را روی بازه $[a,b]$ در نظر بگیرید، رانسکین این توابع به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$w(f_۱, f_۲, ..., f_n)(x) := det \begin{bmatrix} f_۱(x) & f_۲(x) & ... & f_n(x) \\ f'_۱(x) & f'_۲(x) & ... & f'_n(x) \\ ... & ... & ... & ... \\ f_۱^{(n-۱)}(x) & f_۲^{(n-۱)}(x) & ... & f_n^{(n-۱)}(x) \end{bmatrix}.$$

قضیه آبل: رانسکین و وابستگی خطی

توابع دست‌کم $(n-۱)$بار مشتق‌پذیر $f_۱$، $f_۲$، ... و f_n تعریف شده روی بازه $[a,b]$ را در نظر بگیرید.

الف) اگر $w(f_۱, f_۲, ..., f_n) \neq ۰$، در این صورت $\{f_۱, f_۲, ..., f_n\}$ مستقل خطی است.

ب) اگر $w(f_۱, f_۲, ..., f_n) = ۰$ ، درباره وابستگی یا استقلال خطی $\{f_۱, f_۲, ..., f_n\}$ چیزی نمی‌توان گفت، ولی اگر بدانیم این توابع nبار مشتق‌پذیر هستند، صفر شدن رانسکین وابستگی خطی را نتیجه می‌دهد. ♣

[۱] ۱۷۷۶-۱۸۸۳ فیلسوف و ریاضی-فیزیک‌دان لهستانی

مثال ۹.۱.۲. در مورد استقلال خطی توابع $f(x) = e^{ax}$ و $g(x) = e^{bx}$ بحث کنید.

حل: در حالت $a = b$ چون $f = g$، روشن است که این توابع وابسته خطی خواهند بود. برای حالت $a \neq b$ نشان می‌دهیم f و g مستقل خطی هستند، چرا که:

$$\begin{aligned} w(f,g)(x) &= \begin{vmatrix} e^{ax} & e^{bx} \\ ae^{ax} & be^{bx} \end{vmatrix} \\ &= (b-a)e^{(a+b)x} \neq ۰. \end{aligned}$$

مثال ۱۰.۱.۲. در مورد استقلال خطی توابع $f(x) = x^{۲}$ و $g(x) = x|x|$ بحث کنید.

حل: دقت کنید $g(x) = \begin{cases} x^{۲} & : x \geq ۰ \\ -x^{۲} & : x < ۰ \end{cases}$، پس $g'(x) = \begin{cases} ۲x & : x \geq ۰ \\ -۲x & : x < ۰ \end{cases}$، یعنی $g'(x) = ۲|x|$ و در نتیجه:

$$w(f,g)(x) = \begin{vmatrix} x^{۲} & x|x| \\ ۲x & ۲|x| \end{vmatrix} = ۲x^{۲}|x| - ۲x^{۲}|x| = ۰,$$

اکنون نشان می‌دهیم در همسایگی صفر این دو تابع وابسته خطی نیستند. در صورت وابسته خطی بودن ضریب c باید چنان موجود باشد که $g(x) = cf(x)$، یعنی $x|x| = cx^{۲}$. در همسایگی محذوف صفر با حذف x از دو طرف نتیجه می‌شود $|x| = cx$ و این تناقض است، چرا که در همسایگی صفر علامت cx عوض می‌شود اما علامت $|x|$ همواره مثبت است. بنابراین در همسایگی صفر این دو تابع مستقل خطی هستند. توجه کنید که چون g دوبار مشتق‌پذیر نبود، صفر شدن رانسکین، وابستگی خطی را نتیجه نداد.

قضیه (فرمول آبل): مشتق رانسکین

فرض کنید توابع n بار مشتق‌پذیر y_1، y_2، ... و y_n جواب‌هایی برای معادله با ضرایب پیوسته $p_n(x)y^{(n)}+p_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\ldots+p_1(x)y'+p_0(x)=0$ باشند، در این صورت با فرض $w(x)=w(y_1,y_2,\ldots,y_n)(x)$ داریم:

$$p_n(x)w'(x)+p_{n-1}(x)w(x)=0.$$

★ از حل معادله بالا نتیجه می‌شود $w(x)=w(a)e^{-\int_a^x \frac{p_{n-1}(u)}{p_n(u)}du}$، یعنی رانسکین یا در تمام نقاط صفر است یا در هیچ نقطه‌ای صفر نمی‌شود.

مثال ۱۱.۱.۲. فرض کنید y_1 و y_2 دو جواب معادله دیفرانسیل

$$(x^2+2)y''+(2x+1)y'+(\sin x)y=0,$$

باشند و $y_1(1)=2$، $y_1'(1)=3$، $y_2(1)=4$ و $y_2'(1)=3$.

الف) در مورد استقلال خطی این دو جواب بحث کنید. در ضمن $w(y_1,y_2)(0)$ را حساب کنید.

ب) اگر $\phi(x)$ جواب دیگری از این معادله باشد که $\phi(1)=8$ و $\phi'(1)=6$، نشان دهید $\phi(x)$ مضربی از $y_2(x)$ است. این ضریب را حساب کنید.

حل: الف) برای اثبات استقلال خطی کافی است در یک نقطه دل‌خواه مانند x_0 نشان دهیم $w(y_1,y_2)(x_0)\neq 0$، در نقطه $x=1$ داریم:

$$w(y_1,y_2)(1)=\begin{vmatrix} y_1(1) & y_2(1) \\ y_1'(1) & y_2'(1)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 3\end{vmatrix}=-6\neq 0,$$

پس y_1 و y_2 مستقل خطی هستند. برای محاسبه $w(y_1, y_2)(0)$ بنابر قضیه آبل داریم:

$$\begin{aligned} w(y_1, y_2)(0) &= w(y_1, y_2)(1) e^{-\int_1^0 \frac{2x+1}{x^2+1} dx} \\ &= -6 e^{\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+1} dx} \\ &= -6 e^{\ln|x^2+2| + \frac{1}{\sqrt{2}} \tan^{-1} \frac{x}{\sqrt{2}} |_0^1} = -6 e^{\ln \frac{3}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}}}. \end{aligned}$$

ب) روشن است که y_2 و ϕ وابسته خطی‌اند و مضربی از هم، چرا که رانسکین این دو تابع در $x = 1$ برابر صفر است،

$$w(y_2, \phi)(1) = \begin{vmatrix} y_2(1) & \phi(1) \\ y_2'(1) & \phi'(1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0,$$

دقت کنید که چون دو تابع y_2 و ϕ جواب‌هایی از یک معادله دیفرانسیل مرتبه دو هستند، بنابراین دست‌کم دوبار مشتق‌پذیر هستند و لذا صفر شدن رانسکین معادل وابستگی خطی است. لذا ضریب c چنان موجود است که $\phi = c y_2$، برای پیدا کردن این ضریب کافی است در یک نقطه مثلا $x = 1$ به مقادیر این توابع توجه کنیم،

$$c = \frac{\phi(1)}{y_2(1)} = \frac{8}{4} = 2,$$

لذا $\phi = 2y_2$.

۲.۱.۲ پایه جواب معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت

در این قسمت سعی داریم روشی برای یافتن پایه فضای جواب‌های معادلات خطی همگن با ضرایب ثابت ارائه دهیم. به یاد داریم که صورت کلی یک معادله خطی مرتبه n با ضرایب ثابت به صورت زیر است:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0.$$

تذکر ۱۲.۱.۲. گاهی اوقات متناظر عمل مشتق‌گیری $\frac{d}{dx}$ از عملگر D استفاده می‌شود. بنابراین متناظر مشتق مرتبه nام، $\frac{d^n}{dx^n}$، D^n می‌باشد. در این صورت معادله

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0,$$

به صورت

$$(a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0) y = p(D) y = 0,$$

قابل بیان است.

تذکر ۱۳.۱.۲. دقت کنید که تنها برای معادلات با ضرایب ثابت از عملگرها استفاده می‌شود، چرا که اگر $p(D)$ و $q(D)$ دو چندجمله‌ای با ضرایب ثابت از متغیر D باشند، $p(D)q(D)y = q(D)p(D)y$ اما برای چندجمله‌ای‌های با ضرایب متغیر این رابطه برقرار نیست، به عنوان مثال:

$$\begin{gathered}
(D-1)(D-x)y \neq (D-x)(D-1)y \\
(D-1)(y'-xy) \neq (D-x)(y'-y) \\
y'' - y' - xy' - y' + xy \neq y'' - y' - xy' - xy.
\end{gathered}$$

برای شروع بحث لازم است مفهوم معادله مشخصه یک معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت را بیان کنیم.

تعریف ۱۴.۱.۲ (معادله مشخصه). معادله مشخصه معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت مرتبه n،

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0,$$

را به صورت معادله جبری درجه n زیر

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0,$$

تعریف می‌کنیم.

در ادامه خواهیم دید که ماهیت ریشه‌های معادله مشخصه و تکرر آن‌ها چه‌گونه پایه فضای جواب هم‌گن را مشخص می‌کنند. از آن‌جایی که معادله مشخصه یک معادله جبری درجه n است، با احتساب تکرر دارای n ریشه در اعداد مختلط است. اکنون وضعیت پایه جواب هم‌گن را بر اساس ریشه‌های معادله مشخصه رده‌بندی می‌کنیم.

فرض کنید λ یک ریشه معادله مشخصه باشد، در این‌صورت بسته به حقیقی یا مختلط بودن و تکرر λ حالات زیر رخ می‌دهد:

پایه جواب معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت برای ریشه‌های حقیقی

♣

الف) ریشه حقیقی λ ساده باشد، متناظر λ در پایه جواب تابع زیر قرار دارد:

$$y = e^{\lambda x}.$$

ب) ریشه حقیقی λ مکرر از مرتبه k باشد، متناظر λ در پایه جواب k تابع زیر قرار دارند:

$$y_1 = e^{\lambda x}, y_2 = xe^{\lambda x}, \ldots, y_k = x^{k-1}e^{\lambda x}.$$

پایه جواب معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت برای ریشه‌های مختلط

الف) ریشه مختلط $\lambda = \alpha \pm i\beta$ ساده باشد، متناظر λ در پایه جواب دو تابع زیر قرار دارند:

$$y_۱ = e^{\alpha x}\cos\beta x, y_۲ = e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

ب) ریشه مختلط $\lambda = \alpha \pm i\beta$ مکرر از مرتبه k باشد، متناظر λ در پایه جواب $۲k$ تابع زیر قرار دارند:

$$y_۱ = e^{\alpha x}\cos\beta x, y_۲ = e^{\alpha x}\sin\beta x$$

$$y_۳ = xe^{\alpha x}\cos\beta x, y_۴ = xe^{\alpha x}\sin\beta x$$

$$\dots$$

$$y_{۲k-۱} = x^{k-۱}e^{\alpha x}\cos\beta x, y_{۲k} = x^{k-۱}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

مثال ۱۵.۱.۲. پاسخ عمومی معادله دیفرانسیل $y''' - y = ۰$ را به دست آورید.

حل: معادله مشخصه این معادله $\lambda^۳ - ۱ = (\lambda - ۱)(\lambda^۲ + \lambda + ۱)$ است که دارای یک ریشه حقیقی $\lambda = ۱$ و دو ریشه مختلط $\lambda = -\frac{۱}{۲} \pm i\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ می‌باشد. بنابراین پاسخ همگن و عمومی معادله به صورت زیر است:

$$y = y_h = c_۱e^x + c_۲e^{-\frac{۱}{۲}x}\cos\frac{\sqrt{۳}}{۲}x + c_۳e^{-\frac{۱}{۲}x}\sin\frac{\sqrt{۳}}{۲}x.$$

مثال ۱۶.۱.۲. جواب عمومی معادله دیفرانسیل

$$D^۳(D^۲ + D + ۱)(D^۲ + ۱)^۲(D^۲ - ۳D + ۲)y = ۰,$$

را به دست آورید.

حل: معادله مشخصه معادله بالا از درجه ۱۱ بوده و دارای ریشه‌های $\lambda = ۰$ با تکرار ۳، ریشه‌های ساده $\lambda = \frac{-۱ \pm i\sqrt{۳}}{۲}$، $\lambda = \pm i$ با تکرار ۲ و ریشه‌های ساده $\lambda = ۱$ و $\lambda = ۲$ می‌باشد، لذا جواب همگن و جواب عمومی به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} y = y_h &= c + c_۲ x + c_۳ x^۲ \\ &+ c_۴ e^{-\frac{۱}{۲}x} \cos \frac{\sqrt{۳}}{۲} x + c_۵ e^{-\frac{۱}{۲}x} \sin \frac{\sqrt{۳}}{۲} x \\ &+ c_۶ \cos x + c_۷ \sin x + c_۸ x \cos x + c_۹ x \sin x \\ &+ c_{۱۰} e^x + c_{۱۱} e^{۲x}. \end{aligned}$$

نتیجه ۱۷.۱.۲. *معادله خطی همگن با ضرایب ثابت*

$$a_n y^{(n)} + a_{n-۱} y^{(n-۱)} + \dots + a_۱ y' + a_۰ y = ۰,$$

را در نظر بگیرید، شرط لازم و کافی برای این‌که،

الف) $\lim_{x \to +\infty} y(x) = ۰$*، این است که قسمت حقیقی تمام ریشه‌های معادله مشخصه منفی باشد.*

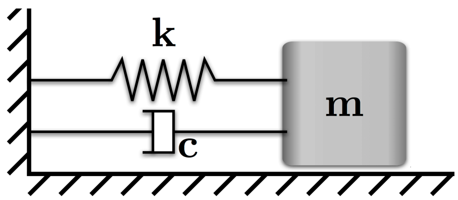
ب) $\lim_{x \to -\infty} y(x) = ۰$*، این است که قسمت حقیقی تمام ریشه‌های معادله مشخصه مثبت باشد.*

پ) جواب معادله نوسانی باشد، این است که تمام ریشه‌های معادله مشخصه غیر حقیقی باشند.

معادلات خطی با ضرایب ثابت نقشی اساسی در علوم کاربردی و مهندسی دارند. سیستم‌هایی که دارای مدل بر اساس معادلات مرتبه اول هستند سیستم‌های مرتبه اول نامیده می‌شوند. همین‌طور سیستم‌هایی که دارای مدل مرتبه دوم هستند، سیستم مرتبه دوم نامیده می‌شوند. در مدل‌سازی سود بانکی، معادله لژستیک و ... با معادله خطی مرتبه اول با ضرایب ثابت $ay' + by = ۰$ مواجه می‌شویم. در پدیده‌های طبیعی ضرایب معادله معمولا

اعدادی مثبت هستند و معادله را به صورت $\tau y' + y = 0$ استاندارد می‌کنند. τ ثابت زمانی نام دارد. پاسخ این معادله به صورت $y(t) = y(0)e^{-\frac{1}{\tau}t}$. در ادامه به بررسی نوسان‌گر جرم و فنر و مدار RLC سری که دو مثال مهم از سیستم‌های مرتبه دوم هستند می‌پردازیم.

نوسان‌گر جرم و فنر دارای کنترل کننده سرعت: فرض کنید جسمی به جرم m روی سطح بدون اصطکاکی مطابق شکل از یک سو به فنری با ثابت k و کنترل کننده خطی سرعت با ضریب c متصل است. این جسم را از حالت تعادلش خارج می‌کنیم، بنابر قانون



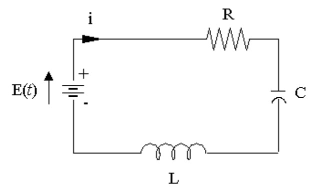
شکل ۱.۲: نوسان‌گر جرم و فنر دارای کنترل کننده سرعت

دوم نیوتن برآیند نیروهای وارد بر جسم برابر $ma = mx''(t)$ است. از طرفی نیروهای وارد بر جسم نیروی فنر $-kx(t)$ و نیروی کنترل کننده سرعت $-cx'(t)$ است، پس

$$mx''(t) = -kx(t) - cx'(t),$$

معادله بالا به صورت $x''(t) + \frac{c}{m}x'(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0$ مرتب می‌شود که معادله‌ای خطی مرتبه دوم با ضرایب ثابت و همگن است.

مدار RLC سری: در مدار زیر فرض کنید ولتاژ منبع $E(t)$ باشد، از قوانین کیرشهف نتیجه می‌شود جریان در معادله $I'' + \frac{R}{L}I' + \frac{1}{LC}I = \frac{E'(t)}{t}$ صدق می‌کند که خطی مرتبه دوم با ضرایب ثابت و غیرهمگن است. همان‌طور که مشاهده می‌کنیم در مثال دوم معادله ناهمگن و در مثال اول معادله همگن است. اگر در مثال اول نیز نیروی خارجی روی جسم اعمال شود، این نیروی خارجی به عنوان جمله غیرهمگن معادله در سمت راست تساوی ظاهر می‌شود. همانند این دو مثال که یکی از مکانیک و دیگری از الکتریسیته بود،



شکل ۲.۲: مدار سری

این مثال‌ها نشان می‌دهند معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت یک نظریه غنی برای مطالعه بسیاری از پدیده‌های فیزیکی است. در این قسمت می‌خواهیم پاسخ هم‌گن معادلات مرتبه دوم با ضرایب ثابت را بررسی کنیم. در مسائل فیزیکی معمولا ضرایب معادله اعدادی مثبت هستند و شکل استاندارد را معادله $y'' + 2\alpha y' + \omega_0^2 y = 0$ در نظر می‌گیرند که ω_0 فرکانس طبیعی میرا نشده و α ضریب تضعیف نامیده می‌شود. هم‌چنین کسر $\xi = \dfrac{\alpha}{\omega_0}$ نسبت میرایی نامیده می‌شود. معادله مشخصه معادله بالا دارای ریشه‌های زیر است:

$$\lambda_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -\alpha \pm \omega_0 \sqrt{\xi^2 - 1},$$

روشن است که ضریب α باید مثبت باشد، چرا که در غیر این‌صورت در بی‌نهایت جواب معادله بی‌نهایت می‌شود، یعنی در زمان طولانی جواب مساله ناپایدار است. هم‌چنین چون فرکانس ω_0 مثبت است، ξ نیز مثبت است. برای این‌گونه سیستم‌ها سه حالت زیر قابل تصور است.

حالت اول: معادله مشخصه دارای دو ریشه حقیقی متمایز باشد. در این حالت که میرای شدید یا فرامیرا نامیده می‌شود $\xi > 1$ است.

حالت دوم: معادله مشخصه دارای ریشه مضاعف باشد. در این حالت که میرای بحرانی نامیده می‌شود $\xi = 1$ است.

حالت سوم: معادله مشخصه دارای ریشه مختلط باشد. در این حالت که میرای ضعیف یا فرومیرا نامیده می‌شود $\xi < 1$ است. در این حالت اگر $\alpha = 0$ باشد، جواب نوسانی می‌شود. بسیاری از معادلات خطی با ضرایب متغیر وجود دارند که با تغییر متغیر مناسب

به معادلات خطی با ضرایب ثابت تبدیل می‌شوند. این بخش را با یکی از این معادلات که به معادله کوشی–اویلر شهرت دارد به پایان می‌بریم. در پایان این فصل چند حالت کلی‌تر از معادلات خطی با ضرایب متغیر که به ضرایب ثابت تبدیل می‌شوند را بررسی می‌کنیم.

معادله کوشی–اویلر

معادله مرتبه n با ضرایب متغیر

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 x y' + a_0 y = f(x),$$

معادله کوشی–اویلر نامیده می‌شود.

★ ایده حل: این معادله با تغییر متغیر $x = e^t$ ضرایبش ثابت می‌شوند.

★ روش سریع محاسبات: با فرض $\frac{d}{dx}y = y' = y^{(1)}$ و $\frac{d}{dt}y = \dot{y} = Dy$ می‌توان نوشت،

$$x^n y^{(n)} = D(D-1)(D-2)\ldots(D-(n-1))y,$$

لذا معادله با متغیر مستقل x و متغیر وابسته y به معادله ضریب ثابت با متغیر مستقل t و متغیر وابسته y تبدیل می‌شود. توجه کنید که پس از حل لازم است متغیر t از طریق $t = \ln x$ به x تبدیل شود.

مثال ۱۸.۱.۲. معادله زیر را حل کنید:

$$x^3 y''' - 3x^2 y'' + 6xy' - 6y = 0.$$

حل: معادله بالا یک معادله کوشی–اویلر همگن از مرتبه ۳ است، طبق محاسبات گفته

شده داریم:

$$\begin{aligned} xy' &= Dy = \dot{y} \\ x^{2}y'' &= D(D-1)y = \ddot{y} - \dot{y} \\ x^{3}y''' &= D(D-1)(D-2)y = \dddot{y} - 3\ddot{y} + 2\dot{y}, \end{aligned}$$

لذا معادله داده شده به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned} x^{3}y''' - 3x^{2}y'' + 6xy' - 6y &= (\dddot{y} - 3\ddot{y} + 2\dot{y}) - 3(\ddot{y} - \dot{y}) + 6(\dot{y}) - 6y \\ &= \dddot{y} - 6\ddot{y} + 11\dot{y} - 6y = 0, \end{aligned}$$

معادله مشخصه معادله با ضرایب ثابت بالا به صورت $\lambda^{3} - 6\lambda^{2} + 11\lambda - 6 = 0$ است. از آن‌جایی که مجموع ضرایب این معادله برابر صفر است، یکی از ریشه‌های این معادله $\lambda = 1$ می‌باشد که با تقسیم معادله بر $\lambda - 1$ دو ریشه دیگر معادله مشخصه $\lambda = 2$ و $\lambda = 3$ به دست می‌آیند، لذا جواب عمومی و جواب همگن برابر است با:

$$\begin{aligned} y = y_h &= c_1 e^{t} + c_2 e^{2t} + c_3 e^{3t} \\ &= c_1 x + c_2 x^{2} + c_3 x^{3}. \end{aligned}$$

مثال ۱۹.۱.۲. معادله زیر را حل کنید:

$$x^{2}(\ln x)^{2}y'' + x(\ln x)^{2}y' - 2y = 0.$$

حل: معادله داده شده شبیه معادله کوشی-اویلر است. با تغییر متغیر $t = \ln x$ نتیجه می‌شود $xy' = \dot{y}$ و $x^{2}y'' = \ddot{y} - \dot{y}$، لذا معادله داده شده به صورت زیر در می‌آید:

$$t^{2}(\ddot{y} - \dot{y}) + t^{2}\dot{y} - 2y = 0,$$

معادله بالا به صورت $t^{۲} - ۲y = ۰$ مرتب می‌شود که خود معادله‌ای کوشی–اویلر است. مجددا با تغییر متغیر $u = \ln t$ نتیجه می‌شود $t\dot{y} = \frac{dy}{du}$ و $t^{۲}\ddot{y} = \frac{d^{۲}y}{du^{۲}}$ لذا معادله اخیر به معادله با ضرایب ثابت

$$\frac{d^{۲}y}{du^{۲}} - \frac{dy}{du} - ۲y = ۰,$$

تبدیل می‌شود که دارای جواب عمومی $y = c_{۱}e^{-u} + c_{۲}e^{۲u}$ است. پس جواب معادله داده شده برابر است با:

$$y = \frac{c_{۱}}{t} + c_{۲}t^{۲} = \frac{c_{۱}}{\ln x} + c_{۲}(\ln x)^{۲}.$$

۳.۱.۲ پیداکردن جواب خصوصی به روش تغییر پارامتر لاگرانژ

در این قسمت می‌خواهیم به پاسخ سوال چهارم که در ابتدای این فصل در صفحه ۶۷ مطرح شد بپردازیم. معادله خطی مرتبه n غیرهمگن با ضرایب دل‌خواه

$$p_n(x)y^{(n)} + p_{n-۱}(x)y^{(n-۱)} + \ldots + p_{۱}(x)y' + p_{۰}(x)y = f(x),$$

را در نظر بگیرید. فرض کنید $y_{۱}$، $y_{۲}$، ...، y_n یک پایه جواب برای معادله همگن باشد، می‌دانیم جواب همگن، جواب خصوصی و جواب عمومی به شکل زیر هستند:

$$y_h = c_{۱}y_{۱} + c_{۲}y_{۲} + \ldots + c_ny_n$$

$$y_p = u_{۱}y_{۱} + u_{۲}y_{۲} + \ldots + u_ny_n$$

$$y = y_h + y_p,$$

توابع $y_{۱}$، $y_{۲}$، ...، y_n تنها به معادله همگن و توابع $u_{۱}$، $u_{۲}$، ...، u_n به پایه جواب و جمله ناهمگن $f(x)$ وابسته هستند. به کمک روش زیر که تغییر پارامتر لاگرانژ نام دارد، توابع $u_{۱}$، $u_{۲}$، ...، u_n برای هر معادله خطی با ضرایب دل‌خواه و با هر جمله ناهمگن $f(x)$ به دست می‌آیند. ایده روش تغییر پارامتر لاگرانژ این است که با مشتق‌گیری از جواب عمومی

$y = y_h + y_p$ و جای‌گذاری آن در معادله داده شده به دستگاه جبری n معادله، n–مجهولی می‌رسیم که پاسخ آن $u'_۱$، $u'_۲$، ...، u'_n است.

$$\begin{cases} y_۱ u'_۱ + \dots + y_n u'_n = ۰ \\ y'_۱ u'_۱ + \dots + y'_n u'_n = ۰ \\ \dots \\ y_۱^{(n-۱)} u'_۱ + \dots + y_n^{(n-۱)} u'_n = f(x) \end{cases}$$

برای محاسبه این توابع از روش کرامر استفاده می‌کنیم، u'_i برابر است با:

$$u'_i = \frac{\begin{vmatrix} y_۱(x) & \dots & ۰ & \dots & y_n(x) \\ y'_۱(x) & \dots & \dots & \dots & y'_n(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_۱^{(n-۱)}(x) & \dots & f(x) & \dots & y_n^{(n-۱)}(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_۱(x) & \dots & y_i(x) & \dots & y_n(x) \\ y'_۱(x) & \dots & y'_i(x) & \dots & y'_n(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_۱^{(n-۱)}(x) & \dots & y_i^{(n-۱)}(x) & \dots & y_n^{(n-۱)}(x) \end{vmatrix}},$$

از طرفی $\begin{vmatrix} y_۱(x) & \dots & y_i(x) & \dots & y_n(x) \\ y'_۱(x) & \dots & y'_i(x) & \dots & y'_n(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_۱^{(n-۱)}(x) & \dots & y_i^{(n-۱)}(x) & \dots & y_n^{(n-۱)}(x) \end{vmatrix} = w(y_۱, \dots, y_n)$،

قرار می‌دهیم $\begin{vmatrix} y_۱(x) & \dots & ۰ & \dots & y_n(x) \\ y'_۱(x) & \dots & \dots & \dots & y'_n(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_۱^{(n-۱)}(x) & \dots & ۱ & \dots & y_n^{(n-۱)}(x) \end{vmatrix} = w_i(y_۱, \dots, y_n)$، در این

صورت می‌توان نوشت:

$$u_i' = \frac{w_i(y_1, ..., y_n) f(x)}{w(y_1, ..., y_n)} \Rightarrow u_i = \int \frac{w_i(y_1, ..., y_n) f(x)}{w(y_1, ..., y_n)} dx,$$

چون پایه جواب هم‌گن از ابتدای بحث تثبیت شده است و بیم اشتباه نمی‌رود، $w(y_1, ..., y_n)$ را با w و $w_i(y_1, ..., y_n)$ را با w_i نمایش می‌دهیم، پس:

$$u_i = \int \frac{w_i f(x)}{w} dx,$$

به لحاظ نظری رابطه اخیر در تمام موارد کارآمد است، نکته منفی این است که اولا محاسبه دترمینان $n \times n$ کمی مشکل است و ثانیا انتگرال $\int \frac{w_i f(x)}{w} dx$ ممکن است به آسانی به دست نیاید. در حالت خاص معادلات مرتبه دوم که معمولا بدون نرم‌افزار و با دست انجام می‌شود، با دانستن پایه جواب هم‌گن $\{y_1, y_2\}$ برای معادله $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$ داریم:

$$u_1 = \int \frac{w_1(y_1, y_2) r(x)}{w(y_1, y_2)} dx = \int \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ 1 & y_2' \end{vmatrix} r(x)}{w(y_1, y_2)} dx = -\int \frac{y_2 r(x)}{w(y_1, y_2)} dx,$$

$$u_2 = \int \frac{w_2(y_1, y_2) r(x)}{w(y_1, y_2)} dx = \int \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & 1 \end{vmatrix} r(x)}{w(y_1, y_2)} dx = \int \frac{y_1 r(x)}{w(y_1, y_2)} dx.$$

مثال ۲۰.۱.۲. پاسخ عمومی معادله $y'' - 5y' + 6y = \sin 4x$ را بیابید.

حل: معادله مشخصه معادله داده شده دارای دو ریشه $\lambda = 2$ و $\lambda = 3$ می‌باشد، لذا جواب معادله هم‌گن برابر است با:

$$y_h = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x},$$

اکنون جواب خصوصی را به روش تغییر پارامتر لاگرانژ به دست می‌آوریم. توجه کنید

$$w(e^{2x}, e^{3x}) = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{3x} \\ 2e^{2x} & 3e^{3x} \end{vmatrix} = e^{5x},$$

هم‌چنین

$$u_1 = -\int \frac{y_2 r(x)}{w(y_1, y_2)} dx = -\int \frac{e^{3x} \sin 4x}{e^{5x}} dx = \frac{e^{-2x}}{10}(\sin 4x + 2\cos 4x),$$

$$u_2 = \int \frac{y_1 r(x)}{w(y_1, y_2)} dx = \int \frac{e^{2x} \sin 4x}{e^{5x}} dx = -\frac{e^{-3x}}{25}(3\sin 4x + 4\cos 4x),$$

لذا جواب خصوصی برابر است با:

$$\begin{aligned} y_p &= u_1(x)e^{2x} + u_2(x)e^{3x} \\ &= \frac{e^{-2x}}{10}(\sin 4x + 2\cos 4x)e^{2x} - \frac{e^{-3x}}{25}(3\sin 4x + 4\cos 4x)e^{3x} \\ &= -\frac{1}{50}\sin 4x + \frac{1}{25}\cos 4x, \end{aligned}$$

و نهایتا جواب عمومی برابر است با:

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} - \frac{1}{50}\sin 4x + \frac{1}{25}\cos 4x.$$

مثال ۲۱.۱.۲. می‌دانیم $y_1 = x$ و $y_2 = xe^x$ دو جواب مستقل خطی برای هم‌گن شده معادله $x^2 y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = x^3$ هستند، جواب عمومی این معادله را بیابید.

حل: جواب هم‌گن برابر است با:

$$y_h = c_1 x + c_2 x e^x,$$

اکنون جواب خصوصی را به روش تغییر پارامتر لاگرانژ به دست می‌آوریم. توجه کنید

$$w(x, xe^x) = \begin{vmatrix} x & xe^x \\ 1 & e^x + xe^x \end{vmatrix} = x^2 e^x,$$

توجه کنید که $r(x) = \frac{x^۳}{x^۲} = x$، پس:

$$u_۱ = -\int \frac{y_۲ r(x)}{w(y_۱, y_۲)} dx = -\int \frac{xe^x x}{x^۲ e^x} dx = -\int dx = -x,$$
$$u_۲ = \int \frac{y_۱ r(x)}{w(y_۱, y_۲)} dx = \int \frac{xx}{x^۲ e^x} dx = \int e^{-x} dx = -e^{-x},$$

لذا جواب خصوصی برابر است با:

$$\begin{aligned} y_p &= u_۱(x)x + u_۲(x)xe^x \\ &= -xx - e^{-x}xe^x \\ &= -x^۲ - x, \end{aligned}$$

و نهایتا جواب عمومی برابر است با:

$$y = c_۱ x + c_۲ xe^x - x^۲ - x.$$

۴.۱.۲ پیدا کردن جواب خصوصی به روش ضرایب نامعین

جواب خصوصی با ضرایب نامعین برای جمله غیرهم‌گن نمایی-چندجمله‌ای

فرض کنید $M(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه d باشد، در این صورت جواب خصوصی معادله

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = e^{ax} M(x),$$

♣

به صورت زیر است:

$$y_p = x^m e^{ax} R(x),$$

که در این‌جا m تعداد تکرار ریشه $\lambda = a$ در معادله مشخصه و $R(x)$ یک چندجمله‌ای درجه d با ضرایب نامعین است.

مثال ۲۲.۱.۲. پاسخ عمومی معادله $y''' - 4y' = e^{-2x}$ را به روش ضرایب نامعین بیابید.

حل: معادله مذکور خطی مرتبه سه ناهم‌گن با ضرایب ثابت است که جمله ناهم‌گن آن به صورت e^{-2x} می‌باشد، لذا با نمادگذاری قضیه بالا $a = -2$ و $M(x) = 1$ که چندجمله‌ای از درجه صفر است. برای جواب هم‌گن توجه کنید که چندجمله‌ای مشخصه به صورت $p(\lambda) = \lambda^3 - 4\lambda = \lambda(\lambda - 2)(\lambda + 2)$ است که دارای ریشه‌های ۰ و ± 2 می‌باشد، لذا جواب هم‌گن برابر است با:

$$y_h = c_1 e^{0x} + c_2 e^{2x} + c_3 e^{-2x},$$

با توجه به جمله غیرهم‌گن e^{-2x}، جواب خصوصی به صورت $x^m e^{-2x}(A)$ است که m برابر تکرر ۲- در چندجمله‌ای مشخصه یعنی ۱ است، لذا $y_p = Axe^{-2x}$ است. بنابراین جواب عمومی معادله به صورت $y = c_1 e^{0x} + c_2 e^{2x} + c_3 e^{-2x} + Axe^{-2x}$ است، برای

یافتن ضریب نامعلوم A کافی است جواب عمومی به دست آمده را در معادله جای‌گذاری کنیم که از این‌جا $A = \frac{۱}{۸}$ به دست می‌آید.

مثال ۲۳.۱.۲. معادله زیر را حل کنید.

$$x^{۲}y'' + ۳xy' - ۳y = (\ln x)^{۳} + ۲\ln x - x^{۲} + ۱.$$

حل: معادله بالا یک معادله کوشی–اویلر غیرهم‌گن از مرتبه ۲ است، با تغییر متغیر $x = e^{t}$ داریم:

$$xy' = Dy = \dot{y}$$
$$x^{۲}y'' = D(D-۱)y = \ddot{y} - \dot{y},$$

لذا معادله داده شده به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\ddot{y} - \dot{y} + ۳\dot{y} - ۳y = t^{۳} + ۲t - e^{۲t} + ۱,$$

هم‌گن شده معادله بالا دارای معادله مشخصه $\lambda^{۲} + ۲\lambda - ۳ = ۰$ است. از آن‌جایی که مجموع ضرایب این معادله برابر صفر است، یکی از ریشه‌های این معادله $\lambda = ۱$ می‌باشد و ریشه دیگر $\lambda = -۳$ لذا جواب هم‌گن برابر است با:

$$y_{h} = c_{۱}e^{t} + c_{۲}e^{-۳t},$$

جواب خصوصی را به روش ضرایب نامعین به دست می‌آوریم. متناظر $t^{۳} + ۲t + ۱$ چندجمله‌ای درجه سه $At^{۳} + Bt^{۲} + Ct + D$ و متناظر $-e^{۲t}$، عبارت $Ee^{۲t}$ می‌باشد، یعنی

$$y_{p} = At^{۳} + Bt^{۲} + Ct + D + Ee^{۲t},$$

با جای‌گذاری عبارت بالا در معادله $A = -\frac{۱}{۳}$، $B = -\frac{۲}{۳}$، $C = -\frac{۲۰}{۹}$، $D = -\frac{۶۱}{۲۷}$ و $E = -\frac{۱}{۵}$ به دست می‌آید. بنابراین جواب عمومی معادله برابر است با:

$$\begin{aligned} y &= c_۱ e^t + c_۲ e^{-۳t} - \frac{۱}{۳}t^۳ - \frac{۲}{۳}t^۲ - \frac{۲۰}{۹}t - \frac{۶۱}{۲۷} - \frac{۱}{۵}e^{۲t} \\ &= c_۱ x + c_۲ x^{-۳} - \frac{۱}{۳}(\ln x)^۳ - \frac{۲}{۳}(\ln x)^۲ - \frac{۲۰}{۹}\ln x - \frac{۶۱}{۲۷} - \frac{۱}{۵}x^۲. \end{aligned}$$

جواب خصوصی با ضرایب نامعین برای جمله غیرهم‌گن نمایی-چندجمله‌ای-مثلثاتی

♣ فرض کنید $M(x)$ و $N(x)$ دو چندجمله‌ای باشند، در این صورت جواب خصوصی معادله

$$\begin{aligned} a_n y^{(n)} + a_{n-۱} y^{(n-۱)} + \dots + a_۱ y' + a_۰ y \\ = e^{\alpha x}(M(x)\cos\beta x + N(x)\sin\beta x), \end{aligned}$$

به صورت زیر است:

$$y_p = x^m e^{\alpha x}(R(x)\cos\beta x + S(x)\sin\beta x),$$

در این‌جا m تعداد تکرار ریشه $\lambda = \alpha + i\beta$ در معادله مشخصه، $R(x)$ و $S(x)$ دو چندجمله‌ای درجه d با ضرایب نامعین هستند که d ماکسیمم درجات M و N می‌باشد.

مثال ۲۴.۱.۲. صورت کلی جواب خصوصی معادله زیر را بنویسید.

$$(D^۲ - ۴D + ۱۳)(D^۲ + D)^۲ y = x\sinh x + ۲xe^x \sin ۲x + x^۳ + ۴.$$

حل: با توجه به این که $\sinh x = \frac{۱}{۲}e^x - \frac{۱}{۲}e^{-x}$، جمله غیرهمگن را می‌توان به صورت $f(x) = f_۱(x) + f_۲(x) + f_۳(x) + f_۴(x)$ در نظر گرفت که $f_۱(x) = \frac{۱}{۲}xe^x$،

$f_2(x) = -\frac{1}{2}xe^{-x}$، $f_3(x) = 2xe^x \sin 2x$ و $f_4(x) = x^3 + 4$. چون ۱ ریشه معادله مشخصه نیست، $y_{p_1} = x^0 e^x(Ax + B)$ است، ریشه $\lambda = -1$ دارای تکرار ۲ است، لذا $y_{p_2} = x^2 e^{-x}(Cx + D)$، چون $1 + 2i$ ریشه معادله مشخصه نیست، $y_{p_3} = x^0 e^x((Ex + F)\cos 2x + (Gx + H)\sin 2x)$، ریشه $\lambda = 0$ دارای تکرار ۲ است، $y_{p_4} = x^2(Ix^3 + Jx^2 + Kx + L)$ می‌باشد، پس جواب خصوصی به صورت زیر است:

$$y_p = e^x(Ax + B) + x^2 e^{-x}(Cx + D)$$
$$+e^x((Ex + F)\cos 2x + (Gx + H)\sin 2x) + x^2(Ix^3 + Jx^2 + Kx + L).$$

۵.۱.۲ پیدا کردن جواب خصوصی به روش عمل‌گری

از این روش برای پیدا کردن جواب خصوصی معادلات خطی غیرهم‌گن با ضرایب ثابت استفاده می‌شود. مزیت این روش در این است که برای معادلات با هر مرتبه‌ای به طور مستقیم و با اندک محاسبه‌ای جواب خصوصی را به دست می‌دهد. محدودیت این روش در این است که تنها برای معادلات با ضرایب ثابت آن هم وقتی که جمله غیرهم‌گن معادله نمایی، چندجمله‌ای و یا مثلثاتی ساده باشد قابل استفاده است. از این روش برای حل دستگاه‌های معادلات خطی با ضرایب ثابت نیز استفاده می‌شود.

در این روش به طور قراردادی عمل مشتق‌گیری $\frac{d}{dx}$ را با عمل‌گر D، عمل انتگرال‌گیری $\int dx$ را با عمل‌گر $\frac{1}{D}$. و همین طور سایر عملیات‌ها را متناظر می‌کنیم. به عنوان مثال مشتق‌گیری مرتبه nام $\frac{d^n}{dx^n}$ متناظرش D^n است. استراتژی این روش به این شکل است که معادله دیفرانسیل $a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f(x)$ به معادله جبری $(a_n D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0)y = f(x)$ متناظر می‌شود، با نام‌گذاری $p(D) = a_n D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0$، کافی است معادله $p(D)y = f(x)$

را حل کنیم که از این معادله نتیجه می‌شود جواب خصوصی برابر است با:

$$y_p = \frac{1}{p(D)} f(x),$$

لذا لازم است برای جمله غیرهمگن $f(x)$ بتوانیم $\frac{1}{p(D)}$ را به دست آوریم. قبل از شروع محاسبات ابتدا به قضیه مقدماتی زیر توجه کنید.

قضیه ۲.۱.۲۵. *فرض کنید $p(D)$ یک چندجمله‌ای بر حسب D باشد، در این صورت عمل‌گر $\frac{1}{p(D)}$ خطی است، یعنی برای توابع پیوسته $f(x)$ و $g(x)$ و عدد حقیقی λ داریم:*

$$\frac{1}{p(D)}(f(x) + \lambda g(x)) = \frac{1}{p(D)} f(x) + \lambda \frac{1}{p(D)} g(x).$$

عمل‌گر $\frac{1}{D}$ را می‌شناسیم، چرا که $\frac{1}{D} f(x) = \int f(x)dx$. برای درک به‌تر ادامه این روند سعی می‌کنیم عمل‌گر $\frac{1}{D-a}$ را شناسایی کنیم. فرض کنیم $\frac{1}{D-a} f(x)$ برابر y باشد، پس $(D-a)y = f(x)$؛ یعنی y جواب خصوصی معادله $y' - ay = f(x)$ است. از فصل اول می‌دانیم که با فرض $y_1 = e^{-\int -adx} = e^{ax}$ جواب خصوصی این معادله برابر است با:

$$\begin{aligned} y_p &= (\int \frac{f(x)}{y_1}) y_1 \\ &= e^{ax} \int e^{-ax} f(x)dx. \end{aligned}$$

مثال ۲.۱.۲۶. جواب خصوصی معادله $y'' - 4y' + 3y = e^{6x}$ را به روش عمل‌گری به دست آورید.

حل: معادله مذکور متناظر $(D^2 - D + 3)y = e^{6x}$ است، لذا جواب خصوصی برابر

است با:

$$\begin{aligned} y_p &= \frac{1}{D^2 - D + 3} e^{6x} \\ &= (\frac{1}{2}\frac{1}{D-3} - \frac{1}{2}\frac{1}{D-1}) e^{6x} \\ &= \frac{1}{2} e^{3x} \int e^{-3x} e^{6x} dx - \frac{1}{2} e^{x} \int e^{-x} e^{6x} dx \\ &= \frac{1}{2} e^{3x} (\frac{1}{3} e^{3x}) - \frac{1}{2} e^{x} (\frac{1}{5} e^{5x}) \frac{1}{15} e^{6x} \\ &= \frac{1}{6}{}^{6x} - \frac{1}{150} e^{12x}. \end{aligned}$$

محاسبه عمل‌گر وارون برای توابع نمایی

فرض کنید $p(D)$ چندجمله‌ای و $f(x) = e^{ax}$، در این صورت:

★ اگر a ریشه $p(D)$ نباشد:

$$\frac{1}{p(D)} e^{ax} = \frac{1}{p(a)} e^{ax}.$$

★ اگر a ریشه $p(D)$ با تکرر k باشد، یعنی $p(D) = (D-a)^k q(D)$ و $q(D) \neq 0$:

$$\frac{1}{p(D)} e^{ax} = \frac{x^k}{p^{(k)}(a)} e^{ax} = \frac{x^k}{k! q(a)} e^{ax}.$$

مثال ۲۷.۱.۲. جواب عمومی معادله $y^{(4)} + 2y^{(3)} - 3y^{(2)} = e^x$ را به روش عمل‌گری به دست آورید.

حل: چندجمله‌ای مشخصه $p(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^3 - 3\lambda^2$ دارای ریشه‌های ۰ با تکرار ۲، ۳− و ۱ است، لذا جواب هم‌گن برابر است با:

$$y_h = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-3x} + c_4 e^{x},$$

برای پیدا کردن جواب غیرهمگن متناظر جمله e^x کافی است به ریشه ۱ در $P(D) = D^۲(D-۱)(D+۳)$ توجه کنیم. این ریشه دارای تکرار یک است و $q(D) = D^۲(D+۳)$، بنابراین جواب خصوصی برابر است با:

$$\begin{aligned} y_p &= \frac{۱}{D^۲(D-۱)(D+۳)}e^x \\ &= \frac{x}{D^۲(D+۳)}e^x = \frac{x}{۴}e^x, \end{aligned}$$

لذا جواب عمومی معادله برابر است با:

$$y = c_۱ + c_۲x + c_۳e^{-۳x} + c_۴e^x + \frac{x}{۴}e^x.$$

محاسبه عمل‌گر وارون برای چندجمله‌ای‌ها

فرض کنید $p(D)$ چندجمله‌ای و $f(x)$ یک چندجمله‌ای درجه n باشد، برای محاسبه $\frac{۱}{p(D)}f(x)$ کافی است اثر خارج قسمت تقسیم ۱ بر $p(D)$ تا جمله D^n را روی $f(x)$ به دست آوریم.

مثال ۲۸.۱.۲. جواب خصوصی معادله $y'' + ۴y' + ۸y = x^۲ + ۲x$ را به روش عمل‌گری به دست آورید.

حل: با تقسیم ۱ بر $D^۲ + ۴D + ۸$، خارج قسمت به صورت $\frac{۱}{۸} - \frac{۱}{۱۶}D + \frac{۱}{۶۴}D^۲ + \dots$ به دست می‌آید، لذا جواب خصوصی معادله مذکور برابر است با:

$$\begin{aligned} y_p &= (\frac{۱}{۸} - \frac{۱}{۱۶}D + \frac{۱}{۶۴}D^۲)(x^۲ + ۲x) \\ &= (\frac{۱}{۸}x^۲ - \frac{۱}{۸}x + \frac{۱}{۳۲}) + (\frac{۱}{۴}x - \frac{۱}{۸}) = \frac{۱}{۸}x^۲ + \frac{۱}{۸}x - \frac{۳}{۳۲}. \end{aligned}$$

محاسبه عمل‌گر وارون برای توابع مثلثاتی

فرض کنید $p(D)$ چندجمله‌ای و $f(x) = \sin\beta x$ یا $f(x) = \cos\beta x$، برای محاسبه $\frac{۱}{p(D)}f(x)$ به جای $D^۲$ در $p(D)$ قرار می‌دهیم $-\beta^۲$، در این صورت:

★ اگر مخرج صفر نشود:

حالت اول: اگر در مخرج D باقی نماند، آنگاه جواب خصوصی به دست آمده است.

حالت دوم: اگر در مخرج عبارت $aD + b$ باقی ماند، با ضرب مزدوج $aD + b$ یعنی $aD - b$ در صورت و مخرج سعی می‌کنیم در مخرج $D^۲$ بسازیم و فرآیند جای‌گذاری $-\beta^۲$ به جای $D^۲$ را ادامه دهیم.

★ اگر مخرج صفر شود: مشابه حالت $f(x) = e^{ax}$ باید دید جای‌گذاری $-\beta^۲$ به جای $D^۲$ تا چه مرتبه‌ای مخرج را صفر می‌کند، به عنوان مثال اگر $p^{(k)}$ را صفر کند اما $p^{(k+۱)}$ را صفر نکند، تکرر k است. لذا داریم:

$$\frac{۱}{p(D)}\cos\beta x = Re(\frac{۱}{p(ia)}e^{i\beta x}) = Re(\frac{x^k}{p^{(k)}(i\beta)}e^{i\beta x})$$
$$\frac{۱}{p(D)}\sin\beta x = Im(\frac{۱}{p(ia)}e^{i\beta x}) = Im(\frac{x^k}{p^{(k)}(i\beta)}e^{i\beta x})$$

مثال ۲۹.۱.۲. معادله $y^{(۴)} + ۲y'' + y = ۴\sin x$ را به روش عمل‌گری حل کنید.

حل: معادله مشخصه معادله داده شده $(\lambda^۲ + ۱)^۲ = ۰$ است، این معادله دارای ریشه‌های $\lambda = \pm i$ با تکرر دو می‌باشد، لذا جواب عمومی معادله برابر است با:

$$y_h = c_۱\cos x + c_۲\sin x + c_۳x\cos x + c_۴x\sin x,$$

برای جواب خصوصی به روش عمل‌گری برای $\sin x$ چون ضریب متغیر داخل سینوس $\beta = ۱$ است، جای‌گذاری $D^۲ = -۱$، $p(D) = (D^۲ + ۱)^۲$، چندجمله‌ای مشخصه صفر

می‌شود و به دلیل وجود توان دو این ریشه از تکرر ۲ است، پس:

$$\begin{aligned} y_p = \frac{1}{p(D)}(4\sin x) &= 4Im(\frac{x^2}{p^{(2)}(i)}e^{ix}) \\ &= 4Im(\frac{x^2}{12(i)^2+4}e^{ix}) = 4\frac{x^2}{-8}\sin x = -\frac{x^2}{2}\sin x, \end{aligned}$$

لذا جواب عمومی معادله برابر است با:

$$y = c_1\cos x + c_2\sin x + c_3 x\cos x + c_4 x\sin x - \frac{x^2}{2}\sin x.$$

خاصیت ضرب در نمایی و ضرب در چندجمله‌ای‌ها

♣ فرض کنید $p(D)$ یک چندجمله‌ای بر حسب D و $f(x)$ تابعی پیوسته باشد. در این صورت:

$$\frac{1}{p(D)}(e^{ax}f(x)) = e^{ax}\frac{1}{p(D+a)}f(x)$$
$$\frac{1}{p(D)}(xf(x)) = x\frac{1}{p(D)}f(x) - \frac{p'(D)}{p^2(D)}f(x)$$

مثال ۳۰.۱.۲. جواب عمومی معادله $y'' - 2y' + y = x\sqrt{x}e^x$ را به دست آورید.

حل: معادله مشخصه این مساله به صورت $\lambda^2 - 2\lambda + 1$ می‌باشد که دارای ریشه $\lambda = 1$ با تکرر دو است، لذا پایه جواب همگن به صورت $y_1 = e^x$ و $y_2 = xe^x$ به دست

می‌آید. برای محاسبه جواب خصوصی به روش عمل‌گری داریم:

$$\begin{aligned} y_p &= \frac{1}{D^2-2D+1}(x^{\frac{3}{2}}e^x) \\ &= \frac{1}{(D-1)^2}(x^{\frac{3}{2}}e^x) \\ &= e^x\frac{1}{D^2}x^{\frac{3}{2}} \\ &= e^x\iint x^{\frac{3}{2}}dxdx = e^x\int\frac{1}{\frac{5}{2}}x^{\frac{5}{2}}dx = e^x(\frac{2}{5}.\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}) \end{aligned}$$

در نتیجه جواب عمومی معادله برابر است با:

$$y = c_1e^x + c_2xe^x + \frac{4}{35}e^xx^{\frac{7}{2}}.$$

مثال ۳۱.۱.۲. جواب خصوصی معادله $y^{(4)} + y = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}\sin x + e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x$ را به روش عمل‌گری به دست آورید.

حل: جواب خصوصی متناظر $e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}\sin x$ برابر است با:

$$\begin{aligned} y_{p_1} = \frac{1}{D^4+1}(e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}\sin x) &= e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}Im\frac{1}{(D+\frac{\sqrt{2}}{2})^4+1}e^{ix} \\ &= e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}Im\frac{1}{D^4+2\sqrt{2}D^3+3D^2+\sqrt{2}D+\frac{1}{4}}e^{ix} \\ &= e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}Im\frac{1}{1-2\sqrt{2}D-3+\sqrt{2}D+\frac{1}{4}}e^{ix} \\ &= e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}Im\frac{-1}{\sqrt{2}D+\frac{7}{4}}e^{ix} \\ &= -e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}Im\frac{\sqrt{2}D-\frac{7}{4}}{2D^2-\frac{49}{16}}e^{ix} \\ &= \frac{16}{81}e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}(\sqrt{2}D-\frac{7}{4})(\sin x) \\ &= \frac{16}{81}e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}(\sqrt{2}\cos x-\frac{7}{4}\sin x). \end{aligned}$$

به طور مشابه جواب خصوصی نظیر $e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}\cos\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$، $y_{p_2} = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}\cos\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$ به دست می‌آید. لذا جواب خصوصی برابر است با:

$$y_p = \frac{16}{81}e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}(\sqrt{2}\cos x - \frac{7}{4}\sin x) + e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x.$$

۶.۱.۲ پایه جواب معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه دوم با ضرایب متغیر

پیدا کردن کردن پایه جواب معادلات خطی با ضرایب متغیر کار آسانی نیست، حتی برای معادلات مرتبه دوم که تنها نیاز به دو جواب مستقل خطی داریم. فرمول زیر موسوم به روش کاهش مرتبه آبل، روشی ارائه می‌دهد تا با معلوم بودن یک جواب بتوان یک جواب مستقل خطی دیگر برای معادله خطی مرتبه دوم با ضرایب متغیر به دست آورد. در این روش با معلوم بودن y_1، جواب دوم را به صورت $y_2 = uy_1$ در نظر می‌گیریم، سپس با مشتق‌گیری و جای‌گذاری در معادله، u به صورتی که در ادامه می‌آید، به دست خواهد آمد[2].

---

[2] با مشتق‌گیری از $y_2 = uy_1$، $y_2' = u'y_1 + uy_1'$ و $y_2'' = u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1''$ به دست می‌آید. با جای‌گذاری در معادله داریم:

$$(u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1'') + p(x)(u'y_1 + uy_1') + q(x)(uy_1) = 0,$$

تساوی بالا به معادله $y_1u'' + (2y_1' + p(x)y_1)u' = 0$ منجر می‌شود که معادله‌ای مرتبه اول بر حسب u' است و از این‌جا $u = \int \frac{1}{y_1^2}e^{-\int p(x)dx}dx$ به دست می‌آید.

روش کاهش مرتبه آبل

فرض کنید y_1 یک جواب برای معادله $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ باشد، در این صورت

$$y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x)dx} dx,$$

یک جواب معادله و مستقل از y_1 است و بنابراین جواب عمومی معادله به صورت $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ به دست می‌آید.

مثال ۳۲.۱.۲. می‌دانیم $y_1 = \sin e^x$ یک جواب معادله $y'' - y' + e^{2x}y = 0$ است، جواب عمومی این معادله را به دست آورید.

حل: بنابر فرمول آبل داریم:

$$\begin{aligned} y_2 &= \sin e^x \int \frac{1}{\sin^2 e^x} e^{-\int -dx} dx \\ &= \sin e^x \int \frac{e^x}{\sin^2 e^x} dx, \end{aligned}$$

با تغییر متغیر $u = e^x$ نتیجه می‌شود $du = e^x dx$، پس:

$$\begin{aligned} y_2 &= \sin e^x \int \frac{du}{\sin^2 u} \\ &= \sin e^x \int (1 + \cot^2 u) du \\ &= -\sin e^x \cot u = -\sin e^x \cot e^x = -\cos e^x, \end{aligned}$$

در نتیجه جواب عمومی معادله برابر است با:

$$y = c_1 \sin e^x - c_2 \cos e^x.$$

مثال ۳۳.۱.۲. می‌دانیم یک جواب معادله

$$xy'' - 2(x+1)y' + (x+2)y = 0,$$

به صورت e^{mx} است، جواب عمومی این معادله را به دست آورید.

حل: با جای‌گذاری $y = e^{mx}$ داریم:

$$x(m^۲ e^{mx}) - ۲(x+۱)(me^{mx}) + (x+۲)e^{mx} = ۰,$$

از تساوی بالا $m = ۱$ به دست می‌آید، لذا $y_۱ = e^x$ یک جواب معادله است. برای جواب دوم معادله به روش کاهش مرتبه آبل داریم:

$$\begin{aligned} y_۲ &= y_۱ \int \frac{۱}{y_۱^۲} e^{-\int p(x)dx} dx \\ &= e^x \int e^{-۲x} e^{-\int -\frac{۲(x+۱)}{x} dx} dx \\ &= e^x \int e^{-۲x} e^{۲x+۲\ln x} dx = e^x \int x^۲ dx = \frac{۱}{۳} x^۳ e^x, \end{aligned}$$

لذا با جذب ضریب $\frac{۱}{۳}$ در ضریب ثابت جواب معادله همگن برابر است با:

$$y_h = c_۱ e^x + c_۲ x^۳ e^x,$$

در برخی از معادلات مرتبه دوم با ضرایب متغیر خاص جواب اول نیز قابل تشخیص است. در ادامه دو مورد از این حالات خاص را بیان می‌کنیم.

دو حالت خاص معادلات مرتبه دوم با ضرایب متغیر

معادله خطی مرتبه دوم با ضرایب متغیر $y'' + p(x)y' + q(x)y = ۰$ را در نظر بگیرید:

★ حالت خاص ۱: اگر $\lambda^۲ + \lambda p(x) + q(x) = ۰$، در این صورت $y_۱ = e^{\lambda x}$ یک جواب برای معادله بالا است.

★ حالت خاص ۲: اگر $p(x) + xq(x) = ۰$، در این صورت $y = x$ یک جواب برای معادله بالا است.

مثال ۳۴.۱.۲. معادله دیفرانسیل $(x+1)y''+(2x+1)y'+xy=0$ را حل کنید.

حل: با بررسی حالت اول داریم:

$$\lambda^2+\lambda\frac{2x+1}{x+1}+\frac{x}{x+1}=0\Rightarrow\lambda=-1,$$

بنابراین یکی از جواب‌های معادله داده شده $y_1=e^{-x}$ می‌باشد، جواب دوم بنابر فرمول آبل برابر است با:

$$\begin{aligned}y_2&=\frac{1}{e^{-x}}\int\frac{1}{e^{-2x}}e^{-\int\frac{2x+1}{x+1}dx}dx\\&=e^x\int e^{2x}e^{-2x+\ln(x+1)}dx\\&=e^x\int(x+1)dx=\frac{1}{2}(x+1)^2e^x,\end{aligned}$$

در نتیجه جواب عمومی معادله برابر است با:

$$y=c_1e^{-x}+c_2(x+1)^2e^x.$$

۷.۱.۲ معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم با ضرایب متغیر که به ضرایب ثابت تبدیل می‌شوند

در این بخش به بررسی دوحالت از معادلات خطی مرتبه دوم با ضرایب متغیر که قابل تبدیل به معادلات با ضرایب ثابت هستند می‌پردازیم. این بخش ارزش علمی و کاربرد چندان خاصی ندارد، صرفا به این دلیل که در امتحانات دانشگاه‌ها از این گونه مسائل طرح می‌شوند این حالت‌ها ذکر شده‌اند. جزئیات محاسبات این حالت‌ها که در پاورقی می‌آید دارای ارزش آموزشی است[3].

[3] فرض کنیم تغییر متغیر $y=u(x)v(x)$ معادله $y''+p(x)y'+q(x)y=r(x)$ را به ضرایب ثابت تبدیل می‌کند، به دنبال این هستیم که شرایطی برای u و v پیدا کنیم. با مشتق‌گیری از $y=uv$ و

تذکر ۳۵.۱.۲. معادله دیفرانسیل مرتبه دوم $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ را در نظر بگیرید، در دو حالت زیر می‌توان این معادله را به ضرایب ثابت تبدیل کرد.

حالت اول: اگر $f = q - \frac{1}{4}p^2 - \frac{1}{2}p'$ عددی ثابت چون c باشد، تغییر متغیر $y = uv$ که $u(x) = e^{-\frac{1}{2}\int p(x)dx}$، معادله را به ضرایب ثابت (اگر $f(x) = \frac{c}{x^2}$، کوشی اویلر) زیر تبدیل می‌کند.

$$v'' + f(x)v = 0,$$

حتی در حالت غیرهم‌گن، به معادله $v'' + f(x)v = \frac{r(x)}{u(x)}$ تبدیل می‌شود.

حالت دوم: اگر $g = \frac{q' + 2pq}{2q^{\frac{3}{2}}}$ عددی ثابت چون c باشد، تغییر متغیر $t = \int \sqrt{q(x)}dx$ معادله را به ضرایب ثابت (اگر $g(x) = \frac{c}{x^2}$، کوشی اویلر) زیر تبدیل می‌کند.

$$\ddot{y} + g(x)\dot{y} + y = 0.$$

جای‌گذاری در معادله، خواهیم داشت:

$$uv'' + (2u' + pu)v' + (u'' + pu' + qu)v = r,$$

فرض کنیم ضریب v' در معادله بالا صفر باشد، یعنی $2u' + pu = 0$، که از این جا u به صورت $u(x) = e^{-\frac{1}{2}\int p(x)dx}$ به دست می‌آید. از طرفی برای u به دست آمده $u' = -\frac{1}{2}pu$ و با مشتق‌گیری مجدد داریم $u'' = -\frac{1}{2}p'u + \frac{1}{4}p^2u$، پس ضریب v معادله بالا برابر است با:

$$\begin{aligned} u'' + pu' + qu &= (-\frac{1}{2}p'u + \frac{1}{4}p^2u) + p(-\frac{1}{2}pu) + qu \\ &= u(q - \frac{1}{4}p^2 - \frac{1}{2}p'), \end{aligned}$$

با نام‌گذاری $f = q - \frac{1}{4}p^2 - \frac{1}{2}p'$ خواهیم داشت $u'' + pu' + qu = fu$، لذا در صورت ثابت بودن f، برای یافتن v کافی است معادله $uv'' + (fu)v = r$ یا معادله با ضرایب ثابت $v'' + fv = \frac{r}{u}$ را حل کنیم و نهایتا جواب مساله به صورت $y = uv$ به دست می‌آید.

مثال ۳۶.۱.۲. معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$y'' - ۲(\tan x)y' - ۱۰y = xe^x \sec x.$$

حل: برای معادله داده شده، $f = q - \frac{۱}{۴}p^۲ - \frac{۱}{۲}p'$ را حساب می‌کنیم،

$$\begin{aligned} f &= -۱۰ - \frac{۱}{۴}(-۲\tan x)^۲ - \frac{۱}{۲}(-۲\tan x)' \\ &= -۱۰ + \tan^۲ x - \frac{۱}{۲}(-۲\sec^۲ x) = -۹, \end{aligned}$$

چون $f = -۹$ عدد ثابتی شد، تغییر متغیر $y = v(x)e^{-\frac{۱}{۲}\int p(x)dx}$ یعنی $y = v(x)e^{-\frac{۱}{۲}\int -۲\tan x dx} = v(x)\sec x$ معادله مذکور را به معادله با ضرایب ثابت $v'' + f(x)v = \frac{r(x)}{u(x)}$ یعنی $v'' - ۹v = xe^x$ تبدیل خواهد کرد. این معادله دارای جواب همگن $v_h = c_۱e^{-۳x} + c_۲e^{۳x}$ می‌باشد، برای جواب خصوصی به روش عملگری خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} v_p = \frac{۱}{D^۲ - ۹}(xe^x) &= e^x\frac{۱}{(D+۱)^۲ - ۹}(x) \\ &= e^x(-\frac{۱}{۸} - \frac{۱}{۳۲}D + \dots)(x) = e^x(-\frac{۱}{۸}x - \frac{۱}{۳۲}), \end{aligned}$$

پس

$$v = c_۱e^{-۳x} + c_۲e^{۳x} - \frac{۱}{۸}xe^x - \frac{۱}{۳۲}e^x,$$

لذا جواب عمومی معادله برابر است با:

$$y = (c_۱e^{-۳x} + c_۲e^{۳x} - \frac{۱}{۸}xe^x - \frac{۱}{۳۲}e^x)\sec x.$$

مثال ۳۷.۱.۲. معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$xy'' + (x^۲ - ۱)y' + x^۳y = ۰.$$

حل: برای معادله داده شده، $g = \dfrac{q' + ۲pq}{۲q^{\frac{۳}{۲}}}$ را حساب می‌کنیم،

$$g = \frac{(x^۲)' + ۲(\frac{x^۲ - ۱}{x})(x^۲)}{۲(x^۲)^{\frac{۳}{۲}}} = ۱,$$

چون $g = ۱$ عدد ثابتی شد، تغییر متغیر $t = \int \sqrt{q(x)}dx$ یعنی $t = \frac{۱}{۲}x^۲$ معادله مذکور را به معادله با ضرایب ثابت $\ddot{y} + g(x)\dot{y} + y = ۰$ یعنی $\ddot{y} + \dot{y} + y = ۰$ تبدیل خواهد کرد. این معادله دارای جواب

$$y = c_۱ e^{-\frac{۱}{۲}t} \cos \frac{\sqrt{۳}}{۲}t + c_۲ e^{-\frac{۱}{۲}t} \sin \frac{\sqrt{۳}}{۲}t,$$

اکنون با جای‌گذاری $t = \frac{۱}{۲}x^۲$ نتیجه می‌شود،

$$y = c_۱ e^{-\frac{۱}{۴}x^۲} \cos \frac{\sqrt{۳}}{۴}x^۲ + c_۲ e^{-\frac{۱}{۴}x^۲} \sin \frac{\sqrt{۳}}{۴}x^۲.$$

معادلات مرتبه دوم کامل

معادله دیفرانسیل مرتبه دوم $p_۲(x)y'' + p_۱(x)y' + p_۰(x)y = f(x)$ را کامل می‌نامیم هرگاه:

$$[p_۲(x)y' + (p_۱(x) - p'_۲(x))y]' = f(x).$$

★ شرط لازم و کافی برای کامل بودن معادله $p_۲(x)y'' + p_۱(x)y' + p_۰(x)y = f(x)$ این است که $p''_۲ - p'_۲ + p_۱ = ۰$.

★ روش حل معادلات مرتبه دوم کامل: اگر معادله کامل باشد آن را می‌توان به صورت زیر نوشت که با انتگرال‌گیری به معادله‌ای مرتبه اول تبدیل می‌شود.

$$(p_۲y' + (p_۱(x) - p'_۲(x))y)' = f(x).$$

مثال ۳۸.۱.۲. معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$(x^{۲} - ۲x)y'' + ۴(x - ۱)y' + ۲y = e^{۲x}.$$

حل: در این معادله

$$p_۲'' - p_۲' + p_۱ = (x^{۲} - ۲x)'' - (x^{۲} - ۲x)' + ۴(x - ۱) = ۰,$$

لذا معادله داده شده کامل است، پس آن را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$((x^{۲} - ۲x)y' + ۲(x - ۱)y)' = e^{۲x},$$

تساوی بالا به معادله مرتبه اول

$$(x^{۲} - ۲x)y' + ۲(x - ۱)y = \frac{۱}{۲}e^{۲x} + c_۱,$$

منجر می‌شود که دارای جواب زیر است.

$$y = \frac{۱}{۴}\frac{e^{۲x}}{x^{۲} - ۲x} + \frac{c_۱}{x - ۲} + \frac{c_۲}{x^{۲} - ۲x}.$$

در بخش بعدی به چند معادله مرتبه دوم خاص می‌پردازیم.

۸.۱.۲ چند معادله دیفرانسیل مرتبه دوم خاص

معادلات مرتبه دوم مستقل از متغیر

اگر در یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم متغیر x حضور نداشته باشد، این معادله مستقل از x یا خودگردان نامیده می‌شود.

★ روش حل: با فرض $y' = p$ نتیجه می‌شود:

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy}.\frac{dy}{dx} = p'.p,$$

لذا کافی است در معادله به جای y' قرار دهیم p و به جای y'' قرار دهیم $p'p$ تا به یک معادله مرتبه اول برسیم. دقت کنید چون p' را برابر $\frac{dp}{dy}$ فرض کردیم، در این صورت متغیر معادله مرتبه اول به دست آمده y است.

مثال ۳۹.۱.۲. معادله دیفرانسیل $(y^۲ + ۱)y'' - ۲yy'^۲ = ۰$ را حل کنید.

حل: معادله داده شده فاقد از متغیر مستقل x است، با جای‌گذاری $y' = p$ و $y'' = p'p$ داریم:

$$(y^۲ + ۱)p'p - ۲yp^۲ = ۰,$$

تساوی بالا به صورت $\frac{dp}{p} = \frac{۲y}{y^۲ + ۱}dy$ مرتب می‌شود که معادله‌ای جدایی‌پذیر است و دارای جواب

$$\ln p = \ln(c_۱(y^۲ + ۱)),$$

تساوی اخیر نیز به معنای معادله $y' = c_۱(y^۲ + ۱)$ است که این معادله جدایی‌پذیر دارای جواب $y = \tan(c_۱x + c_۲)$ می‌باشد.

مثال ۴۰.۱.۲. معادله دیفرانسیل $y'' = y'^۲(۱ + yy')$ را حل کنید.

حل: معادله داده شده فاقد از متغیر مستقل x است، با جای‌گذاری $y' = p$ و $y'' = p'p$ داریم:

$$p'p = p^{۲}(۱ + yp),$$

تساوی بالا به صورت $p' - p = yp^{۲}$ مرتب می‌شود که معادله‌ای برنولی است، با تغییر متغیر $u = p^{-۱}$ و $u' = -p^{-۲}p'$ به معادله خطی $u' + u = -y$ میرسیم که دارای جواب

$$u = e^{-y}\left(\int -e^{y}y dy + c\right) = ۱ - y - ce^{-y},$$

می‌باشد. پس $\frac{dy}{dx} = p = u^{-۱} = \frac{۱}{۱ - y - ce^{-y}}$، یعنی $(۱ - y - ce^{-y})dy = dx$، در نتیجه جواب معادله داده شده $y - \frac{y^{۲}}{۲} - ce^{-y} = x + c$ می‌باشد.

معادلات مرتبه دوم مستقل از تابع

★ روش حل: با فرض $y' = p$ و $y'' = p'$ به معادله‌ای مرتبه اول تبدیل می‌شود ♣

مثال ۴۱.۱.۲. معادله دیفرانسیل $xy^{(۵)} - y^{(۴)} = ۰$ را حل کنید.

حل: با تغییر متغیر $p = y^{(۴)}$ و $p' = y^{(۵)}$ معادله داده شده به معادله جدایی‌پذیر $xp' - p = ۰$ تبدیل می‌شود که دارای جواب $p = cx$ می‌باشد، از $y^{(۴)} = cx$ داریم:

$$y = c_{۱}x^{۵} + c_{۲}x^{۳} + c_{۳}x^{۲} + c_{۴}x + c_{۵}.$$

معادلات مرتبه دوم همگن نسبت به تابع و مشتقاتش

فرض کنید معادله دیفرانسیل $F(x,y,y',y'')=0$ نسبت به تابع و مشتقاتش همگن باشد، یعنی:

$$F(x,\lambda y,\lambda y',\lambda y'')=\lambda^d F(x,y,y',y''),$$

در این صورت به کمک تغییر متغیر $y=e^{\int z(x)dx}$ معادله حل می‌شود.

مثال ۴۲.۱.۲. معادله $2yy''-2y'^2+e^{-2x}y^2=0$ را حل کنید.

حل: در معادله داده شده $F(x,y,y',y'')=2yy''-2y'^2+e^{-2x}y^2$ و

$$F(x,\lambda y,\lambda y',\lambda y'')=\lambda^2 F(x,y,y',y''),$$

یعنی معادله نسبت به تابع و مشتقاتش همگن است، لذا تغییر متغیر $y=e^{\int z(x)dx}$ کارآمد است. تحت این تغییر متغیر

$$\begin{aligned}
y'&=z(x)e^{\int z(x)dx}\\
y''&=z'(x)e^{\int z(x)dx}+z^2(x)e^{\int z(x)dx},
\end{aligned}$$

پس معادله به صورت

$$\begin{aligned}
&2e^{\int z(x)dx}(z'(x)e^{\int z(x)dx}+z^2(x)e^{\int z(x)dx})\\
&-2(z(x)e^{\int z(x)dx})^2+e^{-2x}(e^{\int z(x)dx})^2=0,
\end{aligned}$$

بازنویسی می‌شود. تساوی اخیر به صورت $(2z'+e^{-2x})e^{\int 2z(x)dx}=0$ مرتب می‌شود. $2z'+e^{-2x}=0$ نتیجه می‌دهد $z'=-\frac{1}{2}e^{-2x}$ و از این‌جا $z=\frac{1}{4}e^{-2x}$ به

دست می‌آید، بنابراین جواب معادله برابر است با:

$$y = e^{\int z(x)dx} = e^{\int \frac{1}{4}e^{-2x}dx} = e^{-\frac{1}{8}e^{-2x}}.$$

۲.۲ سوالات حل شده

سوال ۱.۲.۲. ابتدا تمام مقادیری از λ را چنان بیابید که مساله مقدار مرزی زیر دارای جواب غیر بدیهی (ناصفر) باشد، سپس به ازای هر یک از این مقادیرِ λ معادله را حل کنید.[۴]

$$y'' + \lambda y = 0, y'(0) = y'(\pi) = 0.$$

حل: معادله مشخصه معادله بالا $r^2 + \lambda = 0$ است که برای λ سه حالت $\lambda < 0$، $\lambda = 0$ و $\lambda > 0$ قابل تصور است.

حالت $\lambda < 0$: فرض کنیم $\lambda = -\alpha^2$، پس $r = \pm\alpha$ و جواب عمومی معادله $y = c_1e^{\alpha x} + c_2e^{-\alpha x}$ است. شرط مرزی $y'(0) = 0$ نتیجه می‌دهد $c_1 = c_2$، از طرفی شرط $y'(\pi) = 0$ نیز نتیجه می‌دهد $\alpha = 0$ و این تناقض است. لذا در این حالت جواب غیربدیهی نداریم.

حالت $\lambda = 0$: در این حالت $r = 0$ است و جواب عمومی معادله $y = c_1 + c_2x$ است. شروط مرزی $y'(0) = y'(\pi) = 0$ نتیجه می‌دهد $c_2 = 0$، لذا جواب عمومی در این حالت $y = c_1$ است.

حالت $\lambda > 0$: فرض کنیم $\lambda = \beta^2$، پس $r = \pm i\beta$ و جواب عمومی معادله $y = c_1\cos(\beta x) + c_2\sin(\beta x)$ است. شروط مرزی $y'(0) = y'(\pi) = 0$ نتیجه

---

[۴] یکی از مسائلی که حین حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی با آن مواجه می‌شویم، مساله اشتورم–لیوویل است که یک معادله دیفرانسیل عادی به صورت $(r(x)y')' + (q(x) + \lambda p(x))y = 0$ می‌باشد. در این مساله مقادیری از λ که مساله دارای جواب غیر بدیهی (ناصفر) باشد، مقادیر ویژه مساله و جواب مساله متناظر هر یک از این مقادیر λ، تابع ویژه مساله نامیده می‌شود.

می‌دهد $c_۲ = ۰$ و جواب عمومی $y = c\cos(\beta x)$ است. بنابراین در بازه $[۰, \pi]$ به جز مقدار ویژه $\lambda = ۰$ که تابع ویژه نظیرش $y = ۱$ است، مساله دارای طیف پیوسته مقادیر $\lambda = \beta^۲$ است که متناظر هر مقدار λ، تابع $y = \cos \omega x$ حاصل می‌شوند.

سوال ۲.۲.۲. معادله مرتبه دومی تشکیل دهید که $y_۱ = \sinh ۲x + \sqrt{۳}\cosh ۲x$ و $y_۲ = \sqrt{۳}\sinh ۲x + \cosh ۲x$ جواب‌های آن باشند.

حل: معادله مرتبه دومی تشکیل می‌دهیم که جواب عمومی آن $y = c_۱ \sinh ۲x + c_۲ \cosh ۲x$ باشد. توجه کنید که

$$y = c_۱(\frac{e^{۲x} - e^{-۲x}}{۲}) + c_۲(\frac{e^{۲x} + e^{-۲x}}{۲}) = (\frac{c_۱ + c_۲}{۲})e^{۲x} + (\frac{-c_۱ + c_۲}{۲})e^{-۲x},$$

لذا کافی است معادله‌ای تشکیل دهیم که ریشه‌های معادله مشخصه آن $\lambda_۱ = ۲$ و $\lambda_۲ = -۲$ باشد. $y'' - ۴y = ۰$ معادله مطلوب است.

سوال ۳.۲.۲. معادله زیر را حل کنید:

$$(D^۲ - ۲D + ۱)y = \frac{e^x}{\cot x + \tan x}.$$

حل: معادله مشخصه این مساله به صورت $\lambda^۲ - ۲\lambda + ۱$ می‌باشد که دارای ریشه $\lambda = ۱$ با تکرر دو است، لذا پایه جواب همگن به صورت $y_۱ = e^x$ و $y_۲ = xe^x$ به دست می‌آید. برای محاسبه جواب خصوصی توجه کنید $\cot x + \tan x = \frac{۲}{\sin ۲x}$، پس به روش عمل‌گری داریم:

$$\begin{aligned} y_p &= \frac{۱}{(D-۱)^۲}(\frac{۱}{۲}e^x \sin ۲x) \\ &= \frac{۱}{۲}e^x \frac{۱}{D^۲}(\sin ۲x) = -\frac{۱}{۸}e^x \sin ۲x, \end{aligned}$$

در نتیجه جواب عمومی معادله برابر است با:

$$y = c_۱ e^x + c_۲ x e^x - \frac{۱}{۸}e^x \sin ۲x.$$

سوال ۴.۲.۲. معادله زیر را حل کنید:

$$(2x+3)^2y''+(2x+3)y'+y=(\ln(2x+3))^2+2\ln(2x+3).$$

حل: معادله داده شده شبیه معادله کوشی–اویلر است. با تغییر متغیر $t=\ln(2x+3)$ نتیجه می‌شود $(2x+3)y'=2\dot{y}$ و $(2x+3)^2y''=4(\ddot{y}-\dot{y})$، لذا معادله داده شده به صورت زیر در می‌آید:

$$4(\ddot{y}-\dot{y})+\dot{y}+y=t^2+2t$$

معادله بالا به صورت $4\ddot{y}-2\dot{y}+y=t^2+2t$ مرتب می‌شود که دارای جواب عمومی $y=c_1e^{\frac{1}{4}t}\cos\sqrt{3}t+c_2e^{\frac{1}{4}t}\sin\sqrt{3}t+t^2+6t+4$ است. پس جواب معادله داده شده برابر است با:

$$\begin{aligned}y&=\sqrt[4]{2x+3}(c_1\cos\sqrt{3}(2x+3)+c_2\sin\sqrt{3}(2x+3))\\&+(\ln(2x+3))^2+6\ln(2x+3)+4.\end{aligned}$$

سوال ۵.۲.۲. معادله $y''+y'^3e^y=0$ را حل کنید.

حل: معادله داده شده فاقد x است. با جای‌گذاری $y'=p$ و $y''=pp'_y$ به معادله $pp'_y=p^3e^{2y}=0$ می‌رسیم. این معادله به صورت $\frac{dp}{p^2}+e^{2y}dy=0$ مرتب می‌شود که معادله‌ای جدایی‌پذیر است و دارای جواب $-\frac{1}{p}+\frac{1}{2}e^{2y}=c_1$. اکنون با جای‌گذاری $p=\frac{dy}{dx}$ به معادله جدایی‌پذیر $-\frac{dx}{dy}+\frac{1}{2}e^{2y}=c_1$ می‌رسیم که دارای جواب $-x+e^{2y}=c_1y+c_2$ است.

سوال ۶.۲.۲. معادله زیر را حل کنید:

$$xy''-y'+y'^3=0,\, y(1)=1,\, y'(1)=-\frac{1}{2},$$

حل: با فرض $y' = p$، معادله $xp' + p^۳ - p = ۰$ به معادله جدایی‌پذیر $x\dfrac{dp}{dx} = p - p^۳$ منجر می‌شودکه دارای جواب $|cx| = \dfrac{|p|}{\sqrt{|p^۲ - ۱|}}$ می‌باشد. از شرط اولیه نتیجه می‌شود $c = \dfrac{۱}{\sqrt{۳}} = \dfrac{\frac{۱}{۲}}{\sqrt{۱ - \frac{۱}{۴}}}$. پس می‌توان نوشت $\dfrac{x^۲}{۲} = \dfrac{p^۲}{۱ - p^۲}$، در نتیجه $p = \pm\sqrt{\dfrac{x^۲}{x^۲ + ۳}}$، یعنی $y' = \pm\sqrt{\dfrac{x^۲}{x^۲ + ۳}}$، اما با توجه به شرط اولیه مساله برای $y'(۱)$ علامت منفی را در نظر می‌گیریم، پس $y = -\sqrt{x^۲ + ۳} + k$ و با توجه به $y(۱) = ۱$، $y = ۳ - \sqrt{x^۲ + ۳}$ به دست می‌آید.

سوال ۷.۲.۲. معادله $yy'' = ۲y'^۲$ را حل کنید.

حل: در معادله داده شده $F(x, y, y', y'') = yy'' - ۲y'^۲$ و

$$F(x, \lambda y, \lambda y', \lambda y'') = \lambda^۲ F(x, y, y', y''),$$

یعنی معادله نسبت به تابع و مشتقاتش همگن است، لذا تغییر متغیر $y = e^{\int z(x)dx}$ کارآمد است. تحت این تغییر متغیر

$$y' = z(x)e^{\int z(x)dx}$$
$$y'' = z'(x)e^{\int z(x)dx} + z^۲(x)e^{\int z(x)dx},$$

پس معادله به صورت

$$(e^{\int z(x)dx})(z'(x)e^{\int z(x)dx} + z^۲(x)e^{\int z(x)dx})$$
$$= ۲(z(x)e^{\int z(x)dx})^۲,$$

بازنویسی می‌شود. تساوی اخیر به معادله جدایی‌پذیر $z' - z^2 = 0$ منجر می‌شود که دارای جواب $\frac{1}{z} + x = c_1$ است. از این جا $z = \frac{1}{-x + c_1}$ به دست می‌آید و جواب معادله برابر است با:

$$y = e^{\int z(x)dx} = e^{\int \frac{dx}{-x+c_1}} = e^{-\ln|x-c_1|+c_2} = \frac{1}{c_2(x-c_1)}.$$

۳.۲ مسائل تمرینی

تمرین ۱.۳.۲. اگر بدانیم xe^x یک جواب برای معادله زیر است، جواب عمومی این معادله را بیابید.

$$y^{(4)} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = 0.$$

تمرین ۲.۳.۲. جواب عمومی معادله کوشی اویلر غیرهم‌گن

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = 3x^2 + \ln x^5,$$

را بیابید.

تمرین ۳.۳.۲. معادله $y^{(4)} - y = \cosh x - \sin x$ را به روش ضرایب نامعین حل کنید.

تمرین ۴.۳.۲. نشان دهید $y = x\cos x$ جوابی برای معادله $y'' - \frac{2}{x}y' + (1 + \frac{2}{x^2})y = 0$ در بازه $(0, +\infty)$ است، سپس جواب عمومی معادله $y'' - \frac{2}{x}y' + (1 + \frac{2}{x^2})y = xe^x$ را بیابید.

تمرین ۵.۳.۲. جواب عمومی معادله $y'' = 1 + y'^2$ را بیابید.

تمرین ۶.۳.۲. جواب عمومی معادله $2y^2y'' + 2yy'^2 = 1$ را بیابید.

تمرین ۷.۳.۲. جواب عمومی معادله $y'' = y'^2(1 + yy')$ را بیابید.

تمرین ۸.۳.۲. جواب عمومی معادله $xy'' + y' = y'^{۲}$ را بیابید.

تمرین ۹.۳.۲. برای عدد طبیعی N ابتدا یک جواب برای معادله دیفرانسیل

$$xy'' - (x+N)y' + Ny = ۰,$$

حدس بزنید و سپس به کمک فرمول آبل نشان دهید جواب دوم برابر است با:

$$y_۲ = ۱ + \frac{x}{۱!} + \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۳}{۳!} + \ldots + \frac{x^N}{N!}.$$

تمرین ۱۰.۳.۲. معادله $xy'' + (x^۲ - ۱)y' + x^۳ y = ۰$ را حل کنید.

تمرین ۱۱.۳.۲. معادله زیر را حل کنید.

$$(۱+x^۲)y'' + ۲xy' = \frac{۱}{x^۲+۱}, y'(۰) = ۰.$$

تمرین ۱۲.۳.۲. جواب عمومی معادله $۴y' + y''^{۲} = ۴xy''$ را بیابید.

۴.۲ مسائل خلاقانه

مساله ۱.۴.۲. فرض کنید توابع $y_۱$، $y_۲$،...، y_n، n بار مشتق‌پذیر باشند. نشان دهید از دترمینان

$$\begin{vmatrix} y_۱ & y_۲ & \ldots & y_n & y \\ y'_۱ & y'_۲ & \ldots & y'_n & y' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ y_۱^{(n)} & y_۲^{(n)} & \ldots & y_n^{(n)} & y^{(n)} \end{vmatrix} = ۰,$$

معادله دیفرانسیل خطی هم‌گن مرتبه nای به دست می‌آید که جواب عمومی آن به صورت $y = c_۱y_۱ + c_۲y_۲ + \ldots + c_ny_n$ می‌باشد. مشابه دترمینان داده شده، دترمینانی بیابید که از آن معادله‌ای با جواب $y = c_۱y_۱ + c_۲y_۲ + \ldots + c_ny_n + y_p$ به دست آید.

مساله ۲.۴.۲. نشان دهید مجموعه جواب‌های معادله دیفرانسیل خطی مرتبه n و هم‌گن $p_n(x)y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_1(x)y' + p_0(x)y = f(x)$ تشکیل یک فضای مستوی از بعد n می‌دهد که فضای هادی آن جواب خصوصی است و پایه فضای برداری انتقال یافته آن به مبدا جواب هم‌گن است[۵].

مساله ۳.۴.۲. به عنوان تعمیم مثال ۹.۱.۲ فرض کنید λ_1، λ_2، ...، λ_n اعدادی متمایز باشند، نشان دهید توابع $e^{\lambda_1 x}$، $e^{\lambda_2 x}$، ...، $e^{\lambda_n x}$ مستقل خطی هستند.

مساله ۴.۴.۲. آیا دو جواب مستقل خطی معادله دیفرانسیل مرتبه دوم با ضرایب پیوسته $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ می‌توانند ریشه مشترک داشته باشند؟ اکسترمم و یا عطف مشترک چه‌طور؟

مساله ۵.۴.۲. فرض کنید y_1 و y_2 دو جواب مستقل خطی برای معادله مرتبه دوم با ضرایب پیوسته $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ باشند. نشان دهید بین هر دو ریشه y_1، تابع y_2 دارای حداقل یک ریشه است.

مساله ۶.۴.۲. معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب پیوسته زیر را در نظر بگیرید:

$$p_n(x)y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_1(x)y' + p_0(x)y = f(x),$$

نشان دهید معادله بالا با شرایط اولیه

$$y(x_0) = y, y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)} = y_{n-1},$$

دارای جواب یک‌تا است.

---

[۵] از ریاضی عمومی ۲ به یاد داریم که منظور از زیرفضای مستوی انتقال یافته یک زیرفضای برداری است. به عنوان مثال در صفحه مختصات هر خط گذرا از مبدا یک زیرفضای برداری است اما خطوطی که از مبدا نمی‌گذرند زیرفضای برداری نیستند، چرا که نسبت به جمع و ضرب اسکالر بسته نیستند، اما زیرفضایی مستوی هستند. چون هر خط در صفحه انتقال یافته خطی موازی با آن و گذرا از مبدا است، این بردار انتقال، فضای هادی نامیده می‌شود.

مساله ۷.۴.۲ (فرمول آبل). فرض کنید توابع n بار مشتق‌پذیر $y_۱$، $y_۲$، ... و y_n جواب‌هایی برای معادله با ضرایب پیوسته $p_n(x)y^{(n)} + p_{n-۱}(x)y^{(n-۱)} + \ldots + p_۱(x)y' + p_۰(x) = ۰$ باشند، در این صورت با فرض $w(x) = w(y_۱, y_۲, \ldots, y_n)(x)$ نشان دهید:

$$p_n(x)w'(x) + p_{n-۱}(x)w(x) = ۰.$$

۳

استفاده از سری‌ها در حل معادلات دیفرانسیل

در فصل گذشته با روش‌های حل معادلات دیفرانسیل خطی آشنا شدیم. دیدیم که به کمک روش تغییر پارامتر لاگرانژ هر معادله دیفرانسیل خطی قابل حل است، به این شرط که پایه‌ای برای جواب هم‌گن داشته باشیم. بنابراین لازمه حل معادلات خطی، دانستن پایه جواب هم‌گن است. در حالتی که ضرایب معادله اعداد ثابت باشند، پایه جواب به کمک معادله مشخصه به دست می‌آید. مشکل اصلی جایی است که ضرایب معادله متغیر باشند. برای معادلات

مرتبه دوم و بالاتر روش کلی برای پیدا کردن پایه جواب همگن نمی‌توان ارائه داد. در این فصل سعی می‌کنیم به کمک سری توانی با ضرایب نامعین، جواب معادله را به صورت سری توانی بیان کنیم و رفتار جواب را تحلیل کنیم. در پایان فصل به بررسی جواب‌های دو معادله مرتبه دوم خاص لُژاندر $(1-x^2)y''-2xy'+\alpha(\alpha+1)y=0$ و بسل $x^2y''+xy'+(x^2-\alpha^2)y=0$ می‌پردازیم که در ریاضی–فیزیک و مهندسی کاربرد فراوان دارند.

۱.۳ درس‌نامه

۱.۱.۳ سری توانی و توابع تحلیلی

تعریف ۱.۱.۳. **(سری توانی)**: منظور از یک سری توانی حول $x=a$ یک سری به شکل $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n(x-a)^n$ است، که ضرایب c_i اعداد ثابتی هستند. مقدار این سری در $x=a$ را برابر c_0 قرار داد می‌کنیم.

تعریف ۲.۱.۳. مجموعه‌ای که به ازای نقاط آن سری توانی $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n(x-a)^n$ همگرا است را دامنه همگرایی سری توانی $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n(x-a)^n$ می‌نامند.

شعاع همگرایی سری‌های توانی

دامنه همگرایی سری توانی $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(x-a)^n$ بازه‌ای است متقارن به مرکز $x=a$ و شعاع:

$$R=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\frac{c_{n+1}}{c_n}}=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}(c_n)^{\frac{1}{n}}}.$$

★ به ازای نقاط $|x-a|<R$ سری توانی همگرا، به ازای نقاط $|x-a|>R$ سری واگرا است. وضعیت نقاط مرزی را باید به کمک آزمون‌ها جداگانه بررسی کرد.

مجموع و حاصل‌ضرب سری‌های توانی

فرض کنید $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ و $g(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ به ترتیب دارای شعاع‌های همگرایی R_1 و R_2 باشد، در این صورت:

۱) سری $\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n+b_n)x^n$ دارای حداقل شعاع همگرایی $R=\min\{R_1,R_2\}$ است و در دامنه همگرایی خود به $f(x)+g(x)$ همگرا است.

۲) سری $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ برای $c_n=\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ دارای حداقل شعاع همگرایی $R=\min\{R_1,R_2\}$ و در دامنه همگرایی خود به $f(x).g(x)$ همگرا است.

مثال ۳.۱.۳. فاصله همگرایی سری $f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{3^n}{n}+\frac{2^n}{n^2})x^n$ را بیابید.

حل: شعاع همگرایی سری $f_1(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^n}{n}x^n$ برابر است با:

$$R_1=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3^{n+1}}{n+1}}{\frac{3^n}{n}}}=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{n+1}}=\frac{1}{3}$$

شعاع همگرایی سری $f_۲(x) = \sum_{n=۱}^{+\infty} \frac{۲^n}{n^۲} x^n$ برابر است با:

$$R_۲ = \frac{۱}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{۲^{n+۱}}{(n+۱)^۲}}{\frac{۲^n}{n^۲}}} = \frac{۱}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{۲n^۲}{(n+۱)^۲}} = \frac{۱}{۲}$$

چون $\frac{۱}{۳} = \min\{\frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۲}\}$، بنابراین روی بازه $(-\frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۳})$ قطعا سری $f(x) = \sum_{n=۱}^{+\infty} (\frac{۳^n}{n} + \frac{۲^n}{n^۲}) x^n$ همگرا است. حال به بررسی نقاط مرزی می‌پردازیم.

در نقطه $x = \frac{۱}{۳}$، سری واگراست، چرا که:

$$\sum_{n=۱}^{+\infty} (\frac{۳^n}{n} + \frac{۲^n}{n^۲})(\frac{۱}{۳})^n = \sum_{n=۱}^{+\infty} (\frac{۱}{n} + (\frac{۲}{۳})^n \frac{۱}{n^۲}) > \sum_{n=۱}^{+\infty} \frac{۱}{n}$$

در نقطه $x = -\frac{۱}{۳}$، سری همگراست، چرا که:

$$\sum_{n=۱}^{+\infty} (\frac{۳^n}{n} + \frac{۲^n}{n^۲})(-\frac{۱}{۳})^n = \sum_{n=۱}^{+\infty} (\frac{(-۱)^n}{n} + (-۱)^n (\frac{۲}{۳})^n \frac{۱}{n^۲}),$$

بنابر آزمون تناوب هردو سری $\sum_{n=۱}^{+\infty} \frac{(-۱)^n}{n}$ و $\sum_{n=۱}^{+\infty} (-۱)^n (\frac{۲}{۳})^n \frac{۱}{n^۲}$ همگرا هستند پس سری بالا همگراست. بنابراین دامنه همگرایی برابر است با $[-\frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۳})$.

مشتق و انتگرال سری‌های توانی

فرض کنید $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(x-a)^n$ دارای شعاع همگرایی R باشد، در این صورت:

۱) سری $\sum_{n=1}^{+\infty} nc_n(x-a)^{n-1}$ دارای شعاع همگرایی R است و در دامنه همگرایی خود به $f'(x)$ همگرا است.

۲) سری $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n}{n+1}(x-a)^{n+1}$ دارای شعاع همگرایی R است و در دامنه همگرایی خود به $\int f(x)dx$ همگرا است.

مثال ۴.۱.۳. تابع $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ را شناسایی کنید.

حل: می‌دانیم برای $|t| < 1$، $\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 + \dots$، با جای‌گذاری $-t$ به جای t و انتگرال‌گیری از 0 تا x داریم:

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{1}{1+t}dt &= t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \dots]_0^x \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n,\end{aligned}$$

از طرفی چون $\int_0^x \frac{1}{1+t}dt = \ln|1+x|$ پس $f(x) = \ln|1+x|$.

مثال ۵.۱.۳. **(بسط دوجمله‌ای با نمای حقیقی):** فرض کنید r عددی حقیقی باشد، برای $x > -1$ تعریف می‌کنیم

$$f(x) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{r(r-1)\dots(r-k+1)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{r}{k} x^k,$$

ابتدا نشان دهید $(1+x)f'(x) = rf(x)$. سپس نتیجه بگیرید $f(x) = (1+x)^r$. یعنی فرمول بسط دوجمله‌ای برای نمای حقیقی نیز معتبر است.

حل: با مشتق‌گیری جمله به جمله داریم:

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{r(r-1)...(r-k+1)}{(k-1)!}x^{k-1} = r + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{r(r-1)...(r-k)}{k!}x^k$$

لذا $xf'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{r(r-1)...(r-k+1)}{(k-1)!}x^k$، پس:

$$\begin{aligned}(1+x)f'(x) &= r + \sum_{k=1}^{+\infty}[\frac{r(r-1)...(r-k+1)}{(k-1)!} + \frac{r(r-1)...(r-k)}{k!}]x^k \\ &= r + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{r(r-1)...(r-k+1)[k+(r-k)]}{k!}x^k \\ &= r + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{r(r-1)...(r-k+1)}{k!}rx^k \\ &= r(1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{r(r-1)...(r-k+1)}{k!}x^k) = rf(x).\end{aligned}$$

پس بنابراین $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{r}{1+x}$ با انتگرال‌گیری از طرفین داریم:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \int \frac{r}{1+x}dx,$$

پس $\ln|f(x)| = r\ln|1+x|$، چون $x > -1$ بود، $f(x) > 0$ است، یک‌به‌یک بودن $\ln$ نتیجه می‌دهد $f(x) = (1+x)^r$.

در ریاضی عمومی دیدیم که توابع از کلاس C^{n+1}[1] دارای نمایش تقریبی به شکل چندجمله‌ای درجه n هستند. حال سوال این است که آیا برای یک تابع بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر می‌توان

[1] در ریاضی عمومی با توابع از کلاس C^k یعنی توابعی که k مرتبه مشتق‌پذیر و مشتق مرتبه kام آن‌ها پیوسته است، آشنا شدید. حال اگر مجموعه توابع تحلیلی را با C^ω و مجموعه توابع انتگرال‌پذیر را با $\mathbf{R}$ نشان دهیم:

$$\mathbf{R} \supset C^0 \supset C^1 \supset ... \supset C^\infty \supset C^\omega,$$

نمایشی به صورت سری توانی ارائه کرد؟ برای بررسی پاسخ این سوال به مثال زیر دقت کنید.

مثال ۶.۱.۳. آیا لزوما هر تابع بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر دارای نمایش به صورت سری توانی است؟

حل: خیر، مثلا تابع زیر را در نظر بگیرید:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & : x \neq 0 \\ 0 & : x = 0 \end{cases}$$

این تابع از هر مرتبه‌ای مشتق‌پذیر است و مشتق مرتبه kام آن به شکل

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} \frac{p_k(x)}{x^{2k}} e^{-\frac{1}{x^2}} & : x \neq 0 \\ 0 & : x = 0 \end{cases}$$

است، در این‌جا $p_k(x)$ یک چندجمله‌ای درجه $k-1$ است که در رابطه $p_{k+1}(x) = x^2 p'_k(x) - (2kx - 1)p_k(x)$ صدق می‌کند و $P_1(x) = 1$. اگر بخواهد f تحلیلی باشد باید حول $x = 0$ دارای نمایش $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ باشد، اما چون برای هر $k \geq 1$، $f^{(k)}(0) = 0$ است لذا باید $f \equiv 0$ باشد که تناقض است.

تعریف ۷.۱.۳. (تابع تحلیلی): تابع f را در x_0 تحلیلی گوییم، هرگاه در هم‌سایگی x_0 دارای نمایش به صورت سری توانی $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$ باشد. f را تحلیلی گوییم اگر f در کل دامنه‌اش تحلیلی باشد. اگر f در x تحلیلی باشد به نمایش به سری توانی حول x_0 بسط تیلور گوییم. در حالت خاص $x_0 = 0$ بسط تیلور، بسط مک‌لورن نام دارد.

اگر f در $x = a$ تحلیلی باشد، یعنی $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(x-a)^n$ در همسایگی $x = a$ در این صورت با مشتق‌گیری متوالی ضرایب c_n به صورت $c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ به دست می‌آیند.

مثال ۸.۱.۳. سری مک‌لورن تابع e^x را بیابید.

حل: به ازای هر n، $c_n = \frac{1}{n!}\frac{d}{dx^n}(e^x)|_{x=0} = \frac{1}{n!}$ به دست می‌آید. پس:

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

مثال ۹.۱.۳. سری مک‌لورن تابع $\sin x$ را بیابید.

حل: مشتق مرتبه nام تابع $\sin x$ در $x = 0$ برای nهای زوج صفر است، برای nهای فرد اگر $n = 4k + 1$ برابر ۱ و اگر $n = 4k + 3$ برابر ۱− است. بنابراین:

$$\sin x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}.$$

مثال ۱۰.۱.۳. سری مک‌لورن تابع $\sinh x$ را بیابید.

حل: می‌دانیم $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ و $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$، بنابراین،

$$\sinh x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1}.$$

مثال ۱۱.۱.۳. سری مک‌لورن تابع $\frac{1}{1+x^3}$ را بیابید.

حل: می‌دانیم $\sum_{k=0}^{+\infty} (-x)^k = \frac{1}{1+x}$، بنابراین،

$$\frac{1}{1+x^3} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-x^3)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^{3k}.$$

۲.۱.۳ انواع مرکز همگرایی برای معادلات خطی مرتبه دوم

همان‌طور که در آغاز این فصل گفتیم، در این فصل قصد داریم سری توانی پاسخ معادلات دیفرانسیل را به دست آوریم، برای این منظور سری توانی با ضرایب نامعین را در معادله جای‌گذاری کرده و سعی می‌کنیم ضرایب آن را به دست آوریم و نهایتا از سری توانی پاسخ معادله را شناسایی کنیم. بسته به این که مرکز سری توانی نقطه‌ای عادی یا تکین برای ضرایب معادله باشد نوع جواب تفاوت دارد، در این بخش نقطه مرکزی بسط جواب را بر اساس ضرایب معادله رده‌بندی می‌کنیم.

تعریف ۱۲.۱.۳ (نقطه عادی). معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم با ضرایب پیوسته $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$ را در نظر بگیرید. نقطه $x = a$ را عادی یا معمولی برای این معادله می‌نامیم، هرگاه توابع $p(x)$ و $q(x)$ در $x = a$ تحلیلی باشند. در غیر این صورت نقطه $x = a$ را غیرعادی، تکین یا منفرد می‌نامیم.

تعریف ۱۳.۱.۳ (رده‌بندی انواع نقطه تکین). معادله دیفرانسیل مرتبه دوم با ضرایب پیوسته $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$ را در نظر بگیرید. نقطه تکین $x = a$ را منظم گوییم، هرگاه توابع $(x-a)p(x)$ و $(x-a)^۲q(x)$ در $x = a$ تحلیلی باشند، در غیر این صورت نقطه تکین $x = a$ را نامنظم می‌نامیم.

مثال ۱۴.۱.۳. نقاط تکین معادله زیر را بیابید و نوع آن‌ها را مشخص کنید.

$$(x^۲ - ۹)y'' + \frac{۶(x+۴)}{۲x+۱}y' - \frac{۲۷\ln(۱+x)}{x^۴(x+۳)}y = ۰.$$

حل: معادله بالا به صورت

$$y'' + \frac{۶(x+۴)}{(x^۲-۹)(۲x+۱)}y' - \frac{۲۷\ln(۱+x)}{x^۴(x+۳)(x^۲-۹)}y = ۰,$$

مرتب می‌شود. نقاط $x = \pm ۳$، $x = -\frac{۱}{۲}$ و $x = ۰$ ریشه‌های مخرج هست. به دلیل وجود $\ln$ دامنه جواب‌های مورد بحث $x > -۱$ است، لذا نقاط تکین معادله $x = ۳$، $x = -\frac{۱}{۲}$

و $x = ۰$ می‌باشد.

در نقطه $x = ۳$:

$$\lim_{x\to ۳}(x-۳)p(x) = \lim_{x\to ۳}\frac{۶(x+۴)}{(x+۳)(۲x+۱)} = ۱$$
$$\lim_{x\to ۳}(x-۳)^۲q(x) = \lim_{x\to ۳} -\frac{۲۷(x-۳)\ln(۱+x)}{x^۴(x+۳)^۲} = ۰,$$

چون حدود بالا موجود و متناهی هستند، نقطه $x = ۳$ تکین منظم است.

در نقطه $x = -\frac{۱}{۲}$:

$$\lim_{x\to -\frac{۱}{۲}}(x+\frac{۱}{۲})p(x) = \lim_{x\to -\frac{۱}{۲}}\frac{۶(x+۴)}{۲(x^۲-۹)} = -\frac{۳۲}{۳۳}$$
$$\lim_{x\to -\frac{۱}{۲}}(x+\frac{۱}{۲})^۲q(x) = \lim_{x\to -\frac{۱}{۲}} -\frac{۲۷(x+\frac{۱}{۲})^۲\ln(۱+x)}{x^۴(x+۳)^۲} = ۰,$$

چون حدود بالا موجود و متناهی هستند، نقطه $x = -\frac{۱}{۲}$ تکین منظم است.

در نقطه $x = ۰$:

$$\lim_{x\to ۰}xp(x) = \lim_{x\to ۰}\frac{۶x(x+۴)}{(x^۲-۹)(۲x+۱)} = ۰$$

اما $\lim_{x\to ۰}x^۲q(x) = \lim_{x\to ۰} -\frac{۲۷(x-۳)\ln(۱+x)}{x^۴(x+۳)^۲}$ موجود نمی‌باشد، پس نقطه $x = ۰$ تکین نامنظم است.

۳.۱.۳ حل معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم حول نقاط عادی

مثال ۱۵.۱.۳. معادله دیفرانسیل $y' = y$ را به روش سری توانی حل کنید.

حل: چون در صورت مساله اشاره‌ای به مرکز سری نشده لذا به صورت پیش‌فرض حول $x = ۰$ جواب معادله را پیدا می‌کنیم. نقطه $x = ۰$ نقطه‌ای عادی است، می‌توان فرض کرد

جواب به صورت $y = \sum_{n=۰}^{+\infty} a_n x^n$ می‌باشد. با مشتق‌گیری از y به $y' = \sum_{n=۱}^{+\infty} n a_n x^{n-۱}$ می‌رسیم؛ به شروع شمارنده سری‌ها دقت کنید. پس $y' = y$ معادل است با:

$$\underbrace{\sum_{n=۱}^{+\infty} n a_n x^{n-۱}}_{\uparrow x^{۰}} = \underbrace{\sum_{n=۰}^{+\infty} a_n x^n}_{\uparrow x^{۰}},$$

علامت $x^{۰} \uparrow$ به معنای آن است که هر دو سری از $x^{۰}$ شروع می‌شوند، لذا پس از یک‌سان کردن شمارنده‌ها داریم (چرا؟):

$$\sum_{k=۰}^{+\infty} [(k+۱)a_{k+۱} - a_k] x^k = ۰,$$

از تساوی اخیر نتیجه می‌شود $a_{k+۱} = \frac{۱}{k+۱} a_k$، یعنی $a_۱ = a_۰$، $a_۲ = \frac{۱}{۲} a_۰$ و ... به همین ترتیب $a_n = \frac{۱}{n!} a_۰$، پس جواب عمومی معادله برابر است با:

$$y = \sum_{n=۰}^{+\infty} \frac{۱}{n!} a_۰ x^n = a_۰ \sum_{n=۰}^{+\infty} \frac{۱}{n!} x^n = a_۰ e^x.$$

مثال ۱۶.۱.۳. معادله دیفرانسیل $xy' - ۳y = ۳$ را به روش سری توانی حل کنید.

حل: مانند مثال قبل حول نقطه عادی $x = ۰$ می‌توان فرض کرد جواب به صورت $y = \sum_{n=۰}^{+\infty} a_n x^n$ می‌باشد. با مشتق‌گیری از y به $y' = \sum_{n=۱}^{+\infty} n a_n x^{n-۱}$ می‌رسیم. پس $xy' - ۳y = ۳$ معادل است با:

$$\underbrace{x \sum_{n=۱}^{+\infty} n a_n x^{n-۱}}_{\uparrow x^{۱}} - ۳ \underbrace{\sum_{n=۰}^{+\infty} a_n x^n}_{\uparrow x^{۰}} = ۳,$$

پس از یک‌سان کردن شمارنده‌ها داریم (چرا؟):

$$-۳a_۰ + \sum_{k=۱}^{+\infty} [k a_k - ۳a_k] x^k = ۳,$$

از تساوی اخیر نتیجه می‌شود $a_{\circ} = -۱$ و $a_k(k-۳) = \circ$، یعنی $a_۳$ دل‌خواه است و برای $k \neq \circ, ۳$، $a_k = \circ$، پس جواب عمومی معادله برابر است با:

$$y = \sum_{n=\circ}^{+\infty} a_n x^n = -۱ + a_۳ x^۳.$$

مثال ۱۷.۱.۳. ابتدا معادله دیفرانسیل $y'' + xy = \circ$ را به روش سری توانی حل کنید. سپس از روی جواب به دست آمده، جواب $y'' - xy = \circ$ را به دست آورید.

حل: می‌توان فرض کرد جواب به صورت $y = \sum_{n=\circ}^{+\infty} a_n x^n$ می‌باشد. با مشتق‌گیری از y به $y' = \sum_{n=۱}^{+\infty} n a_n x^{n-۱}$ و $y'' = \sum_{n=۲}^{+\infty} n(n-۱) a_n x^{n-۲}$ می‌رسیم. پس $y'' + xy = \circ$ معادل است با:

$$\underbrace{\sum_{n=۲}^{+\infty} n(n-۱) a_n x^{n-۲}}_{\uparrow x^{\circ}} + \underbrace{x \sum_{n=\circ}^{+\infty} a_n x^n}_{\uparrow x^{۱}} = ۳,$$

پس از یک‌سان کردن شمارنده‌ها داریم (چرا؟):

$$۲a_۲ + \sum_{k=۱}^{+\infty} \left[(k+۲)(k+۱)a_{k+۲} + a_{k-۱}\right] x^k = \circ,$$

از تساوی اخیر نتیجه می‌شود $a_۲ = \circ$ و $a_{k+۲} = \frac{-۱}{(k+۱)(k+۲)} a_{k-۱}$، یعنی هر ضریب به سومین ضریب قبل از خود وابسته است. با فرض $a_{\circ} = c_۱$ و $a_۱ = c_۲$ ضرایب به صورت $a_۲ = \circ$، $a_۳ = -\frac{۱}{۲\times۳} c_۱$، $a_۴ = -\frac{۱}{۳\times۴} c_۲$، $a_۵ = \circ$، $a_۶ = -\frac{۱}{۵\times۶} a_۳ = \frac{۱}{۳\times۴\times۵\times۶} c_۱$ و ... به دست می‌آیند. پس جواب عمومی معادله برابر است با:

$$\begin{aligned} y &= \sum_{n=\circ}^{+\infty} a_n x^n \\ &= c_۱\left(۱ - \frac{۱}{۲\times۳} x^۳ + \frac{۱}{۳\times۴\times۵\times۶} x^۶ + \dots\right) + c_۲\left(x - \frac{۱}{۳\times۴} x^۴ + \dots\right). \end{aligned}$$

برای حل معادله $y'' - xy = 0$ پس از جای‌گذاری و یک‌سان‌سازی شمارنده‌ها به تساوی

$$2a_2 + \sum_{k=1}^{+\infty}[(k+2)(k+1)a_{k+2} - a_{k-1}]x^k = 0,$$

می‌رسیم، یعنی $a_2 = 0$ و $a_{k+2} = \dfrac{1}{(k+1)(k+2)}a_{k-1}$ و این به معنای آن است که ضرایب منفی‌ای که در حالت قبل به صورت تناوبی ایجاد می‌شدند دیگر ایجاد نمی‌شوند، لذا جواب عمومی معادله $y'' - xy = 0$ به صورت زیر است:

$$y = c_1\left(1 + \frac{1}{2\times 3}x^3 + \frac{1}{3\times 4\times 5\times 6}x^6 + \dots\right) + c_2\left(x + \frac{1}{3\times 4}x^4 + \dots\right).$$

مثال ۱۸.۱.۳. جواب عمومی معادله $xy'' + (1+x)y' - y = 0$ را حول $x = 1$ به دست آورید.

حل: حول نقطه عادی $x = 1$ می‌توان فرض کرد جواب به صورت

$$y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-1)^n,$$

می‌باشد. پس $y' = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n(x-1)^{n-1}$ و $y'' = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n(x-1)^{n-2}$ در نتیجه $xy'' + (1+x)y' - y = 0$ معادل است با:

$$x\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n(x-1)^{n-2} + (1+x)\sum_{n=1}^{+\infty} na_n(x-1)^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-1)^n = 0,$$

چون سری‌ها بر حسب توان‌های $(x-1)$ بسط داده شده‌اند، نمی‌توان x و $x+1$ را در آن‌ها ضرب کرد. برای سادگی کار ضرایب معادله نیز بر حسب $x-1$ می‌نویسیم، یعنی:

$$(x-1)y'' + (x-1)y' - y + y'' + 2y' = 0,$$

اکنون با جای‌گذاری داریم:

$$\begin{aligned}(x-1)\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n(x-1)^{n-2} &+ (x-1)\sum_{n=1}^{+\infty} na_n(x-1)^{n-1}\\ -\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-1)^n &+ \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n(x-1)^{n-2}\\ +2\sum_{n=1}^{+\infty} na_n(x-1)^{n-1}&\\ = 0,&\end{aligned}$$

پس از یک‌سان کردن شمارنده‌ها داریم:

$$\begin{aligned}[-a_0 + 2a_2 + 2a_1] + \sum_{k=0}^{+\infty}[(k+1)(k+2)a_{k+2}&\\ +(k+1)(k+2)a_{k+1} + (k-1)a_k](x-1)^k &= 0,\end{aligned}$$

از تساوی اخیر نتیجه می‌شود $a_2 = \frac{1}{2}a_0 - a_1$ و $a_{k+2} = -a_{k+1} - \frac{k-1}{(k+1)(k+2)}a_k$.

مثال ۱۹.۱.۳. پنج جمله اول سری توانی جواب معادله دیفرانسیل مرتبه دوم

$$y'' = yy' - x^2, y(0) = 1, y'(0) = 1,$$

را به دست آورید.

حل: سری توانی جواب به صورت

$$y = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \frac{y^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \ldots,$$

می‌باشد، لذا کافی است $y''(0)$، $y'''(0)$ و $y^{(4)}(0)$ را به دست آوریم. جای‌گذاری $x = 0$ در $y'' = yy' - x^2$ نتیجه می‌دهد

$$y''(0) = y(0)y'(0) - (0) = 1,$$

هم‌چنین مشتق‌گیری از $y'' = yy' - x^{۲}$ نتیجه می‌دهد $y''' = y'^{۲} + yy'' - ۲x$ پس

$$y'''(\circ) = y'(\circ)^{۲} + y(\circ)y''(\circ) = ۲,$$

نهایتا مشتق‌گیری از $y''' = y'^{۲} + yy'' - ۲x$ نتیجه می‌دهد $y^{(۴)} = ۲y'y'' + yy''' - ۲$، پس

$$y^{(۴)}(\circ) = ۲y'(\circ)y''(\circ) + y(\circ)y'''(\circ) = ۳,$$

لذا جواب مساله برابر است با:

$$y = ۱ + x + \frac{۱}{۲!}x^{۲} + \frac{۲}{۳!}x^{۳} + \frac{۳}{۴!}x^{۴} + \ldots.$$

سوال: آیا جواب معادله $y' = \frac{۱}{x}$ به صورت سری توانی برحسب توان‌های x قابل نمایش است؟

مانند مثال‌های قبل فرض کنیم جواب حول $x = \circ$ به صورت $y = \sum_{n=\circ}^{+\infty} a_n x^n$ باشد. با مشتق‌گیری از y به $y' = \sum_{n=۱}^{+\infty} na_n x^{n-۱}$ می‌رسیم. پس $y' = \frac{۱}{x}$ معادل است با:

$$x\sum_{n=۱}^{+\infty} na_n x^{n-۱} = ۱,$$

پس از یک‌سان کردن شمارنده‌ها داریم (چرا؟):

$$\sum_{k=۱}^{+\infty}[ka_k]x^k = ۱,$$

تساوی بالا یک تناقض است، چرا که در سمت چپ تساوی جمله ثابت وجود ندارد اما در سمت راست تساوی جمله ثابت وجود دارد. علت این تناقض در این است که تابع $\frac{۱}{x}$ در $x = \circ$ تحلیلی نیست و لذا نقطه $x = \circ$ نقطه عادی معادله نمی‌باشد و با این روش جواب معادله به دست نمی‌آید. از ریاضی عمومی به خاطر داریم جواب معادله $y' = \frac{۱}{x}$، $y = c\ln|x|$ است، این تابع در $x = \circ$ تحلیلی نیست. در بخش بعدی به روش حل این‌گونه معادلات می‌پردازیم.

۴.۱.۳ حل معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم حول نقاط تکین منظم (روش فروبنیوس)

در این بخش به حل معادلات خطی مرتبه دوم حول نقاط تکین منظم می‌پردازیم.
نمادگذاری: معادله دیفرانسیل مرتبه دوم $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$ با ضرایب پیوسته و نقطه تکین منظم $x = a$ را در نظر بگیرید. قرار می‌دهیم:

$$p_\circ = \lim_{x\to a}(x-a)p(x), q_\circ = \lim_{x\to a}(x-a)^{۲} q(x).$$

تعریف ۲۰.۱.۳ (معادله شاخصی وابسته به نقاط تکین منظم). معادله دیفرانسیل مرتبه دوم $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$ با ضرایب پیوسته و نقطه تکین منظم $x = a$ را در نظر بگیرید. معادله شاخصی حول نقطه $x = a$ به صورت $\lambda^{۲} + (p_\circ - ۱)\lambda + q_\circ = \circ$ می‌باشد، که $p_\circ$ و $q_\circ$ به صورت بالا است.

پایه جواب‌های معادله $y'' + p(x)y' + q(x)y = \circ$ حول نقاط تکین منظم بسته به ریشه‌های معادله شاخصی تعیین می‌شود. معادله شاخصی، معادله‌ای درجه دوم است، برای ریشه‌های این معادله سه حالت زیر قابل تصور است.
توجه: در هر سه حالتی که در ادامه می‌آیند یکی از جواب‌ها به صورت

$$y_۱ = (x-a)^{\lambda_۱} \sum_{n=\circ}^{+\infty} a_n (x-a)^n,$$

است. جواب دوم را می‌توان به روش تغییر پارامتر با فرض $y_۲ = u(x)y_۱$ به دست آورد. اما در مواردی که تنها صورت جواب دوم بدون محاسبه ضرایب مد نظر است، به کمک رده‌بندی صفحه بعد فورا صورت جواب دوم قابل نوشتن است.

روش فروبنیوس برای حل معادلات مرتبه دوم حول نقاط تکین منظم

فرض کنید معادله شاخصی معادله $y'' + p(x)y' + q(x)y = ۰$ حول نقطه تکین منظم $x = a$ به صورت $\lambda^{۲} + (p_{۰} - ۱)\lambda + q_{۰} = ۰$ باشد، سه حالت زیر ممکن است:

★ معادله دارای دو ریشه متمایز $\lambda_{۱}$ و $\lambda_{۲}$ باشد که فاصله آن‌ها عددی غیر صحیح است:

$$y_{۱} = (x-a)^{\lambda_{۱}} \sum_{n=۰}^{+\infty} a_n (x-a)^n$$
$$y_{۲} = (x-a)^{\lambda_{۲}} \sum_{n=۰}^{+\infty} b_n (x-a)^n$$

★ معادله دارای دو ریشه متمایز $\lambda_{۱} < \lambda_{۲}$ باشد که فاصله آن‌ها عددی صحیح است:

$$y_{۱} = (x-a)^{\lambda_{۱}} \sum_{n=۰}^{+\infty} a_n (x-a)^n$$
$$y_{۲} = k y_{۱} \ln|x-a| + x^{\lambda_{۲}} \sum_{n=۰}^{+\infty} b_n (x-a)^n$$

★ معادله دارای ریشه مضاعف λ باشد:

$$y_{۱} = (x-a)^{\lambda} \sum_{n=۰}^{+\infty} a_n (x-a)^n$$
$$y_{۲} = y_{۱} \ln|x-a| + (x-a)^{\lambda} \sum_{n=۰}^{+\infty} b_n (x-a)^n$$

مثال ۲۱.۱.۳. معادله دیفرانسیل $۴xy'' + ۲(۱-x)y' - y = ۰$ را حل کنید.

حل: در این معادله $p(x) = \dfrac{۲(۱-x)}{۴x}$ و $q(x) = -\dfrac{۱}{۴x}$، پس $x = ۰$ نقطه تکین

است، از طرفی:

$$p_\circ = \lim_{x\to\circ} xp(x) = \frac{۱}{۲}, q_\circ = \lim_{x\to\circ} x^۲ q(x) = \circ,$$

پس $x = \circ$ تکین منظم است. معادله شاخصی $\lambda^۲ - \frac{۱}{۲}\lambda = \circ$ دارای دو ریشه $\lambda_۱ = \frac{۱}{۲}$ و $\lambda_۲ = \circ$ است و لذا پایه جواب معادله به صورت زیر است:

$$y_۱ = x^{\frac{۱}{۲}} \sum_{n=\circ}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=\circ}^{+\infty} a_n x^{n+\frac{۱}{۲}}$$
$$y_۲ = \sum_{n=\circ}^{+\infty} b_n x^n,$$

با مشتق‌گیری از $y_۱$ داریم:

$$y_۱' = \sum_{n=\circ}^{+\infty} (n+\frac{۱}{۲}) a_n x^{n-\frac{۱}{۲}}$$
$$y_۱'' = \sum_{n=\circ}^{+\infty} (n+\frac{۱}{۲})(n-\frac{۱}{۲}) a_n x^{n-\frac{۳}{۲}},$$

پس

$$\begin{aligned} ۲x^۲ y_۱'' - xy_۱' + (۱+x)y_۱ &= x^۲ (\sum_{n=\circ}^{+\infty} (n+\frac{۱}{۲})(n-\frac{۱}{۲}) a_n x^{n-\frac{۳}{۲}}) \\ -x(\sum_{n=\circ}^{+\infty} (n+\frac{۱}{۲}) a_n x^{n-\frac{۱}{۲}}) &+ (۱+x)(\sum_{n=\circ}^{+\infty} a_n x^{n+\frac{۱}{۲}}) \\ &= \underbrace{\sum_{n=\circ}^{+\infty} (n+\frac{۱}{۲})(n-\frac{۱}{۲}) a_n x^{n+\frac{۱}{۲}}}_{\uparrow x^{\frac{۱}{۲}}} \\ -\underbrace{\sum_{n=\circ}^{+\infty} (n+\frac{۱}{۲}) a_n x^{n+\frac{۱}{۲}}}_{\uparrow x^{\frac{۱}{۲}}} &+ \underbrace{\sum_{n=\circ}^{+\infty} a_n x^{n+\frac{۱}{۲}}}_{\uparrow x^{\frac{۱}{۲}}} + \underbrace{\sum_{n=\circ}^{+\infty} a_n x^{n+\frac{۳}{۲}}}_{\uparrow x^{\frac{۳}{۲}}} = \circ, \end{aligned}$$

پس از یک‌سان کردن شمارنده‌ها داریم:

$$[-\frac{۱}{۲}a_\circ - \frac{۱}{۲}a_\circ + a_\circ] + \sum_{k=\circ}^{+\infty} [k(۲k-۱)a_k + a_{k-۱}] x^{k+\frac{۱}{۲}} = \circ,$$

از تساوی اخیر نتیجه می‌شود $a_k = \frac{-1}{k(2k-1)}a_{k-1}$، همین‌طور برای جواب دوم $b_1 = \frac{1}{2}b_0$ و $k \geq 1$: $b_{k+1} = \frac{2k+1}{2(k^2+2k-1)}b_k$ به دست می‌آید.

مثال ۲۲.۱.۳. معادله زیر را به روش سری توانی حول $x = 0$ برای $x > 0$ حل کنید.

$$xy'' - (4+x)y' + 4y = 0.$$

حل: در این معادله $p(x) = -\frac{4+x}{x}$ و $q(x) = \frac{4}{x}$، پس $x = 0$ نقطه تکین است، از طرفی:

$$p_0 = \lim_{x\to 0} xp(x) = -4, q_0 = \lim_{x\to 0} x^2 q(x) = 0,$$

پس $x = 0$ تکین منظم است. معادله شاخصی $\lambda^2 - 5\lambda = 0$ دارای دو ریشه $\lambda_1 = 5$ و $\lambda_2 = 0$ است و لذا پایه جواب معادله به صورت زیر است:

$$y_1 = x^5 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$
$$y_2 = ky_1 \ln|x| + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n,$$

پس از جای‌گذاری در معادله $a_n = \frac{a_{n-1}}{n+5}$ به دست می‌آید. از جای‌گذاری y_2 در معادله $k = 0$، $b_{n+1} = \frac{b_n}{n+1}$ و نهایتا $y_2 = e^x$ به دست می‌آید.

مثال ۲۳.۱.۳. جواب عمومی معادله $2x^2y'' - xy' + (1+x)y = 0$ را به دست آورید.

حل: در این معادله $p(x) = -\frac{1}{2x}$ و $q(x) = \frac{1+x}{2x^2}$، پس $x = 0$ نقطه تکین است، از طرفی:

$$p_0 = \lim_{x\to 0} xp(x) = -\frac{1}{2}, q_0 = \lim_{x\to 0} x^2 q(x) = \frac{1}{2},$$

پس $x = 0$ تکین منظم است. معادله شاخصی $\lambda^2 - \frac{3}{2}\lambda + \frac{1}{2} = 0$ دارای دو ریشه $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ و $\lambda_2 = 1$ است و لذا پایه جواب معادله به صورت زیر است:

$$y_1 = x^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$
$$y_2 = x \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n,$$

با مشتق‌گیری از y_1 داریم:

$$y_1' = \sum_{n=0}^{+\infty} (n + \frac{1}{2}) a_n x^{n-\frac{1}{2}}$$
$$y_1'' = \sum_{n=0}^{+\infty} (n + \frac{1}{2})(n - \frac{1}{2}) a_n x^{n-\frac{3}{2}},$$

پس

$$4xy_1'' + 2(1-x)y_1' - y_1 = 4x(\sum_{n=0}^{+\infty} (n + \frac{1}{2})(n - \frac{1}{2}) a_n x^{n-\frac{3}{2}})$$
$$+2(1-x)(\sum_{n=0}^{+\infty} (n + \frac{1}{2}) a_n x^{n-\frac{1}{2}}) - (\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+\frac{1}{2}})$$
$$= \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} 4(n + \frac{1}{2})(n - \frac{1}{2}) a_n x^{n-\frac{1}{2}}}_{\uparrow x^{-\frac{1}{2}}}$$
$$+ \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} 2(n + \frac{1}{2}) a_n x^{n-\frac{1}{2}}}_{\uparrow x^{-\frac{1}{2}}} - \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} 2(n + \frac{1}{2}) a_n x^{n+\frac{1}{2}}}_{\uparrow x^{\frac{1}{2}}} - \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+\frac{1}{2}}}_{\uparrow x^{\frac{1}{2}}} = 0,$$

پس از یک‌سان کردن شمارنده‌ها داریم:

$$[4(-\frac{1}{4})a_0 + 2(\frac{1}{2})a_0] + \sum_{k=0}^{+\infty} [(2k+3)(2k+2)a_{k+1} + (2k+1)a_k] x^{k+\frac{1}{2}} = 0,$$

از تساوی اخیر نتیجه می‌شود $a_{k+1} = -\frac{2k+1}{(2k+3)(2k+2)} a_k$، همین‌طور برای جواب دوم $b_{k+1} = \frac{1}{2(k+1)} b_k$ به دست می‌آید.

تذکر ۲۴.۱.۳. به مشتق‌گیری‌های زیر توجه کنید:

$$(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$
$$(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+\frac{1}{3}})' = \sum_{n=1}^{+\infty} (n+\frac{1}{3}) a_n x^{n-\frac{2}{3}}$$
$$(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n-\sqrt{2}})' = \sum_{n=1}^{+\infty} (n-\sqrt{2}) a_n x^{n-\sqrt{2}-1},$$

اما

$$(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n-1})' = -a_0 x^{-2} + \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1) a_n x^{n-2},$$

چون در سمت چپ جمله شامل $\ln$ نداریم، پس در سمت راست تساوی جمله x^{-1} نباید باشد. یعنی در سمت راست باید پرشی از x^{-2} به x^0 داشته باشیم.

مثال ۲۵.۱.۳. فرض کنید یک جواب معادله $x^2y'' - 3xy' + (4+4x)y = 0$ به صورت

$$y_1 = x^2(1 - 4x + \frac{1}{(2!)^2}(4x)^2 - \frac{1}{(3!)^2}(4x)^3 + \dots),$$

باشد، جواب عمومی این معادله را بیابید.

حل: در این معادله $p(x) = -\frac{3}{x}$ و $q(x) = \frac{4+4x}{x^2}$، پس $x = 0$ نقطه تکین است، از طرفی:

$$p_0 = \lim_{x\to 0} xp(x) = -3, q_0 = \lim_{x\to 0} x^2 q(x) = 4,$$

پس $x = 0$ تکین منظم است. معادله شاخصی $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ دارای ریشه مضاعف $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ است و لذا پایه جواب معادله به صورت زیر است:

$$y_1 = x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$
$$y_2 = y_1 \ln|x| + x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n,$$

از جواب داده شده روشن است که $a_n = (\frac{-۴}{n!})^n$، هدف مساله پیدا کردن b_nها است. با مشتق‌گیری از $y_۲$ داریم:

$$y_۲' = y_۱' \ln|x| + \frac{۱}{x} y_۱ + \sum_{n=۰}^{+\infty} (n+۲) b_n x^{n+۱}$$
$$y_۲'' = y_۱'' \ln|x| + \frac{۲}{x} y_۱' - \frac{۱}{x^۲} y_۱ + \sum_{n=۰}^{+\infty} (n+۲)(n+۱) b_n x^n,$$

با جای‌گذاری در معادله داریم:

$$\begin{aligned} x^۲ y_۲'' - ۳xy_۲' + (۴+۴x) y_۲ &= x^۲ (y_۱'' \ln|x| + \frac{۲}{x} y_۱' - \frac{۱}{x^۲} y_۱ \\ &+ \sum_{n=۰}^{+\infty} (n+۲)(n+۱) b_n x^n) - ۳x (y_۱' \ln|x| + \frac{۱}{x} y_۱ \\ &+ \sum_{n=۰}^{+\infty} (n+۲) b_n x^{n+۱}) + (۴+۴x)(y_۱ \ln|x| + x^۲ \sum_{n=۰}^{+\infty} b_n x^n) = ۰, \end{aligned}$$

چون $y_۱$ نیز جواب برای معادله است، $(x^۲ y_۱'' - ۳xy_۱' + (۴+۴x) y_۱) \ln|x| = ۰$، پس

$$۲xy_۱' - ۴y_۱ + \sum_{n=۰}^{+\infty} n^۲ b_n x^{n+۲} + \sum_{n=۰}^{+\infty} ۴ b_n x^{n+۳} = ۰,$$

تساوی بالا به صورت زیر مرتب می‌شود:

$$\sum_{k=۳}^{+\infty} ۲(k-۲) a_{k-۲} x^k + \sum_{k=۳}^{+\infty} ((k-۲)^۲ b_{k-۲} + ۴ b_{k-۳}) x^k = ۰,$$

از تساوی بالا نتیجه می‌شود

$$(k-۲)^۲ b_{k-۲} + ۴ b_{k-۳} = -۲(k-۲) a_{k-۲},$$

با فرض $m = k - ۳$، چون $a_m = (\frac{-۴}{m!})^m$، داریم:

$$b_{m+۱} = -(\frac{۲}{m+۱})^۲ b_m - \frac{۲}{m} (\frac{-۴}{m!})^m.$$

مثال ۲۶.۱.۳. جواب عمومی معادله $xy'' + (1 - 2x)y' + (x - 1)y = 0$ را بیابید.

حل: در این معادله $p(x) = \dfrac{1 - 2x}{x}$ و $q(x) = \dfrac{x - 1}{x}$، پس $x = 0$ نقطه تکین است، از طرفی:

$$p_0 = \lim_{x\to 0} xp(x) = 1, q_0 = \lim_{x\to 0} x^2 q(x) = 0,$$

پس $x = 0$ تکین منظم است. معادله شاخصی $\lambda^2 = 0$ دارای ریشه مضاعف $\lambda = 0$ است و لذا پایه جواب معادله به صورت زیر است:

$$y_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$
$$y_2 = y_1 \ln|x| + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n,$$

با جای‌گذاری y_1 در معادله $a_n = \dfrac{a_0}{n!}$ و لذا $y_1 = e^x$ به دست می‌آید. جواب دوم بنابر فرمول آبل برابر است با:

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x)dx} dx \\ &= e^x \int \frac{1}{e^{2x}} e^{-\int \frac{1-2x}{x}dx} dx \\ &= e^x \int e^{-2x} e^{-\ln|x|+2x} dx \\ &= e^x \int \frac{dx}{x} = e^x \ln|x|, \end{aligned}$$

لذا جواب عمومی معادله $y = c_1 e^x + c_2 e^x \ln|x|$ می‌باشد.

۵.۱.۳ معادله لُژاندر

معادله $(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0$ که α عددی حقیقی است، معادله لُژاندر[2] از مرتبه α نامیده می‌شود. این معادله در حل مسائل مقدار مرزی مانند توزیع حرارت، روی

---

[2] ۱۸۳۳–۱۷۵۲، آدرین ماری لژاندر، ریاضی‌دان فرانسوی

اجسام کروی شکل ظاهر می‌شود. نقاط $x = \pm ۱$ برای این معادله، تکین و منظم هستند. به روش فروبنیوس می‌توان دید اگر $n = \alpha$ عددی صحیح و نامنفی باشد، یکی از جواب‌های معادله لژاندر به صورت چندجمله‌ای است. این چندجمله‌ای که چندجمله‌ای لژاندر مرتبه n نامیده می‌شود برابر است با:

$$P_n(x) = \sum_{k=۰}^{[\frac{n}{۲}]} \frac{(-۱)^k}{۲^n}\binom{n}{k}\binom{۲n-۲k}{n}x^{n-۲k},$$

جواب دیگر معادله لژاندر که تابع لژاندر نوع دوم از مرتبه n نامیده می‌شود و با $Q_n(x)$ نشان داده می‌شود دارای دامنه همگرایی $(-۱, ۱)$ است، بنابراین چندجمله‌ای‌های لژاندر را تنها روی بازه $(-۱, ۱)$ بررسی می‌کنیم. در این بخش تنها بررسی خواص معادله لژاندر مدنظر است. پس جواب عمومی معادله لژاندر به صورت

$$y = c_۱ P_n(x) + c_۲ Q_n(x),$$

می‌باشد. بنابر فرمول کاهش مرتبه آبل می‌توان توابع لژاندر نوع دوم از رابطه زیر به دست آورد:

$$Q_n(x) = P_n(x)\int \frac{dx}{(۱-x^۲)P_n(x)^۲}.$$

توابع لژاندر نوع دوم از روابط زیر نیز قابل محاسبه هستند:

$$Q_n(x) = \frac{۱}{۲}P_n(x)\ln\frac{۱+x}{۱-x} - \frac{۲n-۱}{n}P_{n-۱}(x) - \frac{۲n-۵}{۳(n-۱)}P_{n-۳}(x) - \dots.$$

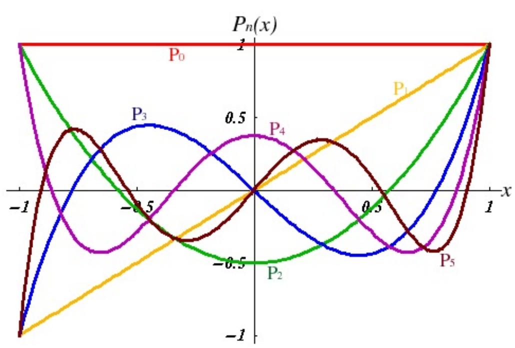
در اولین گام برای چندجمله‌ای‌های لژاندر به درجه و تقارن چندجمله‌ای‌های لژاندر توجه کنید.

درجه و تقارن چندجمله‌ای‌های لژاندر

چندجمله‌ای $P_n(x)$ از درجه n است. این چندجمله‌ای برای nهای زوج، تابعی زوج و برای nهای فرد تابعی فرد است. به عنوان مثال:

$$\begin{aligned}
P_0(x) &= 1 \\
P_1(x) &= x \\
P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \\
P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x),
\end{aligned}$$

به خاطر سپاری چهار چندجمله‌ای بالا در تسریع محاسبات مفید است.



شکل ۱.۳: چندجمله‌ای‌های لژاندر

مثال ۲۷.۱.۳. حاصل انتگرال $\int_{-1}^{1} x^{1396} P_{2017}(x)dx$ را بیابید.

حل: بنابر قضیه بالا $P_{2017}(x)$ تابعی فرد است، لذا $x^{1396}P_{2017}(x)$ نیز تابعی فرد است و انتگرال معین آن در بازه متقارن برابر صفر است.

مثال ۲۸.۱.۳. نشان دهید $ax^۴+bx^۲+c$ جوابی برای $(۱-x^۲)y''-۲xy'+۲۰y=۰$ است. اگر $a=\frac{(۲\times۴)!}{۲^۲(۴!)^۲}$، مقادیر b و c را بیابید.

حل: معادله داده شده لژاندر مرتبه چهار است، لذا یکی از جواب‌های آن چندجمله‌ای لژاندر مرتبه چهار است، طبق تذکر گفته شده این چندجمله‌ای از درجه چهار بوده و تنها دارای جملات زوج می‌باشد، یعنی $P_۴(x)=ax^۴+bx^۲+c$. اکنون با مشتق‌گیری از $y=ax^۴+bx^۲+c$، $y'=۴ax^۳+۲bx$ و $y''=۱۲ax^۲+۲b$ به دست می‌آید. جای‌گذاری در معادله نتیجه می‌دهد:

$$(۱-x^۲)(۱۲ax^۲+۲b)-۲x(۴ax^۳+۲bx)+۲۰(ax^۴+bx^۲+c)=۰,$$

تساوی اخیر به صورت $(۱۲a+۱۴b)x^۲+(۲b+۲۰c)x=۰$ مرتب می‌شود که از این‌جا نتیجه می‌شود $۱۲a+۱۴b=۰$ و $۲b+۲۰c=۰$، پس:

$$b=-\frac{۶}{۷}\frac{(۲\times۴)!}{۲^۲(۴!)^۲},c=-\frac{۱}{۱۰}\frac{(۲\times۴)!}{۲^۲(۴!)^۲}.$$

مثال ۲۹.۱.۳. با استفاده از تغییر متغیر مناسب معادله زیر را به معادله لژاندر تبدیل کنید.

$$\sin^۲\theta\frac{d^۲y}{d\theta^۲}+\cos\theta\sin\theta\frac{dy}{d\theta}+(n(n+۱)\sin^۲\theta)y=۰.$$

حل: از مقایسه معادله داده شده با معادله لژاندر دور از ذهن نیست که حدس بزنیم تغییر متغیر $x=\cos\theta$ احتمالا کارآمد است. با این تغییر متغیر:

$$\frac{dy}{d\theta}=\frac{dy}{dx}\frac{dx}{d\theta}=-(\sin\theta)y'_x,$$

هم‌چنین:

$$\begin{aligned}\frac{d^۲y}{d\theta^۲} &= \frac{d}{d\theta}\frac{dy}{d\theta}\\ &= \frac{d}{d\theta}(-(\sin\theta)y'_x)\\ &= -(\cos\theta)y'_x - (\sin\theta)\frac{d}{d\theta}y'_x\\ &= -(\cos\theta)y'_x - (\sin\theta)\frac{d}{dx}y'_x\frac{dx}{d\theta}\\ &= -(\cos\theta)y'_x + (\sin^۲\theta)y''_x,\end{aligned}$$

اکنون با جای‌گذاری در معادله داریم:

$$\begin{aligned}&\sin^۲\theta(-(\cos\theta)y'_x + (\sin^۲\theta)y''_x)\\ &+\cos\theta\sin\theta(-(\sin\theta)y'_x) + (n(n+۱)\sin^۲\theta)y = ۰,\end{aligned}$$

تساوی بالا به صورت $(\sin^۲\theta)y'' - ۲(\cos\theta)y' + n(n+۱)y = ۰$ مرتب می‌شود، یعنی $(۱-x^۲)y'' - ۲xy' + n(n+۱)y = ۰$ که معادله لژاندر است.

تعریف ۳۰.۱.۳ (تابع مولد). تابع تحلیلی $f(x)$ را تابع مولد دنباله a_k نامند، هرگاه ضرایب بسط تیلور f، a_kها باشند، یعنی $f(x) = \sum_{k=۰}^{+\infty} a_k x^k$. به طور مشابه تابع دو متغیره $f(x,t)$ را تابع مولد دنباله تابعی $a_k(x)$ می‌نامیم، هرگاه $f(x,t) = \sum_{k=۰}^{+\infty} a_k(x)t^k$.

قضیه: تابع مولد چندجمله‌ای‌های لژاندر

$f(x,t) = \frac{۱}{\sqrt{۱-۲xt+t^۲}}$ تابع مولد چندجمله‌ای‌های لژاندر است، یعنی:

$$\frac{۱}{\sqrt{۱-۲xt+t^۲}} = \sum_{n=۰}^{+\infty} P_n(x)t^n.$$

مثال ۳۱.۱.۳. برای چندجمله‌ای‌های لژاندر $P_n(1)$، $P_n(0)$ و $P_n(-1)$ را بیابید.

حل: با جای‌گذاری $x = 1$ در تابع مولد چندجمله‌ای‌های لژاندر داریم:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P_n(1)t^n = \frac{1}{\sqrt{1-2t+t^2}} = \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n,$$

پس $P_n(1) = 1$ است، هم‌چنین $P_n(-1) = (-1)^n P_n(1) = (-1)^n$.

برای $P_n(0)$ با جای‌گذاری $x = 0$ در تابع مولد چندجمله‌ای‌های لژاندر داریم:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P_n(0)t^n = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = (1+t^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{+\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{k}(t^2)^k = \sum_{k=0}^{+\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{k}t^{2k},$$

پس برای nهای فرد $P_n(0) = 0$ و برای $n = 2k$ زوج

$$P_n(0) = \binom{-\frac{1}{2}}{k} = (-1)^n \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \dots \times 2n}.$$

قضیه: رابطه بازگشتی چندجمله‌ای‌های لژاندر

چندجمله‌ای‌های لژاندر در رابطه بازگشتی مرتبه دوم زیر صدق می‌کنند:

$$p_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1}xP_n(x) - \frac{n}{n+1}p_{n-1}(x), p_0(x) = 1, P_1(x) = x.$$

مثال ۳۲.۱.۳. به کمک رابطه بازگشتی چندجمله‌ای‌های لُژاندر، $P_4(x)$ را بیابید.

حل: با جای‌گذاری $n = ۳$ در رابطه بازگشتی بالا:

$$\begin{aligned} p_۴(x) &= \frac{۷}{۴}xP_۳(x) - \frac{۳}{۴}P_۲(x) \\ &= \frac{۷}{۴}x(\frac{۵}{۳}xP_۲(x) - \frac{۲}{۳}P_۱(x)) - \frac{۳}{۴}P_۲(x) \\ &= (\frac{۳۵}{۱۲}x^۲ - \frac{۳}{۴})P_۲(x) - \frac{۷}{۶}xP_۱(x) \\ &= (\frac{۳۵}{۱۲}x^۲ - \frac{۳}{۴})(\frac{۱}{۲}(۳x^۲ - ۱)) - \frac{۷}{۶}x(x) \\ &= \frac{۳۵}{۸}x^۴ - \frac{۱۵}{۴}x^۲ + \frac{۳}{۸}. \end{aligned}$$

این بخش را با بیان خاصیت تعامد و پایه بودن چندجمله‌ای‌های لژاندر به پایان می‌بریم. قبل از بیان خاصیت تعامد لازم است به بیان ضرب داخلی توابع پیوسته بپردازیم.

تعریف ۳۳.۱.۳. ضرب داخلی[۳]: ضرب داخلی دو تابع پیوسته $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ به صورت

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx,$$

تعریف می‌شود. این توابع را متعامد گوییم، هرگاه $\langle f, g\rangle = ۰$ و در این صورت می‌نویسیم $f \perp g$.

[۳] در حالت کلی فرض کنید $(V, +, .)$ یک فضای برداری حقیقی است. تابع $\langle ., .\rangle := V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ یک ضرب داخلی روی V نامیده می‌شود، هرگاه در اصول زیر صدق کند:

۱) مثبت بودن: برای هر $x \in V$، $\langle x, x\rangle \geq ۰$.

۲) معین بودن: $\langle x, x\rangle = ۰$ اگر و تنها اگر $x = ۰$.

۳) تقارن: برای هر $x, y \in V$، $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$.

۴) ۲-خطی بودن: برای هر $x, y, z \in V$ و هر $r \in \mathbb{R}$، $\langle x, y + z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$ و $\langle x, ry\rangle = r\langle x, y\rangle$.

تعریف ۳۴.۱.۳. نرم[۴]: نرم یا طول تابع پیوسته $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ به صورت

$$||f|| = \langle f, f \rangle^{\frac{۱}{۲}} = (\int_a^b f^۲(x)dx)^{\frac{۱}{۲}},$$

تعریف می‌شود.

قضیه: خاصیت تعامد چندجمله‌ای‌های لژاندر

★ چندجمله‌ای‌های لژاندر دوبه‌دو برهم عمودند، یعنی برای $m \neq n$:

$$\langle p_m(x), P_n(x) \rangle = \int_{-۱}^{۱} p_m(x) P_n(x) dx = ۰.$$

★ چندجمله‌ای لژاندر $P_n(x)$ دارای نرم $\sqrt{\frac{۲}{۲n+۱}}$ است، یعنی:

$$||P_n(x)||^۲ = \langle P_n(x), P_n(x) \rangle = \int_{-۱}^{۱} P_n(x)^۲ dx = \frac{۲}{۲n+۱}.$$

مثال ۳۵.۱.۳. ابتدا چندجمله‌ای $f(x) = x^۳ - ۲x + ۱$ را برحسب چندجمله‌ای‌های لژاندر به دست آورید، سپس به ازای مقادیر مختلف n، انتگرال

$$I_n = \int_{-۱}^{۱} (x^۳ - ۲x + ۱) P_n(x) dx,$$

را حساب کنید.

حل: تابع f چندجمله‌ای درجه سه است، پس بسط لژاندر آن به صورت

$$f(x) = \alpha_۰ P_۰(x) + \alpha_۱ P_۱(x) + \alpha_۲ P_۲(x) + \alpha_۳ P_۳(x) + \dots,$$

[۴] در این‌جا صرفا نرم القایی از ضرب داخلی مد نظر است. نرم در حالت کلی یک تابعی است که در اصول موضوع نامنفی، ناتبه‌گونی، همگنی و نابرابری مثلث صدق می‌کند.

می‌باشد. برای محاسبه ضرایب کافی است دو طرف تساوی بالا را در P_iها ضرب کنیم و از ۱ − تا ۱ انتگرال بگیریم. در این صورت:

$$۲\alpha_۰ = \int_{-۱}^{۱} f(x)p_۰(x)dx, \frac{۲}{۳}\alpha_۱ = \int_{-۱}^{۱} f(x)P_۱(x)dx, ...$$

پس

$$\begin{aligned}
\alpha_۰ &= \frac{۱}{۲}\int_{-۱}^{۱}(x^۳ - ۲x + ۱)p_۰(x)dx = ۱\\
\alpha_۱ &= \frac{۳}{۲}\int_{-۱}^{۱}(x^۳ - ۲x + ۱)P_۱(x)dx = -\frac{۷}{۵}\\
\alpha_۲ &= \frac{۵}{۲}\int_{-۱}^{۱}(x^۳ - ۲x + ۱)P_۲(x)dx = ۰\\
\alpha_۳ &= \frac{۷}{۲}\int_{-۱}^{۱}(x^۳ - ۲x + ۱)P_۳(x)dx = \frac{۲}{۵}
\end{aligned}$$

بنابراین:

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_{-۱}^{۱}(x^۳ - ۲x + ۱)P_n(x)dx\\
&= \int_{-۱}^{۱}\left(P_۰(x) - \frac{۷}{۵}P_۱(x) + \frac{۲}{۵}P_۳(x)\right)P_n(x)dx = \begin{cases} ۲ & : n = ۰\\ -\frac{۱۴}{۱۵} & : n = ۱\\ \frac{۴}{۳۵} & : n = ۳\\ ۰ & : n \neq ۰, ۱, ۳ \end{cases}
\end{aligned}$$

مثال ۳۶.۱.۳. انتگرال $\int_۰^{\pi} P_۵(\cos\theta)\sin\theta d\theta$ را حساب کنید.

حل: از تغییر متغیر $u = \cos\theta$ و $du = -\sin\theta d\theta$ نتیجه می‌شود:

$$\int_۰^{\pi} P_۵(\cos\theta)\sin\theta d\theta = \int_۱^{-۱} P_۵(u)(-du) = \int_{-۱}^{۱} P_۵(u)du = ۰,$$

صفر شدن انتگرال به این دلیل بود که تابع فرد و بازه متقارن است.

مثال ۳۷.۱.۳. انتگرال $\int_{\circ}^{\pi} P_{۵}(\cos\theta)^{۲}\sin\theta d\theta$ را حساب کنید.

حل: از تغییر متغیر $u = \cos\theta$ و $du = -\sin\theta d\theta$ نتیجه می‌شود:

$$\int_{\circ}^{\pi} P_{۵}(\cos\theta)\sin\theta d\theta = \int_{۱}^{-۱} P_{۵}^{۲}(u)(-du) = \int_{۱}^{-۱} P_{۵}^{۲}(u)(du) = \frac{۲}{۱۱}.$$

قضیه: پایه بودن چندجمله‌ای‌های لژاندر

★ مجموعه چندجمله‌ای‌های لژاندر تشکیل یک پایه برای فضای چندجمله‌ای‌های پیوسته بر $[-۱,۱]$ یعنی $C^{\circ}([-۱,۱])$ می‌دهند. بنابراین هر تابع پیوسته $f:[-۱,۱]\to\mathbb{R}$ دارای نمایشی یک‌تا به صورت $f(x) = \sum_{n=\circ}^{\infty} c_n P_n(x)$ می‌باشد. این نمایش بسط لژاندر تابع f نام دارد.

مثال ۳۸.۱.۳. سه جمله اول بسط لژاندر $f(x) = e^{x} + ۱$ را بیابید.

حل: بسط لژاندر آن به صورت

$$f(x) = \alpha_{\circ}P_{\circ}(x) + \alpha_{۱}P_{۱}(x) + \alpha_{۲}P_{۲}(x) + \dots,$$

می‌باشد. برای محاسبه ضرایب کافی است دو طرف تساوی بالا را در P_iها ضرب کنیم و از ۱− تا ۱ انتگرال بگیریم. در این صورت:

$$\frac{۲}{۲i+۱}\alpha_i = \int_{-۱}^{۱} f(x)p_i(x)dx,$$

پس

$$\begin{aligned}
\alpha_۰ &= \frac{۱}{۲}\int_{-۱}^{۱}(e^x+۱)p_۰(x)dx\\
&= \frac{۱}{۲}\int_{-۱}^{۱}(e^x+۱)dx = \frac{e-e^{-۱}+۲}{۲},\\
\alpha_۱ &= \frac{۳}{۲}\int_{-۱}^{۱}(e^x+۱)P_۱(x)dx\\
&= \frac{۳}{۲}\int_{-۱}^{۱}(e^x+۱)xdx = ۳e^{-۱},\\
\alpha_۲ &= \frac{۵}{۲}\int_{-۱}^{۱}(e^x+۱)P_۲(x)dx\\
&= \frac{۵}{۲}\int_{-۱}^{۱}(e^x+۱)\frac{۱}{۲}(۳x^۲-۱)dx = \frac{۵e-۳۵e^{-۱}}{۲},
\end{aligned}$$

پس:

$$e^x+۱ = \frac{e-e^{-۱}+۲}{۲}P_۰(x)+۳e^{-۱}P_۱(x)+\frac{۵e-۳۵e^{-۱}}{۲}P_۲(x)+\ldots,$$

۶.۱.۳ معادله بسل

توابع بسل از حل معادلات دیفرانسیل مشتقات جزئی لاپلاس و هلم‌هولتز در مختصات استوانه‌ای و مختصات کروی به‌دست می‌آیند. توابع بسل در نظریه انتشار امواج و نظریه پتانسیل اهمیت ویژه‌ای دارند. هم‌چنین این توابع در حل معادلات ارتعاشات، رسانایی گرما و امواج الکترومغناطیس در مختصات استوانه‌ای ظاهر می‌شوند. توابع بسل نخستین بار توسط دانیل برنولی [۵] تعریف شدند و سپس فردریش بسل[۶] آن‌ها را بررسی نمود. توابع بسل جواب‌های معادله زیر که به معادله بسل شهرت دارد، می‌باشند.

$$x^۲y''+xy'+(x^۲-\alpha^۲)y=۰,$$

---

[۵] ۱۷۰۰–۱۷۸۲ فیزیک‌دان، ریاضی‌دان، اقتصاددان و پزشک سوئیسی

[۶] ۱۷۸۴–۱۸۴۶ ریاضی‌دان و ستاره‌شناس آلمانی

ثابت α که یک عدد دل‌خواه حقیقی یا حتی مختلط است، مرتبه معادله بسل نامیده می‌شود. روشن است نقطه $x = ۰$ تنها نقطه غیرعادی معادله بسل است که یک نقطه تکین منظم می‌باشد. معادله شاخصی معادله بسل به صورت $\lambda^۲ - \alpha^۲ = ۰$ است که دارای جواب‌های $\lambda = \pm\alpha$ می‌باشد. در صورتی که α عددی طبیعی یا صفر نباشد جواب عمومی معادله به صورت $y = c_۱ J_\alpha(x) + c_۲ J_{-\alpha}(x)$ و در صورتی که $\alpha = n$ عددی طبیعی یا صفر باشد، جواب عمومی معادله بسل به صورت $y = c_۱ J_n(x) + c_۲ Y_n(x)$ خواهد بود. J_n و $Y_n(x)$ به ترتیب توابع بسل نوع اول و نوع دوم از مرتبه n نامیده می‌شوند. می‌توان دید این توابع برابرند با:

$$J_\alpha(x) = \sum_{k=۰}^{+\infty} \frac{(-۱)^k}{k!\Gamma(k+\alpha+۱)}(\frac{x}{۲})^{۲k+\alpha}$$

$$Y_n(x) = \frac{۲}{\pi}(\ln|\frac{x}{۲}| + \gamma)J_n(x) + \frac{۱}{\pi}\sum_{k=۰}^{+\infty}(\frac{x}{۲})^{۲k+n}\frac{(-۱)^{k-۱}(\varphi(k)+\varphi(k+n))}{k!(n+k)!}$$
$$-\frac{۱}{\pi}\sum_{k=۰}^{n-۱}\frac{(n-k-۱)!}{k!}(\frac{x}{۲})^{۲k-n},$$

در رابطه بالا $\varphi(k) = ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \dots + \frac{۱}{k}, \varphi(۰) = ۰$ و γ که ثابت اویلر نامیده می‌شود به صورت حد زیر تعریف می‌شود:

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}(\varphi(n) - \ln n) \simeq ۰/۵۷۷۲۱۶\dots,$$

گویا یا گنگ بودن ثابت اویلر مساله‌ای باز است. کار کردن با رابطه بالا برای توابع بسل نوع دوم مشکل است، رابطه زیر فرمول بهتری برای توابع بسل نوع دوم است،

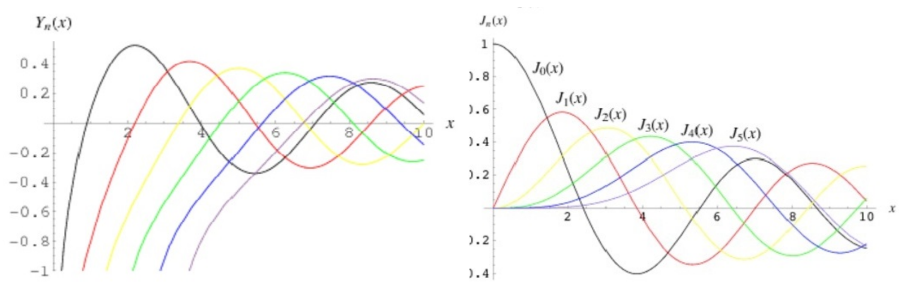
$$Y_\alpha(x) = \frac{J_\alpha(x)\cos\alpha\pi - J_{-\alpha}(x)}{\sin\alpha\pi},$$

در حالتی که $\alpha = n$ عدد صحیحی باشد،

$$Y_n(x) = \lim_{\alpha\to n}\frac{J_\alpha(x)\cos\alpha\pi - J_{-\alpha}(x)}{\sin\alpha\pi}.$$

تذکر ۳۹.۱.۳. برای معادله بسل از مرتبه n که n عددی طبیعی است، ارتباط $y_۱$ و $y_۲$ای که از روش فروبنیوس به دست می‌آیند با توابع بسل به صورت زیر است.

$$y_۱ = J_n(x),$$
$$y_۲ = \frac{\pi}{۲}Y_n(x) + (\ln ۲ - \gamma)J_n(x).$$



شکل ۲.۳: توابع بسل نوع اول و دوم

نتیجه ۴۰.۱.۳. *از نمودارهای توابع بسل روشن است که:*

۱) $J_۰(۰) = ۱$ و $J_n(۰) = ۰, n \neq ۰$، اما $\lim_{x\to ۰} Y_n(۰) = -\infty$. هم چنین $\lim_{x\to+\infty} J_n(x) = \lim_{x\to+\infty} Y_n(x) = ۰$.

۲) توابع بسل نوع اول دوم در بی‌نهایت با توابع زیر هم‌ارز هستند:

$$J_n(x) \sim \frac{۱}{۲^n n!}x^n, Y_n(x) \sim \begin{cases} \frac{۲}{\pi}\ln|x| : n = ۰ \\ -\frac{۲^n(n-۱)!}{\pi}\frac{۱}{x^n} : n = ۱, \ldots \end{cases}$$

۳) توابع بسل بی‌نهایت صفر دارند، رفتار این صفرها عجیب است، به عنوان مثال فاصله بین صفرهای $J_۰(x)$ در بی‌نهایت به π نزدیک می‌شود! این صفرها در حل معادله موج که در جلد دوم این کتاب بررسی می‌شود کاربرد دارند.

مثال ۴۱.۱.۳. به کمک تغییر متغیر $z = ۲e^{\frac{x}{۲}}$ معادله $y'' + (e^x - \frac{۴}{۹})y = ۰$ را به معادله بسل تبدیل کرده و پاسخ آن را بر حسب توابع بسل بیان کنید.

حل: در این مثال تنها متغیر مستقل یعنی x تغییر کرده، بنابراین لازم است مشتقات y نسبت به x را بر حسب مشتقات y نسبت به z به دست آوریم:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx} = y'_z e^{\frac{x}{۲}} = \frac{z}{۲}y'_z,$$

هم‌چنین

$$\begin{aligned} y'' = \frac{dy'}{dx} &= \frac{dy'}{dz}\frac{dz}{dx} \\ &= \frac{d}{dz}(\frac{z}{۲}y'_z)e^{\frac{x}{۲}} \\ &= (\frac{۱}{۲}y'_z + \frac{z}{۲}y''_z)(\frac{z}{۲}) = \frac{z^۲}{۴}y''_z + \frac{z}{۴}y_z, \end{aligned}$$

با جای‌گذاری عبارات به دست آمده در معادله اصلی نتیجه می‌شود:

$$(\frac{z^۲}{۴}y''_z + \frac{z}{۴}y'_z) + (\frac{z^۲}{۴} - \frac{۴}{۹})y = ۰,$$

معادله اخیر نیز به صورت $z^۲y''_z + zy'_z + (z^۲ - \frac{۱۶}{۹})y = ۰$ مرتب می‌شود که معادله بسل از مرتبه $\frac{۴}{۳}$ است، بنابراین جواب مساله برابر است با:

$$\begin{aligned} y &= c_۱J_{\frac{۴}{۳}}(z) + c_۲J_{-\frac{۴}{۳}}(z) \\ &= c_۱J_{\frac{۴}{۳}}(۲e^{\frac{x}{۲}}) + c_۲J_{-\frac{۴}{۳}}(۲e^{\frac{x}{۲}}). \end{aligned}$$

مثال ۴۲.۱.۳. به کمک تغییر متغیرهای $z = \sqrt{x}$ و $y = \sqrt{x}u$ معادله دیفرانسیل

$$۴x^۲y'' + (x - \frac{۵}{۴})y = ۰,$$

را به معادله بسل تبدیل نموده و آن را حل کنید.

حل: تغییر متغیرهای $z = \sqrt{x}$ و $y = \sqrt{x}u$ نشان می‌دهد هم متغیر مستقل تغییر کرده هم متغیر وابسته. به عبارت دیگر معادله‌ای که جواب آن $y(x)$ است قرار است به معادله‌ای با جواب $u(z)$ تبدیل شود، بنابراین لازم است مشتقات y نسبت به x را بر حسب مشتقات u نسبت به z به دست آوریم:

$$\begin{aligned} y' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d}{dx}(\sqrt{x}u) &= \frac{d}{dx}(zu) \\ &= \frac{dz}{dx}u + z\frac{du}{dx} \\ &= \frac{dz}{dx}u + z\frac{du}{dz}\frac{dz}{dx} \\ &= (u + z\frac{du}{dz})\frac{dz}{dx} \\ &= (u + z\frac{du}{dz})\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{u}{2z} + \frac{1}{2}u'_z, \end{aligned}$$

هم‌چنین

$$\begin{aligned} y'' = \frac{dy}{dx} &= \frac{dy'}{dz}\frac{dz}{dx} \\ &= \frac{d}{dz}(\frac{u}{2z} + \frac{1}{2}u'_z)\frac{dz}{dx} \\ &= \frac{d}{dz}(\frac{1}{2}\frac{u'_z z - u}{z} + \frac{1}{2}u''_z)\frac{1}{2z} = \frac{1}{4z}u''_z + \frac{1}{z^3}u'_z - \frac{1}{4z^3}u, \end{aligned}$$

با جای‌گذاری عبارات به دست آمده در معادله اصلی نتیجه می‌شود:

$$4(z^2)^2(\frac{1}{4z}u''_z + \frac{1}{z^3}u'_z - \frac{1}{4z^3}u) + (z^2 - \frac{5}{4})zu = 0,$$

معادله اخیر نیز به صورت $z^2u''_z + zu'_z + (z^2 - \frac{9}{4})u = 0$ مرتب می‌شود که معادله بسل از مرتبه $\frac{3}{2}$ است، بنابراین جواب مساله برابر است با:

$$u = c_1 J_{\frac{3}{2}}(z) + c_2 J_{-\frac{3}{2}}(z),$$

یعنی:

$$y = c_1\sqrt{x}J_{\frac{3}{2}}(\sqrt{x}) + c_2\sqrt{x}J_{-\frac{3}{2}}(\sqrt{x}).$$

قضیه: خواص توابع بسل نوع اول

★ دامنه همگرایی توابع بسل نوع اول، کل مجموعه اعداد حقیقی می‌باشد.

★ از $J_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+\alpha+1)}(\frac{x}{2})^{2n+\alpha}$ روشن است که برای αهای زوج، $J_\alpha(x)$ تابعی زوج و برای αهای فرد، $J_\alpha(x)$ تابعی فرد است.

♣

مثال ۴۳.۱.۳. حاصل انتگرال $\int_{-2}^{2} x^{1396}J_{2017}(x)dx$ را بیابید.

حل: مشابه مثال ۲۷.۱.۳ در صفحه ۱۳۹ برای چندجمله‌ای‌های لژاندر، $J_{2017}(x)$ تابعی فرد است و لذا $x^{1396}J_{2017}(x)$ نیز تابعی فرد است و انتگرال آن روی بازه متقارن صفر است. دقت کنید که در چندجمله‌ای‌های لژاندر حدود انتگرال از ۱− تا ۱ بود اما این‌جا هر بازه متقارن می‌تواند باشد.

قضیه: مشتق‌گیری از توابع بسل نوع اول

برای عدد حقیقی α داریم:

$$(x^\alpha J_\alpha(x))' = x^\alpha J_{\alpha-1}(x)$$

$$(x^{-\alpha} J_\alpha(x))' = -x^{-\alpha} J_{\alpha+1}(x)$$

♣

مثال ۴۴.۱.۳. با فرض $J_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!^2}(\frac{x}{2})^{2n}$، $J_1(x)$ را بیابید.

حل: با جای‌گذاری $\alpha = 0$ در رابطه $(x^{-\alpha}J_\alpha(x))' = -x^{-\alpha}J_{\alpha+1}(x)$ نتیجه

می‌شود $J_1(x) = -J_0'(x)$، پس:

$$
\begin{aligned}
J_1(x) &= -J_0'(x) \\
&= -(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!^2}(\frac{x}{2})^{2n})' \\
&= -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2}\frac{(-1)^n 2n}{n!^2}(\frac{x}{2})^{2n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{n!(n-1)!}(\frac{x}{2})^{2n-1}.
\end{aligned}
$$

قضیه: روابط بازگشتی توابع بسل نوع اول

برای عدد حقیقی α داریم:

$$
\begin{aligned}
J_{\alpha-1}(x) + J_{\alpha+1}(x) &= \frac{2\alpha}{x} J_\alpha(x) \\
J_{\alpha-1}(x) - J_{\alpha+1}(x) &= 2 J_\alpha'(x)
\end{aligned}
$$

مثال ۴۵.۱.۳. درستی روابط بالا را ثابت کنید.

حل: بنابر فرمول‌های مشتق‌گیری از توابع بسل نوع اول:

$$
\begin{aligned}
\alpha x^{\alpha-1} J_\alpha(x) + x^\alpha J_\alpha'(x) &= x^\alpha J_{\alpha-1}(x) \\
-\alpha x^{-\alpha-1} J_\alpha(x) + x^\alpha J_\alpha'(x) &= -x^\alpha J_{\alpha+1}(x),
\end{aligned}
$$

با ضرب تساوی اول در $x^{-\alpha}$ و تساوی دوم در x^α داریم:

$$
\begin{aligned}
J_\alpha'(x) &= J_{\alpha-1}(x) - \frac{\alpha}{x} J_\alpha(x) \\
J_\alpha'(x) &= -J_{\alpha+1}(x) + \frac{\alpha}{x} J_\alpha(x),
\end{aligned}
$$

از مجموع تساوی‌های بالا حکم اول و از تفاضل تساوی‌های بالا حکم دوم نتیجه می‌شود.

مثال ۴۶.۱.۳. الف) $J_3(x)$ را برحسب $J_0(x)$ و $J_1(x)$ به دست آورید.
ب) انتگرال $\int J_3(x)dx$ را محاسبه کنید.
پ) انتگرال $\int x^4 J_1(x)dx$ را محاسبه کنید.

حل: الف) جای‌گذاری $\alpha = 2$ در $J_{\alpha-1}(x) + J_{\alpha+1}(x) = \frac{2\alpha}{x}J_\alpha(x)$ و استفاده مجدد این رابطه برای $\alpha = 1$ نتیجه می‌دهد:

$$\begin{aligned}J_3(x) &= \frac{4}{x}J_2(x) - J_1(x)\\ &= \frac{4}{x}(\frac{2}{x}J_1(x) - J_0(x)) - J_1(x) = (\frac{8}{x^2} - 1)J_1(x) - \frac{4}{x}J_0(x).\end{aligned}$$

ب) جای‌گذاری $\alpha = 2$ در $J_{\alpha-1}(x) - J_{\alpha+1}(x) = 2J'_\alpha(x)$ و توجه به $J_1(x) = -J'_0(x)$ نتیجه می‌دهد:

$$\begin{aligned}\int J_3(x)dx &= \int (J_1(x) - 2J'_2(x))dx\\ &= -J_0(x) - 2J_2(x).\end{aligned}$$

پ) با فرض $u = x^2$ و $dv = x^2 J_1(x)$ در فرمول جزءبه‌جزء، نتیجه می‌شود $du = 2xdx$ و $v = x^2 J_2(x)$ پس:

$$\int x^4 J_1(x)dx = x^4 J_2(x) - 2\int x^3 J_2(x)dx = x^4 J_2(x) - 2x^3 J_3(x).$$

مثال ۴۷.۱.۳. نشان دهید:

$$\begin{aligned}J_{\frac{1}{2}}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x\\ J_{\frac{3}{2}}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}(\frac{\sin x - x\cos x}{x})\end{aligned}$$

حل: الف) با جای‌گذاری $\alpha = \frac{۱}{۲}$ در $J_\alpha(x) = \sum_{n=\circ}^{+\infty} \frac{(-۱)^n}{n!\Gamma(n+\alpha+۱)}(\frac{x}{۲})^{۲n+\alpha}$ داریم:

$$\begin{aligned} J_{\frac{۱}{۲}}(x) &= \sum_{n=\circ}^{+\infty} \frac{(-۱)^n}{n!\Gamma(n+\frac{۳}{۲})}(\frac{x}{۲})^{۲n+\frac{۱}{۲}} \\ &= \sum_{n=\circ}^{+\infty} \frac{(-۱)^n ۲^{۲n+۱} n!}{n!(۲n+۱)!\sqrt{\pi}}(\frac{x}{۲})^{۲n+\frac{۱}{۲}} \\ &= \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{\pi}\sqrt{x}} \sum_{n=\circ}^{+\infty} \frac{(-۱)^n ۲^{۲n+۱}}{(۲n+۱)!} \frac{x^{۲n+۱}}{۲^{۲n+۱}} \\ &= \sqrt{\frac{۲}{\pi x}} \sum_{n=\circ}^{+\infty} \frac{(-۱)^n}{(۲n+۱)!} x^{۲n+۱} = \sqrt{\frac{۲}{\pi x}} \sin x. \end{aligned}$$

ب) اکنون با جای‌گذاری $\alpha = \frac{۱}{۲}$ در $(x^{-\alpha}J_\alpha(x))' = -x^{-\alpha}J_{\alpha+۱}(x)$، $J_{\frac{۳}{۲}}(x)$ را برحسب $J_{\frac{۱}{۲}}(x)$ به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} J_{\frac{۳}{۲}}(x) &= -\sqrt{x}(x^{-\frac{۱}{۲}} J_{\frac{۱}{۲}}(x))' \\ &= -\sqrt{x}(\frac{۱}{\sqrt{x}}\sqrt{\frac{۲}{\pi x}} \sin x)' \\ &= -\sqrt{x}(\sqrt{\frac{۲}{\pi}} \frac{۱}{x} \sin x)' \\ &= \sqrt{\frac{۲}{\pi}}(-\sqrt{x})(-\frac{۱}{x^۲}\sin x + \frac{۱}{x}\cos x) = \sqrt{\frac{۲}{\pi x}}(\frac{\sin x - x\cos x}{x}). \end{aligned}$$

گزاره ۴۸.۱.۳. *مشابه توابع بسل نوع اول برای αهای زوج، $Y_\alpha(x)$ تابعی زوج و برای αهای فرد، $Y_\alpha(x)$ تابعی فرد است.*

قضیه: مشتق‌گیری از توابع بسل نوع دوم

برای عدد حقیقی α داریم:

$$(x^{\alpha}Y_{\alpha}(x))' = x^{\alpha}Y_{\alpha-۱}(x)$$

$$(x^{-\alpha}Y_{\alpha}(x))' = -x^{-\alpha}Y_{\alpha+۱}(x)$$

مثال ۴۹.۱.۳. درستی رابطه $(x^{\alpha}Y_{\alpha}(x))' = x^{\alpha}Y_{\alpha-۱}(x)$ را تحقیق کنید.

حل: با مشتق‌گیری از $x^{\alpha}Y_{\alpha}(x)$ داریم:

$$\begin{aligned}
(x^{\alpha}Y_{\alpha}(x))' &= \left(\frac{x^{\alpha}J_{\alpha}(x)\cos\alpha\pi - x^{\alpha}J_{-\alpha}(x)}{\sin\alpha\pi}\right)' \\
&= \frac{x^{\alpha}J_{\alpha-۱}(x)\cos\alpha\pi + x^{\alpha}J_{-\alpha+۱}(x)}{\sin\alpha\pi} \\
&= x^{\alpha}\left(\frac{J_{\alpha-۱}(x)\cos((\alpha-۱)\pi+\pi) + J_{-(\alpha-۱)}(x)}{\sin((\alpha-۱)\pi+\pi)}\right) \\
&= x^{\alpha}\left(\frac{J_{\alpha-۱}(x)\cos((\alpha-۱)\pi) - J_{-(\alpha-۱)}(x)}{\sin((\alpha-۱)\pi)}\right) = x^{\alpha}Y_{\alpha-۱}(x).
\end{aligned}$$

قضیه: روابط بازگشتی توابع بسل نوع دوم

برای عدد حقیقی α داریم:

$$Y_{\alpha-۱}(x) + Y_{\alpha+۱}(x) = \frac{۲\alpha}{x}Y_{\alpha}(x)$$

$$Y_{\alpha-۱}(x) - Y_{\alpha+۱}(x) = ۲Y'_{\alpha+۱},$$

۲.۳ سوالات حل شده

۱.۲.۳ سری توانی و توابع تحلیلی

سوال ۱.۲.۳. شعاع و فاصله همگرایی سری‌های توانی زیر را محاسبه نمایید:

الف) $\sum_{n=۱}^{+\infty}(۲+(-۱)^n)^n x^n$

ب) $\sum_{n=۱}^{+\infty}\frac{۲\times۴\times۶\times۸\times\ldots\times(۲n)}{۱\times۳\times۵\times۷\times\ldots\times(۲n-۱)}x^{۴n}$

پ) $\sum_{n=۱}^{+\infty}\frac{۱}{n}(\frac{x+۱}{x})^n$

حل: الف) قرار دهید $c_n=(۲+(-۱)^n)^n$، $\lim c_n$ برای nهای فرد برابر ۱ و برای nهای زوج برابر ۳ است. توجه کنید رابطه شعاع همگرایی برای زمانی که $\frac{c_{n+۱}}{c_n}$ یا $\sqrt[n]{c_n}$ واگرا، اما کران‌دار باشد نیز برقرار است، در این حالت از بین حدود زیر دنباله‌های همگرای $\frac{c_{n+۱}}{c_n}$ یا $\sqrt[n]{c_n}$ آن که بزرگ‌تر است را در نظر می‌گیریم و با $\limsup$ نشان می‌دهیم. در این جا $\limsup\sqrt[n]{c_n}=۳$ پس $R=\frac{۱}{۳}$، بنابراین سری روی $(-\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۳})$ قطعا همگرا است. در نقاط مرزی سری واگراست چون مثلا در $x=\frac{۱}{۳}$، به دلیل این که برای nهای زوج $(۲+(-۱)^n)^n(\frac{۱}{۳})^n\to۱$، پس سری شرط لازم همگرایی را ندارد. به همین ترتیب در $x=-\frac{۱}{۳}$ هم واگرا است.

ب) قرار دهید $c_n=\frac{۲\times۴\times۶\times۸\times\ldots\times(۲n)}{۱\times۳\times۵\times۷\times\ldots\times(۲n-۱)}x^{۴n}$،

$$\lim_{n\to\infty}|\frac{c_{n+۱}}{c_n}|=\lim_{n\to\infty}\frac{۲n+۲}{۲n+۱}x^۴=x^۴,$$

لذا روی $x^۴<۱$ یعنی $|x|<۱$ سری همگرا است، در $x=\pm۱$ سری واگرا است. چرا که $\frac{۲\times۴\times۶\times۸\times\ldots\times(۲n)}{۱\times۳\times۵\times۷\times\ldots\times(۲n-۱)}>۱\times۱\times\ldots\times۱>۱$.

پ) قرار دهید $c_n = \frac{1}{n}(\frac{x+1}{x})^n$،

$$\lim_{n\to\infty}|\frac{c_{n+1}}{c_n}| = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}|\frac{x+1}{x}| = |\frac{x+1}{x}|,$$

لذا روی $|\frac{x+1}{x}| < 1$ یعنی $(-\infty, -\frac{1}{2})$ سری همگرا است، در $x = -\frac{1}{2}$ نیز بنابر آزمون تناوب سری $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ همگرا است. بنابراین دامنه همگرایی برابر است با $(-\infty, -\frac{1}{2}]$.

سوال ۲.۲.۳. شعاع همگرایی سری توانی $f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x + 2}$ را حول نقاط $x = 0$ و $x = 1$ بیابید.

حل: مخرج تابع f دارای دو ریشه $1 \pm i$ می‌باشد. حداکثر فاصله مبدا تا این دو ریشه برابر $\sqrt{2}$ است، لذا شعاع همگرایی سری توانی حول مبدا $\sqrt{2}$ است. همین‌طور شعاع همگرایی سری توانی حول $x = 1$ برابر ۱ است.

سوال ۳.۲.۳. سری مک‌لورن تابع $\frac{\sin x}{1 + x^2}$ را بیابید.

حل: می‌دانیم $\sin x = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)!}x^{2k+1}$ و $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k x^{2k}$، بنابراین،

$$\frac{\sin x}{1+x^2} = x + (-\frac{1}{3!} - 1)x^3 + (\frac{1}{5!} - \frac{1}{3!} + 1)x^5 + \dots.$$

سوال ۴.۲.۳. سری مک‌لورن تابع $f(x) = Arc\sin x$ را بیابید.

حل: می‌دانیم $Arc\sin x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ و از فرمول بسط دو جمله‌ای با نمای حقیقی به یاد داریم $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{1\times 3\times 5\times \dots \times (2k-1)}{2^k k!}x^k$،

بنابراین:

$$\begin{aligned} Arc\sin x &= \int_{0}^{x} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1\times 3\times 5\times \ldots \times (2k-1)}{2^k k!} t^{2k}\right) dt \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1\times 3\times 5\times \ldots \times (2k-1)}{2^k k!} \int_{0}^{x} t^{2k} dt \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1\times 3\times 5\times \ldots \times (2k-1)}{2^k k!} \frac{1}{2k+1} x^{2k+1}. \end{aligned}$$

۲.۲.۳ انواع مرکز هم‌گرایی برای معادلات خطی مرتبه دوم

سوال ۵.۲.۳. وضعیت نقطه $x = 0$ را برای معادله $(x-2)^2x^2y''-(\sin x)y'+y = 0$ مشخص کنید.

حل: در این معادله $p(x) = -\frac{\sin x}{(x-2)^2x^2}$ و $q(x) = \frac{1}{(x-2)^2x^2}$، پس $x = 0$ نقطه تکین است، از طرفی:

$$\begin{aligned} p_0 &= \lim_{x\to 0} xp(x) = \lim_{x\to 0} -\frac{x\sin x}{(x-2)^2x^2} = -\frac{1}{4} \\ q_0 &= \lim_{x\to 0} x^2q(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{(x-2)^2x^2} = \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

چون حدود بالا موجود و متناهی هستند، نقطه $x = 0$ تکین منظم است.

۳.۲.۳ حل معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم حول نقاط عادی

سوال ۶.۲.۳. معادله دیفرانسیل $y'' + (\sin x)y' + e^xy = 0$ را به روش سری توانی حل کنید.

حل: با جای‌گذاری $x = 0$ نتیجه می‌شود $y''(0) + y(0) = 0$ پس $y''(0) = -y(0)$. مشتق‌گیری از $y'' + (\sin x)y' + e^xy = 0$ نتیجه می‌دهد

$$y''' + y''\sin x + y'\cos x + e^xy + e^xy' = 0,$$

و از جای‌گذاری $x = 0$، $y'''(0) = -2y'(0) - y(0)$ به دست می‌آید. مشتق‌گیری از $y''' + y'' \sin x + y' \cos x + e^x y + e^x y' = 0$ نتیجه می‌دهد

$$y^{(4)} + y''' \sin x + 2y'' \cos x - y' \sin x + e^x y + 2e^x y' + e^x y'' = 0,$$

و از جای‌گذاری $x = 0$، $y^{(4)}(0) = 2y(0) - 2y'(0)$ به دست می‌آید. پس جواب عمومی مساله برابر است با:

$$\begin{aligned} y &= y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \frac{y^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \dots \\ &= y(0) + y'(0)x + \frac{-y(0)}{2!}x^2 + \frac{-2y'(0) - y(0)}{3!}x^3 \\ &+ \frac{2y(0) - 2y'(0)}{4!}x^4 + \dots \\ &= y(0)(1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} + \dots) + y'(0)(x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{12} + \dots). \end{aligned}$$

۴.۲.۳ حل معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم حول نقاط تکین منظم (روش فروبنیوس)

سوال ۷.۲.۳. معادله دیفرانسیل $(2x^2 + x^3)y'' + (x + 3x^2)y' - (1 + 4x)y = 0$ را حل کنید.

حل: در این معادله $p(x) = \dfrac{2(1-x)}{4x}$ و $q(x) = -\dfrac{1}{4x}$، پس $x = 0$ نقطه تکین است، از طرفی:

$$p_0 = \lim_{x \to 0} xp(x) = \frac{1}{2}, q_0 = \lim_{x \to 0} x^2 q(x) = -\frac{1}{2},$$

پس $x = 0$ تکین منظم است. معادله شاخصی $\lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2} = 0$ دارای دو ریشه

$\lambda_1 = 1$ و $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$ است و لذا پایه جواب معادله به صورت زیر است:

$$y_1 = x\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1}$$
$$y_2 = x^{-\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^{n-\frac{1}{2}},$$

با مشتق‌گیری از y_1 داریم:

$$y_1' = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_n x^n$$
$$y_1'' = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)a_n(n+x^{n-1}),$$

پس

$$\begin{aligned}(2x^2+x^3)y_1'' &+ (x+3x^2)y_1' - (1+4x)y_1\\ &= (2x^2+x^3)(\sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)a_n x^{n-1})\\ &+ (x+3x^2)(\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_n x^n) - (1+4x)(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1}) = 0,\end{aligned}$$

پس از یک‌سان کردن شمارنده‌ها داریم:

$$[a_0-a_0]x+[5a_1-a_0]x^2+\sum_{k=3}^{+\infty}[(k^2-5)a_{k-2}+(2k^2-k-1)a_{k-1}]x^k = 0,$$

از تساوی اخیر نتیجه می‌شود $a_1 = \frac{1}{5}a_0$ و $k \geq 3$: $a_{k-1} = -\frac{k^2-5}{2k^2-k-1}a_{k-2}$.
همین‌طور جواب دوم نیز به دست می‌آید. جواب عمومی این معادله $x^2y'' - x(2x+3)y' + 4y = 0$ را بیابید. %endalign*

۵.۲.۳ معادله لژاندر

سوال ۸.۲.۳. سه جمله اول بسط لژاندر تابع زیر را به دست آورید.

$$f(x)=\begin{cases} -۱ & : -۱ \leq x \leq ۰ \\ x-۱ & : ۰ \leq x \leq ۱ \end{cases}$$

حل: بنابر خاصیت تعامد می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
\alpha_۰ &= \frac{۱}{۲}\int_{-۱}^{۱} f(x)P_۰(x)dx \\
&= \frac{۱}{۲}\left(\int_{-۱}^{۰} -dx + \int_{۰}^{۱}(x-۱)dx\right) = -\frac{۳}{۴}, \\
\alpha_۱ &= \frac{۳}{۲}\int_{-۱}^{۱} f(x)P_۱(x)dx \\
&= \frac{۳}{۲}\left(\int_{-۱}^{۰} -xdx + \int_{۰}^{۱}(x-۱)xdx\right) = \frac{۱}{۲}, \\
\alpha_۲ &= \frac{۵}{۲}\int_{-۱}^{۱} f(x)P_۲(x)dx \\
&= \frac{۵}{۲}\left(\int_{-۱}^{۰} -\frac{۱}{۲}(۳x^۲-۱)dx + \int_{۰}^{۱}\frac{۱}{۲}(x-۱)(۳x^۲-۱)dx\right) = \frac{۵}{۱۶},
\end{aligned}$$

پس:

$$f(x) = -\frac{۳}{۴}P_۰(x) + \frac{۱}{۲}P_۱(x) + \frac{۵}{۱۶}P_۲(x) + \dots,$$

سوال ۹.۲.۳. به کمک فرمول رُدریگ که در مساله ۳.۴.۳ در صفحه ۱۶۸ ثابت خواهید کرد، نشان دهید:

$$\int_{۰}^{۱} x^n P_n(x)dx = \frac{x^n(n!)^۲}{(۲n+۱)!}.$$

حل: توابع x^n و $P_n(x)$ بسته به زوج یا فرد بودن n توابعی زوج یا فرد هستند، لذا $x^nP_n(x)$ تابعی زوج است، پس

$$\int_{۰}^{۱} x^n P_n(x)dx = \frac{۱}{۲}\int_{-۱}^{۱} x^n P_n(x)dx,$$

با جای‌گذاری بسط لژاندر x^n یعنی $\alpha_۰P_۰(x)+\alpha_۱P_۱(x)+\ldots+\alpha_nP_n(x)$ در انتگرال بالا حاصل برابر $\frac{\alpha_n}{۲n+۱} = \frac{\alpha_n}{۲}\frac{۲}{۲n+۱}$ می‌شود. لذا کافی است تنها α_n را به دست آوریم. دقت کنید در سمت چپ تساوی $\alpha_۰P_۰(x)+\alpha_۱P_۱(x)+\ldots+\alpha_nP_n(x)$ تنها یک جمله x^n وجود دارد، در سمت راست نیز فقط $\alpha_nP_n(x)$ جمله x^n می‌سازد، لذا ضریب آن باید ۱ باشد. پس α_n وارون ضریب x^n در $P_n(x)$ است. اکنون به کمک فرمول ردریگ یعنی $P_n(x) = \frac{۱}{۲^nn!}\frac{d^n}{dx^n}(x^۲-۱)^n$ ضریب x^n در $P_n(x)$ برابر است با ضریب مشتق مرتبه nام $x^{۲n}$ تقسیم بر $۲^nn!$ که این مقدار برابر $\frac{(۲n)!}{۲^n(n!)^۲}$ است. بنابراین $\alpha_n = \frac{۲^n(n!)^۲}{(۲n)!}$ و مقدار انتگرال خواسته شده برابر است با $\frac{۲^n(n!)^۲}{(۲n+۱)!}$.

۶.۲.۳ معادله بسل

سوال ۱۰.۲.۳. به کمک تغییر متغیر $u^۲ = ۴e^x$ معادله $y'' + (e^x - n^۲)y = ۰$ را به معادله بسل تبدیل کرده و پاسخ آن را بر حسب توابع بسل بیان کنید. (n عددی طبیعی است.)

حل: در این مثال تنها متغیر مستقل یعنی x تغییر کرده، بنابراین لازم است مشتقات y نسبت به x را بر حسب مشتقات y نسبت به u به دست آوریم:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{u}{۲}y'_u,$$

هم‌چنین

$$\begin{aligned} y'' = \frac{dy'}{dx} &= \frac{dy'}{du}\frac{du}{dx} \\ &= \frac{d}{du}(\frac{u}{۲}y'_u)\frac{du}{dx} \\ &= (y''_u\frac{u}{۲} + y'_u\frac{۱}{۲})\frac{u}{۲} = \frac{u^۲}{۴}y''_u + \frac{u}{۲}y'_u, \end{aligned}$$

با جای‌گذاری عبارات به دست آمده در معادله اصلی نتیجه می‌شود:

$$\frac{u^{۲}}{۴}y''_u + \frac{u}{۲}y'_u + (e^x - n^{۲})y = ۰,$$

معادله اخیر نیز به صورت $u^{۲}y''_u + uy'_u + (u^{۲} - (۲n)^{۲})y = ۰$ مرتب می‌شود که معادله بسل از مرتبه $۲n$ است، بنابراین جواب مساله برابر است با:

$$\begin{aligned} y &= c_{۱}J_{۲n}(u) + c_{۲}Y_{-۲n}(u) \\ &= c_{۱}J_{۲n}(۲e^{\frac{x}{۲}}) + c_{۲}Y_{-۲n}(۲e^{\frac{x}{۲}}). \end{aligned}$$

سوال ۱۱.۲.۳. به کمک تغییر متغیرهای $z = \frac{x^{۲}}{۲}$ و $y = \sqrt{x}u$ معادله $y'' + x^{۲}y = ۰$ را به معادله بسل تبدیل نموده و آن را حل کنید.

حل: تغییر متغیرهای $z = \frac{x^{۲}}{۲}$ و $y = \sqrt{x}u$ نشان می‌دهد هم متغیر مستقل تغییر کرده هم متغیر وابسته. به عبارت دیگر معادله‌ای که جواب آن $y(x)$ است قرار است به معادله‌ای با جواب $u(z)$ تبدیل شود، بنابراین لازم است مشتقات y نسبت به x را بر حسب مشتقات u نسبت به z به دست آوریم:

$$\begin{aligned} y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\sqrt{x}u) \\ &= \frac{۱}{۲\sqrt{x}}u + \sqrt{x}\frac{du}{dx} \\ &= \frac{۱}{۲\sqrt{x}}u + \sqrt{x}\frac{du}{dz}\frac{dz}{dx} \\ &= \frac{۱}{۲}(۲z)^{-\frac{۱}{۴}}u + (۲z)^{\frac{۱}{۴}}u'_z(۲z)^{\frac{۱}{۲}} \\ &= (۲z)^{\frac{۳}{۴}}u'_z + \frac{۱}{۲}(۲z)^{-\frac{۱}{۴}}u, \end{aligned}$$

هم‌چنین

$$\begin{aligned} y'' = \frac{dy'}{dx} &= \frac{dy'}{dz}\frac{dz}{dx} \\ &= \frac{d}{dz}((۲z)^{\frac{۳}{۴}}u'_z + \frac{۱}{۲}(۲z)^{-\frac{۱}{۴}}u)(۲z)^{\frac{۱}{۲}} \\ &= ((۲z)^{\frac{۳}{۴}}u''_z + ۲(۲z)^{-\frac{۱}{۴}}u'_z - \frac{۱}{۴}(۲z)^{-\frac{۵}{۴}}u)(۲z)^{\frac{۱}{۲}} \\ &= (۲z)^{\frac{۵}{۴}}u''_z + ۲(۲z)^{\frac{۱}{۴}}u'_z - \frac{۱}{۴}(۲z)^{-\frac{۳}{۴}}u, \end{aligned}$$

با جای‌گذاری عبارات به دست آمده در معادله اصلی نتیجه می‌شود:

$$(۲z)^{\frac{۵}{۴}}u''_z + ۲(۲z)^{\frac{۱}{۴}}u'_z - \frac{۱}{۴}(۲z)^{-\frac{۳}{۴}}u + (۲z)(۲z)^{\frac{۱}{۴}}u = ۰,$$

معادله اخیر نیز به صورت $(۲z)^۲u''_z + (۲z)u'_z + ((۲z)^۲ - \frac{۱}{۴})u = ۰$ مرتب می‌شود که معادله بسل از مرتبه $\frac{۱}{۲}$ است، بنابراین جواب مساله برابر است با:

$$u = c_۱J_{\frac{۱}{۲}}(۲z) + c_۲J_{-\frac{۱}{۲}}(۲z),$$

یعنی:

$$y = c_۱\sqrt{x}J_{\frac{۱}{۲}}(x^۲) + c_۲\sqrt{x}J_{-\frac{۱}{۲}}(x^۲).$$

سوال ۱۲.۲.۳. تابع بسل نوع دوم از مرتبه صفر را به دست آورید.

حل: برای یافتن توابع بسل مرتبه صفر کافی است معادله $x^۲y'' + xy' + x^۲y = ۰$ را حل کنیم. با تقسیم بر x این معادله به صورت $xy'' + y' + xy = ۰$ ساده می‌شود. در این معادله $p(x) = \frac{۱}{x}$ و $q(x) = \frac{x}{x} = ۱$، پس $x = ۰$ نقطه تکین است، از طرفی:

$$p_۰ = \lim_{x\to ۰} xp(x) = ۱, q_۰ = \lim_{x\to ۰} x^۲q(x) = ۱,$$

پس $x = ۰$ تکین منظم است. معادله شاخصی $\lambda^۲ = ۰$ دارای ریشه مضاعف $\lambda = ۰$ است و لذا پایه جواب معادله به صورت زیر است:

$$y_۱ = \sum_{n=۰}^{+\infty} a_n x^n$$
$$y_۲ = y_۱ \ln|x| + \sum_{n=۰}^{+\infty} b_n x^n,$$

بنابر تذکر ۳۹.۱.۳ در صفحه ۱۴۹ توابع بسل بر حسب $y_۱$ و $y_۲$ به صورت زیر به دست می‌آیند.

$$J_۰(x) = y_۱$$
$$Y_۰(x) = \frac{۲}{\pi}((\gamma - \ln ۲)y_۱ + y_۲).$$

با مشتق‌گیری از $y_۲$ داریم:

$$y_۲' = y_۱' \ln|x| + \frac{۱}{x} y_۱ + \sum_{n=۱}^{+\infty} n b_n x^{n-۱}$$
$$y_۲'' = y_۱'' \ln|x| + \frac{۲}{x} y_۱' - \frac{۱}{x^۲} y_۱ + \sum_{n=۲}^{+\infty} n(n-۱) b_n x^{n-۲},$$

با جای‌گذاری در معادله داریم:

$$xy_۲'' + y_۲' + xy_۲ = x(y_۱'' \ln|x| + \frac{۲}{x} y_۱' - \frac{۱}{x^۲} y_۱ + \sum_{n=۰}^{+\infty} n(n-۱) b_n x^{n-۲})$$
$$+(y_۱' \ln|x| + \frac{۱}{x} y_۱ + \sum_{n=۰}^{+\infty} n b_n x^{n-۱}) + x(y_۱ \ln|x| + \sum_{n=۰}^{+\infty} b_n x^n) = ۰,$$

چون $y_۱$ نیز جواب برای معادله است، $(xy_۱'' + y_۱' + xy_۱)\ln|x| = ۰$، پس

$$۲y' + \sum_{n=۰}^{+\infty} b_n x^{n+۱} + \sum_{n=۱}^{+\infty} n b_n x^{n-۱} + \sum_{n=۲}^{+\infty} n(n-۱) b_n x^{n-۲} = ۰,$$

از طرفی $y_۱' = J_۰'(x) = (\sum_{n=۰}^{+\infty} \frac{(-۱)^n}{n!^۲} (\frac{x}{۲})^{۲n})' = -۲ \sum_{n=۰}^{+\infty} \frac{(-۱)^{n-۱} n}{n!(n-۱)!} (\frac{x}{۲})^{۲n-۱}$،
پس تساوی بالا به صورت زیر در می‌آید:

$$-۲ \sum_{n=۰}^{+\infty} \frac{(-۱)^{n-۱} n}{n!(n-۱)!} (\frac{x}{۲})^{۲n-۱} + \sum_{k=۱}^{+\infty} ((k+۱)^۲ b_{k+۱} + b_{k-۱}) x^k = ۰,$$

از تساوی بالا نتیجه می‌شود برای $k=2n$، $(k+1)^2b_{k+1}+b_{k-1}=0$، لذا

$$b_{k+1}=-\frac{1}{(k+1)^2}b_{k-1}\Rightarrow b_{2n+1}=0,$$

و برای $k=2n-1$، $(k+1)^2b_{k+1}+b_{k-1}=\frac{2(-1)^{n-1}n}{n!(n-1)!}(\frac{1}{2})^{2n-1}$، لذا

$$b_{2n}=-\frac{1}{(2n)^2}b_{2n-2}+\frac{(-1)^{n-1}}{(2n)n!(n-1)!}(\frac{1}{2})^{2n-1}\Rightarrow b_{2n}=\frac{(-1)^{n-1}\varphi(n)}{4^n(n!)^2},$$

بنابراین

$$\begin{aligned}Y_0(x)&=\frac{2}{\pi}((\gamma-\ln 2)y_1+y_2)\\&=\frac{2}{\pi}((\gamma-\ln 2)J_0(x)+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}\varphi(n)}{4^n(n!)^2}x^{2n})\\&=\frac{2}{\pi}(\ln|\frac{x}{2}|+\gamma)J_0(x)+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}\varphi(n)}{4^n(n!)^2}x^{2n}.\end{aligned}$$

۳.۳ مسائل تمرینی

تمرین ۱.۳.۳. معادله دیفرانسیل $2(x^2+8)y''+2xy'+(x+2)y=0$ را به روش سری توانی حل کنید.

تمرین ۲.۳.۳. وضعیت نقطه $x=0$ را برای معادله $x^2y''+3xy'+(1-2x)y=0$ مشخص کنید و سپس این معادله را به روش سری توانی حل کنید و شعاع همگرایی جواب به دست آمده را بیابید.

تمرین ۳.۳.۳. معادله دیفرانسیل $xy''+y'+2y=0$ را به روش سری توانی حل کنید.

تمرین ۴.۳.۳. در مثال ۴۷.۱.۳ صفحه ۱۵۴ دیدیم:

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x,\ J_{\frac{3}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}(\frac{\sin x-x\cos x}{x}),$$

نشان دهید:

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x, J_{-\frac{3}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}(\frac{-\cos x - x\sin x}{x}).$$

تمرین ۵.۳.۳. $Y_{\frac{1}{2}}(x)$ و $Y_{-\frac{1}{2}}(x)$ را بیابید.

تمرین ۶.۳.۳. نشان دهید با تغییر متغیرهای $y = x^p u$ و $z = mx^n$ معادله

$$x^2 y'' + (1 - 2p)xy' + (m^2 n^2 x^{2n} + p^2 - n^2\alpha^2) = 0,$$

به معادله بسل مرتبه α تبدیل می‌شود.

۴.۳ مسائل خلاقانه

مساله ۱.۴.۳. نشان دهید توابع لژاندر نوع دوم در رابطه بازگشتی مرتبه دوم زیر صدق می‌کنند:

$$Q_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1}xQ_n(x) - \frac{n}{n+1}Q_{n-1}(x),$$

هم‌چنین

$$Q'_{n+1}(x) - Q'_{n-1}(x) = (2n+1)Q_n(x),$$

مساله ۲.۴.۳. به کمک تابع مولد چندجمله‌ای‌های لژاندر نشان دهید:

$$\langle P_n(x), P_n(x)\rangle = \int_{-1}^{1} P_n(x)^2 dx = \frac{2}{2n+1}.$$

مساله ۳.۴.۳. [فرمول رُدریگ] نشان دهید چندجمله‌ای‌های لژاندر $P_n(x)$ در رابطه زیر صدق می‌کنند:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n.$$

مساله ۴.۴.۳. نشان دهید:

$$\int_{-1}^{1} x P_{n-1}(x) P_n(x) dx = \frac{2n}{4n^2 - 1}.$$

مساله ۵.۴.۳. نشان دهید:

$$W(J_\alpha(x), J_{-\alpha}(x)) = -\frac{2 \sin \alpha\pi}{\pi x}$$
$$W(J_\alpha(x), Y_\alpha(x)) = \frac{2}{\pi x}.$$

مساله ۶.۴.۳. نشان دهید $e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})}$ تابع مولد توابع بسل نوع اول است، یعنی:

$$e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x) t^n.$$

مساله ۷.۴.۳. نشان دهید:

$$\cos x = J_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n J_{2n}(x)$$
$$\sin x = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n J_{2n+1}(x).$$

مساله ۸.۴.۳. نشان دهید:

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\theta - x \sin\theta) d\theta.$$

مساله ۹.۴.۳. فرض کنید k_n، nامین ریشه J_α باشد، نشان دهید:

$$\int_0^1 x J_\alpha(k_m x) J_\alpha(k_n x) dx = \begin{cases} 0 & : m \neq n \\ \frac{1}{2} J_{\alpha+1}^2(k_n x) & : m = n \end{cases}$$

۴

تبدیل لاپلاس و کاربردهای آن

تبدیل فوریه و تبدیل لاپلاس دو تبدیل انتگرالی مهم و سودمند در حل معادلات دیفرانسیل هستند، با تبدیل فوریه در فصل اول جلد دوم کتاب حاضر آشنا خواهید شد و در این فصل به بررسی تبدیل لاپلاس و خواص آن می‌پردازیم. تبدیل لاپلاس از این جهت حائز اهمیت است که اولا در اثر این تبدیل، معادلات دیفرانسیل به معادلات جبری تبدیل می‌شوند و حل معادلات جبری به مراتب ساده‌تر از حل معادلات دیفرانسیل هستند. ثانیا در حین محاسبه تبدیل لاپلاس شرایط اولیه در نظر گرفته می‌شوند و جواب هم‌گن و جواب خصوصی تواما در قالب جواب عمومی به دست می‌آیند.

۱.۴ درس‌نامه

۱.۱.۴ قضایای تبدیل لاپلاس

تعریف ۱.۱.۴ (تبدیل انتگرالی). تابع دو متغیره $k(s,t)$ را در نظر بگیرید، منظور از تبدیل انتگرالی با هسته $k(s,t)$ تبدیل زیر است:

$$T(f(t)) = \int_a^b k(s,t)f(t)dt,$$

روشن است که حوزه تعریف تبدیل T توابعی مانند f است که $k(s,t)f(t)$ انتگرال‌پذیر باشد.

گزاره ۲.۱.۴. *تبدیلات انتگرالی، تبدیلاتی خطی هستند. یعنی برای هر دو تابع f و g که دارای تبدیل انتگرالی T هستند و هر عدد حقیقی λ داریم:*

$$T(f+\lambda g) = T(f) + \lambda T(g).$$

درستی گزاره بالا به علت خطی بودن عمل‌گر انتگرال است.

تعریف ۳.۱.۴ (تبدیل لاپلاس). تبدیل انتگرالی با هسته $k(s,t) = e^{-st}$ روی بازه $[0,+\infty)$ تبدیل لاپلاس[1] نام دارد و با $\mathcal{L}$ نشان می‌دهیم، یعنی:

$$\mathcal{L}(f(t)) = \int_0^{+\infty} e^{-st}f(t)dt.$$

معمولا $\mathcal{L}(f(t))$ را که تابعی از s است با $F(s)$ نشان می‌دهند. بنابراین می‌توان نوشت:

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s)$$
$$F(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} f(t)$$

حوزه تعریف f یعنی t حوزه زمان و حوزه تعریف F یعنی s حوزه لاپلاس نامیده می‌شود.

[1] ۱۸۲۷–۱۷۴۹، ریاضی‌دان و ستاره‌شناس فرانسوی که در پایان عمر خویش به سیاست پرداخت.

قضیه ۴.۱.۴ (لرش). *فرض کنید توابع f و g دارای تبدیل لاپلاس یک‌سان باشند یعنی $F(s) = G(s)$، در این صورت در تمام نقاط پیوستگی f و g، $f(t) = g(t)$. یعنی تبدیل لاپلاس روی فضای توابع پیوسته‌ای که دارای تبدیل لاپلاس هستند، تبدیلی یک‌به‌یک است و لذا وارون آن در صورت وجود یک‌تا است.*

در ادامه به محاسبه دو تبدیل لاپلاس می‌پردازیم.

مثال ۵.۱.۴. تبدیل لاپلاس تابع ثابت $f(t) \equiv ۱$ را به دست آورید.

حل: با محاسبه مستقیم داریم:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(۱) &= \int_{\circ}^{+\infty} e^{-st}(۱)dt \\ &= -\frac{۱}{s}e^{-st}\Big]_{\circ}^{+\infty} \\ &= \circ - (-\frac{۱}{s}) = \frac{۱}{s}.\end{aligned}$$

مثال ۶.۱.۴. تبدیل لاپلاس تابع نمایی $f(t) = e^{at}$ را به دست آورید.

حل: با محاسبه مستقیم داریم:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(e^{at}) &= \int_{\circ}^{+\infty} e^{-st}e^{at}dt \\ &= \int_{\circ}^{+\infty} e^{-(s-a)t}dt \\ &= -\frac{۱}{s-a}e^{-(s-a)t}\Big]_{\circ}^{+\infty} \\ &= \circ - (-\frac{۱}{s-a}) = \frac{۱}{s-a},\end{aligned}$$

همان طور که در بالا می‌بینیم تابع $f(t) = e^{at}$ دارای تبدیل لاپلاس $F(s) = \frac{۱}{s-a}$ است و دامنه تعریف تبدیل لاپلاس $(a, +\infty]$ است.

سوالی که در این جا مطرح می‌شود این است که تبدیل لاپلاس برای چه توابعی وجود دارد؟ پاسخ این است که شرط وجود تبدیل لاپلاس برای تابع $f(t)$، همگرایی انتگرال $\int_{0}^{+\infty} e^{-st} f(t)dt$ است. به عنوان مثال اگر تابع f قطعه-قطعه پیوسته باشد و برای sای، $e^{-st}f(t)$ در بی‌نهایت به صفر میل کند (که در این صورت می‌گویند f از مرتبه نمایی است) انتگرال مذکور همگرا است و تبدیل لاپلاس موجود.

مثال ۷.۱.۴. فرض کنید f تابعی قطعه-قطعه پیوسته و از مرتبه نمایی باشد. اگر تبدیل لاپلاس $f(t)$ برابر $F(s)$ ، نشان دهید:

$$\lim_{s\to+\infty} F(s) = 0.$$

حل: چون تابع f از مرتبه نمایی است، عدد مثبت Mای موجود است که $\lim_{t\to+\infty} e^{-Mt}f(t) = 0$ ، یعنی برای tهای به قدر کافی بزرگ $|f(t)| \le e^{Mt}$. پس

$$\begin{aligned}
\lim_{s\to+\infty} |F(s)| &= \lim_{s\to+\infty} \left| \int_{0}^{+\infty} e^{-st} f(t)dt \right| \\
&\le \lim_{s\to+\infty} \int_{0}^{+\infty} |e^{-st} f(t)|dt \\
&\le \lim_{s\to+\infty} \int_{0}^{+\infty} e^{-st} e^{Mt} dt = \lim_{s\to+\infty} -\frac{1}{M-s} = 0,
\end{aligned}$$

بنابراین $\lim_{s\to+\infty} |F(s)| = 0$ ، در نتیجه $\lim_{s\to+\infty} F(s) = 0$.

مثال ۸.۱.۴. آیا تابع قطعه-قطعه پیوسته و از مرتبه نمایی f موجود هست که تبدیل لاپلاس آن $s^2 + 1$ باشد؟

حل: تابع $F(s) = s^2 + 1$ نمی‌تواند تبدیل وارون لاپلاس تابعی قطعه-قطعه پیوسته و از مرتبه نمایی باشد، چرا که،

$$\lim_{s\to\infty} (s^2 + 1) \ne 0.$$

قضیه: تبدیل لاپلاس توابع مقدماتی

★ چندجمله‌ای‌ها:

$$\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{s^{n+۱}}.$$

★ توابع رادیکالی:

$$\mathcal{L}(t^\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+۱)}{s^{\alpha+۱}}.$$

★ توابع نمایی:

$$\mathcal{L}(e^{at}) = \frac{۱}{s-a}.$$

★ توابع مثلثاتی:

$$\mathcal{L}(\sin at) = \frac{a}{s^۲+a^۲}, \mathcal{L}(\cos at) = \frac{s}{s^۲+a^۲}.$$

★ توابع هذلولوی:

$$\mathcal{L}(\sinh at) = \frac{a}{s^۲-a^۲}, \mathcal{L}(\cosh at) = \frac{s}{s^۲-a^۲}.$$

مثال ۹.۱.۴. تبدیل لاپلاس تابع $f(t) = \dfrac{t^۲+۳t+۵\sqrt{t}}{\sqrt{t}}$ را به دست آورید.

حل: با توجه به قضیه بالا داریم:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left(\frac{t^۲+۳t+۵\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\right) &= \mathcal{L}(t^{\frac{۳}{۲}} + ۳t^{\frac{۱}{۲}} + ۵)\\ &= \frac{\Gamma(\frac{۵}{۲})}{s^{\frac{۵}{۲}}} + \frac{۳\Gamma(\frac{۳}{۲})}{s^{\frac{۳}{۲}}} + \frac{۵}{s}\\ &= \frac{۳\sqrt{\pi}}{۴s^{\frac{۵}{۲}}} + \frac{۳\sqrt{\pi}}{۲s^{\frac{۳}{۲}}} + \frac{۵}{s}.\end{aligned}$$

مثال ۱۰.۱.۴. تبدیل لاپلاس تابع $f(t) = \cos^{۲} t + \cosh^{۲} t$ را به دست آورید.

حل: ابتدا تابع داده شده را ساده می‌کنیم،

$$f(t) = \cos^{۲} t + \cosh^{۲} t = \frac{۱ + \cos ۲t}{۲} + \frac{\cosh ۲t + ۱}{۲},$$

پس

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f(t)) &= \mathcal{L}(\frac{۱}{۲}\cos ۲t + \frac{۱}{۲}\cosh ۲t + ۱) \\ &= \frac{۱}{۲}\frac{s}{s^{۲}+۴} + \frac{۱}{۲}\frac{s}{s^{۲}-۴} + \frac{۱}{s}.\end{aligned}$$

مثال ۱۱.۱.۴. می‌دانیم $J_{\circ}(x) = \sum_{n=\circ}^{\infty} \frac{(-۱)^n}{۲^{۲n} n!^{۲}} x^{۲n}$، تبدیل لاپلاس $J_{\circ}(\sqrt{t})$ را به دست آورید.

حل: با جای‌گذاری $\sqrt{t}$ در $J_{\circ}(x)$ و استفاده از رابطه $\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{s^{n+۱}}$ داریم[۲]:

$$J_{\circ}(\sqrt{t}) = \sum_{n=\circ}^{\infty} \frac{(-۱)^n}{۲^{۲n} n!^{۲}} t^n,$$

---

[۲] لازم به ذکر است که در این‌جا به علت مناسبات آموزشی، از دقت ریاضی کاسته‌ایم. توجه کنید که از خطی بودن تبدیل لاپلاس برای n تابع $f_۱$، $f_۲$، ...، f_n که دارای تبدیل لاپلاس هستند، رابطه زیر فورا نتیجه می‌شود،

$$\mathcal{L}(\sum_{i=۱}^{n} f_i) = \sum_{i=۱}^{n} \mathcal{L}(f_i),$$

اما این که برای دنباله تابعی $\{f_i\}_{i=۱}^{\infty}$ تحت چه شرایطی و چرا رابطه زیر برقرار است، نیاز به کمی تامل دارد!

$$\mathcal{L}(\sum_{i=۱}^{\infty} f_i) = \sum_{i=۱}^{\infty} \mathcal{L}(f_i).$$

پس

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(J_\circ(\sqrt{t})) &= \mathcal{L}(\sum_{n=\circ}^{\infty}\frac{(-۱)^n}{۲^{۲n}n!^۲}t^n)\\ &= \sum_{n=\circ}^{\infty}\frac{(-۱)^n}{۲^{۲n}n!^۲}\mathcal{L}(t^n)\\ &= \sum_{n=\circ}^{\infty}\frac{(-۱)^n}{۲^{۲n}n!^۲}\frac{n!}{s^{n+۱}}\\ &= \sum_{n=\circ}^{\infty}\frac{(-۱)^n}{۴^n n!}\frac{۱}{s^{n+۱}}\\ &= \frac{۱}{s}\sum_{n=\circ}^{\infty}\frac{۱}{n!}(\frac{-۱}{۴s})^n = \frac{۱}{s}e^{-\frac{۱}{۴s}}.\end{aligned}$$

قضیه: تبدیل لاپلاس توابع متناوب

★ اگر تبدیل لاپلاس تابع $f : [\circ, +\infty) \to \mathbb{R}$ که متناوب با دوره تناوب T است، موجود باشد:

$$\mathcal{L}(f(t)) = \frac{۱}{۱-e^{-Ts}}\int_\circ^T e^{-st}f(t)dt.$$

♣

مثال ۱۲.۱.۴. تبدیل لاپلاس تابع $f(t) = |\sin t|$ را به دست آورید.

حل: تابع $|\sin t|$ متناوب و دارای دوره تناوب $T = \pi$ می‌باشد، پس:

$$\mathcal{L}(|\sin t|) = \frac{۱}{۱-e^{-\pi s}}\int_\circ^\pi e^{-st}\sin t dt$$

مثال ۱۳.۱.۴. تبدیل لاپلاس تابع $f(t) = e^{t-[t]}$ را به دست آورید.

حل: تابع $t-[t]$ متناوب با دوره تناوب $T = ۱$ است، پس $e^{t-[t]}$ نیز با همین دوره

تناوب متناوب است، در نتیجه:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(e^{t-[t]}) &= \frac{۱}{۱-e^{-s}}\int_{۰}^{۱} e^{-st}e^{t-[t]}dt \\
&= \frac{۱}{۱-e^{-s}}\int_{۰}^{۱} e^{-st}e^{t}dt \\
&= \frac{۱}{۱-e^{-s}}\int_{۰}^{۱} e^{(۱-s)t}dt \\
&= \frac{۱}{۱-e^{-s}}\frac{۱}{۱-s}e^{(۱-s)t}]_{۰}^{۱} \\
&= \frac{e^{۱-s}-۱}{(۱-e^{-s})(۱-s)}.
\end{aligned}$$

قضیه: تغییر مقیاس (تجانس)

★ تغییر مقیاس در حوزه زمان:

$$f(\lambda t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{۱}{\lambda}F(\frac{s}{\lambda}).$$

★ تغییر مقیاس در حوزه لاپلاس:

$$\frac{۱}{\lambda}f(\frac{t}{\lambda}) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(\lambda s).$$

نتیجه: روابط بالا نشان می‌دهد تغییر مقیاس با ضریب λ در حوزه زمان (لاپلاس) متناظر است با $\frac{۱}{\lambda}$ تغییر مقیاس با ضریب $\frac{۱}{\lambda}$ در حوزه لاپلاس (زمان).

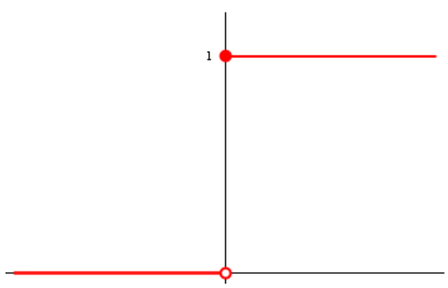
مثال ۱۴.۱.۴. در مثال ۲۹.۱.۴ صفحه ۱۸۷ خواهیم دید $\mathcal{L}(J_{۰}(t)) = \frac{۱}{\sqrt{s^{۲}+۱}}$، تبدیل لاپلاس تابع $J_{۰}(at)$ را به دست آورید.

حل: بنابر قضیه تغییر مقیاس داریم:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(J_\circ(at)) &= \frac{۱}{a}F(\frac{s}{a})\\ &= \frac{۱}{a}\frac{۱}{\sqrt{(\frac{s}{a})^۲+۱}} = \frac{۱}{\sqrt{s^۲+a^۲}}.\end{aligned}$$

در این قسمت به بیان یک تابع خاص موسوم به تابع پله یا تابع هویساید می‌پردازیم. فایده این تابع در بیان توابع چندضابطه‌ای و محاسبه تبدیل لاپلاس آن‌ها است.

تعریف ۱۵.۱.۴ (تابع پله). منظور از تابع پله یکه تابعی است که برای اعداد منفی دارای مقدار صفر و برای اعداد نامنفی دارای مقدار یک است. این تابع که با $u(x)$ نشان می‌دهیم دارای ضابطه $u(x) = \begin{cases} ۱ & : x \geq \circ \\ \circ & : x < \circ \end{cases}$ و نمودار زیر است.



شکل ۱.۴: تابع پله

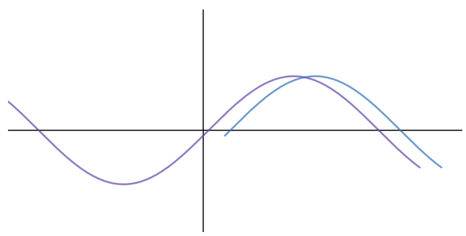
به طور مشابه تابع $u_a(x) = u(x-a) = \begin{cases} ۱ & : x \geq a \\ \circ & : x < a \end{cases}$ تعریف می‌شود که از a به بعد دارای مقدار یک است.

تبدیل لاپلاس تابع $u_a(t)$ برابر است با:

$$\mathcal{L}(u_a(t)) = \int_\circ^{+\infty} e^{-st}u_a(t)dt = \int_a^{+\infty} e^{-st}dt = -\frac{۱}{s}e^{-st}]_a^{+\infty} = \frac{e^{-as}}{s}.$$

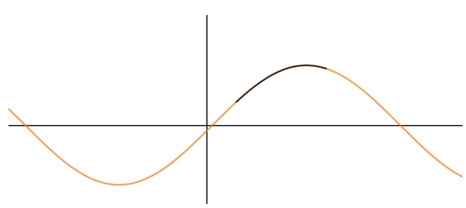
از تابع پله می‌توان توابع زیر را تعریف کرد.

- انتقال و فراموشی: تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ را در نظر بگیرید، با فرض $a>0$، تابع g با ضابطه $g(t)=u_a(t)f(t-a)$ تابع f را به اندازه a به سمت راست انتقال می‌دهد و قبل a را فراموش می‌کند. در شکل زیر توابع $f(t)$ و $u_4(t)f(t-4)$ رسم شده است.



شکل ۲.۴: توابع $f(t)$ و $u_4(t)f(t-4)$

- تابع فیلتر: تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ را در نظر بگیرید، با فرض $b>a>0$، تابع g با ضابطه $g(t)=(u_a(t)-u_b(t))f(t)$ بخشی از تابع f را نشان می‌دهد که در بازه $[a,b)$ قرار دارد. در شکل زیر توابع $f(t)$ و $(u_1(t)-u_4(t))f(t)$ رسم شده است.



شکل ۳.۴: توابع $f(t)$ و $(u_1(t)-u_4(t))f(t)$

مثال ۱۶.۱.۴. تابع زیر را برحسب توابع پله‌ای بیان کنید.

$$f(t) = \begin{cases} t & : 0 < t < \frac{\pi}{2} \\ \sin 3t & : \frac{\pi}{2} < t < 2\pi \\ \cos t & : t > 2\pi \end{cases}$$

حل: به کمک تابع فیلتر می‌توان نوشت:

$$f(t) = (u(t) - u_{\frac{\pi}{2}}(t))t + (u_{\frac{\pi}{2}}(t) - u_{2\pi}(t)) \sin 3t + u_{2\pi}(t) \cos t.$$

مثال ۱۷.۱.۴. تبدیل لاپلاس تابع $f(t) = [t]$ را به دست آورید.

حل: ابتدا توجه کنید که:

$$\begin{aligned} [t] &= 1(u_0(t) - u_1(t)) + 2(u_1(t) - u_2(t)) + 3(u_2(t) - u_3(t)) + \dots \\ &= u_0(t) + u_1(t) + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t), \end{aligned}$$

پس:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}([t]) &= \mathcal{L}(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}(u_n(t)) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-ns}}{s} = \frac{1}{s}\frac{e^{-s}}{1 - e^{-s}} = \frac{1}{s(e^s - 1)}, \end{aligned}$$

دقت کنید که برای $s > 0$، $|e^{-s}| < 1$ و سری بالا همگرا است.

قضیه: انتقال

★ انتقال در حوزه زمان:

$$u_a(t)f(t-a) \xrightarrow{\mathcal{L}} e^{-as}F(s).$$

★ انتقال در حوزه لاپلاس:

$$e^{at}f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s-a).$$

نتیجه: انتقال به اندازه a به راست در حوزه زمان معادل ضرب در e^{-as} در حوزه لاپلاس و انتقال به اندازه a به راست در حوزه لاپلاس معادل ضرب در e^{at} در حوزه زمان است.

مثال ۱۸.۱.۴. تبدیل لاپلاس تابع $f(t) = \sqrt{t}e^t$ را به دست آورید.

حل: بنابر قضیه انتقال در حوزه لاپلاس:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\sqrt{t}e^t) &= \mathcal{L}(\sqrt{t})|_{s\to s-۱}\\ &= \frac{\Gamma(\frac{۱}{۲}+۱)}{s^{\frac{۱}{۲}+۱}}|_{s\to s-۱}\\ &= \frac{\frac{\sqrt{\pi}}{۲}}{s^{\frac{۳}{۲}}}|_{s\to s-۱} = \frac{\sqrt{\pi}}{۲}\frac{۱}{(s-۱)\sqrt{s-۱}}.\end{aligned}$$

مثال ۱۹.۱.۴. تبدیل لاپلاس تابع مطرح شده در مثال ۱۶.۱.۴ در صفحه ۱۸۰ را به دست آورید.

حل: دیدیم که تابع داده شده دارای ضابطه

$$f(t) = (u(t)-u_{\frac{\pi}{۲}}(t))t + (u_{\frac{\pi}{۲}}(t) - u_{۲\pi}(t))\sin ۳t + u_{۲\pi}(t)\cos t,$$

است. برای محاسبه تبدیل لاپلاس کافی است این تابع را بر حسب جملات $u_a(t)g(t-a)$ مرتب کنیم.

$$f(t) = u(t)(t) - u_{\frac{\pi}{۲}}(t)(t - \frac{\pi}{۲}) + \frac{\pi}{۲}u_{\frac{\pi}{۲}}(t) - u_{۲\pi}(t)\cos ۳(t - \frac{\pi}{۲})$$
$$-u_{۲\pi}(t)\sin ۳(t - ۲\pi) + u_{۲\pi}(t)\sin(t - ۲\pi),$$

اکنون بنابر قضیه انتقال در حوزه زمان داریم:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f(t)) &= \frac{۱}{s^۲} - \frac{e^{-\frac{\pi}{۲}}s}{s^۲} + \frac{\pi}{۲}\frac{e^{-\frac{\pi}{۲}}s}{s} - \frac{e^{-۲\pi s}s}{s^۲+۹} - \frac{۳e^{-۲\pi s}}{s^۲+۹} + \frac{e^{-۲\pi s}}{s^۲+۱}\\ &= \frac{۱}{s^۲} + e^{-\frac{\pi}{۲}}s(-\frac{۱}{s^۲} + \frac{\pi}{۲s}) + e^{-۲\pi s}(\frac{s-۳}{s^۲+۹} + \frac{۱}{s^۲+۱}).\end{aligned}$$

مثال ۲۰.۱.۴. تبدیل وارون لاپلاس $F(s) = \frac{e^{۲s}}{(s-۳)^۳} - \frac{e^{-s}}{(s+۱)^۴}$ را به دست آورید.

حل: بنابر قضایای انتقال در حوزه زمان و حوزه لاپلاس داریم:

$$\begin{aligned}f(t) &= \mathcal{L}^{-۱}(\frac{e^{۲s}}{(s-۳)^۳} - \frac{e^{-s}}{(s+۱)^۴})\\ &= u_{-۲}(t)(\mathcal{L}^{-۱}\frac{۱}{(s-۳)^۳})|_{t+۲} - u_۱(t)(\mathcal{L}^{-۱}\frac{۱}{(s+۱)^۴})|_{t-۱}\\ &= u_{-۲}(t)(e^{۳t}\mathcal{L}^{-۱}\frac{۱}{s^۳})|_{t+۲} - u_۱(t)(e^{-t}\mathcal{L}^{-۱}\frac{۱}{s^۴})_{t-۱}\\ &= u_{-۲}(t)(\frac{۱}{۲!}e^{۳t}\mathcal{L}^{-۱}\frac{۲!}{s^۳})|_{t+۲} - u_۱(t)(\frac{۱}{۳!}e^{-t}\mathcal{L}^{-۱}\frac{۳!}{s^۴})_{t-۱}\\ &= u_{-۲}(t)(\frac{۱}{۲!}e^{۳t}t^۲)|_{t+۲} - u_۱(t)(\frac{۱}{۳!}e^{-t}\mathcal{L}^{-۱}t^۳)_{t-۱}\\ &= \frac{۱}{۲}u_{-۲}(t)e^{۳(t+۲)}(t+۲)^۲ - \frac{۱}{۶}u_۱(t)e^{-(t-۱)}(t-۱)^۳.\end{aligned}$$

قضیه: مشتق و انتگرال در حوزه زمان

★ مشتق‌گیری در حوزه زمان:

فرض کنید تابع f، n-مرتبه مشتق‌پذیر و مشتق مرتبه nام قطعه-قطعه پیوسته و از مرتبه نمایی باشد، در این صورت:

$$\mathcal{L}(f^{(n)}(t)) = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-1-k)}(0).$$

★ انتگرال‌گیری در حوزه زمان:

فرض کنید f تابعی پیوسته باشد، در این صورت:

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(u)du\right) = \frac{F(s)}{s}.$$

نتیجه ۲۱.۱.۴. *در صورت صفر بودن شرایط اولیه، n بار مشتق‌گیری در حوزه زمان، معادل ضرب در s^n در حوزه لاپلاس و n بار انتگرال‌گیری در حوزه زمان، معادل تقسیم بر s^n در حوزه لاپلاس می‌باشد.*

مثال ۲۲.۱.۴. تبدیل لاپلاس جواب معادله دیفرانسیل $y'' + 2y' + 5y = 0$ را با شرایط اولیه $y(0) = 2$ و $y'(0) = -4$ به دست آورید.

حل: فرض کنید $Y(s)$ تبدیل لاپلاس $y(t)$ باشد، بنابر قضیه مشتق‌گیری در حوزه زمان:

$$(s^2 Y(s) - (sy(0) + y'(0)) + 2(sY(s) - y(0)) + 5Y(s) = 0,$$

جای‌گذاری $y(0) = 2$ و $y'(0) = -4$ در تساوی بالا نتیجه می‌دهد

$$Y(s) = \frac{2s - 2}{s^2 + 2s + 5}.$$

مثال ۲۳.۱.۴. تبدیل لاپلاس جواب معادله دیفرانسیل-انتگرال زیر را با شرط $y(۰) = ۱$ به دست آورید.

$$y'(t) + ۲y(t) + \int_۰^t y(u)du = ۰.$$

حل: فرض کنید $Y(s)$ تبدیل لاپلاس $y(t)$ باشد، بنابر قضایای مشتق و انتگرال در حوزه زمان:

$$sY(s) - y(۰) + ۲Y(s) + \frac{Y(s)}{s} = ۰,$$

از تساوی بالا $Y(s) = \frac{s}{s^۲ + ۲s + ۱}$ به دست می‌آید.

مثال ۲۴.۱.۴. تبدیل وارون لاپلاس $F(s) = \frac{۱}{s(s+۲)}$ را به دست آورید.

حل: با تفکیک کسر داریم:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-۱}(\frac{۱}{s(s+۲)}) &= \frac{۱}{۲}\mathcal{L}^{-۱}(\frac{۱}{s} - \frac{۱}{s+۲})\\ &= \frac{۱}{۲}(۱ - e^{-۲t}).\end{aligned}$$

قضیه: مشتق و انتگرال در حوزه لاپلاس

★ مشتق‌گیری در حوزه لاپلاس:

$$(-t)^n f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{d^n}{ds^n}F(s).$$

★ انتگرال‌گیری در حوزه لاپلاس:

$$\frac{f(t)}{t} \xrightarrow{\mathcal{L}} \int_s^\infty F(u)du,$$

شرط برقراری تساوی بالا این است که $\lim_{t\to ۰^+} \frac{f(t)}{t}$ موجود باشد.

نتیجه ۲۵.۱.۴. *n بار مشتق‌گیری در حوزه لاپلاس، معادل ضرب در $(-t)^n$ در حوزه زمان و انتگرال‌گیری در حوزه لاپلاس، معادل تقسیم بر t در حوزه زمان می‌باشد.*

مثال ۲۶.۱.۴. تبدیل لاپلاس $f(t) = t^۲ e^{۲t}$ را به دست آورید.

حل: بنابر بر قضیه مشتق‌گیری در حوزه لاپلاس:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(t^۲ e^{۲t}) &= \mathcal{L}((-t)^۲ e^{۲t}) \\ &= (\mathcal{L}(e^{۲t}))'' \\ &= (\frac{۱}{s+۲})'' = \frac{۲}{(s+۲)^۳}.\end{aligned}$$

مثال ۲۷.۱.۴. تبدیل لاپلاس $f(t) = \frac{\sin ۵t}{t}$ را به دست آورید.

حل: بنابر قضیه انتگرال‌گیری در حوزه لاپلاس:

$$\mathcal{L}(\frac{\sin ۵t}{t}) = \int_s^{+\infty} \frac{۵du}{u^۲ + ۲۵},$$

انتگرال اخیر نیز برابر $\frac{۱}{۵}\int_s^{+\infty} \frac{du}{(\frac{u}{۵})^۲ + ۱}$، که با تغییر متغیر $x = \frac{u}{۵}$، داریم:

$$\begin{aligned}\frac{۱}{۵}\int_s^{+\infty} \frac{du}{(\frac{u}{۵})^۲ + ۱} &= \int_{\frac{s}{۵}}^{+\infty} \frac{dx}{x^۲ + ۱} \\ &= \tan^{-۱} x]_{\frac{s}{۵}}^{+\infty} \\ &= \frac{\pi}{۲} - \tan^{-۱}\frac{s}{۵} = \cot^{-۱}\frac{s}{۵}.\end{aligned}$$

مثال ۲۸.۱.۴. تبدیل وارون لاپلاس $F(s) = \ln\frac{s + \sqrt{s^۲ + ۱}}{۲s}$ را به دست آورید.

حل: با مشتق‌گیری نسبت به s داریم:

$$\begin{aligned} F'(s) &= (\ln \frac{s+\sqrt{s^۲+۱}}{۲s})' \\ &= (\ln(s+\sqrt{s^۲+۱}) - \ln ۲s)' \\ &= \frac{۱+\frac{s}{\sqrt{s^۲+۱}}}{s+\sqrt{s^۲+۱}} - \frac{۲}{۲s} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{s^۲+۱}+s}{\sqrt{s^۲+۱}}}{s+\sqrt{s^۲+۱}} - \frac{۱}{s} \\ &= \frac{۱}{\sqrt{s^۲+۱}} - \frac{۱}{s}, \end{aligned}$$

از طرفی بنابر قضیه مشتق‌گیری در حوزه لاپلاس $F'(s) = \mathcal{L}(-tf(t))$، پس

$$-tf(t) = \mathcal{L}^{-۱}(\frac{۱}{\sqrt{s^۲+۱}} - \frac{۱}{s}) = J_\circ(t) - ۱,$$

بنابراین $f(t) = \frac{-۱}{t}(J_\circ(t) - ۱)$.

مثال ۲۹.۱.۴. تبدیل لاپلاس توابع بسل نوع اول $J_\circ(t)$ و $J_۱(t)$ را به دست آورید.

حل: تابع بسل نوع اول مرتبه صفر $y = J_\circ(x)$ جواب $x^۲y'' + xy' + x^۲y = \circ$ است، با تقسیم بر x، به معادله $xy'' + y' + xy = \circ$ می‌رسیم که با محاسبه تبدیل لاپلاس داریم:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(xy'') + \mathcal{L}(y') + \mathcal{L}(xy) &= -(\mathcal{L}(y''))' + \mathcal{L}(y') - \mathcal{L}(y)' \\ &= -(s^۲Y(s) - sy(\circ) - y'(\circ))' \\ &\quad +(sY(s) - y(\circ)) + Y'(s), \end{aligned}$$

از طرفی $y(\circ) = J_\circ(\circ) = ۱$ و $y'(\circ) = J'_\circ(\circ) = -J_۱(\circ) = \circ$، پس

$$(۱ + s^۲)Y'(s) - sY(s) = \circ,$$

معادله اخیر نیز به صورت $\frac{dY}{Y} = \frac{s}{۱ + s^۲}ds$ جدایی‌پذیر است و دارای جواب $\ln Y = \frac{۱}{۲}\ln(۱ + s^۲)$ می‌باشد، پس

$$Y(s) = \mathcal{L}(J_\circ(t)) = \frac{۱}{\sqrt{s^۲ + ۱}}.$$

برای محاسبه تبدیل لاپلاس $J_۱(t)$ بنابر تساوی $J_۱(t) = -J'_\circ(t)$ داریم:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(J_۱(t)) &= \mathcal{L}(-J'_\circ(t)) \\ &= -s\mathcal{L}(J_\circ(t)) = -\frac{s}{s^۲ + ۱}. \end{aligned}$$

مثال ۳۰.۱.۴. تبدیل لاپلاس $f(t) = \int_\circ^t \frac{\sin x}{x}dx$ را به دست آورید.

حل: بنابر قضایای انتگرال در حوزه زمان و لاپلاس داریم:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\int_\circ^t \frac{\sin x}{x}dx) &= \frac{۱}{s}\int_s^{+\infty} \mathcal{L}(\sin x)dx \\ &= \frac{۱}{s}\int_s^{+\infty} \frac{۱}{s^۲ + x^۲}dx \\ &= \frac{۱}{s^۲}\tan^{-۱}\frac{x}{s}\Big]_s^{+\infty} = \frac{۱}{s^۲}(\frac{\pi}{۲} - \frac{\pi}{۴}) = \frac{\pi}{۴s^۲}. \end{aligned}$$

مثال ۳۱.۱.۴. معادله دیفرانسیل

$$ty'' + (۲t + ۳)y' + (t + ۳)y = ۳e^{-t}, y(\circ) = y'(\circ) = \circ,$$

را به کمک تبدیل لاپلاس حل کنید.

حل: ضرایب معادله خطی داده شده متغیر هستند، لذا لازم است معادله را به صورت زیر مرتب کنیم.

$$-(-ty'') - ۲(-ty') + ۳y' - (-ty) + ۳y = ۳e^{-t},$$

اکنون تبدیل لاپلاس دو طرف تساوی بالا را به دست می‌آوریم.

$$-\mathcal{L}(-ty'') - ۲\mathcal{L}(-ty') + ۳\mathcal{L}(y') - \mathcal{L}(-ty) + ۳\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(۳e^{-t}),$$

بنابر قضیه $\mathcal{L}(-tf(t)) = F'(s)$ داریم:

$$-\mathcal{L}(y'')' - ۲\mathcal{L}(y')' + ۳\mathcal{L}(y') - \mathcal{L}(y)' + ۳\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(۳e^{-t}),$$

از طرفی بنابر قضیه مشتق‌گیری در حوزه زمان و با توجه به شرط اولیه صفر مساله داریم:

$$-(s^۲Y(s))' - ۲(sY(s))' + ۳sY(s) - Y'(s) + ۳Y(s) = \frac{۳}{s+۱},$$

تساوی بالا به صورت $Y'(s) - \frac{۱}{s+۱}Y(s) = \frac{-۳}{(s+۱)^۳}$ مرتب می‌شود که معادله‌ای مرتبه اول است و دارای جواب

$$\begin{aligned}
Y(s) &= e^{-\int p(s)ds}\left(\int e^{\int p(s)ds} q(s)ds + c\right)\\
&= e^{-\int -\frac{۱}{s+۱}ds}\left(\int e^{\int -\frac{۱}{s+۱}ds} \frac{-۳}{(s+۱)^۳}ds + c\right)\\
&= (s+۱)\left(\int \frac{-۳}{(s+۱)^۴}ds + c\right)\\
&= (s+۱)((s+۱)^{-۳} + c) = (s+۱)^{-۲} + c(s+۱),
\end{aligned}$$

با محاسبه تبدیل وارون لاپلاس نتیجه می‌شود $y(t) = e^{-t}t + ce^{-t}$ و به کمک شرط اولیه، جواب مساله $y(t) = e^{-t}t$ می‌باشد.

در این قسمت به تعریف نوع خاصی از ضرب توابع موسوم به پیچش یا تلفیق می‌پردازیم.

تعریف ۳۲.۱.۴ (پیچش یا تلفیق[۳]). پیچش دو تابع انتگرال‌پذیر $f, g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ را با $f * g$ نشان می‌دهند و به صورت زیر تعریف می‌کنند:

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(x) g(t - x) dx.$$

مثال ۳۳.۱.۴. پیچش دو تابع $f(t) = \sin t$ و $g(t) = \cos t$ را به دست آورید.

حل: بنابر تعریف و استفاده از روابط ضرب به جمع داریم:

$$\begin{aligned} \sin t * \cos t &= \int_0^t \sin x \cos(t - x) dx \\ &= \int_0^t \frac{1}{2}[\sin(x + t - x) + \sin(x - (t - x))] dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t [\sin(t) + \sin(2x - t))] dx \\ &= \frac{1}{2}(\sin(t)x - \frac{1}{2}\cos(2x - t)]_0^t = \frac{1}{2} t \sin t. \end{aligned}$$

گزاره ۳۴.۱.۴ (خواص پیچش). *برای توابع انتگرال‌پذیر* $f, g, h : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *و عدد حقیقی* λ *داریم:*

۱) جابه‌جایی بودن:

$$f * g = g * f.$$

۲) شرکت‌پذیری:

$$f * (g * h) = (f * g) * h.$$

۳) دوخطی بودن:

$$f * (g + \lambda h) = f * g + \lambda f * h.$$

قضیه زیر رابطه زیبایی برای تبدیل لاپلاس پیچش دو تابع بیان می‌کند.

---

[۳] کانوولوشن

قضیه: تبدیل لاپلاس پیچش

برای توابعی که تبدیل لاپلاس آن‌ها موجود است:

$$f * g \xrightarrow{\mathcal{L}} f.g.$$

نتیجه: ضرب در حوزه لاپلاس، معادل پیچش در حوزه زمان است.

مثال ۳۵.۱.۴. الف) حاصل $t * t * t$ را به دست آورید.
ب) حاصل $\sqrt{t} * \sqrt{t^۳}$ را به دست آورید.

حل: الف) بنابر تعریف پیچش:

$$\begin{aligned} t * t &= \int_۰^t x(t-x)dx \\ &= \int_۰^t (tx - x^۲)dx = \frac{۱}{۲}tx^۲ - \frac{۱}{۳}x^۳]_۰^t = \frac{۱}{۶}t^۳, \end{aligned}$$

پس

$$\begin{aligned} t * t * t &= (t * t) * t \\ &= \frac{۱}{۶}t^۳ * t \\ &= \frac{۱}{۶}\int_۰^t x^۳(t-x)dx \\ &= \frac{۱}{۶}\int_۰^t (tx^۳ - x^۴)dx = \frac{۱}{۶}(\frac{۱}{۴}tx^۴ - \frac{۱}{۵}x^۵)_۰^t = \frac{۱}{۱۲۰}t^۵. \end{aligned}$$

ب) اگر از تعریف استفاده کنیم به انتگرال

$$\sqrt{t} * \sqrt{t^۳} = \int_۰^t \sqrt{x}\sqrt{(t-x)^۳}dx,$$

می‌رسیم که به سادگی قابل محاسبه نیست. به جای استفاده از تعریف، بنابر قضیه تبدیل لاپلاس پیچش توابع داریم:

$$\begin{aligned}\sqrt{t} * \sqrt{t^{3}} &= \mathcal{L}^{-1}(\mathcal{L}(\sqrt{t}).\mathcal{L}(\sqrt{t^{3}}))\\ &= \mathcal{L}^{-1}(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{1}{s^{\frac{3}{2}}}.\frac{\sqrt{\pi}}{4}\frac{1}{s^{\frac{5}{2}}})\\ &= \frac{\pi}{8}\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{s^{4}} = \frac{\pi}{48}t^{3}.\end{aligned}$$

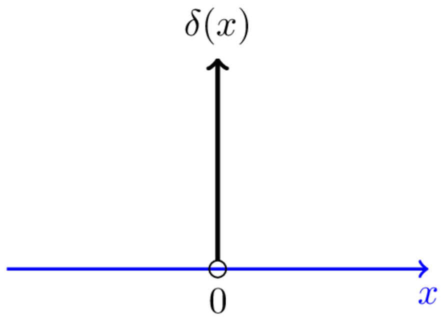
سوال: آیا برای هر تابع انتگرال‌پذیر $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$، می‌توان گفت $1 * f = f$؟ پاسخ این سوال در حالت کلی منفی است، چرا که $(1 * f)(t) = \int_0^t f(x)dx \neq f(t)$. اما سوالی که در این جا مطرح می‌شود این است که آیا تابع انتگرال‌پذیر g موجود است که برای هر تابع انتگرال‌پذیر f داشته باشیم $f * g = f$؟ می‌توان دید چنین تابعی وجود ندارد. اما موجودی که در ادامه تعریف می‌شود و دلتای دیراک نام دارد این نقش را ایفا می‌کند. با مسامحه[4] تابع دلتای دیراک یا تابع ضربه می‌نامیم و دروس مقدماتی و مهندسی مانند تابع با آن رفتار می‌کنیم.

تعریف ۳۶.۱.۴ (تابع ضربه). مشتق تابع پله، یعنی تابعی که در سرتاسر اعداد حقیقی دارای مقدار صفر و در $x = 0$ دارای مقدار بی‌نهایت است، تابع ضربه نامیده می‌شود. این تابع که با $\delta(x)$ نشان می‌دهیم دارای ضابطه $\delta(x) = \begin{cases} +\infty & : x = 0 \\ 0 & : x \neq 0 \end{cases}$ و نمودار شکل ۴۰۴

---

[4] دانش‌جویان رشته ریاضی باید به این نکته توجه کنند که حلقه توابع پیوسته با دو عمل جمع و پیچش یعنی $(C^{\circ}(\mathbb{R}), +, *)$، جابه‌جایی و حتی حوزه صحیح است، اما یک‌دار نیست. حال اگر میدان کسرهای این حلقه را در نظر بگیریم، عنصرِ یک این میدان همین دلتای دیراک است. توجه کنید که δ در میدان کسرها قرار دارد و عضوی از خود حلقه نیست یعنی تابع نیست. حساب دیفرانسیل و انتگرال این‌گونه موجودات در آنالیز ریاضی بررسی می‌شود.

است. به طور مشابه تابع $\delta_a(x) = \delta(x-a) = \begin{cases} +\infty & : x = a \\ \circ & : x \neq a \end{cases}$ تعریف می‌شود که



شکل ۴.۴: دلتای دیراک

در a دارای مقدار بی‌نهایت است.

از آن‌جایی که $(u_a(t))' = \delta_a(t)$، تبدیل لاپلاس تابع $\delta_a(t)$ برابر است با:

$$\mathcal{L}(\delta_a(t)) = s\mathcal{L}(u_a(t)) = s(\frac{e^{-as}}{s}) = e^{-as}.$$

با استدلال دقیق ریاضی می‌توان ثابت کرد تابع دلتا در سرتاسر اعداد حقیقی انتگرال‌پذیر است و مقدار انتگرال آن برابر یک است! یعنی:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = ۱.$$

در حالت کلی‌تر برای تابع $\delta_a(t)$ اگر بازه I شامل $x = a$ باشد، $\int_I \delta_a(t)dt = ۱$ و اگر بازه I فاقد $x = a$ باشد،$\int_I \delta_a(t)dt = \circ$.

برای تابع انتگرال‌پذیر f، اگر بازه I شامل $x = a$ باشد، $\int_I \delta_a(t)f(t)dt = f(a)$ و اگر بازه I فاقد $x = a$ باشد، $\int_I \delta_a(t)f(t)dt = \circ$.

مثال ۳۷.۱.۴. فرض کنید $a > \circ$ و f در سرتاسر اعداد حقیقی انتگرال‌پذیر باشد، تبدیل لاپلاس $\delta_a(t)f(t)$ را بیابید.

حل: با محاسبه مستقیم به کمک تعریف داریم:

$$\mathcal{L}(\delta_a(t)f(t)) = \int_\circ^{+\infty} e^{-st}\delta_a(t)f(t)dt = (e^{-st}f(t))|_{t=a} = e^{-as}f(a).$$

گزاره زیر خاصیت اصلی تابع دیراک را بیان می‌کند.

گزاره ۳۸.۱.۴ (خواص دلتای دیراک). *دلتای دیراک عنصر همانی عمل پیچش است، یعنی برای تابع پیوسته* f، $\delta(t) * f(t) = f(t) * \delta(t) = f$. *در حالت کلی‌تر نیز* $\delta_a(t) * f(t) = f(t-a)$.

تحقیق درستی خاصیت بالا ساده است، چرا که:

$$\delta(t) * f(t) = \int_\circ^t \delta(x)f(t-x)dx = (f(t-x))|_{x=\circ} = f(t).$$

مثال ۳۹.۱.۴. معادله دیفرانسیل-انتگرال زیر را حل کنید.

$$y' + ۳y + ۴e^t \int_\circ^t e^{-u}y(u)du = \delta_{\frac{\pi}{۸}}(t), y(\circ) = \circ.$$

حل: فرض کنید $Y(s)$ تبدیل لاپلاس $y(t)$ باشد، با محاسبه تبدیل لاپلاس دو طرف معادله داریم:

$$sY(s) + ۳Y(s) + \frac{۴}{s-۱}Y(s) = e^{-\frac{\pi}{۸}s},$$

از تساوی بالا نتیجه می‌شود

$$Y(s) = \frac{s-۱}{(s+۱)^۲}e^{-\frac{\pi}{۸}s},$$

اکنون با فرض $F(s) = \frac{s-1}{(s+1)^2}$، $F(s)$ به صورت $\frac{1}{s+1} - \frac{2}{(s+1)^2}$ تفکیک می‌شود، با محاسبه تبدیل وارون لاپلاس داریم:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s)) = \mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s+1} - \frac{2}{(s+1)^2}) = e^{-t} - 2te^{-t} = e^{-t}(1-2t),$$

نهایتا با توجه به رابطه $\mathcal{L}(u_a(t)f(t-a)) = e^{-as}F(s)$ داریم:

$$y(t) = u_{\frac{\pi}{8}}(t)e^{-(t-\frac{\pi}{8})}(1 - 2(t - \frac{\pi}{8})).$$

قضیه: مقدار اولیه و مقدار نهایی

قضیه مقدار اولیه:

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to +\infty} sF(s).$$

قضیه مقدار نهایی:

$$\lim_{t\to +\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s).$$

شرط برقراری تساوی‌ها، وجود حدود است.

مثال ۴۰.۱.۴. فرض کنید $f(t) = \mathcal{L}^{-1}(\frac{s+3}{2s^2+2s+1})$، $f'(0)$ را بیابید.

حل: بنابر قضیه $\mathcal{L}(f''(t)) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$، چون سمت راست عبارت تبدیل لاپلاس تابع $f''(t)$ است، حد $s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$ در بی‌نهایت برابر صفر است و در نتیجه

$$f'(0) = \lim_{s\to +\infty}(s^2F(s) - sf(0)),$$

از طرفی بنابر قضیه مقدار اولیه

$$f(0) = \lim_{s\to +\infty} sF(s) = \lim_{s\to +\infty} \frac{s(s+3)}{2s^2+2s+1} = \frac{1}{2},$$

بنابراین:

$$f'(\circ) = \lim_{s\to+\infty}(s^{۲}\frac{s+۳}{۲s^{۲}+۲s+۱} - \frac{۱}{۲}s) = \lim_{s\to+\infty}\frac{۴s^{۲}-s}{۴s^{۲}+۴s+۲} = ۱.$$

۲.۱.۴ محاسبه تبدیل وارون لاپلاس

محاسبه تبدیل وارون لاپلاس کمی مشکل‌تر از محاسبه تبدیل لاپلاس است، چرا که فرمول مستقیم تبدیل وارون لاپلاس به کمک انتگرال‌های مختلط بیان می‌شود و ما در این‌جا به آن نمی‌پردازیم و سعی می‌کنیم تابعی که قرار است تبدیل لاپلاس وارون آن را به دست آوریم بر حسب توابع آشنایی که تبدیل وارون لاپلاس آن‌ها را می‌شناسیم بیان کنیم. در ادامه به چند حالت متداول توجه کنید.

• در چندجمله‌ای‌ها و عبارات رادیکالی ساده توجه به روابط زیر کار آمد است.

$$\mathcal{L}(t^{\alpha}) = \frac{\Gamma(\alpha+۱)}{s^{\alpha+۱}}, \mathcal{L}(e^{at}f(t)) = F(s-a).$$

مثال ۴۱.۱.۴. تابع $f(x)$ را چنان بیابید که:

$$\int_{\circ}^{t}\frac{f(x)}{\sqrt{t-x}}dx = ۱+t+t^{۲}.$$

حل: برای حل معادله انتگرال بالا کافی است تبدیل لاپلاس دو طرف تساوی را به دست آوریم.

$$\mathcal{L}(\int_{\circ}^{t}\frac{f(x)}{\sqrt{t-x}}dx) = \mathcal{L}(f(t))\mathcal{L}(\frac{۱}{\sqrt{t}}) = \mathcal{L}(f(t))\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}},$$

هم‌چنین

$$\mathcal{L}(۱+t+t^{۲}) = \frac{۱}{s}+\frac{۱}{s^{۲}}+\frac{۲}{s^{۳}},$$

پس

$$\mathcal{L}(f(t)) = \frac{۱}{\sqrt{\pi}}(\frac{۱}{s^{\frac{۱}{۲}}}+\frac{۱}{s^{\frac{۳}{۲}}}+\frac{۲}{s^{\frac{۵}{۲}}}),$$

در نتیجه

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{t^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})}+\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{3}{2})}+\frac{2t^{\frac{3}{2}}}{\Gamma(\frac{5}{2})}\right)=\frac{1}{\pi}(t^{-\frac{1}{2}}+2t^{\frac{1}{2}}+\frac{8}{3}t^{\frac{3}{2}}).$$

مثال ۴۲.۱.۴. $\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2s+3}})$ را بیابید.

حل: بنابر قضیه انتقال در حوزه لاپلاس و رابطه $\mathcal{L}(t^{\alpha})=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$ داریم:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2s+3}}) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{\sqrt{s+\frac{3}{2}}})\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{3}{2}t}\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{\sqrt{s}})\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{3}{2}t}\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\mathcal{L}^{-1}(\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{s^{\frac{1}{2}}})\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{3}{2}t}t^{-\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

- توجه به مشتق و انتگرال در حوزه لاپلاس: گاهی اوقات به دنبال یافتن تبدیل وارون لاپلاس تابعی هستیم که ظاهری نامانوس دارد اما مشتق و یا انتگرال آن نسبت به s عبارت آشنایی است که تبدیل وارون لاپلاس آن را می‌شناسیم، در این گونه مسائل توجه به روابط زیر کارآمد است.

$$F'(s)=\mathcal{L}(-tf(t)),\ \int_s^{\infty}F(u)du=\mathcal{L}(\frac{f(t)}{t}).$$

مثال ۴۳.۱.۴. تبدیل وارون لاپلاس $F(s)=\ln\frac{s+1}{s-1}$ را به دست آورید.

حل: با بازنویسی $F(s)=\ln(s+1)-\ln(s-1)$ و مشتق‌گیری خواهیم داشت $F'(s)=\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s-1}$، پس:

$$\mathcal{L}(-tf(t))=\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s-1},$$

در نتیجه $-tf(t)=e^{-t}-e^{t}$ و بنابراین $f(t)=\frac{e^t-e^{-t}}{t}$.

مثال ۴۴.۱.۴. تبدیل وارون لاپلاس $F(s)=\tan^{-1}\frac{1}{s}$ و $G(s)=\cot^{-1}\frac{1}{s}$ را به دست آورید.

حل: ابتدا توجه کنید $\lim_{s\to\infty}\tan^{-1}\frac{1}{s}=0$ اما $\lim_{s\to\infty}\cot^{-1}\frac{1}{s}=\frac{\pi}{2}\neq 0$، پس $\tan^{-1}\frac{1}{s}$ ظاهرا مشکلی ندارد اما $\cot^{-1}\frac{1}{s}$ دارای تبدیل وارون لاپلاس نمی‌باشد. با مشتق‌گیری داریم $F'(s)=-\frac{1}{s^2+1}$، پس:

$$\mathcal{L}(-tf(t))=-\frac{1}{s^2+1},$$

در نتیجه $-tf(t)=-\sin t$ و بنابراین $f(t)=\frac{\sin t}{t}$.

مثال ۴۵.۱.۴. تبدیل وارون لاپلاس $F(s)=\frac{s}{(s^2+1)^2}$ را به دست آورید.

حل: بر خلاف دو مثال قبل این بار انتگرال $F(s)=\frac{s}{(s^2+1)^2}$ ساده است، به کمک تغییر متغیر $u=s^2+1$ نتیجه می‌شود:

$$\int\frac{s}{(s^2+1)^2}ds=-\frac{1}{2}\frac{1}{s^2+1},$$

انتگرال بالا را می‌توان به صورت،

$$\int_s^{+\infty}\frac{u}{(u^2+1)^2}du=-\frac{1}{2}\frac{1}{s^2+1},$$

نوشت، پس $\frac{f(t)}{t}=-\frac{1}{2}\sin t$، بنابراین $f(t)=-\frac{t}{2}\sin t$.

- توجه به مشتق و انتگرال در حوزه زمان: گاهی اوقات به تابعی بر می‌خوریم که با روش‌های بررسی شده تاکنون، نمی‌توان وارون لاپلاس آن را پیدا کرد اما اگر در s^n ضرب یا تقسیم کنیم، تبدیل وارون لاپلاس آن به سادگی به دست می‌آید، در این گونه مسائل توجه به روابط زیر مفید است.

$$\mathcal{L}(f^{(n)}(t)) = s^n F(s), \mathcal{L}(\int_۰^t f(u)du) = \frac{F(s)}{s},$$

توجه کنید که شرط برقراری تساوی اول این است که مقدار تابع و مشتقاتش تا مرتبه $(n-۱)$ موجود و برابر صفر باشند.

مثال ۴۶.۱.۴. تبدیل وارون لاپلاس $F(s) = \frac{۱}{s}\tan^{-۱}\frac{۱}{s}$ و $G(s) = \frac{۱}{s}\cot^{-۱}\frac{۱}{s}$ را به دست آورید.

حل: برای $F(s) = \frac{۱}{s}\tan^{-۱}\frac{۱}{s}$، $sF(s) = \tan^{-۱}\frac{۱}{s}$ و بنابر مثال ۴۴.۱.۴ $\mathcal{L}^{-۱}(sF(s)) = \frac{\sin t}{t}$، پس بنابر قضیه مشتق‌گیری در حوزه زمان

$$f(t) = \int_۰^t \frac{\sin x}{x}dx.$$

برای $G(s) = \frac{۱}{s}\cot^{-۱}\frac{۱}{s}$، $sG(s) = \cot^{-۱}\frac{۱}{s}$ اما بنابر مثال ۴۴.۱.۴ $\cot^{-۱}\frac{۱}{s}$ تبدیل وارون لاپلاس ندارد. برای $G(s)$ به شیوه زیر عمل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} g(t) = \mathcal{L}^{-۱}(\frac{۱}{s}\cot^{-۱}\frac{۱}{s}) &= \mathcal{L}^{-۱}(\frac{۱}{s}(\frac{\pi}{۲} - \tan^{-۱}\frac{۱}{s})) \\ &= \frac{\pi}{۲}\mathcal{L}^{-۱}(\frac{۱}{s}) - \mathcal{L}^{-۱}(\tan^{-۱}\frac{۱}{s}) \\ &= \frac{\pi}{۲} - \int_۰^t \frac{\sin x}{x}dx. \end{aligned}$$

مثال ۴۷.۱.۴. تبدیل وارون لاپلاس $F(s) = \frac{۱}{(s^۲+۱)^۲}$ را به دست آورید.

حل: توجه کنید که نه خود تابع $F(s) = \frac{۱}{(s^۲ + ۱)^۲}$ و نه مشتق و انتگرال آن تابع جالبی می‌شود که وارون لاپلاس آن به سادگی محاسبه شود، اما وارون لاپلاس تابع $sF(s) = \frac{s}{(s^۲ + ۱)^۲}$ را در مثال ۴۵.۱.۴ صفحه ۱۹۸ حساب کردیم، بنابراین:

$$-\frac{t}{۲}\sin t = sF(s) = \mathcal{L}(f'(t)),$$

در نتیجه $f(t) = \int_۰^t \frac{u}{۲}\sin u du = -\frac{t}{۲}\cos t + \frac{۱}{۲}\sin t$.

- توابع گویا: مانند انتگرال‌گیری برای توابع گویا، تفکیک کسر در محاسبه تبدیل وارون لاپلاس کارآمد است.

مثال ۴۸.۱.۴. تبدیل وارون لاپلاس $F(s) = \frac{e^{-۲s}}{s^۲ + s - ۲}$ را به دست آورید.

حل: ابتدا توجه کنید

$$\mathcal{L}^{-۱}(\frac{۱}{s^۲ + s - ۲}) = \mathcal{L}^{-۱}(\frac{۱}{۳}(\frac{۱}{s - ۱} - \frac{۱}{s + ۲})) = \frac{۱}{۳}(e^t - e^{-۲t}),$$

اکنون بنابر قضیه انتقال در حوزه زمان $\mathcal{L}(u_a(t)f(t-a)) = e^{-as}F(s)$ داریم:

$$\mathcal{L}^{-۱}(\frac{e^{-۲s}}{s^۲ + s - ۲}) = \frac{۱}{۳}u_۲(t)(e^{t-۲} - e^{-۲(t-۲)}).$$

مثال ۴۹.۱.۴. تبدیل لاپلاس $f(t) = \int_۰^۱ \frac{\sin tx}{x}dx$ را به دست آورید.

حل: مشتق تابع f برابر است با:

$$f'(t) = \int_۰^۱ \cos tx dx = \frac{\sin tx}{t}|_۰^۱ = \frac{\sin t}{t},$$

پس

$$\mathcal{L}(f'(t)) = \mathcal{L}(\frac{\sin t}{t}) = \int_s^{+\infty} \frac{du}{۱ + u^۲} = \frac{\pi}{۲} - \tan^{-۱} s = \cot^{-۱} s,$$

از طرفی $f(۰) = ۰$، در نتیجه $\mathcal{L}(f(t)) = \frac{۱}{s}(\cot^{-۱} s)$.

- عبارت درجه دوم با دلتای منفی داخل رادیکال در مخرج: با توجه به تبدیل لاپلاس تابع بسل مرتبه صفر، $\mathcal{L}(J_۰(at)) = \dfrac{۱}{\sqrt{s^۲ + a^۲}}$ عبارت داخل رادیکال مخرج را مربع کامل می‌کنیم.

مثال ۵۰.۱.۴. تبدیل وارون لاپلاس $F(s) = \dfrac{۱}{\sqrt{s^۲ + s + ۱}}$ را به دست آورید.

حل: با مربع کامل کردن عبارت داخل رادیکال داریم:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-۱}\left(\frac{۱}{\sqrt{s^۲ + s + ۱}}\right) &= \mathcal{L}^{-۱}\left(\frac{۱}{\sqrt{(s + \frac{۱}{۲})^۲ + \frac{۳}{۴}}}\right) \\
&= e^{-\frac{۱}{۲}t}\mathcal{L}^{-۱}\left(\frac{۱}{\sqrt{s^۲ + \frac{۳}{۴}}}\right) \\
&= e^{-\frac{t}{۲}}\mathcal{L}^{-۱}\left(\frac{۱}{\sqrt{s^۲ + \frac{۳}{۴}}}\right) = e^{-\frac{t}{۲}} J_۰\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}t\right).
\end{aligned}$$

۳.۱.۴ محاسبه انتگرال‌های ناسره به کمک تبدیل لاپلاس

مثال ۵۱.۱.۴. مقدار انتگرال $\int_۰^{+\infty} e^{-۲x} x \sin x dx$ را به کمک تبدیل لاپلاس به دست آورید.

حل: از تعریف تبدیل لاپلاس داریم:

$$\begin{aligned}
\int_۰^{+\infty} e^{-۲x} x \sin x dx &= \mathcal{L}(x \sin x)|_{s=۲} \\
&= \left(\frac{-۱}{s^۲ + ۱}\right)'|_{s=۲} = \frac{۲s}{(s^۲ + ۱)^۲}|_{s=۲} = \frac{۴}{۲۵}.
\end{aligned}$$

مثال ۵۲.۱.۴. مقدار انتگرال $\int_۰^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ را به کمک تبدیل لاپلاس به دست آورید.

حل: از تعریف تبدیل لاپلاس داریم:

$$\int_{\circ}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \mathcal{L}(\frac{\sin t}{t})|s = \circ,$$

بنابر قضیه انتگرال‌گیری در حوزه لاپلاس $\mathcal{L}(\frac{\sin t}{t}) = \int_{s}^{+\infty} \frac{du}{۱ + u^۲}$، پس مقدار انتگرال بالا برابر است با:

$$\int_{\circ}^{+\infty} \frac{du}{۱ + u^۲} = \tan^{-۱} u]_{\circ}^{+\infty} = \frac{\pi}{۲}.$$

مثال ۵۳.۱.۴. مقدار انتگرال $\int_{\circ}^{+\infty} \int_{\circ}^{x} e^{-۲x} \frac{e^{-۲t} - e^{-۴t}}{t} dtdx$ را به کمک تبدیل لاپلاس به دست آورید.

حل: انتگرال بالا را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned}
\int_{\circ}^{+\infty} \int_{\circ}^{x} e^{-۲x} \frac{e^{-۲t} - e^{-۴t}}{t} dtdx &= \mathcal{L}(\int_{\circ}^{x} \frac{e^{-۲t} - e^{-۴t}}{t} dt) \mid_{s=۲} \\
&= (\frac{۱}{s} \int_{s}^{+\infty} (\frac{۱}{u + ۲} - \frac{۱}{u + ۴}) du) \mid_{s=۲} \\
&= (\frac{۱}{s} \ln \frac{u + ۲}{u + ۴} \mid_{s}^{+\infty}) \mid_{s=۲} \\
&= -\frac{۱}{۲} \ln \frac{۴}{۶} = \ln \sqrt{\frac{۳}{۲}}.
\end{aligned}$$

۲.۴ سوالات حل شده

۱.۲.۴ قضایای تبدیل لاپلاس

سوال ۱.۲.۴. تبدیل لاپلاس $f(t) = t^۲ e^{-۲t} \sin t$ را به دست آورید.

حل: بنابر بر قضایای مشتق‌گیری و انتقال در حوزه لاپلاس:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(t^۲ e^{-۲t}\sin t) &= \mathcal{L}(t^۲ \sin t)|_{s\to s+۲}\\ &= \mathcal{L}((-t)^۲ \sin t)|_{s\to s+۲}\\ &= \mathcal{L}(\sin t)''|_{s\to s+۲}\\ &= (\frac{۱}{s^۲+۱})''|_{s\to s+۲}\\ &= \frac{۲(s^۲-۱)}{(s^۲+۱)^۳}|_{s\to s+۲} = \frac{۲((s+۲)^۲-۱)}{((s+۲)^۲+۱)^۳}.\end{aligned}$$

سوال ۲.۲.۴. تبدیل لاپلاس $f(t) = t\cos ۲t$ را به دست آورید.

راه حل اول: بنابر بر قضیه مشتق‌گیری در حوزه لاپلاس:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(t\cos ۲t) &= -\mathcal{L}((-t)\cos ۲t)\\ &= \mathcal{L}(\cos ۲t)'\\ &= (\frac{s}{s^۲+۴})' = \frac{s^۲-۴}{(s^۲+۴)^۲}.\end{aligned}$$

راه حل دوم: مشتقات تابع f برابرند با:

$$\begin{aligned}f'(t) &= \cos ۲t - ۲t\sin ۲t\\ f''(t) &= -۴\sin ۲t - ۴t\cos ۲t,\end{aligned}$$

از طرفی $f(۰) = ۰$ و $f'(۰) = ۱$ پس:

$$s^۲\mathcal{L}(t\cos ۲t) - ۱ = -۴\mathcal{L}(\sin ۲t) - ۴\mathcal{L}(t\cos ۲t),$$

جای‌گذاری $\mathcal{L}(\sin ۲t) = \frac{۲}{s^۲+۴}$ نتیجه می‌دهد $\mathcal{L}(t\cos ۲t) = \frac{s^۲-۴}{(s^۲+۴)^۲}$.

سوال ۳.۲.۴. تبدیل لاپلاس $f(t) = \int_۰^{\sqrt{t}} e^{-x^۲}dx$ را به دست آورید.

حل: با مشتق‌گیری $f'(t) = \frac{۱}{۲\sqrt{t}}e^{-t}dx$ به دست می‌آید و $\mathcal{L}(f'(t)) = \frac{۱}{۲}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s+۱}}$،
از طرفی $\mathcal{L}(f'(t)) = s\mathcal{L}(f(t)) - f(۰)$ و چون $f(۰) = ۰$، پس

$$\mathcal{L}(f(t)) = \frac{۱}{۲}\frac{\sqrt{\pi}}{s\sqrt{s+۱}}.$$

سوال ۴.۲.۴. تبدیل لاپلاس تابع $f(t) = \sin\sqrt{t}$ را به دست آورید.

حل: کافی است ابتدا سری مک‌لورن تابع $f(t) = \sin\sqrt{t}$ را به دست آوریم، سپس تبدیل لاپلاس تک تک جملاتش را که توابعی مقدماتی هستند به دست می‌آوریم. توجه کنید که $\sin x = \sum_{n=۰}^{\infty}\frac{(-۱)^n}{(۲n+۱)!}x^{۲n+۱}$، پس:

$$\sin\sqrt{t} = \sum_{n=۰}^{\infty}\frac{(-۱)^n}{(۲n+۱)!}(\sqrt{t})^{۲n+۱} = \sum_{n=۰}^{\infty}\frac{(-۱)^n}{(۲n+۱)!}t^{n+\frac{۱}{۲}},$$

اکنون $\mathcal{L}(\sin\sqrt{t})$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\sin\sqrt{t}) &= \mathcal{L}\Big(\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{(-۱)^n}{(۲n+۱)!}t^{n+\frac{۱}{۲}}\Big)\\
&= \sum_{n=۰}^{\infty}\frac{(-۱)^n}{(۲n+۱)!}\mathcal{L}(t^{n+\frac{۱}{۲}})\\
&= \sum_{n=۰}^{\infty}\frac{(-۱)^n}{(۲n+۱)!}\frac{\Gamma(n+\frac{۳}{۲})}{s^{n+\frac{۳}{۲}}}\\
&= \sum_{n=۰}^{\infty}\frac{(-۱)^n}{(۲n+۱)!}\frac{\frac{(۲n+۱)!}{۲\times ۴^n n!}\sqrt{\pi}}{s^{n+\frac{۳}{۲}}}\\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{۲s^{\frac{۳}{۲}}}\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{۱}{n!}\Big(\frac{-۱}{۴s}\Big)^n = \frac{\sqrt{\pi}}{۲s^{\frac{۳}{۲}}}e^{\frac{-۱}{۴s}}.
\end{aligned}$$

سوال ۵.۲.۴. برای تابع بسل نوع اول از مرتبه صفر $J_0(t)$ ضابطه $J_0 * J_0$ را بیابید.

حل: بنابر رابطه لاپلاس پیچش دو تابع

$$\mathcal{L}(J_0 * J_0) = \mathcal{L}(J_0)^2 = \frac{1}{s^2+1},$$

از طرفی $\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{s^2+1} = \sin t$، پس $J_0 * J_0(t) = \sin t$.

۲.۲.۴ محاسبه تبدیل وارون لاپلاس

سوال ۶.۲.۴. معادله انتگرال

$$y(x) + \int_0^x \int_0^u e^{x-2u+t} y(t)\,dt\,du = x,$$

را حل کنید.

حل: با مرتب کردن معادله بالا به صورت

$$y(x) + \int_0^x e^{x-u}\Big(\int_0^u e^{-u+t} y(t)\,dt\Big)du = x,$$

به معادله $y(x) + e^x * e^{-x} * y(x) = x$ می‌رسیم، تبدیل لاپلاس دو طرف این معادله برابر است با:

$$Y(s) + \frac{1}{s-1}\frac{1}{s+1}Y(s) = \frac{1}{s^2},$$

از این‌جا نتیجه می‌شود $Y(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^4}$، پس $y(x) = x - \frac{x^3}{6}$.

۳.۲.۴ محاسبه انتگرال‌های ناسره به کمک تبدیل لاپلاس

سوال ۷.۲.۴. فرض کنید $a > 0$، مقدار انتگرال $\int_0^{+\infty} e^{-ax}\frac{\sin \lambda x}{x}dx$ را به دست آورید.

حل: با تثبیت a فرض کنید $f(\lambda) = \int_{0}^{+\infty} e^{-ax}\frac{\sin \lambda x}{x}dx$، در این صورت

$$f'(\lambda) = \int_{0}^{+\infty} e^{-ax}\frac{x\sin\lambda x}{x}dx = \int_{0}^{+\infty} e^{-ax}\sin\lambda x dx$$
$$= \mathcal{L}(\sin\lambda x)|_{s=a} = \frac{a}{\lambda^{2}+a^{2}},$$

پس

$$f(\lambda) = \int \frac{a}{\lambda^{2}+a^{2}}d\lambda = \tan^{-1}\frac{\lambda}{a}.$$

سوال ۸.۲.۴. فرض کنید $a, b > 0$، مقدار انتگرال $\int_{0}^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx$ را به کمک تبدیل لاپلاس به دست آورید.

حل: مقدار انتگرال بالا برابر است با:

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx = \mathcal{L}(\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x})|_{s=0}$$
$$= (\int_{s}^{+\infty}\mathcal{L}(e^{-at}-e^{-bt})dt)|_{s=0}$$
$$= \int_{0}^{+\infty}(\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+b})ds$$
$$= \ln(s+a)-\ln(s+b)]_{0}^{+\infty}$$
$$= \ln\frac{s+a}{s+b}]_{0}^{+\infty} = \ln 1 - \ln\frac{a}{b} = \ln\frac{b}{a}.$$

سوال ۹.۲.۴. برای اعداد طبیعی m و n مقدار انتگرال $\int_{0}^{1} x^{m}(\ln x)^{n}dx$ را به کمک تبدیل لاپلاس به دست آورید.

حل: با تغییر متغیر $x = e^{-t}$ داریم $dx = -e^{-t}dt = -xdt$ و $t = -\ln x$، در نتیجه:

$$\int_{0}^{1} x^{m}(\ln x)^{n}dx = (-1)^{n}\int_{0}^{+\infty} e^{-(m+1)}t^{n}dt$$
$$= (-1)^{n}\mathcal{L}(t^{n})\ |_{s=m+1} = (-1)^{n}\frac{n!}{(m+1)^{n+1}}.$$

سوال ۱۰.۲.۴. مقدار انتگرال $\int_{0}^{+\infty} 2^{-x}\sin 5x dx$ را به کمک تبدیل لاپلاس به دست آورید.

حل: بنابر تعریف تبدیل لاپلاس:

$$\begin{aligned}\int_{0}^{+\infty} 2^{-x}\sin 5x dx &= \int_{0}^{+\infty} e^{-(\ln 2)x}\sin 5x dx\\ &= \mathcal{L}(\sin 5x)\mid_{s=\ln 2} = \frac{5}{(\ln 2)^2+25}.\end{aligned}$$

سوال ۱۱.۲.۴. مقدار انتگرال‌های $\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2}dx$ و $\int_{0}^{+\infty} x^2e^{-x^4}dx$ را به کمک تبدیل لاپلاس به دست آورید.

حل: برای انتگرال $\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2}dx$ ، با تغییر متغیر $t=x^2$ داریم:

$$\begin{aligned}\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2}dx &= \frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty} e^{-t}t^{-\frac{1}{2}}dt\\ &= \frac{1}{2}\mathcal{L}(t^{-\frac{1}{2}})\mid_{s=1}\\ &= \frac{1}{2}\Gamma(-\frac{1}{2}+1) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.\end{aligned}$$

برای انتگرال $\int_{0}^{+\infty} x^2e^{-x^4}dx$ ، با تغییر متغیر $t=x^4$ داریم:

$$\begin{aligned}\int_{0}^{+\infty} x^2e^{-x^4}dx &= \frac{1}{4}\int_{0}^{+\infty} e^{-t}t^{-\frac{1}{4}}dt\\ &= \frac{1}{4}\mathcal{L}(t^{-\frac{1}{4}})\mid_{s=1}\\ &= \frac{1}{4}\Gamma(-\frac{1}{4}+1) = \frac{1}{4}\Gamma(\frac{3}{4}).\end{aligned}$$

۳.۴ مسائل تمرینی

تمرین ۱.۳.۴. تبدیل لاپلاس $f(t)=te^{2t}\int_{0}^{t} e^{-u}\frac{1-\cos u}{u}du$ را بیابید.

تمرین ۲.۳.۴. تبدیل لاپلاس $f(t)=\int_0^t e^{2x}\cosh 5x dx$ را بیابید.

تمرین ۳.۳.۴. تبدیل وارون لاپلاس $F(s)=\dfrac{e^{-s}(3s+1)}{(s+1)(s+2)(s+3)}$ را بیابید.

تمرین ۴.۳.۴. تبدیل وارون لاپلاس $F(s)=\dfrac{s}{\sqrt{(s-2)^3(s^2+1)}}$ را بیابید.

تمرین ۵.۳.۴. تبدیل وارون لاپلاس $F(s)=\ln\dfrac{s+3}{s+1}$، $G(s)=\ln\dfrac{s^2+1}{s^2+5s}$ و $H(s)=\ln\dfrac{s}{s^2+1}$ را بیابید.

تمرین ۶.۳.۴. تبدیل وارون لاپلاس $F(s)=\cot^{-1}(s+3)$ را بیابید.

تمرین ۷.۳.۴. تبدیل وارون لاپلاس $F(s)=\sqrt{s+1}-\sqrt{s+3}$ را بیابید.

تمرین ۸.۳.۴. معادله دیفرانسیل زیر را به کمک تبدیل لاپلاس حل کنید.

$$y''-6y'+9y=x^2e^{3x}, y(0)=2, y'(0)=6.$$

تمرین ۹.۳.۴. معادله انتگرال $e^tf(t)=te^t+\int_0^t e^xf(x)dx$ را حل کنید.

تمرین ۱۰.۳.۴. فرض کنید f گسترش تناوبی $f(t)=\begin{cases}0 & : 0<x<2\\ 1 & : 2\le t<4\end{cases}$ با دوره تناوب $T=4$ باشد، معادله دیفرانسیل

$$y''-y=f(t)*(1+u_2(t)), y(0)=y'(0)=0,$$

را حل کنید.

تمرین ۱۱.۳.۴. مقدار انتگرال $\int_0^{+\infty} e^{-3t}\dfrac{e^{-2t}-\cos t}{t}dt$ را به کمک تبدیل لاپلاس به دست آورید.

تمرین ۱۲.۳.۴. مقدار انتگرال $\int_{\circ}^{+\infty} \frac{e^{-mx}\cos nx - e^{-px}\cos qx}{x}dx$ را به کمک تبدیل لاپلاس به دست آورید.

تمرین ۱۳.۳.۴. فرض کنید $F(s)$ تبدیل لاپلاس $f(t)$ باشد، نشان دهید:

$$\mathcal{L}^{-۱}(F(as+b)) = \frac{۱}{a}e^{-\frac{b}{a}t}f(\frac{t}{a}).$$

تمرین ۱۴.۳.۴. اگر تبدیل لاپلاس تابع $f:[\circ,+\infty) \to \mathbb{R}$ که متناوب با دوره تناوب T است، موجود باشد نشان دهید:

$$\mathcal{L}(f(t)) = \frac{۱}{۱-e^{-Ts}}\int_{\circ}^{T} e^{-st}f(t)dt.$$

۴.۴ مسائل خلاقانه

مساله ۱.۴.۴. در مثال ۱۴.۱.۴ صفحه ۱۷۸ دیدیم $\mathcal{L}(J_{\circ}(at)) = \frac{۱}{\sqrt{s^{۲}+a^{۲}}}$، برای تابع بسل نوع دوم از مرتبه صفر نشان دهید:

$$\mathcal{L}(Y_{\circ}(at)) = -\frac{۲}{\pi}\frac{\sinh^{-۱}\frac{s}{a}}{\sqrt{s^{۲}+a^{۲}}}.$$

مساله ۲.۴.۴. مقدار انتگرال $\int_{\circ}^{+\infty} \frac{۱-\cos x}{x^{۲}}dx$ را به کمک تبدیل لاپلاس به دست آورید.

مساله ۳.۴.۴. مقدار انتگرال $\int_{\circ}^{+\infty} \frac{\cos mx}{x^{۲}+۱}dx$ را برای $m > \circ$ به کمک تبدیل لاپلاس به دست آورید.

مساله ۴.۴.۴. فرض کنید f مشتق‌پذیر و از مرتبه نمایی باشد، آیا f' نیز از مرتبه نمایی است؟ $\int_{\circ}^{t} f(u)du$ چه‌طور؟

مساله ۵.۴.۴. در قضیه مشتق‌گیری در حوزه زمان دیدیم که اگر تابع f مشتق‌پذیر و f' قطعه-قطعه پیوسته و از مرتبه نمایی باشد،

$$\mathcal{L}(f'(t)) = sF(s) - f(0),$$

نشان دهید اگر شرط مشتق‌پذیری تابع f را به شرط قطعه-قطعه مشتق‌پذیری تابع f تقلیل دهیم، با فرض این که f دارای نقاط ناپیوستگی $\dots > t_2 > t_1$ در بازه $[0, +\infty)$ باشد و J_k جهش تابع در t_k باشد، یعنی $J_k = f(t_k^+) - f(t_k^-)$، در این صورت:

$$\mathcal{L}(f'(t)) = sF(s) - f(0^+) - \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-st_k} J_k.$$

مساله ۶.۴.۴. برای تابع ضربه نشان دهید:

$$\delta(-t) = -\delta(t).$$

$$\delta(\alpha t) = \frac{1}{|\alpha|}\delta(t).$$

$$\delta(\alpha^2 - t^2) = \frac{1}{2|\alpha|}(\delta(t-\alpha) + \delta(t+\alpha)).$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta_a^{(n)}(t)dt = (-1)^n f^{(n)}(a).$$

مساله ۷.۴.۴. برای تابع مشتق‌پذیر با مشتق پیوسته $g(t)$ که g' ناصفر است، ابتدا نشان دهید $\delta(g(t)) = \sum \frac{\delta(x_i)}{|g'(x_i)|}$، که x_iها ریشه‌های g هستند، سپس نتیجه بگیرید:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(g(t))dt = \sum \frac{f(x_i)}{|g'(x_i)|}.$$

۵

دستگاه معادلات دیفرانسیل

ماتریس $X(t)_{n\times ۱}$ متشکل از توابع $x_۱(t)$، $x_۲(t)$، ...، $x_n(t)$ را در نظر بگیرید، منظور از دستگاه معادله دیفرانسیل مرتبه یک، معادله‌ای به شکل $f(t, X, \dot{X}) = ۰$ است. به همین صورت دستگاه‌های مرتبه بالاتر نیز قابل تعریف است. در این فصل تنها به دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه اول و گاهاً مرتبه دوم می‌پردازیم. بررسی دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل از این جهت حائز اهمیت است که یک معادله خطی از مرتبه n قابل تبدیل به دستگاهی خطی از مرتبه یک و n متغیره است.

۱.۵ درس‌نامه

تعریف ۱.۱.۵. منظور از دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه اول، معادله‌ای به صورت $A(t)\dot{X}(t) + B(t)X(t) = C(t)$ است. این دستگاه را با ضرایب ثابت می‌نامیم، هرگاه ماتریس‌های ضرایب ثابت باشند. این دستگاه را خودگردان می‌نامیم، هرگاه علاوه بر ضرایب ماتریس $C(t)$ در قسمت غیرهمگن نیز ثابت باشد. این دستگاه را همگن می‌نامیم، هرگاه $C(t) = 0$ باشد.

مثال ۲.۱.۵. دستگاه $\begin{cases} 2tx'(t) + (\sin t)y'(t) &= 0 \\ x'(t) - t^2 y'(t) &= 0 \end{cases}$ خطی همگن با ضرایب متغیر، دستگاه $\begin{cases} 2x'(t) + y'(t) &= \tan t \\ x'(t) - y'(t) &= t^2 \end{cases}$ خطی غیرهمگن با ضرایب ثابت ولی دستگاه $\begin{cases} 2x'(t) + y'(t) &= 0 \\ x'(t) - y'(t)^2 &= t^2 \end{cases}$ غیرخطی است.

مثال ۳.۱.۵. معادله دیفرانسیل مرتبه دوم خطی $y'' + by' + cy = 0$ را به صورت دستگاه معادله خطی مرتبه اول بازنویسی کنید.

حل: قرار می‌دهیم $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$ در این صورت:

$$\dot{X}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -bx_2 - cx_1 \end{pmatrix},$$

بنابراین دستگاه مورد نظر به صورت $\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ می‌باشد.

قضیه زیر شرط کافی وجود و یک‌تایی جواب دستگاه‌های خطی را بیان می‌کند.

قضیه ۴.۱.۵. *دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی $\dot{X}(t) = A(t)X(t) + B(t)$ را در نظر بگیرید. اگر درایه‌های ماتریس‌های $A(t)$ و $B(t)$ در بازه I پیوسته باشند، آن‌گاه این دستگاه با شرط اولیه $X(t_\circ) = X_\circ$ برای $t_\circ \in I$ دارای جواب است و این جواب یک‌تا است.*

تعریف ۵.۱.۵. فرض کنید $X^۱(t)$، $X^۲(t)$، ...، $X^n(t)$ جواب‌هایی برای دستگاه $\dot{X}(t) = A(t)X(t) + B(t)$ باشند. رانسکین این جواب‌ها در لحظه t را به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$W(X^۱, X^۲, ..., X^n)(t) = det(X^۱(t)|X^۲(t)|...|X^n(t)).$$

قضیه ۶.۱.۵. *استقلال خطی جواب‌ها معادل ناصفر بودن رانسکین در یک نقطه است.*

حل دستگاه‌های غیرخطی به صورت تحلیلی به جز حالات خاص عملا امکان‌پذیر نیست و باید به روش‌های عددی متوصل شد. در نظریه معادلات دیفرانسیل به بررسی وجود و یک‌تایی جواب‌ها و تحلیل رفتار آن‌ها پرداخته می‌شود. برای حل دستگاه‌های خطی روش‌های مختلفی وجود دارد که در این کتاب مقدماتی، تنها به روش‌های حذفی، عمل‌گری، لاپلاس و روش ماتریسی (روش اویلر) می‌پردازیم. هریک از این روش‌ها دارای مزایا و محدودیت‌هایی است که به تدریج به آن‌ها می‌پردازیم.

۱-روش حذفی: در این روش با حذف سایر متغیرها، دستگاه را به معادلات مجزا و یک متغیر تبدیل می‌کنیم.

مثال ۷.۱.۵. دستگاه معادلات $\dot{X} = \begin{pmatrix} -۱ & \circ \\ \circ & ۲ \end{pmatrix} X$ را با شرط اولیه $x(\circ) = \begin{pmatrix} ۱ \\ ۳ \end{pmatrix}$ حل کنید.

حل: فرض کنید $X(t) = \begin{pmatrix} x_۱(t) \\ x_۲(t) \end{pmatrix}$، تساوی $\dot{X} = \begin{pmatrix} -۱ & \circ \\ \circ & ۲ \end{pmatrix} X$ نتیجه می‌دهد $\dot{x}_۱ = -x_۱$ و $\dot{x}_۲ = ۲x_۲$. جواب‌های دو معادله اخیر به صورت $x_۱(t) = c_۱e^{-t}$

و $x_۲(t) = c_۲e^{۲t}$ می‌باشد و با توجه به شرط اولیه $x(۰) = \begin{pmatrix} ۱ \\ ۳ \end{pmatrix}$، ضرایب ثابت به صورت $(c_۱, c_۲) = (۱, ۳)$ می‌باشند. لذا جواب به صورت $x(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ ۳e^{۲t} \end{pmatrix}$ یا خم $x_۲ = \frac{۳}{x_۱^۲}$ است.

مثال ۸.۱.۵. دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} x'(t) + y'(t) = t \\ -x(t) + y''(t) = e^{-t}, x(۰) = ۰, y(۰) = ۳, y'(۰) = -۲ \end{cases}$$

حل: با مشتق‌گیری از معادله دوم به $-x' + y''' = -e^{-t}$ می‌رسیم که جمع آن با معادله اول نتیجه می‌دهد $y''' + y' = t - e^{-t}$. از شروط اولیه $y(۰) = ۳$، $y'(۰) = -۲$ و $x(۰) = ۰$ نتیجه می‌دهد $y''(۰) = ۱$، لذا این معادله دارای جواب زیر است:

$$y(t) = ۳ - \frac{۱}{۲}\cos t - \frac{۳}{۲}\sin t + \frac{۱}{۲}t^۲ + \frac{۱}{۲}e^{-t},$$

و $x(t)$ برابر است با:

$$x(t) = y'' - e^{-t} = \frac{۱}{۲}\cos t + \frac{۳}{۲}\sin t + ۱ - \frac{۳}{۲}e^{-t}.$$

۲-روش عمل‌گری: در این روش به کمک عمل‌گر D دستگاه معادلات دیفرانسیل را به دستگاه معادلات جبری تبدیل می‌کنیم و سپس به روش حذفی یا کرامر حل می‌کنیم. محدودیت این روش این است که تنها برای دستگاه‌های با ضرایب ثابت در حالت هم‌گن و یا برخی حالات خاص ناهم‌گن کارآمد است.

مثال ۹.۱.۵. دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} x' &= x - y - t^۲ \\ y' &= x - y + ۲t \end{cases}$$

حل: با فرض $D = \dfrac{d}{dt}$، دستگاه داده شده به صورت زیر در می‌آید.

$$\begin{cases} (D-1)x + y &= -t^2 \\ -x + (D+1)y &= 2t \end{cases},$$

اکنون x و y را به روش کرامر بر حسب عمل‌گر D به دست می‌آوریم.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -t^2 & 1 \\ 2t & D+1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} D-1 & 1 \\ -1 & D+1 \end{vmatrix}} = \frac{-t^2 - 2t - 2t}{D^2 - D + 2}$$

$$= (-\frac{1}{2} + \frac{1}{4}D - \frac{3}{8}D^2)(-t^2 - 4t) = \frac{1}{4}t^2 - \frac{3}{2}t - \frac{1}{4},$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} D-1 & -t^2 \\ -1 & 2t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} D-1 & 1 \\ -1 & D+1 \end{vmatrix}} = \frac{2 - 2t - t^2}{D^2 - D + 2}$$

$$= (-\frac{1}{2} + \frac{1}{4}D - \frac{3}{8}D^2)(-t^{-}4t) = \frac{5}{4}t^2 + \frac{1}{2}t - \frac{3}{2}.$$

۳-لاپلاس: در این روش به کمک عمل‌گر لاپلاس دستگاه معادلات دیفرانسیل را به دستگاه معادلات جبری تبدیل می‌کنیم و سپس به روش حذفی یا کرامر حل می‌کنیم. مزیت این روش این است که برای دستگاه‌های غیرهم‌گن حتی با ضرایب متغیر نیز کارآمد است.

مثال ۱۰.۱.۵. دستگاه زیر را با شرایط اولیه $Y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ و $Y'(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ حل کنید.

$$\begin{cases} y_1'(t) + y_1(t) = y_2'(t) + y_2(t) \\ y_1''(t) + y_2''(t) = e^t, \end{cases},$$

حل: با محاسبه تبدیل لاپلاس داریم:

$$\begin{cases} (s+1)Y_1(s) - (s+1)Y_2(s) = -1 \\ s^2 Y_1(s) + s^2 Y_2(s) = \dfrac{s^2}{s-1}, \end{cases},$$

از دستگاه بالا نتیجه می‌شود

$$\begin{cases} Y_1(s) - Y_2(s) = -\dfrac{1}{s+1} \\ Y_1(s) + Y_2(s) = \dfrac{1}{s-1}, \end{cases},$$

پس

$$\begin{cases} y_1(t) = \dfrac{1}{2}(e^t - e^{-t}) = \sinh t \\ y_2(t) = \dfrac{1}{2}(e^t + e^{-t}) = \cosh t, \end{cases},$$

۴-روش ماتریسی (روش اویلر): در این روش با الگو گرفتن از معادله مرتبه اول $\dot{x}(t) = ax(t)$ که دارای جواب $x(t) = x(0)e^{at}$ است، پاسخ دستگاه $\dot{X}(t) = AX(t)$ را به صورت $X(t) = e^{tA}X(0)$ به دست می‌آوریم. برای بیان این روش ابتدا جواب معادله $\dot{X}(t) = AX(t)$ را به کمک مقادیر ویژه و بردارهای ویژه پیدا می‌کنیم. سپس برای ماتریس مربعی A، e^{tA} را تعریف کنیم، در ادامه نشان دهیم $X(t) = e^{tA}X(0)$ پاسخ معادله مذکور است و نهایتا e^{tA} را به کمک ماتریس اساسی دستگاه به دست می‌آوریم. محدودیت این روش این است که در این کتاب تنها برای دستگاه‌های خطی با ضرایب ثابت به تکنیک‌های محاسباتی این روش می‌پردازیم.

تعریف ۱۱.۱.۵ (مقدار ویژه، بردار ویژه). بردار v در $\mathbb{R}^n$ را بردار ویژه برای ماتریس $A_{n\times n}$ گوییم هرگاه، ماتریس A در راستای بردار V به صورت تجانس عمل کند، یعنی ضریب λ موجود باشد که $AV = \lambda V$. ضریب λ را مقدار ویژه می‌نامیم.

تعریف ۱۲.۱.۵. توجه کنید که وابسته به هر مقدار ویژه، بردار ویژه یک‌تا نیست، بلکه متناظر هر مقدار ویژه، یک راستای ویژه و یا زیرفضای ویژه داریم. چرا که اگر V یک بردار

ویژه مربوط به مقدار ویژه λ باشد یعنی $AV = \lambda V$، در این صورت برای هر $\alpha \neq ۰$، αv نیز یک بردار ویژه مربوط به مقدار ویژه λ است، زیرا $A(\alpha V) = \lambda(\alpha V)$.

تعریف ۱۳.۱.۵. برای ماتریس مربعی $A_{n\times n}$، دترمینان ماتریس $xI_n - A$ را چندجمله‌ای مشخصه ماتریس A می‌نامیم و با $c_A(x)$ نشان می‌دهیم.

مثال ۱۴.۱.۵. چندجمله‌ای مشخصه ماتریس $A = \begin{pmatrix} ۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & -۱ \\ -۱ & ۰ & ۲ \end{pmatrix}$ را به دست آورید.

حل: بنابر تعریف داریم:

$$\begin{aligned} c_A(x) &= det(xI_۳ - A) \\ &= det\begin{pmatrix} x & -۱ & -۱ \\ ۱ & x & -۱ \\ -۲ & ۰ & x+۱ \end{pmatrix} = (x-۱)^۲(x+۱). \end{aligned}$$

گزاره ۱۵.۱.۵. *ریشه‌های چندجمله‌ای مشخصه یک ماتریس مقادیر ویژه آن را مشخص می‌کنند.*

مثال ۱۶.۱.۵. مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس $A = \begin{pmatrix} ۳ & -۱ \\ ۲ & ۰ \end{pmatrix}$ را به دست آورید.

حل: چندجمله‌ای مشخصه ماتریس A برابر است با:

$$\begin{aligned} c_A(x) &= det(xI_۲ - A) \\ &= det\begin{pmatrix} x+۱ & -۳ \\ ۰ & x-۲ \end{pmatrix} = (x+۱)(x-۲), \end{aligned}$$

لذا ماتریس A دارای مقادیر ویژه $\lambda_۱ = -۱$ و $\lambda_۲ = ۲$ می‌باشد. فرض کنیم $V_۱ = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ بردار ویژه متناظر مقدار ویژه $\lambda_۱ = -۱$ باشد. در این صورت $\begin{pmatrix} -۱ & ۳ \\ ۰ & ۲ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ نتیجه می‌دهد $y = ۰$. مقدار متغیر x می‌تواند هر مقدار دل‌خواه باشد، بنابراین $u_۱ = \begin{pmatrix} ۱ \\ ۰ \end{pmatrix}$ یک بردار ویژه متناظر مقدار ویژه $\lambda_۱ = -۱$ است. اکنون فرض کنیم $V_۲ = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ بردار ویژه متناظر مقدار ویژه $\lambda_۲ = ۲$ باشد. در این صورت $\begin{pmatrix} -۱ & ۳ \\ ۰ & ۲ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ۲\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ نتیجه می‌دهد $y = x$. مقدار متغیر x می‌تواند هر مقدار دل‌خواه باشد، بنابراین $V_۲ = \begin{pmatrix} ۱ \\ ۱ \end{pmatrix}$ یک بردار ویژه متناظر مقدار ویژه $\lambda_۲ = ۲$ است.

تعریف ۱۷.۱.۵ (زیرفضای ویژه). برای مقدار ویژه λ از ماتریس $A_{n\times n}$، زیرفضای ویژه وابسته به λ را به صورت مجموعه تمام بردارهای ویژه وابسته به λ تعریف می‌کنیم و با E_λ نشان می‌دهیم. یعنی

$$E_\lambda = \{V \in \mathbb{R}^n : AV = \lambda V\}.$$

تعریف ۱۸.۱.۵. برای مقدار ویژه λ از ماتریس $A_{n\times n}$، مرتبه تکرار ریشه λ در چندجمله‌ای مشخصه ماتریس A **تکرر جبری** و بعد زیرفضای ویژه وابسته به λ **تکرر هندسی** نامیده می‌شود. روشن است که برای هر مقدار ویژه، تکرر هندسی آن کوچک‌تر مساوی تکرر جبری آن است.

مثال ۱۹.۱.۵. مقادیر ویژه و زیرفضای ویژه وابسته به هریک از مقادیر ویژه ماتریس $A = \begin{pmatrix} -6 & -6 & 5 \\ 2 & 4 & -1 \\ -4 & -6 & 3 \end{pmatrix}$ را بیابید.

حل: مقدار ویژه $\lambda_1 = 2$ دارای تکرر جبری ۲ است. زیرفضای ویژه وابسته به آن $E_{\lambda_1} = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ می‌باشد و مقدار ویژه $\lambda_2 = 1$ دارای تکرر جبری ۱ است. زیرفضای ویژه وابسته به آن $E_{\lambda_2} = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$ می‌باشد.

مثال ۲۰.۱.۵. مقادیر ویژه و زیرفضای ویژه وابسته به هریک از مقادیر ویژه ماتریس $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ را بیابید.

حل: مقدار ویژه $\lambda_1 = 1$ دارای تکرر جبری ۲ است. زیرفضای ویژه وابسته به آن $E_{\lambda_1} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ می‌باشد و مقدار ویژه $\lambda_2 = 2$ دارای تکرر جبری ۱ است. زیرفضای ویژه وابسته به آن $E_{\lambda_2} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ می‌باشد.

گزاره ۲۱.۱.۵. *فرض کنید v یک بردار ویژه وابسته به مقدار ویژه λ برای ماتریس A باشد، در این صورت $X(t) = e^{\lambda t}V$ جوابی برای دستگاه معادلات دیفرانسیل $\dot{X} = AX$ است.*

مثال ۲۲.۱.۵. جواب عمومی دستگاه معادلات دیفرانسیل $\dot{X} = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۲ \end{pmatrix} X$ را بیابید.

حل: ماتریس $A = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۲ \end{pmatrix}$ دارای مقادیر ویژه $\lambda_۱ = -۱$ و $\lambda_۲ = ۴$ است.

نظیر این مقادیر ویژه، می‌توان بردارهای ویژه‌ای چون $V_۱ = \begin{pmatrix} ۱ \\ -۱ \end{pmatrix}$ و $V_۲ = \begin{pmatrix} ۲ \\ ۳ \end{pmatrix}$ به دست آورد (چرا؟). بنابر گزاره بالا $X^۱(t) = e^{-t}\begin{pmatrix} ۱ \\ -۱ \end{pmatrix}$ و $X^۲(t) = e^{۴t}\begin{pmatrix} ۲ \\ ۳ \end{pmatrix}$ جواب‌هایی برای دستگاه بالا هستند. از آن‌جایی که دو بردار $V_۱$ و $V_۲$ مستقل خطی هست و دستگاه دارای دو مجهول است، جواب عمومی به صورت زیر است.

$$X(t) = c_۱X^۱(t) + c_۲X^۲(t) = c_۱e^{-t}\begin{pmatrix} ۱ \\ -۱ \end{pmatrix} + c_۲e^{۴t}\begin{pmatrix} ۲ \\ ۳ \end{pmatrix}.$$

گزاره ۲۳.۱.۵. *اگر $X(t) = X^۱(t)+iX^۲(t)$ جواب مختلطی برای دستگاه $\dot{X} = AX$ باشد، آن‌گاه $X^۱(t)$ و $X^۲(t)$ جواب‌هایی حقیقی برای این دستگاه هستند.*

مثال ۲۴.۱.۵. جواب عمومی دستگاه معادلات دیفرانسیل $\dot{X} = \begin{pmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & -۲ \end{pmatrix} X$ را بیابید.

حل: ماتریس $A = \begin{pmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & -۲ \end{pmatrix}$ دارای جفت مقادیر ویژه مختلط $\lambda_{۱,۲} = \pm ۲i$

است. نظیر مقدار ویژه $\lambda_{۱} = ۲i$ می‌توان بردار ویژه‌ای چون $V = \begin{pmatrix} ۱ \\ i \end{pmatrix}$ به دست آورد.
لذا

$$e^{۲it}\begin{pmatrix} ۱ \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos ۲t \\ -\sin ۲t \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} \sin ۲t \\ \cos ۲t \end{pmatrix},$$

جواب مختلطی برای دستگاه داده شده است. بنابر گزاره بالا جواب عمومی به صورت زیر است.

$$X(t) = c_{۱}X^{۱}(t) + c_{۲}X^{۲}(t) = c_{۱}\begin{pmatrix} \cos ۲t \\ -\sin ۲t \end{pmatrix} + c_{۲}\begin{pmatrix} \sin ۲t \\ \cos ۲t \end{pmatrix}.$$

تعریف ۲۵.۱.۵ (بردار ویژه تعمیم یافته). بردار V در $\mathbb{R}^n$ را بردار ویژه تعمیم یافته از مرتبه q برای ماتریس $A_{n\times n}$ گوییم، هرگاه $(A-\lambda I)^q V = ۰$ اما $(A-\lambda I)^{q-۱}V \neq ۰$.[۱]
روشن است که بردارهای ویژه معمولی از مرتبه یک هستند.

گزاره ۲۶.۱.۵. *فرض کنید V یک بردار ویژه تعمیم یافته از مرتبه q وابسته به مقدار ویژه λ برای ماتریس A باشد، در این صورت*

$$X(t) = e^{\lambda t}(V + t(A-\lambda I)V + \ldots + \frac{t^{q-۱}}{(q-۱)!}(A-\lambda I)^{q-۱}V),$$

جوابی برای دستگاه معادلات دیفرانسیل $\dot{X} = AX$ است.

مثال ۲۷.۱.۵. جواب عمومی دستگاه معادلات دیفرانسیل $\dot{X} = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ -۹ & ۶ \end{pmatrix} X$ را بیابید.

---

[۱] برای مقدار ویژه λ بزرگ‌ترین مرتبه‌ای که بردار ویژه تعمیم یافته از آن مرتبه وجود دارد، شاخص آن مقدار ویژه نامیده می‌شود. شاخص مقدار ویژه λ برابر مرتبه تکرار ریشه λ در چندجمله‌ای مینیمال است.

حل: ماتریس A دارای مقدار ویژه تکراری ۳ = λ است. با حل $(A - ۳I)V = ۰$ بردارهای ویژه نظیر مقدار ویژه ۳ = λ را پیدا می‌کنیم.

$$(A - ۳I)V = \begin{pmatrix} -۳ & ۱ \\ -۹ & ۳ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_۱ \\ v_۲ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۰ \\ ۰ \end{pmatrix},$$

از دستگاه بالا نتیجه می‌شود $v_۲ = ۳v_۱$، لذا بردارهای ویژه متناظر ۳ = λ مضارب ناصفر بردار $V^۱ = \begin{pmatrix} ۱ \\ ۳ \end{pmatrix}$ هستند و زیرفضای ویژه وابسته به ۳ = λ یک بعدی است. چون دستگاه دارای دو متغیر است، لازم است بردار مستقل خطی دیگری پیدا کنیم، اما چون زیرفضای ویژه یک بعدی است، سراغ بردارهای ویژه تعمیم یافته از مرتبه دو می‌رویم. دقت کنید که $(A - ۳I)^۲ = ۰$، لذا هر بردار ناصفر V که $(A - ۳I)V \neq ۰$، بردار ویژه تعمیم یافته از مرتبه دو است. بردار $V^۲ = \begin{pmatrix} ۰ \\ ۱ \end{pmatrix}$ را به عنوان بردار ویژه مرتبه دو انتخاب می‌کنیم. پس دو جواب زیر برای دستگاه داده شده مستقل هستند.

$$X^۱(t) = e^{۳t}V^۱ = e^{۳t}\begin{pmatrix} ۱ \\ ۳ \end{pmatrix}$$

$$X^۲(t) = e^{۳t}(V^۲ + t(A - ۳I)V^۲) = e^{۳t}\begin{pmatrix} t \\ ۳t \end{pmatrix},$$

پس جواب عمومی مساله برابر است با

$$X(t) = c_۱X^۱(t) + c_۲X^۲(t) = c_۱e^{۳t}\begin{pmatrix} ۱ \\ ۳ \end{pmatrix} + c_۲e^{۳t}\begin{pmatrix} t \\ ۳t \end{pmatrix}.$$

تعریف ۲۸.۱.۵ (ماتریس نمایی). برای ماتریس $A_{n\times n}$، ماتریس نمایی آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$e^A = \sum_{k=۰}^{\infty} \frac{۱}{k!}A^k.$$

قضیه ۲۹.۱.۵. *برای هر $A_{n\times n}$ سری $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k$ همگرا است و e^A نیز یک ماتریس $n\times n$ است.*

قضیه ۳۰.۱.۵. *(قضیه اصلی برای دستگاه معادلات خطی) فرض کنید A یک ماتریس $n\times n$ باشد که درایه‌های آن اعداد حقیقی ثابتی است. در این صورت معادله $\dot{X}=AX$ با شرط اولیه دل‌خواه $X(0)=C$ دارای جواب یک‌تای $X(t)=e^{tA}C$ می‌باشد.*

برای محاسبه ماتریس نمایی به مفاهیم پیش‌رفته‌تری در جبرخطی نظیر فرم ژردان نیاز است که از حوصله این کتاب خارج است. در این کتاب به عنوان کاربردی از جواب دستگاه‌های خطی، ماتریس نمایی را به کمک ماتریس اساسی به دست می‌آوریم.

تعریف ۳۱.۱.۵ (ماتریس اساسی). فرض کنید جواب عمومی دستگاه $\dot{X}=AX$ به صورت $X(t)=c_1X^1(t)+c_2X^2(t)+\ldots+c_nX^n(t)$ باشد، در این صورت ماتریس اساسی متناظر این جواب برای دستگاه را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\Phi(t)=[X^1(t)|X^2(t)|\ldots|X^n(t)].$$

روشن است که ماتریس اساسی $\Phi(t)$ در معادله دیفرانسیل $\Phi'(t)=A\Phi(t)$ صدق می‌کند. (چرا؟)

قضیه ۳۲.۱.۵ (خاصیت اصلی ماتریس اساسی). *اگر $\Phi(t)$ یک ماتریس اساسی برای دستگاه $\dot{X}=AX$ باشد، در این صورت:*

$$\Phi(t)=e^{tA}\Phi(0),$$

یعنی با دانستن ماتریس اساسی در $t=0$، ماتریس اساسی مشخص می‌شود.

ایده اثبات: قرار دهید $F(t)=e^{-tA}\Phi(t)$ و نشان دهید F تابعی ثابت است.

مثال ۳۳.۱.۵. مطلوبست محاسبه e^{tA} برای ماتریس $A = \begin{pmatrix} ۱ & -۲ \\ ۴ & -۵ \end{pmatrix}$.

حل: ماتریس A دارای مقادیر ویژه $\lambda_۱ = -۱$ و $\lambda_۲ = ۳$ می‌باشد. می‌توان بردار ویژه $v_۱ = \begin{pmatrix} ۱ \\ ۱ \end{pmatrix}$ نظیر $\lambda_۱$ و $v_۲ = \begin{pmatrix} ۱ \\ ۵ \end{pmatrix}$ نظیر $\lambda_۲$ پیدا کرد. لذا ماتریس اساسی دستگاه $\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{۳t} \\ e^{-t} & ۵e^{۳t} \end{pmatrix}$ می‌باشد. اکنون e^{tA} را به کمک قضیه بالا پیدا می‌کنیم.

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \Phi(t)\Phi(\circ)^{-۱} \\ &= \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{۳t} \\ e^{-t} & ۵e^{۳t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۵ \end{pmatrix}^{-۱} = \frac{۱}{۴}\begin{pmatrix} ۵e^{-t} - e^{۳t} & -e^{-t} + e^{۳t} \\ ۵e^{-t} - ۵e^{۳t} & e^{-t} + ۵e^{۳t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

دستگاه‌های خطی غیرهم‌گن

این فصل را با بررسی روش ماتریسی برای دستگاه‌های خطی با ضرایب ثابت و ناهم‌گن، یعنی معادلات به صورت $\dot{X}(t) = AX(t) + B(t)$ که $A_{n\times n}$ ماتریس با درایه‌های ثابت و $B(t)_{n\times ۱}$ ماتریس با درایه‌های متغیر برحسب t است به پایان می‌بریم. جواب عمومی این دستگاه خطی به صورت $X(t) = X_h(t) + X_p(t)$ است که $X_h(t)$ جواب هم‌گن و $X_p(t)$ جواب خصوصی است. از بخش قبل می‌دانیم که جواب هم‌گن به صورت زیر است،

$$X_h(t) = c_۱X^۱(t) + c_۲X^۲(t) + \ldots + c_nX^n(t),$$

هم‌چنین توابع $u_i(t)$ چنان موجودند که:

$$X_p(t) = u_۱X^۱(t) + u_۲X^۲(t) + \ldots + u_nX^n(t),$$

با توجه به ماتریس اساسی $\Phi(t) = [X^{1}(t)|X^{2}(t)|...|X^{n}(t)]$ و نام‌گذاری $U(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ ... \\ u_n(t) \end{pmatrix}$، می‌توان نوشت $X_p(t) = \Phi(t)U(t)$. اکنون به روش تغییر پارامتر لاگرانژ، به دنبال یافتن ماتریس $U(t)$ هستیم. چون X_p جوابی برای معادله ناهم‌گن است، با جای‌گذاری در معادله داریم:

$$\begin{aligned} \dot{X}_p(t) &= AX_p(t) + B(t) \\ \frac{d}{dt}(\Phi(t)U(t)) &= A(\Phi(t)U(t)) + B(t) \\ \Phi'(t)U(t) + \Phi(t)U'(t) &= A\Phi(t)U(t) + B(t), \end{aligned}$$

از آن‌جایی که $\Phi'(t) = A\Phi(t)$، معادله بالا به صورت $\Phi(t)U'(t) = B(t)$ ساده می‌شود، پس $U'(t) = \Phi^{-1}(t)B(t)$ و در نتیجه:

$$U(t) = \int \Phi^{-1}(t)B(t)dt.$$

بنابراین مشابه معادلات خطی مرتبه اول، برای دستگاه‌های خطی مرتبه اول می‌توان نوشت:

$$X(t) = \Phi(t)(\int \Phi^{-1}(t)B(t)dt + C).$$

مثال ۳۴.۱.۵. جواب عمومی دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر را بیابید.

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 5e^{t} \\ 5 \end{pmatrix}.$$

حل: بنابر مثال ۲۲.۱.۵ در صفحه ۲۲۰ $X^{1}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix}$ و $X^{2}(t) =$

$\begin{pmatrix} ۲e^{۴t} \\ ۳e^{۴t} \end{pmatrix}$ دو جواب برای معادله همگن هستند. لذا جواب همگن به صورت زیر است:

$$X_h = c_۱X^۱(t) + c_۲X^۲(t) = c_۱\begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix} + c_۲\begin{pmatrix} ۲e^{۴t} \\ ۳e^{۴t} \end{pmatrix},$$

برای جواب خصوصی داریم:

$$\begin{aligned} U(t) &= \int \Phi^{-۱}(t)B(t)dt \\ &= \int \begin{pmatrix} e^{-t} & ۲e^{۴t} \\ -e^{-t} & ۳e^{۴t} \end{pmatrix}^{-۱} \begin{pmatrix} ۵e^{t} \\ ۵ \end{pmatrix} dt \\ &= \int \frac{۱}{۵}\begin{pmatrix} ۳e^{۲t} & -۲e^{t} \\ e^{-۴t} & e^{-۴t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۵e^{t} \\ ۵ \end{pmatrix} dt \\ &= \int \begin{pmatrix} ۳e^{۲t} - ۲e^{t} \\ e^{-۳t} + e^{-۴t} \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} \frac{۳}{۲}e^{۲t} - ۲e^{t} \\ -\frac{۱}{۳}e^{-۳t} - \frac{۱}{۴}e^{-۴t} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

لذا جواب خصوصی برابر است با:

$$\begin{aligned} X_p(t) &= \Phi(t)U(t) \\ &= \begin{pmatrix} e^{-t} & ۲e^{۴t} \\ -e^{-t} & ۳e^{۴t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{۳}{۲}e^{۲t} - ۲e^{t} \\ -\frac{۱}{۳}e^{-۳t} - \frac{۱}{۴}e^{-۴t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{۵}{۶}e^{t} - \frac{۵}{۲} \\ -\frac{۵}{۲}e^{t} + \frac{۵}{۴} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

و نهایتا جواب عمومی برابر است با:

$$X(t) = X_h(t) + X_p(t) = c_۱\begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix} + c_۲\begin{pmatrix} ۲e^{۴t} \\ ۳e^{۴t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{۵}{۶}e^{t} - \frac{۵}{۲} \\ -\frac{۵}{۲}e^{t} + \frac{۵}{۴} \end{pmatrix}.$$

۲.۵ سوالات حل شده

سوال ۱.۲.۵. جواب عمومی دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر را بیابید.

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} ۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ \end{pmatrix} X, X(۰) = \begin{pmatrix} ۳ \\ -۱ \\ ۱ \end{pmatrix}.$$

حل: دستگاه داده شده را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{cases} x'_۱(t) = x_۱(t) + x_۲(t) \\ x'_۲(t) = x_۱(t) + x_۳(t) \\ x'_۳(t) = x_۲(t) + x_۳(t) \end{cases},$$

با محاسبه تبدیل لاپلاس داریم:

$$\begin{cases} sX_۱(s) - ۳ = X_۱(s) + X_۲(s) \\ sX_۲(s) + ۱ = X_۱(s) + X_۳(s) \\ sX_۳(s) - ۱ = X_۲(s) + X_۳(s) \end{cases},$$

از دستگاه بالا نتیجه می‌شود

$$\begin{cases} X_۱(s) = \frac{۱}{s-۱} + \frac{۱}{s+۱} + \frac{۱}{s-۲} \\ X_۲(s) = -\frac{۱}{s+۱} + \frac{۱}{s-۲} - \frac{۱}{s+۱} \\ X_۳(s) = \frac{۱}{s+۱} - \frac{۱}{s+۱} + \frac{۱}{s-۲}, \end{cases},$$

پس

$$\begin{cases} x_۱(t) = e^t + e^{-t} + e^{۲t} \\ x_۲(t) = -۲e^{-t} + e^{۲t} \\ x_۳(t) = e^{-t} - e^t + e^{۲t} \end{cases},$$

سوال ۲.۲.۵. جواب عمومی دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر را بیابید.

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} -۲ & -۴ & ۲ \\ -۲ & ۱ & ۲ \\ ۴ & ۲ & ۵ \end{pmatrix} X.$$

حل: ماتریس ضرایب دارای مقادیر ویژه $\lambda_۱ = ۳$، $\lambda_۲ = -۵$ و $\lambda_۳ = ۶$ است. نظیر این مقادیر ویژه، می‌توان بردارهای ویژه‌ای چون $V_۱ = \begin{pmatrix} ۲ \\ -۳ \\ -۱ \end{pmatrix}$، $V_۲ = \begin{pmatrix} ۲ \\ -۱ \\ ۱ \end{pmatrix}$ و $V_۳ = \begin{pmatrix} ۱ \\ ۶ \\ ۱۶ \end{pmatrix}$ یافت. از آن‌جایی که این بردارها متعلق به مقادیر ویژه متمایز هستند، مستقل خطی می‌باشند و جواب عمومی به صورت زیر است.

$$X(t) = c_۱ e^{۳t} \begin{pmatrix} ۲ \\ -۳ \\ -۱ \end{pmatrix} + c_۲ e^{-۵t} \begin{pmatrix} ۲ \\ -۱ \\ ۱ \end{pmatrix} + e^{۶t} \begin{pmatrix} ۱ \\ ۶ \\ ۱۶ \end{pmatrix}.$$

سوال ۳.۲.۵. جواب عمومی دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر را بیابید.

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} ۵ & -۶ & -۶ \\ -۱ & ۴ & ۲ \\ ۳ & -۶ & -۴ \end{pmatrix} X.$$

حل: در مثال ۱۹.۱.۵ دیدیم که ماتریس ضرایب این معادله دارای دو مقدار ویژه $\lambda_۱ = ۲$ و $\lambda_۲ = ۱$ است. مقدار ویژه $\lambda_۱ = ۲$ دارای تکرر جبری ۲ و دو بردار ویژه وابسته $V^۱ = \begin{pmatrix} ۲ \\ ۱ \\ ۰ \end{pmatrix}$ و $V^۲ = \begin{pmatrix} ۲ \\ ۰ \\ ۱ \end{pmatrix}$ می‌باشد. هم‌چنین نظیر مقدار ویژه $\lambda_۲ = ۱$

بردار ویژه $V^{۳} = \begin{pmatrix} ۳ \\ -۱ \\ ۳ \end{pmatrix}$ یافت می‌شود. لذا جواب عمومی دستگاه بالا به صورت زیر است:

$$X(t) = e^{۲t}\begin{pmatrix} ۲ \\ ۱ \\ ۰ \end{pmatrix} + e^{۲t}\begin{pmatrix} ۲ \\ ۰ \\ ۱ \end{pmatrix} + e^{t}\begin{pmatrix} ۳ \\ -۱ \\ ۳ \end{pmatrix}.$$

سوال ۴.۲.۵. جواب عمومی دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر را بیابید.

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{pmatrix} X.$$

حل: در مثال ۲۰.۱.۵ دیدیم که ماتریس ضرایب این معادله دارای دو مقدار ویژه $\lambda_{۱} = ۱$ و $\lambda_{۲} = ۲$ است. مقدار ویژه $\lambda_{۱} = ۱$ دارای تکرر جبری ۲ و بردار ویژه وابسته $V^{۱} = \begin{pmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۰ \end{pmatrix}$ و نظیر مقدار ویژه $\lambda_{۲} = ۲$ بردار ویژه $V^{۳} = \begin{pmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۱ \end{pmatrix}$ یافت می‌شود. برای ارائه جواب عمومی نیاز به یک بردار مستقل دیگر داریم. چون زیرفضای ویژه $\lambda_{۱} = ۱$ یک بعدی است. سراغ بردار ویژه تعمیم یافته می‌رویم. معادله $(A-I)^{۲}V^{۲} = ۰$ نتیجه می‌دهد مولفه سوم $V^{۲}$ باید صفر باشد. برداری دل‌خواه با مولفه سوم صفر طوری انتخاب می‌کنیم که بردار ویژه نظیر $\lambda_{۱} = ۱$ نباشد. مثلا $V^{۲} = \begin{pmatrix} ۰ \\ ۱ \\ ۰ \end{pmatrix}$، پس جواب عمومی دستگاه بالا

به صورت زیر است:

$$X(t) = c_1 e^t V^1 + c_2 e^t (V^2 + t(A-I)V^2) + c_3 e^{2t} V^3$$
$$= c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

۳.۵ مسائل تمرینی

تمرین ۱.۳.۵. جواب دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر را بیابید.

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} X, X(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

تمرین ۲.۳.۵. جواب عمومی دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر را بیابید.

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} X.$$

تمرین ۳.۳.۵. جواب عمومی دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر را بیابید.

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} X.$$

تمرین ۴.۳.۵. جواب عمومی دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر را بیابید.

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} X.$$

تمرین ۵.۳.۵. جواب دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر را بیابید.

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} ۱ & ۴ \\ ۱ & ۱ \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} ۸e^t \\ ۱۸e^t \end{pmatrix}, X(\circ) = \begin{pmatrix} ۴ \\ \circ \end{pmatrix}.$$

۴.۵ مسائل خلاقانه

مساله ۱.۴.۵. فرض کنید $X^۱(t)$، $X^۲(t)$، ...، $X^n(t)$ جواب‌هایی برای دستگاه $\dot{X}(t) = A(t)X(t) + B(t)$ باشند. نشان دهید رانسکین این جواب‌ها در معادله مرتبه اول $\dot{W}(t) = tr(A)W(t)$ صدق می‌کند و از آن‌جا نتیجه بگیرید:

$$W(X^۱, X^۲, ..., X^n)(t) = W(X^۱, X^۲, ..., X^n)(t_\circ)e^{\int_{t_\circ}^{t} trA(\tau)d\tau}.$$

مساله ۲.۴.۵. اگر $A_{n\times n}$ و $B_{n\times n}$ دو ماتریس جابه‌جایی باشد، یعنی $AB = BA$، نشان دهید:

$$e^{A+B} = e^A \cdot e^B.$$

مساله ۳.۴.۵. برای ماتریس‌های $A = \begin{pmatrix} \lambda_۱ & & \circ \\ & \ddots & \\ \circ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} \lambda_۱ & ۱ & \circ \\ \circ & \lambda_۱ & \circ \\ \circ & \circ & \lambda_۲ \end{pmatrix}$ نشان دهید:

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda_۱} & & \circ \\ & \ddots & \\ \circ & & e^{t\lambda_n} \end{pmatrix}, e^{tB} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda_۱} & te^{t\lambda_۱} & \circ \\ \circ & e^{t\lambda_۱} & \circ \\ \circ & \circ & e^{t\lambda_۲} \end{pmatrix}.$$

پیوست: تابع گاما

تعریف ۴.۴.۵. برای عدد حقیقی ناصفر x که صحیحِ منفی نیست، تابع گاما به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Gamma(x) = \int_{۰}^{\infty} t^{x-۱}e^{-t}dt,$$

برای $x \in \{۰, -۱, -۲, ...\}$ انتگرال بالا واگرا است.

مثال ۵.۴.۵. مقادیر $\Gamma(۱)$ و $\Gamma'(۱)$ را حساب کنید.

حل: بنابر تعریف داریم:

$$\Gamma(۱) = \int_{۰}^{\infty} e^{-t}dt = -e^{-t}]_{۰}^{\infty} = ۱.$$

مشتق $\Gamma(x) = \int_{۰}^{\infty} t^{x-۱}e^{-t}dt$ برابر است با $\Gamma'(x) = \int_{۰}^{\infty}(\ln t)t^{x-۱}e^{-t}dt$، پس $\Gamma'(۱) = \int_{۰}^{\infty} e^{-x}\ln x dx$، مقدار این انتگرال برابر $-\gamma$ است که γ ثابت اویلر می‌باشد. در فصل سوم دیدیم که ثابت اویلر در ارتباط بین تابع بسل نوع اول و دوم مطرح می‌شود و برابر است با:

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}(۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + ... + \frac{۱}{n} - \ln n) \simeq ۰/۵۷۷۲۱۶....$$

گزاره ۶.۴.۵. *برای* $x \in \mathbb{R} - \{۰, -۱, -۲, ...\}$،

$$\Gamma(x + ۱) = x\Gamma(x).$$

اثبات. بنابر تعریف $\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x e^{-t}dt$، به کمک فرمول جزءبه‌جزء با فرض $u = t^x$ و $dv = e^{-t}dt$ نتیجه می‌شود $du = xt^x dt$ و $v = -e^{-t}$، پس

$$\int_0^\infty t^x e^{-t}dt = -e^{-t}t^x]_0^\infty + x\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt = x\Gamma(x).$$

□

نتیجه ۷.۴.۵. *برای عدد طبیعی n، $n! = \Gamma(n+1)$ پس تابع گاما تعمیمی از فاکتوریل برای اعداد غیرطبیعی است. همین طور می‌توان ترکیب $\binom{n}{k} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(n-k+1)}$ را برای اعداد غیرطبیعی مطرح کرد.*

مثال ۸.۴.۵. از ریاضی عمومی می‌دانیم $\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$، مقادیر $\Gamma(\frac{1}{2})$ و $\Gamma(\frac{3}{2})$ را حساب کنید.

حل: بنابر تعریف تابع گاما $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}dt$، با تغییر متغیر $u = \sqrt{t}$، داریم:

$$\int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}dt = 2\int_0^\infty e^{-u^2}du = \sqrt{\pi}.$$

برای محاسبه $\Gamma(\frac{3}{2})$ با استفاده از رابطه $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ داریم:

$$\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

در حالت کلی نیز می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
\Gamma(k+\frac{1}{2}) &= (k-\frac{1}{2})\Gamma(k-\frac{1}{2}) \\
&= (k-\frac{1}{2})(k-\frac{3}{2})\ldots(k-\frac{2k-1}{2})\Gamma(\frac{1}{2}) \\
&= (\frac{2k-1}{2})(\frac{2k-3}{2})\ldots(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2}) \\
&= (\frac{2k-1}{2})(\frac{2k-2}{2k-2})(\frac{2k-3}{2})(\frac{2k-4}{2k-4})\ldots(\frac{1}{2})(\frac{2}{2})\Gamma(\frac{1}{2}) \\
&= \frac{(2k-1)!}{2^k 2^k (k-1)!}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{(2k-1)!}{4^k (k-1)!}\sqrt{\pi}
\end{aligned}$$

مثال ۹.۴.۵. مقدار $\Gamma(-\frac{۱}{۲})$ را حساب کنید.

حل: کافی است در رابطه $\Gamma(x+۱) = x\Gamma(x)$ قرار دهیم $x = -\frac{۱}{۲}$، در این صورت $\Gamma(\frac{۱}{۲}) = -\frac{۱}{۲}\Gamma(-\frac{۱}{۲})$، پس $\Gamma(-\frac{۱}{۲}) = -۲\Gamma(\frac{۱}{۲})$، یعنی $\Gamma(-\frac{۱}{۲}) = -۲\sqrt{\pi}$.

مثال ۱۰.۴.۵. مقدار انتگرال $\int_{\circ}^{۱} \frac{dx}{\sqrt{-\ln x}}$ را به دست آورید.

حل: با تغییر متغیر $t = -\ln x$، نتیجه می‌شود $dx = -e^{-t}dt$، بنابراین:

$$\int_{\circ}^{۱} \frac{dx}{\sqrt{-\ln x}} = \int_{+\infty}^{\circ} -e^{-t}t^{-\frac{۱}{۲}}dt = \int_{\circ}^{+\infty} e^{-t}t^{-\frac{۱}{۲}}dt = \Gamma(\frac{۱}{۲}) = \sqrt{\pi}.$$

مثال ۱۱.۴.۵. مقدار انتگرال $\int_{\circ}^{+\infty} \sqrt{x}e^{-x^{۳}}dx$ را به دست آورید.

حل: با تغییر متغیر $t = x^{۳}$، نتیجه می‌شود $۳x^{۲}dx = dt$، بنابراین:

$$\int_{\circ}^{+\infty} \sqrt{x}e^{-x^{۳}}dx = \int_{\circ}^{+\infty} e^{-t}t^{\frac{۱}{۶}}\frac{۱}{۳}t^{-\frac{۲}{۳}} = \frac{۱}{۳}\int_{\circ}^{+\infty} e^{-t}t^{-\frac{۱}{۲}}dt = \frac{۱}{۳}\Gamma(\frac{۱}{۲}) = \frac{\sqrt{\pi}}{۳}.$$

تعریف ۱۲.۴.۵. برای اعداد حقیقی x و y تابع بتا به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\beta(x,y) = \int_{\circ}^{۱} t^{x-۱}(۱-t)^{y-۱}dt.$$

گزاره ۱۳.۴.۵ (خواص تابع بتا). *۱) برای اعداد مثبت x و y،*

$$\beta(x,y) = \beta(y,x).$$

۲) برای x و y که تابع گاما همگرا باشد،

$$\beta(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

مثال ۱۴.۴.۵. به کمک تابع بتا مقدار انتگرال $\int_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}} \sin^{۴}\theta\cos^{۵}\theta d\theta$ را به دست آورید.

حل: با تغییر متغیر $u = \sin^{۲}\theta$ داریم:

$$\begin{aligned}\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \sin^{۴}\theta\cos^{۵}\theta d\theta &= \int_{۰}^{۱} \frac{u^{\frac{۵}{۲}-۱}(۱-u)^{۳-۱}\sin\theta\cos\theta}{۲\sin\theta\cos\theta}du\\ &= \frac{۱}{۲}\beta(\frac{۵}{۲},۳)\\ &= \frac{۱}{۲}\frac{\Gamma(\frac{۵}{۲})\Gamma(۳)}{\Gamma(\frac{۱۱}{۲})} = \frac{۸}{۳۱۵}.\end{aligned}$$

تمرین: برای $x \in \mathbb{R} - \{۰, -۱, -۲, ...\}$ و عدد طبیعی n نشان دهید:

$$\Gamma(x+n)\Gamma(۱-x-n) = (-۱)^{n}\Gamma(x)\Gamma(۱-x).$$

تمرین: با فرض $\Gamma(p)\Gamma(۱-p) = \dfrac{\pi}{\sin(\pi p)}$ برای $۰ < p < ۱$، مطلوبست محاسبه $\int_{۰}^{۱} \ln\Gamma(x)dx$.

ضمیمه ۲: خود را برای امتحان آماده کنیم

شریف، بهار۹۲، میان‌ترم

سوال ۱: معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید.

$$\frac{dy}{dx} = 1 + x - y,$$

الف) میدانِ جهتی برای معادله داده شده را رسم کنید و از روی آن چند خم انتگرال برای این معادله دیفرانسیل رسم کنید.

ب) رفتار جواب‌ها را هنگامی که $x \to +\infty$ از روی میدان جهت قسمت (الف)، بدون حل معادله دیفرانسیل بررسی کنید.

سوال ۲: جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را بیابید.

$$(۳ - \sin(xy))dx + (۲ + \frac{۳x}{y} - x\frac{\sin(xy)}{y})dy = ۰.$$

سوال ۳: جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را بیابید. (راه‌نمایی: از تغییر متغیر مناسب استفاده کنید.)

$$y' + xy\ln y = xye^{-x^۲}.$$

سوال ۴: فرض کنید برای تابع پیوسته داده شده g روی اعداد حقیقی، توابع $(x+۱)^۲$، $۲x$ و $x^۳ + ۳x$ سه جواب معادله دیفرانسیل ناهم‌گن

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x),$$

می‌باشند که p و q توابع پیوسته‌ای روی اعداد حقیقی هستند.

الف) یک مجموعه اساسی از جواب‌ها برای معادله دیفرانسیل هم‌گن متناظر پیدا کنید.

ب) جواب عمومی معادله دیفرانسیل غیرهم‌گن زیر را پیدا کنید.

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = ۱.$$

سوال ۵: مساله مقدار اولیه زیر را در نظر بگیرید.

$$۶y'' + y' - ۱۲y = ۰, y(۰) = ۲, y'(۰) = \lambda,$$

الف) جواب این مساله مقدار اولیه را بیابید.

ب) مقادیری از λ را مشخص کنید که به ازای آن‌ها، جواب قسمت (الف)، هنگامی که $x \to +\infty$ به صفر میل می‌کند.

شریف، پاییز۹۲، میان‌ترم

سوال ۱: معادله‌های دیفرانسیل داده شده را حل کنید.

الف) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x^2 + 4x + 2}{2(y-1)}$

ب) $(e^{-x}y^2 \cos y + 2y^2 \ln y)dx + (y - e^{-x}y^2 \sin y)dy = 0$ (تابعی از ye^{-x} را در نظر بگیرید.)

ج) $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^t}{1+t^2}$

د) $y^{(4)} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = te^t$

ه) $y'' + xy' + 2y = 0$

سوال ۲: معادله قسمت (الف) سوال (۱) را یک‌بار با شرط اولیه $y(0) = -1$ و یک‌بار با شرط اولیه $y(0) = 1$ حل کنید و در هر مورد بازه‌ای را معین کنید که جواب در آن موجود است.

سوال ۳: فرض کنید دستگاهی که با معادله $mu'' + \gamma u' + ku = 0$ توصیف شده، فوقِ میرا باشد. نشان دهید که مستقل از شرایط اولیه، وزنه حداکثر یک‌بار می‌تواند از موقعیت تعادلش عبور کند.

سوال ۴: فرض کنید $t < 2$، با استفاده از روش کاهش مرتبه معادله $(2-t)y''' + (2t-3)y'' - ty' + y = 0$ را به کمک $y_1(t) = e^t$ حل کنید.

سوال ۵: نقطه یا نقاط تکین معادله $x^2y'' + 3xy' + (1+x)y = 0$ و نوع این نقطه یا نقاط تکین را معین کنید و سپس به ازای $x > 0$ این معادله را حل کنید.

سوال ۶: یک ناوشکن در مه غلیظ به دنبال شکار یک زیردریایی است. در یک لحظه مه بالا می‌رود و زیردریایی در سطح آب در فاصله ۴ کیلومتری آشکار می‌شود و مه فورا پایین

می‌آید. سرعت ناوشکن سه برابر سرعت زیردریایی است. واضح است که زیردریایی فورا در آب فرو می‌رود و با تمام سرعت در امتداد مستقیم و نامشخص دور می‌شود. ناوشکن چه مسیری را باید تعقیب کند تا مطمئن گردد که مستقیما از روی زیردریایی می‌گذرد.

شریف، بهار۹۳، میان‌ترم

سوال ۱: معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید.

$$\frac{dy}{dx} = (y - 1)(y - 2)(y - 3),$$

الف) میدان جهتی برای معادله دیفرانسیل داده شده را رسم کنید و از روی آن چند خم انتگرال برای این معادله دیفرانسیل رسم کنید.

ب) جواب‌های تعادلی پایدار و ناپایدار را برای این معادله بیابید.

ج) تعیین کنید خم‌های انتگرال کجاها محدب و کجاها مقعرند. هم‌چنین نقاط عطف جواب‌ها را تعین کنید.

سوال ۲: با تغییر متغیر $x = t^2$ جواب معادله دیفرانسیل زیر را به دست آورید.

$$ty'' - y' + 4t^3 y = t^5 \sin t^2, t > 0.$$

سوال ۳: فرض کنید $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعی مشتق‌پذیر با مشتق پیوسته باشد. نشان دهید معادله دیفرانسیل $\frac{dx}{dt} = f(x)$ هیچ جواب تناوبی و غیر ثابت ندارد. به عبارت دیگر ثابت کنید اگر $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعی مشتق‌پذیر و تناوبی باشد که مقدار مشتق‌اش در هر t

برابر است با $f(x(t))$، آن‌گاه این تابع باید ثابت باشد. (راه‌نمایی: با استفاده از قضیه رول نشان دهید مشتق چنین تابعی باید در یک نقطه صفر شود و سپس از قضیه وجود و یک‌تایی نتیجه بگیرید جوابی از این معادله دیفرانسیل که مشتق‌اش در یک نقطه صفر باشد، تابع ثابت خواهد بود)

سوال ۴: جواب صریح عمومی معادله دیفرانسیل زیر را با شرط اولیه $y(1) = 0$ به دست آورید.

$$(x + e^x)y' + 2(1 + e^x)y = e^{-x}.$$

سوال ۵: جواب عمومی معادله‌های زیر را بیابید.

الف) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 - y^2 - 2y + 2x}{xy + x + y + 1}$

ب) $(xy\cos x + y\sin x + xe^{2y}) + (x\sin x + x^2e^{2y} - 2)y' = 0$

سوال ۶: نمودار تابع $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ از نقطه $(2, 3)$ می‌گذرد و دارای ویژگی‌ای به این شرح است: اگر برای هر نقطه (x_0, y_0) روی نمودار تابع، پاره‌خط $L(x_0, y_0)$ قسمتی از خط مماس بر نمودار در این نقطه باشد که در ربع اول قرار می‌گیرد؛ آن‌گاه (x_0, y_0) نقطه وسط این پاره خط خواهد بود. با توجه به این اطلاعات، معادله دیفرانسیل برای f بنویسید و از آن‌جا ضابطه این تابع را بیابید.

شریف، پاییز۹۳، میان‌ترم

سوال ۱: جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را به دست آورید.

$$y' = \frac{1 + y^2}{1 + x^2}.$$

سوال ۲: معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$e^y dx + (xe^y + ۲y)dy = ۰.$$

سوال ۳: بنابر قانون توریچلی، وقتی آب از دریچه یک منبع خارج می‌شود، سرعت آن برابر با جسمی است که از سطح آب رها شود. یعنی اگر ارتفاع سطح آب از دریچه h باشد، سرعت آب خروجی $\sqrt{۲gh}$ است. منبع آبی به شکل استوانه به شعاع R داریم که کف آن دریچه‌ای به شعاع r وجود دارد. اگر در ابتدا سطح آب در منبع h باشد، چه‌قدر طول می‌کشد تا منبع خالی شود؟

سوال ۴: فرض کنید $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعی نزولی است. ثابت کنید معادله دیفرانسیل

$$x'(t) = f(x(t)),$$

با شرط اولیه $x(۰) = x_۰$ حداکثر یک جواب دارد. (راه‌نمایی: فرض کنید $x(t)$ و $y(t)$ دو جواب از معادله فوق باشند و سپس $(x(t) - y(t))^۲$ را در نظر بگیرید.

سوال ۵: مساله مقدار اولیه زیر را حل کنید.

$$y'' + y' + ۲y = ۲ + \sin t, y(۰) = ۱, y'(۰) = ۰.$$

سوال ۶: الف) با فرض این‌که $y_۱ = t^۲$ یک جواب از معادله دیفرانسیل زیر باشد، به کمک روش کاهش مرتبه، جواب دیگری برای این معادله به دست آورید و نشان دهید این جواب مجموعه اساسی از جواب‌های معادله هستند.

$$t^۲ y'' - ۳ty' + ۴y = ۰, t > ۰.$$

ب) یک جواب خاص از معادله ناهمگن زیر را بیابید.

$$t^۲ y'' - ۳ty' + ۴y = t^۲ \log t, t > ۰.$$

شریف، پاییز۹۴، میان‌ترم

سوال ۱: معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$y' - y^2 = -2xy + x^2.$$

سوال ۲: جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را به دست آورید.

$$ydx + (2x - ye^y)dy = 0.$$

سوال ۳: فرض کنید $\{y_1, y_2\}$ مجموعه اساسی از جواب‌های معادله $y'' + (\cos t)y' + e^t y = 0$ باشد. همچنین فرض کنید $2y_1 - y_2$ و $y_1 - y_2$ به ترتیب جواب‌هایی از مساله‌های مقدار اولیه $\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = -2 \end{cases}$ و $\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$ باشند.

الف) مقدار رانسکین y_1 و y_2 را در نقطه $t = 0$ به دست آورید.

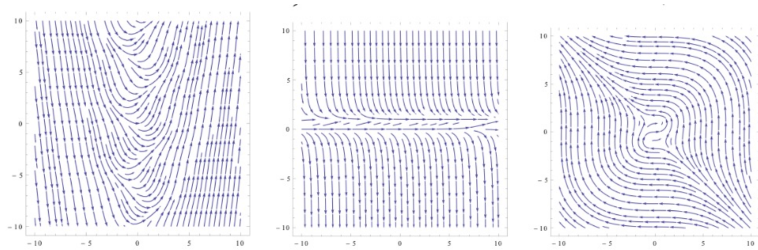
ب) مقدار رانسکین y_1 و y_2 را در نقطه دل‌خواه t به دست آورید.

سوال ۴: الف) کدام یک از اشکال زیر میدان جهت برای معادله دیفرانسیل $y' = \sin y + t$ است؟

ب) از روی میدان جهت، رفتار جواب مساله مقدار اولیه $y(0) = -5$ را توصیف کنید. (رفتار تابع در $\pm\infty$)

سوال ۵: معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 2y^2}{2xy}, y(1) = 1.$$



(اول) (دوم) (سوم)

سوال ۶: فرض کنید $\{y_1, y_2\}$ مجموعه اساسی از جواب‌ها برای یک معادله هم‌گن خطی مرتبه دوم باشند. شرط لازم و کافی برای این که $\{ay_1 + by_2, cy_1 + dy_2\}$ مجموعه اساسی جواب برای همان معادله باشد را بیابید و ادعای خود را ثابت کنید.

شریف، بهار۹۵، میان‌ترم

سوال ۱: جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را پیدا کنید.

$$y' = \frac{2x - y}{x + 2y},$$

سوال ۲: الف) جواب عمومی معادله دیفرانسیل هم‌گن زیر را به دست آورید.

$$y'''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 0,$$

ب) یک جواب خصوصی و جواب عمومی معادله ناهم‌گن زیر را به دست آورید.

$$y'''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 5e^{-2t}.$$

سوال ۳: فرض کنید دو تابع $y_1(t) = t^2$ و $y_2(t) = t^{-1}$ دو جواب مستقل خطی معادله مرتبه دوم

$$y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) = 0,$$

باشد. یک جواب خصوصی معادله $y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) = t^5$ را به دست آورید.

سوال ۴: دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$X'(t) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} X(t).$$

سوال ۵: دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر را با شرط اولیه داده شده حل کنید.

$$X'(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \end{bmatrix} X(t), X(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

سوال ۶: مساله با شرط اولیه زیر را برای $t \geq 0$ در نظر بگیرید.

$$y' = y^{\alpha}, y(0) = [\alpha],$$

که در آن $[\alpha]$ جز صحیح α است. این مساله را از نظر وجود و یکتایی و دامنه اعتبار جواب برای مقادیر $0 < \alpha < 2$ بررسی کرده و استدلال خود را به طور دقیقی بیان کنید.

سوال ۷: معادله دیفرانسیل $y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) = 0$ را در نظر بگیرید و فرض کنید p و q توابعی با دامنه اعداد حقیقی و پیوسته هستند. بررسی کنید که آیا دسته جواب‌های y_1 و y_2 زیر می‌توانند جواب‌های مستقل خطی این معادله باشند.

الف) $y_1(t) = e^t$ و $y_2(t) = \sin t$.

ب) $y_1(t) = t$ و $y_2(t) = t^2$ برای $t > 0$.

شریف، پاییز۹۵، میان‌ترم

سوال ۱: معادله زیر را در نظر بگیرید.

$$(ax+by)dx+(cx+dy)dy=0,$$

شرط لازم و کافی برای ضرایب بیابید که معادله بالا کامل باشد. سپس با شرط به دست آمده آن را حل کنید.

سوال ۲: معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید.

$$ydx+x(1-3x^2y^2)dy=0,$$

الف) نشان دهید این معادله کامل نیست.

ب) فرض کنید $\mu(x,y)=x^{\alpha}y^{\beta}$ یک عامل انتگرال‌ساز برای معادله بالا باشد. با جای‌گذاری α و β مناسب را پیدا کنید.

ج) با استفاده از عامل انتگرال‌ساز به دست آمده در قسمت قبل، جواب عمومی معادله را به دست آورید.

سوال ۳: الف) معادله دیفرانسیل خطی مرتبه چهارم با ضرایب ثابتی به شکل

$$y^{(4)}+a_3y^{(3)}+a_2y^{(2)}+a_1y'+a_0y=0,$$

بیابید که توابع e^t، te^t، $e^{-t}\cos 2t$ و $te^t\sin 2t$ در آن صدق کند.

ب) با ضرایب به دست آمده در قسمت قبل معادله ناهمگن زیر را به طور کامل حل کنید.

$$y^{(4)}+a_3y^{(3)}+a_2y^{(2)}+a_1y'+a_0y=e^t,$$

سوال ۴: فرض کنید تابع $r(t)$ بر بازه $(0,+\infty)$ مشتق پیوسته دارد و تابع $y_1(t)=t$ جواب معادله دیفرانسیل مرتبه دوم $y''(t)+\frac{1}{t}y'(t)+r(t)y(t)=0$ بر این بازه است.

الف) یک جواب دیگر $y_2(t)$ برای معادله $y''(t)+ty'(t)+r(t)y(t)=0$ به دست آورید که $y_1(t)$ و $y_2(t)$ مستقل خطی باشند. می‌توانید از روش کاهش مرتبه استفاده کنید.

ب) دلیلی برای مستقل خطی بودن $y_1(t)$ و $y_2(t)$ پیش‌نهادی خود در قسمت اول بیاورید.

سوال ۵: معادله دیفرانسیل مرتبه دوم $y''+p(t)y'+q(t)y=g(t)$ را در نظر بگیرید که همه ضرایب آن در بازه $I=[1,+\infty)$ پیوسته هستند. فرض کنید $\phi_1(t)=1$، $\phi_2(t)=t$ و $\phi_3(t)=\ln t$ سه جواب این معادله باشند.

الف) دو جواب مستقل خطی برای معادله $y''+p(t)y'+q(t)y=0$ پیدا کنید. با استفاده از رانسکین این دو تابع، استقلال خطی آن دو را در بازه I نشان دهید.

ب) جواب عمومی معادله ناهم‌گن بالا را به دست آورید.

ج) یک جواب خصوصی $\phi_4(t)$ برای معادله ناهم‌گن معرفی کنید که $\lim_{t\to+\infty}\phi_4(t)=-\infty$.

سوال ۶: معادله زیر را در نظر بگیرید.

$$y'(t)=(y(t))^{\frac{4}{5}},\ y(0)=-1,$$

همه جواب‌های آن را برای $t\geq 0$ به دست آورید.

امیرکبیر، بهار۹۲، میان‌ترم

سوال ۱: معادله زیر را حل کنید و جواب غیرعادی (ویژه) آن را بیابید.

$$2xy' + y'^{3}y^{2} - y = 0.$$

سوال ۲: با یک عامل انتگرال‌ساز مناسب معادله زیر را حل کنید

$$(2xy\ln y)dx + (x^{2} + y^{2}\sqrt{y^{2}+1})dy = 0.$$

سوال ۳: جواب عمومی معادله همگن نظیر معادله دیفرانسیل زیر را به دست آورده، همچنین **فقط** فرم جواب خصوصی آن را بنویسید.

$$y^{(4)} + 2y'' + y = x(\cos x + \cosh x).$$

سوال ۴: اگر $y_1(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ یکی از جواب‌های معادله همگن نظیر معادله زیر باشد، با استفاده از تغییر پارامتر آن را حل کنید.

$$x^{4}y'' + 2x^{3}y' - y = 16e^{\frac{3}{x}}.$$

سوال ۵: مقادیر ویژه و توابع ویژه مساله مقدار مرزی زیر را به دست آورید.

$$y'' + \lambda y = 0, y'(0) = 0, y'(\pi) = 0.$$

راهنمایی: به ازای مقادیری از λ که معادله جواب غیربدیهی (غیر صفر) دارد.

امیرکبیر، پاییز۹۲، میان‌ترم

سوال ۱: الف) معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید:

$$y' = \frac{x}{x^{2}y + y^{2}}.$$

ب) اگر به ازای $y = 0$ داشته باشیم $x = 0$، آن‌گاه برای تابع جواب مقدار $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{x^{2}}{y^{2}}$ را محاسبه کنید.

سوال ۲: مقدار k را طوری بیابید که $y = e^{kx}$ یک جواب معادله زیر باشد.

$$xy'' + (1 + x)y' + y = 0, x > 0$$

سپس جواب معادله را با شرط اولیه $y(1) = -1$ و $y'(1) = 1$ بیابید.

سوال ۳: اگر $w(\frac{1}{x}, y) = 3$، y را بیابید.

سوال ۴: معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید:

$$x^{3}y''' - 3x^{2}y'' + 6xy' - y = x^{3}.$$

سوال ۵: با تغییر متغیر $z = \sin x$ معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید:

$$\frac{d^{2}y}{dx^{2}}\cos x + \frac{dy}{dx}\sin x - 2y\cos^{3}x = 2\cos^{3}x.$$

امیرکبیر، بهار۹۳، میان‌ترم

سوال ۱: با استفاده از تغییر متغیر مناسب معادله‌ی دیفرانسیل زیر را به یک معادله خطی مرتبه اول تبدیل کنید، سپس حل کنید.

$$(2x\cos^2 y)dx + (2y - x^2 \sin 2y)dy = 0.$$

سوال ۲: معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید:

$$xy(\frac{dy}{dx})^2 - (2x^2 + y^2)\frac{dy}{dx} + 2xy = 0.$$

سوال ۳: جواب خصوصی معادله دیفرانسیل $yy'' - y'^2 = y^4$ را با شرایط اولیه $y(0) = 1$ و $y'(0) = 0$ به دست آورید.

سوال ۴: n را چنان تعیین کنید که تغییر متغیر $y = x^n z$ معادله دیفرانسیل زیر را به یک معادله خطی با ضرایب ثابت تبدیل کند.

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 2x(x+2)\frac{dy}{dx} + 2(x+1)^2 y = e^{-x}\cos x.$$

سپس جواب عمومی معادله داده شده را بیابید و $\lim_{x\to\infty} y(x)$ را به دست آورید.

سوال ۵: جواب معادله دیفرانسیل زیر که با شرایط اولیه داده شده است را بیابید.

$$y''' - 2y'' + y' - 2y = 12\sin 2x - 4x, y(0) = 2, y'(0) = 5, y''(0) = -4.$$

امیرکبیر، پاییز۹۳، میان‌ترم

سوال ۱: اگر جواب معادله دیفرانسیل $x^۲y^۲y' + xy^۳ = ۲$ به صورت $y = \frac{۱}{x}\sqrt[۳]{f(x)}$ باشد، $f(x)$ را بیابید.

سوال ۲: α و β را طوری بیابید که $x^\alpha y^\beta$ فاکتور انتگرال معادله زیر باشد، سپس آن را حل کنید.

$$x^۲y^۳ + x(۱ + y^۲)y' = ۰.$$

سوال ۳: معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید و نشان دهید که جواب خصوصی معادله غیرهمگن به صورت $\frac{۱}{\lambda}\int_۰^x f(s)\sinh\lambda(x-s)ds$ است.

$$y'' - \lambda^۲y = f(x).$$

سوال ۴: معادله زیر را حل کنید:

$$y^{(۴)} - y = ۳te^t + ۴\cos t + ۸\sin t.$$

سوال ۵: جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را بیابید.

$$۲y^۲y'' + ۲yy'^۲ = ۱.$$

امیرکبیر، بهار ۹۴، میان‌ترم

سوال ۱: معادله $y' = \dfrac{x + yy'}{x^{۲}y}$ را حل کنید.

سوال ۲: فاکتور (عامل) انتگرال‌ساز معادله زیر را یافته و سپس آن را حل کنید.

$$x(۱ - y)dx + (y + x^{۲})dy = ۰, \mu(x, y) = \mu(x^{۲} + y^{۲}).$$

سوال ۳: جواب خصوصی معادله $\dfrac{d^{۲}y}{dx^{۲}} = e^{۲y}$ را چنان تعیین کنید که جواب معادله در مبدا مختصات بر محور xها مماس باشد.

سوال ۴: معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید:

$$y'' - ۲y' + y = x\cos x + e^{x}\ln x.$$

سوال ۵: فرض کنید $y_{۱}(x)$ و $y_{۲}(x)$ دو جواب متفاوت خاص معادله زیر باشند.

$$y'' + y' - ۲y = \sin(e^{\cos x} + \cosh(x^{۳} - x + \sqrt{۲})),$$

$$y_{۱}(۰) = ۴ + y_{۲}(۰), y'_{۱}(۰) = ۱ + y'_{۲}(۰),$$

اگر $y_{۱}(x) = y_{۲}(x) + f(x)$، $f(x)$ را بیابید.

امیرکبیر، پاییز۹۴، میان‌ترم

سوال ۱: با استفاده از تغییر متغیر $y = z^{\alpha}$ معادله زیر را حل کنید:

$$(x - 2y^3)dx + 3y^2(2x - y^3)dy = 0.$$

سوال ۲: معادله زیر را به یک معادله خطی تبدیل نموده و سپس آن را حل کنید.

$$(1 + y^2)dx - (\sqrt{1 + y^2}\cos y - xy)dy = 0.$$

سوال ۳: مسیرهای قائم دسته منحنی‌های زیر را بیابید.

$$r^{-1} = \sin^2\theta + c.$$

سوال ۴: معادله مرتبه دوم زیر را حل کنید:

$$y''\cos y + y'^2\sin y - y' = 0, y(-1) = \frac{\pi}{6}, y'(-1) = 2.$$

سوال ۵: جواب عمومی معادله ناهمگن زیر را به دست آورید.

$$2x^2y'' + 3xy' - y = \frac{1}{x}.$$

امیرکبیر، بهار۹۵ ، میان‌ترم

سوال ۱: الف) نشان دهید اگر معادله $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ همگن و کامل بوده و درجه همگنی آن برابر با ۱− نباشد، جواب عمومی آن $xM + yN = c$ خواهد بود.
ب) معادله زیر را حل کنید:

$$x(x^2 + 3y^2)dx + y(y^2 + 3x^2)dy = 0.$$

راهنمایی: اگر تابع $f(x,y)$ همگن از درجه n باشد، $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = nf$.

سوال ۲: پوشِ مسیرهای قائم (متعامد) جواب معادله زیر را بیابید.

$$yy'^2 + xy' = 1.$$

سوال ۳: معادله زیر را حل کنید.

$$y'' + 4y = g(x), y(0) = 1, y'(0) = 2,$$

که در آن

$$g(x) = \begin{cases} \sin x & : 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2} \\ 0 & : x > \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

سوال ۴: از میان دسته جواب‌های زیر، با ذکر دلیل بررسی کنید کدام یک می‌توانند جواب معادله با ضرایب ثابت $y''' + ay'' + by' + cy = 0$ باشند. برای جواب‌های ممکن مقادیر

a، b و c را بیابید.

$$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x+c_4}$$

$$y = c_1 \sin x + c_2 e^{x} \cos x + c_3 \tan x$$

$$y = c_1 \sin 2x + c_2 \cos x + c_3 \sin x \cos x$$

سوال ۵: جواب عمومی معادله زیر را بیابید.

$$x^3 y''' - 3x^2 y'' + 6xy' - 6y = \ln(x^3) + 3.$$

امیرکبیر، پاییز۹۵، میان‌ترم

سوال ۱: الف) با استفاده از تغییر متغیر مناسب معادله زیر را حل کنید.

$$(x^3 \tan^2 y - 1) \tan y dx - x \sec^2 y dy = 0.$$

ب) حد جواب معادله دیفرانسیل فوق را وقتی $x \to 0$ بیابید.

سوال ۲: جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را به دست آورید.

$$x^2 y' = 3(x^2 + y^2) \tan^{-1} \frac{y}{x} + xy.$$

سوال ۳: ابتدا جواب عمومی معادله همگن نظیر معادله دیفرانسیل زیر را بیابید و سپس فقط فرم جواب خصوصی آن را بنویسید.

$$D^{2}(D^{2}+1)^{3}(D^{2}+D-2)y = x + x^{2}\sin x + x^{2}\sin x + x^{2}e^{-2x}\cos x + x\cos x + x^{3}e^{-2x} + 10.$$

سوال ۴: جواب معادله دیفرانسیل زیر را بیابید.

$$y'' + 4y = \begin{cases} \sin x & : 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0 & : x > \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \quad y(0) = 1, y'(0) = 2.$$

سوال ۵: معادله دیفرانسیل زیر مفروض است:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0.$$

الف) با استفاده از تغییر متغیر $z = z(x)$ نشان دهید که می‌توان معادله فوق را به معادله‌ای با ضریب ثابت تبدیل کرد، به شرط این که $\dfrac{Q' + 2PQ}{Q^{\frac{3}{2}}}$ مقداری ثابت باشد و در این صورت داریم $z = \int \sqrt{Q}dx$.

ب) با استفاده از (الف) معادله دیفرانسیل زیر را به معادله‌ای با ضرایب ثابت تبدیل کنید و سپس معادله به دست آمده را حل نمایید.

$$xy'' - y' + 4x^{3}y = 0.$$

امیرکبیر، بهار ۹۶، میان‌ترم

سوال ۱: نشان دهید $y_1 = -\frac{1}{x}$ یک جواب معادله زیر است، سپس آن را حل کنید.

$$1 + xy + x^3y^2 - x^3y' = 0$$

سوال ۲: جواب عمومی معادله زیر را به دست آورید.

$$x^2y'^2 - 2xyy' - e^{-2y'} = 0.$$

سوال ۳: معادله زیر را حل کنید.

$$y'' + y = \sec x.$$

سوال ۴: با استفاده از تغییر متغیر $u = y^2$، معادله زیر را به معادله کوشی اویلر تبدیل کرده و سپس آن را حل کنید.

$$(xy' - y)^2 + x^2yy'' = \frac{1}{2}x^2.$$

سوال ۵: دستگاه زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} y_1'' + 2y_1 + 4y_2 = e^x \\ y_2'' - y_1 - 3y_2 = -x \end{cases}$$

تهران، بهار۹۳، میان‌ترم

سوال ۱: اگر $y_1(x) = x$ یک جواب معادله دیفرانسیل زیر باشد، جواب عمومی این معادله را به دست آورید.

$$\begin{aligned} & x^3 \sin x y''' - (3x^2 \sin x + x^3 \cos x) y'' \\ & + (6x \sin x + 2x^2 \cos x) y' - (6 \sin x + 2x \cos x) y = 0. \end{aligned}$$

سوال ۲: جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را به دست آورید.

$$x^2 y'' - 6xy' + 12y = \frac{6x^5}{x^2+1}.$$

سوال ۳: مسیرهای قائم بر دسته منحنی‌های $y^2 = cx^3 + x^2 - 1$ را به دست آورید.

سوال ۴: معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$y' e^y = \frac{x - 3e^y + 3}{2x - 6e^y + 1}.$$

تهران، پاییز۹۴، میان‌ترم

سوال ۱: پاسخ عمومی معادله دیفرانسیل زیر را به دست آورید. محاسبه ضرایب لازم نیست.

$$y^{(4)} + 2y''' + 2y'' = 3e^{x} + 2xe^{-x} + e^{-x}\sin x.$$

سوال ۲: پاسخ عمومی معادله دیفرانسیل زیر را به دست آورید.

$$x^{2}y'' - 2xy' + 2y = x\ln x.$$

سوال ۳: مسیرهای قائم بر خانواده بیضی‌های زیر را به دست آورید.

$$y^{2} + 3x^{2} = 2ax.$$

سوال ۴: با دانستن جواب $y_1 = \sin x$ برای معادله زیر، جواب عمومی آن را پیدا کنید.

$$y' = x(y - \sin x)^{2} + y\cot x, \quad 0 < x < \pi.$$

سوال ۵: جواب معادله دیفرانسیل زیر را به روش سری‌ها حول نقطه $x = 0$ بیابید.

$$y'' - xy' - 3y = 0.$$

تهران، بهار۹۵، میان‌ترم

سوال ۱: با دانستن جواب $y_1 = \sec x$ برای معادله زیر، جواب عمومی آن را پیدا کنید.

$$y' = 2 \tan x \sec x - y^2 \sin x.$$

سوال ۲: مسیرهای قائم بر دسته منحنی‌های $y^2 = cx^3 + x^2 - 1$ را به دست آورید.

سوال ۳: پاسخ عمومی معادله دیفرانسیل ناهمگن زیر را به دست آورید.

$$x^2 y'' + xy' - y = \frac{1}{x+1}, x > 0$$

سوال ۴: پاسخ عمومی معادله دیفرانسیل ناهمگن زیر را به دست آورید. محاسبه ضرایب لازم نیست.

$$y^{(4)} + y = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x} \sin x + e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x} \cos \frac{\sqrt{2}}{2}x.$$

تهران، پاییز۹۵، میان‌ترم

سوال ۱: جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را به دست آورید.

$$y' + (x+1)y = e^{x^2} y^3.$$

سوال ۲: جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را به دست آورید.

$$x^2 y'' + 6xy' + 6y = \frac{1}{x^3} - \frac{2\ln x}{x^2}.$$

سوال ۳: پاسخ عمومی معادله دیفرانسیل زیر را به دست آورید. محاسبه ضرایب لازم نیست.

$$y^{(4)} - 2y''' + y'' = (x^2+1)e^{-x} + 2x.$$

سوال ۴: اگر $y_1 = e^x$ یک جواب معادله دیفرانسیل زیر باشد، با روش کاهش مرتبه جواب مستقل خطی دوم آن را بیابید.

$$xy'' - (1+x)y' + y = 0.$$

تهران، بهار۹۶، میان‌ترم

سوال ۱: معادله زیر دارای عامل انتگرال‌سازی بر حسب $x + y$ می‌باشد، ابتدا آن عامل انتگرال‌ساز را به دست آورده سپس معادله را حل کنید.

$$(x + y + 1)dx + (1 - x - y)dy = 0.$$

سوال ۲: جواب عمومی معادله دیفرانسیل ناهمگن زیر را به دست آورید.

$$6x^2y^2y' = 3x(2y^3 + 1) + (2y^3 + 1)^4.$$

سوال ۳: جواب عمومی معادله دیفرانسیل ناهمگن زیر را به دست آورید.

$$y'' + 2y' + 2y = x^2 + e^x \cos x.$$

سوال ۴: جواب عمومی معادله دیفرانسیل ناهمگن زیر را به دست آورید.

$$x^2y'' + xy' + y = \tan \ln x.$$

امیرکبیر، پاییز ۹۱، پایان‌ترم

سوال ۱: فقط به یکی از دو سوال زیر پاسخ دهید.

الف) چهار جمله اول جواب معادله $y'' + e^x y = 0$ را حول نقطه $x_0 = 0$ بنویسید.

ب) چهار جمله اول سری لژاندر $y = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n P_n(x)$ را برای تابع $f(x) = e^x$ در بازه $(-1, 1)$ بیابید.

سوال ۲: معادله $x^2 y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{4})y = 0$ مفروض است، فقط یک جواب معادله را حول $x_0 = 0$ به صورت سری توانی به دست آورید. هم‌چنین فقط صورت کلی جواب عمومی آن را بنویسید.

سوال ۳: با استفاده از تبدیل لاپلاس معادله زیر به همراه شرط اولیه داده شده را حل کنید.

$$\frac{d^2y}{dt^2} + t\frac{dy}{dt} - y = 0, y() = y'(0) = 0.$$

سوال ۴: الف) تبدیل لاپلاس تابع $f(t) = (t - \pi)\sin(3t)e^{3t}u_\pi(t)$ را بیابید.

ب)تابع $g \neq 0$ را طوری بیابید که برای تمام f داشته باشیم.

$$\mathcal{L}(\frac{d}{dt}(f * g)) = \mathcal{L}(f).$$

سوال ۵: دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} y' + 2y + 6\int_0^t x(u)du = -2u_0(t) \\ y' + x' + x = 0 \end{cases}, x(0) = 6, y(0) = -5.$$

امیرکبیر، بهار۹۲، پایان‌ترم

سوال ۱: الف) نقاط غیرعادی منظم (تکین منظم) معادله دیفرانسیل زیر را مشخص کنید:

$$2x(1+x)y'' + (3+x)y' - xy = 0.$$

ب) ریشه‌های معادله شاخصی را به ازای آن نقاط بیابید.

ج) یک جواب معادله را حول $x=0$ به دست آورید.

د) فقط فرم جواب اول و دوم را به ازای نقطه غیر عادی منظم دیگر بنویسید.

سوال ۲: با استفاده از تغییر متغیر $t^2 = e^x$ معادله دیفرانسیل $y'' + (e^x - \frac{1}{4})y = 0$ را حل کنید.

سوال ۳: لاپلاس و لاپلاس وارون‌های زیر را حساب کنید.

الف) $\mathcal{L}(\int_0^t (t-x)^4 (xe^{2x}\sinh x)dx)$

ب) $\mathcal{L}^{-1}(\ln\frac{s^2+1}{s^2+4} + \frac{1}{\sqrt{4s-1}})$

سوال ۴: با استفاده از تبدیل لاپلاس معادله زیر را حل کنید.

$$t\frac{d^2y}{dt^2} - (2+t)\frac{dy}{dt} + 3y = t-1, y(0) = 0.$$

سوال ۵: $x(t)$ را از دستگاه زیر بیابید.

$$\begin{cases} x' &= y \\ y' + x &= u_{\frac{\pi}{2}}(t)\delta(t-\frac{\pi}{2}) + \int_0^t u_{\frac{\pi}{2}}(t-\tau)\cos\tau d\tau \\ y(0) &= x(0) \end{cases}$$

امیرکبیر، پاییز۹۲، پایان‌ترم

سوال ۱: معادله زیر را در همسایگی نقطه صفر حل کنید و سپس شعاع همگرایی هر یک از جواب‌ها را بیابید.

$$y'' - 2xy' + 2py = 0 , p \in \mathbb{R}.$$

سوال ۲: با استفاده از تغییر متغیر $u = x^{-\frac{3}{2}}y$ جواب معادله دیفرانسیل زیر را بیابید:

$$36x^2y'' - 12xy' + (36x^2 + 7)y = 0.$$

سوال ۳: الف) نشان دهید: $\mathcal{L}(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{t}} e^{-u^2}du) = \frac{1}{s\sqrt{s+1}}$

ب) مطلوب است محاسبه $\mathcal{L}^{-1}(\ln \frac{s^2+1}{s^2+2s})$.

سوال ۴: معادله زیر را با استفاده از تبدیل لاپلاس حل کنید.

$$t\frac{d^2y}{dt^2} + (3t-1)\frac{dy}{dt} - (4t+9)y = 0 , y(0) = 0.$$

سوال ۵: دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر حل کنید.

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}.$$

امیرکبیر، بهار۹۳، پایان‌ترم

سوال ۱: الف) نشان دهید $x = 0$ یک نقطه منفرد منظم معادله

$$x^{2}y'' + (x^{2} - 2x)y' + 2y = 0,$$

است.

ب) با استفاده از سری توانی نشان دهید $y_1 = x^2e^{-x}$ یک جواب معادله فوق است.

ج) فقط صورت جواب دوم را بنویسید.

سوال ۲: الف) تابع $f(x) = x^4 - 3x$ را برحسب چندجمله‌ای‌های لژاندر ($P_n(x)$ها) بسط دهید.

ب) مقدار انتگرال $\int_{-1}^{1}(x^4 - 3x)P_n(x)dx$ را به ازای مقادیر مختلف n به دست آورید.

سوال ۳: ثابت کنید $\frac{d}{dx}(x^{-\alpha}J_\alpha(x)) = -x^{-\alpha}J_{\alpha+1}(x)$، سپس $\int J_5(x)dx$ را محاسبه کنید.

سوال ۴: می‌دانیم $J_\alpha(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+\alpha+1)}(\frac{t}{2})^{2n+\alpha}$ تابع بسل نوع اول از مرتبه α است.

الف) نشان دهید $\mathcal{L}(J_0(2\sqrt{at})) = \frac{1}{s}e^{-\frac{a}{s}}$.

ب) معادله زیر را به کمک تبدیل لاپلاس حل کنید.

$$ty(t) - \int_0^t y(r)dr. + a\int_0^t(\int_0^r y(u)du)dr = 0.$$

سوال ۵: فقط جواب خصوصی غیرهمگن (پاسخ به توابع بار) دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر را بیابید.

$$\begin{cases} x'(t) = 2x - 3y + 1 \\ y'(t) = -2x + y - 3z \\ z'(t) = -2y + e^{2t} \end{cases}$$

راهنمایی: شرایط اولیه باید صفر باشند.

امیرکبیر، پاییز۹۳، پایان‌ترم

سوال ۱: الف) نشان دهید $x^2y'' + 3xy' + (1 + x)y = 0$ دارای یک نقطه غیرعادی (منفرد) منظم در $x = 0$ است.

ب) ریشه‌های معادله شاخصی آن را تعیین کنید و یک جواب آن را به دست آورید.

ج) فقط صورت جواب دوم و هم‌چنین جواب عمومی آن را بنویسید.

سوال ۲: اگر $J_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n + \alpha + 1)}(\frac{x}{2})^{2n+\alpha}$ جواب معادله بسل از مرتبه α باشد که $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha!$، الف) نشان دهید $J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x$.

ب) با استفاده از $J'_\alpha(x) = \frac{\alpha}{x}J_\alpha - J_{\alpha+1}(x)$ نشان دهید:

$$J_{\frac{3}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}(\frac{\sin x}{x} - \cos x).$$

سوال ۳: الف) تبدیل معکوس لاپلاس $F(s) = \frac{1}{(s^2 - s - 6)^2}$ را بیابید.

ب) مطلوب است تبدیل لاپلاس $f(t) = t^2e^{-t}\int_0^t \frac{1 - \cos 2\tau}{\tau}d\tau$.

سوال ۴: معادله دیفرانسیل انتگرالی زیر را با شرایط اولیه $y(0) = 1$ و $y'(0) = 2$ حل کنید.

$$y'' - y' + y = e^t(1 - \int_0^t \frac{y(\tau)}{e^\tau} d\tau),$$

سوال ۵: فقط $x(t)$ را از حل دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر بیابید.

$$\begin{cases} x'' + y' + 3x = 15e^{-t}, x(0) = 35, y(0) = 27 \\ y'' - 4x' + 3y = 15\sin 2t, x'(0) = -48, y'(0) = -55 \end{cases}$$

امیرکبیر، بهار۹۴، پایان‌ترم

سوال ۱: می‌دانیم $J_p(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+p+1)}(\frac{z}{2})^{2n+p}$ نمایانگر تابع بسل مرتبه p می‌باشد.

الف) نشان دهید $J_0'(x) = -J_1(x)$.

ب) اگر $J_0(x)$ و $J_1(x)$ به ترتیب نمایانگر جواب‌های معادله دیفرانسیل بسل مرتبه صفر و یک باشند، نشان دهید $y = xJ_1(x)$ جواب[۲] معادله زیر است.

$$xy'' - y' - x^2 J_0'(x) = 0.$$

سوال ۲: الف) نقاط منفرد (تکین) معادله دیفرانسیل زیر را مشخص کنید و نوع هریک را بیان نمایید.

$$(x^2 - x)y'' - xy' + y = 0.$$

[۲] طراح محترم به جای "جواب" باید می‌نوشت "جوابی برای معادله".

ب) جواب عمومی معادله فوق را به صورت سری فروبنیوس حول $x = ۰$ بیابید.

سوال ۳: دستگاه زیر را حل کنید

$$\begin{cases} y'_۱(t) &= ۲y_۱(t) - ۵y_۲(t) + \cos t \\ y'_۲(t) &= y_۱(t) - ۲y_۲(t) + \sin t \end{cases} \quad y_۱(۰) = ۱, y_۲(۰) = -\frac{۱}{۲}.$$

سوال ۴: الف) مطلوب است محاسبه $\mathcal{L}^{-۱}(e^{-s}\tan^{-۱} s)$.

ب) معادله انتگرال زیر را حل کنید.

$$\int_۰^t \sinh(t-\tau)y(\tau)d\tau = y''(t) - y(t) + \frac{۱}{۲}t\sinh t, y(۰) = ۱, y'(۰) = ۰..$$

سوال ۵: الف) تبدیل لاپلاس تابع زیر را بیابید.

$$f(t) = \int_۰^۱ \frac{\sin(tx)}{x}dx.$$

ب) تابع زیر را برحسب تابع پله‌ای واحد بیان کرده و سپس تبدیل لاپلاس آن را بیابید.

$$g(t) = \begin{cases} \cos ۲t & : ۰ \le t < ۱ \\ \cos ۲t - t + ۱ & : ۱ \le t < ۲ \\ \cos ۲t - t + ۱ + \sinh(t-۲) & : ۲ \le t \end{cases}$$

امیرکبیر، پاییز۹۴، پایان‌ترم

سوال ۱: الف) سه جمله اول بسط تابع زیر را بر حسب چندجمله‌ای‌های لژاندر بنویسید.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & : -1 \leq x < 0 \\ x & : -1 \leq x < 0 \end{cases}$$

ب) می‌دانیم:

$$\frac{d}{dx}(x^{\alpha} J_{\alpha}(x)) = x^{\alpha} J_{\alpha-1}(x)$$
$$\frac{d}{dx}(x^{-\alpha} J_{\alpha}(x)) = -x^{-\alpha} J_{\alpha+1}(x)$$

به کمک روابط فوق نشان دهید:

$$\frac{d}{dx} J_{\alpha}(x) = \frac{1}{2}(J_{\alpha-1}(x) - J_{\alpha+1}(x))$$
$$\frac{2\alpha}{x} J_{\alpha}(x) = J_{\alpha-1}(x) + J_{\alpha+1}(x)$$
$$\frac{d}{dx}(x J_{\alpha}(x) J_{\alpha+1}(x)) = x(J_{\alpha}^{2}(x) - J_{\alpha+1}^{2}(x)).$$

سوال ۲: نقاط عادی و غیرعادی معادله زیر را بیابید و یک جواب آن را حول مبدا به دست آورید و سپس **تنها** فرم جواب دوم و عمومی آن را بنویسید.

$$x^2 y'' + (x^2 - x)y' + y = 0.$$

سوال ۳: با استفاده از تبدیل لاپلاس معادله زیر را حل کنید.

$$y'' + 4y' + 13y = \frac{1}{3}e^{-2t}\sin 3t, y(0) = 1, y'(0) = -2.$$

سوال ۴: معادله انتگرال زیر را حل کنید.

$$\int_0^t \frac{y(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}d\tau = 1 + t + t^2.$$

سوال ۵: دستگاه زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} x''(t) + 2x'(t) + \int_0^t y(u)du & = 0 \\ 4x''(t) - x'(t) + y(t) & = e^{-t} \end{cases} \quad x(0) = 0, x'(0) = 1.$$

امیرکبیر، بهار۹۵، پایان‌ترم

سوال ۱: الف) نشان دهید $x = 0$ یک نقطه منفرد منظم معادله دیفرانسیل $xy'' - (x+2)y' + 2y = 0$ است.

ب) یک جواب معادله فوق را به کمک سری توانی حول $x = 0$ بیابید و سپس **فقط** فرم جواب دوم و جواب عمومی آن را بنویسید.

سوال ۲: اگر $J_\alpha(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+\alpha+1)}(\frac{t}{2})^{2n+\alpha}$،

الف) ثابت کنید $\frac{d}{dt}J_0(t) = -J_1(t)$.

ب) دستگاه زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} ty + x + tx' & = (t-1)e^{-t} \\ y' - x & = e^{-t} \end{cases}$$

سوال ۳: با استفاده از رابطه بازگشتی $(n+1)p_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - np_{n-1}(x)$، $P_2(x)$ و $P_3(x)$ را بیابید و سپس تمام ضرایب در بسط لژاندر تابع زیر را به دست آورید.

$$f(x) = 10x^3 + 3x^2 - 7x + 1.$$

سوال ۴: الف) مطلوب است محاسبه انتگرال $\int_0^\infty \int_0^t e^{-3t}x^2 \sin(t-x)dxdt$.

ب) مطلوب است محاسبه $\mathcal{L}^{-1}(\ln \frac{s+\sqrt{s^2+1}}{2s} + \frac{1}{\sqrt{2s+3}})$.

سوال ۵: الف) با استفاده از تبدیل لاپلاس معادله زیر را حل کنید:

$$ty'' + (1-2t)y' - 2y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 2.$$

ب) با استفاده از قسمت (الف) جواب عمومی معادله بالا را بیابید.

امیرکبیر، پاییز ۹۵، پایان‌ترم

سوال ۱: جواب معادله زیر را حول $x = 1$ به دست آورید.

$$y'' + (x-1)^2 - 4(x-1) = 0,$$

سوال ۲: معادله زیر مفروض است.

$$2x^2(x-1)y'' + x(3x+1)y' - 2y = 0,$$

الف) با تغیر متغیر $z = \frac{1}{x}$ معادله فوق را بر حسب متغیر z بنویسید و نشان دهید $z = 0$ یک نقطه تکین منظم برای معادله جدید است.

ب) به ازای ریشه بزرگ‌تر معادله شاخصی، یک جواب معادله را بر حسب x نوشته و سپس فرم جواب عمومی آن را به دست آورید.

سوال ۳: اگر داشته باشیم $\delta(x-a) = \begin{cases} +\infty & : x = a \\ 0 & : x \neq a \end{cases}$،

الف) نشان دهید:

$$\mathcal{L}(\delta(x-a)) = e^{-as}.$$

ب) معادله زیر را حل کنید.

$$y'' - 5y' + 6 = \delta(t-2), y(0) = y'(0) = 0.$$

سوال ۴: با استفاده از تبدیل لاپلاس معادله زیر را حل کنید.

$$y'' + 2ty' - 4y = 1, y(0) = y'(0) = 0.$$

سوال ۵: دستگاه زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} + 5x + 3y = e^{-t} \\ 2\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} + x + y = 3 \end{cases}$$

امیرکبیر، بهار ۹۶، پایان‌ترم

سوال ۱: جواب معادله دیفرانسیل زیر را به کمک سری‌ها تا چهار جمله غیر صفر بیابید.

$$y'' + (x - ۱)e^y y' = ۰, y(۰) = ۰, y'(۰) = ۱.$$

سوال ۲: با استفاده از تغییر متغیر مناسب نشان دهید معادله $y'' \sin x + y' \cos x + ۱۲y \sin x = ۰$ به معادله دیفرانسیل $f(u)\dfrac{d^۲y}{du^۲} + g(u)\dfrac{dy}{du} + \alpha y = ۰$ که در آن α عدد ثابت است تبدیل می‌شود و سپس معادله به دست آمده را به روش سری‌ها حول $u = ۰$ حل کنید.

سوال ۳: الف) اگر f یک تابع متناوب با دوره تناوب T باشد، نشان دهید:

$$\mathcal{L}(f(t)) = \frac{۱}{۱ - e^{-Ts}} \int_۰^T e^{-st} f(t)dt.$$

ب) شکل تابع متناوب زیر را در بازه $[۰, +\infty)$ رسم کرده و تبدیل لاپلاس آن را بیابید.

$$E(t) = \begin{cases} ۱ & : ۰ \leq t < ۱ \\ ۰ & : ۱ \leq t < ۲ \end{cases}$$

سوال ۴: مطلوب است:

$$\mathcal{L}^{-۱} \frac{s^۳ + ۱}{(s^۲ + ۴)^۲}.$$

سوال ۵: دستگاه زیر را به کمک مقادیر ویژه ماتریس‌ها حل کنید.

$$\begin{cases} \dfrac{dx_۱}{dt} & = -۳x_۱ + x_۲ \\ \dfrac{dx_۲}{dt} & = ۲x_۱ - ۴x_۲ \end{cases}$$

تهران، بهار۹۲، پایان‌ترم

سوال ۱: جواب معادله دیفرانسیل زیر را به روش سری‌ها در نزدیکی $x = ۰$ به دست آورید.

$$x^{۲}y'' - xy' + (x^{۲} + ۱)y = ۰, x > ۰.$$

سوال ۲: تبدیل معکوس لاپلاس تابع زیر را بیابید.

$$F(s) = \ln \frac{s^{۲} - ۱}{s^{۲} - ۴}, s > ۰.$$

سوال ۳: جواب مساله مقدار اولیه زیر را با استفاده از تبدیل لاپلاس به دست آورید.

$$y'' + ۴y' + ۴y = ۲te^{-۲t}, y(۰) = ۱, y'(۰) = -۳.$$

سوال ۴: مساله زیر را به کمک تبدیل لاپلاس حل کنید.

$$y'' + y = \delta(t - ۲\pi)\cos t + u_{۱}(t), y(۰) = ۰, y'(۰) = ۱.$$

سوال ۵: به کمک تبدیل لاپلاس معادله انتگرال زیر را حل کنید.

$$e^{t}f(t) = ۴t^{۲}e^{t} - \int_{۰}^{t} f(x)e^{x}dx.$$

تهران، پاییز۹۲، پایان‌ترم

سوال ۱: دستگاه معادلات زیر را حل نمایید.

$$X' = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -7 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} t^{-1}e^{-3t} \\ (1+t^{-1})e^{-3t} \end{bmatrix}.$$

سوال ۲: پاسخ معادله انتگرالی زیر را برای $f(t)$ به دست آورید.

$$f(t) = e^{-t} + \int_0^t (t-\tau)f(\tau)d\tau, t \geq 0.$$

سوال ۳: تبدیل لاپلاس تابع بسل مرتبه صفر $y(t) = J_0(t)$ را به دست آورید.

راه‌نمایی: $y(t)$ در معادله دیفرانسیل زیر صدق می‌کند:

$$ty''(t) + y'(t) + ty(t) = 0, y(0) = 1, y'(0) = 1.$$

ابتدا با استفاده از تبدیل لاپلاس معادله دیفرانسیل حاکم بر $Y(s)$ را به دست آورید. سپس این معادله دیفرانسیل را با فرض $Y(s)|_{s=0} = 1$ حل نمایید.

سوال ۴: معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$y'' - y = (t-2\pi)u_{2\pi}(t) + \cos t\delta(t-\pi), y(0) = y'(0) = 0.$$

سوال ۵: پاسخ عمومی معادله دیفرانسیل زیر را با استفاده از روش سری‌ها حول نقطه $x = 0$ به دست آورید.

$$x^2y'' + 6xy' + (6+x)y = 0, x > 0.$$

تهران، بهار۹۳، پایان‌ترم

سوال ۱: دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر را حل نمایید.

$$X' = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} \sec t \\ ۰ \end{bmatrix}, X(۰) = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}.$$

سوال ۲: جواب مساله مقدار اولیه زیر را با استفاده از تبدیل لاپلاس به دست آورید.

$$y'' + ۳y' + ۲y = u_۲(t) + \delta(t-\pi)\cos t, y(۰) = ۰, y'(۰) = ۱.$$

سوال ۳: به کمک تبدیل لاپلاس معادله انتگرال زیر را حل کنید.

$$y'(t) - \frac{۱}{۲}\int_۰^t (t-u)^۲ y(u)du = -t\delta(t-\pi), y(۰) = ۱.$$

سوال ۴: جواب معادله دیفرانسیل زیر را به روش سری‌ها حول نقطه $x = ۰$ بیابید.

$$x^۲ y'' - ۳xy' + ۴(x+۱)y = ۰, x > ۰.$$

تهران، پاییز۹۳، پایان‌ترم

سوال ۱: جواب معادله دیفرانسیل زیر را به روش سری‌ها حول نقطه $x = 0$ بیابید.

$$x^2 y'' + 3xy' + (x + 1)y = 0.$$

سوال ۲: پاسخ معادله دیفرانسیل زیر را بیابید.

$$y'' + 4y' + 5y = \delta(t - \frac{\pi}{2}), y(0) = y'(0) = 0.$$

سوال ۳: پاسخ معادله انتگرال-دیفرانسیل زیر را به دست آورید.

$$y''(t) = e^{2t} - \int_0^t e^{2(t-\tau)} y'(\tau) d\tau, y(0) = y'(0) = 0.$$

سوال ۴: دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر را حل نمایید.

$$X' = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} t^{-1} \\ t^{-1} + 4 \end{bmatrix}, t > 0.$$

تهران، پاییز۹۴، پایان‌ترم

سوال ۱: دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر را حل نمایید.

$$X' = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 1 - e^{2t} \\ 2e^{t} \end{bmatrix}.$$

سوال ۲: جواب مساله مقدار اولیه زیر را با استفاده از تبدیل لاپلاس به دست آورید.

$$y'' + y = u_1(t) - u_2(t), y(0) = y'(0) = 0.$$

سوال ۳: با استفاده از تبدیل لاپلاس مساله مقدار اولیه زیر را حل کنید.

$$y'' + 4y = 2\delta(t - 2\pi)\cos t, y(0) = 0, y'(0) = 2.$$

سوال ۴: به کمک تبدیل لاپلاس معادله انتگرال زیر را حل کنید.

$$y(t) + 4\int_0^t \cos(2(t-\tau))y(\tau)d\tau = e^{-2t}.$$

سوال ۵: نشان دهید $x_0 = 0$ یک نقطه غیرعادی منظم معادله زیر است و یک جواب غیر صفر معادله را به صورت سری حول $x_0 = 0$ به دست آورید. همچنین شکل جواب دوم را نوشته و ثابت کنید جواب مستقل خطی دوم شامل جمله لگاریتمی است. (محاسبه ضرایب لازم نیست.)

$$x^2y'' + 4xy' + (2 + x)y = 0.$$

تهران، بهار۹۵، پایان‌ترم

سوال ۱: جواب معادله دیفرانسیل زیر را به روش سری‌ها حول نقطه $x = 0$ بیابید.

$$x(x+1)y'' - y' - 2y = 0, x > 0.$$

سوال ۲: با استفاده از تبدیل لاپلاس مساله مقدار اولیه زیر را حل کنید.

$$y' + 2y = (t - \frac{\pi}{3})u_{\frac{\pi}{3}}(t) + \int_0^t (t-\tau)e^{2\tau}d\tau + \cos t\delta(t - \frac{\pi}{3}), y(0) = 1.$$

سوال ۳: به کمک تبدیل لاپلاس حاصل انتگرال زیر را به دست آورید.

$$\int_0^\infty te^{-2t}\cos^2 t dt.$$

سوال ۴: دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$X' = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 4te^t - 4te^{-t} \\ 2te^{-t} \end{bmatrix}, X(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

تهران، پاییز۹۵، پایان‌ترم

سوال ۱: جواب معادله دیفرانسیل زیر را به روش سری‌ها حول نقطه $x = 0$ بیابید.

$$xy'' + (x+1)y' + y = 0.$$

سوال ۲: معادلات دیفرانسیل زیر را به کمک تبدیل لاپلاس حل کنید.

$$y'' + 3y' + 2y = 6u_2(t) - 6u_4(t), y(0) = y'(0) = 0.$$

سوال ۳: جواب مساله مقدار مرزی زیر را با استفاده از تبدیل لاپلاس به دست آورید.

$$y'' + y = \delta(t-1) + u_\pi(t)\sin t, y(0) = 0, y(\frac{1}{2}) = 1.$$

سوال ۴: دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$X' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} t.$$

تهران، بهار۹۶، پایان‌ترم

سوال ۱: جواب معادله دیفرانسیل زیر را به روش سری‌ها حول نقطه $x = 0$ بیابید.

$$xy'' + 2y' + xy = 0\,, x > 0.$$

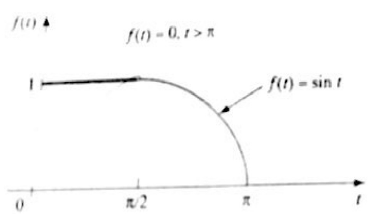
سوال ۲: جواب مساله مقدار مرزی زیر را با استفاده از تبدیل لاپلاس به دست آورید.

$$2y'' + 10y = 3u_{12}(t) - 5\delta(t-4), y(0) = -1, y'(0) = -2.$$

سوال ۳: الف) لاپلاس معکوس زیر را به دست آورید.

$$\mathcal{L}^{-1}(e^{-2s}\ln\frac{s}{s-1}).$$

ب) ابتدا $f(t)$ را برحسب تابع پله‌ای نوشته و سپس تبدیل لاپلاس آن را به دست آورید.



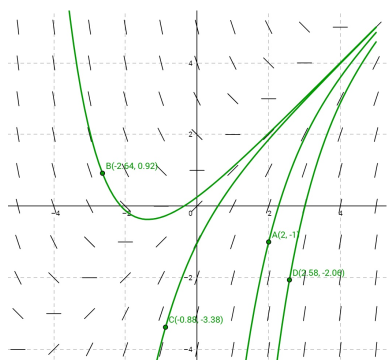
سوال ۴: دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$X' = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} te^{2t} \\ te^{-2t} \end{bmatrix}.$$

ضمیمه ۳: پاسخ نمونه سوالات امتحانی

شریف، بهار۹۲، میان‌ترم

سوال ۱: همان‌طور که از شکل روشن است وقتی $y \to +\infty$، $y(x) \to x$



سوال ۲: عامل انتگرال‌ساز برحسب y، $F(x,y) = y$ معادله را کامل می‌کند و جواب آن $3xy + \cos(xy) + y^2 = c$ است.

سوال ۳: با تغییر متغیر $u = \ln x$ جواب $y = e^{-x^2 + ce^{-\frac{x^2}{2}}}$ برای معادله به دست می‌آید.

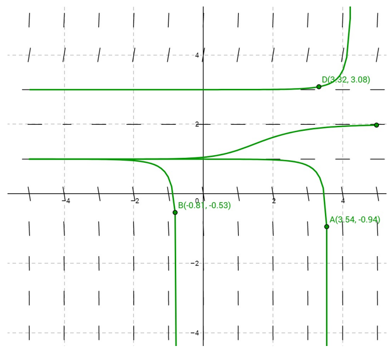
سوال ۴: $y_1 = (x+1)^2 - 2x = x^2 + 1$ و $y_2 = x^3 + 3x - 2x = x^3 + x$ پایه‌های جواب همگن هستند و جواب عمومی معادله به صورت زیر است.

$$y = c_1(x^2+1) + c_2(x^3+x) + \frac{1}{2}\ln(x^2+1)(x^2+1) + \tan^{-1}(x^3+x).$$

سوال ۵: جواب معادله $y = \frac{۶}{۱۷}(+۳)e^{\frac{۴}{۳}x} + \frac{۲}{۱۷}(۸ - ۳\lambda)e^{-\frac{۳}{۲}x}$ است و $\lambda = -۳$ شرط مطلوب را ارضا می‌کند.

شریف، بهار۹۳، میان‌ترم

سوال ۱: $y = ۱$، $y = ۲$ و $y = ۳$ به ترتیب جواب‌های تعادلی ناپایدار، پایدار و ناپایدار هستند.



سوال ۲: $y = c_۱ \cos x + c_۲ \sin x - \frac{x^۲}{۱۶}\cos x + \frac{x}{۱۶}\sin x$

سوال ۴: $y = \dfrac{(x-۱) - (x+۱)e^{-x} + \frac{۲}{e}}{(x+e^x)^۲}$

سوال ۵: الف) $(y+۱)^۲ = \dfrac{(x+۱)^۴ + c}{۲(x+۱)^۲}$ ب) معادله کامل است و دارای جواب $xy\sin x + x^۲ e^{۲y} - ۲y = c$

سوال ۶: معادله $xf'(x) + f(x) = ۰$ و جواب $f(x) = \frac{۶}{x}$.

شریف، پاییز۹۳، میان‌ترم

سوال ۱: $y = \tan(\tan^{-۱} x + c)$

سوال ۲: $xe^y + y^۲ = c$

سوال ۳: ارتفاع آب در معادله $y' = -\frac{r^۲}{R^۲}\sqrt{۲gy}$ صدق می‌کند و در زمان $t = \frac{R^۲}{r^۲}\sqrt{\frac{۲h}{g}}$ آب تمام می‌شود.

سوال ۴: برای $h(t)=(x(t)-y(t))^{۲}$، $h'(t)=۲(x(t)-y(t))(f(x(t))-g(y(t)))\leq ۰$، لذا h نزولی است. چون $h(t)\geq ۰$ و $h(۰)=۰$ لذا $h=۰$ و $x(t)=y(t)$.

سوال ۵: $\frac{۷}{۴}e^{-\frac{t}{۲}}\cos(\frac{\sqrt{۷}}{۲۸}t)-e^{-\frac{t}{۲}}\sin(\frac{\sqrt{۷}}{۲۸}t)+\frac{۱}{۲}t-\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۲}\sin t-\frac{۱}{۲}\cos t$

سوال ۶: $y_{۲}=t^{۲}t$ و $y_p=\frac{۱}{۶}t^{۲۳}t$

شریف، پاییز۹۴، میان‌ترم

سوال ۱: $y=x+\frac{۱-ce^{۲x}}{۱+ce^{۲x}}$

سوال ۲: عامل انتگرال‌ساز برحسب y، $F(x,y)=y$ معادله را کامل می‌کند و جواب آن $xy^{۲}+e^{y}(-y^{۲}+۲y-۲)=c$ است.

سوال ۳: $W(y_{۱},y_{۲})(t)=-e^{-\sin t}, W(y_{۱},y_{۲})(۰)=-۱$

سوال ۵: $y=\sqrt{\ln x+۱}$

سوال ۶: $W(ay_{۱}+by_{۲},cy_{۱}+dy_{۲})=(ad-bc)W(y_{۱},y_{۲})$

شریف، پاییز۹۵، میان‌ترم

سوال ۱: به شرط $b=c$ معادله کامل است و دارای جواب $\frac{a}{۲}x^{۲}+bxy+\frac{d}{۲}y^{۲}=c$ می‌باشد.

سوال ۲: چون $M_y=۱$ و $N_x=۱-۹x^{۲}y^{۲}$ معادله کامل نیست. اگر $\alpha=\beta=-۳$، با عامل انتگرال‌ساز داده شده معادله کامل می‌شود و جواب $-\frac{۱}{۲x^{۲}y^{۲}}-۳\ln y=c$ به دست می‌آید.

سوال ۳: الف) $y^{(۴)}+۲y''-۸y'+۵y=۰$ ب) $\frac{۱}{۱۶}t^{۲}e^{t}$.

سوال ۴: الف) $y_{۲}(t)=te^{\frac{۱}{t}}$ ب) نشان دهید رانسکین ناصفر است.

سوال ۵: الف) $y_{۱}(t)=t-۱$ و $y_{۲}(t)=\ln t-۱$ ب) $y(t)=c_{۱}(t-۱)+c_{۲}(\ln t-۱)+۱$

سوال ۶: $y=(\frac{t-۵}{۵})^{۵}$

امیرکبیر، بهار۹۲، میان‌ترم

سوال ۲: عامل انتگرال‌ساز برحسب y، $F(x,y)=\frac{1}{y}$ معادله را کامل می‌کند و جواب آن $x^2\ln y+\frac{1}{3}(y^2+1)^{\frac{3}{2}}=c$ است.

سوال ۳: جواب هم‌گن مساله

$$y_h=c_1\cos x+c_2\sin x+c_3x\cos x+c_4x\sin x,$$

و جواب خصوصی مساله

$$y_p=x^2\left((Ax+B)\cos x+(Cx+D)\sin x\right)+(Ex+F)e^x+(Gx+H)e^{-x},$$

می‌باشد.

امیرکبیر، پاییز۹۲، میان‌ترم

سوال ۱: $x^2=e^{y^2}(\int 2y^2e^{-y^2}dy+c)$

سوال ۲: مقدار $k=-1$ و جواب با شرط اولیه داده شده $y=-e^{1-x}$ به دست می‌آید.

سوال ۳: با استفاده از تعریف رانسکین و حل معادله به دست آمده به $y=x^2+\frac{c}{x}$ می‌رسیم.

سوال ۴: معادله کوشی اویلر است و دارای جواب $y=c_1x+\frac{c_2}{x}+c_3x^2+\frac{1}{x}x^3+\frac{1}{2}\ln x+\frac{1}{4}$.

سوال ۵: $y=c_1e^{\sqrt{2}\sin x}+c_2e^{-\sqrt{2}\sin x}-1$

امیرکبیر، بهار۹۳، میان‌ترم

سوال ۱: با تغییر متغیر $u=\cos^2 y$ جواب مساله $x^2\cos^2 y+y^2=c$ به دست می‌آید.

سوال ۲: این مساله در امتحان میان‌ترم پاییز ۹۱ امیرکبیر نیز تکرار شده است و پاسخ آن در مثال ۴۷.۱.۱ صفحه ۳۷ آمده.

سوال ۳: معادله داده شده فاقد x است و جواب آن $y=\sec x$ به دست می‌آید.

سوال ۴: جای‌گذاری $y=x^nz$ در معادله نتیجه می‌دهد در حالت $n=-2$ به معادله با

ضرایب ثابت $z'' + ۲z' + ۲z = e^{-x}\cos x$ می‌رسیم و جواب مساله

$$y = x^{-۲}(e^{-x}(c_۱\cos x + c_۲\sin x) + xe^{-x}\sin x),$$

می‌باشد و $\lim\limits_{y\to+\infty} y(x) = ۰$.

امیرکبیر، پاییز۹۳، میان‌ترم

سوال ۱: $f(x) = y^۳x^۳$ است و جای‌گذاری در مساله نتیجه می‌دهد $f(x) = ۳x^۲ + c$.

سوال ۲: ضرب $F(x,y) = x^\alpha y^\beta$ در معادله و شرط کامل بودن ایجاب می‌کند $\alpha = -۱$ و $\beta = -۳$ و جواب مساله $x^۲ - y^{-۲} + ۲\ln y = c$ به دست می‌آید.

سوال ۳: جواب همگن $y_h = c_۱\cosh x + c_۲\sinh x$ به دست می‌آید و جواب خصوصی به روش تغییر پارمتر لاگرانژ $y_p = \dfrac{۱}{\lambda}\displaystyle\int_۰^x f(s)\sinh\lambda(x-s)ds$ به دست می‌آید.

سوال ۴:

$$y = c_۱e^t + c_۲e^{-t} + c_۳\cos t + c_۴\sin t + (\frac{۳}{۸}t^۲ - \frac{۱۵}{۱۶}t)e^t + ۲t\cos t - t\sin t$$

سوال ۵: معادله فاقد x است و جواب آن

$$x = \pm(\frac{۲}{۳}(y+c_۱)^{\frac{۳}{۲}} - ۲c_۱(y+c_۱)^{\frac{۱}{۲}}) + c_۲.$$

امیرکبیر، بهار ۹۴، میان‌ترم

سوال ۱: با تغییر متغیر $u = y^۲$ جواب $y^۲ = \ln|c(x^۲-۱)|$ به دست می‌آید.

سوال ۲: از صورت سوال روشن است که عامل انتگرال‌ساز تابعی از $x^۲ + y^۲$ است که به صورت $(x^۲+y^۲)^{\frac{۳}{۲}}$ = به دست می‌آید. جواب معادله داده شده $c = \dfrac{y-۱}{\sqrt{x^۲+y^۲}}$ است.

سوال ۳: با تغییر متغیرهای $y' = p$ و $y'' = pp'_y$ جواب نهایی مساله $\sqrt{e^{۲y}-۱} = \tan(x+c)$ به دست می‌آید که $c = k\pi$ و k عددی صحیح است.

سوال ۴: جواب معادله همگن $y_h = c_۱e^x + c_۲xe^x$ و جواب خصوصی به صورت زیر به دست می‌آید.

$$y_p = -\frac{x}{۲}\sin x - \frac{۱}{۲}(\sin x + \cos x) + \frac{x^۲e^x}{۲}\ln x - \frac{۳}{۴}x^۲e^x.$$

امیرکبیر، پاییز۹۴، میان‌ترم

سوال ۱: جای‌گذاری $y = z^\alpha$ و استفاده از شرط هم‌گنی نتیجه می‌دهد $\alpha = ۳$. معادله هم‌گن پس از حل دارای جواب $cx\sqrt{(۱-\frac{\sqrt[۳]{y}}{x})(۱+\frac{\sqrt[۳]{y}}{x})^۳} = ۱$ می‌باشد.

سوال ۲: با مرتب‌سازی معادله داده شده به معادله‌ای خطی مرتبه اول با متغیر وابسته x و متغیر مستقل y می‌رسیم که دارای جواب $x = \frac{\sin y}{\sqrt{۱+y^۲}} + \frac{c}{\sqrt{۱+y^۲}}$ می‌باشد.

سوال ۳: $r + c = \frac{۱}{۲}\ln|\csc ۲\theta - \cot ۲\theta|$

سوال ۴: معادله فاقد x است و دارای جواب $\frac{۱}{۲}\ln|\csc(y+\frac{\pi}{۳})-\cot(y+\frac{\pi}{۳})| = x+۱$

سوال ۵: معادله داده شده کوشی اویلر است که به $۲\ddot{y} + \dot{y} - y = e^{-t}$ تبدیل می‌شود. جواب هم‌گن مساله $y_h = c_۱\sqrt{x} + c_۲x^{-۱}$ و جواب خصوصی مساله به روش عمل‌گری $y_p = -\frac{\ln x}{۳x}$ به دست می‌آید.

امیرکبیر، بهار۹۵ ، میان‌ترم

سوال ۱: ب) شرایط قسمت (الف) برقرار است و جواب مساله $xM + yN = c$ یعنی $x^۲(x^۲+۳y^۲) + y^۲(y^۲+۳x^۲) = c$ می‌باشد.

سوال ۲: معادله مسیرهای قائم $y = xy' + y'^۲$ به دست می‌آید که معادله‌ای کلرو است و دارای جواب عمومی $y = cx + c^۲$. پوشِ این جواب $y = -\frac{x^۲}{y}$ به دست می‌آید.

سوال ۳: تکراری با سوال ۴ میان‌ترم پاییز ۹۵ امیرکبیر.

سوال ۴: معادله داده شده از مرتبه سه است، لذا معادله مشخصه آن نیز از درجه سه است. از طرفی می‌دانیم معادلات چندجمله‌ای از درجه فرد دارای دست‌کم یک ریشه حقیقی هستند، بنابراین حتما یک جمله به صورت $e^{\lambda x}$ باید در جواب هم‌گن وجود داشته باشد؛ پس موارد دوم و سوم رد می‌شوند. دقت کنید مورد اول را می‌توان به صورت

$$y = c_۱e^x + c_۲e^{۲x} + (c_۳e^{c_۴})e^{۳x},$$

بازنویسی کرد. لذا معادله مشخصه $(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$ می‌باشد و مقادیر a، b و c به ترتیب ۶−، ۱۱ و ۶− به دست می‌آیند.

سوال ۵: معادله کوشی-اویلر است و دارای جواب همگن $y_h = c_1x + c_2x^2 + c_3x^3$. جواب خصوصی به روش عمل‌گری $y_p = -\frac{\ln x + 1}{2} - \frac{11}{2}$ به دست می‌آید.

امیرکبیر، پاییز۹۵، میان‌ترم

سوال ۱: با تغییر متغیر $u = \tan x$ به معادله برنولی $x^3u^3 - u - xu' = 0$ می‌رسیم که دارای جواب $u^{-2} = -2x^3 + cx^2$ است. هم‌چنین $\lim\limits_{x\to 0} y(x) = k\pi + \frac{\pi}{2}$.

سوال ۲: معادله همگن است و جواب آن $y = x\tan(cx^3)$ به دست می‌آید.

سوال ۳: معادله مشخصه دارای ریشه‌های حقیقی ساده $\lambda = 1$و $\lambda = -2$، $\lambda = 0$ با تکرار ۲ و ریشه‌های مختلط $\pm i$ با تکرار ۳ است، لذا جواب همگن برابر است با:

$$y_h = c_1e^x + c_2^{-2x} + c_3 + c_4x + (c_5\cos x + c_6\sin x)$$
$$+x(c_7\cos x + c_8\sin x) + x^2(c_8\cos x + c_{10}\sin x).$$

صورت کلی جواب خصوصی نیز به روش ضرایب نامعین برابر است با:

$$y_p = x^2(Ax+B) + x^3[(A_1x^2 + B_1x + C_1)\cos x$$
$$+(A_2x^2 + B_2x + C_2)\sin x] + xe^{-2x}(\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta)$$
$$+e^{-2x}[(R_1x^2 + S_1x + T_1)\cos x + (R_2x^2 + S_2x + T_2)\sin x].$$

سوال ۴: جواب عمومی معادله داده شده برابر است با:

$$y = \begin{cases} \cos 2x + \frac{5}{6}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin x & : 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ \frac{2}{3}\cos 2x + \frac{5}{6}\sin 2x & : \frac{\pi}{2} < x \end{cases}$$

سوال ۵: ب) $\frac{Q' + 2PQ}{Q^{\frac{3}{2}}} = 0$ و تغییر متغیر $z = \int \sqrt{4x^2}\,dx = x^2$ معادله داده شده را به معادله با ضرایب ثابت $\ddot{y} + y = 0$ تبدیل می‌کند و جواب مساله

$y = c_1\cos x^2 + c_2\sin x^2$ است.

امیرکبیر، بهار ۹۶، میان‌ترم

سوال ۱: $y = \frac{1}{x^2 + cx^2 e^{\frac{1}{x}}} - \frac{1}{x}$

سوال ۲: $(y - cx + e^{-c})(y - cx - e^{-c}) = 0$

سوال ۳: $y = c_1\cos x + c_2\sin x + (\ln\sin x)\cos x + x\sin x$

سوال ۴: $u = c_1 x + c_2 x^2 + x^2\ln x$

سوال ۵: $Y(t) = \begin{bmatrix} c_1 e^{\sqrt{2}x} + c_2 e^{-\sqrt{2}x} + c_3\cos x + c_4\sin x + e^x - 2x \\ -c_1 e^{\sqrt{2}x} - c_2 e^{-\sqrt{2}x} - \frac{c_3}{4}\cos x - \frac{c_4}{4}\sin x - \frac{1}{2}e^x + x \end{bmatrix}$

تهران، بهار۹۳، میان‌ترم

سوال ۱: با تغییر متغیر $y = xu$ جواب $y = c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x\sin x$ به دست می‌آید.

سوال ۲: $y = c_1 x^2 + c_2 x^4 - 3(\ln(x^2+1))x^3 + 6(\tan^{-1}x)x^4$

سوال ۳: $\frac{x^2}{y} + 3x - \frac{3}{y} = c$

سوال ۴: با تغییر متغیر $u = e^y$ و... جواب $x - 2e^y - 5\ln|x - 3e^y + 8| = c$ به دست می‌آید.

تهران، پاییز۹۴، میان‌ترم

سوال ۱: جواب همگن $y_h = c_1 x + c_2 x + e^{-x}(c_3\cos x + c_4\sin x)$ و جواب خصوصی به روش ضرایب نامعین $y_p = Ae^x + e^{-x}(Bx + C) + xe^{-x}(D\cos x + E\sin x$ به دست می‌آید.

سوال ۲: $y = c_1 x + c_2 x^2 - \frac{1}{2}x(\ln x)^2 - x\ln x$

سوال ۳: $\frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} = c$

سوال ۴: معادله ریکاتی است و $y = \frac{\sin x}{x\cos x - \sin x + c} + \sin x$.

تهران، بهار۹۵، میان‌ترم

سوال ۱: رجوع کنید به مثال ۴۴.۱.۱ صفحه ۳۴.

سوال ۲: $y = -\ln|\frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{2}x - c|$

سوال ۳: $y = c_1 x + c_2 x^{-1} + \frac{1}{2}(x\ln|\frac{x+1}{x}| - 1) - \frac{1}{2x}\ln|x+1|$

سوال ۴: برای جواب خصوصی رجوع کنید به مثال ۳۱.۱.۲ صفحه ۹۴، و جواب همگن برابر است با:

$$y_h = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}(c_1\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x + c_2\sin\frac{\sqrt{2}}{2}x) + e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x}(c_3\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x + c_4\sin\frac{\sqrt{2}}{2}x).$$

تهران، پاییز۹۵، میان‌ترم

سوال ۱: معادله برنولی است و دارای جواب $y = \pm(e^{x^2} + ce^{x^2+2x})^{-\frac{1}{2}}$.

سوال ۲: $y = c_1 x^{-2} + c_2 x^{-3} + Ax^{-3}\ln x + Bx^{-2}(\ln x)^2 + cx^{-2}\ln x$

سوال ۳: $y = c_1 + c_2 x + c_3 e^x + c_4 xe^x + e^{-x}(Ax^3 + Bx + C) + x^2(Dx + E)$

سوال ۴: $y_2 = -x - 1$

تهران، بهار۹۶، میان‌ترم

سوال ۱: عامل انتگرال‌ساز $F(x,y) = \frac{1}{x+y}$ معادله را کامل می‌کند و جواب آن $x + \ln(x+y) - y = c$ است.

سوال ۲: با تغییر متغیر $u = 2y^3 + 1$ به معادله‌ای برنولی می‌رسیم و جواب مساله $2y^3 + 1 = (-\frac{1}{x} + cx^{-\frac{3}{2}})^{-\frac{1}{3}}$ می‌باشد.

سوال ۳: $y = e^{-x}(c_1\cos x + c_2\sin x) + Ax^2 + Bx + C + xe^x(D\cos x + E\sin x)$

سوال ۴:

$$y = c_1\cos\ln x + c_2\sin\ln x + \frac{1}{2}\cos(\ln x)\ln|\frac{\sin\ln x - 1}{\sin\ln x + 1}| - \frac{1}{2}\sin(2\ln x).$$

امیرکبیر، بهار۹۲، پایان‌ترم

سوال ۱: الف) $x = 0$ و $x = -1$ نقاط تکین منظم هستند.

ب) معادله شاخصی در $x = 0$ به صورت $r^2 + \frac{1}{2}r = 0$ و در $x = -1$ به صورت $r^2 - 2r = 0$ است.

ج) یک جواب حول $x=0$ به صورت $y_1=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ است که

$$a_n=-\frac{(n-1)(n-\frac{3}{4})}{n(2n+1)}a_{n-1}+\frac{1}{n(2n+1)}a_{n-2}.$$

د) صورت کلی جواب دوم $y_2=ky_1\ln x+x^{-\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ است.

سوال ۲: $y=c_1J_1(2e^{\frac{x}{2}})+c_2Y_1(2e^{\frac{x}{2}})$

سوال ۳: الف) $\dfrac{48(s-2)}{s^5(s^2-4s+3)^2}$

ب) $2\dfrac{\cos 2t-\cos t}{t}+\dfrac{e^{\frac{t}{4}}}{2\sqrt{\pi t}}$

سوال ۴: $y=ct^3+\dfrac{t}{2}$

سوال ۵: $x(t)=u_{\frac{\pi}{2}}(t)(-\frac{3}{2}\cos t-\frac{1}{2}(t-\frac{\pi}{2})\sin t)$

امیرکبیر، پاییز۹۲، پایان‌ترم

سوال ۱: $y_1=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ که $a_{n+2}=-\dfrac{2(n-p)}{(n+1)(n+2)}a_n$ و در سرتاسر اعداد حقیقی هم‌گرا است.

سوال ۳: الف) رجوع کنید به سوال ۳.۲.۴ صفحه ۲۰۳ ب) $\dfrac{2(e^{-t}\cosh t-\cos t)}{t}$

سوال ۴: $y=ct^2e^t$

سوال ۵: رجوع کنید به سوال ۱.۲.۵ صفحه ۲۲۷.

امیرکبیر، بهار۹۳، پایان‌ترم

سوال ۱: یک جواب به صورت $y_1=x^2\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n!}x^n=x^2e^{-x}$ است و صورت کلی جواب دوم $y_2=kx^2e^{-x}\ln x+x\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ است.

سوال ۲: $x^4-3x=\dfrac{1}{5}P_0-3P_1+\dfrac{4}{7}P_2+\dfrac{8}{35}P_4$

سوال ۳: $-2J_4(x)-2J_2(x)-J_0(x)$

سوال ۴: الف) رجوع کنید به مثال ۱۱.۱.۴ صفحه ۱۷۶ ب) $y=cJ_0(2\sqrt{at})$

سوال ۵: ضرایب نیاز به اصلاح دارند، دستگاه به صورتی که داده شده جواب ندارد.

امیرکبیر، پاییز۹۳، پایان‌ترم

سوال ۱: یک جواب به صورت $y_1 = x^{-1}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}x^n$ است و صورت کلی جواب دوم $y_2 = ky_1\ln x + x\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ است.

سوال ۲: رجوع کنید به مثال ۴۷.۱.۳ صفحه ۱۵۴

سوال ۳: الف) $\frac{1}{25}te^{-2t} + \frac{1}{25}te^{3t} + \frac{2}{125}e^{-2t} - \frac{2}{125}e^{3t}$

ب) $\left(\frac{1}{s^2+1}\ln\sqrt{1+\frac{4}{(s+1)^2}}\right)''$

سوال ۴: $y = e^t(\cos t + \sin t)$

سوال ۵: $x(t) = 30\cos t - 15\sin 3t + 3e^{-t} + 2\cos 2t$

امیرکبیر، بهار۹۴، پایان‌ترم

سوال ۱: با مشتق‌گیری از $y = xJ_1(x)$، $y' = J_1(x) + xJ_1'(x)$ و $y'' = 2J_1'(x) + xJ_1''(x)$ به دست می‌آید. جای‌گذاری در معادله و توجه به $J_0' = J_1$ حکم را ثابت می‌کند.

سوال ۲: نقاط $x = 0$ و $x = 1$ تکین منظم هستند. حول $x = 0$ دو جواب $y_1 = x$ و $y_2 = 1 + x\ln|x|$ به دست می‌آیند.

سوال ۳: $Y(t) = \begin{bmatrix} (3t+1)\cos t + (t+\frac{5}{2})\sin t \\ (t-\frac{1}{2})\cos t + (t+1)\sin t \end{bmatrix}$

سوال ۴: الف) $f(t) = u_1(t)$ ب) $y = \cosh t$

سوال ۵: الف) رجوع کنید به مثال ۴۹.۱.۴ صفحه ۲۰۰ ب) $G(s) = \frac{s}{s^2+4} - \frac{e^{-s}}{s^2} + \frac{e^{-2s}}{s^2-1}$

امیرکبیر، بهار۹۵، پایان‌ترم

سوال ۱: یک جواب به صورت $y_1 = x^3\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = c_1(e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2})$ است و صورت کلی جواب دوم $y_2 = ky_1\ln|x| + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ است.

سوال ۲: $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_1 J_1(t) + c_2 Y_0(t) - e^{-t} \\ c_1 J_0(t) + c_2 Y_0(t) \end{bmatrix}$

سوال ۳: $f(x) = 2P_0(x) - P_1(x) + 2P_2(x) + 4P_3(x)$

سوال ۴: الف) $\frac{1}{135}$ ب) $\frac{e^{-\frac{3}{2}t}}{\sqrt{2\pi t}} + \frac{1}{t}(1 - J_0(t))$

سوال ۵: الف) $y = e^t$ ب) $y = c_1 e^{2t} c_2 e^{2t} \int \frac{e^{-2t}}{t} dt$

امیرکبیر، پاییز ۹۵، پایان‌ترم

سوال ۱:

$$y = a_0(1 + \frac{2}{3}(x-1)^3 + \frac{1}{45}(x-1)^6 + \ldots) + a_1((x-1) + \frac{1}{4}(x-1)^4 + \ldots).$$

سوال ۲: $2z(1-z)y''_z + (1-5z)y'_z - 2y = 0$ ، یک جواب به صورت $y_1 = z^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ است که $a_{n+1} = \frac{2n^2 + 5n + 4}{(2n+3)(n+1)} a_n$ و صورت کلی جواب دوم $y_2 = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ است.

سوال ۳: $y = u_2(t)(e^{3(t-2)} - e^{2(t-2)})$

سوال ۴: $y = \frac{t^2}{2}$

سوال ۵: $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^{-2t}(2e^{3t} - 1) + \frac{2}{3} c_2 e^{-2t}(e^{3t} - 1) - \frac{9}{2} \\ -3c_1 e^{-2t}(e^{3t} - 1) - c_2 e^{-2t}(e^{3t} - 2) + \frac{1}{2}(e^{-t} + 15) \end{bmatrix}$

امیرکبیر، بهار ۹۶، پایان‌ترم

سوال ۱: $y = x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$

سوال ۲: با تغییر متغیر $u = \cos x$ به معادله $(1-u^2)y''_u - 2uy'_u + 12y = 0$ می‌رسیم که لژاندر مرتبه ۳ است و جواب آن به صورت است: $y = c_1 P_3(u) + c_2 Q_3(u) =$
$c_1(1 - 6\cos^2 x + \ldots) + c_2(\cos x - \frac{5}{3}\cos^3 x + \ldots)$

سوال ۳: $\mathcal{L}(E(t)) = \frac{1}{s(1 + e^{-s})}$

سوال ۴: $f(t) = \cos 2t - t\sin 2t - \frac{1}{8} t\cos 2t + \frac{1}{6}\sin 2t$

سوال ۵: $X(t) = c_۱ e^{-۲t}\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix} + c_۲ e^{-۵t}\begin{bmatrix} ۱ \\ -۲ \end{bmatrix}$

تهران، بهار۹۳، پایان‌ترم

سوال ۱: $X(t) = \begin{bmatrix} \sin t + \cos t + \sin t \ln|\cos t| + t\cos t \\ \cos t - \sin t + \cos t \ln|\cos t| + t \sin t \end{bmatrix}$

سوال ۲:

$$y = e^{-t} - e^{-۲t} + u_۲(t)\left(\frac{۱}{۲} - e^{-(t-۲)} + \frac{۱}{۲}e^{-۲(t-۲)}\right) - u_\pi(t)\left(e^{-(t-\pi)} + \frac{۱}{۲}e^{-۲(t-\pi)}\right).$$

سوال ۳: $y = \frac{۱}{۴}e^{t} + \frac{۱}{۴}e^{-t} + \cos t + \frac{۱}{۲}u_\pi(t)(\sinh(t-\pi) + \sin t).$

تهران، پاییز۹۳، پایان‌ترم

سوال ۱: تکراری با سوال اول امتحان پایان‌ترم پاییز ۹۳ امیرکبیر

سوال ۲: $y(t) = u_{\frac{\pi}{۲}}(t) e^{-۲(t-\frac{\pi}{۲})}\cos(t - \frac{\pi}{۲})$

سوال ۳: $y(t) = te^{t} + ۱ - e^{t}$

سوال ۴: $X(t) = \begin{bmatrix} c_۱ + c_۲ e^{-۵t} + \ln t + \frac{۸}{۵}t - \frac{۸}{۲۵} \\ c_۱ + c_۲ e^{-۵t} + ۲\ln t + \frac{۱۶}{۵}t - \frac{۱۶}{۲۵} \end{bmatrix}$

تهران، پاییز۹۴، پایان‌ترم

سوال ۱:

$$X(t) = \begin{bmatrix} \frac{c_۱}{۲}e^{-t}(۳e^{۲t} - ۱) - \frac{c_۲}{۲}e^{-t}(e^{۲t} - ۱) + e^{t}(\frac{۱}{۲} - t) - \frac{۴}{۳}e^{۲t} - ۲ \\ \frac{c_۱}{۲}e^{-t}(e^{۲t} - ۱) - \frac{c_۲}{۲}e^{-t}(e^{۲t} - ۳) + e^{t}(\frac{۳}{۲} - t) - e^{۲t} - ۳ \end{bmatrix}$$

سوال ۲: $y = u_۱(t)(۱ - \cos(t-۱)) - u_۲(t)(۱ - \cos(t-۲))$

سوال ۳: $y = \sin ۲t + u_{۲\pi}(t)\sin(۲t)$

سوال ۴: $y = e^{-۲t}(۱ - ۴t + ۴t^{۲})$

سوال ۵: یک جواب به صورت $y_۱ = x^{-۱}\sum_{n=۰}^{+\infty} a_n x^n$ است که $a_n = -\frac{۱}{n(n+۱)}a_{n-۱}$
و صورت کلی جواب دوم $y_۲ = ky_۱ \ln|x| + x^{-۲}\sum_{n=۰}^{+\infty} b_n x^n$ است.

تهران، بهار۹۶، پایان‌ترم

سوال ۱: یک جواب به صورت $y_۱ = \sum_{n=۰}^{+\infty} a_n x^n$ است که $a_{n+۲} = -\frac{۱}{(n+۲)^۲} a_n$ و صورت کلی جواب دوم $y_۲ = k y_۱ \ln|x| + \sum_{n=۰}^{+\infty} b_n x^n$ است.

سوال ۲: $y = -\frac{\cos\sqrt{۵}t}{۲} - \frac{\sin\sqrt{۵}t}{\sqrt{۵}} + \frac{۳}{۲}u_{۱۲}(t)(\frac{۱}{۵} - \frac{\sin(\sqrt{۵}(t-۱۲))}{۵\sqrt{۵}}) - \frac{۵}{۲}u_۴(t)\cos(\sqrt{۵}(t-۴))$

سوال ۳: الف) $(۱ - e^{t-۲}) u_۲(t) \frac{۱}{t-۲}-$ ب) $\frac{۱}{s} + \frac{e^{-\frac{\pi}{۲}s}s}{s^۲+۱} - \frac{e^{-\frac{\pi}{۲}s}}{s} + \frac{e^{-\pi s}}{s^۲+۱}$

ضمیمه ۴: پاسخ تمرینات

پاسخ تمرینات فصل اول:

حل تمرین ۱.۳.۱: $۲yy' - yy'' = y^۲$

حل تمرین ۲.۳.۱: $\frac{۱}{۲}(y^۲ - x^۲) + e^y - e^{-x} = c$

حل تمرین ۳.۳.۱: $۹x + y = ۳\tan(۳x + c)$

حل تمرین ۴.۳.۱: $(x + y + ۴)(۴x + y + ۱۳) = c$

حل تمرین ۵.۳.۱: $\ln(y + ۲) + ۲\tan^{-۱}\frac{y + ۲}{x - ۳} = c$

حل تمرین ۶.۳.۱: $\alpha = -\frac{۱}{۲}$ و جواب $۱ - \sqrt{۱ + x^۲y^۴} = cx^{y^۲}$ به دست می‌آید.

حل تمرین ۷.۳.۱: $y = \sin^۲ x - ۲\sin x + ۲ + ce^{-\sin x}$

حل تمرین ۸.۳.۱: با تغییر متغیر $u = e^y$ به معادله خطی مرتبه اول $u' + ۳u = ۴\cos x$ می‌رسیم که دارای جواب $y = \ln(\frac{۲}{۵}(\sin x + ۳\cos x) + ce^{-۳x})$, می‌باشد.

حل تمرین ۹.۳.۱: معادله داده شده برنولی مرتبه ۳ است که دارای جواب $\frac{۱}{y^۲} = -\frac{۴}{۹}x - \frac{۲}{۳}x\ln x - \frac{۲c}{x^۲}$ می‌باشد.

حل تمرین ۱۰.۳.۱: $y = \frac{۱}{x} + \frac{۳x^۲}{c - x^۳}$

حل تمرین ۱۱.۳.۱: معادله داده شده دارای عامل انتگرال‌ساز $F(x, y) = e^{-۳y}$ است و جواب مساله

$$e^{-۳y}(\sin x + \frac{۱}{۳}y^۲ + \frac{۲}{۹}y + \frac{۲}{۲۷}) = c,$$

می‌باشد.

حل تمرین ۱۳.۳.۱: $xy + \ln\cos\frac{y}{x} = c$

حل تمرین ۱۴.۳.۱: جواب عمومی $y = cx + e^c$ و جواب خاص $y = x(\ln(-x) - 1) + c$ با دامنه $x < 0$.

حل تمرین ۱۵.۳.۱: جواب‌های خاص $y = 0$ و $y = x + 1$ و جواب عمومی خم پارامتری:

$$\gamma(t) = \left(\frac{-t^3 + \frac{3}{2}t^2 + c}{(t-1)^2}, \frac{-t^5 + \frac{3}{2}t^4 + ct^2 + t^3}{(t-1)^2}\right).$$

حل تمرین ۱۶.۳.۱: $\gamma(t) = (t + \sin t, \frac{1}{2}t^2 + t\sin t + \cos t + c)$

حل تمرین ۱۷.۳.۱: $\gamma(t) = (-\frac{1}{t^2}(\sin t + \cos t + c), -\frac{2c}{t} - \frac{2\cos t}{t} - \sin t)$

حل تمرین ۱۸.۳.۱: معادله مذکور دارای جواب غیرعادی $y = -1$ جواب عمومی $\gamma(t) = (e^t + c + (t-1)e^t)$ می‌باشد.

حل تمرین ۱۹.۳.۱: $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$

پاسخ تمرینات پیوست فصل اول:

حل تمرین ۱: $x^2 - y^2 = c$

حل تمرین ۲: $(\ln\sqrt{\lambda})y^2 + x - \ln(1 + (x+\lambda)\ln x) = c$

حل تمرین ۳: $\frac{y^2}{2} = \ln|\frac{\cos x}{\sec x + \tan x}| + c$

حل تمرین ۴: $e^r = c\tan\theta$

پاسخ تمرینات فصل دوم:

حل تمرین ۱.۳.۲: $y = c_1e^x + c_2xe^x + c_3\cos x + c_4\sin x$

حل تمرین ۲.۳.۲: $y = c_1x + c_2x^2 + \frac{5}{2}\ln x + 3x^2\ln x + \frac{15}{4}$

حل تمرین ۳.۳.۲: $y = c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3\cos x + c_4\sin x + \frac{x}{8}(e^x - e^{-x}) - \frac{x}{4}\cos x$

حل تمرین ۴.۳.۲: $y = c_1x\cos x + c_2\sin x + \frac{1}{2}xe^x$

حل تمرین ۵.۳.۲: $y = -\ln|\cos(x + c_1)| + c_2$

حل تمرین ۶.۳.۲: $x = \frac{2}{3}(y - 2c_1)\sqrt{y + c_1} + c_2$

حل تمرین ۷.۳.۲: $y - \frac{1}{2}y^2 - ce^{-y} = x + c$

حل تمرین ۸.۳.۲: $y = \frac{1}{c_1}\ln|1 + c_1 x| + c_2$

حل تمرین ۹.۳.۲: جواب اول $y_1 = e^x$ و جواب دوم از این جواب $y_2 = e^x \int x^N e^{-x} dx$ به دست می‌آید که برابر با مجموع داده شده است. (چرا؟)

حل تمرین ۱۰.۳.۲: با تغییر متغیر $u = \int \sqrt{q(x)}dx = \frac{x^2}{2}$ به جواب

$$y = e^{-\frac{x^4}{4}}(c_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + c_2 \sin\frac{\sqrt{3}}{4}x^2),$$

می‌رسیم.

حل تمرین ۱۱.۳.۲: $y = \frac{1}{2}(\tan^{-1} x)^{-1} + c$

حل تمرین ۱۲.۳.۲: $y = \frac{1}{3}x^3 + c_1 x + c_2$

پاسخ تمرینات فصل سوم:

حل تمرین ۱.۳.۳: $y = a_0(1 - \frac{x^2}{16} - \frac{x^3}{96} + \ldots) + a_1(x - \frac{x^3}{24} - \frac{x^4}{192} + \ldots)$

حل تمرین ۲.۳.۳: نقطه $x = 0$ تکین منظم است و جواب‌ها به صورت $y_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{(n!)^2}x^{n-1}$ و $y_2(x) = y_1(x)\ln x + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^{n-1}$ به دست می‌آیند که $b_n = \frac{1}{n^2 - 2n + 1}(b_{n-1} - \frac{n \times 2^n}{(n!)^2}b_0)$ و شعاع همگرایی این سری‌ها $R = \infty$ است.

حل تمرین ۳.۳.۳: $y_1 = 1 - 2x + x^2 + \ldots$ و $y_2 = y_1 \ln|x| + (4x - 6x^2 + \ldots)$

حل تمرین ۵.۳.۳:

$$Y_{\frac{1}{2}}(x) = -J_{-\frac{1}{2}}(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x, Y_{-\frac{1}{2}}(x) = J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x.$$

پاسخ تمرینات فصل چهارم:

حل تمرین ۱.۳.۴: $F(s) = \left(\frac{1}{s-2}\ln\frac{s-1}{\sqrt{1+(s-1)^2}}\right)'$

حل تمرین ۲.۳.۴: $F(s) = \frac{1}{14}\frac{1}{s-7} - \frac{1}{6}\frac{1}{s+3} - \frac{2}{21}\frac{1}{s}$

حل تمرین ۳.۳.۴: $f(t) = u_1(t)\left(-\frac{11}{2}e^{-(t-1)} + 14e^{-2(t-1)} - \frac{17}{2}e^{-3(t-1)}\right)$

حل تمرین ۴.۳.۴: $f(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^t e^{2x}\sqrt{x}\cos(t-x)dx$

حل تمرین ۵.۳.۴: $f(t) = -\frac{\sin t}{t}$ و $g(t) = -\frac{2\cos t - e^{-5t} - 1}{t}$.

حل تمرین ۶.۳.۴: $f(t) = \frac{e^{-3t}\sin t}{t}$

حل تمرین ۷.۳.۴: $\frac{1}{2t\sqrt{\pi t}}(e^{-3t} - e^{-t})$

حل تمرین ۸.۳.۴: $y = 2e^{3t}\left(\frac{t^3}{6} + 1\right)$

حل تمرین ۹.۳.۴: $f(t) = -\frac{1}{4} + \frac{t}{2} + \frac{e^{2t}}{4}$

حل تمرین ۱۰.۳.۴: $y = u_2(t)\sinh(t-2) - u_2(t)(t-2)$

حل تمرین ۱۱.۳.۴: $\frac{1}{2}\ln\frac{2}{5}$

حل تمرین ۱۲.۳.۴: $\frac{1}{2}\ln\frac{p^2+q^2}{m^2+n^2}$

پاسخ تمرینات فصل پنجم:

حل تمرین ۱.۳.۵: $X(t) = e^{7t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

حل تمرین ۲.۳.۵: $X(t) = c_1e^t\begin{pmatrix} 2\sin 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix} + c_2e^t\begin{pmatrix} -2\cos 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix}$

حل تمرین ۳.۳.۵: $X(t) = c_1e^t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_3e^{2t}\begin{pmatrix} t \\ t \\ 2t-1 \end{pmatrix}$

حل تمرین ۴.۳.۵: $X(t) = c_1 e^{2t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_3 e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ t \\ -1 \end{pmatrix}$

حل تمرین ۵.۳.۵: $X(t) = \begin{pmatrix} 6e^{3t} + 18e^{-t} - 24t + 16 \\ 3e^{3t} + 9e^{-t} - 2e^{t} + 6t - 10 \end{pmatrix}$

ضمیمه ۵: فرمول‌های مهم

فرمول‌های مثلثات

تعریف بر حسب توابع نمایی:

$$\begin{cases} \sin x &= \dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{۲i} \\ \cos x &= \dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{۲} \end{cases}, \begin{cases} \sinh x &= \dfrac{e^{x}-e^{-x}}{۲} \\ \cosh x &= \dfrac{e^{x}+e^{-x}}{۲} \end{cases}$$

$$\cos^{۲} x + \sin^{۲} x = ۱, \cosh^{۲} x - \sinh^{۲} x = ۱$$

تبدیل توان دو به کمان دو برابر:

$$\begin{cases} \sin^{۲} x &= \dfrac{۱-\cos ۲x}{۲} \\ \cos^{۲} x &= \dfrac{۱+\cos ۲x}{۲} \end{cases}, \begin{cases} \sinh^{۲} x &= \dfrac{\cosh ۲x - ۱}{۲} \\ \cosh^{۲} x &= \dfrac{\cosh ۲x + ۱}{۲} \end{cases}$$

فرمول‌های ضرب به جمع:

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{۱}{۲}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta))$$

$$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{۱}{۲}(\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta))$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{۱}{۲}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta))$$

انتگرال‌های مهم

$$\int e^{ax}\sin bx dx = \frac{e^{ax}}{a^۲+b^۲}(a\sin bx - b\cos bx)$$

$$\int e^{ax}\cos bx dx = \frac{e^{ax}}{a^۲+b^۲}(a\cos bx + b\sin bx)$$

$$\int x^n e^{ax} dx = \frac{۱}{a}x^n e^{ax} - \frac{n}{a}\int x^{n-۱}e^{ax}dx$$

$$\int x^n \ln x dx = \frac{x^{n+۱}}{n+۱}(\ln x - \frac{۱}{n+۱}), n \neq -۱$$

$$\int \frac{dx}{a^۲+x^۲} = \frac{۱}{a}\tan^{-۱}\frac{x}{a}, \int \frac{dx}{a^۲-x^۲} = \frac{۱}{۲a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^۲-x^۲}} = \frac{۱}{a}\sin^{-۱}\frac{x}{a}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^۲-a^۲}} = \ln|x+\sqrt{x^۲-a^۲}|, \int \frac{dx}{\sqrt{x^۲+a^۲}} = \ln|x+\sqrt{x^۲+a^۲}|$$

بسط مک‌لورن

$$\frac{۱}{۱-x} = \sum_{n=۰}^{+\infty} x^n : |x| < ۱$$

$$(۱+x)^r = \sum_{k=۱}^{+\infty}\binom{r}{k}x^k = ۱ + \sum_{k=۱}^{+\infty}\frac{r(r-۱)...(r-k+۱)}{k!}x^k, x > -۱$$

$$e^x = \sum_{n=۰}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$$

$$\sin x = \sum_{n=۰}^{+\infty}\frac{(-۱)^n x^{۲n+۱}}{(۲n+۱)!}, \cos x = \sum_{n=۰}^{+\infty}\frac{(-۱)^n x^{۲n}}{(۲n)!}$$

$$\sinh x = \sum_{n=۰}^{+\infty}\frac{x^{۲n+۱}}{(۲n+۱)!}, \cosh x = \sum_{n=۰}^{+\infty}\frac{x^{۲n}}{(۲n)!}$$

کتاب‌نامه

[۱] شادمان، داریوش، مهری، بهمن، معادلات دیفرانسیل معمولی، انتشارات فاطمی، چاپ سوم، ۱۳۸۴.

[۲] شهشهانی، سیاوش، حساب دیفرانسیل و انتگرال (جلد اول و دوم)، انتشارات فاطمی، چاپ اول، ۱۳۸۶.

[۳] نیکوکار، مسعود، معادلات دیفرانسیل، انتشارات آزاده، چاپ چهل و چهارم، ۱۳۹۴.

[۴] دوره نشریه فرهنگ و اندیشه ریاضی، انجمن ریاضی ایران.

[۵] دوره نشریه مجله ریاضی شریف، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی شریف.

[6] Andrei D. Polyanin, V. F. Zaitsev; Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equation, 1 ed, CRC-Press, 1995.

[7] Balser, W.; Formal Power Series and Linear Systems of Meromorphic Ordinary Differential Equations, Universitext Springer, 1 ed, 2000.

[8] Boole, G.; A treatise on differential equations, Adamant Media Corporation, 2000.

[9] Canada, A., Drabek,P., Fonda, A.; Handbook of differential equations. Ordinary differential equations, North Holland, Volume 3, 1 ed, 2006.

[10] Carmen, C.; Ordinary Differential Equation with applications, Springer, 1999.

[11] Constanda, C.; Differential Equations: A Primer for Scientists and Engineers, Springer, 2017.

[12] Friedrichs, K. O.; Lectures on advanced ordinary differential equations, Gordon and Breach, Notes on mathematics and its applications, 1 ed, 1965.

[13] Gask, H.; Ordinary Differential Equations, MIT Press, 1973.

[14] Hartman, P.; Ordinary differential equations, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2nd ed, 1982.

[15] Holzner, S.; Differential equations for dummies, Wiley, 2008.

[16] Logan, J. David; A first course in differential equations, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, 1 ed, 2005.

[17] Mattheij, R., Molenaar, J.; Ordinary differential equations in theory and practice, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2002.

[18] Murphy, G. M.; Ordinary differential equations and their solutions, D. Van Nostrand Company, Inc. 1960

[19] Ricardo, H. J.; A modern introduction to differential equations, Academic Press, 2 ed, 2009.

[20] Teschl, G.; Ordinary Differential Equations, Springer, 2009.

[21] Tenenbaum, M. Pollard, H.; Ordinary differential equations: an elementary textbook for students of mathematics, engineering, and the sciences, Dover Publications, 1985.

[22] William E. Boyce, Richard C. DiPrima, Douglas B. Meade; Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems, 11th ed, Wiley, 2017.