Mathématiques générales

MAT 0339

Mehrdad Najafpour

PUBLISHED BY ....

Première impression, mai 2020

Contents

Préface

Ces notes sont destinées aux étudiants du cours de Mathématiques générales (sigle MAT 0339). Elles constituent la matière première d'un cours de premier cycle d'une durée d'environ 40 heures. Elles sont divisées en quatre chapitres. Dans le premier chapitre ....

Les principaux objectifs de ces notes de cours sont établir les bases des principaux objets mathématiques élémentaires apparaissant dans les diverses sciences contemporaines. Comme il s'agit d'un retour aux mathématiques pour plusieurs d'entre vous, un souci particulier sera accordé à l'acquisition d'une bonne méthode de travail mathématique. Notamment nous chercherons à aborder les mathématiques comme un sujet oú l'on réfléchit et non pas comme un sujet oú l'on suit bêtement des régles.
De façon générale les sérances de cours magistral et d'exercices auront un contenu et une mission complètement différents : le cours servira à présenter les notions mathématiques, à en dégager les principales propriétés avec rigueur, alors que les séances d'exercices feront pratiquer les manipulations des notions à travers des exemples et, lorsque cela sera possible, des problèmes de nature plus appliquée.

À lavance, je voudrais remercier **Patricia Sorya** et **Ali Khardani**.

Mehrdad Najafpour,
mai 2020.
Montréal, Canada
najafpour_ ghazvini.mehrdad@uqam.ca

1. Les ensemble de nombres

1.1 Ensemble et sous ensemble

Définition 1.1.1 — Définition informelle de ensemble. Un **ensemble** est une collection bien définie d'objets qu'on nomme **éléments**.

■ **Exemple 1.1**
- L'ensemble des étudiants et étudiantes suivant le cours MAT0339.
- L'ensemble constitue par les lettre de l'alphabet $\{a,b,c,\cdots,x,y,z\}$.
- L'ensemble défini par un jeu de 52 cartes.
- L'ensemble vide à savoir $\emptyset$ ou simplement $\{\}$, qui est ne contenant.
- Les nombres **naturels** $\mathbb{N}$:
$$\mathbb{N} = \{1,2,3,\cdots\},$$
est l'ensemble des nombres entiers positifs.
- Les nombres **entiers** $\mathbb{Z}$:
$$\mathbb{Z} = \{\cdots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\cdots\},$$
est l'ensemble de tous les entiers, qu'ils soient positifs, négatifs ou nuls.
- Les nombres **rationnels** $\mathbb{Q}$: tous les nombres pouvant s'écrire sous forme de fraction $\frac{a}{b}$, où a et b sont des entiers et $b \neq 0$.
$$\mathbb{Q} = \{-50,-2,-\frac{1}{2020},0,1,\frac{2}{4},3,\cdots\}.$$
- Les nombres **irrationnels** $\mathbb{Q}^c$: est l'ensemble des nombres dont la représentation décimale est non périodique.
$$\mathbb{Q}^c = \{\sqrt{2} = 1,414213\cdots,\pi = 3,141592653\cdots,e = 2,71828\cdots,\cdots\}.$$
- Les nombres **réels** $\mathbb{R}$: sont l'ensemble de tous les nombres qui sont rationnels ou irrationnels.
$$\mathbb{R} = \{-2,-\sqrt{2},0,\sqrt{2},\frac{5}{9},\pi,e,e^2,\cdots\}.$$

- L'ensemble $\mathscr{P}$ des points d'un plan.
- L'ensemble $\mathscr{L}$ des droites d'un plan.

■

Remarque 1.1.1 La notation d'un ensemble en extension n'est pas unique: un même ensemble peut être noté en extension de façon différentes.

1. L'ordre des éléments est sans importance, par exemple:
$$\{1,2\} = \{2,1\}.$$
2. La répétition déléments entre les accolades ne modifie pas lensemble, par exemple:
$$\{1,2,2\} = \{1,1,1,2\} = \{1,2\}.$$

Définition 1.1.2 — L'appartenance d'un élément. Le symbole $\in$[a] indique qu'un élément **appartient** à un ensemble. À l'inverse, le symbole $\notin$ identifie un élément qui **n'appartient pas** à un ensemble.

[a] Le symbole $\in$ introduite par Giuseppe Peano dès 1889.

■ **Exemple 1.2** Par exemples
- $a \in \{a,e,i,o,u,y\}$.
- $j \notin \{a,e,i,o,u,y\}$.
- $2 \in \mathbb{N}$, $2 \in \mathbb{Z}$, $2 \in \mathbb{Q}$
- $-2 \notin \mathbb{N}$, $-2 \in \mathbb{Z}$, $-2 \in \mathbb{Q}$
- $0,5 = \frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$, $0,5 \in \mathbb{Z}$, $0,5 \in \mathbb{Q}$.
- $\frac{1}{0} \notin \mathbb{Q}$.
- $0 \in [-2,5]$
- $0 \notin]0,1[$

■

■ **Exemple 1.3** On peut écrire
$$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} : a,b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}.$$

■

Définition 1.1.3 — Les intervalles bornés. Soit a et b deux nombres réels. On appelle intervalle fermé borné de a à b , et on note $[a,b]$, le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ contenant tous les nombres réels compris entre a et b; les nombres a et b sont eux-mêmes éléments de $[a,b]$,
$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}.$$
De même façon on peut écrire:
$$\begin{aligned}
[a,b[&= [a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} \\
]a,b] &= (a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} \\
]a,b[&= (a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}.
\end{aligned}$$

Définition 1.1.4 — Les intervalles infinis. Soit a un nombre réel. On appelle intervalle fermé infini de a à $+\infty$, et on note $[a,+\infty[=[a,+\infty)$, le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ contenant tous les nombres réels supérieurs à a ; le nombre a est un élément de $[a,+\infty[$,

$$[a,+\infty[=\{x\in\mathbb{R}: x\leq a\}.$$

De même façon on peut écrire:

$$\begin{aligned}
]a,+\infty[&=(a,+\infty)=\{x\in\mathbb{R}: a<x\}\\
]-\infty,b]&=(-\infty,b]=\{x\in\mathbb{R}: x\leq b\}\\
]-\infty,b[&=(-\infty,b)=\{x\in\mathbb{R}: x<b\}.
\end{aligned}$$

■ **Exemple 1.4** Voici des exemples illustrant les différents cas de figure qu'on peut rencontrer : ■

Inégalités	Intervalle	Représentation	Signification
$-2\leqslant x\leqslant 5$	$x\in[-2;5]$		x est compris entre -2 inclus et 5 inclus
$-2<x<5$	$x\in]-2;5[$		x est compris entre -2 exclu et 5 exclu
$-2\leqslant x<5$	$x\in[-2;5[$		x est compris entre -2 inclus et 5 exclu
$-2<x\leqslant 5$	$x\in]-2;5]$		x est compris entre -2 exclu et 5 inclus
$x\leqslant 5$ $5\geqslant x$	$x\in]-\infty;5]$		x est inférieur ou égal à 5
$x<5$ $5>x$	$x\in]-\infty;5[$		x est strictement inférieur à 5
$-2\leqslant x$ $x\geqslant -2$	$x\in[-2;+\infty[$		x est supérieur ou égal à -2
$-2<x$ $x>-2$	$x\in]-2;+\infty[$		x est strictement supérieur à -2

Définition 1.1.5 — Les sousensembles. L'ensemble A est dit un **sousensemble** de B si et seulement si tous les éléments de A sont aussi des éléments de B .On dit alors que l'ensemble A est inclus dans l'ensemble B. La notation $A\subseteq B$ est employée pour symboliser l'inclusion de A dans B. Le symbole $\nsubseteq$ indique pour sa part qu'un ensemble n'est pas inclus dans un autre $C\nsubseteq D$ exprime donc qu'au moins un élément de C n'est pas un élément de D.

■ **Exemple 1.5** Par exemple

- $\{a,e\}\subseteq\{a,e,i,o,u,y\}$.
- $\{a,b\}\nsubseteq\{a,e,i,o,u,y\}$.
- $\{1,2,7\}\subseteq\{1,2,3,7,17,19\}$.
- $\{1,2,5\}\nsubseteq\{1,2,3,7,17,19\}$.
- $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}$.
- $\mathbb{Z}\nsubseteq\mathbb{N}$.
- $[2,5]\subseteq[1,7]$
- $[2,5]\nsubseteq[1,5[$

■

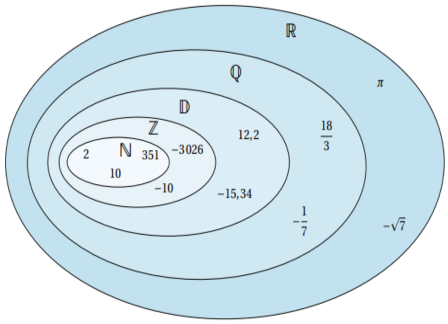


Figure 1.1: Ensembles de nombres

■ **Exemple 1.6** L'ensemble vide est sous-ensemble de tout ensemble, par exemple

$$\emptyset = \{\} \subseteq \{a, e, i, o, u, y\}.$$

■

■ **Exemple 1.7** Notez que $2 \in \mathbb{N}$ et $2 \nsubseteq \mathbb{N}$, mais $\{2\} \subseteq \mathbb{N}$. ■

■ **Exemple 1.8** Soit $A = \{1, 2, \{2, 3\}\}$, alors
- $1 \in A$, $2 \in A$, $\{2,3\} \in A$ et $3 \ni A$.
- $\{1\} \subseteq A$, $\{1,2\} \subseteq A$, $\{2,3\} \nsubseteq A$ et $\{\{2,3\}\} \subseteq A$.

■

Définition 1.1.6 — Intersection de deux ensembles. Soient $A, B \subseteq E$ deux sous-ensembles d'un ensemble E. On définit l'intersection de A et B comme étant l'ensemble

$$A \cap B = \{x \in E : x \in A \text{ et } x \in B\}.$$

Définition 1.1.7 — Union de deux ensembles. Soient $A, B \subseteq E$ deux sous-ensembles d'un ensemble E. On définit l'union de A et B comme étant l'ensemble

$$A \cup B = \{x \in E : x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

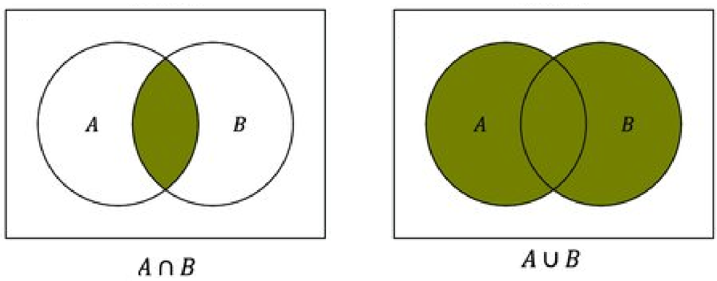


Figure 1.2: Intersection et union de deux ensembles

■ **Exemple 1.9** Soit les trois ensembles finis $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 3, 5, 7\}$ et $C = \{2, 4, 6, 8\}$. Alors il est simple de décrire sous la forme d'une liste chacun des ensembles suivants:

1. $A \cap B$

$$A \cap B = \{0, 1, 2, 3, 4\} \cap \{1, 3, 5, 7\} = \{1, 3\}.$$

2. $A \cup B$
$$A \cup B = \{0,1,2,3,4\} \cup \{1,3,5,7\} = \{0,1,2,3,4,5,7\}.$$
3. $B \cap C$
$$B \cap C = \{1,3,5,7\} \cap \{2,4,6,8\} = \{\} = \emptyset.$$
4. $A \cup (B \cap C)$
$$\begin{aligned} A \cup (B \cap C) &= \{0,1,2,3,4\} \cup (\{1,3,5,7\} \cap \{2,4,6,8\}) \\ &= \{0,1,2,3,4\} \cup \emptyset = \{0,1,2,3,4\}. \end{aligned}$$
5. $(A \cup B) \cap (A \cup C)$
$$\begin{aligned} (A \cup B) \cap (A \cup C) &= (\{0,1,2,3,4\} \cup \{1,3,5,7\}) \cap (\{0,1,2,3,4\} \cup \{2,4,6,8\}) \\ &= \{0,1,2,3,4,5,7\} \cap \{0,1,2,3,4,6,8\} \\ &= \{0,1,2,3,4\}. \end{aligned}$$

■

■ **Exemple 1.10** Soit les trois ensembles finis $A = \{0,1,2,\{2,3\},4\}$, $B = \{0,1,2,\{3,4\},4\}$ et $C = \{0,\{1,2\},\{3,4\}\}$. Alors il est simple de décrire sous la forme d'une liste chacun des ensembles suivants:

1. $A \cap B$
$$A \cap B = \{0,1,2,\{2,3\},4\} \cap \{0,1,2,\{3,4\},4\} = \{0,1,2,4\}.$$
2. $A \cup B$
$$A \cup B = \{0,1,2,\{2,3\},4\} \cup \{0,1,2,\{3,4\},4\} = \{0,1,2,\{2,3\},\{3,4\},4\}.$$
3. $B \cap C$
$$B \cap C = \{0,1,2,\{3,4\},4\} \cap \{0,\{1,2\},\{3,4\}\} = \{0,\{3,4\}\}$$
4. $A \cup (B \cap C)$
$$A \cup (B \cap C) = \{0,1,2,\{2,3\},4\} \cup (\{0,\{3,4\}\}) = \{0,1,2,\{2,3\},\{3,4\},4\}$$

■

■ **Exemple 1.11** Déterminer les intervalles suivants

1. $[-2,5] \cap [-1,7]$

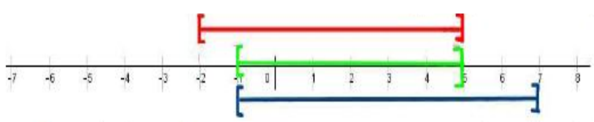


Figure 1.3: $[-2,5] \cap [-1,7] = [-1,5]$

2. $[-2,5] \cup [-1,7]$
3. $[-4,1] \cap [2,3] = \emptyset$ parce que les deux intervalles n'ont aucun nombre en commun.
4. $[-4,1] \cap [1,3] = \{1\}$

■

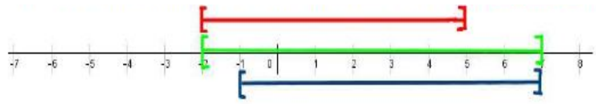


Figure 1.4: $[-2,5]\cup[-1,7]=[-2,7]$

Exercices

Exercice 1.1 Dire à quels ensembles de nombres $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}^c$ et $\mathbb{R}$ chacun des nombres suivants peut appartenir:

$$-3,\quad \frac{1}{7},\quad \sqrt{64},\quad \sqrt{20},\quad \frac{1}{\pi}.$$

Exercice 1.2 Énumérer les éléments de chacun des ensembles suivants:

1. L'ensemble des éléments $x\in\mathbb{N}$ tel que $-5<x<2$.
2. L'ensemble des éléments $x\in\mathbb{Z}$ tel que $-5<x<2$.
3. L'ensemble des éléments $x\in\mathbb{Z}$ tels que $5<x$ et $x<1$.
4. L'ensemble des éléments $x\in\mathbb{Z}$ tel que $x\leq 4$ et $-4<x$.

Exercice 1.3 Déterminez les éléments de chacun des ensembles suivants:

a) $\{x\in\mathbb{N} : x^2=1\}$
b) $\{x\in\mathbb{Z} : x^2=1\}$
c) $\{x\in\mathbb{N} : x^2=-1\}$
d) $\{x\in\mathbb{Z} : x^2=-1\}$
e) $\{x\in\mathbb{N} : 2x=3\}$
f) $\{x\in\mathbb{Q} : 2x=3\}$
g) $\{x\in\mathbb{Q} : x^2=2\}$
h) $\{x\in\mathbb{R} : x^2=2\}$

Exercice 1.4 Exprimer chacun des ensembles suivant sous forme d'intervalle de $\mathbb{R}$:

1. L'ensemble des réels x tel que $5\leq x<2$.
2. L'ensemble des réels x tel que $-5<x<2$.
3. L'ensemble des réels x tel que $x>-5$ et $x<1$.
4. L'ensemble des réels x tels que $x<-6$ et $x>-2$.
5. L'ensemble des réels x tels que $x\leq -6$ ou $x>-2$.
6. L'ensemble des réels x tels que $x>-2$ et $x\leq -4$.
7. L'ensemble des réels x tels que $(x\leq 3$ et $x>-1)$ ou $(-5<x\leq 2)$.

Exercice 1.5 Déterminer les intervalles suivants:

a) $]3,9[\cup[7,11]$
b) $[0,+\infty[\cap]-\infty,1[$
c) $]-1,0[\cup]0,+\infty[$
d) $]-1,0[\cap]0,+\infty[$

D'exercices du livre

Exercice 1.6 1.13 page 43

Exercices supplémentaires

Exercice 1.7 Vrai ou faux:

a) $\emptyset \in \emptyset$

b) $\emptyset \subseteq \emptyset$

c) $\emptyset \in \{\emptyset\}$

d) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$

e) $\emptyset \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

f) $\emptyset \subseteq \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

g) $\{\emptyset\} \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

h) $\{\emptyset\} \subseteq \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

■

1.2 Opérations sur les ensemble de nombres

Remarque 1.2.1 L'ordre de priorité des opérations Pour effectuer une série d'opérations, l'ordre suivant doit être respecté:
1. Effectuer les opérations entre parenthèses.
2. Évaluer les exposants.
3. Effectuer les multiplications et les divisions de gauche à droite.
4. Effectuer les ajouts et les soustractions de gauche à droite.

■ **Exemple 1.12** Effectuer les opérations suivantes:

1. $1\times2+3\times4$
$$1\times2+3\times4=2+12=\boxed{14}$$
2. $1\times(2+3)\times4$
$$1\times(2+3)\times4=1\times5\times4=\boxed{20}$$
3. $(1+2)\times(3+4)$
$$(1+2)\times(3+4)=3\times7=\boxed{21}$$
4. $36\div(6\div2)$
$$36\div(6\div2)=36\div3=\boxed{12}$$
5. $(36\div6)\div2$
$$(36\div6)\div2=6\div2=\boxed{3}$$

■

Remarque 1.2.2 Loi des signes:
$$(+)(+)=+,(+)(-)=-,(-)(+)=-,(-)(+)=-.$$

■ **Exemple 1.13** Effectuer les opérations suivantes:

1. $2\times(-3)+3\times(-4)$
$$2\times(-3)+3\times(-4)=(-6)+(-12)=\boxed{-18}$$
2. $2\times(-3)-3\times(-4)$
$$2\times(-3)-3\times(-4)=(-6)-(-12)=-6+12=\boxed{6}$$
3. $(-6+5-2)\times(1+2\times-3)$
$$(-6+5-2)\times(1+2\times-3)=-3\times(1-6)=-3\times-5=\boxed{15}$$
4. $(-2\times0-5\times-3+1)\div-4$
$$(-2\times0-5\times-3+1)\div-4=(0+15+1)\div-4=16\div-4=\boxed{-4}$$
5. $(-6+5-2)\times(1+2\times-3)$
$$(-6+5-2)\times(1+2\times-3)=(-3)\times(1-6)=(-3)\times(-5)=\boxed{15}$$

■

1.2.1 Opérations sur les fractions

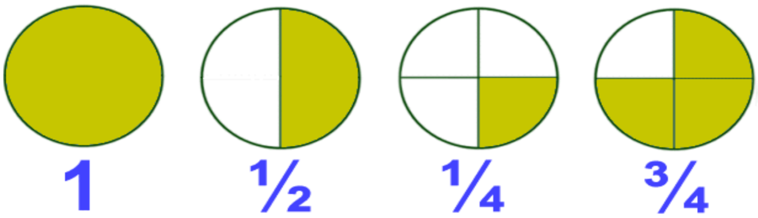


Figure 1.5: Fractions

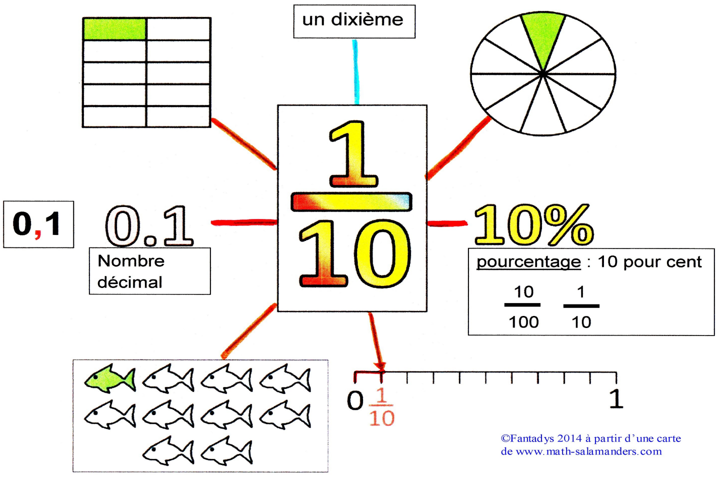


Figure 1.6: Pourcentages, fractions et nombres décimaux

Remarque 1.2.3 Les opérations sur les fractions:

1. Addition et soustraction de fractions:
   - Si les fraction sont exprimées avec le même dénominateur, il suffit d'additionner ou soustraire leurs numérateurs.
   $$\frac{3}{5}+\frac{4}{5}=\frac{3+4}{5}=\frac{9}{5}.$$
   $$\boxed{\frac{a}{b}\pm\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}}$$
   - Si les dénominateur sont différents, il faut ramener les fractions au même dénominateur.
   $$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=\frac{5}{15}+\frac{3}{15}=\frac{5+3}{15}=\frac{8}{15}.$$
2. Multiplication de fractions: Il suffit multiplier les numérateurs ensemble et les dénominateurs ensemble.
   $$\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}=\frac{1\times 3}{2\times 5}=\frac{3}{10}.$$
   $$\boxed{\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}}$$

3. Division de fractions: La division est une multiplication par l'inverse du dénominateur. L'inverse de la fraction $\frac{a}{b}$ est $\frac{b}{a}$.

$$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{2} \div \frac{3}{5} = \frac{1}{2} \times \frac{5}{3} = \frac{5}{6}.$$

$$\boxed{\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}.}$$

■ **Exemple 1.14** Faites les opérations suivantes sur les fractions:

1. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3 \times 1}{3 \times 2} + \frac{2 \times 1}{2 \times 3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \boxed{\frac{5}{6}}$$

2. $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3 \times 1}{3 \times 2} - \frac{2 \times 1}{2 \times 3} = \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \boxed{\frac{1}{6}}$$

3. $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$

$$\frac{3}{5} \times \frac{7}{4} = \frac{3 \times 7}{5 \times 4} = \boxed{\frac{21}{20}}$$

4. $\frac{1}{2} \div \frac{1}{3}$

$$\frac{1}{2} \div \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{1} = \frac{1 \times 3}{2 \times 1} = \boxed{\frac{3}{2}}$$

■

■ **Exemple 1.15** Simplifier:

1. $\dfrac{\frac{1}{2} + \frac{3}{4}}{\frac{5}{6} + \frac{7}{8}}$

$$\frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{4}}{\frac{5}{6} + \frac{7}{8}} = \frac{\frac{2}{4} + \frac{3}{4}}{\frac{40}{48} + \frac{42}{48}} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{82}{48}} = \frac{5}{4} \div \frac{82}{48} = \frac{5}{4} \times \frac{48}{82} = \frac{240}{328} = \boxed{\frac{30}{41}}$$

2. $\dfrac{\frac{1}{2} + \frac{3}{4}}{\frac{5}{6} - \frac{7}{8}}$

$$\frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{4}}{\frac{5}{6} - \frac{7}{8}} = \frac{\frac{2}{4} + \frac{3}{4}}{\frac{40}{48} - \frac{42}{48}} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{-2}{48}} = \frac{5}{4} \div \frac{-1}{24} = \frac{5}{4} \times -\frac{24}{1} = \frac{5}{1} \times -\frac{6}{1} = \boxed{-30}$$

■

■ **Exemple 1.16** Simplifier:

1. $\dfrac{2021\times 3}{2021\times 3+2021\times 3}$

$$\frac{2021\times 3}{2021\times 3+2021\times 3}=\frac{6063}{6063+6063}=\boxed{\frac{1}{2}}$$

ou

$$\frac{2021\times 3}{2021\times 3+2021\times 3}=\frac{2021\times 3}{2021\times(3+3)}=\frac{3}{6}=\boxed{\frac{1}{2}}.$$

2. $\dfrac{2021\times 2}{2021\times 3+2021\times 5}$

$$\frac{2021\times 2}{2021\times 3+2021\times 5}=\frac{2021\times 2}{2021\times(3+5)}=\frac{2}{8}=\boxed{\frac{1}{4}}.$$

3. $\dfrac{2021\times 2}{2021\times 3-2021\times 5}$

$$\frac{2021\times 2}{2021\times 3-2021\times 5}=\frac{2021\times 2}{2021\times(3-5)}=\frac{2}{-2}=\boxed{-1}.$$

■

■ **Exemple 1.17** Faites les opérations suivantes sur les nombre décimaux:

1. $0,04\times 30$

$$0,04\times 30=\frac{4}{100}\times\frac{30}{1}=\frac{120}{100}=\boxed{1,2}$$

2. $0,04\times 3$

$$0,04\times 3=\frac{4}{100}\times\frac{3}{1}=\frac{12}{100}=\boxed{0,12}$$

3. $0,04\times 0,3$

$$0,04\times 0,3=\frac{4}{100}\times\frac{3}{10}=\frac{12}{1000}=\boxed{0,012}$$

4. $10\times 0,25$

$$10\times 0,25=\frac{10}{1}\times\frac{25}{100}=\frac{250}{100}=\boxed{2,5}$$

5. $100\div 0,25$

$$100\div 0,25=\frac{100}{1}\div\frac{25}{100}=\frac{100}{1}\times\frac{100}{25}=\frac{10000}{25}=\boxed{400}$$

6. $100\div 0,4$

$$100\div 0,4=\frac{100}{1}\div\frac{4}{10}=\frac{100}{1}\times\frac{10}{4}=\frac{1000}{4}=\boxed{250}$$

7. $0,5\times 0,25$

$$0,5\times 0,25=\frac{5}{10}\times\frac{25}{100}=\frac{125}{1000}=\boxed{0,125}$$

ou

$$0,5\times 0,25=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}=\boxed{0,125}$$

8. $0,125\div 0,05$

$$0,125\div 0,05=\frac{1}{8}\div\frac{1}{4}=\frac{1}{8}\times\frac{4}{1}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}=\boxed{0,5}$$

■

Définition 1.2.1 — Période d'un nombre rationnel. Dans l'écriture d'un nombre rationnel en notation décimale, groupe de chiffres qui se répète dans la partie décimale de ce nombre.

1. $\frac{5}{3} = 1,666666666\cdots = 1,\overline{6}$
2. $\frac{22}{7} = 3,142857142\cdots = 3,\overline{142857}$
3. $\frac{7}{5} = 1,4$ (la période est 0.)

■ **Exemple 1.18**

$$0,\overline{9} = 0,9999999999999.... = 1$$

- Le premier point de vue:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} &= 0,\overline{3} \\ \frac{1}{3} &= 0,\overline{3} \\ \frac{1}{3} &= 0,\overline{3} \\ \hline 3\times\frac{1}{3} &= 0,\overline{9} \\ 1 &= 0,\overline{9} \end{aligned}$$

- Le deuxième point de vue: Supposons que $x = 0,\overline{9}$, donc $10x = 9,\overline{9}$, ensuite

$$\begin{aligned} 10x &= 9,\overline{9} = 9,999999... \\ x &= 0,\overline{9} = 0,999999... \\ \hline 10x - x &= 9,999999... - 0,999999... \\ 9x &= 9 \\ x &= \frac{9}{9} = \boxed{1} \end{aligned}$$

■

■ **Exemple 1.19** Écrire $x = 0,\overline{27}$ en format rationnel $\frac{a}{b}$.

Solution: On a $100x = 27,\overline{27}$, alors

$$\begin{aligned} 100x - x &= 27,\overline{27} - 0,\overline{27} \\ 99x &= 27 \\ x &= \boxed{\frac{27}{99}} \end{aligned}$$

■

■ **Exemple 1.20** Écrire $x = 1,45\overline{123}$ en format rationnel $\frac{a}{b}$.

Solution: On a $100x = 145,\overline{123}$ et $100000x = 145123,\overline{123}$ et donc:

$$\begin{aligned} 100000x - 100x &= 145123,\overline{123} - 145,\overline{123} \\ 99900x &= 144978 \\ x &= \boxed{\frac{144978}{99900}} = \boxed{\frac{24163}{16650}} \end{aligned}$$

■

Exercices

Exercice 1.8 Évaluez les expressions suivantes:

1. $(2+3)\times 13-5\times 12$
2. $((2+1)\times(5+7))\times(2-3)$
3. $((1-4)\times(8-5))\times((9-3)\times(5-7))$
4. $(-(2\times 3)\times(4+1))-((3\times 2)-(4-6))$
5. $6\times 3\times 0-17\times 2$
6. $10-39\div 3+4$

■

Exercice 1.9 Calculer la valeur des expressions suivantes.

1. $\frac{1}{5}+\frac{1}{9}$
2. $\frac{5}{12}+\frac{5}{9}$
3. $\dfrac{\frac{3+2}{35}}{3+4}$
4. $\dfrac{1+\frac{1}{2}}{\frac{3+\frac{2}{5}+3}{3+4}}$

■

Exercice 1.10 Résoudre:

1. $(\frac{5}{8}\times\frac{6}{5})+\frac{4}{5}-\frac{2}{3}$
2. $(\frac{5}{8}\div\frac{6}{5})-\frac{4}{5}-\frac{2}{3}$
3. $(\frac{1}{2}\times\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}\times\frac{1}{5})$
4. $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}$
5. $(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})\times(\frac{1}{2}+\frac{1}{5})$
6. $(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})\div(\frac{1}{2}+\frac{1}{5})$
7. $(\frac{1}{2}\div\frac{4}{5})\times(\frac{5}{6}+\frac{1}{6})$
8. $\frac{2}{3}(\frac{5}{6}\div\frac{2}{3})+\frac{6}{7}(\frac{1}{6}+\frac{2}{3})$
9. $(-\frac{11}{2}(\frac{2}{3}+\frac{4}{7}))\times(-\frac{4}{3}(\frac{2}{5}-\frac{4}{15}))$
10. $(\frac{8}{9}+\frac{4}{7})(\frac{5}{2}+2)-(\frac{1}{4}-\frac{3}{10}+\frac{5}{8})$

■

Exercice 1.11 Faites les opérations suivantes sur les nombre décimaux:
1. $0,4 \times 0,25$
2. $0,4 \div 0,25$
3. $0,125 \times 0,25$
4. $0,125 \div 0,25$

Exercice 1.12 Mettre sous forme de fractions irréductibles les nombres x et y suivants

$$x = -8,\bar{2} \text{ et } y = 0,0\overline{162} \text{ et } z = 2,3\overline{25}.$$

Exercices supplémentaires

Exercice 1.13 Vrai ou faux:

1. Si $a,b \in \mathbb{Q}^c$, alors $a+b \in \mathbb{Q}^c$.
2. Si $a,b \in \mathbb{Q}^c$, alors $a.b \in \mathbb{Q}^c$.
3. Si $a,b \in \mathbb{Q}^c$ et $a \geq 0$, alors $a^b \in \mathbb{Q}^c$.

1.3 Exposants et racine n-ème

Définition 1.3.1 L'expression a^n où $n \in \mathbb{N}$, est définie comme suit:

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{\text{n}}.$$

Par exemple:

$$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$$

■ **Exemple 1.21** Effectuer les opérations suivantes:

1. $3 \times 4 + 5^2$
$$3 \times 4 + 5^2 = 12 + 25 = \boxed{37}$$
2. $3 \times (4+5)^2$
$$3 \times (4+5)^2 = 3 \times 9^2 = 3 \times 81 = \boxed{243}$$
3. $3 \times (4+5^2)$
$$3 \times (4+5^2) = 3 \times (4+25) = 3 \times 29 = \boxed{87}$$

■

■ **Exemple 1.22** Déterminer

$$2^{3^2} + (2^3)^2$$

$$2^{3^2} + (2^3)^2 = 2^9 + 8^2 = 512 + 64 = \boxed{576}$$

■

Définition 1.3.2 — Les exposant zéro. On considère maintenant un nombre a non nul, par définition:

$$a^0 = 1,$$

et 0^0 est indéfine. Par exemples

- $3^0 = 1$
- $(\frac{1}{2})^0 = 1$
- $(-2)^0 = 1$

■ **Exemple 1.23** Évaluez l'expression suivante:

$$(1-(28-3^3)+5^2-(5\times 6+7^0)-(4^2\div(2^3\div 2)))^3.$$

$$\begin{aligned}
&(1-(28-3^3)+5^2-(5\times 6+7^0)-(4^2\div(2^3\div 2)))^3\\
&\qquad = (1-(28-27)+25-(5\times 6+1)-(4^2\div 2^2))^3\\
&\qquad = (1-(28-27)+25-(5\times 6+1)-(2^2))^3\\
&\qquad = (1-(1)+25-(31)-(4))^3 = (-10)^3 = \boxed{-1000}
\end{aligned}$$

■

Définition 1.3.3 — Les exposants négatifs. On considère maintenant un nombre a non nul et un entier naturel n. Le nombre a^{-n}, lu « a puissance moins n » ou « a exposant moins n » est l'inverse de la puissance n-ième de a, c'est-à-dire :

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Par exemples

- $3^{-5} = \frac{1}{3^5}$
- $\frac{1}{2^8} = 2^{-8}$
- $\left(\frac{8}{6}\right)^{-3} = \left(\frac{6}{8}\right)^3$

■ **Exemple 1.24** Évaluez l'expression suivante:

1. -3^2

$$-3^2 = (-1) \times 3^2 = (-1) \times 3 \times 3 = \boxed{-9}$$

2. $(-3)^2$

$$(-3)^2 = (-3) \times (-3) = \boxed{9}$$

3. $(-3)^{-2}$

$$(-3)^{-2} = \frac{1}{(-3)^2} = \frac{1}{(-3) \times (-3)} = \boxed{\frac{1}{9}}$$

4. -3^{-2}

$$-3^{-2} = (-1)(3^{-2}) = -\frac{1}{3^2} = -\frac{1}{3 \times 3} = \boxed{-\frac{1}{9}}$$

■

Remarque 1.3.1 — Les propriétés des exposants. Pour $a, b \in \mathbb{R}$ et $m, n \in \mathbb{N}$ on a,

- Si deux puissances d'une même base sont égales, alors les exposants sont égaux.

$$a^m = a^n \Longrightarrow m = n$$

- Produit de puissances de même base:

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

- Quotient de puissances de même base :

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \text{ où } a \neq 0$$

- Puissance d'un produit :

$$(ab)^m = a^m b^m$$

- Puissance d'un quotient :

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m} \text{ où } b \neq 0$$

- Puissance d'une puissance :

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

■ **Exemple 1.25** Simplifier l'expression suivante:

1. $2^{-8}\times(2^{-2}\times2\times2^5)^4$

$$2^{-8}\times(2^{-2}\times2\times2^5)^4=2^{-8}\times(2^{-2+1+5})^4=2^{-8}\times(2^4)^4=2^{-8}\times2^{16}=\boxed{2^8}$$

2. $\dfrac{2^5\times2^3}{2^4}$

$$\frac{2^5\times2^3}{2^4}=\frac{2^8}{2^4}=2^{8-4}=\boxed{2^4}$$

■

■ **Exemple 1.26** Simplifier:

1. $8^3\times4^5$

$$8^3\times4^5=(2^3)^3\times(2^2)^5=2^9\times2^{10}=\boxed{2^{19}}.$$

2. $4^4\times81^2$

$$4^4\times81^2=(2^2)^4\times(3^4)^2=2^8\times3^8=\boxed{6^8}.$$

■

■ **Exemple 1.27** Que vaut n dans les expressions suivantes?

1. $(6^2)^3=6^n$

$$(6^2)^3=6^{2\times3}=6^6=6^n\Longrightarrow n=6$$

2. $6^{2^3}=6^n$

$$6^{2^3}=6^{(2^3)}=6^8=6^n\Longrightarrow n=8$$

3. $4^7\times2^9=2^n$

$$4^7\times2^9=(2^2)^7\times2^9=2^{14}\times2^9=2^{23}=2^n\Longrightarrow n=23$$

4. $13^n=11^0$

$$13^n=11^0=1\Longrightarrow n=0$$

■

■ **Exemple 1.28** Résoudre les équations suivantes:

1. $2^{3n-1}=2^n$

$$\begin{aligned}2^{3n-1}&=2^n\\3n-1&=n\\3n-n&=1\\2n&=1\Longrightarrow\boxed{n=\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

2. $2^{3n-1}=4^n$

$$\begin{aligned}2^{3n-1}&=4^n=2^{2n}\\3n-1&=2n\\3n-2n&=1\\n&=1\Longrightarrow\boxed{n=1}\end{aligned}$$

3. $4^{3n-1} = 8^n$

$$\begin{aligned}
4^{3n-1} &= 8^n \\
2^{2(3n-1)} &= 2^{3n} \\
2(3n-1) &= 3n \\
6n-2 &= 3n \\
6n-3n &= 2 \\
3n = 2 &\Longrightarrow \boxed{n = \frac{2}{3}}
\end{aligned}$$

■

Définition 1.3.4 — Les racines et les exposants fractionnaires. La **racine nième** d'un nombre a notée par $\sqrt[n]{a}$ est un nombre x tel que:

$$x^n = \underbrace{x \times x \times x \times \cdots \times x}_{n\text{-fois}} = a,$$

Par exemple la racine carré ou radical de 5 ou $\sqrt{5}$ est un nombre x tel que:

$$x^2 = x \times x = 5,$$

On peux écrire $x = \sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}}$ car

$$5^{\frac{1}{2}}.5^{\frac{1}{2}} = (5^{\frac{1}{2}})^2 = 5^{\frac{2}{2}} = 5^1 = 5.$$

■ **Exemple 1.29** Évaluer:

1. $\sqrt{25}$
$$\sqrt{25} = 25^{\frac{1}{2}} = (5^2)^{\frac{1}{2}} = 5^{2\times\frac{1}{2}} = 5^1 = \boxed{5}$$
2. $\sqrt[3]{27}$
$$\sqrt[3]{27} = 27^{\frac{1}{3}} = (3^3)^{\frac{1}{3}} = 3^{3\times\frac{1}{3}} = 3^1 = \boxed{3}$$
3. $\sqrt{81}$
$$\sqrt{81} = 81^{\frac{1}{2}} = (9^2)^{\frac{1}{2}} = 9^{2\times\frac{1}{2}} = 9^1 = \boxed{9}$$
ou
$$\sqrt{81} = 81^{\frac{1}{2}} = (3^4)^{\frac{1}{2}} = 3^{4\times\frac{1}{2}} = 3^2 = \boxed{9}$$
4. $\sqrt[4]{81}$
$$\sqrt[4]{81} = 81^{\frac{1}{4}} = (3^4)^{\frac{1}{4}} = 3^{4\times\frac{1}{4}} = 3^1 = \boxed{3}$$

■

Remarque 1.3.2 — Propriétés des radicaux. Pour $a, b \geq 0$ et $m, n \in \mathbb{N}$ on a:

- $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$
- $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ si $b \neq 0$.

- $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

■ **Exemple 1.30** Simplifier

1. $\sqrt{1000000}$
$$\sqrt{1000000} = 1000000^{\frac{1}{2}} = (10^6)^{\frac{1}{2}} = 10^{6\times\frac{1}{2}} = 10^3 = \boxed{1000}$$
2. $\sqrt[3]{1000000}$
$$\sqrt[3]{1000000} = 1000000^{\frac{1}{3}} = (10^6)^{\frac{1}{3}} = 10^{6\times\frac{1}{3}} = 10^2 = \boxed{100}$$
3. $\sqrt[4]{1000000}$
$$\sqrt[4]{1000000} = 1000000^{\frac{1}{4}} = (10^6)^{\frac{1}{4}} = 10^{6\times\frac{1}{4}} = 10^{\frac{3}{2}} = 10\times 10^{\frac{1}{2}} = \boxed{10\sqrt{10}}$$
ou
$$\sqrt[4]{1000000} = \sqrt[4]{10000\times 100} = \sqrt[4]{10000}\times\sqrt[4]{100} = (10^4)^{\frac{1}{4}}\times(10^2)^{\frac{1}{4}} = 10\times 10^{\frac{1}{2}} = \boxed{10\sqrt{10}}$$
4. $\sqrt[5]{1000000}$
$$\sqrt[5]{1000000} = 1000000^{\frac{1}{5}} = (10^6)^{\frac{1}{5}} = 10^{6\times\frac{1}{5}} = 10^{\frac{6}{5}} = 10\times 10^{\frac{1}{5}} = \boxed{10\sqrt[5]{10}}$$
ou
$$\sqrt[5]{1000000} = \sqrt[5]{100000\times 10} = \sqrt[5]{100000}\times\sqrt[5]{10} = (10^5)^{\frac{1}{5}}\times(10)^{\frac{1}{5}} = 10\times 10^{\frac{1}{5}} = \boxed{10\sqrt[5]{10}}$$
5. $\sqrt[6]{1000000}$
$$\sqrt[6]{1000000} = 1000000^{\frac{1}{6}} = (10^6)^{\frac{1}{6}} = 10^{6\times\frac{1}{6}} = 10^1 = \boxed{10}$$
6. $\sqrt[7]{1000000}$
$$\sqrt[7]{1000000} = 1000000^{\frac{1}{7}} = (10^6)^{\frac{1}{7}} = 10^{6\times\frac{1}{7}} = 10^{\frac{6}{7}} = 10\times 10^{-\frac{1}{7}} = \boxed{\frac{10}{\sqrt[7]{10}}}$$
ou
$$\sqrt[7]{1000000} = \sqrt[7]{\frac{10000000}{10}} = \frac{\sqrt[7]{10000000}}{\sqrt[7]{10}} = \frac{(10^7)^{\frac{1}{7}}}{10^{\frac{1}{7}}} = \boxed{\frac{10}{\sqrt[7]{10}}}$$
7. $\sqrt{0,000001}$
$$\sqrt{0,000001} = 0,000001^{\frac{1}{2}} = (10^{-6})^{\frac{1}{2}} = 10^{-6\times\frac{1}{2}} = 10^{-3} = \boxed{0,001}$$
8. $\sqrt[3]{0,000001}$
$$\sqrt[3]{0,000001} = 0,000001^{\frac{1}{3}} = (10^{-6})^{\frac{1}{3}} = 10^{-6\times\frac{1}{3}} = 10^{-2} = \boxed{0,01}$$

■

■ **Exemple 1.31** Évaluer les expressions suivantes:

1. $\sqrt{12}\times\sqrt{3}$
$$\sqrt{12}\times\sqrt{3} = \sqrt{36} = \boxed{6}$$
2. $(\sqrt{18}-\sqrt{2})\sqrt{2}$
$$(\sqrt{18}-\sqrt{2})\sqrt{2} = \sqrt{18\times 2}-\sqrt{2\times 2} = \sqrt{36}-\sqrt{4} = 6-2 = \boxed{4}$$

3. $\dfrac{\sqrt{500}}{\sqrt[4]{80}}$

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{500}}{\sqrt[4]{80}} &= \frac{\sqrt{5\times 100}}{\sqrt[4]{16\times 5}}\\ &= \frac{\sqrt{5}\times\sqrt{100}}{\sqrt[4]{16}\times\sqrt[4]{5}}\\ &= \frac{5^{\frac{1}{2}}\times 10}{2\times 5^{\frac{1}{4}}} = \frac{5^{\frac{1}{2}}\times 5}{1\times 5^{\frac{1}{4}}} = 5^{\frac{1}{2}+1-\frac{1}{4}} = \boxed{5^{\frac{5}{4}}}\end{aligned}$$

■

■ **Exemple 1.32** Simplifier l'expression suivante:

$$\begin{aligned}(\sqrt[3]{3^4}\times 5^2)\div\left(\left(\frac{1}{5}\right)^3\times 3^{\frac{1}{3}}\right) &= (3^{\frac{4}{3}}\times 5^2)\div\left(\left(\frac{1}{5}\right)^3\times 3^{\frac{1}{3}}\right)\\ &= (3^{\frac{4}{3}}\times 5^2)\div\left(5^{-3}\times 3^{\frac{1}{3}}\right)\\ &= \frac{3^{\frac{4}{3}}\times 5^2}{3^{\frac{1}{3}}\times 5^{-3}}\\ &= \frac{3^{\frac{4}{3}}}{3^{\frac{1}{3}}}\times\frac{5^2}{5^{-3}} = 3^{\frac{4}{3}-\frac{1}{3}}\times 5^{2-(-3)} = \boxed{3\times 5^5}\end{aligned}$$

■

1.4 Calcul des logarithmes

Considérer $3^5 = 243$. Comme nous l'avons vu dans la section précédente, si nous regardons la base on peut écrire:

$$3 = \sqrt[5]{243},$$

maintenant, si nous regardons l'exposant on peut écrire:

$$5 = \log_3^{243}$$

En général, pour $x > 0$ et $b > 0$, $b \neq 1$,

$$b^r = x \Longleftrightarrow r = \log_b^x$$

■ **Exemple 1.33** Quelle est la valeur de $\log_2 8$?
Quel exposant doit-on donner à la base $b = 2$ pour obtenir 8? On a $2^3 = 8$, donc

$$\log_2^8 = 3.$$

■

■ **Exemple 1.34** Quelle est la valeur de $\log_{10}^{100000000}$?
Quel exposant doit-on donner à la base $b = 10$ pour obtenir 100000000? On a $10^8 = 100000000$, donc

$$\log_{10}^{100000000} = 8.$$

■

Remarque 1.4.1 En général pour $b > 0$ et $b \neq 1$:

$$\log_b^{b^r} = r.$$

Remarque 1.4.2 — Convention. Pour le base $b = 10$ juste on peut écrire log au lieu de $\log_{10}$. Par exemple:

$$\log 100 = 2.$$

Aussi pour le base $e = 2,71828...$[a] juste on peut écrire ln au lieu de $\log_e$ et appelée **logarithme naturel** ou **logarithme népérien**.

[a]Cette constante mathématique, également appelée nombre d'Euler ou constante de Néper en référence aux mathématiciens Leonhard Euler et John Napier.

■ **Exemple 1.35** Quelle est la valeur de $\log_3^1$?
Quel exposant doit-on donner à la base $b = 3$ pour obtenir 1? On a $3^0 = 1$, donc

$$\log_3^1 = 0.$$

■

Remarque 1.4.3 En général pour $b > 0$ et $b \neq 1$:

$$\log_b^1 = 0.$$

■ **Exemple 1.36** Quelle est la valeur de $\log_{\frac{1}{4}}^{64}$?
Quel exposant doit-on donner à la base $b = \dfrac{1}{4}$ pour obtenir 64? On a

$$(\frac{1}{4})^{-3} = (4^{-1})^{-3} = 4^{(-1)\times(-3)} = 4^3 = 64,$$

donc

$$\log_{\frac{1}{4}}^{64} = -3.$$

■

Remarque 1.4.4 — Les lois des logarithmes. Supposons que $x, y, b > 0$ et $b \neq 1$, alors

- Le logarithme d'un produit:
$$\log_b^{xy} = \log_b^x + \log_b^y.$$
- Le logarithme d'un quotient:
$$\log_b^{\frac{x}{y}} = \log_b^x - \log_b^y.$$
- Simplification:
$$\log_{b^n}^{x^m} = \frac{m}{n}\log_b^x.$$
- Le changement de base:
$$\log_y^x = \frac{\log_b^x}{\log_b^y}.$$

■ **Exemple 1.37** Calculer sans la calculatrice les valeurs suivantes.

1. $\log_3^1$
$$\log_3^1 = \boxed{0}$$

2. $\log_2^{256}$

$$\log_2^{256} = \log_2^{2^8} = \boxed{8}$$

3. $\log_{12}^4 + \log_{12}^{36}$

$$\log_{12}^4 + \log_{12}^{36} = \log_{12}^{4\times 36} = \log_{12}^{144} = \log_{12}^{12^2} = \boxed{2}$$

4. $\log_2^{686} - \log_2^{343}$

$$\log_2^{686} - \log_2^{343} = \log_2^{\frac{686}{343}} = \log_2^2 = \boxed{1}$$

5. $\log_{2^5}^{2^{17}}$

$$\log_{2^5}^{2^{17}} = \frac{17}{5}\log_2^2 = \boxed{\frac{17}{5}}$$

6. $\log_9^3$

$$\log_9^3 = \log_{3^2}^3 = \frac{1}{2}\log_3^3 = \boxed{\frac{1}{2}}$$

7. $\log_{0,001}^{0,0001}$

$$\log_{0,001}^{0,0001} = \log_{10^{-3}}^{10^{-4}} = \frac{-4}{-3}\log_{10}^{10} = \boxed{\frac{4}{3}}$$

8. $2^{\log_2^3}$
   Si $x = \log_2^3$, c-a-d $2^x = 3$, alors $2^{\log_2^3} = 2^x = 3$.

■

■ **Exemple 1.38** Traduire sous la forme logarithmique.

1. $0,0001 = 10^{-4}$

$$\log(0,0001) = -4$$

2. $4 = \sqrt[3]{64}$

$$4 = \sqrt[3]{64} \Longrightarrow 4^3 = 64 \Longrightarrow \log_4^{64} = 3$$

3. $9 = 27^{\frac{2}{3}}$

$$\log_{27}^9 = \frac{2}{3}$$

4. $\frac{1}{2} = 32^{-\frac{1}{5}}$

$$\log_{32}^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{5}$$

■

■ **Exemple 1.39** En sachant que $\log_b^2 = A$ et $\log_b^3 = B$, évaluer :

1. $\log_b^{\frac{8}{9}}$

$$\log_b^{\frac{8}{9}} = \log_b^8 - \log_b^9 = \log_b^{2^3} - \log_b^{3^2} = 3\log_b^2 - 2\log_b^3 = \boxed{3A-2B}$$

2. $\log_2^3$

$$\log_2^3 = \frac{\log_b^3}{\log_b^2} = \boxed{\frac{B}{A}}$$

3. $\log_b^{6b}$

$$\log_b^{6b} = \log_b^2 + \log_b^3 + \log_b^b = \boxed{A+B+1}$$

■

■ **Exemple 1.40** Déterminer la valeur de A dans l'égalité suivante:

$$\log_5^{3^5}+\log_3^{7^2}-\log_7^{2^5}=\log_2^A$$

On peux écrire:

$$\begin{aligned}\log_2^A &= \log_5^{3^5}+\log_3^{7^2}-\log_7^{2^5}\\ &= 5\log_5^3+2\log_3^7-5\log_7^2\end{aligned}$$

alors

$$\boxed{A=2^{5\log_5^3+2\log_3^7-5\log_7^2}}$$

■

■ **Exemple 1.41** Résoudre les équations suivantes

1. $\log_3^x=5$

$$\boxed{x=3^5=243}$$

2. $\log_x^{32}=\dfrac{5}{3}$

$$\log_x^{32}=\log_x^{2^5}=5\log_x^2=\frac{5}{3},$$

donc $\log_x^2=\dfrac{1}{3}$, alors $x^{\frac{1}{3}}=2$,

$$x=(x^{\frac{1}{3}})^3=2^3=\boxed{8}$$

3. $2^x=100$

$$\begin{aligned}x=\log_2^{100} &= \log_2^{4\times 25}\\ &= \log_2^{2^2\times 5^2}\\ &= \log_2^{2^2}+\log_2^{5^2}\\ &= 2\log_2^2+2\log_2^5\\ &= \boxed{2+2\log_2^5}\end{aligned}$$

■

■ **Exemple 1.42** Résoudre

$$11^{3x+5}\times 7^{8x-2}=5^{2x}$$

$$\begin{aligned}\ln(11^{3x+5}\times 7^{8x-2}) &= \ln(5^{2x})\\ \ln(11^{3x+5})+\ln(7^{8x-2}) &= \ln(5^{2x})\\ (3x+5)\ln 11+(8x-2)\ln 7 &= (2x)\ln 5\\ (3\ln 11)x+5\ln 11+(8\ln 7)x-2\ln 7 &= (2\ln 5)x\\ (3\ln 11)x+(8\ln 7)x-(2\ln 5)x &= 2\ln 7-5\ln 11\\ (3\ln 11+8\ln 7-2\ln 5)x &= 2\ln 7-5\ln 11\end{aligned}$$

Alors

$$x=\frac{2\ln 7-5\ln 11}{3\ln 11+8\ln 7-2\ln 5}.$$

■

■ **Exemple 1.43 — intérêts composés.** Pour calculer des intérêts composés annuellement, dont la formule est :

$$P = P_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt},$$

Ici,

$$\begin{aligned} P_0 &= \text{le montant de votre capital initial}\\ P &= \text{la valeur finale}\\ r &= \text{le taux d'intérêts annuel}\\ n &= \text{le nombre de paiements par an}\\ t &= \text{le nombre de périodes (Durée)} \end{aligned}$$

Quelle est la valeur finale d'un placement de 3000 dollar avec un taux d'intérêt composé de 3,25%une période de 2 ans?

$$P = (3000)\left(1+\frac{\frac{3{,}25}{100}}{1}\right)^{1\times 2} = 3000\times(1,0325)^2 \approx \boxed{3198,168}$$

■

Exercices

Exercice 1.14 Traduire sous la forme logarithmique.
1. $2 = \sqrt[5]{32}$
2. $9^{-6} = \dfrac{1}{531441}$
3. $\mathbf{e}^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\mathbf{e}}$

■

Exercice 1.15 Calculer sans la calculatrice les valeurs suivantes.
1. $\log_4^{1024}$
2. $\log_7^{343}$
3. $\log_{\frac{3}{8}}^{\frac{27}{512}}$
4. $\ln \dfrac{1}{\sqrt[5]{\mathbf{e}}}$
5. $\log_{5^3}^{25^{17}}$
6. $\log_2^{\sqrt[7]{32}}$
7. $\log_{0,1}^{0,0001}$
8. $\log_{0,0001}^{0,1}$
9. $3^{\log_3^{27}}$
10. $\dfrac{\log 5 - \log 8 - 1}{\log(2\sqrt{2}) + \log 4}$

■

Exercice 1.16 Résoudre les équations suivantes
1. $(\dfrac{1}{2})^x = 8$
2. $7 + 15\mathbf{e}^{1-3x} = 10$
3. $6^{3x+1} = 4^{5x+2}$
4. $5^{2x+1} = (0,04)^{-28}$
5. $4\mathbf{e}^{1+3x} - 9\mathbf{e}^{5-2x} = 0$
6. $5^{2x+5} \times 3^{8x-2} = 5^{2x}$
7. $5^{2x+5} \times 3^{8x-2} = 5^{2x} \times 7^{2x+1}$
8. $2\ln(\sqrt{x}) - \ln(1-x) = 2$
9. $\log(2 + \log_2^{x+1}) = 0$
10. $\log_2^3 \cdot \log_3^4 \cdot \log_4^5 \cdot \cdots \cdot \log_n^{n+1} = 10$

■

Exercice 1.17 Déterminer l'ordre croissant des nombres suivants:

$$2^{4643},\ 3^{2930},\ 5^{2000},\ 7^{1654}$$

■

Exercice 1.18 La valeur de revente d'une auto diminue de 20% à chaque année. Si l'auto coûte initialement 20000$, quelle est sa valeur de revente après quatre ans. ■

Exercices supplémentaires

Exercice 1.19 Résoudre

$$\log_{10}^{\log_9^{\log_8^{\log_7^{\log_6^{\log_5^{\log_4^{\log_3^{\log_2^x}}}}}}}} = 0.$$

2. Polynômes et les expression algébrique

2.1 Polynômes et opérations sur les polynômes

Définition 2.1.1 — Monômes. Les monômes sont des expressions algébriques contenant un seul et unique terme. Les termes peuvent être constants ou algébriques.

■ **Exemple 2.1** Par exemple x^2, $5xy^3$, $6s^2t$ et 7 sont tous des monômes ■

Définition 2.1.2 — Polynômes. Les polynômes sont des expressions algébriques contenant un ou plusieurs termes. Un polynôme est en fait la somme ou la différence algébrique de plusieurs monômes.

■ **Exemple 2.2** Par exemple

- x^2+2x+1 est un polynôme.
- $x^3+2xy+5xy^3+7x+2y+1$ est un polynôme.
- $x^3+6s^2t-4x+5t+2$ est un polynôme.

■

Remarque 2.1.1 Le polynôme x^2+2x+1 est noté par $P(x)=x^2+2x+1$, parce qu'on a une variable x, le polynôme $x^3+2xy+5xy^3+7x+2y+1$ est noté par $Q(x,y)$ car on a deux variables x et y, de même $x^3+6s^2t-4x+5t+2$ est noté par $R(x,s,t)$.

Définition 2.1.3 — Degré. Le **degré d'un terme** est la somme des exposants qui affectent ses variables. Le degré d'un terme constant est 0.
Le **degré d'un polynôme** est le plus grand des degrés de ses termes. Le degré d'un polynôme P notée par $deg(P)$

■ **Exemple 2.3** Par exemple

- $deg(10x^3y^2z)=6$
- $deg(12x^3y-8xy+9)=4$ à cause de $12x^3y$.

■

Définition 2.1.4 — Valeur numérique. Résultat obtenu quand on remplace chaque variable par le nombre qu'elle représente.

■ **Exemple 2.4** Par exemples

- Pour $P(x) = x^2 + 2x + 1$, $P(2)$ est égal a

$$P(2) = (2)^2 + 2(2) + 1 = 4 + 4 + 1 = 9$$

- Pour $Q(x,y) = x^3 + 2xy + 5xy^3 + 7x + 2y + 1$, $Q(2,0)$ est égal a

$$Q(2,0) = (2)^3 + 2(2)(0) + 5(2)(0)^3 + 7(2) + 2(0) + 1 = 8 + 0 + 0 + 14 + 0 + 1 = 23.$$

Remarque 2.1.2 — Opérations sur les polynômes. On peut effectuer, sur des polynômes, les mêmes opérations élémentaires que sur les nombres réels, soit l'addition, la soustraction, la multiplication et la division.

1. Pour **additionner** deux polynômes, il suffit d'additionner les coefficients des termes semblables, c'est-à-dire les termes qui ont les mêmes variables affectées des mêmes exposants.

   Par exemple:
   - $x^2 + 3x^2 = 4x^2$
   - $x^2 + x^3 + 5x^2 + x + 1 = x^3 + 6x^2 + x + 1$
   - $x^2y + 3xy^2 + 7x^2y = 8x^2y + 3xy^2$
   - Soit $P(x) = 3x^3 + x^2 + 2x + 1$ et $Q(x,y) = x^2 + xy + 3x + y + 3$:

$$\begin{aligned} P(x) + Q(x,y) &= (3x^3 + x^2 + 2x + 1) + (x^2 + xy + 3x + y + 3) \\ &= 3x^3 + (x^2 + x^2) + xy + (2x + 3x) + y + (1 + 3) \\ &= 3x^3 + 2x^2 + xy + 5x + y + 4. \end{aligned}$$

2. Pour **soustraire** un polynôme Q d'un polynôme P (c'est-à-dire pour effectuer l'opération $P - Q$), il suffit d'additionner à P l'opposé de Q. L'opposé d'un polynôme P est le polynôme $-P$ qu'on obtient en multipliant tous les coefficients de P par -1.

   Par exemple:
   - $x^2 - 3x^2 = -2x^2$
   - $x^2 - x^3 - 5x^2 + x + 1 = -x^3 - 4x^2 + x + 1$
   - $x^2y - 3xy^2 + 7x^2y = 8x^2y - 3xy^2$
   - Soit $P(x) = 3x^3 + x^2 + 2x + 1$ et $Q(x,y) = x^2 + xy + 3x + y + 3$:

$$\begin{aligned} P(x) - Q(x,y) &= (3x^3 + x^2 + 2x + 1) - (x^2 + xy + 3x + y + 3) \\ &= 3x^3 + (x^2 - x^2) - xy + (2x - 3x) - y + (1 - 3) \\ &= 3x^3 - xy - x - y - 2. \end{aligned}$$

3. La **multiplication** d'expressions algébriques fait appel aux propriétés des exposants. Avec des variables, ces propriétés sont identiques à celles qui s'appliquent aux nombres réels.

   Par exemple:
   - $x^2 \cdot 3x^2 = 1 \cdot 3 \cdot x^2 \cdot x^2 = 3x^4$
   - $3x \cdot 4y = 3 \cdot 4 \cdot x \cdot y = 12xy$
   - $x^2y^3 \cdot x^3y^7 = x^2 \cdot x^3 \cdot y^3 \cdot y^7 = x^{(2+3)} \cdot y^{(3+7)} = x^5y^{10}$

- Soit $P(x,y) = -3x^3y^4 + y$ et $Q(x,y) = 4xy^2 + 2xy$:

$$\begin{aligned} P(x,y)\cdot Q(x,y) =& (-3x^3y^4+y)\cdot(4xy^2+2xy) \\ &= (-3x^3y^4\cdot 4xy^2)+(-3x^3y^4\cdot 2xy)+(y\cdot 4xy^2)+(y\cdot 2xy) \\ &= (-12x^4y^6)+(-6x^4y^5)+(4xy^3)+(2xy^2) \\ &= -12x^4y^6 - 6x^4y^5 + 4xy^3 + 2xy^2. \end{aligned}$$

Pour multiplier deux termes, il faut d'abord multiplier les coefficients, puis multiplier les variables ensembles. Pour multiplier deux polynômes, il suffit de multiplier chaque terme du premier par chaque terme du deuxième.

4. La **division** de polynômes s'effectue sensiblement de la même façon que la division de deux nombres entiers, en cherchant un quotient et, éventuellement, un reste.

Par exemple:

- $(x^3y^4)\div(xy^2) = \dfrac{x^3y^4}{xy^2} = x^{3-1}y^{4-2} = x^2y^2$
- $25x^3y^9z \div (5x^3y^6) = \dfrac{25x^3y^9z}{5x^3y^6} = 5x^{3-3}y^{9-6}z = 5y^3z$
- Soit $P(x,y) = 12xy^2 + 6x^8y^6$ et $Q(x,y) = -3x^3y^4$:

$$\begin{aligned} \frac{P(x,y)}{Q(x,y)} &= \frac{12xy^2+6x^8y^6}{-3x^3y^4} \\ &= \frac{12xy^2}{-3x^3y^4} + \frac{6x^8y^6}{-3x^3y^4} \\ &= -4\frac{xy^2}{x^3y^4} + -2\frac{x^8y^6}{x^3y^4} \\ &= -4x^{1-3}y^{2-4} - 2x^{8-3}y^{6-4} \\ &= -4x^{-2}y^{-2} - 2x^5y^2 = \frac{-4}{x^2y^2} - 2x^5y^2. \end{aligned}$$

■ **Exemple 2.5** Effectuer les opérations sur les polynômes:

1. $(3x^2-2x+7)+(x^2+6x-4)$

$$(3x^2-2x+7)+(x^2+6x-4) = (3x^2+x^2)+(-2x+6x)+(7-4) = \boxed{4x^2+4x+3}$$

2. $(5x^2+8x+6)-(3x^2-5x+8)$

$$(5x^2+8x+6)-(3x^2-5x+8) = (5x^2-3x^2)+(8x-(-5x))+(6-8) = \boxed{2x^2+13x-2}$$

3. $(x+3y)\cdot(3x+z)$

$$(x+3y)\cdot(3x+z) = x\cdot(3x+z)+3y\cdot(3x+z) = \boxed{3x^2+xz+9xy+3yz}$$

4. $(2xy+3z)^2$

$$\begin{aligned} (2xy+3z)^2 &= (2xy+3z)\cdot(2xy+3z) \\ &= 2xy\cdot(2xy+3z)+3z\cdot(2xy+3z) \\ &= 4x^2y^2+6xyz+6zxy+9z^2 \\ &= \boxed{4x^2y^2+126xyz+9z^2} \end{aligned}$$

5. $(x-4)\cdot(3x+2)\cdot(6x-5)$

$$\begin{aligned}(x-4)\cdot(3x+2)\cdot(6x-5) &= (x-4)\cdot[(3x+2)\cdot(6x-5)]\\ &= (x-4)\cdot[3x\cdot(6x-5)+2\cdot(6x-5)]\\ &= (x-4)\cdot[18x^2-15x+12x-10]\\ &= (x-4)\cdot[18x^2-13x-10]\\ &= x\cdot[18x^2-13x-10]-4\cdot[18x^2-13x-10]\\ &= [18x^3-13x^2-10x]-\cdot[72x^2-52x-40]\\ &= \boxed{18x^3+69x^2+42x+40}\end{aligned}$$

6. $(3x^4-x^3+4x-5)\cdot(x^2+2x-1)$

$$\begin{aligned}&(3x^4-x^3+4x-5)\cdot(x^2+2x-1)\\ &= 3x^4\cdot(x^2+2x-1)-x^3\cdot(x^2+2x-1)+4x\cdot(x^2+2x-1)-5\cdot(x^2+2x-1)\\ &= 3x^6+6x^5-3x^4-x^5-2x^4+x^3+4x^3+8x^2-4x-5x^2-10x+5\\ &= \boxed{3x^6+5x^5-5x^4+5x^3+3x^2-14x+5}\end{aligned}$$

7. $(x^3+2x+1)\cdot(x^2+xy+3x+y+3)$

$$\begin{aligned}(x^3+2x+1)\cdot(x^2+xy+3x+y+3) =&3x^3\cdot(x^2+xy+3x+y+3)\\ &+2x\cdot(x^2+xy+3x+y+3)\\ &+1\cdot(x^2+xy+3x+y+3)\\ &=[x^3\cdot x^2+x^3\cdot xy+x^3\cdot 3x+x^3\cdot y+x^3\cdot 3)]\\ &+[2x\cdot x^2+2x\cdot xy+2x\cdot 3x+2x\cdot y+2x\cdot 3]\\ &+[1\cdot x^2+1\cdot xy+1\cdot 3x+1\cdot y+1\cdot 3]\\ &=[x^5+x^4y+3x^4+x^3y+3x^3]\\ &+[2x^3+2x^2y+6x^2+2xy+6x]\\ &+[x^2+xy+3x+y+3]\\ &=\boxed{x^5+x^4y+3x^4+x^3y+5x^3+2x^2y+7x^2+3xy+9x+y+3}\end{aligned}$$

8. $(xz+yz)\div z$

$$(xz+yz)\div z=\frac{xz+yz}{z}=\frac{xz}{z}+\frac{yz}{z}=\boxed{x+y}$$

■

Remarque 2.1.3 — Identités algébriques. Supposons que $x,a\in\mathbb{R}$, alors

1. Le carré d'une somme

$$\mathbf{(x+a)^2=x^2+2ax+a^2}$$

- $(x+1)^2=x^2+2(x)(1)+(1)^2=x^2+2x+1$
- $(x-1)^2=x^2+2(x)(-1)+(-1)^2=x^2-2x+1$
- $(x^2+1)^2=(x^2)^2+2(x^2)(1)+(1)^2=x^4+2x^2+1$
- $(2x+3y)^2=(2x)^2+2(2x)(3y)+(3y)^2=4x^2+12xy+9y^2$

2. Le pruduit de deux sommes

$$(\mathbf{x}+\mathbf{a})(\mathbf{x}+\mathbf{b}) = \mathbf{x^2}+(\mathbf{a}+\mathbf{b})\mathbf{x}+\mathbf{ab}$$

   - $(x+2)(x+3) = x^2+(2+3)x+(2)(3) = x^2+5x+6$
   - $(1+x)(1+y) = 1^2+(x+y)(1)+xy = 1+x+y+xy$

3. La différence de deux carrés

$$\mathbf{x^2}-\mathbf{a^2} = (\mathbf{x}-\mathbf{a})(\mathbf{x}+\mathbf{a})$$

   - $x^2-1 = x^2-1^2 = (x-1)(x+1)$
   - $x^2-4y^2 = x^2-(2y)^2 = (x-2y)(x+2y)$

4. La somme de deux cubes

$$\mathbf{x^3}+\mathbf{a^3} = (\mathbf{x}+\mathbf{a})(\mathbf{x^2}-\mathbf{ax}+\mathbf{a^2})$$

   - $x^3+1 = x^3+1^3 = (x+1)(x^2-(1)x+(1)^2) = (x+1)(x^2-x+1)$
   - $x^3-1 = x^3+(-1)^3 = (x-1)(x^2-(-1)x+(-1)^2) = (x+1)(x^2+x+1)$

5. Le cube d'une somme

$$(\mathbf{x}+\mathbf{a})^3 = \mathbf{x^3}+\mathbf{3ax^2}+\mathbf{3a^2x}+\mathbf{a^3}$$

■ **Exemple 2.6** Effectuer les produits suivants et simplifier :

1. $(x+2)^2$,
   On a le carré d'une somme, alors
$$(x+2)^2 = x^2+2(2)x+(2)^2 = x^2+4x+4.$$
2. $(x-8)(x+8)$
   On a le cube d'une somme, alors
$$(x-8)(x+8) = x^2-(8^2) = x^2-64.$$
3. $(x+3)(x-4)$
   On a le pruduit de deux sommes., alors
$$(x+3)(x-4) = x^2+(3-4)x+(3)(-4) = x^2-x-12.$$
4. $(x-3)^3$
   On a la différence de deux carrés, alors
$$(x-3)^3 = x^3+3(-3)x^2+3(-3)^2x+(-3)^3 = x^3-9x^2+27x-27.$$
5. $(x+2)(x^2-2x+4)$
   On a la somme de cubes, alors
$$(x+2)(x^2-2x+4) = x^3+(2)^3 = x^3+8.$$

■

■ **Exemple 2.7** Factoriser les expressions suivantes :

1. $6ab+18ac$
$$6ab+18ac = 6a(b+3c)$$
2. $2ax-3bx+2ay-3by$
$$2ax-3bx+2ay-3by = x(2a-3b)+y(2a-3b) = (2a-3b)(x+y)$$

3. $4x^2y+6xy^2+8xy$
$$4x^2y+6xy^2+8xy = 2xy(2x+3y+4)$$
4. $xy^2z+x^3yz+xyz$
$$xy^2z+x^3yz+xyz = xyz(y+x^2+1)$$
5. x^2-64
$$x^2-64 = x^2-8^2 = (x-8)(x+8)$$
6. $x^2+7x+12$
$$x^2+7x+12 = (x+3)(x+4)$$
7. $x^2-7x+12$
$$x^2-7x+12 = (x-3)(x-4)$$
8. x^2+x-12
$$x^2+x-12 = (x-3)(x+4)$$
9. x^2-x-12
$$x^2-x-12 = (x+3)(x-4)$$
10. x^3-64
$$x^3-64 = x^3-4^3 = (x-4)(x^2+4x+16^2)$$
11. x^4-64
$$x^4-64 = (x^2)^4-8^2 = (x^2-8)(x^2+8) = (x-\sqrt{8})(x+\sqrt{8})(x^2+8)$$
12. x^4+64
$$x^4+64 = (x^2+8)^2-16x^2 = (x^2+8-4x)(x^2+8+4x)$$
13. $x^2+4xy+4y^2$
$$x^2+4xy+4y^2 = x^2+2(x)(2y)+(2y)^2 = (x+2y)^2$$
14. $x^4+2x^3+x^2$
$$x^4+2x^3+x^2 = x^2(x^2+2x+1) = x^2(x+1)^2$$
15. x^3+5x^2+6x
$$x^3+5x^2+6x = x(x^2+5x+6) = x(x+2)(x+3)$$
16. x^4+5x^2+6
$$x^4+5x^2+6 = (x^2+3)(x^2+5)$$

■

Remarque 2.1.4 — Triangle de Pascal. Le triangle de Pascal est une présentation des coefficients binomiaux $(x+y)^n$ dans un tableau triangulaire. Il a été nommé ainsi en l'honneur du mathématicien français Blaise Pascal.

$$\begin{aligned}
&(x+y)^0 = 1\\
&(x+y)^1 = 1x+1y\\
&(x+y)^2 = 1x^2+2xy+y^2\\
&(x+y)^3 = 1x^3+3x^2y+3xy^2+y^2\\
&(x+y)^4 = 1x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+1y^4\\
&(x+y)^5 = 1x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+1y^5
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccccccccc} &&&&& 1 &&&&& \\ &&&& 1 && 1 &&&& \\ &&& 1 && 2 && 1 &&& \\ && 1 && 3 && 3 && 1 && \\ & 1 && 4 && 6 && 4 && 1 & \\ 1 && 5 && 10 && 10 && 5 && 1 \end{array}$$

Définition 2.1.5 — Fraction rationnelle. Une **fraction rationnelle** est le quotient de deux polynômes, au même titre qu'une fraction numérique est le quotient de deux nombres entiers.

■ **Exemple 2.8** $\frac{x^2+1}{x}$, $\frac{x^2+5x+8}{x^3+5}$ et $\frac{1}{x}$ sont des fractions rationnelles. ■

Remarque 2.1.5 — Opération sur les fractions rationnelles. Opération sur les **fractions rationnelles** s'effectue sensiblement de la même façon que la opération sur les **fractions numérique**.

■ **Exemple 2.9** Simplifier les expressions suivantes:

1. $\frac{x}{x-2}+\frac{2}{x-1}$

$$\begin{aligned}\frac{x}{x-2}+\frac{2}{x-1} &= \frac{x\cdot(x-1)}{(x-2)\cdot(x-1)}+\frac{2\cdot(x-2)}{(x-1)\cdot(x-2)}\\ &= \frac{x\cdot(x-1)+2\cdot(x-2)}{(x-2)\cdot(x-1)}\\ &= \frac{x^2-x+2x-4}{(x-2)\cdot(x-1)} = \frac{x^2+x-4}{(x-2)\cdot(x-1)}\end{aligned}$$

2. $\frac{4-x^2}{x-2}\times\frac{-x}{2x+4}$

$$\frac{4-x^2}{x-2}\times\frac{-x}{2x+4} = \frac{(2-x)(2+x)}{x-2}\times\frac{-x}{2(x+2)} = (-1)\times\frac{-x}{2} = \frac{x}{2}, x\neq\pm2$$

3. $\frac{4-x^2}{x-2}\div\frac{-x}{2x+4}$

$$\frac{4-x^2}{x-2}\div\frac{-x}{2x+4} = \frac{4-x^2}{x-2}\times\frac{2x+4}{-x} = \frac{(2-x)(2+x)}{x-2}\times\frac{2(x+2)}{-x} = \frac{2(x+2)^2}{x}, x\neq 0,\pm2$$

4. $\frac{x^2+10x+25}{x^3+5x^2}$

$$\frac{x^2+10x+25}{x^3+5x^2} = \frac{(x+5)(x+5)}{x^2(x+5)} = \frac{(x+5)}{x^2}, x\neq 0,-5$$

5. $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x}}}$

$$
\begin{aligned}
1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x}}} &= 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{x+1}{x}}} \\
&= 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{x}{x+1}} \\
&= 1+\cfrac{1}{\cfrac{x+1+x}{x+1}} \\
&= 1+\frac{x}{2x+1} = \frac{2x+1+x+1}{2x+1} = \boxed{\frac{3x+2}{2x+1}}
\end{aligned}
$$

■

Exercices

Exercice 2.2 Effectuer les opérations sur les polynômes:

1. $-(2x+y)+(x-(x-2y))$
2. $3x+4+5x+6x^2$
3. $(47x+3y)-(2z+7x+3x^2)$
4. $x^3+2(x+1)-x^2-2$
5. $x^5+3xz-3x-3z+2(y-z)$
6. $(x+7)(4x-3)$
7. $(ax+b)(cx+d)$
8. $(4x^2-7x+10)(3x+2)$
9. $(x^2+3xy-2y^2)(y-4)$
10. $(a+b+c)(a-b+c)$
11. $\dfrac{x^2y^3+6x^3yz^2}{2xyz^5}$
12. $(15+3x^2+14x)\div(x+3)$

■

Exercice 2.3 Simplifier les expressions algébriques suivantes:

1. $\dfrac{1}{1-\dfrac{1+x}{x-\dfrac{1}{x}}}$
2. $\dfrac{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}}{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}}$
3. $\dfrac{\dfrac{x}{1+x}+\dfrac{1-x}{x}}{\dfrac{x}{1+x}-\dfrac{1-x}{x}}$

■

Exercice 2.4 Factoriser les expressions suivantes :

1. $2a^2+3a$
2. x^5+16x^3
3. $3x^2y^3+6x^3y^2+12x^4y^5$
4. $3x+3y+ax+ay$
5. $ax+bcx-a-bc$
6. x^2-16
7. x^3-16
8. x^3+16
9. x^4-16
10. x^4+16
11. $(x-5)^2-49$
12. $x^2-7x+10$
13. $3x^2-14x+8$
14. $7x^2+15x+2$
15. $a^2+10a-24$

16. $3xy+3yz-xz-z^2$

Exercices supplémentaires

Exercice 2.5 Montrer les identités suivantes:

1. Identité de **Lagrange** (un cas particulier de l'identité de **Brahmagupta**)
$$(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax+by)^2+(ay-bx)^2$$
2. Identité de **Lagrange**:
$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)=(ax+by+cz)^2+(ay-bx)^2+(az-cx)^2+(bz-cy)^2.$$
3. Identité des quatre carrés d'**Euler**
$$\begin{aligned}(a^2+b^2+c^2+d^2)(x^2+y^2+z^2+w^2)=&(ax+by+cz+dw)^2\\&+(ay-bx+cw-dz)^2\\&+(az-cx-bw+dy)^2\\&+(az-dx+bz-cy)^2.\end{aligned}$$

Exercice 2.6 — Identité de Gauss. :

1. Montrer que:
$$\begin{aligned}a^3+b^3+c^3-3abc&=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)\\&=\frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2].\end{aligned}$$
2. Conclure que si $x+y+z=0$, alors $x^3+y^3+z^3=3xyz$.
3. Factoriser $8x^3+y^3-6xy+1$.

Exercice 2.7 Simplifier l'expression suivante:
$$\frac{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}-\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}$$

Exercice 2.8 Factoriser les expressions suivantes :

1. $-x^2+y^2+3x-3y$
2. x^3+5x^2+3x-9
3. $1+x(x+1)(x+2)(x+3)$
4. $(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3$
5. $(x-y)^5+(y-z)^5+(z-x)^5$

6. $(x+y+z)^5 - x^5 - y^5 - z^5$

2.2 Équations

2.2.1 Équations du premier degré

■ **Exemple 2.10** Résoudre les équations suivantes

1. $3x+1=5x+7$

$$\begin{aligned} 3x+1 &= 5x+7 \\ 3x-5x &= 7-1 \\ -2x &= 6, \end{aligned}$$

alors $x=\frac{6}{-2}=-3$.

2. $4x-1=\frac{2x}{3}$

$$\begin{aligned} 4x-1 &= \frac{2x}{3} \\ 4x-\frac{2x}{3} &= +1 \\ \frac{10x}{3} &= 1, \end{aligned}$$

alors $x=\frac{1}{\frac{10}{3}}=\frac{3}{10}$.

3. $\frac{2}{3}(x+1)-\frac{3}{2}(4x-1)=\frac{5}{6}(2x+3)-1$

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}(x+1)-\frac{3}{2}(4x-1) &= \frac{5}{6}(2x+3)-1 \\ \frac{2x}{3}+\frac{2}{3}-6x+\frac{3}{2} &= \frac{5x}{3}+\frac{5}{2}-1 \\ \frac{2x}{3}-6x-\frac{5x}{3} &= -\frac{2}{3}-\frac{3}{2}+\frac{5}{2}-1 \\ -7x &= -\frac{2}{3}, \end{aligned}$$

alors $x=\frac{-\frac{2}{3}}{-7}=\frac{2}{21}$.

■

■ **Exemple 2.11** Résoudre les équations suivantes

1. $|2x-4|=5$

Il y a deux possibilité $2x-4=5$ ou $2x-4=-5$. Pour $2x-4=5$ on a $x=\frac{9}{2}$, pour $2x-4=-5$, $x=\frac{-1}{5}$.

2. $|\frac{2x-4}{3x+7}|=5$

Il y a deux possibilité $\frac{2x-4}{3x+7}=5$ ou $\frac{2x-4}{3x+7}=-5$.

Pour $\dfrac{2x-4}{3x+7}=5$ on a

$$\begin{aligned} \frac{2x-4}{3x+7} &= 5 \\ 2x-4 &= 5(3x+7) \\ 2x-15x &= 4+35 \\ -13x &= 39 \Longrightarrow \boxed{x=-\frac{39}{13}}. \end{aligned}$$

Pour $\dfrac{2x-4}{3x+7}=-5$ on a

$$\begin{aligned} \frac{2x-4}{3x+7} &= -5 \\ 2x-4 &= -5(3x+7) \\ 2x+15x &= 4-35 \\ 17x &= -31 \Longrightarrow \boxed{x=-\frac{31}{17}}. \end{aligned}$$

■

2.2.2 Équations du second degré

Définition 2.2.1 — Discriminant. Le discriminant de l'équation $ax^2+bx+c=0$ est la valeur Δ définie par:

$$\Delta = b^2-4ac.$$

Remarque 2.2.1 — Résolution de l'équation.
1. Si le discriminant est strictement positif, l'équation admet deux solutions x_1 et x_2 données par les formules suivantes:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

$$ax^2+bx+c=a\,(x-x_1)\,(x-x_2)$$

2. Si le discriminant est nul, l'équation admet une racine double:

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \quad \text{et} \quad x_1=x_2=-\frac{b}{2a}.$$

3. Si le discriminant est strictement négatif, l'équation n'admet pas de solution réelle, mais admet deux solutions complexes.

■ **Exemple 2.12** Trouver les zéros et factoriser chacun des polynômes suivants:

1. $x^2-5x+6=0$
   Ici $\Delta=b^2-4ac=(-5)^2-4(1)(6)=25-24=1$, alors on a deux solutions

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-5)\pm\sqrt{1}}{2(1)}=\frac{5\pm 1}{2}=2 \text{ ou } 3.$$

$$\boxed{x^2-5x+6=(x-2)(x-3)}$$

2. $x^2-5x=0$
Ici $\Delta=b^2-4ac=(-5)^2-4(1)(0)=25-0=25$, alors on a deux solutions
$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-5)\pm\sqrt{25}}{2(1)}=\frac{5\pm5}{2}=0 \text{ ou } 5.$$
$$\boxed{x^2-5x=x(x-5)}$$
3. $x^2-2x+1=0$
Ici $\Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4(1)(1)=4-4=0$, alors on a une racine double
$$x_{1,2}=\frac{-b}{2a}=\frac{-(-2)}{2(1)}=\frac{2}{2}=1.$$
$$\boxed{x^2-2x+1=(x-1)^2}$$
4. $x^2+x+1=0$
Ici $\Delta=b^2-4ac=(1)^2-4(1)(1)=1-4=-3$, alors l'équation n'admet pas de solution réelle.
5. $16x^2-20x+5=0$
Ici $\Delta=b^2-4ac=(-20)^2-4(16)(5)=400-320=80$, alors on a deux solutions
$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-20)\pm\sqrt{80}}{2(16)}=\frac{20\pm4\sqrt{5}}{32}=\frac{5\pm\sqrt{5}}{8}.$$
$$\boxed{16x^2-20x+5=16(x-\frac{5-\sqrt{5}}{8})(x-\frac{5+\sqrt{5}}{8})}$$
6. $16y^4-20y^2+5=0$ Supposons que $y^2=x$, donc $16x^2-20x+5=0$, ensuite
$$x_{1,2}=\frac{5-\sqrt{5}}{8},\frac{5+\sqrt{5}}{8},$$
alors
$$y_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}},\pm\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}.$$
$$\boxed{16y^4-20y^2+5=16(y-\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}})(y+\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}})(y-\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}})(y+\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}})}$$
7. $x^3-5x^2+6x=0$
On peut factoriser $x^3-5x^2+6x=x(x^2-5x+6)$, alors $x=0,2,3$.
$$\boxed{x^3-5x^2+6x=x(x-2)(x-3)}$$

■

■ **Exemple 2.13** Résoudre
$$\sqrt{7-2x}-x=4.$$

$$\begin{aligned}\sqrt{7-2x}-x&=4\\ \sqrt{7-2x}&=x+4\\ 7-2x&=(x+4)^2=x^2+8x+16,\end{aligned}$$

on a $x^2+10x+9=0$, $\Delta=b^2-4ac=(10)^2-4(1)(9)=100-36=64$,

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-10\pm\sqrt{64}}{2}=\frac{-10\pm 8}{2}=-1,-9,$$

on accepte seulement $x=-1$ car $\sqrt{7-2(-9)}-(-9)=14\neq 4$. ■

■ **Exemple 2.14** Résoudre

$$|3x^2-10x+3|=4.$$

Il y a deux possibilités $3x^2-10x+3=4$ ou $3x^2-10x+3=-4$.
Pour $3x^2-10x+3=4$ on a $3x^2-10x-1=0$.

$$\Delta=b^2-4ac=(-10)^2-4(3)(-1)=100+12=112,$$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-10)\pm\sqrt{112}}{2(3)}=\frac{10\pm 4\sqrt{7}}{6}=\frac{5\pm 2\sqrt{7}}{6}.$$

Pour $3x^2-10x+3=-4$ on a $3x^2-10x+7=0$.

$$\Delta=b^2-4ac=(-10)^2-4(3)(7)=100-84=16,$$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-10)\pm\sqrt{16}}{2(3)}=\frac{10\pm 4}{6}=\frac{7}{3},1,$$

alors on a quatre solutions $x=\frac{5\pm 2\sqrt{7}}{6},\frac{7}{3},1$. ■

■ **Exemple 2.15** Résoudre les équations suivantes

1. $2^{x^2+1}=8^{4x+1}$

$$\begin{aligned}2^{x^2+1}&=8^{4x+1}\\2^{x^2+1}&=2^{3(4x+1)},\end{aligned}$$

donc $x^2+1=3(4x+1)$ ou $x^2-12x-2=0$. Ici

$$\Delta=b^2-4ac=(-12)^2-4(1)(-2)=144+8=152,$$

alors on a deux solutions

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-12)\pm\sqrt{152}}{2(1)}=\frac{12\pm 2\sqrt{38}}{2}=6\pm\sqrt{38}.$$

2. $4^{x^2+1}=8^{4x+1}$

$$\begin{aligned}4^{x^2+1}&=8^{4x+1}\\2^{2(x^2+1)}&=2^{3(4x+1)},\end{aligned}$$

donc $2x^2+2=3(4x+1)$ ou $2x^2-12x-1=0$. Ici

$$\Delta=b^2-4ac=(-12)^2-4(2)(-1)=144+28=152,$$

alors on a deux solutions

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-12)\pm\sqrt{152}}{2(2)}=\frac{12\pm 2\sqrt{38}}{4}=\frac{6\pm\sqrt{38}}{2}.$$

■

Exemple 2.16 Résoudre les équations suivantes

1. $\log_7^x + \log_7^{x-1} = 1$

$$\begin{aligned} \log_7^x + \log_7^{x-1} &= 1 \\ \log_7^{x(x-1)} &= \log_7^7, \end{aligned}$$

donc $x(x-1) = 7$, alors on a deux solutions $\frac{1+\sqrt{29}}{2}, \frac{1-\sqrt{29}}{2}$. $x = \frac{1-\sqrt{29}}{2}$ n'est pas acceptable car $\log_7^{\frac{1-\sqrt{29}}{2}}$ est indéfini.

2. $\log_2^{3x+1} - \log_2^{x-2} = \log_2^{x+4}$

$$\begin{aligned} \log_2^{3x+1} - \log_2^{x-2} &= \log_2^{x+4} \\ \log_2^{3x+1} &= \log_2^{x-2} + \log_2^{x+4} \\ \log_7^{3x+1} &= \log_7^{(x-2)(x+4)}, \end{aligned}$$

donc $3x+1 = (x-2)(x+4)$ ou $3x+1 = x^2+2x-8$, donc $-x^2+x+9 = 0$. Ici

$$\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4(-1)(9) = 1 + 36 = 37,$$

alors on a deux solutions

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{37}}{2(-1)} = \frac{1 \mp \sqrt{37}}{2},$$

où seulement $x = \frac{1+\sqrt{37}}{2}$ est acceptable. ■

2.2.3 *L'équation de plusieurs degrés[1]

Théorème 2.2.2 — Théorème fondamental de l'algèbre (théorème de d'Alembert-Gauss). Tout polynôme non constant, admet au moins une racine complexe.

Théorème 2.2.3 — Équations du troisieme degré (formule de Cardan). La formule de Cardan est une formule qui permet de résoudre l'équation générale du troisième degré $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$. L'équation admet trois solutions x_1, x_2 et x_3 données par les formules suivantes:

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{b}{3a} + S + T \\ x_2 &= -\frac{b}{3a} - \frac{S+T}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}(S-T) \\ x_3 &= -\frac{b}{3a} - \frac{S+T}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}(S-T) \end{aligned}$$

où $S = \sqrt[3]{R + \sqrt{Q^3+R^2}}$, $T = \sqrt[3]{R - \sqrt{Q^3+R^2}}$ et $Q = \frac{3ac-b^2}{9a^2}$, $R = \frac{9abc - 27a^2d - 2b^3}{54a^3}$.

[1] N'est pas important pour votre examen.

Théorème 2.2.4 — Équations du quatrième degré (formule de Ferrari). La formule de Ferrari est une formule qui permet de résoudre l'équation générale du quatrième degré $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$. L'équation admet quatr solutions x_1, x_2, x_3 et x_4 données par les formules suivantes:

$$x_{1,2}=-\frac{b}{4a}+S\pm\frac{1}{2}\sqrt{-4S^2-2p+\frac{q}{S}}$$
$$x_{3,4}=-\frac{b}{4a}-S\pm\frac{1}{2}\sqrt{-4S^2-2p+\frac{q}{S}}$$

où $p=\frac{8ac-3b^2}{8a^2}$, $q=\frac{b^3-4abc+8a^2d}{8a^3}$, $S=\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{2}{3}p+\frac{1}{3a}(Q+\frac{\Delta_0}{Q})}$, $Q=\sqrt[3]{\frac{\Delta_1+\sqrt{\Delta_1^2-4\Delta_0^3}}{2}}$, $\Delta_0=c^2-3bd+12ae$ et $\Delta_1=2c^3-9bcd+27b^2e+27ad^2-72ace$.

Théorème 2.2.5 — Théorème d'Abel-Ruffini. Il est impossible de résoudre par des radicaux l'équation générale du cinquième degré.

Exercices

Exercice 2.9 Résoudre les équations suivantes:

1. $7x+1=5x-9$
2. $5x-1=\frac{3x}{2}$
3. $\frac{2}{5}(x+1)-\frac{3}{2}(4x-3)=\frac{5}{3}(2x+3)+1$
4. $x+1=\frac{2x-7}{x+5}-\frac{5x+8}{x+5}$
5. $\frac{4x}{x+1}+\frac{5}{x}=\frac{6x+5}{x^2+x}$

Exercice 2.10 Trouver les zéros et factoriser chacun des polynômes suivants:

1. x^2-4x+4
2. $3x^2+4x-7$
3. $5x^2-5$
4. $x^2-13x+42$
5. x^3-6x^2+9x
6. $25x^4+99x^2-4$
7. $-5x^2-8x+9$
8. $4x^2-4x-24$
9. x^2-625
10. x^4-625

Exercice 2.11 Résoudre les équations suivantes:

1. $|3x+1|=7$
2. $|x^2-4x-5|=7$
3. $||3x+1|-3|=7$
4. $|2x-1|=|4x+9|$
5. $1-\sqrt{x-1}=6$
6. $\sqrt{3x-5}+\sqrt{x-1}=2$
7. $\left(7^{3x-1}\right)^{2-x}=\left(7^{x-2}\right)^{x}\times 7^3$
8. $4^{x+\frac{1}{x}}=32$
9. $\log_3(x+25)-\log_3(x-1)=3$
10. $\log_2(x^2)=\log_2(x)^2$

Exercices supplémentaires

Exercice 2.12 Supposons que $x+\frac{1}{x}=5$, trouve les valeurs de $x^2+\frac{1}{x^2}$ et $x^3+\frac{1}{x^3}$.

Exercice 2.13 Résoudre les équations suivantes:

1. $\frac{34}{x^2-3x+7}+5=2x-3$
2. $3+\sqrt{3+\sqrt{x}}=x$

3. $\sqrt{x+8}+\sqrt{x+15}=\sqrt{9x+40}$

2.3 Inéquations

2.3.1 Inéquations du premier degré

■ **Exemple 2.17** Trouver l'ensemble solution des inéquations suivantes:

1. $3x+1<5x+7$

$$\begin{aligned} 3x+1 &< 5x+7 \\ 3x-5x &< 7-1 \\ -2x &< 6, \end{aligned}$$

alors $x > \frac{6}{-2} = -3$ ou la solution est $]-3,+\infty[$.

2. $4x-1 \leq \frac{2x}{3}$

$$\begin{aligned} 4x-1 &\leq \frac{2x}{3} \\ 4x-\frac{2x}{3} &\leq +1 \\ \frac{10x}{3} &\leq 1, \end{aligned}$$

alors $x \leq \frac{1}{\frac{10}{3}} = \frac{3}{10}$ ou la solution est $]-\infty,\frac{3}{10}]$.

3. $\frac{2}{3}(x+1)-\frac{3}{2}(4x-1) \geq \frac{5}{6}(2x+3)-1$

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}(x+1)-\frac{3}{2}(4x-1) &\geq \frac{5}{6}(2x+3)-1 \\ \frac{2x}{3}+\frac{2}{3}-6x+\frac{3}{2} &\geq \frac{5x}{3}+\frac{5}{2}-1 \\ \frac{2x}{3}-6x-\frac{5x}{3} &\geq -\frac{2}{3}-\frac{3}{2}+\frac{5}{2}-1 \\ -7x &\geq -\frac{2}{3}, \end{aligned}$$

alors $x \leq \frac{-\frac{2}{3}}{-7} = \frac{2}{21}$ ou la solution est $]-\infty,\frac{2}{21}]$.

■

Remarque 2.3.1 Si nous avons un coefficient négatif, après multiplication ou division, nous devons changer la direction de l'inégalité.

$$\begin{aligned} -3x \geq -2 &\iff 15x \leq 10 \\ -3x \leq 2 &\iff x \geq \frac{2}{-3} \end{aligned}$$

Remarque 2.3.2 Supposons que $a > 0$

$$|x| \leq a \Longleftrightarrow -a \leq x \leq a$$
$$|x| = a \Longleftrightarrow x = \pm a$$
$$|x| \geq a \Longleftrightarrow x \leq a \text{ ou } x \geq a$$

■ **Exemple 2.18** Trouver l'ensemble solution des inéquations suivantes:

1. $|2x-4| \leq 5$

$$|2x-4| \leq 5 \Longleftrightarrow -5 \leq 2x-4 \leq 5 \Longleftrightarrow -1 \leq 2x \leq 9 \Longleftrightarrow -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{9}{2},$$

2. $|2x-4| \geq 5$

$$|2x-4| \geq 5 \Longleftrightarrow 2x-4 \leq -5 \text{ ou } 2x-4 \geq 5 \Longleftrightarrow 2x \leq -1 \text{ ou } 2x \geq 9 \Longleftrightarrow x \leq -\frac{1}{2} \text{ ou } x \geq \frac{9}{2}$$

■

Remarque 2.3.3 — Le tableau des signes. :

- **Signe de polynômes de premier dégrée** $ax+b$**:**

  Pour $ax+b$ on a une solutions $x = -\frac{b}{a}$ et le tableau des signes est donné par:

	$x = -\frac{b}{a}$	
$ax+b$	- signe de a •	signe de a

- **Signe de polynômes de second dégrée** ax^2+bx+c**:**

  1. Si le discriminant est strictement positif, on a deux solutions $x_1 < x_2$ et le tableau des signes est donné par:

	x_1	x_2	
ax^2+bx+c	signe de a •	- signe de a •	signe de a

  2. Si le discriminant est nul, l'équation admet une racine double $x = -\frac{b}{2a}$ et le tableau des signes est donné par:

	$x = -\frac{b}{2a}$	
ax^2+bx+c	signe de a •	signe de a

  3. Si le discriminant est strictement négatif, l'équation n'admet pas de solution réelle et le tableau des signes est donné par:

ax^2+bx+c	signe de a

■ **Exemple 2.19** Construisez le tableau des signes des expressions algébriques suivantes:

1. x^2-4x+4

		2	
$(x-2)^2$	$+$	•	$+$

2. $3x^2+4x-7$

$$3x^2+4x-7=3(x+\frac{7}{3})(x-1)$$

		$-\frac{7}{3}$		1	
$3x^2+4x-7$	$+$	•	$-$	•	$+$

3. $5x^2-5$

$$5x^2-5=5(x^2-1)$$

		-1		1	
$5x^2-5$	$+$	•	$-$	•	$+$

4. x^3-6x^2+9x

$$x^3-6x^2+9x=x(x^2-6x+9)=x(x-3)^2$$

		0		3	
x	$-$	•	$+$	|	$+$
$(x-3)^2$	$+$	|	$+$	•	$+$
$x(x-3)^2$	$-$	•	$+$	•	$+$

5. $25x^4+99x^2-4$

$$25x^4+99x^2-4=(25x^2-1)(x^2+4)$$

		$-\frac{1}{5}$		$\frac{1}{5}$	
$25x^2-1$	$+$	•	$-$	•	$+$
x^2+4	$+$	|	$+$	|	$+$
$(25x^2-1)(x^2+4)$	$+$	•	$-$	•	$+$

6. $9x^6-x^4$

$$9x^6-x^4=x^4(9x^2-1)$$

		$-\frac{1}{3}$		0		$\frac{1}{3}$	
x^4	$+$	|	$+$	•	$+$	|	$+$
$9x^2-1$	$+$	•	$-$	|	$-$	•	$+$
$x^4(9x^2-1)$	$+$	•	$-$	•	$-$	•	$+$

7. $(x-1)(x^2-4)$

		-2		1		2	
$x-1$	$-$		$-$	•	$+$		$+$
x^2-4	$+$	•	$-$		$-$	•	$+$
$(x-1)(x^2-4)$	$-$	•	$+$	•	$-$	•	$+$

8. $(x^2-1)(x^2-4)$

		-2		-1		1		2	
x^2-1	$+$		$+$	•	$-$	•	$+$		$+$
x^2-4	$+$	•	$-$		$-$		$-$	•	$+$
$(x^2-1)(x^2-4)$	$+$	•	$-$	•	$+$	•	$-$	•	$+$

9. $(x-1)^2(x^2-4)$

		-2		1		2	
$(x-1)^2$	$+$		$+$	•	$+$		$+$
x^2-4	$+$	•	$-$		$-$	•	$+$
$(x-1)^2(x^2-4)$	$+$	•	$-$	•	$-$	•	$+$

10. $(2x^2+9x+7)^3(x^2-6x+9)^2$

$$(2x^2+9x+7)^3(x^2-6x+9)^2 = (2(x+\frac{7}{2})(x+1))^3((x-3)^2)^2 = 8(x+\frac{7}{2})^3(x+1)^3(x-3)^4$$

		$-\frac{7}{2}$		-1		3	
$x+\frac{7}{2}$	$-$	•	$+$		$+$		$+$
$(x+\frac{7}{2})^3$	$-$	•	$+$		$+$		$+$
$x+1$	$-$		$-$	•	$+$		$+$
$(x+1)^3$	$-$		$-$	•	$+$		$+$
$x-3$	$-$		$-$		$-$	•	$+$
$(x-3)^4$	$+$		$+$		$+$	•	$+$
$8(x+\frac{7}{2})^3(x+1)^3(x-3)^4$	$-$	•	$-$	•	$-$	•	$+$

11. $\dfrac{x^2-1}{x^2-4}$

	-2		-1		1		2		
x^2-1	$+$		$+$	$\bullet$	$-$	$\bullet$	$+$		$+$
x^2-4	$+$	$\bullet$	$-$		$-$		$-$	$\bullet$	$+$
$\dfrac{x^2-1}{x^2-4}$	$+$	$\Vert$	$-$	$\bullet$	$+$	$\bullet$	$-$	$\Vert$	$+$

12. $\dfrac{-2x+3}{x(x^2+4)^2}$

	0		$\frac{3}{2}$		
$-2x+3$	$+$		$+$	$\bullet$	$-$
x	$-$	$\bullet$	$+$		$+$
x^2+4	$+$		$+$		$+$
$\dfrac{-2x+3}{x(x^2+4)^2}$	$-$	$\Vert$	$+$	$\bullet$	$-$

■

■ **Exemple 2.20** Trouver l'ensemble solution de inéquation suivante:

$$\frac{2x-3}{x-5} \leq \frac{x+1}{2x+3}.$$

$$\begin{aligned}
\frac{2x-3}{x-5} &\leq \frac{x+1}{2x+3}\\
0 &\leq \frac{x+1}{2x+3} - \frac{2x-3}{x-5}\\
0 &\leq \frac{(x+1)(x-5)-(2x-3)(2x+3)}{(2x+3)(x-5)}\\
0 &\leq \frac{-3x^2-4x+4}{(2x+3)(x-5)} = \frac{-3(x-\frac{2}{3})(x+2)}{(2x+3)(x-5)},
\end{aligned}$$

	-2		$-\frac{3}{2}$		$\frac{2}{3}$		5		
$x-\frac{2}{3}$	$-$		$-$		$-$	$\bullet$	$+$		$+$
$x+2$	$-$	$\bullet$	$+$		$+$		$+$		$+$
$2x+3$	$-$		$-$	$\bullet$	$+$		$+$		$+$
$x-5$	$-$		$-$		$-$		$-$	$\bullet$	$+$
$\dfrac{-3(x-\frac{2}{3})(x+2)}{(2x+3)(x-5)}$	$-$	$\bullet$	$+$	$\Vert$	$-$	$\bullet$	$+$	$\Vert$	$-$

alors la réponse est $[-2,-\frac{3}{2}[\cup[\frac{2}{3},5[$ ■

Exercices

Exercice 2.14 Trouver l'ensemble solution des inéquations suivantes:
1. $-1 < 4x+2 < 10$
2. $2 < \frac{1}{6} - \frac{1}{2}x \leq 4$
3. $\frac{1}{2}(3+4x) \leq 6(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}x) - \frac{1}{4}(2+10x)$

Exercice 2.15 Trouver l'ensemble solution des inéquations suivantes:
1. $x^2+4x \geq 21$
2. $4x^2 \leq 15-17x$
3. $x^4+x^3-12x^2 < 0$
4. $x \leq \frac{4}{x-3}$
5. $\frac{x^2+8x-5}{x-3} \geq \frac{3x-1}{x-3}$
6. $\frac{x^3-6x^2}{x-2}$

Exercice 2.16 Trouver l'ensemble solution des inéquations suivantes:
1. $|2x+1| < 5$
2. $|2x+1| > 5$
3. $|2x^2-1| < 5$
4. $|2x^2-1| \geq 5$
5. $|2x+1| < |2x^2-1|$

Exercices supplémentaires

Exercice 2.17 Montrer que
$$|x+y| \leq |x|+|y|.$$

Exercice 2.18 Résoudre les équations suivantes
1. $|x^2+x|+|3x-9| = |x+13|$
2. $|x^2+x|+|3x-9| = x+13$

Exercice 2.19 1. Pour $x,y \geq 0$ montrer que $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$.
2. Pour $x,y,z \geq 0$ montrer que
$$\sqrt[3]{xyy} \leq \frac{x+y+z}{3}.$$
3. Si $x,y,z > 0$ et $xyz = 1$ trouve minimum de $4xy^2+2x^2y+27z^3$.

4. Pour $x_1, x_2, \cdots, x_n \geq 0$ montrer que

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

3. L'étude des fonctions

3.1 La définition d'une fonction, domaine et image d'une fonction

Définition 3.1.1 Considérer deux ensembles A et B, une fonction f de A vers B est une machine qui pour tout $x \in A$ nous donne un élément $y \in B$. Nommons cette fonction par f, donc on peut écrire $y = f(x)$. La variable x s'appelle la variable indépendante et la variable y s'appelle la variable dépendante.

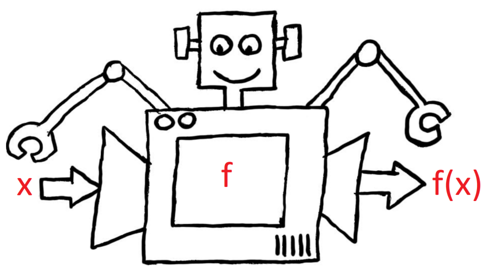


Figure 3.1: Fonction en tant que machine

■ **Exemple 3.1** Pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x - 5$. ■

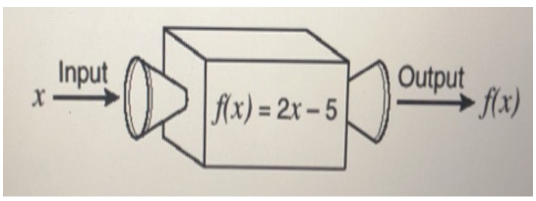


Figure 3.2: $f(x) = 2x - 5$

Définition 3.1.2 — La valeur ou l'image d'une fonction en $x = a$. Considérer $f : A \to B$, pour $a \in A$, $f(a)$ si elle existe, est appelée **la valeur de f en $x = a$** ou **image de $x = a$ par f**.

■ **Exemple 3.2** Trouver les valeurs de $f(x) = x^3 + 2x + 17$ en $x = 0$ et en $x = -2$. ■

$$\begin{aligned} f(0) &= (0)^3 + 2(0) + 17 = 17 \\ f(-2) &= (-2)^3 + 2(-2) + 17 = 5 \end{aligned}$$

Définition 3.1.3 Le **domaine** d'une fonction $f(x)$ est l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ existe.

$$\mathrm{Dom}(f) := \{x \in A : f(x) \text{ existe } \} \subseteq A.$$

Aussi l'**image** d'une fonction est l'ensemble des valeurs de f en $x = a$ pour tous les $a \in \mathrm{Dom}(f)$,

$$\mathrm{Image}(f) := \{f(a) \in B : a \in Dom(f)\} \subseteq B.$$

■ **Exemple 3.3** Pour $f : \{0,1,2,3\} \to \{0,1,2,3,4,5,6\}$ tel que dans la figure ci-bas, on a:

$$\begin{aligned} &\mathrm{Dom}(f) : = \{0,1,2,3\} \subseteq \{0,1,2,3\} \\ &\mathrm{Image}(f) = \{0,2,4,6\} \subseteq \{0,1,2,3,4,5,6\} \end{aligned}$$

■

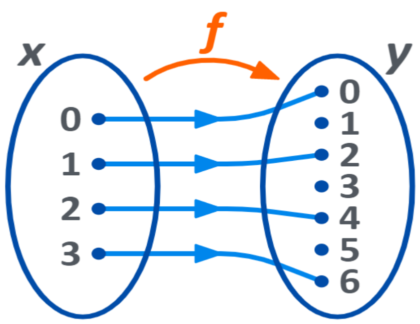


Figure 3.3: $f : \{0,1,2,3\} \to \{0,1,2,3,4,5,6\}$

■ **Exemple 3.4** Trouver le domaine des fonctions suivantes

1. $f(x) = x^3 + 5x + 7$

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}.$$

Remarque 3.1.1 Pour une fonction polynôme, le domaine de définition est l'ensemble des réels, soit l'ensemble $\mathbb{R}$.

2. $f(x) = \frac{1}{x}$
$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}.$$

Remarque 3.1.2 Pour une fonction rationnelle, le domaine de définition est l'ensemble des réels, soit l'ensemble $\mathbb{R}$ moins la valeur de x qui annule le dénominateur.

3. $f(x) = \frac{1}{x-2}$
$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{2\}.$$
4. $f(x) = \frac{1}{x^2-2}$
$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{\pm\sqrt{2}\}.$$
5. $f(x) = \frac{1}{x^2+2}$
$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}.$$
6. $f(x) = \sqrt{x}$

Remarque 3.1.3 Pour une fonction avec une racine carrée, le domaine de définition est l'ensemble des valeurs de x qui donnent une radicande non négative.

$$\text{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}.$$
7. $f(x) = \sqrt[3]{x}$
$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}.$$
8. $f(x) = \sqrt{x^2}$
$$\text{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0\} = \mathbb{R}.$$
9. $f(x) = (\sqrt{x})^2$
$$\text{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} = [0, +\infty).$$
10. $f(x) = \sqrt{x-2}$
$$\text{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : x-2 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 2\}.$$
11. $f(x) = \sqrt{5+4x-x^2}$
$$\text{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : 5+4x-x^2 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 5\}.$$
12. $f(x) = \ln(\frac{x^2-4}{1-x})$

Remarque 3.1.4 Pour une fonction avec un logarithme de type ln, la valeur dont on prend le logarithme doit être strictement supérieure à 0.

$$\text{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : \frac{x^2-4}{1-x} > 0\} =]-\infty, -2[\cup]1, 2[.$$

■

3.2 La représentation graphique d'une fonction

La représentation graphique d'une fonction f est l'ensemble des points de coordonnées $(x, f(x))$.

■ **Exemple 3.5** Tracer les graphes des fonctions suivantes:

1. $f(x) = x$

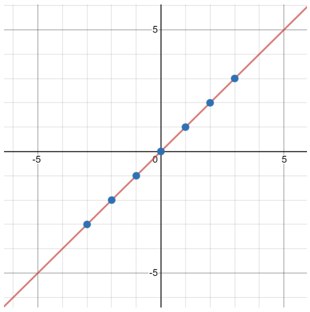


Figure 3.4: graphe de $y = f(x) = x$

2. $f(x) = x + 2$

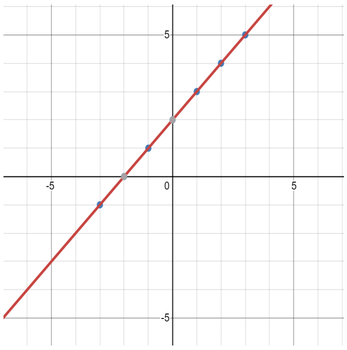


Figure 3.5: graphe de $y = f(x) = x + 2$

3. $f(x) = -x + 2$

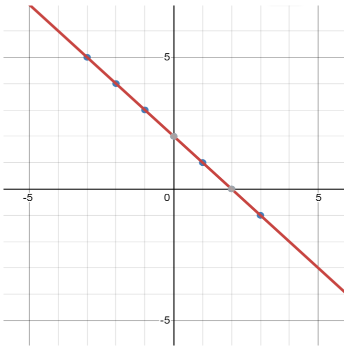


Figure 3.6: graphe de $y = f(x) = -x + 2$

4. $f(x) = x^2$

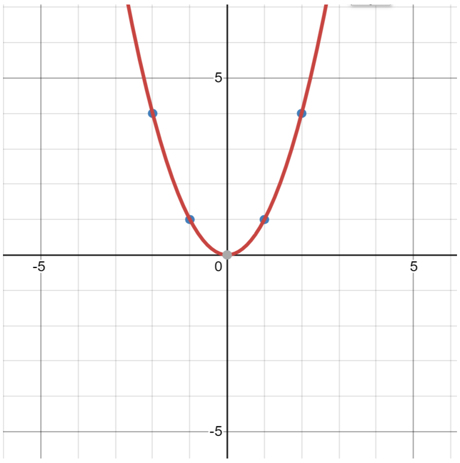


Figure 3.7: graphe de $y = f(x) = x^2$

5. $f(x) = x^3$

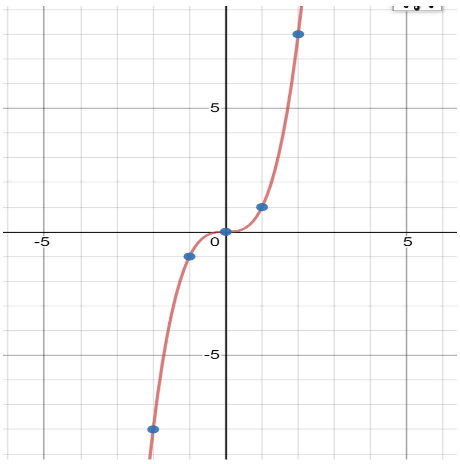


Figure 3.8: graphe de $y = f(x) = x^3$

6. $f(x) = \dfrac{1}{x}$

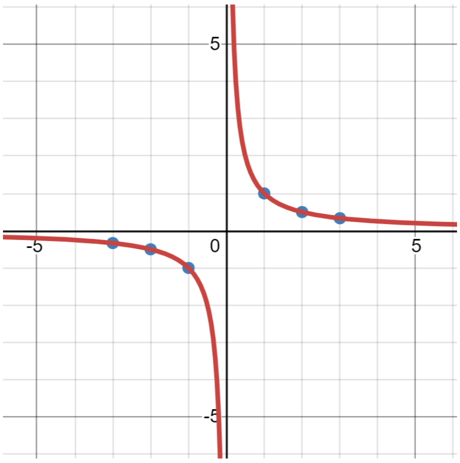


Figure 3.9: graphe de $y = f(x) = \dfrac{1}{x}$

7. $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$

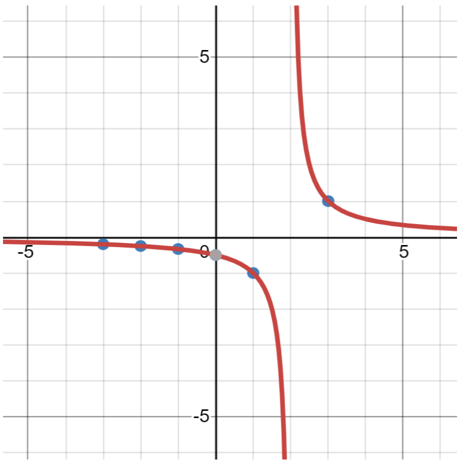


Figure 3.10: graphe de $y = f(x) = \dfrac{1}{x-2}$

8. $f(x) = \sqrt{x}$

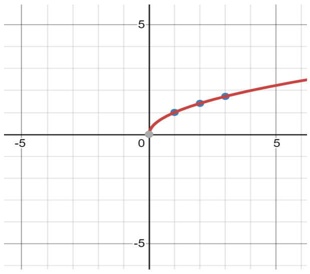


Figure 3.11: graphe de $y = f(x) = \sqrt{x}$

9. $f(x) = \sqrt[3]{x}$

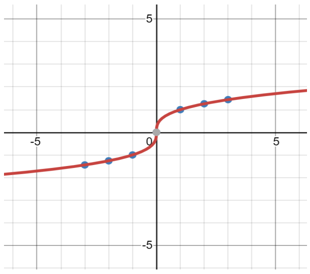


Figure 3.12: graphe de $y = f(x) = \sqrt[3]{x}$

■

■ **Exemple 3.6** Soit la fonction $f(x) = \dfrac{(\frac{1}{2}x-1)(x-1)(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+1)(x-2)}$.

1. Quel est le domaine de définition de f ?

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1,1,2\}.$$

2. Simplifier l'expression de f.

$$f(x) = \frac{(\frac{1}{2}x-1)(x-1)(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+1)(x-2)} = \frac{1}{2}x-1, x \neq -1,1,2.$$

3. Tracer la courbe de f.

■

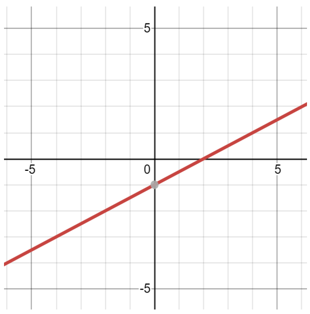


Figure 3.13: graphe de $y = f(x) = \dfrac{(\frac{1}{2}x-1)(x-1)(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+1)(x-2)}$

3.3 Opérations sur les fonctions et l'inverse d'une fonction

Remarque 3.3.1 — Opération sur les fonction. Les opérations sur les fonctions consistent à déterminer la fonction qui résulte de l'addition, la soustraction, le produit, la division ou la composition de deux fonctions.

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x)+g(x)\\(f-g)(x) &= f(x)-g(x)\\(f\cdot g)(x) &= f(x)\cdot g(x)\\(\frac{f}{g})(x) &= \frac{f(x)}{g(x)}.\end{aligned}$$

■ **Exemple 3.7** Soient les deux fonctions suivantes $f(x)=3x^2+2$ et $g(x)=\dfrac{1}{x+4}$, trouver:

1. $(f+g)(x)$

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=(3x^2+2)+\frac{1}{x+4}=\frac{3x^3+12x^2+2x+9}{x+4}$$

2. $(f-g)(x)$

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=(3x^2+2)-\frac{1}{x+4}=\frac{3x^3+12x^2+2x+7}{x+4}$$

3. $(f\cdot g)(x)$

$$(f)(x)=f(x)(x)=(3x^2+2)\cdot\frac{1}{x+4}=\frac{3x^2+2}{x+4}$$

4. $(\frac{f}{g})(x)$

$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{3x^2+2}{\frac{1}{x+4}}=(3x^2+2)(x+4)$$

■

Définition 3.3.1 — Composition de deux fonctions. Pour de deux fonctions f et g, la fonction $f\circ g$ est appelée la composée de f par g et est définie par

$$(f\circ g)(x)=f(g(x)),$$

On lit cette composée f rond g. On peut également avoir $(g\circ f)(x)=g(f(x))$, qui est la composée de g par f.

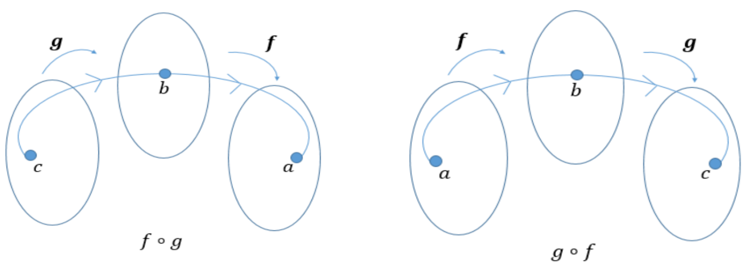


Figure 3.14: Composition de deux fonction

■ **Exemple 3.8** Supposons que $f(x) = x^2$ et $g(x) = 2x+1$ alors

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x+1) = (2x+1)^2$$
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = 2x^2+1$$

■

■ **Exemple 3.9** Supposons que $f(x) = x^2$ et $g(x) = \sqrt{x}$ alors

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x$$
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = \sqrt{x^2} = |x|.$$

Ici on a $f \circ g \neq g \circ f$. ■

■ **Exemple 3.10** Supposons que $f(x) = x^3$ et $g(x) = \sqrt[3]{x}$ alors

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt[3]{x}) = (\sqrt[3]{x})^3 = x$$
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^3) = \sqrt[3]{x^3} = x.$$

Ici on a $f \circ g = g \circ f$. ■

■ **Exemple 3.11** Supposons que $f(x) = \dfrac{x-2}{x+2}$ et $g(x) = \dfrac{x+3}{x-3}$ alors

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\frac{x+3}{x-3}) = \frac{\frac{x+3}{x-3}-2}{\frac{x+3}{x-3}+2}$$
$$= \frac{\frac{(x+3)-2(x-3)}{x-3}}{\frac{(x+3)+2(x-3)}{x-3}} = \frac{-x+9}{3x-3}$$
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\frac{x-2}{x+2}) = \frac{\frac{x-2}{x+2}+3}{\frac{x-2}{x+2}-3}$$
$$= \frac{\frac{(x-2)+3(x+2)}{x+2}}{\frac{(x-2)-3(x+2)}{x+2}} = -\frac{2x+2}{x+4}.$$

■

■ **Exemple 3.12** Soient les deux fonctions suivantes $f(x) = \dfrac{1}{x-4}$ et $g(x) = 3x^2+2$, si possible, évaluer les expressions suivantes:

1. $(f \circ g)(4)$
$$(f \circ g)(4) = f(g(4)) = f(3(4)^2+2) = f(50) = \frac{1}{50-4} = \frac{1}{46}$$

2. $(g \circ f)(4)$
   Par définition, $(g \circ f)(4) = g(f(4))$ et $f(4)$ est indéfinie.

3. $(g \circ g)(4)$
$$(g \circ g)(4) = g(g(4)) = g(50) = 3(50)^2+2 = 7502.$$

■

Définition 3.3.2 L'inverse d'une fonction f, si elle existe, est une fonction notée par f^{-1} telle que

$$
\begin{aligned}
(f \circ f^{-1})(x) &= x \\
(f^{-1} \circ f)(x) &= x.
\end{aligned}
$$

Remarque 3.3.2 — Comment trouver la fonction inverse d'une fonction.

1. Soit $y = f(x)$. Permutez les x et les y, ce qui donne
$$x = f(y).$$
2. Trouvez le nouveau y, ce qui donne
$$f^{-1}(x) = y.$$

■ **Exemple 3.13** Trouvez l'inverse de la fonction suivante

$$f(x) = \frac{2x-1}{5+3x}.$$

■

1. Soit $y = f(x) = \dfrac{2x-1}{5+3x}$. On permute les x et les y, ce qui donne
$$x = \frac{2y-1}{5+3y}.$$
2. On trouve le nouveau y, ce qui donne
$$
\begin{aligned}
x &= \frac{2y-1}{5+3y} \\
x(5+3y) &= 2y-1 \\
5x+3xy &= 2y-1 \\
3xy-2y &= -5x-1 \\
y(3x-2) &= -5x-1 \\
y &= \frac{-5x-1}{3x-2}.
\end{aligned}
$$

Exercices

Exercice 3.1 Identifier les fonctions parmi les expressions suivantes. Pour les fonctions, donner l'évaluation en $x = 1$.

1. y est un diviseur de x
2. y est le triple de x
3. $y = (x+3)^2 - 2$
4. $y = \sqrt{x}$
5. y tel que $y^2 = x$
6. y tel que $y^3 = x$

■

Exercice 3.2 Trouver le domaine des fonctions suivantes:

1. $f(x) = x^3 - 5x + 7$
2. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$
3. $f(x) = \dfrac{1}{x2x+5}$
4. $f(x) = \dfrac{1}{x^2-5}$
5. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+5}$
6. $f(x) = \sqrt{x-1}$
7. $f(x) = \sqrt{2-3x}$
8. $f(x) = \sqrt{5+4x-x^2}$
9. $f(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{x^2-7x+12}}$
10. $f(x) = \sqrt{x-6}$
11. $f(x) = \ln(x^2+3x-4)$
12. $f(x) = \sqrt{\log_{0.5}^{x-6}}$

■

Exercice 3.3 Tracer le graphe des fonctions suivantes:

1. $f(x) = 2x + 2$
2. $f(x) = -3x + 2$
3. $f(x) = x^2 + 5$
4. $f(x) = -x^3$
5. $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$
6. $f(x) = \sqrt{x+1}$
7. $f(x) = \sqrt[3]{-x}$

■

Exercice 3.4 Soient les deux fonctions suivantes $f(x) = 3x^2 + 2$ et $g(x) = x^2$, trouver

1. $(f+g)(x)$
2. $(f-g)(x)$
3. $(f \cdot g)(x)$
4. $(\dfrac{f}{g})(x)$

5. $(f \circ g)(x)$
6. $(g \circ f)(x)$

Exercice 3.5 Soient les deux fonctions suivantes $f(x) = \dfrac{x+1}{2x+1}$ et $g(x) = \dfrac{x-1}{x+3}$, trouver

1. $(f+g)(x)$
2. $(f-g)(x)$
3. $(f \cdot g)(x)$
4. $(\dfrac{f}{g})(x)$
5. $(f \circ g)(x)$
6. $(g \circ f)(x)$

Exercice 3.6 Trouvez l'inverse des fonctions suivantes

1. $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$
2. $g(x) = \dfrac{2x+1}{3x-5}$

3.4 Un catalogue de fonctions particulières

3.4.1 Fonctions du premier degré

L'équation de la fonction polynomiale de degré 1 de variation partielle s'écrit sous la forme suivante:

$$f(x) = ax + b, a \neq 0.$$

Toute droite du plan non parallèle à l'axe des ordonnées a une unique équation réduite de la forme $y = ax + b$,

1. a est le coefficient directeur de la droite et s'appelle la pente: si $a > 0$, la droite **monte** et si $a < 0$, la droite **descend**.
2. b est l'ordonnée à l'origine de la droite, c'est donc l'ordonnée du point d'intersection de la droite avec l'axe des ordonnées.

■ **Exemple 3.14** Tracer le graphe des fonctions suivantes:

1. $f(x) = -2x + 1$

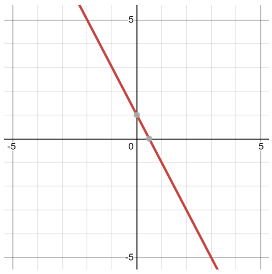


Figure 3.15: graphe de $y = f(x) = -2x + 1$

2. $f(x) = 1$

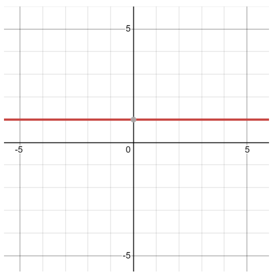


Figure 3.16: graphe de $y = f(x) = 1$

3. $f(x) = 2x + 1$

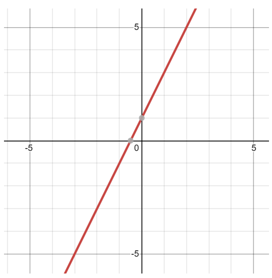


Figure 3.17: graphe de $y = f(x) = 2x + 1$

■

Remarque 3.4.1 — Déterminer l’équation d’une droite à partir d’une représentation graphique. Choisissez deux points (x_1, y_1) et (x_2, y_2) sur la droite.

1. Détermination la pente de la droite:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

2. Détermination de l’ordonnée à l’origine:

$$b = y_1 - ax_1 \text{ ou } y_2 - ax_2.$$

3. Écrire: $y = ax + b$.

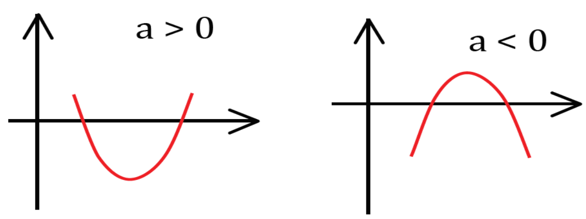
■ **Exemple 3.15** Déterminer l’équation d’une droite passant par les points $A(2, -3)$ et $B(-1, 3)$.
■

3.4.2 Fonctions du second degré

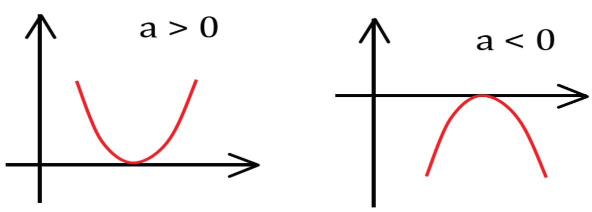
Représentation graphique de $f(x) = ax^2 + bx + c$, l’équation de la parabole. Si $a > 0$ il y a un minimum et si $a < 0$ il y a un maximum à $x = -\frac{b}{2a}$, le point $V(-\frac{b}{2a}, f(-\frac{b}{2a}))$ est appelé sommet. On peut tracer le graphe en se basant sur le signe de Δ.

Remarque 3.4.2 — Représentation graphique de $f(x) = ax^2 + bx + c$**.**
1. Si $\Delta > 0$, le graphe intersecte l’axe des x en deux points.
2. Si $\Delta = 0$, le graphe touche l’axe des x en $x = -\frac{b}{2a}$.
3. Si $\Delta < 0$, le graphe n’intersecte pas l’axe des x.

■ **Exemple 3.16** Tracer le graphe des fonctions suivantes:
1. $f(x) = x^2 - 5x + 6$

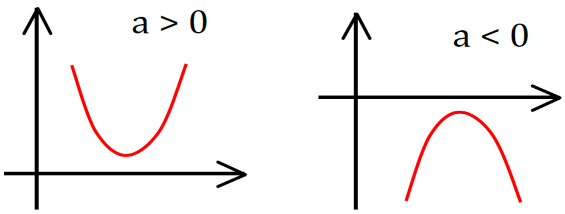


2. $f(x) = x^2 + 2x + 1$



3. $f(x) = x^2 + x + 1$

■



Exercices

Exercice 3.7 Tracer le graphe des fonctions suivantes:

1. $f(x) = x + 6$
2. $f(x) = -5x + 6$
3. $f(x) = -x - 5$
4. $x = 2y + 6$
5. $2x + 3y + 6 = 0$

Exercice 3.8 Déterminer l'équation d'une droite passant par les points $A(2,3)$ et $B(1,5)$.

Exercice 3.9 Tracer le graphe des fonctions suivantes:

1. $f(x) = x^2 + 5x + 6$
2. $f(x) = 2x^2 + 5x + 6$
3. $f(x) = -x^2 + 5x + 6$
4. $f(x) = -5x^2 + 5x + 1$
5. $f(x) = -x^2 - 3x$

4. Un peu de géométrie et géométrie vectorielle

4.1 Trigonométrie

4.1.1 Théorème de Pythagore et les rapports trigonométriques

Avec Pythagore, on peut trouver la mesure des côtés à condition d'avoir deux mesures sur trois.

Théorème 4.1.1 — Pythagore. La somme des carrés des mesures des cathètes est égale au carré de la mesure de l'hypoténuse.

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$(\text{Une cathète})^2 + (\text{L'autre cathète})^2 = (\text{L'hypoténuse})^2$$

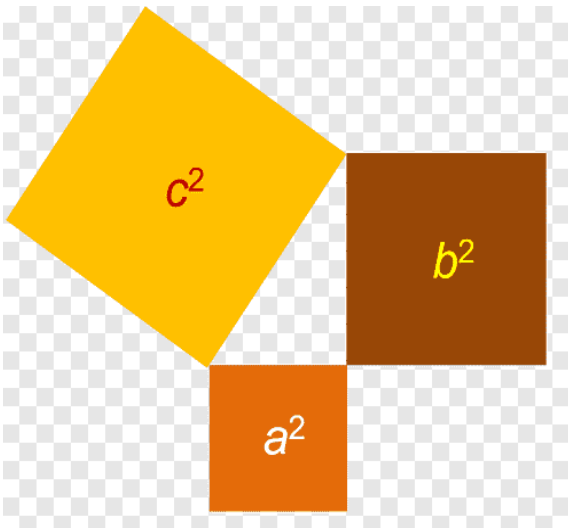
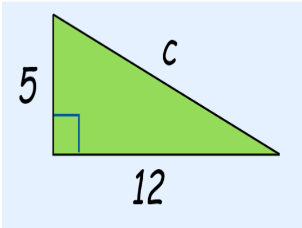


Figure 4.1: Théorème de Pythagore

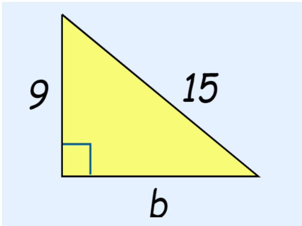
■ **Exemple 4.1** Quelle est la mesure de l'hypoténuse dans le triangle rectangle suivant? ■



Par le théorème de Pythagore $c^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$, alors

$$c = \sqrt{169} = 13.$$

■ **Exemple 4.2** Quelle est la mesure du côté b dans le triangle rectangle suivant? ■



Par le théorème de Pythagore $15^2 = 9^2 + b^2$, donc $b^2 = 15^2 - 9^2 = 225 - 81 = 144$ alors

$$b = \sqrt{144} = 12.$$

■ **Exemple 4.3 — Comparaison des moyennes.** Monterer que:
Moyenne harmonique (HM) $\leq$ Moyenne géométrique (GM) $\leq$ Moyenne arithmétique (AM) $\leq$ Moyenne quadratique (RMS)

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

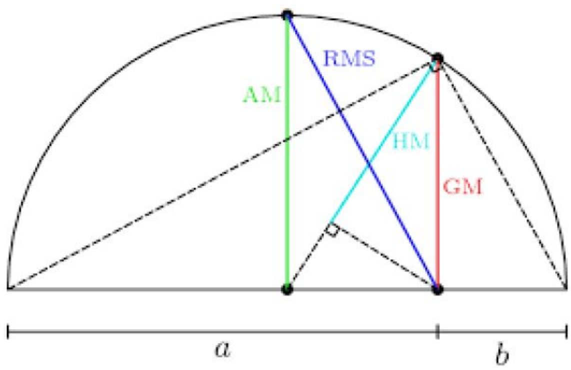
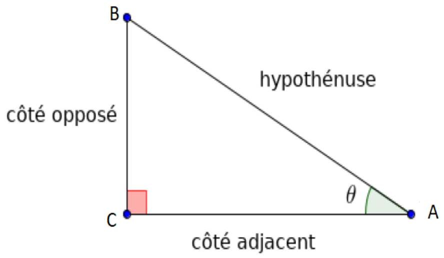


Figure 4.2: Comparaison des moyennes

■

Les **rapports trigonométriques** dans le triangle rectangle expriment un rapport entre les longueurs de deux côtés.



Définition 4.1.1

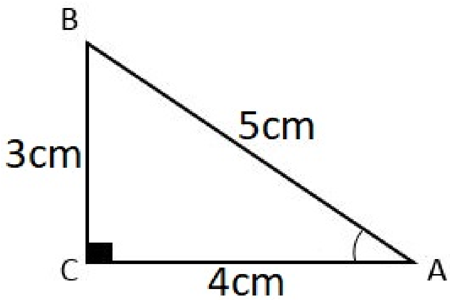
$$\sin\theta = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} = \frac{a}{c}, \quad \cos\theta = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \frac{b}{c}, \quad \tan\theta = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \frac{a}{b}$$

$$\csc\ \theta = \frac{\text{hypoténuse}}{\text{côté opposé}} = \frac{c}{a}, \quad \sec\theta = \frac{\text{hypoténuse}}{\text{côté adjacent}} = \frac{c}{b}, \quad \cot\theta = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{côté opposé}} = \frac{b}{a}$$

■ **Exemple 4.4** Pour le triangle ci-dessous, on a

$$\sin A = \frac{3}{5}, \quad \cos A = \frac{4}{5}, \quad \tan A = \frac{3}{4}$$
$$\csc A = \frac{5}{3}, \quad \sec A = \frac{5}{4}, \quad \cot A = \frac{4}{3}$$

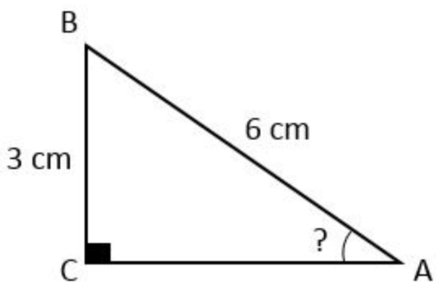
■



Si nous avons un rapport trigonométrique et que nous recherchons l'angle, nous pouvons utiliser l'inverse du rapport trigonométrique qui est noté *Arc* ou $^{-1}$. Dans l'exemple ci-dessus

$$A = \sin^{-1}(\frac{3}{5}) \text{ ou Arcsin}(\frac{3}{5}) = \cos^{-1}(\frac{4}{5}) \text{ ou Arccos}(\frac{4}{5}) = \tan^{-1}(\frac{3}{4}) \text{ ou Arctan}(\frac{3}{4}) = \cdots.$$

■ **Exemple 4.5** Quelle est la mesure de l'angle A dans le triangle ci-dessous? ■



Ici $\sin A = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, alors

$$A = \sin^{-1}(\frac{1}{2}) = 30^\circ.$$

Proposition 4.1.2 Les rapports trigonométriques satisfont:

1. $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$
2. $-1 \leq \sin\theta \leq 1$ et $-1 \leq \cos\theta \leq 1$.
3. $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

4.1.2 Triangle quelconque

Maintenant, nous voulons trouver l'aire d'un triangle quelconque[1], si nous avons

1. La mesures de **deux angles** et **d'un côté**.
2. La mesures **d'un angle** et de **deux côtés**
3. La mesures des **trois côtés**

Théorème 4.1.3 — Loi des sinus.

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

Lorsque nous travaillons avec un triangle quelconque, les mesures des côtés sont proportionnelles aux sinus des angles opposés à ces côtés.

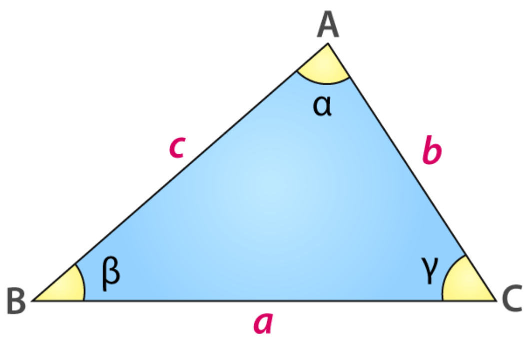


Figure 4.3: Loi des sinus $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$.

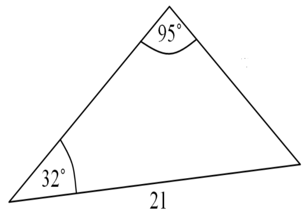
Avec loi des sinus, on peut trouver les mesures des côtés à condition d'avoir les mesures d'un côté et de deux angles.

■ **Exemple 4.6** Quelle est la mesure du côté opposé à l'angle de 32° ? ■

Par loi des sinus on peut écrire:

$$\frac{x}{\sin 32^\circ} = \frac{21}{\sin 95^\circ}$$

[1]Un triangle quelconque est un triangle qui n'a pas de propriété particulière.



donc

$$\frac{x}{0.53} = \frac{21}{1}$$

alors

$$x = 0.53 \times 21 \sim 11.13.$$

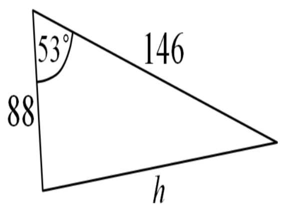
Théorème 4.1.4 — Loi des cosinus.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C,$$

La loi des cosinus est une généralisation de la relation de Pythagore aux triangles quelconques. Elle permet de trouver la mesure d'un côté ou d'un angle dans un triangle quelconque.

Avec la loi des cosinus, on peut trouver les mesures des côtés à condition d'avoir deux mesures sur trois.

■ **Exemple 4.7** Quelle est la mesure du côté h dans le triangle ci-dessous? ■



Par loi des cosinus on peut écrire:

$$h^2 = 88^2 + 146^2 - 2(88)(146)\cos(53) = 7744 + 21316 - 15464.23 = 13595.77$$

alors

$$h = \sqrt{13595.77} = 116.6.$$

■ **Exemple 4.8** Quelle est la mesure de l'angle a dans le triangle ci-dessous? ■

Par loi des cosinus on peut écrire:

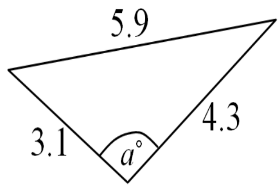
$$5.9^2 = 3.1^2 + 4.3^2 - 2(3.1)(4.3)\cos a,$$

donc

$$\cos a = \frac{3.1^2 + 4.3^2 - 5.9^2}{2(3.1)(4.3)} = \frac{-6.71}{26.66}$$

alors

$$a = \text{Arccos}(\frac{-6.71}{26.66}) = 104.57°.$$



Théorème 4.1.5 — Théorème de Stewart (1746). Soit x une cévienne d'un triangle ABC divisant en P le côté a en deux parties m et n. On a alors la **relation de Stewart**:

$$x^2 = \frac{mb^2 + nc^2}{m+n} - mn.$$

1. Si la cévienne est une hauteur, sa longueur est donnée par la formule :

$$x^2 = b^2 - n^2 = c^2 - m^2$$

2. **Le théorème de la médiane** ou **théorème d'Apollonius**: Si la cévienne est une médiane, $m = n = \frac{a}{2}$, sa longueur $x = m_a$ est donnée par la formule:

$$\begin{aligned} m_a^2 &= \frac{mb^2 + mc^2}{m+m} - mm \\ &= \frac{m(b^2 + c^2)}{2m} - m^2 \\ &= \frac{b^2 + c^2}{2} - m^2 \\ &= \frac{b^2 + c^2}{2} - (\frac{a}{2})^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}. \end{aligned}$$

3. Enfin, si la cévienne est une bissectrice, sa longueur $t_a = AD$ est donnée par la formule :

$$t_a^2 = bc(1 - \frac{a^2}{(b+c)^2})$$

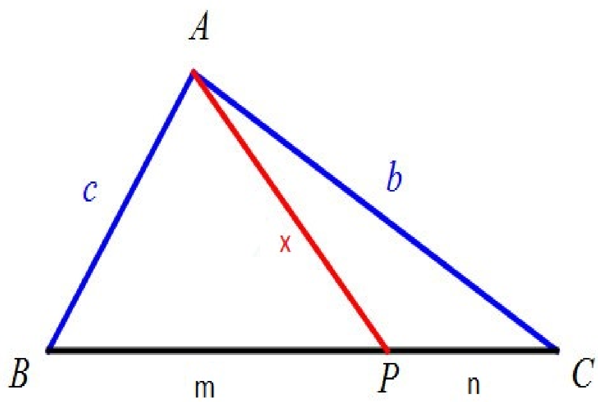


Figure 4.4: Théorème de Stewart

Proof.

$$b^2 = x^2 + n^2 - 2xn\cos(\measuredangle APC)$$
$$c^2 = x^2 + m^2 - 2xm\cos(\pi - \measuredangle APC)$$

$$mb^2 = mx^2 + mn^2 - 2xmn\cos(\measuredangle APC)$$
$$nc^2 = nx^2 + nm^2 + 2xmn\cos(\measuredangle APC)$$

$$mb^2 + nc^2 = mx^2 + mn^2 + nx^2 + nm^2 = (m+n)x^2 + mn(m+n)$$

$$x^2 = \frac{mb^2 + nc^2}{m+n} - mn$$

■

La formule de **Héron** est une formule qui permet de trouver l'aire d'un triangle quelconque à partir des mesures de ses trois côtés.

Théorème 4.1.6 — La formule de Héron. L'aire A d'un triangle quelconque, dont les mesures des côtés sont a, b et c, est donnée par la formule suivante:

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

où s représente le demi-périmètre du triangle, donné par la formule ci-dessous:

$$s = \frac{a+b+c}{2}.$$

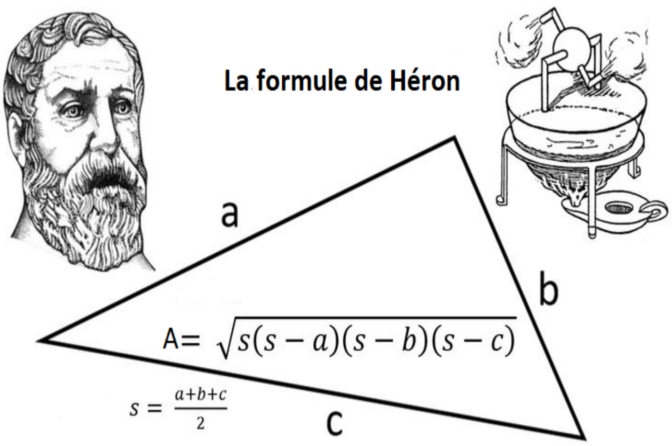
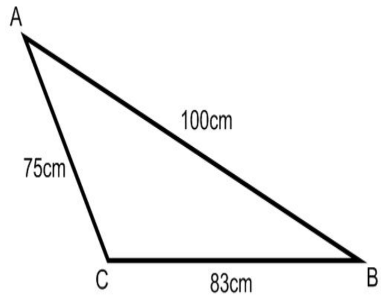


Figure 4.5: La formule de Héron

■ **Exemple 4.9** Trouver l'aire des triangles suivants:

1. On a la mesures des trois côtés et $s = \dfrac{83+75+100}{2} = 129$, par la formule de Héron,

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{129(129-83)(129-75)(129-100)}$$
$$= \sqrt{9292644} = 3048.38.$$



2. On a les mesures de deux angles et d'un côté, par loi des sinus on peut trouver la mesure du troisième côté. La mesure du troisième angle est égale à $180^\circ - 105^\circ - 41^\circ = 34^\circ$

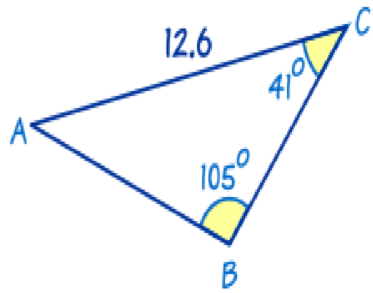
$$\frac{a}{\sin 34^\circ} = \frac{c}{\sin 41^\circ} = \frac{12.6}{\sin 105^\circ} = 13.04,$$

donc

$$\begin{aligned} a &= 13.04 \times \sin 34^\circ = 7.29 \\ c &= 13.04 \times \sin 41^\circ = 8.55, \end{aligned}$$

maintenant $s = \dfrac{7.29 + 12.6 + 8.55}{2} = 14.22$, par la formule de Héron,

$$\begin{aligned} A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} &= \sqrt{14.22(14.22-7.29)(14.22-12.6)(14.22-8.55)} \\ &= \sqrt{905.17} = 30.08. \end{aligned}$$



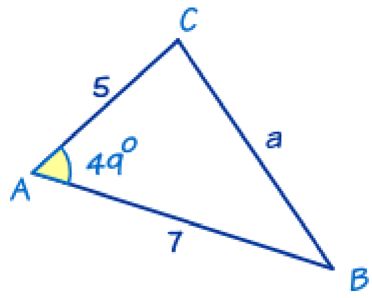
3. On a la mesures d'un angle et de deux côtés, par loi des cosinus on peut trouver la mesure du troisième côté,

$$a^2 = 5^2 + 7^2 - 2(5)(7)\cos(49^\circ) = 28.07,$$

donc $a = \sqrt{28.07} = 5.29$, maintenant par la formule de Héron, $s = \dfrac{5.29+5+7}{2} = 8.645$

$$\begin{aligned} A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} &= \sqrt{8.645(8.645-5.29)(8.645-5)(8.645-7)} \\ &= \sqrt{173.908} = 13.187. \end{aligned}$$

■



4.1.3 Le cercle trigonométrique et les fonctions trigonométriques

Le cercle trigonométrique est le cercle dont le centre correspond à l'origine du plan cartésien $(0,0)$ et dont le rayon mesure 1 unité:

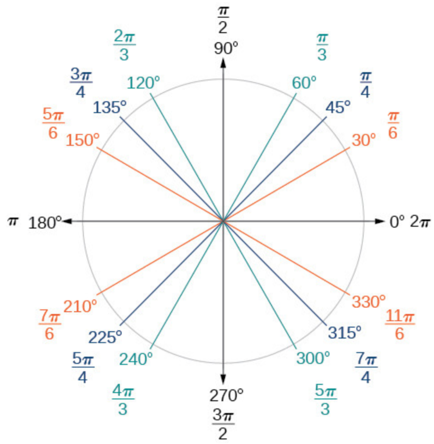


Figure 4.6: Le cercle trigonométrique

$$0^\circ = 0, \quad 90^\circ = \frac{\pi}{2}, \quad 180^\circ = \pi, \quad 270^\circ = \frac{3\pi}{2}, \quad 360^\circ = 2\pi,$$

also

$$\frac{30^\circ}{360^\circ} = \frac{x}{2\pi} \Rightarrow x = (\frac{30^\circ}{360^\circ})2\pi = \frac{\pi}{6}$$
$$\frac{45^\circ}{360^\circ} = \frac{x}{2\pi} \Rightarrow x = (\frac{45^\circ}{360^\circ})2\pi = \frac{\pi}{4}$$
$$\frac{60^\circ}{360^\circ} = \frac{x}{2\pi} \Rightarrow x = (\frac{60^\circ}{360^\circ})2\pi = \frac{\pi}{3}.$$

	$30^\circ = \frac{\pi}{6}$	$45^\circ = \frac{\pi}{4}$	$60^\circ = \frac{\pi}{3}$
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tan	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

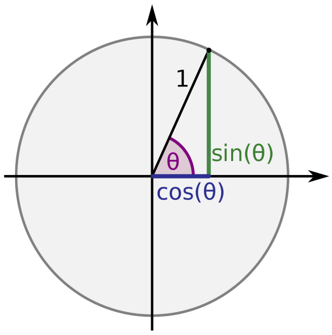


Figure 4.7: Angles particuliers 30°, 45° et 60°

	$0° = 0$	$90° = \frac{\pi}{2}$	$180° = \pi$	$270° = \frac{3\pi}{2}$	$360° = 2\pi$
sin	0	1	0	-1	0
cos	1	0	-1	0	1
tan	0	$\nexists$	0	$\nexists$	0

On dessine le graphique de fonctions trigonométriques. Comme nous le voyons ci-dessous, sinus

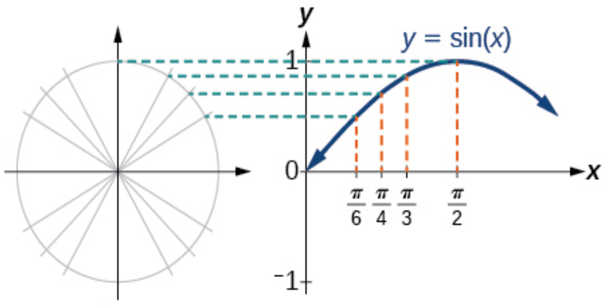


Figure 4.8: Le fonction sinus

et cos ont une période égale à $360° = 2\pi$, i.e,

$$\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$$
$$\cos(x + 2\pi) = \cos(x).$$

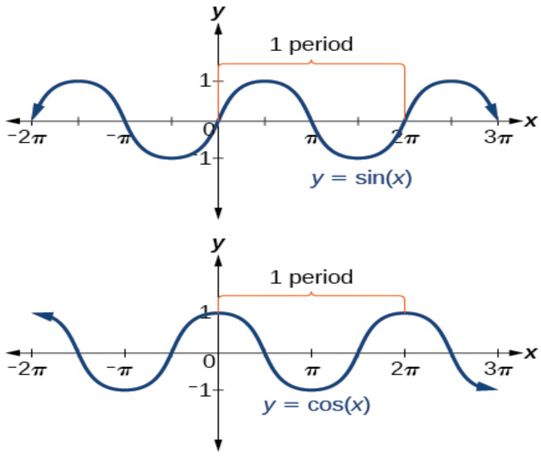


Figure 4.9: Les fonctions sinus et cosinus

Exercices

Exercice 4.1 Pour le triangle rectangle suivant,

1. Trouver le troisième côté
2. Trouver les rapports trigonométriques de A et B
3. Trouver des mesures des angles A et B

■

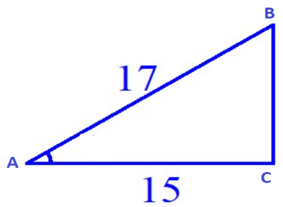


Figure 4.10: Exercices 4.1

Exercice 4.2 Pour le triangle suivant, trouver:

1. Le périmètre du triangle.
2. L'aire du triangle.
3. Les trois hauteurs.
4. Les trois angles.

■

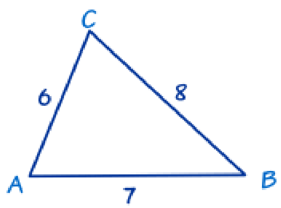


Figure 4.11: Exercices 4.2

Exercice 4.3 Tracer le graphe des fonctions suivantes:

1. $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$
2. $f(x) = \sin(x + \pi)$
3. $f(x) = \sin(x + \frac{3\pi}{2})$

■

Exercice 4.4 Sachant que

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin b \sin a$$

1. Développer $\sin(2x)$ et $\cos(2x)$ en fonction des $\sin(x)$ et $\cos(x)$.
2. Développer $\sin(\frac{x}{2})$ et $\cos(\frac{x}{2})$ en fonction des $\sin(x)$ et $\cos(x)$.

■

Exercices supplémentaires

Exercice 4.5 Prouver la loi des sinus par les étapes suivantes dans le triangle ci-dessous
1. $h = c \sin B$
2. $h = b \sin C$
3. $\dfrac{c}{\sin C} = \dfrac{b}{\sin B}$
4. De même façon, $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$

■

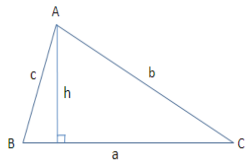


Figure 4.12: Preuve de la loi des sinus

Exercice 4.6 Prouver la loi des cosinus par les étapes suivantes dans le triangle ci-dessous:
1. $DA = b - a \cos C$
2. $BD = a \sin C$
3. $c^2 = BD^2 + DA^2 = \ldots.$

■

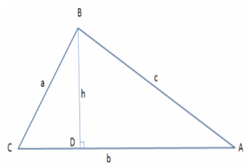


Figure 4.13: Preuve de la loi des cosinus

Exercice 4.7 Prouver la formule de Héron par les étapes suivantes dans le triangle ci-dessous
1. $A = \dfrac{1}{2}ah$
2. $h = b \sin C$
3. $\sin C = \sqrt{1-\cos^2 C} = \sqrt{1 - (\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab})^2}$
4. $A = \dfrac{1}{2}ah = \cdots = \dfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}$
5. $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

■

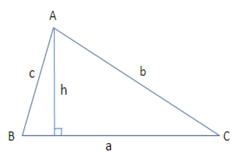


Figure 4.14: Preuve de la formule de Héron

4.2 Vecteurs dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

On considère le plan, défini comme l'ensemble des couples de réels

$$\mathbb{R}^2 = \{(x,y) : x,y \in \mathbb{R}\},$$

On considère l'espace, défini comme l'ensemble des triplets de réels

$$\mathbb{R}^3 = \{(x,y,z) : x,y,z \in \mathbb{R}\}.$$

Définition 4.2.1 — Vecteurs. Un vecteur $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^3$ est déterminé par:
1. Une direction
2. Un sens
3. Une longueur

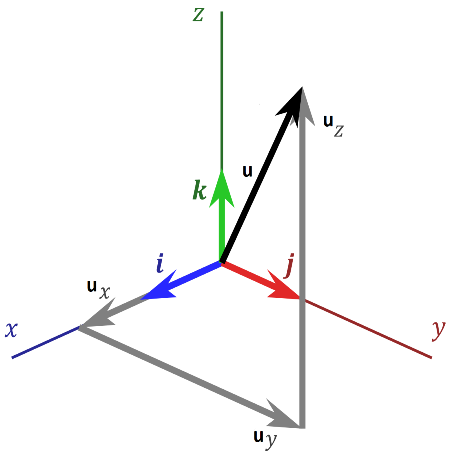


Figure 4.15: Les vecteurs unitaires

Les vecteurs $\overrightarrow{i} = (1,0,0)$, $\overrightarrow{j} = (0,1,0)$ et $\overrightarrow{k} = (0,0,1)$ sont appelés les vecteurs unitaires. On peut décomposer chaque vecteur $\overrightarrow{u} = (u_x, u_y, u_z)$ comme

$$\overrightarrow{u} = (u_x, u_y, u_z) = u_x(1,0,0) + u_y(0,1,0) + u_z(0,0,1) = u_x\overrightarrow{i} + u_y\overrightarrow{j} + u_z\overrightarrow{k}$$

Remarque 4.2.1 Pour deux points $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ dans $\mathbb{R}^3$, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ (de A vers B) sont

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A).$$

Définition 4.2.2 — Norme ou longueur. La norme ou longueur d'un vecteur $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$ est définie par

$$\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}.$$

■ **Exemple 4.10** On donne les points $A(2,-4)$ et $B(1,3)$ du plan. Trouvez $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$ et leurs longueurs. ■

$$\overrightarrow{AB} = (1-2, 3-(-4)) = (-1,7),$$

alors

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \|(-1,7)\| = \sqrt{(-1)^2 + 7^2} = \sqrt{50}.$$

Aussi

$$\overrightarrow{BA} = (2-1, -4-3) = (1,-7),$$

alors

$$\|\overrightarrow{BA}\| = \|(1,-7)\| = \sqrt{1^2+(-7)^2} = \sqrt{50}.$$

■ **Exemple 4.11** On donne les points $A(1,-2,0)$ et $B(3,3,5)$ de l'espace. Trouvez $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$ et leurs longueurs. ■

$$\overrightarrow{AB} = (3-1, 3-(-2), 5-0) = (2,5,5),$$

alors

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \|(2,5,5)\| = \sqrt{2^2+5^2+5^2} = \sqrt{54}.$$

Aussi

$$\overrightarrow{BA} = (1-3, -2-3, 0-5) = (-2,-5,-5),$$

alors

$$\|\overrightarrow{BA}\| = \|(-2,-5,-5)\| = \sqrt{(-2)^2+(-5)^2+(-5)^2} = \sqrt{54}.$$

Proposition 4.2.2 Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, on a

1. Inégalité du triangle:
$$\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\| \leq \|\overrightarrow{u}\| + \|\overrightarrow{v}\|.$$
2. Loi du parallélogramme:
$$\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2 + \|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\|^2 = 2(\|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2).$$

Définition 4.2.3 — Produit scalaire. Le produit scalaire de deux vecteurs $\overrightarrow{u} = (u_1,u_2,u_3)$ et $\overrightarrow{v} = (v_1,v_2,v_3)$ dans $\mathbb{R}^3$ est défini par

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3.$$

Théorème 4.2.3 — Propriétés du produit scalaire. Pour deux vecteurs $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^3$,

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\|\cos(\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}}),$$

alors on a:
1. $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u} = \|\overrightarrow{u}\|^2$.
2. $\overrightarrow{u}\perp\overrightarrow{v}$ ssi $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = 0$.

■ **Exemple 4.12** Soit $\overrightarrow{u} = (2,-1)$ et $\overrightarrow{v} = (3,2)$:

1. Calculer $\|\overrightarrow{u}\|$ et $\|\overrightarrow{v}\|$.
$$\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{2^2+(-1)^2} = \sqrt{5}$$
$$\|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{3^2+(2)^2} = \sqrt{13},$$
2. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$.
$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = (2,-1)\cdot(3,2) = 6-2 = 4.$$

3. Calculer $\theta = (\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})$. Par la propriété $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\| \cos(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})$,

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}) = \frac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\|} = \frac{4}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{13}} = \frac{4}{\sqrt{65}},$$

alors

$$\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}} = \text{Arccos}\left(\frac{4}{\sqrt{65}}\right) = 60.25°.$$

■

Définition 4.2.4 — Produit vectoriel. Le produit vectoriel de deux vecteurs $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$ et $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$ dans $\mathbb{R}^3$ est défini par

$$\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_2).$$

Le produit vectoriel est perpendiculaire aux deux vecteurs, i.e,

$$\overrightarrow{u} \perp (\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \text{ et aussi } \overrightarrow{v} \perp (\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}).$$

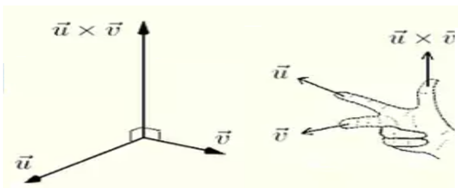


Figure 4.16: Produit vectoriel

Théorème 4.2.4 — Propriétés du produit vectoriel. Pour deux vecteurs $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^3$,

$$\|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\| = \|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\| |\sin(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})|,$$

alors on a:
1. $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.
2. $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = -\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u}$.
3. $\overrightarrow{u} \| \overrightarrow{v}$ ssi $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = 0$.

■ **Exemple 4.13** Soit $\overrightarrow{u} = (2, -1, 0)$ et $\overrightarrow{v} = (3, 2, 2)$:
1. Calculer $\|\overrightarrow{u}\|$ et $\|\overrightarrow{v}\|$.

$$\|\overrightarrow{u}\| = \|(2, -1, 0)\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{5}$$
$$\|\overrightarrow{v}\| = \|(3, 2, 2)\| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{17},$$

2. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$.

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = (2, -1, 0) \cdot (3, 2, 2) = 6 - 2 + 0 = 4.$$

3. Calculer le produit vectoriel $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} &= (2, -1, 0) \times (3, 2, 2)\\ &= ((-1)(2) - (0)(2), (0)(3) - (2)(2), (2)(2) - (-1)(3))\\ &= (-2, -4, 7).\end{aligned}$$

4. Calculer $\theta = (\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})$.
   Par propriété $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \|\overrightarrow{v}\| \cos(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})$,
$$\cos(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}) = \frac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{u}\| \|\overrightarrow{v}\|} = \frac{4}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{17}} = \frac{4}{\sqrt{85}},$$
   alors $\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}} = \text{Arccos}(\frac{4}{\sqrt{85}}) = 64.28°$.
   Ou par la propriété $\|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\| = \|\overrightarrow{u}\| \|\overrightarrow{v}\| |\sin(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})|$,
$$|\sin(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})| = \frac{\|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\|}{\|\overrightarrow{u}\| \|\overrightarrow{v}\|} = \frac{\|(-2,-4,7)\|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{17}} = \frac{\sqrt{69}}{\sqrt{85}},$$
   alors $\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}} = \text{Arcsin}(\frac{\sqrt{69}}{\sqrt{85}}) = 64.28°$.

■

Théorème 4.2.5 — L'aire du parallélogramme. L'aire du parallélogramme engendré par deux vecteurs u et v dans $\mathbb{R}^3$ est égale à la longueur du produit vectoriel de vecteurs u et v.

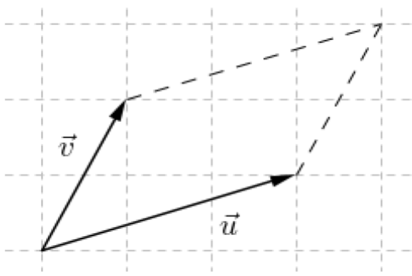


Figure 4.17: Parallélogramme engendré par u et v

■ **Exemple 4.14** Donner l'aire du parallélogramme engendré par les vecteurs $\overrightarrow{u} = (2,1,3)$ et $\overrightarrow{v} = (2,-1,0)$. ■

$$\begin{aligned} A &= \|(2,1,3) \times (2,-1,0)\| \\ &= \|((1)(0)-(3)(-1),(3)(2)-(2)(0),(2)(-1)-(1)(2))\| \\ &= \|(3,6,-4)\| = \sqrt{61}. \end{aligned}$$

Définition 4.2.5 — Produit mixte. Le produit mixte de trois vecteurs u, v et w dans $\mathbb{R}^3$ est défini par
$$[u,v,w] := (u \times v) \cdot w = u \cdot (v \times w).$$

Théorème 4.2.6 — le volume du parallélépipède. Le volume du parallélépipède engendré par trois vecteurs u, v et w dans $\mathbb{R}^3$ est égal à la valeur absolue du produit mixte de trois vecteurs u, v et w.

■ **Exemple 4.15** Donner le volume du parallélipipède engendré par les vecteurs $\overrightarrow{u} = (2,1,3)$, $\overrightarrow{v} = (2,-1,0)$ et $\overrightarrow{w} = (3,2,1)$. ■

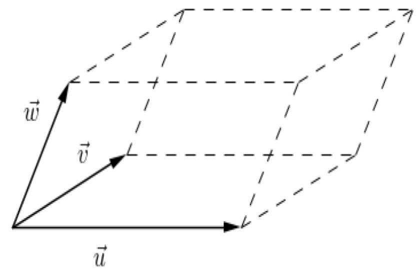


Figure 4.18: Parallélépipède engendré par u, v et w

$$
\begin{aligned}
V &= |[(2,1,3),(2,-1,0),(3,2,1)]| \\
&= |((2,1,3)\times(2,-1,0))\cdot(3,2,1)| \\
&= |(3,6,-4)\cdot(3,2,1)| = |9+12-4| = 17.
\end{aligned}
$$

Exercices

Exercice 4.8 On donne les points $A(1,-2,0)$, $B(2,4,-5)$ et $C(3,3,5)$ de l'espace. Trouver $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et leurs longueurs. ■

Exercice 4.9 1. Trouver $\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{j} \times \overrightarrow{k}$.
2. Par la propriété distributive, trouver $(2\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j}) \times (\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k})$.
■

Exercice 4.10 Soit $\overrightarrow{u} = (2,5)$ et $\overrightarrow{v} = (-3,6)$:
1. Calculer $\|\overrightarrow{u}\|$ et $\|\overrightarrow{v}\|$;
2. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$;
3. Calculer le produit vectoriel $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$;
4. Calculer $\theta = \widehat{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})}$

■

Exercice 4.11 Soit $\overrightarrow{u} = (2,5,1)$ et $\overrightarrow{v} = (-3,2,6)$:
1. Calculer $\|\overrightarrow{u}\|$ et $\|\overrightarrow{v}\|$.
2. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$.
3. Calculer le produit vectoriel $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$.
4. Calculer $\theta = \widehat{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})}$.

■

Exercice 4.12 Donner l'aire du parallélogramme engendré par les vecteurs:
1. $\overrightarrow{u} = (2,1)$ et $\overrightarrow{v} = (3,-1)$.
2. $\overrightarrow{u} = (1,1,3)$ et $\overrightarrow{v} = (3,-6,0)$.

■

Exercice 4.13 Donner l'aire du triangle engendré par les points:
1. $A(1,2,3)$, $B(2,3,7)$ et $C(2,-1,5)$.
2. $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ et $C(x_3,y_3)$.

■

Exercice 4.14 Donner le volume du parallélipipède engendré par les vecteurs $\overrightarrow{u} = (2,0,1)$, $\overrightarrow{v} = (5,0,0)$ et $\overrightarrow{w} = (1,4,2)$. ■

Exercices supplémentaires

Exercice 4.15 Montre que:

$$u \times (v \times w) = (u \cdot w)v - (u \cdot v)w \qquad \text{et} \qquad (u \times v) \times w = (u \cdot w)v - (v \cdot w)u.$$

■

Exercice 4.16 — l'identité de Jacobi. Vérifie que:

$$u \times (v \times w) + w \times (u \times v) + v \times (w \times u) = 0$$

4.3 Matrices

Définition 4.3.1 — Matrice. Une matrice est un tableau rectangulaire de m lignes et de n colonnes de nombres. Dans une matrice A de dimension $m \times n$:

- m représente le nombre de lignes de la matrice.
- n représente le nombre de colonnes de la matrice.
- l'élément a_{ij} correspond à l'élément situé à l'intersection de la i^e ligne et de la j^e colonne.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}.$$

$m \times n$ s'appelle la taille de A.

■ **Exemple 4.16** $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 5 \\ 2 & 9 & 5 \\ 0 & -1 & -2 \\ 9 & 3 & 7 \end{bmatrix}_{4\times 3}$ est une matrice; par exemple, $a_{11} = 1$ et $a_{42} = 3$. ■

Définition 4.3.2 Deux matrices sont égales lorsqu'elles ont la même taille et que les éléments correspondants sont égaux.

Définition 4.3.3 — Matrices particulières. Voici des matrices particulières

- **La matrice carrée:** Si $m = n$, la matrice est dite matrice carrée. Les éléments $a_{11}, a_{22}, \cdots,$ a_{nn} forment la diagonale principale de la matrice $A_{n\times n}$.
- **Matrice ligne:** Une matrice qui n'a qu'une seule ligne ($m = 1$) est appelée matrice ligne. On la note
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{bmatrix}.$$
- **Matrice colonne:** Une matrice qui n'a qu'une seule colonne ($n = 1$) est appelée matrice colonne. On la note
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}.$$
- **La matrice nulle** dont tous les élément sont des zéros est appelée la matrice nulle et est notée $0_{m\times n}$ ou plus simplement 0. Dans le calcul matriciel, la matrice nulle joue le rôle du nombre 0 pour les réels.
- **La matrice identité**: la matrice carrée suivante s'appelle la matrice identité:
$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix},$$
Ses éléments diagonaux sont égaux à 1 et tous ses autres éléments sont égaux à 0. Elle se note I_n ou simplement I.

Définition 4.3.4 — Somme de deux matrices. Soient A et B deux matrices ayant la même taille $m \times n$. Leur somme $C = A + B$ est la matrice de taille $m \times n$ définie par

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

■ **Exemple 4.17** Pour $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ on a:

$$A + B = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}.$$

Définition 4.3.5 — Produit d'une matrice par un scalaire. Le produit d'une matrice $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ par un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ est la matrice $\lambda A = [\lambda a_{ij}]_{m \times n}$.

■ **Exemple 4.18** Pour $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ et $\lambda = 5$, alors

$$5A = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 25 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}.$$

■

Définition 4.3.6 — Soustraction de deux matrices. La matrice $(-1)A$ est l'opposée de A et est notée $-A$. La soustraction $A - B$ est définie par $A + (-B)$.

■ **Exemple 4.19** Pour $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ on a:

$$A - B = \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ 3 & 10 \end{bmatrix}.$$

■

Proposition 4.3.1 — Propriétés du l'addition et la multiplication par un scalaire. Soient $A_{m \times n}$, $B_{m \times n}$ et $C_{m \times n}$ trois matrices et $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$ deux scalaires.

1. $A + B = B + A$: la somme est commutative,
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$: la somme est associative,
3. $A + 0 = A$: la matrice nulle est l'élément neutre de l'addition,
4. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$,
5. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.

Définition 4.3.7 — Produit de deux matrices. Le produit AB de deux matrices A et B est défini si et seulement si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.

1. Le produit d'un matrice ligne par un matrice colonne:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}_{1 \times n} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}_{n \times 1} = [a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n]_{1 \times 1}.$$

2. Le produit de deux matrices 2×2:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_{2\times 2} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{bmatrix} \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}_{2\times 2}.$$

3. Soient $A = [a_{ij}]_{m\times p}$ et $B = [b_{ij}]_{p\times n}$, $C = AB$ est une matrice $C = [c_{ij}]_{m\times n}$ dont les élément c_{ij} sont définis par:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}.$$

■ **Exemple 4.20** Pour $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$:

1. Calculer AB

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}_{1\times 3} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}_{3\times 1} = [3]_{1\times 1}$$

2. Calculer BA

$$BA = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}_{3\times 1} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}_{1\times 3} = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 4 \end{bmatrix}_{3\times 3}.$$

■

■ **Exemple 4.21** Pour $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$:

1. Calculer AB

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}.$$

2. Calculer BA

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. Calculer A^2

$$A^2 = AA = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 2} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -2 & -6 \end{bmatrix}.$$

■

■ **Exemple 4.22** Pour $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$:

1. Calculer AB.

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 5 & 8 & 3 \end{bmatrix}_{2\times 3}.$$

2. Calculer BA.
   Impossible, car B à deux colonnes et A à trois lignes!

■

Proposition 4.3.2 — Propriétés du produit. :

1. Dans le calcul matriciel, la matrice identité joue un rôle analogue à celui du nombre 1 pour les réels. Si A est une matrice $n \times n$, alors

$$I_n \cdot A = A \cdot I_n = A.$$

2. $A(BC) = (AB)C$ (associativité du produit)
3. $A(B+C) = AB + AC$ et $(B+C)A = BA + CA$ (distributivité du produit par rapport à la somme)
4. $A \cdot 0 = 0$ et $0 \cdot A = 0$.

Définition 4.3.8 — Matrice inverse. Soit $A_{n\times n}$ une matrice carrée, s'il existe une matrice carrée $B_{n\times n}$ telle que

$$AB = BA = I_n,$$

on dit que A est inversible. On appelle B l'inverse de A et on la note A^{-1}.

Remarque 4.3.3 Plus généralement, quand A est inversible, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note :

$$A^{-k} = (A^{-1})^k = \underbrace{A^{-1}A^{-1}\cdots A^{-1}}_{k \text{ facteurs}}.$$

Proposition 4.3.4 — Propriétés du la matrice inverse. :

1. Soit A une matrice inversible. Alors A^{-1} est aussi inversible et on a :

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

2. Soient A et B deux matrices inversibles de même taille. Alors AB est inversible et

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Théorème 4.3.5 Considérons la matrice $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_{2\times 2}$. Si $ad - bc \neq 0$, alors A est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

■ **Exemple 4.23** Calculer l'inverse de $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 2}$. Par le théorème

$$A^{-1} = \frac{1}{(1)(4)-(2)(3)}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

■

Définition 4.3.9 — Déterminant. Le déterminant de la matrice carrée A est un nombre réel défini par:

1. Cas d'une matrice 1×1: Soit $A = [a]_{1\times 1}$, le déterminant de A est:

$$\det(A) = |[a]| = a.$$

2. Cas d'une matrice 2×2: Soit $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_{2\times 2}$, le déterminant de A est:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

3. Cas d'une matrice 3×3 (la règle de Sarrus): Soit $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}_{3\times 3}$, le déterminant de A est:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = (aei + bfg + cdh) - (gec + hfa + idb).$$

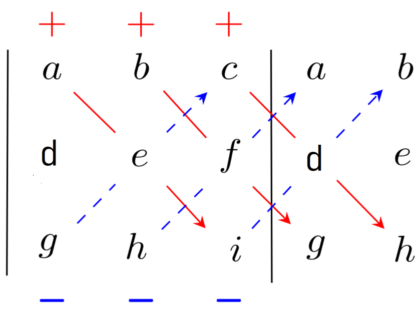


Figure 4.19: La règle de Sarrus

■ **Exemple 4.24** Calculer les déterminants de matrices suivantes:

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 2}$.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (1)(4) - (2)(3) = 4 - 6 = -2.$$

2. $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}_{3\times 3}$.

$$\begin{aligned}
\det(B) &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \\
&= ((1)(5)(9) + (2)(6)(7) + (3)(4)(8)) - ((7)(5)(3) + (8)(6)(1) + (9)(4)(2)) \\
&= 225 - 225 = 0.
\end{aligned}$$

Théorème 4.3.6 — Propriétés du déterminant. Pour deux matrices $A_{n\times n}$ et $B_{n\times n}$ on a:

1. $\det(AB) = \det(A)\cdot\det(B)$.
2. $\det(A^m) = \det(A)^m$.
3. $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$.
4. $\det(kA) = k^n \det(A)$.

Attention: $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$.

■

4.4 Systèmes d'équations linéaires

Le système linéaire

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{cases}$$

peut s'écrire sous forme matricielle :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}}_{B}.$$

On appelle A la matrice des coefficients du système, B est le vecteur du second membre. Le vecteur X est une solution du système si et seulement si $AX = B$.

Théorème 4.4.1 Considérer un système d'équations linéaires $A_{n\times n}X_{n\times 1} = B_{n\times 1}$:

1. Si $\det(A) \neq 0$, il y a une solution unique $X = A^{-1}B$.
2. Si $\det(A) = 0$, il n'y a soit aucune solution ou une infinité de solutions.

Remarque 4.4.2 — Méthode d'élimination de variables. Pour résoudre un système de deux équations linéaires avec deux inconnues par la méthode,

1. Choisir l'une des variables inconnues, par exemple x et l'isoler de l'une des deux équations.
2. Remplacer dans l'autre équation et la résoudre.
3. Trouver y.

■ **Exemple 4.25** Considérer le système linéaire suivant

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 & = 6 \\ -5x_1 + 4x_2 & = 8 \end{cases},$$

1. Résolvez le système par la méthode d'élimination de variables.
   $3x_1 - 2x_2 = 6$ implique que $x_1 = \dfrac{2x_2+6}{3}$
   ensuite
   $$-5(\frac{2x_2+6}{3}) + 4x_2 = 8,$$
   alors $x_2 = 27$, donc $x_1 = \dfrac{2(27)+6}{3} = 20.$
2. Résolvez le système par la méthode $X = A^{-1}B$.
   $$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 40 \\ 54 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 27 \end{bmatrix}.$$

■

Théorème 4.4.3 — Règle de Cramer. La règle de Cramer est un méthode qui donne la solution d'un système d'équations linéaires. Elle est nommée d'après le mathématicien suisse Gabriel Cramer (1704-1752).

1. Les composantes de l'unique solution du système
   $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & = b_2 \end{cases}$$
   sont données par
   $$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$
2. Les composantes de l'unique solution du système
   $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 & = b_2 \\ a_{31}x_2 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 & = b_3 \end{cases}$$
   sont données par
   $$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

■ **Exemple 4.26** Résolvez les systèmes linéaires suivants par la méthode de Cramer:

1. Les composantes de l'unique solution du système

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 & = 6 \\ -5x_1 + 4x_2 & = 8 \end{cases}$$

sont données par

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 8 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{40}{2} = 20,$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -5 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{54}{2} = 27.$$

2. Les composantes de l'unique solution du système

$$\begin{cases} 2x + y + 3z & = 2 \\ x - y + z & = 1 \\ x + 4y - 2z & = -1 \end{cases}$$

sont données par

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{6}{14} = \frac{3}{7},$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-2}{14} = -\frac{1}{7},$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{6}{14} = \frac{3}{7}.$$

■

Exercices

Exercice 4.17 Soient $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $E = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$.

1. Calculer toutes les sommes possibles de deux de ces matrices.
2. Calculer $3A + 2C$ et $5B - 4D$.
3. Trouver λ tel que $A - \lambda C$ soit la matrice nulle.

■

Exercice 4.18 Pour $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$:

1. Calculer AB
2. Calculer BA
3. Calculer $(A+B)^2$
4. Calculer $A^2 + 2AB + B^2$

■

Exercice 4.19 Soit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

1. Trouvez A^2, A^3 et A^4.
2. Trouvez A^k.

■

Exercice 4.20 Soit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

trouvez A^k. ■

Exercice 4.21 Calculer l'inverse de $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}_{2\times 2}$. ■

Exercice 4.23 Considérez le système linéaire suivant

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 & = -1 \\ x_1 - x_2 & = 4 \end{cases},$$

1. Résolvez le système par la méthode d'élimination de variables.
2. Résolvez le système par la méthode $X = A^{-1}B$.
3. Résolvez le système par la méthode de Cramer.

■

Exercice 4.24 Résolvez le système linéaire suivant

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3 &= 6 \\ x_1+x_2-x_3 &= 0 \\ x_1-x_2+x_3 &= 2 \end{cases},$$

par la méthode de Cramer. ■

Exercices supplémentaires

Exercice 4.25 Vérifier que pour la matrice $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_{2\times 2}$, si $ad-bc \neq 0$, alors A est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

■

Exercice 4.26 Montrer que

1. Soit A une matrice inversible. Alors A^{-1} est aussi inversible et on a :

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

2. Soient A et B deux matrices inversibles de même taille. Alors AB est inversible et

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

■

Bibliography

Index