Calcul différentiel

MAT 0343

Mehrdad Najafpour

Published by ....

Première impression, mai 2020

Contents

1 Préliminaires 7

1.1 Équation et fonction polynomiale 7

1.1.1 Fonction et équation linéaire 7

1.1.2 Fonction et équation quadratic 9

1.1.3 *L'équation de plusieurs degrés 15

1.2 L'étude des fonctions 18

1.2.1 La définition d'une fonction, domaine et image d'une fonction 18

1.2.2 Opérations sur les fonctions et l'inverse d'une fonction 20

1.2.3 Un catalogue de fonctions particulières 21

2 Limites et continuité 29

2.1 Limites des fonctions 29

2.2 Formes indéterminées 37

2.2.1 Forme $[\frac{0}{0}]$ 37

2.2.2 Forme $[\frac{\infty}{\infty}]$ 39

2.2.3 Forme $[0 \times \infty]$ 40

2.2.4 Forme $[\infty - \infty]$ 41

2.3 Continuité 50

2.4 Suites numériques 52

3 Dérivées 53

3.1 Définition de dérivée 53

3.2 Calcul des dérivées 55

3.3 Dérivée d'ordre supérieur 64

3.4 La règle de l'hôpital **68**
3.4.1 Forme $[0^0]$ 69
3.4.2 Forme $[\infty^0]$ 70
3.4.3 Forme $[1^\infty]$ 71
3.5 Graphiques des fonctions **73**
3.6 Problèmes d'optimisation **76**

Bibliography **77**
Articles **77**
Books **77**

Préface

1. Préliminaires

1.1 Équation et fonction polynomiale

Définition 1.1.1 Une équation polynomiale, ou équation algébrique, est une équation de la forme :

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0,$$

■ **Exemple 1.1** Par exemples

1. L'équation générale du premier degré ou linéaire: $ax+b=0$, $a \neq 0$.
2. L'équation générale du deuxieme degré ou quadratic: $ax^2+bx+c=0$, $a \neq 0$.
3. L'équation générale du troisième degré ou qubic: $ax^3+bx^2+cx+d=0$, $a \neq 0$.

■

1.1.1 Fonction et équation linéaire

Une fonction linéaire est une fonction polynomiale de degré 1 définie par $f(x) = ax+b$, où

1. a est le coefficient directeur de la droite et s'appelle la pente: si $a > 0$, la droite **monte** et si $a < 0$, la droite **descend**.
2. b est l'ordonnée à l'origine de la droite, c'est donc l'ordonnée du point d'intersection de la droite avec l'axe des ordonnées.

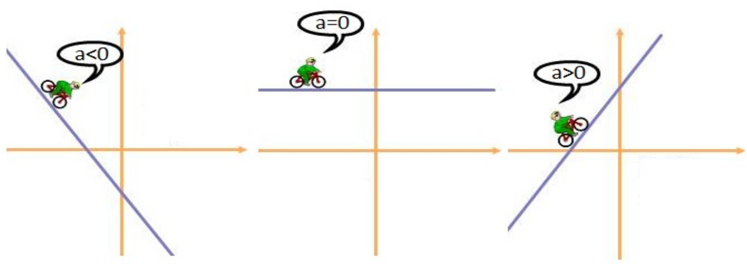


Figure 1.1: Représentation graphique de $f(x) = ax+b$

Théorème 1.1.1 — Équations du premier degré. L'équation générale du premier degré $ax+b=0$, $a\neq 0$ admet une solution $x=-\frac{b}{a}$.

■ **Exemple 1.2** Résoudre $3x+1=0$.

Solution: Par le théorème $x=-\frac{1}{3}$ ou

$$3x+1=0\Rightarrow 3x=-1\Rightarrow x=\frac{-1}{3},$$

alors $x=-\frac{1}{3}$. ■

Remarque 1.1.2 — Le tableau des signes. :

Signe de polynômes de premier dégrée $ax+b$:

Pour $ax+b$ on a une solutions $x=-\frac{b}{a}$ et le tableau des signes est donné par:

	$x=-\frac{b}{a}$	
$ax+b$	- signe de a	• signe de a

■ **Exemple 1.3** Trouver l'ensemble solution de inéquation suivante:

$$2x-1\leq 0.$$

zéro $x=-\frac{-1}{2}=\frac{1}{2}$, alors:

	$x=\frac{1}{2}$	
$2x-1$	$-$	• $+$

alors la réponse est $(-\infty,\frac{1}{2}]$. ■

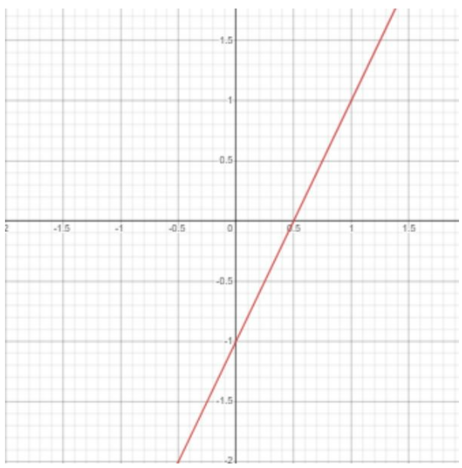


Figure 1.2: Représentation graphique de $f(x)=2x-1$

1.1.2 Fonction et équation quadratic

Définition 1.1.2 — Discriminant. Le discriminant de l'équation $ax^2+bx+c=0$ est la valeur Δ définie par:

$$\Delta = b^2-4ac.$$

Théorème 1.1.3 — Équations du deuxieme degré. Considérer l'équation générale du deuxieme degré $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$:

1. Si le discriminant est strictement positif, l'équation admet deux solutions x_1 et x_2 données par les formules suivantes:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

$$ax^2+bx+c = a\,(x-x_1)\,(x-x_2)$$

2. Si le discriminant est nul, l'équation admet une racine double:

$$ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \quad \text{et} \quad x_1=x_2=-\frac{b}{2a}.$$

3. Si le discriminant est strictement négatif, l'équation n'admet pas de solution réelle, mais admet deux solutions complexes.

■ **Exemple 1.4** Trouver les zéros et factoriser chacun des polynômes suivants:

1. $x^2-5x+6=0$
   Ici $\Delta = b^2-4ac = (-5)^2-4(1)(6) = 25-24 = 1$, alors on a deux solutions

$$x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5)\pm\sqrt{1}}{2(1)} = \frac{5\pm 1}{2} = 2 \text{ ou } 3.$$

$$\boxed{x^2-5x+6=(x-2)(x-3)}$$

2. $x^2-5x=0$
   Ici $\Delta = b^2-4ac = (-5)^2-4(1)(0) = 25-0 = 25$, alors on a deux solutions

$$x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5)\pm\sqrt{25}}{2(1)} = \frac{5\pm 5}{2} = 0 \text{ ou } 5.$$

$$\boxed{x^2-5x=x(x-5)}$$

3. $x^2-2x+1=0$
   Ici $\Delta = b^2-4ac = (-2)^2-4(1)(1) = 4-4 = 0$, alors on a une racine double

$$x_{1,2} = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2)}{2(1)} = \frac{2}{2} = 1.$$

$$\boxed{x^2-2x+1=(x-1)^2}$$

4. $x^2+x+1=0$
   Ici $\Delta = b^2-4ac = (1)^2-4(1)(1) = 1-4 = -3$, alors l'équation n'admet pas de solution réelle.

5. $16x^2-20x+5=0$
   Ici $\Delta=b^2-4ac=(-20)^2-4(16)(5)=400-320=80$, alors on a deux solutions
$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-20)\pm\sqrt{80}}{2(16)}=\frac{20\pm4\sqrt{5}}{32}=\frac{5\pm\sqrt{5}}{8}.$$
$$\boxed{16x^2-20x+5=16(x-\frac{5-\sqrt{5}}{8})(x-\frac{5+\sqrt{5}}{8})}$$
6. $16y^4-20y^2+5=0$ Supposons que $y^2=x$, donc $16x^2-20x+5=0$, ensuite
$$x_{1,2}=\frac{5-\sqrt{5}}{8},\frac{5+\sqrt{5}}{8},$$
   alors
$$y_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}},\pm\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}.$$
$$\boxed{16y^4-20y^2+5=16(y-\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}})(y+\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}})(y-\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}})(y+\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}})}$$
7. $x^3-5x^2+6x=0$
   On peut factoriser $x^3-5x^2+6x=x(x^2-5x+6)$, alors $x=0,2,3$.
$$\boxed{x^3-5x^2+6x=x(x-2)(x-3)}$$

■

■ **Exemple 1.5** Résoudre
$$\sqrt{7-2x}-x=4.$$

$$\begin{aligned}\sqrt{7-2x}-x&=4\\ \sqrt{7-2x}&=x+4\\ 7-2x&=(x+4)^2=x^2+8x+16,\end{aligned}$$

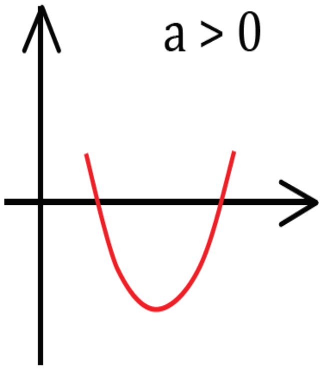
on a $x^2+10x+9=0$, $\Delta=b^2-4ac=(10)^2-4(1)(9)=100-36=64$,
$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-10\pm\sqrt{64}}{2}=\frac{-10\pm8}{2}=-1,-9,$$
on accepte seulement $x=-1$ car $\sqrt{7-2(-9)}-(-9)=14\neq4$. ■

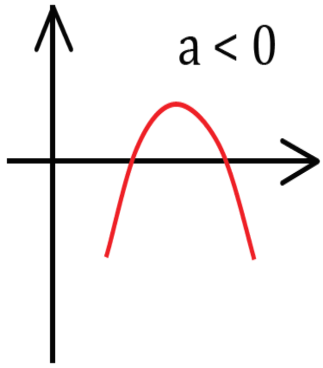
Une fonction quadratic ou l'équation de la parabole est une fonction polynomiale de degré 2 définie par $f(x)=ax^2+bx+c$,

1. Si $a>0$ il y a un minimum et si $a<0$ il y a un maximum à $x=-\dfrac{b}{2a}$.
2. Le point $S(-\dfrac{b}{2a},f(-\dfrac{b}{2a}))$ est appelé sommet.

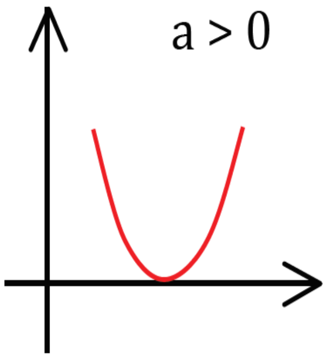
On peut tracer le graphe en se basant sur le signe de Δ.

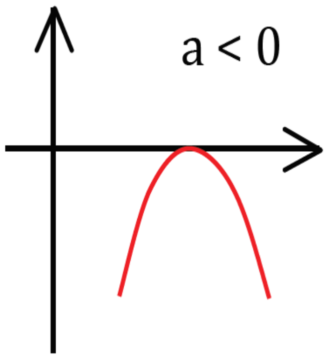
1. Si $\Delta > 0$, le graphe intersecte l'axe des x en deux points.



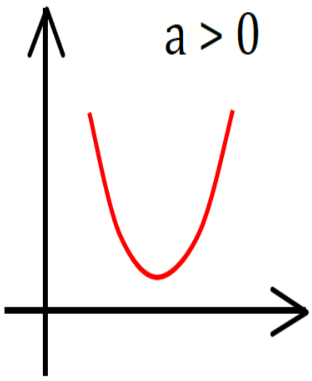


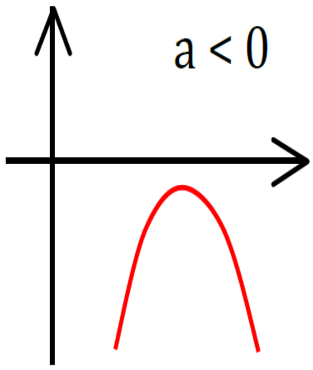
2. Si $\Delta = 0$, le graphe touche l'axe des x en $x = -\dfrac{b}{2a}$.





3. Si $\Delta < 0$, le graphe n'intersecte pas l'axe des x.





Remarque 1.1.4 — Le tableau des signes de polynômes de second dégrée ax^2+bx+c. :

1. Si le discriminant est strictement positif, on a deux solutions $x_1 < x_2$ et le tableau des signes est donné par:

	x_1		x_2	
ax^2+bx+c	signe de a	• - signe de a	•	signe de a

2. Si le discriminant est nul, l'équation admet une racine double $x = -\dfrac{b}{2a}$ et le tableau des signes est donné par:

		$x = -\dfrac{b}{2a}$	
ax^2+bx+c	signe de a	•	signe de a

3. Si le discriminant est strictement négatif, l'équation n'admet pas de solution réelle et le tableau des signes est donné par:

ax^2+bx+c	signe de a

■ **Exemple 1.6** Construisez le tableau des signes des expressions algébriques suivantes:

1. x^2-4x+4

		2	
$(x-2)^2$	$+$	•	$+$

2. $3x^2+4x-7$

$$3x^2+4x-7 = 3(x+\frac{7}{3})(x-1)$$

		$-\dfrac{7}{3}$		1	
$3x^2+4x-7$	$+$	•	$-$	•	$+$

3. $5x^2-5$

$$5x^2-5 = 5(x^2-1)$$

		-1		1	
$5x^2-5$	$+$	•	$-$	•	$+$

4. x^3-6x^2+9x

$$x^3-6x^2+9x=x(x^2-6x+9)=x(x-3)^2$$

		0		3	
x	$-$	•	$+$		$+$
$(x-3)^2$	$+$		$+$	•	$+$
$x(x-3)^2$	$-$	•	$+$	•	$+$

5. $25x^4+99x^2-4$

$$25x^4+99x^2-4=(25x^2-1)(x^2+1)$$

		$-\frac{1}{5}$		$\frac{1}{5}$	
$25x^2-1$	$+$	•	$-$	•	$+$
x^2+1	$+$		$+$		$+$
$(25x^2-1)(x^2+1)$	$+$	•	$-$	•	$+$

6. $9x^6-x^4$

$$9x^6-x^4=x^4(9x^2-1)$$

		$-\frac{1}{3}$		0		$\frac{1}{3}$	
x^4	$+$		$+$	•	$+$		$+$
$9x^2-1$	$+$	•	$-$		$-$	•	$+$
$x^4(9x^2-1)$	$+$	•	$-$	•	$-$	•	$+$

7. $(x-1)(x^2-4)$

		-2		1		2	
$x-1$	$-$		$-$	•	$+$		$+$
x^2-4	$+$	•	$-$		$-$	•	$+$
$(x-1)(x^2-4)$	$-$	•	$+$	•	$-$	•	$+$

8. $(x-1)^2(x^2-4)$

		-2		1		2	
$(x-1)^2$	$+$		$+$	•	$+$		$+$
x^2-4	$+$	•	$-$		$-$	•	$+$
$(x-1)^2(x^2-4)$	$+$	•	$-$	•	$-$	•	$+$

9. $\dfrac{x^2-1}{x^2-4}$

		-2		-1		1		2	
x^2-1	$+$		$+$	•	$-$	•	$+$		$+$
x^2-4	$+$	•	$-$		$-$		$-$	•	$+$
$\dfrac{x^2-1}{x^2-4}$	$+$	$\|$	$-$	•	$+$	•	$-$	$\|$	$+$

10. $\dfrac{-2x+3}{x(x^2+4)^2}$

		0		$\frac{3}{2}$	
$-2x+3$	$-$		$-$	•	$+$
x	$-$	•	$+$		$+$
x^2+4	$+$		$+$		$+$
$\dfrac{-2x+3}{x(x^2+4)^2}$	$+$	$\|$	$-$	•	$+$

■

■ **Exemple 1.7** Trouver l'ensemble solution de inéquation suivante:

$$\frac{2x-3}{x-5} \leq \frac{x+1}{2x+3}.$$

$$\begin{aligned}
\frac{2x-3}{x-5} &\leq \frac{x+1}{2x+3} \\
0 &\leq \frac{x+1}{2x+3} - \frac{2x-3}{x-5} \\
0 &\leq \frac{(x+1)(x-5)-(2x-3)(2x+3)}{(2x+3)(x-5)} \\
0 &\leq \frac{-3x^2-4x+4}{(2x+3)(x-5)} = \frac{-3(x-\frac{2}{3})(x+2)}{(2x+3)(x-5)},
\end{aligned}$$

		-2		$-\frac{3}{2}$		$\frac{2}{3}$		5	
$x-\frac{2}{3}$	$-$		$-$		$-$	•	$+$		$+$
$x+2$	$-$	•	$+$		$+$		$+$		$+$
$2x+3$	$-$		$-$	•	$+$		$+$		$+$
$x-5$	$-$		$-$		$-$		$-$	•	$+$
$\dfrac{-3(x-\frac{2}{3})(x+2)}{(2x+3)(x-5)}$	$-$	•	$+$	$\|$	$-$	•	$+$	$\|$	$-$

alors la réponse est $[-2,-\frac{3}{2}[\cup[\frac{2}{3},5[$ ■

1.1.3 *L'équation de plusieurs degrés[1]

Théorème 1.1.5 — Théorème fondamental de l'algèbre (théorème de d'Alembert-Gauss). Tout polynôme non constant, admet au moins une racine complexe.

Théorème 1.1.6 — Équations du troisieme degré (formule de Cardan). La formule de Cardan est une formule qui permet de résoudre l'équation générale du troisième degré $ax^3+bx^2+cx+d=0$. L'équation admet trois solutions x_1, x_2 et x_3 données par les formules suivantes:

$$x_1 = -\frac{b}{3a} + S + T$$
$$x_2 = -\frac{b}{3a} - \frac{S+T}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}(S-T)$$
$$x_3 = -\frac{b}{3a} - \frac{S+T}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}(S-T)$$

où $S = \sqrt[3]{R+\sqrt{Q^3+R^2}}$, $T = \sqrt[3]{R-\sqrt{Q^3+R^2}}$ et $Q = \dfrac{3ac-b^2}{9a^2}$, $R = \dfrac{9abc-27a^2d-2b^3}{54a^3}$.

Théorème 1.1.7 — Équations du quatrième degré (formule de Ferrari). La formule de Ferrari est une formule qui permet de résoudre l'équation générale du quatrième degré $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$. L'équation admet quatr solutions x_1, x_2, x_3 et x_4 données par les formules suivantes:

$$x_{1,2} = -\frac{b}{4a} + S \pm \frac{1}{2}\sqrt{-4S^2-2p+\frac{q}{S}}$$
$$x_{3,4} = -\frac{b}{4a} - S \pm \frac{1}{2}\sqrt{-4S^2-2p+\frac{q}{S}}$$

où $p = \dfrac{8ac-3b^2}{8a^2}$, $q = \dfrac{b^3-4abc+8a^2d}{8a^3}$, $S = \dfrac{1}{2}\sqrt{-\dfrac{2}{3}p+\dfrac{1}{3a}(Q+\dfrac{\Delta_0}{Q})}$, $Q = \sqrt[3]{\dfrac{\Delta_1+\sqrt{\Delta_1^2-4\Delta_0^3}}{2}}$,
$\Delta_0 = c^2-3bd+12ae$ et $\Delta_1 = 2c^3-9bcd+27b^2e+27ad^2-72ace$.

Théorème 1.1.8 — Théorème d'Abel-Ruffini. Il est impossible de résoudre par des radicaux l'équation générale du cinquième degré.

[1] N'est pas important pour votre examen.

Exercices

Exercice 1.1 Tracer le graphe des fonctions suivantes:
1. $f(x) = x + 6$
2. $f(x) = -5x + 6$
3. $f(x) = -x - 5$
4. $x = 2y + 6$
5. $2x + 3y + 6 = 0$

■

Exercice 1.2 Résoudre les équations suivantes:
1. $7x + 1 = 5x - 9$
2. $5x - 1 = \dfrac{3x}{2}$
3. $\dfrac{2}{5}(x+1) - \dfrac{3}{2}(4x-3) = \dfrac{5}{3}(2x+3) + 1$
4. $\dfrac{4x}{x+1} + \dfrac{5}{x} = \dfrac{6x+5}{x^2+x}$

■

Exercice 1.3 Tracer le graphe des fonctions suivantes:
1. $f(x) = x^2 + 5x + 6$
2. $f(x) = 2x^2 + 5x + 6$
3. $f(x) = -x^2 + 5x + 6$
4. $f(x) = -5x^2 + 5x + 1$
5. $f(x) = -x^2 - 3x$

■

Exercice 1.4 Trouver les zéros et factoriser chacun des polynômes suivants:
1. $x^2 - 4x + 4$
2. $3x^2 + 4x - 7$
3. $5x^2 - 5$
4. $x^2 - 13x + 42$
5. $x^3 - 6x^2 + 9x$
6. $25x^4 + 99x^2 - 4$
7. $-5x^2 - 8x + 9$
8. $4x^2 - 4x - 24$
9. $x^2 - 625$
10. $x^4 - 625$

■

Exercice 1.5 Résoudre les équations suivantes:
1. $|3x + 1| = 7$
2. $|x^2 - 4x - 5| = 7$
3. $||3x + 1| - 3| = 7$
4. $|2x - 1| = |4x + 9|$
5. $1 - \sqrt{x - 1} = 6$
6. $\sqrt{3x - 5} + \sqrt{x - 1} = 2$

■

Exercice 1.6 Trouver l'ensemble solution des inéquations suivantes:

1. $-1 < 4x+2 < 10$
2. $2 < \frac{1}{6} - \frac{1}{2}x \leq 4$

■

Exercice 1.7 Trouver l'ensemble solution des inéquations suivantes:

1. $x^2+4x \geq 21$
2. $4x^2 \leq 15-17x$
3. $x^4+x^3-12x^2 < 0$
4. $x \leq \frac{4}{x-3}$
5. $\frac{x^2+8x-5}{x-3} \geq \frac{3x-1}{x-3}$
6. $\frac{x^3-6x^2}{x-2}$

■

Exercices supplémentaires

Exercice 1.8 Supposons que $x+\frac{1}{x}=5$, trouve les valeurs de $x^2+\frac{1}{x^2}$ et $x^3+\frac{1}{x^3}$. ■

Exercice 1.9 Résoudre les équations suivantes:

1. $\frac{34}{x^2-3x+7}+5=2x-3$
2. $3+\sqrt{3+\sqrt{x}}=x$
3. $\sqrt{x+8}+\sqrt{x+15}=\sqrt{9x+40}$

■

Exercice 1.10 1. Pour $x,y \geq 0$ montrer que $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$.

2. Pour $x,y,z \geq 0$ montrer que
$$\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x+y+z}{3}.$$
3. Si $x,y,z > 0$ et $xyz=1$ trouve minimum de $4xy^2+2x^2y+27z^3$.
4. Pour $x_1,x_2,\cdots,x_n \geq 0$ montrer que
$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n} \leq \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}.$$

■

1.2 L'étude des fonctions

1.2.1 La définition d'une fonction, domaine et image d'une fonction

Définition 1.2.1 Considérer deux ensembles A et B, une fonction f de A vers B est une machine qui pour tout $x \in A$ nous donne un élément $y \in B$. Nommons cette fonction par f, donc on peut écrire $y = f(x)$. La variable x s'appelle la variable indépendante et la variable y s'appelle la variable dépendante.

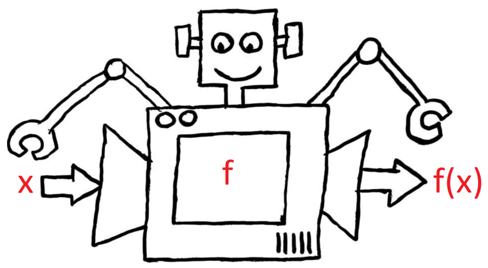


Figure 1.3: Fonction en tant que machine

■ **Exemple 1.8** Pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x - 5$. ■

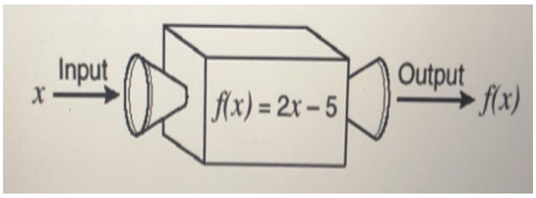


Figure 1.4: $f(x) = 2x - 5$

Définition 1.2.2 — La valeur ou l'image d'une fonction en $x = a$. Considérer $f : A \to B$, pour $a \in A$, $f(a)$ si elle existe, est appelée **la valeur de f en $x = a$** ou **image de $x = a$ par f**.

■ **Exemple 1.9** Trouver les valeurs de $f(x) = x^3 + 2x + 17$ en $x = 0$ et en $x = -2$. ■

$$f(0) = (0)^3 + 2(0) + 17 = 17$$
$$f(-2) = (-2)^3 + 2(-2) + 17 = 5$$

Définition 1.2.3 Le **domaine** d'une fonction $f(x)$ est l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ existe.

$$\text{Dom}(f) := \{x \in A : f(x) \text{ existe } \} \subseteq A.$$

Aussi l'**image** d'une fonction est l'ensemble des valeurs de f en $x = a$ pour tous les $a \in \text{Dom}(f)$,

$$\text{Image}(f) := \{f(a) \in B : a \in Dom(f)\} \subseteq B.$$

■ **Exemple 1.10** Pour $f : \{0,1,2,3\} \to \{0,1,2,3,4,5,6\}$ tel que dans la figure ci-bas, on a:

$$\text{Dom}(f) := \{0,1,2,3\} \subseteq \{0,1,2,3\}$$
$$\text{Image}(f) = \{0,2,4,6\} \subseteq \{0,1,2,3,4,5,6\}$$

■

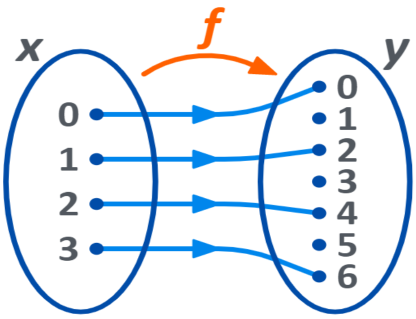


Figure 1.5: $f : \{0,1,2,3\} \to \{0,1,2,3,4,5,6\}$

■ **Exemple 1.11** Trouver le domaine des fonctions suivantes

1. $f(x) = x^3 + 5x + 7$

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}.$$

Remarque 1.2.1 Pour une fonction polynôme, le domaine de définition est l'ensemble des réels, soit l'ensemble $\mathbb{R}$.

2. $f(x) = \dfrac{1}{x}$

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}.$$

Remarque 1.2.2 Pour une fonction rationnelle, le domaine de définition est l'ensemble des réels, soit l'ensemble $\mathbb{R}$ moins la valeur de x qui annule le dénominateur.

3. $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{2\}.$$

4. $f(x) = \dfrac{1}{x^2-2}$

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{\pm\sqrt{2}\}.$$

5. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+2}$

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}.$$

6. $f(x) = \sqrt{x}$

Remarque 1.2.3 Pour une fonction avec une racine carrée, le domaine de définition est l'ensemble des valeurs de x qui donnent une radicande non négative.

$$\mathrm{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}.$$

7. $f(x) = \sqrt{x-2}$

$$\mathrm{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : x - 2 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 2\}.$$

8. $f(x) = \sqrt{5+4x-x^2}$

$$\mathrm{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : 5 + 4x - x^2 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 5\}.$$

9. $f(x) = \ln(\dfrac{x^2-4}{1-x})$

Remarque 1.2.4 Pour une fonction avec un logarithme de type ln, la valeur dont on prend le logarithme doit être strictement supérieure à 0.

$$\mathrm{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : \frac{x^2-4}{1-x} > 0\} =]-\infty, -2[\cup]1,2[.$$

■

1.2.2 Opérations sur les fonctions et l'inverse d'une fonction

Remarque 1.2.5 — Opération sur les fonction. Les opérations sur les fonctions consistent à déterminer la fonction qui résulte de l'addition, la soustraction, le produit, la division ou la composition de deux fonctions.

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x)+g(x)\\ (f-g)(x) &= f(x)-g(x)\\ (f\cdot g)(x) &= f(x)\cdot g(x)\\ (\frac{f}{g})(x) &= \frac{f(x)}{g(x)}.\end{aligned}$$

■ **Exemple 1.12** Soient les deux fonctions suivantes $f(x) = 3x^2+2$ et $g(x) = \dfrac{1}{x+4}$, trouver:

1. $(f+g)(x)$

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x) = (3x^2+2)+\frac{1}{x+4} = \frac{3x^3+12x^2+2x+9}{x+4}$$

2. $(f-g)(x)$

$$(f-g)(x) = f(x)-g(x) = (3x^2+2)-\frac{1}{x+4} = \frac{3x^3+12x^2+2x+7}{x+4}$$

3. $(f\cdot g)(x)$

$$(f)(x) = f(x)(x) = (3x^2+2)\cdot\frac{1}{x+4} = \frac{3x^2+2}{x+4}$$

4. $(\frac{f}{g})(x)$

$$(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3x^2+2}{\frac{1}{x+4}} = (3x^2+2)(x+4)$$

■

Définition 1.2.4 — Composition de deux fonctions. Pour de deux fonctions f et g, la fonction $f\circ g$ est appelée la composée de f par g et est définie par

$$(f\circ g)(x) = f(g(x)),$$

On lit cette composée f rond g. On peut également avoir $(g\circ f)(x) = g(f(x))$, qui est la composée de g par f.

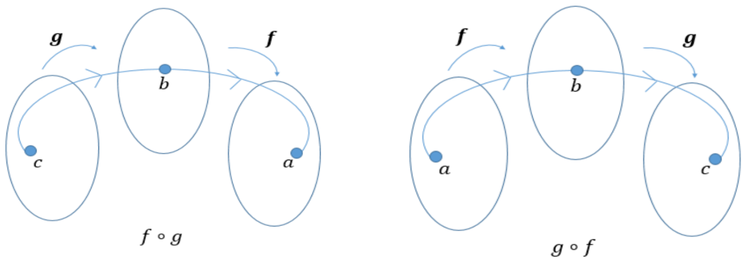


Figure 1.6: Composition de deux fonction

■ **Exemple 1.13** Supposons que $f(x) = x^2$ et $g(x) = 2x+1$ alors

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x+1) = (2x+1)^2$$
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = 2x^2+1$$

■

■ **Exemple 1.14** Supposons que $f(x) = x^2$ et $g(x) = \sqrt{x}$ alors

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x$$
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = \sqrt{x^2} = |x|.$$

Ici on a $f \circ g \neq g \circ f$. ■

■ **Exemple 1.15** Supposons que $f(x) = x^3$ et $g(x) = \sqrt[3]{x}$ alors

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt[3]{x}) = (\sqrt[3]{x})^3 = x$$
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^3) = \sqrt[3]{x^3} = x.$$

Ici on a $f \circ g = g \circ f$. ■

1.2.3 Un catalogue de fonctions particulières

■ **Exemple 1.16 — Les fonctions polynomiales.** Tracer les graphes des fonctions suivantes:

1. $f(x) = x$

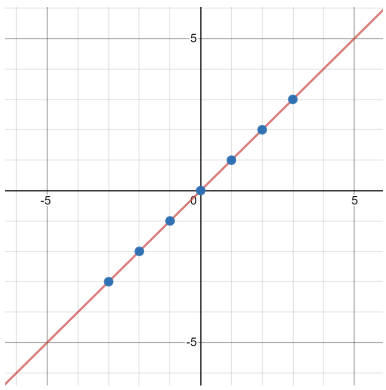


Figure 1.7: graphe de $y = f(x) = x$

2. $f(x) = -x+2$

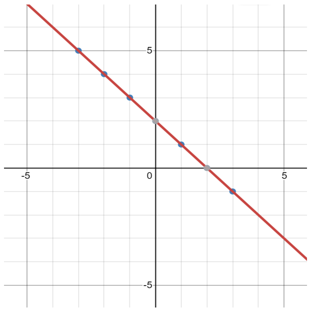


Figure 1.8: graphe de $y = f(x) = -x+2$

3. $f(x) = x^2$

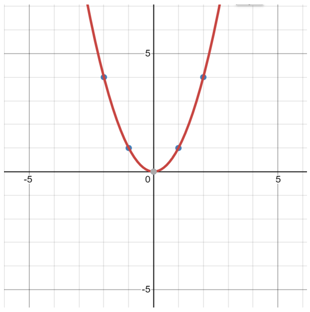


Figure 1.9: graphe de $y = f(x) = x^2$

4. $f(x) = x^3$

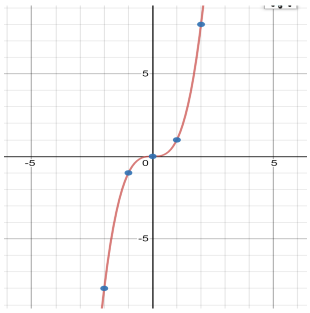


Figure 1.10: graphe de $y = f(x) = x^3$

■

■ **Exemple 1.17 — Les fonctions rationnelles.** Tracer les graphes des fonctions suivantes:

1. $f(x) = \dfrac{1}{x}$

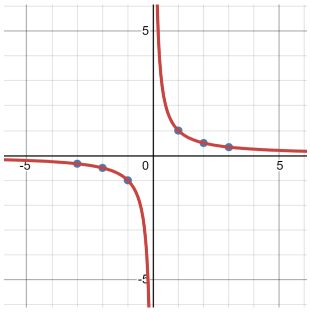


Figure 1.11: graphe de $y = f(x) = \dfrac{1}{x}$

2. $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$

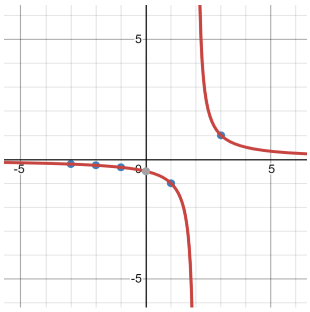


Figure 1.12: graphe de $y = f(x) = \dfrac{1}{x-2}$

■

■ **Exemple 1.18 — Les fonctions radicaux.** Tracer les graphes des fonctions suivantes:

1. $f(x) = \sqrt{x}$

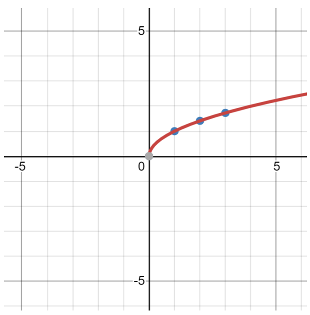


Figure 1.13: graphe de $y = f(x) = \sqrt{x}$

2. $f(x) = \sqrt[3]{x}$

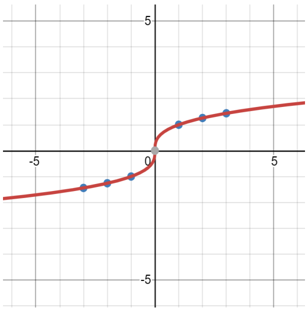


Figure 1.14: graphe de $y = f(x) = \sqrt[3]{x}$

■

■ **Exemple 1.19 — Les fonctions exponentielles.** Tracer les graphes des fonctions suivantes:

1. $y = 2^x$

x	-2	-1	0	1	2
y					

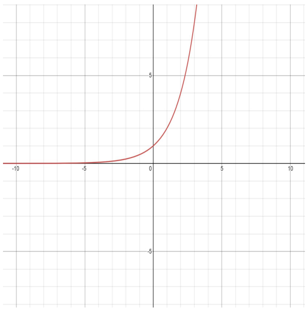


Figure 1.15: Représentation graphique de $y = 2^x$

2. $y = (\dfrac{1}{2})^x$

x	-2	-1	0	1	2
y					

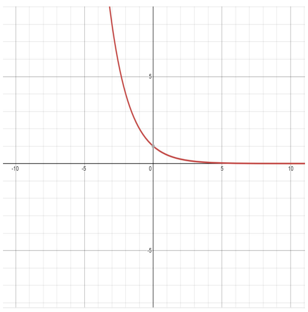


Figure 1.16: Représentation graphique de $y = (\dfrac{1}{2})^x$

■

Remarque 1.2.6 La courbe qui représente l'équation exponentielle $y = b^x$ peut être **croissante** ou **décroissante** selon la valeur du nombre b:

- Lorsque $b > 1$, est croissante.
- Lorsque $0 < b < 1$ la courbe est décroissante.

■ **Exemple 1.20 — les fonctions logarithmes.** Tracer les graphes des fonctions suivantes:

1. $y = \log_2 x$

x	0	0^+	1	4	8	$+\infty$
y						

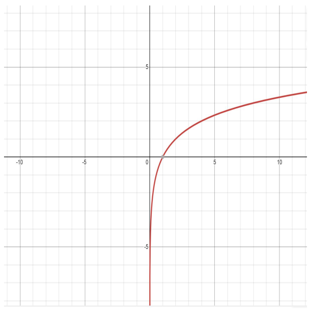


Figure 1.17: Représentation graphique de $y = \log_2 x$

2. $y = \log_{\frac{1}{2}}^x$

x	0	0^+	1	4	8	$+\infty$
y						

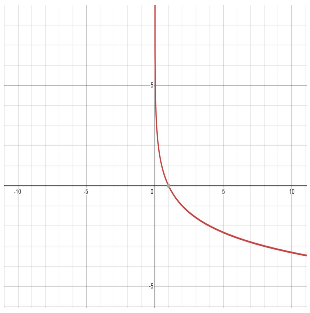


Figure 1.18: Représentation graphique de $y = \log_{\frac{1}{2}}^x$

■

Remarque 1.2.7 La courbe qui représente l'équation exponentielle $y = \log_b x$ peut être **croissante** ou **décroissante** selon la valeur du nombre b:

- Lorsque $b > 1$, est croissante.
- Lorsque $0 < b < 1$ la courbe est décroissante.

■ **Exemple 1.21 — Les fonctions trigonométriques.** Tracer les graphes des fonctions suivantes:
1. $y = \sin x$
2. $y = \cos x$

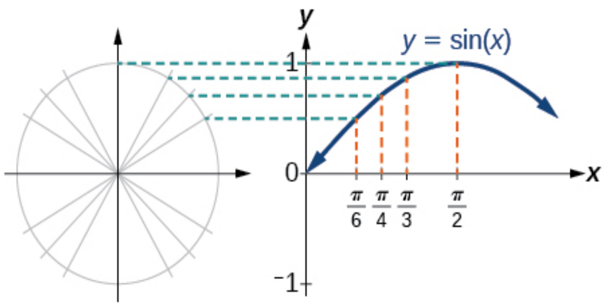


Figure 1.19: Le fonction sinus

Comme nous le voyons ci-dessous, sinus et cos ont une période égale à $360° = 2\pi$, i.e,

$$\sin(x+2\pi) = \sin(x)$$
$$\cos(x+2\pi) = \cos(x).$$

■

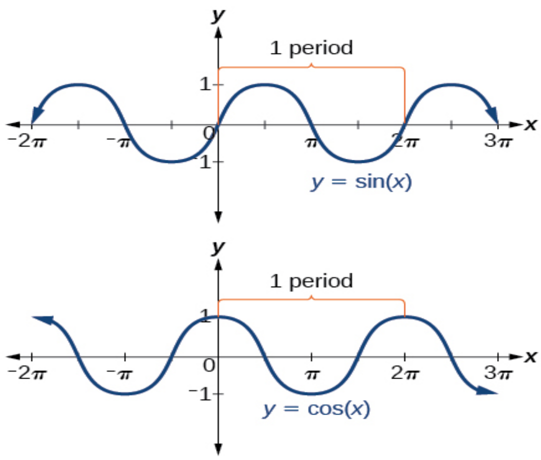


Figure 1.20: Les fonctions sinus et cosinus

Exercices

Exercice 1.11 Trouver le domaine des fonctions suivantes:

1) $f(x) = x^3 - 5x + 7$
2) $f(x) = \dfrac{1}{x-5}$
3) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$
4) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-5}$
5) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+5}$
6) $f(x) = \sqrt{x-1}$
7) $f(x) = \sqrt{2-3x}$
8) $f(x) = \sqrt{5+4x-x^2}$
9) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{x^2-7x+12}}$
10) $f(x) = \sqrt{x-6}$
11) $f(x) = \ln(x^2+3x-4)$
12) $f(x) = \sqrt{\log_{0.5}(x-6)}$

■

Exercice 1.12 Soient les deux fonctions suivantes $f(x) = 3x^2 + 2$ et $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$, trouver

1) $(f+g)(x)$
2) $(f-g)(x)$
3) $(f \cdot g)(x)$
4) $(\dfrac{f}{g})(x)$
5) $(f \circ g)(x)$
6) $(g \circ f)(x)$

■

Exercice 1.13 Tracer le graphe des fonctions suivantes:

1) $f(x) = 2x + 2$
2) $f(x) = -3x + 2$
3) $f(x) = x^2 + 5$
4) $f(x) = -x^3$
5) $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$
6) $f(x) = \dfrac{(\frac{1}{2}x-1)(x-1)(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+1)(x-2)}$
7) $f(x) = \sqrt{x+1}$
8) $f(x) = \sqrt[3]{-x}$

■

Exercice 1.14 Tracer le graphe des fonctions suivantes:

1) $y = 3^x$
2) $y = (0,3)^x$
3) $y = 3^{x+1} - 1$
4) $y = e^{x-1}$
5) $y = 1 - e^{-x}$
6) $y = e^{2x}$
7) $y = e^{\frac{x}{1}}$
8) $y = e^{\frac{1}{x}}$

■

Exercice 1.15 Tracer le graphe des fonctions suivantes:

1) $y = \ln(x+1)$
2) $y = \ln(x-1)$
3) $y = \ln(-x)$
4) $y = -\ln(x)$
5) $y = \ln(2x)$
6) $y = \ln(\dfrac{x}{2})$
7) $y = \ln x^2$
8) $y = \ln \frac{1}{x}$

■

Exercice 1.16 Tracer le graphe des fonctions suivantes:

1. $f(x) = \sin(x + \dfrac{\pi}{2})$
2. $f(x) = \sin(x + \pi)$
3. $f(x) = \sin(x + \dfrac{3\pi}{2})$

■

Exercices supplémentaires

2. Limites et continuité

2.1 Limites des fonctions

Définition 2.1.1 — Limite. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que la limite de f en $x = a$ est L si $f(x)$ s'approche de L lorsque x s'approche de a. Ceci est dénoté

$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

■ **Exemple 2.1** Estimez l'expression à partir du graphique:

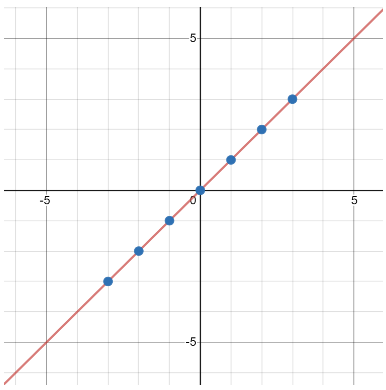


Figure 2.1: Représentation graphique de $f(x) = x$

1. $\lim_{x \to 0} x = 0$
2. $\lim_{x \to 2} x = 2$
3. $\lim_{x \to -2} x = -2$

■

Définition 2.1.2 — Limites à l'infini. On dit que $f(x)$ tend vers L si x tend vers l'infini ou que

$$\lim_{x\to+\infty} = L,$$

si on peut rendre $f(x)$ arbitrairement proche de L à condition de prendre x suffisamment grand.

■ **Exemple 2.2** Par la figure 2.1

1. $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$
2. $\lim_{x\to-\infty} x = -\infty$

■

Définition 2.1.3 — Limites infinies. On dit que $f(x)$ tend vers l'infini si x tend vers a ou que

$$\lim_{x\to a} = +\infty,$$

si on peut rendre $f(x)$ arbitrairement grand à condition de prendre x suffisamment proche de a (mais avec $x \neq a$).

■ **Exemple 2.3** Estimez l'expression à partir du graphique:

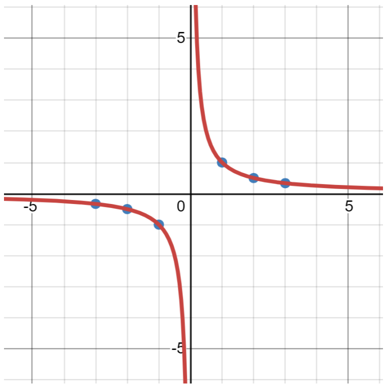


Figure 2.2: Représentation graphique de $f(x) = \frac{1}{x}$

1. $\lim_{x\to 2} \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$
2. $\lim_{x\to -2} \frac{1}{x} = -\frac{1}{2}$
3. $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0$
4. $\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x} = 0$

■

■ **Exemple 2.4** Déterminer les limites suivantes:

1. $\lim_{x\to+\infty} e^{-x}$

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$$

2. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \cos x$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \cos x = 0$$

■

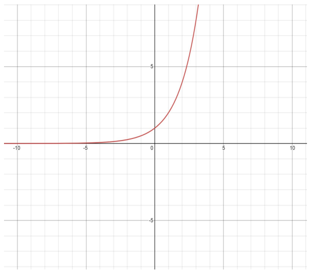


Figure 2.3: Représentation graphique de $y = e^x$

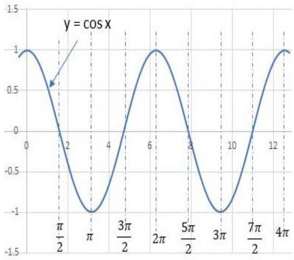


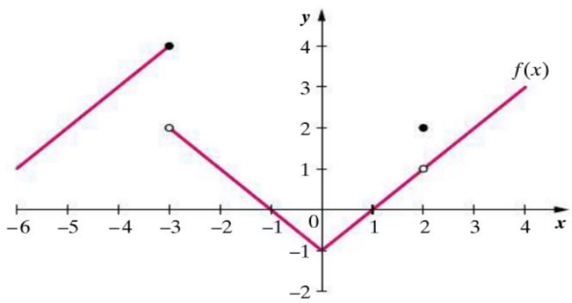
Figure 2.4: Représentation graphique de $y = \cos x$

Définition 2.1.4 — Limite à gauche et limite à droite. Il existe parfois deux façons pour x de sapprocher de a. Cela nous amène à définir la notion de limite à gauche et limite à droite.

1. Nous appelons limite à **gauche** de la fonction $f(x)$ la limite de la fonction $f(x)$ lorsque x sapproche de a par la gauche et on la note
$$\lim_{x \to a^-} f(x).$$
2. Nous appelons limite à **droite** de la fonction $f(x)$ la limite de la fonction $f(x)$ lorsque x s'approche de a par la droite et on la note
$$\lim_{x \to a^+} f(x).$$

Pour une fonction définie au voisinage à gauche et à droite d'un réel a, l'existence et l'égalité des limites à gauche et à droite est équivalente à l'existence d'une limite épointée (avec la même valeur).

■ **Exemple 2.5** Estimez l'expression à partir du graphique:



1. $\lim_{x \to -3^-} f(x) = 4$
2. $\lim_{x \to -3^+} f(x) = 2$

3. $\lim_{x\to -3} f(x)$
4. $f(-3) = 4$ n'existe pas, car $\lim_{x\to -3^-} f(x) \neq \lim_{x\to -3^+} f(x)$.
5. $\lim_{x\to -1} f(x) = 0$
6. $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 1$
7. $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 1$
8. $\lim_{x\to 2} f(x) = 1$
9. $f(2) = 2$
10. $\lim_{x\to 3} f(x) = 2$

■

■ **Exemple 2.6** Évaluer

1. $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$
2. $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$
3. $\lim_{x\to -2^-} \frac{1}{x+2} = -\infty$
4. $\lim_{x\to -2^+} \frac{1}{x+2} = +\infty$

■

Théorème 2.1.1 — Propriétés des limites. Soient deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$:

1. $$\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x).$$
2. $$\lim_{x\to a}(f(x)g(x)) = (\lim_{x\to a} f(x))(\lim_{x\to a} g(x)).$$
3. $$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}, \quad \text{si} \lim_{x\to a} g(x) \neq 0.$$
4. Si $\lim_{x\to a} f(x) = A$ et $\lim_{x\to L} g(x) = B$ alors
$$\lim_{x\to a}(f \circ g)(x) = B.$$

■ **Exemple 2.7** Évaluer

1. $\lim_{x\to 2}(x^2 - 7x + 1)$
$$\lim_{x\to 2}(x^2 - 7x + 1) = \lim_{x\to 2} x^2 - \lim_{x\to 2} 7x + \lim_{x\to 2} 1 = 4 - 14 + 1 = -9.$$
2. $\lim_{x\to 2}(x+1)^2$
$$\lim_{x\to 2}(x+1)^2 = \lim_{x\to 2}(x+1)(x+1) = (\lim_{x\to 2}(x+1))(\lim_{x\to 2}(x+1)) = (3)(3) = 9.$$
3. $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-1}{x+5}$
$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-1}{x+5} = \frac{\lim_{x\to 2}(x^2-1)}{\lim_{x\to 2}(x+5)} = \frac{3}{7}.$$

■

■ **Exemple 2.8** Évaluer

$$\lim_{x\to 3} \sqrt{x-2}.$$

En considérant la fonction donnée comme la composition de $f(x) = \sqrt{x}$ et de $g(x) = x-2$. Comme $\lim_{x\to 3}(x-2) = 1$, on peut remplacer la limite originale en utilisant la dernière propriété:

$$\lim_{x\to 3} \sqrt{x-2} = \lim_{x\to 1} \sqrt{x} = 1.$$

■

■ **Exemple 2.9** Évaluer

1. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x-2}{x-1}$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x-2}{x-1} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$
$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x-2}{x-1} = \frac{-1}{0^+} = -\infty,$$

alors $\lim_{x\to 1} \dfrac{x-2}{x-1}$ n'existe pas, car $\lim_{x\to 1^-} \dfrac{x-2}{x-1} \neq \lim_{x\to 1^+} \dfrac{x-2}{x-1}$.

2. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x-2}{(x-1)^2}$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x-2}{(x-1)} = \frac{-1}{(0^-)^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$
$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x-2}{x-1} = \frac{-1}{(0^+)^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty,$$

alors $\lim_{x\to 1} \dfrac{x-2}{(x-1)^2} = -\infty$.

■

■ **Exemple 2.10** Soit

$$f(x) = \begin{cases} 7-4x & x < 1 \\ x^2+2 & x \geq 1 \end{cases}$$

évaluez:

1. $\lim_{x\to 1^-} f(x)$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (7-4x) = 3.$$

2. $\lim_{x\to 1^+} f(x)$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (x^2+2) = 3.$$

3. $\lim_{x\to 1} f(x)$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 3.$$

■

Exemple 2.11 Soit

$$f(x) = \begin{cases} 6x & x \leq -4 \\ 1-9x & x > -4 \end{cases}$$

évaluez:

1. $\lim_{x \to -4^-} f(x)$

$$\lim_{x \to -4^-} f(x) = \lim_{x \to -4^-} (6x) = -24.$$

2. $\lim_{x \to -4^+} f(x)$

$$\lim_{x \to -4^+} f(x) = \lim_{x \to -4^+} (1-9x) = 37.$$

3. $\lim_{x \to -4} f(x)$ alors $\lim_{x \to -4} f(x)$ n'existe pas, car $\lim_{x \to -4^-} f(x) \neq \lim_{x \to -4^+} f(x)$.

■

Remarque 2.1.2 Calculs avec le symbole ∞ et les cas d'indétermination

- Formes déterminées (règles): Soit $c \in \mathbb{R}$ et k un entier strictement positif :

$$\begin{array}{lll} (+\infty)+(+\infty)=+\infty, & (-\infty)-(+\infty)=-\infty, & (+\infty)+c=+\infty \\ \infty.\infty=\infty, & \infty.c=\infty \text{ (si } c\neq 0), & \\ (\infty)^k=\infty, & \sqrt{+\infty}=+\infty & \\ \frac{\infty}{c}=\infty, & \frac{c}{\infty}=0 & \end{array}$$

  Ces 9 cas ne sont pas des situations indéterminées.
- Formes indéterminées: Lorsque l'on obtient lune ou lautre des formes suivantes, on ne peut pas conclure de manière immédiate, mais il sagira de manipuler lexpression algébriquement:

$$[\frac{0}{0}], \quad [\frac{\infty}{\infty}], \quad [0\times\infty], \quad [+\infty-\infty], \quad [0^0], \quad [\infty^0], \quad [1^\infty]$$

  Ces expressions sont appelées des **formes indéterminées**.

Exemple 2.12 Évaluer

1. $\lim_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{x}}$

$$\lim_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = e^{-\infty} = 0$$

2. $\lim_{x \to +\infty} \ln(\frac{1}{x})$

$$\lim_{x \to +\infty} \ln\frac{1}{x} = \ln(0^+) = -\infty$$

3. $\lim_{x \to \infty} \tan^{-1}(x^2+1)$

$$\lim_{x \to +\infty} \tan^{-1}(x^2+1) = \tan^{-1}(+\infty) = \frac{\pi}{2}$$

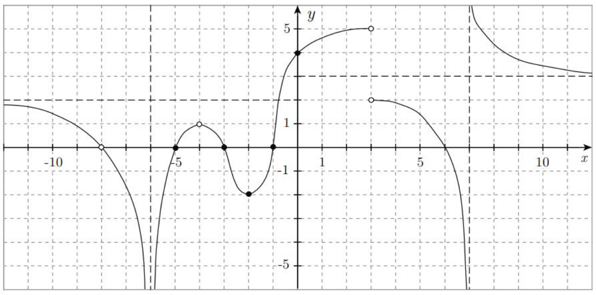
■

Exercices

Exercice 2.1 Estimez l'expression à partir du graphique:

1) $\lim_{x\to-8^-} f(x)$
2) $\lim_{x\to-8^+} f(x)$
3) $\lim_{x\to-8} f(x)$
4) $\lim_{x\to-6^-} f(x)$
5) $\lim_{x\to-6^+} f(x)$
6) $\lim_{x\to-6} f(x)$
7) $\lim_{x\to-4^-} f(x)$
8) $\lim_{x\to-4^+} f(x)$
9) $\lim_{x\to-4} f(x)$
10) $\lim_{x\to-2^-} f(x)$
11) $\lim_{x\to-2^+} f(x)$
12) $\lim_{x\to-2} f(x)$
13) $\lim_{x\to0^-} f(x)$
14) $\lim_{x\to0^+} f(x)$
15) $\lim_{x\to0} f(x)$
16) $\lim_{x\to3^-} f(x)$
17) $\lim_{x\to3^+} f(x)$
18) $\lim_{x\to3} f(x)$
19) $\lim_{x\to7^-} f(x)$
20) $\lim_{x\to7^+} f(x)$
21) $\lim_{x\to7} f(x)$
22) $\lim_{x\to-\infty} f(x)$
23) $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

■



Exercice 2.2 Soit $\lim_{x\to4} f(x) = 0$ et $\lim_{x\to4} g(x) = -3$. Trouvez :

1) $\lim_{x\to4}(f(x)g(x))$
2) $\lim_{x\to4}(x(f(x)+3g(x))$
3) $\lim_{x\to4}\sqrt{f(x)+4}$
4) $\lim_{x\to4}\dfrac{\sqrt{1+|g(x)|}}{(f(x)+8)^{\frac{2}{3}}}$

■

Exercice 2.3 Soit

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & 0 \le x < 1 \\ 1-x & 1 \le x \le 2 \\ 4 & 2 < x \le 3 \end{cases}$$

Évaluez:

1) $\lim_{x\to0} f(x)$
2) $\lim_{x\to1} f(x)$
3) $\lim_{x\to2} f(x)$
4) $\lim_{x\to3} f(x)$

■

Exercice 2.4 Évaluez les limites suivantes:

1) $\lim_{x\to2}(8-3x+12x^2)$
2) $\lim_{x\to-3}\dfrac{6+4x}{x^2+1}$
3) $\lim_{x\to-6^-}\dfrac{2x}{x+6}$
4) $\lim_{x\to-6^+}\dfrac{2x}{x+6}$
5) $\lim_{x\to-1}\dfrac{x+3}{(x+1)^2}$
6) $\lim_{x\to2}\dfrac{x+7}{x^2-4}$
7) $\lim_{x\to-\infty}\ln(4-9x-x^3)$
8) $\lim_{x\to-\infty}\tan^{-1}(7-x+3x^5)$

■

Exercice 2.5 En accord avec la théorie de la relativité, la longueur L d'un objet perçue par un observateur immobile dépend de sa vitesse v selon la fonction $L(v) = L_0\sqrt{1-\dfrac{c^2}{v^2}}$ où L_0 est sa longueur au repos et c la vitesse de la lumière. Einstein a montré aussi que la masse m de cet objet est liée elle à la fonction $m(v) = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{c^2}{v^2}}}$.

Calculer puis interpréter les deux limites $\lim\limits_{v\to c^-} L(v)$ et $\lim\limits_{v\to c^-} m(v)$. ■

2.2 Formes indéterminées

2.2.1 Forme $[\frac{0}{0}]$

Exemple 2.13 Évaluer

1. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x-1}$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} 1 = 1.$$

2. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{|x-1|}$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x-1}{|x-1|} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x-1}{-(x-1)} = \lim_{x\to 1^-} (-1) = -1$$
$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{|x-1|} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{(x-1)} = \lim_{x\to 1^-} (1) = 1,$$

alors $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{|x-1|}$ n'existe pas, car $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x-1}{|x-1|} \neq \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x-1}{|x-1|}$. ■

Exemple 2.14 Évaluer

1. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1}$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2.$$

2. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x^3-1}$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^3-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x+1}{x^2+x+1} = \frac{2}{3}.$$

3. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} &= \lim_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} . \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}\right)\\ &= \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}\\ &= \lim_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

4. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1} &= \lim_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1} . \frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}\right)\\ &= \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}\\ &= \lim_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1} = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

■

■ **Exemple 2.15** Évaluer

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2+x-6}$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2+x-6} &= \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x+3)(x-2)}\\ &= \lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x+3}=\frac{4}{5}.\end{aligned}$$

2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{8-x^3}{x^2-4}$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\frac{8-x^3}{x^2-4} &= \lim_{x\to 2}\frac{(2-x)(4+2x+x^2)}{(x-2)(x+2)}\\ &= \lim_{x\to 2}\frac{-(4+2x+x^2)}{x+2}=\frac{-12}{4}=-3.\end{aligned}$$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}.\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)-(1-x)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=\frac{2}{2}=1.\end{aligned}$$

■

■ **Exemple 2.16** Évaluer

$$\lim_{x\to 0}\frac{4^x-1}{8^x-1}.$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{4^x-1}{8^x-1} &= \lim_{x\to 0}\frac{(2^x-1)(2^x+1)}{(2^x-1)(4^x+2^x+1)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{2^x+1}{4^x+2^x+1}=\frac{2}{3}.\end{aligned}$$

■

■ **Exemple 2.17** Évaluer

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)^2-1}{x}.$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)^2-1}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{(x^2+2x+1)-1}{x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{x^2+2x}{x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{x(x+2)}{x}\\ &= \lim_{x\to 0}(x+2)=2.\end{aligned}$$

■

2.2.2 Forme $[\frac{\infty}{\infty}]$

■ **Exemple 2.18** Évaluer

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^3+7}{x^3-x^2+x+7}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3+7}{x^3-x^2+x+7} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3(2+\frac{7}{x^3})}{x^3(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{7}{x^3})}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2+\frac{7}{x^3}}{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{7}{x^3}} = \frac{2+0}{1-0+0+0} = 2.$$

2. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3+2x-1}{x-1}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+2x-1}{x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x(x^2+2-\frac{1}{x})}{x(1-\frac{1}{x})}$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2-\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}} = \frac{+\infty+2-0}{1-0} = +\infty.$$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5x^3-2x^2+7x-13}{12-2x+x^4}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{5x^3-2x^2+7x-13}{12-2x+x^4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3(5-\frac{2}{x}+\frac{7}{x^2}-\frac{13}{x^3})}{x^3(\frac{12}{x}-\frac{2}{x^2}+x)}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{5-\frac{2}{x}+\frac{7}{x^2}-\frac{13}{x^3}}{\frac{12}{x}-\frac{2}{x^2}+x} = \frac{+5-0+0-0}{0-0+\infty} = 0.$$

■ **Exemple 2.19** Évaluer

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+\sqrt{4x^6+4}}{5x^3+2x}.$$

■

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+\sqrt{4x^6+4}}{5x^3+2x} &= \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+\sqrt{x^6(4+\frac{4}{x^6})}}{x^3(5+\frac{2}{x^2})}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+|x|^3\sqrt{4+\frac{4}{x^6}}}{x^3(5+\frac{2}{x^2})}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-x^3\sqrt{4+\frac{4}{x^6}}}{x^3(5+\frac{2}{x^2})}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3(1-\sqrt{4+\frac{4}{x^6}})}{x^3(5+\frac{2}{x^2})}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{1-\sqrt{4+\frac{4}{x^6}}}{5+\frac{2}{x^2}} = \frac{1-\sqrt{4+0}}{5+0} = -\frac{1}{5}.
\end{aligned}$$

■ **Exemple 2.20** Évaluer

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}, u=e^x.$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}} &= \lim_{x\to\infty}\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}.\frac{e^x}{e^x}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}\\
&= \lim_{u\to\infty}\frac{u^2+1}{u^2-1}\\
&= \lim_{u\to\infty}\frac{u^2(1+\frac{1}{u^2})}{u^2(1-\frac{1}{u^2})}\\
&= \lim_{u\to\infty}\frac{1+\frac{1}{u^2}}{1-\frac{1}{u^2}} = \frac{1+0}{1-0} = 1.
\end{aligned}$$

■

2.2.3 Forme $[0\times\infty]$

■ **Exemple 2.21** Évaluer

$$\lim_{x\to-\infty} x\sqrt{\frac{5}{x^2+12}}.$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} x\sqrt{\frac{5}{x^2+12}} &= \lim_{x\to-\infty} x\sqrt{\frac{5}{x^2(1+\frac{12}{x^2})}}\\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{|x|}\sqrt{\frac{5}{1+\frac{12}{x^2}}}\\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{-x}\sqrt{\frac{5}{1+\frac{12}{x^2}}}\\
&= -\lim_{x\to-\infty} \sqrt{\frac{5}{1+\frac{12}{x^2}}} = -\sqrt{\frac{5}{1+0}} = -\sqrt{5}.
\end{aligned}
$$

■

■ **Exemple 2.22** Évaluer

$$\lim_{x\to\infty} x(x-\sqrt{x^2+1}).$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} x(x-\sqrt{x^2+1}) &= \lim_{x\to\infty} x(x-\sqrt{x^2+1})\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2+1}}\\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x(x^2-(x^2+1))}{x+\sqrt{x^2+1}}\\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{-x}{x+\sqrt{x^2+1}}\\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{-x}{x+\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}}\\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{-x}{x+|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{-x}{x+x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{-x}{x(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}})}\\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{-1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-1}{1+\sqrt{1+0}} = -1.
\end{aligned}
$$

■

2.2.4 Forme $[\infty-\infty]$

■ **Exemple 2.23** Évaluer

1. $\lim_{x\to 2}(\frac{4}{x^2-4}-\frac{1}{x-2})$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2}(\frac{4}{x^2-4}-\frac{1}{x-2}) &= \lim_{x\to 2}(\frac{4}{(x-2)(x+2)}-\frac{1}{x-2}) \\
&= \lim_{x\to 2}(\frac{4}{(x-2)(x+2)}-\frac{x+2}{(x+2)(x-2)}) \\
&= \lim_{x\to 2}\frac{4-(x+2)}{(x-2)(x+2)} \\
&= \lim_{x\to 2}\frac{2-x}{(x-2)(x+2)} \\
&= \lim_{x\to 2}\frac{-1}{x+2} = -\frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

2. $\lim_{x\to\infty}(\frac{x^3}{x^2+2}-x)$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}(\frac{x^3}{x^2+2}-x) &= \lim_{x\to\infty}\frac{x^3-x(x^2+2)}{x^2+2} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{x^3-x(x^2+2)}{x^2+2} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{-2x}{x^2+2} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{-2x}{x(x+\frac{2}{x})} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{-2}{x+\frac{2}{x}} = \frac{-2}{\infty+0} = 0.
\end{aligned}$$

■

■ **Exemple 2.24** Évaluer

1. $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+4x-2}+x)$

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+4x-2}+x) = \infty+\infty = \infty$$

2. $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+4x-2}-x)$

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+4x-2}-x) = [\infty-\infty]$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+4x-2}-x) &= \lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+4x-2}-x).\frac{\sqrt{x^2+4x-2}+x}{\sqrt{x^2+4x-2}+x}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+4x-2-x^2}{\sqrt{x^2+4x-2}+x}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{4x-2}{\sqrt{x^2+4x-2}+x}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{x(4-\frac{2}{x})}{\sqrt{x^2(1+\frac{4}{x}-\frac{2}{x^2})}+x}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{x(4-\frac{2}{x})}{|x|\sqrt{1+\frac{4}{x}-\frac{2}{x^2}}+x}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{x(4-\frac{2}{x})}{x\sqrt{1+\frac{4}{x}-\frac{2}{x^2}}+x}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{x(4-\frac{2}{x})}{x(\sqrt{1+\frac{4}{x}-\frac{2}{x^2}}+1)}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{4-\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{4}{x}-\frac{2}{x^2}}+1} = \frac{4-0}{\sqrt{1+0-2}+1} = 4.
\end{aligned}
$$

3. $\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+4x-2}+x)$

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+4x-2}+x) = [\infty-\infty]$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+4x-2}+x) &= \lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+4x-2}+x).\frac{\sqrt{x^2+4x-2}-x}{\sqrt{x^2+4x-2}-x}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+4x-2-x^2}{\sqrt{x^2+4x-2}-x}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{4x-2}{\sqrt{x^2+4x-2}-x}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{x(4-\frac{2}{x})}{\sqrt{x^2(1+\frac{4}{x}-\frac{2}{x^2})}-x}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{x(4-\frac{2}{x})}{|x|\sqrt{1+\frac{4}{x}-\frac{2}{x^2}}-x}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{x(4-\frac{2}{x})}{-x\sqrt{1+\frac{4}{x}-\frac{2}{x^2}}-x}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{x(4-\frac{2}{x})}{-x(\sqrt{1+\frac{4}{x}-\frac{2}{x^2}}+1)}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{4-\frac{2}{x}}{-(\sqrt{1+\frac{4}{x}-\frac{2}{x^2}}+1)} = \frac{4-0}{-(\sqrt{1+0-2}+1)} = -4.
\end{aligned}$$

4. $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+4x-2}-x)$

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+4x-2}-x) = \infty-(-\infty) = \infty+\infty = \infty.$$

■

Théorème 2.2.1 — Le théorème des gendarmes (théorème du sandwich). Soit les fonctions $g(x) \le f(x) \le h(x)$ pour tout $x \in I \setminus \{a\}$, I est un intervalle ouvert,
Soit

$$\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L,$$

alors

$$\lim_{x\to a} f(x) = L.$$

■ **Exemple 2.25** À l'aide du théorème des gendarmes, montrer que

1. $\lim\limits_{\theta\to 0}\sin\theta = 0$
2. $\lim\limits_{\theta\to 0}\cos\theta = 1$

■

■ **Exemple 2.26** Évaluer

1. $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{\pi}{x}$

2. $\lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{\pi}{x}$ Les valeurs de $\sin\frac{\pi}{x}$ sont toujours comprise entre -1 et 1.

$$-1 \leq \sin\frac{\pi}{x} \leq 1,$$

et dès lors

$$-x^2 \leq x^2 \sin\frac{\pi}{x} \leq x^2.$$

Aussi

$$\lim_{x\to 0} -x^2 = \lim_{x\to 0} x^2 = 0,$$

alors

$$\lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{\pi}{x} = 0.$$

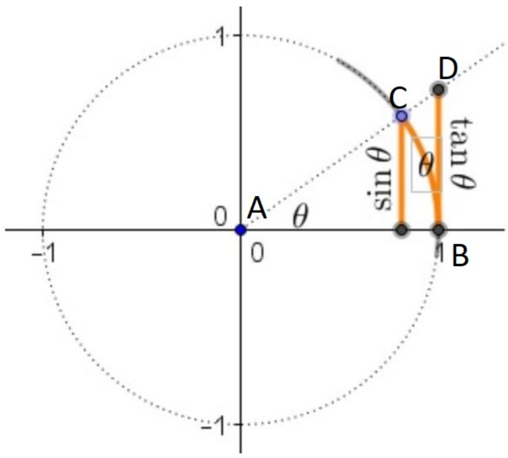
■

Théorème 2.2.2 Limites trigonométrique fondamentale

1.
$$\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

2.
$$\lim_{\theta\to 0} \frac{\cos\theta - 1}{\theta} = 0$$

Proof. 1. $\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$



$$\text{L'aire du triangle } \triangle ABC \leq \text{L'aire du secteur circulaire ABC} \leq \text{L'aire du triangle } \triangle ABD,$$

$$\frac{\sin\theta \times 1}{2} \leq \frac{1 \times \theta}{2} \leq \frac{\tan\theta \times 1}{2},$$

donc

$$\frac{\sin\theta}{2} \leq \frac{\theta}{2} \Longrightarrow \frac{\sin\theta}{\theta} \leq 1,$$

et

$$\frac{\theta}{2} \leq \frac{\tan\theta}{2} \Longrightarrow \cos\theta \leq \frac{\sin\theta}{\theta},$$

ensuite

$$\cos\theta \leq \frac{\sin\theta}{\theta} \leq 1,$$

alors par le théorème des gendarmes $\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$, car $\lim_{\theta\to 0} \cos\theta = \lim_{\theta\to 0} 1 = 1$.

2. $\lim_{\theta\to 0}\dfrac{\cos\theta-1}{\theta}=0$

$$\begin{aligned}\lim_{\theta\to 0}\frac{\cos\theta-1}{\theta} &= \lim_{\theta\to 0}\frac{\cos\theta-1}{\theta}\times\frac{\cos\theta+1}{\cos\theta+1}\\ &= \lim_{\theta\to 0}\frac{\cos^2\theta-1}{\theta(\cos\theta+1)}\\ &= \lim_{\theta\to 0}\frac{-\sin^2\theta}{\theta(\cos\theta+1)}\\ &= \lim_{\theta\to 0}(\frac{-\sin\theta}{\cos\theta+1}\frac{\sin\theta}{\theta})\\ &= (\lim_{\theta\to 0}\frac{-\sin\theta}{\cos\theta+1})(\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}) = (\frac{0}{1+1})(1)=0.\end{aligned}$$

■

■ **Exemple 2.27** Évaluer

1. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin(3x)}{x}$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{x}=\lim_{x\to 0}(3\frac{\sin(3x)}{3x})=3\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}=3(1)=3.$$
2. $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2(\frac{x}{2})}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{4}\frac{\sin^2(\frac{x}{2})}{(\frac{x}{2})^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}(\frac{\sin(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}})^2=\frac{1}{2}\lim_{u\to 0}(\frac{\sin u}{u})^2=\frac{1}{2}(1)^2=\frac{1}{2}.$$

■

Remarque 2.2.3 Notez que $\lim_{\theta\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ et $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$ et donc près de $x=0$ on peut écrire

$$\sin x \simeq x$$
$$\cos x \simeq 1-\frac{x^2}{2}$$

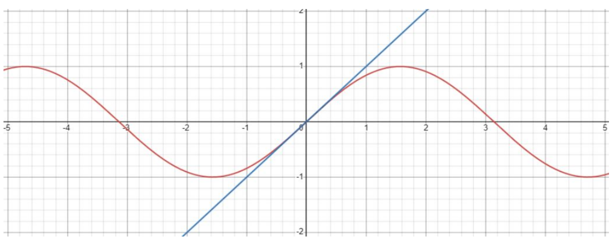


Figure 2.5: Le fonction sinus près de $x=0$

■ **Exemple 2.28** Évaluer

1. $\lim_{x\to\infty}\sin\dfrac{\pi}{x}$

En considérant la fonction donnée comme la composition de $f(x)=\sin x$ et de $g(x)=\dfrac{\pi}{x}$.

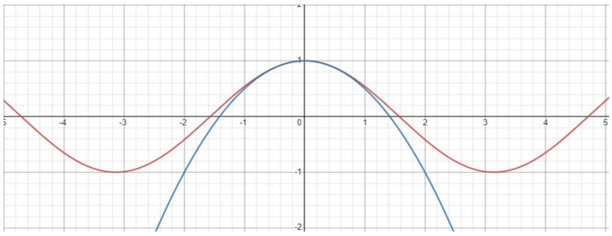


Figure 2.6: Le fonction cosinus près de $x = 0$

Comme $\lim_{x\to\infty} \frac{\pi}{x} = 0$, on peut remplacer la limite originale en utilisant la propriété:

$$\lim_{x\to\infty} \sin\frac{\pi}{x} = \lim_{x\to 0} \sin x = 0.$$

2. $\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{\pi}{x}$

   Par changement de variable $t = \frac{\pi}{x}$

$$\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{\pi}{x} = \lim_{x\to\infty} \pi\frac{\sin\frac{\pi}{x}}{\frac{\pi}{x}} = \pi\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = \pi(1) = \pi$$

3. $\lim_{x\to\infty} x^2\sin\frac{\pi}{x}$ Par changement de variable $t = \frac{\pi}{x}$

$$\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{\pi}{x} = \lim_{x\to\infty}(\pi x\frac{\sin\frac{\pi}{x}}{\frac{\pi}{x}}) = (\lim_{x\to\infty}\pi x)(\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{x}}{\frac{\pi}{x}}) = \pi(\lim_{x\to\infty} x)(\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}) = \pi(\infty)(1) = \infty$$

■

Exercices

Exercice 2.6 Évaluez les limites suivantes:

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(6+x)^2-36}{x}$
2) $\lim\limits_{x\to -5} \dfrac{x^2-25}{x^2+2x-15}$
3) $\lim\limits_{x\to 8} \dfrac{2x^2-17x+8}{8-x}$
4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{3-\sqrt{x+9}}$
5) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^2(2x+1)(3x-2)}{2x^2(5x-8)(x+6)}$
6) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{(2x-3)^{30}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$
7) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{2x^8+8x^6+6x^4}{4x^8-x^6+12x^4}\right)^5$
8) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{7+9x^2}}{1-2x}$
9) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x+8-4x^2}{\sqrt{6+x^2+7x^4}}$
10) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt[4]{x^5}+\sqrt[5]{x^3}+\sqrt[6]{x^8}}{\sqrt[3]{x^4+2}}$
11) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{e^{-3x}-2e^{8x}}{9e^{8x}-7e^{-3x}}$
12) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^{-7x}-2e^{3x}-e^{x}}{e^{-x}+16e^{10x}+2e^{-4x}}$
13) $\lim\limits_{x\to -\infty} \ln\left(\dfrac{3x^4-8}{2x^2}\right)$
14) $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln\left(\dfrac{11+8x}{x^3+7x}\right)$
15) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$
16) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x^3}{2x^2-1}-\dfrac{x^2}{2x+1}\right)$
17) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$
18) $\lim\limits_{x\to \infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$
19) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\sqrt{x^2+9}-\sqrt{x^2-9}}{6x}$
20) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$

■

Exercice 2.7 Évaluez les limites suivantes:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(3x)}{5x}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2(3x)}{x^2}$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(3x)}{\sin(5x)}$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x^2)}{\sin^2(x)}$
5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(\sin x)}{\sin x}$

■

Exercice 2.8 Si $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{f(x)}{x^2} = 1$, trouvez

1. $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$.
2. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{f(x)}{x}$.

■

Exercice 2.9

1. Si $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f(x)-5}{x-2} = 3$, trouvez $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.
2. Si $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f(x)-5}{x-2} = 4$, trouvez $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

■

Exercices supplémentaires

Exercice 2.10 Évaluer

$$\lim_{x \to 16} \frac{x - \sqrt{x} - 12}{4 - \sqrt{x}}$$

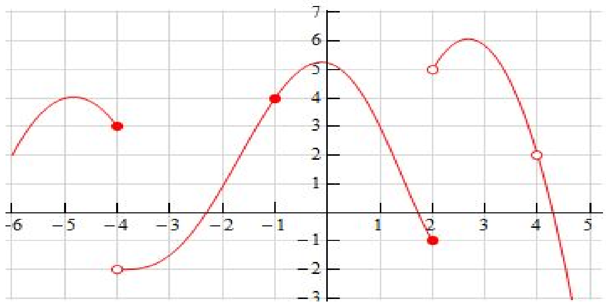
2.3 Continuité

Définition 2.3.1 — Continuité. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction et a un point de son domaine. On dit que f est continue en a si

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

La fonction f est dite continue sur un intervalle si elle est continue en tout point de cet intervalle.

■ **Exemple 2.29** Soit $f(x)$ la fonction dont le graphe est illustré ci-dessous.



1. La fonction f n'est pas continue en $x=-4$ car

$$\lim_{x\to -4^-} f(x) \neq \lim_{x\to -4^+} f(x).$$

2. La fonction f n'est pas continue en $x=2$ car

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) \neq \lim_{x\to 2^+} f(x).$$

3. La fonction f n'est pas continue en $x=4$ car

$$\lim_{x\to 4} f(x) \neq f(4).$$

Théorème 2.3.1 Les fonctions suivantes sont continues partout.
1. Les polynôme.
2. Les fractions algébrique.
3. Les fonctions exponentielles et logarithmiques.
4. Les fonctions trigonométrique.

Théorème 2.3.2 Si f et g sont continues sur un intervalle I alors les fonctions $f+g$, $f-g$, fg sont aussi continues sur l'intervalle. De plus, si g ne s'annule nulle part sur l'intervalle, la fonction $\dfrac{f}{g}$ est aussi continue sur I.

■ **Exemple 2.30** Les fonctions $f(x) = \dfrac{6x^2+8x}{1+x^2}$ et $g(x) = \dfrac{(x^2-1)\sin x}{e^x}$ sont continues partout. ■

■ **Exemple 2.31** Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la fonction f définie par:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+x-6}{x-2} & x\neq 2 \\ f(2) & x=2 \end{cases}.$$

Déterminer $f(2)$ pour que la fonction f soit continue sur $\mathbb{R}$. ■

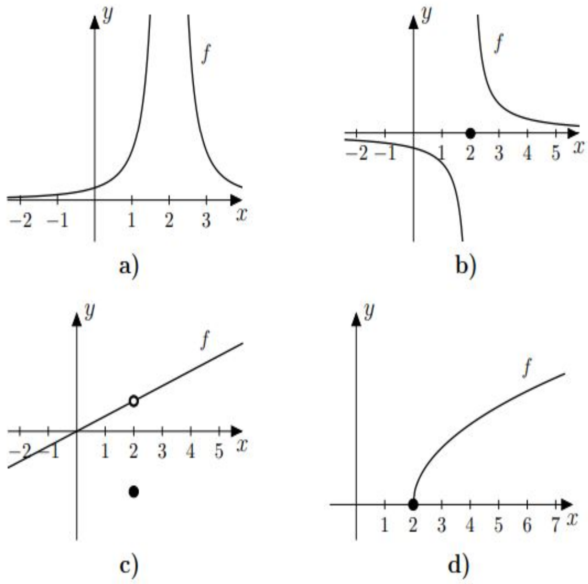
Notez que

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^2+x-6}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x+3)(x-2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x+3) = 5,$$

si $f(2) := 5$, alors f est une fonction en $x = 2$ et donc sur $\mathbb{R}$.

Exercices

Exercice 2.11 Préciser pour quelles raisons les fonctions f esquissées ci-dessous sont discontinues en $x=2$.



Exercice 2.12 Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la fonction f définie par:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-8}{x-2} & x\neq 2\\ f(2) & x=2\end{cases}.$$

Déterminer $f(2)$ pour que la fonction f soit continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2.13 Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la fonction f définie par:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{9x^4+x^2}}{5x^2+3x+1} & x<0\\ x & x>0\end{cases}.$$

Déterminer $f(0)$ pour que la fonction f soit continue sur $\mathbb{R}$.

2.4 Suites numériques

3. Dérivées

3.1 Définition de dérivée

Définition 3.1.1 Le taux de variation moyen de la fonction $f(x)$ entre les abscisses x_1 et x_2 est

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

Dans le graphe de $y = f(x)$, il s'agit de la pente de la droite sécante en x_1 et x_2.

■ **Exemple 3.1** Calculez la pente de la droite sécante à la courbe $y = f(x) = 3x^2 + 1$ en $x_1 = 1$ et $x_2 = 3$.
<u>**Solution:**</u> Par définition

$$\begin{aligned} m &= \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} \\ &= \frac{(3(3)^2 + 1) - (3(1)^2 + 1)}{3 - 1} = \frac{28 - 4}{2} = 12. \end{aligned}$$

■

Définition 3.1.2 Le taux de variation instantané de la fonction $f(x)$ en x_1 est donné par

$$\lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Dans le graphe de $y = f(x)$, il s'agit de la pente de la droite tangente à la courbe en x_1.

Remarque 3.1.1 On peut écrire

$$\lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x},$$

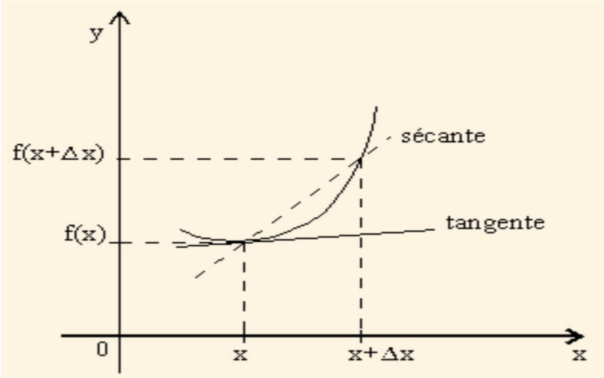


Figure 3.1: La pente de la droite sécante et tangente

■ **Exemple 3.2** Calculez la pente de la droite tangente à la courbe $y = f(x) = 3x^2 + 1$ en $x_1 = 1$.
Solution: Par définition

$$\begin{aligned}
m &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(3(1+\Delta x)^2 + 1) - (3(1)^2 + 1)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3 + 6\Delta x + 3\Delta x^2 + 1 - 4}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{6\Delta x + 3\Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (6 + 3\Delta x) = 6.
\end{aligned}$$

■

Définition 3.1.3 La dérivée d'une fonction f en x est notée $f'(x)$ et est définie par la limite suivante.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

■ **Exemple 3.3** En utilisant la définition de la dérivée, calculez $f'(x)$ pour $f(x) = x^3 + 5$.
Solution: Par définition

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{((x+\Delta x)^3 + 5) - ((x)^3 + 5)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 + 5) - (x^3 + 5)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2) = 3x^2.
\end{aligned}$$

■

3.2 Calcul des dérivées

Théorème 3.2.1 — La dérivée d'une constante. La dérivée d'une constante est égale à zéro, si $f(x) = c$ est une constante,

$$f'(x) = 0.$$

- $(5)' = 0$.
- $(1000)' = 0$.

Proof.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c-c}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0. \end{aligned}$$

■

Théorème 3.2.2 — La dérivée de x^n. En général nous avons:

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

Par exemples:
- $(x^1)' = 1x^0 = 1$.
- $(x^2)' = 2x$.
- $(x^3)' = 3x^2$.
- $(x^{100})' = 100x^{99}$.
- $(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
- $(\sqrt[3]{x^5})' = (x^{\frac{5}{3}})' = \frac{5}{3}x^{\frac{5}{3}-1} = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} = \frac{5\sqrt[3]{x^2}}{3}$.
- $(\frac{1}{x})' = (x^{-1})' = (-1)x^{-1-1} = -x^{-2}$
- $(\frac{1}{x^2})' = (x^{-2})' = (-2)x^{-2-1} = -2x^{-3}$

Proof.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x - x)((x+\Delta x)^{n-1} + (x+\Delta x)^{n-2}x + \cdots (x+\Delta x)^1 x^{n-1} + x^{n-1})}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x((x+\Delta x)^{n-1} + (x+\Delta x)^{n-2}x + \cdots + (x+\Delta x)^1 x^{n-2} + x^{n-1})}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} ((x+\Delta x)^{n-1} + (x+\Delta x)^{n-2}x + \cdots + (x+\Delta x)^1 x^{n-2} + x^{n-1}) \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} (x^{n-1} + x^{n-2}x + \cdots + x^1 x^{n-2} + x^{n-1}) \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} (x^{n-1} + x^{n-1} + \cdots + x^{n-1} + x^{n-1}) = nx^{n-1}. \end{aligned}$$

■

Théorème 3.2.3 — Dérivée des fonctions exponentielle et logarithmique. Nous avons

1. $(e^x)' = e^x$.
2. $(a^x)' = (\ln a)a^x$.
3. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.
4. $(\log_b^x)' = \dfrac{1}{(\ln b)x}$.

Par exemples:

- $(2^x)' = (\ln 2)2^x$.
- $(5^x)' = (\ln 5)5^x$.
- $(\log_2^x)' = \dfrac{1}{(\ln 2)x}$.
- $(\log_5^x)' = \dfrac{1}{(\ln 5)x}$.

Proof. Par définition $e = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$, on montre d'abord que $\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = 1$. En suite

$$\begin{aligned}
(e^x)' &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{x+\Delta x}-e^x}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^x e^{\Delta x}-e^x}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^x(e^{\Delta x}-1)}{\Delta x}\\
&= e^x(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(e^{\Delta x}-1)}{\Delta x}) = e^x(1) = e^x.
\end{aligned}$$

■

Théorème 3.2.4 — Dérivées des fonctions trigonométriques. Nous avons

- $(\sin x)' = \cos x$.
- $(\cos x)' = -\sin x$.
- $(\mathrm{Arc}\sin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- $(\mathrm{Arc}\tan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Proof.

$$\begin{aligned}
(\sin x)' &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x)\cos(\Delta x)+\cos(x)\sin(\Delta x)-\sin x}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x)\cos(\Delta x)-\sin x+\cos(x)\sin(\Delta x)}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x)(\cos(\Delta x)-1)+\cos(x)\sin(\Delta x)}{\Delta x}\\
&= \sin(x)(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\cos(\Delta x)-1)}{\Delta x})+\cos(x)(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x})\\
&= \sin(x)(0)+\cos(x)(1) = \cos x.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\cos x)' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x+\Delta x) - \cos x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x)\cos(\Delta x) - \sin(x)\sin(\Delta x) - \cos x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x)\cos(\Delta x) - \cos x - \sin(x)\sin(\Delta x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x)(\cos(\Delta x) - 1) - \sin(x)\sin(\Delta x)}{\Delta x} \\
&= \cos(x)(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\cos(\Delta x) - 1)}{\Delta x}) - \sin(x)(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x}) \\
&= \cos(x)(0) - \sin(x)(1) = -\sin x.
\end{aligned}$$

■

Théorème 3.2.5 — Régles de dérivation. Soient deux fonctions dérivables $f(x)$ et $g(x)$ et une constante c:

- $(cf(x))' = cf'(x)$.
- $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$.
- $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$.
- $(\frac{f(x)}{g(x)})' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.

■ **Exemple 3.4** En utilisant la régles de la dérivée, calculez $f'(x)$ pour $f(x) = x^3+5$.

Solution:

$$(x^3+5)' = (x^3)' + (5)' = 3x^2 + 0 = 3x^2$$

■

■ **Exemple 3.5** Calculez la dérivée de $y = (x^5+1)(x^2+1)$.

Solution:

$$\begin{aligned}
y' = [(x^5+1)(x^2+1)]' &= (x^5+1)'(x^2+1) + (x^5+1)(x^2+1)' \\
&= (5x^4)(x^2+1) + (x^5+1)(2x)
\end{aligned}$$

■

■ **Exemple 3.6** Calculez la dérivée de $y = \frac{x^5+1}{x^2+1}$.

Solution:

$$\begin{aligned}
y' = (\frac{x^5+1}{x^2+1})' &= \frac{(x^5+1)'(x^2+1) - (x^5+1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} \\
&= \frac{(5x^4)(x^2+1) - (x^5+1)(2x)}{(x^2+1)^2}
\end{aligned}$$

■

■ **Exemple 3.7** Calculez la dérivée de $\tan x$ et $\sec x$.

Solution:

$$
\begin{aligned}
(\tan x)' = (\frac{\sin x}{\cos x})' &= \frac{(\sin x)'(\cos x) - (\sin x)(\cos x)'}{(\cos x)^2} \\
&= \frac{\cos x(\cos x) - (\sin x)(-\sin x)}{\cos^2 x} \\
&= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\sec x)' = (\frac{1}{\cos x})' &= \frac{(1)'(\cos x) - (1)(\cos x)'}{(\cos x)^2} \\
&= \frac{(0)(\cos x) - (1)(-\sin x)}{\cos^2 x} \\
&= \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos x}\frac{1}{\cos x} = \tan x \sec x.
\end{aligned}
$$

■

■ **Exemple 3.8** Calculez la dérivée de $y = x^2 \sin x$.
Solution:

$$
\begin{aligned}
y' = [x^2 \sin x]' &= (x^2)'(\sin x) + (x^2)(\sin x)' \\
&= (2x)(\sin x) + (x^2)(\cos x) = 2x \sin x + x^2 \cos x
\end{aligned}
$$

■

Théorème 3.2.6 — Dérivation des fonctions composées (régle de chaîne). Soient deux fonctions dérivables u et v:

$$(u(v(x)))' = u'(v(x))v'(x).$$

■ **Exemple 3.9** Calculez la dérivée de $y = (x^3 + 1)^2$.
Solution: Ici $v(x) = x^3 + 1$ et $u(x) = x^2$, alors

$$
\begin{aligned}
y' = [(x^3 + 1)^2]' &= u'(v(x))v'(x) \\
&= 2(x^3 + 1)(3x^2) = 6x^2(x^3 + 1).
\end{aligned}
$$

■

■ **Exemple 3.10** Calculez la dérivée de $f(x) = \sin(x^2)$ et $g(x) = \sin^2 x$.
Solution: Pour $f(x) = \sin(x^2)$, $v(x) = x^2$ et $u(x) = \sin x$, alors

$$
\begin{aligned}
y' = [\sin(x^2)]' &= u'(v(x))v'(x) \\
&= \cos(x^2)(2x) = 2x \cos x^2.
\end{aligned}
$$

Pour $g(x) = \sin^2 x$, $v(x) = \sin x$ et $u(x) = x^2$, alors

$$
\begin{aligned}
y' = [\sin^2 x]' &= u'(v(x))v'(x) \\
&= 2 \sin x \cos x.
\end{aligned}
$$

■

■ **Exemple 3.11** Calculez la dérivée de $f(x) = e^{x^2+5}$.
Solution: Ici $v(x) = x^2+5$ et $u(x) = e^x$, alors

$$\begin{aligned} y' = [e^{x^2+5}]' &= u'(v(x))v'(x) \\ &= e^{x^2+5}(2x) = 2xe^{x^2+5}. \end{aligned}$$

■

■ **Exemple 3.12** Calculez la dérivée de $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.
Solution: Ici $v(x) = 1-x^2$ et $u(x) = \sqrt{x}$, alors

$$\begin{aligned} f'(x) = [\sqrt{1-x^2}]' &= u'(v(x))v'(x) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}(-2x) = \frac{-x}{\sqrt{x^2-1}}. \end{aligned}$$

■

■ **Exemple 3.13** Calculez la dérivée de $f(x) = \sqrt[3]{x^3+\sec x}$.
Solution: Ici $v(x) = x^3+\sec x$ et $u(x) = \sqrt[3]{x}$, alors

$$\begin{aligned} u'(x) &= (\sqrt[3]{x})' = (x^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \\ v'(x) &= (x^3+\sec x)' = 3x^2+\sec x\tan x, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} f'(x) = [\sqrt[3]{x^3+\sec x}]' &= u'(v(x))v'(x) \\ &= \frac{1}{3}(x^3+\sec x)^{-\frac{2}{3}}(3x^2+\sec x\tan x). \end{aligned}$$

■

■ **Exemple 3.14** Calculez la dérivée de $f(x) = \sqrt[6]{\frac{1+3x}{1-3x}}$.
Solution: Ici $v(x) = \frac{1+3x}{1-3x}$ et $u(x) = \sqrt[6]{x}$, alors

$$\begin{aligned} u'(x) &= (x^{\frac{1}{6}})' = \frac{1}{6}x^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{\sqrt[6]{x^5}} \\ v'(x) &= (\frac{1+3x}{1-3x})' = \frac{3(1-3x)-(1+3x)(-3)}{(1-3x)^2} = \frac{6}{(1-3x)^2}, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} f'(x) = [\sqrt[6]{\frac{1+3x}{1-3x}}]' &= u'(v(x))v'(x) \\ &= \frac{1}{6}(\frac{1+3x}{1-3x})^{-\frac{5}{6}}\frac{6}{(1-3x)^2} \\ &= (\frac{1+3x}{1-3x})^{-\frac{5}{6}}\frac{1}{(1-3x)^2}. \end{aligned}$$

■

■ **Exemple 3.15** Calculez la dérivée de $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{1-x^2}{1+x^2}}$.
Solution:

$$f'(x) = \frac{1}{3}(\frac{1-x^2}{1+x^2})^{-\frac{2}{3}}.(\frac{1-x^2}{1+x^2})' = \frac{1}{3}(\frac{1-x^2}{1+x^2})^{-\frac{2}{3}}.\frac{-4x}{1+x^2}.$$

■

■ **Exemple 3.16** Les fonctions hyperboliques ont été inventées par le jésuite Vincenzo Riccati dans les années 1760 alors qu'il cherchait, avec son collègue Saladini, à calculer l'aire sous l'hyperbole d'équation $x^2 - y^2 = 1$. La méthode géométrique qu'il employa alors était très similaire à celle que l'on peut utiliser pour calculer l'aire d'un cercle d'équation $x^2 + y^2 = 1$.
Par définition, on appelle cosinus hyperbolique de x, qu'on note cosh x, la quantité

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

de même, le sinus hyperbolique de x est

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Par analogie avec les fonctions trigonométriques on définit

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$
$$\coth x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$
$$\operatorname{sech} x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$
$$\operatorname{csch} x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

a) Montrer que

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$$

b) Montrer que

$$(\sinh x)' = \cosh x$$
$$(\cosh x)' = \sinh x$$
$$(\tanh x)' = \operatorname{sech}^2 x$$

c) Montrer que

$$\operatorname{Arcsinh} x = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$$
$$\operatorname{Arccosh} x = \ln(x + \sqrt{1-x^2})$$
$$\operatorname{Arctanh} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$$

d) Montrer que

$$(\operatorname{Arcsinh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$
$$(\operatorname{Arccosh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$
$$(\operatorname{Arctanh} x)' = \frac{1}{1-x^2}$$

Solution a:

$$\begin{aligned}\cosh^2 x-\sinh^2 x &= (\frac{e^x+e^{-x}}{2})^2-(\frac{e^x-e^{-x}}{2})^2\\ &= \frac{e^{2x}+e^{-2x}+2}{4}-\frac{e^{2x}+e^{-2x}-2}{4}=\frac{4}{4}=1.\end{aligned}$$

Solution b:

$$\begin{aligned}(\sinh x)' &= (\frac{e^x-e^{-x}}{2})'=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\cosh x\\ (\cosh x)' &= (\frac{e^x+e^{-x}}{2})'=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\sinh x\\ (\tanh x)' &= (\frac{\sinh x}{\cosh x})'=\frac{(\cosh x)(\cosh x)-(\sinh x)(\sinh x)}{\cosh^2 x}=\frac{1}{\cosh^2 x}=\operatorname{sech}^2 x.\end{aligned}$$

Solution c: En $y=\sinh x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ si $x\longleftrightarrow y$,

$$\begin{aligned}x &= \frac{e^y-e^{-y}}{2}\\ 2x &= e^y-e^{-y}\\ 2xe^y &= e^{2y}-1\\ e^{2y}-2xe^y-1 &= 0,\end{aligned}$$

en suite

$$e^y=\frac{2x+\sqrt{(-2x)^2-4(1)(-1)}}{2}=\frac{2x+\sqrt{4x^2+4}}{2}=x+\sqrt{1+x^2},$$

finalement

$$\operatorname{Arcsinh} x=\ln(x+\sqrt{1+x^2}).$$

De la même façon $\operatorname{Arccosh} x=\ln(x+\sqrt{1-x^2})$ et $\operatorname{Arctanh} x=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$.

Solution d:

$$\begin{aligned}(\operatorname{Arcsinh} x)' &= [\ln(x+\sqrt{1+x^2})]'\\ &= \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}(x+\sqrt{1+x^2})'\\ &= \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}(1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}})\\ &= \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}(\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}})=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.\end{aligned}$$

De la même façon $(\operatorname{Arccosh} x)'=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ et $(\operatorname{Arctanh} x)'=\dfrac{1}{1-x^2}$. ■

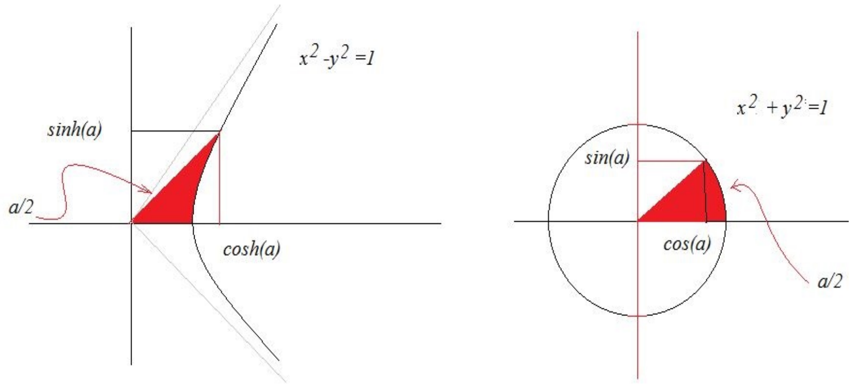


Figure 3.2: Fonction hyperbolique

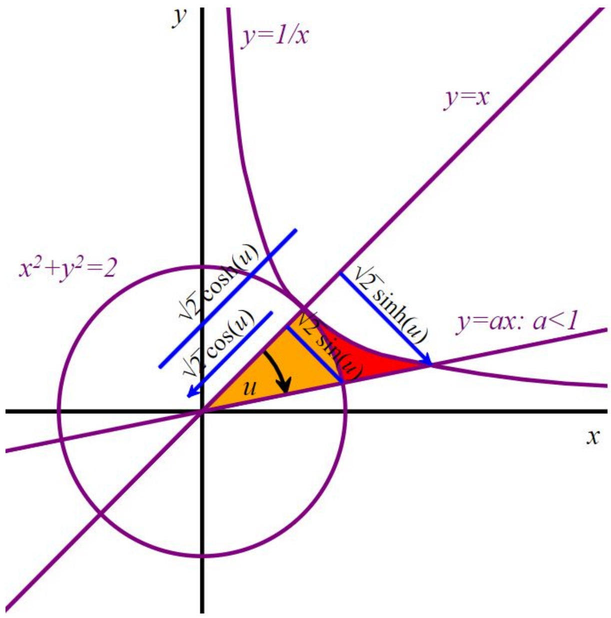


Figure 3.3: Fonction hyperbolique

■ **Exemple 3.17** Calculez la dérivée de $f(x) = \ln(\ln x)$ et $g(x) = \ln(\ln(\ln x))$.
Solution:

$$\begin{aligned} f'(x) = [\ln(\ln x)]' &= u'(v(x))v'(x) \\ &= \frac{1}{\ln x}.\frac{1}{x} = \frac{1}{x\ln x}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g'(x) = [\ln(\ln(\ln x))]' &= u'(v(w(x)))v'(w(x)).v(x) \\ &= \frac{1}{\ln(\ln x)}.\frac{1}{\ln x}.\frac{1}{x} = \frac{1}{x\ln x\ln(\ln x)}. \end{aligned}$$

■

■ **Exemple 3.18** Calculez la dérivée de $y = (2x-1)^7(x^2+1)^{15}$.
Solution:

$$\begin{aligned} y' = [(2x-1)^7(x^2+1)^{15}]' &= [(2x-1)^7]'(x^2+1)^{15} + (2x-1)^7[(x^2+1)^{15}]' \\ &= [7(2x-1)^6 \times 2](x^2+1)^{15} + (2x-1)^7[15(x^2+1)^{14} \times 2x]. \end{aligned}$$

■ **Exemple 3.19** Calculez la dérivée de $y = \tan^5(\dfrac{1-\sin^2 x}{1+\sin^2 x})$.

Solution: Ici $y = \tan^5(\dfrac{1-\sin^2 x}{1+\sin^2 x}) = f(g(h(I(x))))$ où $f(x) = x^5$, $g(x) = \tan x$, $h(x) = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ et $I(x) = \sin x$, alors

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (x^5)' = 5x^4\\
g'(x) &= (\tan x)' = \sec^2 x\\
h'(x) &= (\frac{1-x^2}{1+x^2})' = \frac{-4x}{(1+x^2)^2}\\
I'(x) &= (\sin x)' = \cos x
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
y' = [\tan^5(\frac{1-\sin^2 x}{1+\sin^2 x})]' &= f'(g(h(I(x))))g'(h(I(x))).h'(I(x)).I'(x)\\
&= 5\tan^4(\frac{1-\sin^2 x}{1+\sin^2 x}).\sec^2(\frac{1-\sin^2 x}{1+\sin^2 x}).\frac{-4\sin x}{(1+\sin^2 x)^2}.\cos x.
\end{aligned}$$

■

Remarque 3.2.7 — La dérivée de $y = f(x)^{g(x)}$. Soit les fonctions dérivable $f(x)$ et $g(x)$ tell que $f(x)^{g(x)}$ est bien défini, on peut écrire

$$f(x)^{g(x)} = e^{\ln(f(x)^{g(x)})} = e^{g(x)\ln(f(x))},$$

alors,

$$\begin{aligned}
y' &= (e^{g(x)\ln(f(x))})'\\
&= (e^{g(x)\ln(f(x))}).(g(x)\ln(f(x)))'\\
&= (e^{g(x)\ln(f(x))}).(g'(x)\ln(f(x)) + g(x)(\ln(f(x))'))\\
&= (e^{g(x)\ln(f(x))}).(g'(x)\ln(f(x)) + g(x)(\frac{1}{f(x)}f'(x)).
\end{aligned}$$

■ **Exemple 3.20** Calculez la dérivée de $y = x^2 + 2^x + x^x$.
On peut écrire

$$y = x^2 + 2^x + x^x = x^2 + 2^x + e^{x\ln x}$$

$$\begin{aligned}
y' &= (x^2 + 2^x + e^{x\ln x})'\\
&= 2x + (\ln 2)2^x + e^{x\ln x}((1)\ln x + x(\frac{1}{x})) = 2x + (\ln 2)2^x + (e^{x\ln x})(\ln x + 1).
\end{aligned}$$

■

■ **Exemple 3.21** Calculez la dérivée de $y = \sqrt{x}^x$.
On peut écrire

$$y = \sqrt{x}^x = e^{x\ln\sqrt{x}} = e^{x(\frac{1}{2}\ln\sqrt{x})} = e^{\frac{x\ln x}{2}}$$

$$\begin{aligned}
y' &= (e^{\frac{x\ln x}{2}})'\\
&= e^{\frac{x\ln x}{2}}(\frac{x\ln x}{2})' = e^{\frac{x\ln x}{2}}(\frac{1}{2}((1)\ln x + x(\frac{1}{x})) = e^{\frac{x\ln x}{2}}(\frac{\ln x + 1}{2}).
\end{aligned}$$

■

■ **Exemple 3.22** Calculez la dérivée de $y = (\sin x)^{\cos x}$.
On peut écrire

$$y = (\sin x)^{\cos x} = e^{\cos x \ln(\sin x)}$$

$$\begin{aligned}
y' &= (e^{\cos x \ln(\sin x)})' \\
&= e^{\cos x \ln(\sin x)}(\cos x \ln(\sin x))' \\
&= e^{\cos x \ln(\sin x)}(-\sin x \ln(\sin x) + \cos x(\frac{\cos x}{\sin x})) = e^{\cos x \ln(\sin x)}(-\sin x \ln(\sin x) + \frac{\cos^2 x}{\sin x}).
\end{aligned}$$

■

Théorème 3.2.8 — Dérivée de la fonction réciproque.

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

■ **Exemple 3.23** Montrer que:

$$(\mathrm{Arc}\sin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\begin{aligned}
(\mathrm{Arc}\sin x)' &= \frac{1}{(\sin'(\mathrm{Arc}\sin x)} \\
&= \frac{1}{(\cos(\mathrm{Arc}\sin x)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}
\end{aligned}$$

■

3.3 Dérivée d'ordre supérieur

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $I \in \mathbb{R}$ Si f' est dérivable sur I, sa fonction dérivée f'' ou $f^{(2)}$) est appelée dérivée seconde de f. On peut continuer le processus de dérivation et définir une relation de récurrence pour calculer la fonction dérivée $f^{(n)}$ à l'ordre n. La fonction f est de classe C^n sur l'intervalle I si $f^{(n)}$ existe sur I en étant continue sur I. Elle sera de classe C^∞ si elle est indéfiniment dérivable.

■ **Exemple 3.24** Calculer la dérivée $2^{\text{ième}}$ de la fonction $y = e^x \sin x$.

$$\begin{aligned}
y'' &= (e^x \sin x)'' \\
&= ((e^x \sin x)')' \\
&= ((e^x)' \sin x + e^x (\sin x)')' \\
&= (e^x \sin x + e^x \cos x)' \\
&= e^x \sin x + e^x \cos x + e^x \cos x + e^x(-\sin x) = 2e^x \cos x.
\end{aligned}$$

■

■ **Exemple 3.25** Montrer que $y = e^{-2x} + e^x$ satisfait

$$y'' + y' - 2y = 0.$$

Solution: $y' = -2e^{-2x} + e^x$ et $y'' = 4e^{-2x} + e^x$, alors

$$y'' + y' - 2y = (4e^{-2x} + e^x) + (-2e^{-2x} + e^x) - 2(e^{-2x} + e^x) = 0e^{-2x} + 0e^x = 0.$$

■

■ **Exemple 3.26** Calculer la dérivée $10^{\text{ième}}$ de la fonction $y = \sin(3x)$.

$$\begin{aligned} y^{(10)} &= ((\sin(3x))')^{(9)} \\ &= (3\cos(3x))^{(8)} \\ &= (-3^2\sin(3x))^{(7)} \\ &\ldots \\ &= -3^9\sin(3x). \end{aligned}$$

■

Théorème 3.3.1 — Formule de Leibniz. Si les fonctions f et g admettent des dérivées à l'ordre n sur un intervalle I, alors fg est dérivable à l'ordre n et son expression sera :

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x).$$

■ **Exemple 3.27** Calculer la dérivée $n^{\text{ième}}$ de la fonction $y = x^2 e^{-2x}$ par la formule de Leibniz.

$$(fg)^{(n)} = \binom{n}{0} f^0 g^{(n)} + \binom{n}{1} f' g^{(n-1)} + \binom{n}{2} f'' g^{(n-2)} + \ldots,$$

comme

$$\begin{aligned} &f(x) = x^2, f'(x) = 2x, f''(x) = 2, f'''(x) = \ldots = f^{(n)}(x) = 0 \text{ pour } n \geq 3, \\ &g(x) = e^{-2x}, g'(x) = -2e^{-2x}, g''(x) = (-2)^2 e^{-2x}, g^{(n)}(x) = (-2)^n e^{-2x}, \end{aligned}$$

nous avons :

$$y^{(n)}(x) = (-2)^n e^{-2x} x^2 + n(-2)^{n-1} e^{-2x} 2x + \frac{n(n-1)}{2} (-2)^{n-2} e^{-2x}.$$

■

Exercices

Exercice 3.1 Calculez la dérivée de chacune des fonctions suivantes:

1) $y = x^2 + 2x - 1$
2) $y = 2x^{-3} - x^{-1}$
3) $y = \frac{8}{x^8} - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x}$
4) $y = (\frac{1}{x})^3$
5) $y = \frac{x^2+3x+4}{x}$
6) $y = x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x}$
7) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{2x^4}} - \frac{1}{\sqrt[4]{2x^3}}$
8) $y = \sqrt[3]{\frac{1}{x^5}}$
9) $y = \sqrt{x^3\sqrt{x^5\sqrt{x^7}}}$
10) $y = \sqrt{x\sqrt{x}} + \sqrt[3]{x^2\sqrt{x^3}}$
11) $y = 2^x - 3e^x - 4^x$
12) $y = (x^2+3x-1)(1-x^2)$
13) $y = x^2e^x$
14) $y = x^2e^x \sin x$
15) $y = (7x + 2\sin x)(x^2 + 5\cos x)$
16) $y = \frac{1+x}{1-x}$
17) $y = \frac{x^2+2x}{1-x^2}$
18) $y = \frac{e^x+1}{e^x-1}$
19) $y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$
20) $y = \frac{\sin x \cos x}{\sin x - \cos x}$

■

Exercice 3.2 Calculez la dérivée de chacune des fonctions suivantes:

1) $y = (x^3 + 7x^2 - x + 1)^4$
2) $y = (\frac{x^2-1}{x^3+1})^5$
3) $y = \sqrt{1+2x-x^2}$
4) $y = \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}$
5) $y = \sqrt[6]{\frac{x^2-1}{x^3+1}}$
6) $y = 5\sin^3 x - 2\cos(x^3)$
7) $y = \cos\sqrt{x}$
8) $y = \tan(2x^2-1)$
9) $y = \text{Arccos}(1-x^2)$
10) $y = \sin(\frac{x-1}{x})$
11) $y = \sin(x^2+3x)\cos(x^4-1)$
12) $y = \sin^5 x \cos^7 x$
13) $y = e^{3x^2+7x)\cos(4x+9)}$
14) $y = \frac{e^{x^2}}{\text{Arctan}(x^2)}$
15) $y = \ln(\sin x)$
16) $y = \ln(1+\sqrt{1+x^2})$
17) $y = \ln(\ln^2 x) + \ln(\ln(\ln(x)))$
18) $y = (\text{Arcsin}(x^2))^3$
19) $y = 2^{\tan(x^2)}$
20) $y = \log_3^{\cos(x^3-1)}$

■

Exercice 3.3 Calculez la dérivée de chacune des fonctions suivantes:

1) $y = \sqrt[3]{\sin\sqrt[x]{x}}$
2) $y = \ln\left(\left((8-4)^{x^3}\right)^3 \tan^4(x)\right)$
3) $y = (x^x)^x + x^{(x^x)}$
4) $y = e^{x^x} + x^{e^x} + x^{x^e}$

■

Exercice 3.4 Calculer la dérivée seconde de chacune des fonctions suivantes:

1) $y = x$
2) $y = x\sqrt{x}$
3) $y = x^2 \sin x$
4) $y = \frac{e^x}{\sqrt{x}}$
5) $y = \sqrt{x}\cot x$
6) $y = \frac{x^2 \sin x}{x^2+1}$

■

Exercice 3.5 Montrer que $y = e^x + xe^x$ satisfait

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

■

Exercices supplémentaires

Exercice 3.6 Calculez $\dfrac{f'(1)}{f(1)}$, pour

$$f(x) = (x+1)(x^2+1)(x^3+1)\cdots(x^{100}+1).$$

■

Exercice 3.7 Calculez $f'(1)$, si

$$f(x) + f(x^2) + f(x^3) + \cdots f(x^n) = \frac{1}{x}.$$

■

Exercice 3.8 Montrer que:

1. Pour $y = x^m$, $m \in \mathbb{N}$, alors

$$y^{(n)} = (m)_n x^{m-n} = \begin{cases} \dfrac{m!}{(m-n)!} x^{m-n} & n \leq m \\ 0 & n > m \end{cases}$$

2. Pour $f(x) = (x-a)^m g(x)$, $m \in \mathbb{N}$, $g(a) \neq 0$ et g est m fois dérivable, alors

$$f^{(n)}(a) = (n)_m g^{(n-m)}(a) = \begin{cases} 0 & n < m \\ n!g(a) & n = m \\ \dfrac{n!}{(n-m)!} g^{(n-m)}(a) & n > m \end{cases}$$

■

Exercice 3.9 Montrer que:

$$(\frac{ax+b}{cx+d})^{(n)} = \frac{n!(ad-bc)(-c)^{n-1}}{(cx+d)^{n+1}}$$

■

3.4 La règle de l'hôpital

La règle de L'Hôpital[1] (ou de L'Hospital), également appelée règle de Bernoulli, utilise la dérivée dans le but de déterminer les limites difficiles à calculer de la plupart des quotients.

Théorème 3.4.1 — La règle de l'hôpital. Soient f et g deux fonctions dérivables sur I et telles que g' ne s'annule pas.

1. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ et si $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$, alors
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$
2. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$ et si $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$, alors
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

■ **Exemple 3.28** Évaluer

1. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2+x-6}{x^2-4}$
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2} \frac{x^2+x-6}{x^2-4} &= [\frac{0}{0}]\\ &= \lim_{x\to 2} \frac{2x+1}{2x} = \frac{5}{4}.\end{aligned}$$
2. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+x-6}{x^2-4}$
$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x-6}{x^2-4} &= [\frac{\infty}{\infty}]\\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{2x+1}{2x} = [\frac{\infty}{\infty}]\\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{2}{2} = 1.\end{aligned}$$
3. $\lim\limits_{x\to 0} (\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x})$
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} (\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}) &= [\infty-\infty]\\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x\sin x} = [\frac{0}{0}]\\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x + x\cos x} = [\frac{0}{0}]\\ &= \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{\cos x + \cos x - x\sin x} = \frac{0}{2} = 0.\end{aligned}$$
4. $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x$

[1] Guillaume François Antoine de L'Hôpital (1661-1704) est un mathématicien français.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} x\ln x &= [0\times\infty]\\ &= \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = [\frac{\infty}{\infty}]\\ &\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0.\end{aligned}$$

■

■ **Exemple 3.29** Évaluer

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1} = \lim_{x\to 1}\frac{mx^{m-1}}{nx^{n-1}} = \frac{m(1)}{n(1)} = \frac{m}{n}$$

■

■ **Exemple 3.30** Évaluer

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1}{e^{bx}-1}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1}{e^{bx}-1} = \lim_{x\to 0}\frac{ae^{ax}}{be^{bx}} = \frac{ae^{a0}}{be^{b0}} = \frac{a(1)}{b(1)} = \frac{a}{b}$$

■

■ **Exemple 3.31** Évaluer

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{\ln x}$
2. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2^x}{x^2}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\ln x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} x = +\infty.$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{2^x}{x^2} &= \lim_{x\to\infty}\frac{(\ln 2)2^x}{2x}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{(\ln 2)^2 2^x}{2} = +\infty\end{aligned}$$

■

3.4.1 Forme $[0^0]$

■ **Exemple 3.32** Évaluer

$$\lim_{x\to 0^+} x^x.$$

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = e^{\ln(\lim\limits_{x\to 0^+} x^x)} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\ln(x^x)} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x)} = e^0 = 1.$$

■ **Exemple 3.33** Évaluer

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{2}{1+\ln x}}.$$

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{2}{1+\ln x}} = e^{\ln(\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{2}{1+\ln x}})} = e^{\lim_{x\to 0^+}\ln(x^{\frac{2}{1+\ln x}})} = e^{\lim_{x\to 0^+}\frac{2\ln x}{1+\ln x}} = e^{\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{2}{x}}{\frac{1}{x}}} = e^2.$$

■

■ **Exemple 3.34** Évaluer

$$\lim_{x\to\infty}(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}(x))^{\frac{1}{\ln x}}$$

$$\lim_{x\to\infty}(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}(x))^{\frac{1}{\ln x}} = e^{\lim_{x\to\infty}\ln((\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}(x))^{\frac{1}{\ln x}})} = e^{\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}(x))}{\ln x}},$$

Si $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}(x))}{\ln x} = L$,

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}(x))}{\ln x} = [\frac{\infty}{\infty}]\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}(x)}(\frac{-1}{1+x^2})}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-x}{1+x^2}}{\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}(x)} = [\frac{0}{0}]\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-1(1+x^2)+x(2x)}{(1+x^2)^2}}{\frac{-1}{1+x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{x^2+1} = [\frac{\infty}{\infty}]\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{2x} = 1,
\end{aligned}$$

alors, $\lim_{x\to\infty}(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}(x))^{\frac{1}{\ln x}} = e^1 = e.$ ■

3.4.2 Forme $[\infty^0]$

■ **Exemple 3.35** Évaluer

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = e^{\ln(\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}})} = e^{\lim_{x\to\infty}\ln(x^{\frac{1}{x}})} = e^{\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\ln(x)} = e^0 = 1.$$

■

■ **Exemple 3.36** Évaluer

$$\lim_{x\to\infty}(1+e^x)^{\frac{1}{x}}$$

■

$$\lim_{x\to\infty}(1+e^x)^{\frac{1}{x}} = e^{\ln(\lim_{x\to\infty}(1+e^x)^{\frac{1}{x}})} = e^{\lim_{x\to\infty}\ln(\lim_{x\to\infty}(1+e^x)^{\frac{1}{x}})}$$
$$= e^{\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{x}} = e^{[\frac{0}{0}]}$$
$$= e^{\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{e^x}{1+e^x}}{1}} = e^1 = e.$$

3.4.3 Forme $[1^\infty]$

■ **Exemple 3.37** Évaluer

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\ln(\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}})} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}} = e^{[\frac{0}{0}]} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}}{1}} = e^1 = e.$$

■

■ **Exemple 3.38** Évaluer

$$\lim_{x\to 0}(\frac{\sin x}{x})^{\frac{1}{x^2}}$$

■

$$\lim_{x\to 0}(\frac{\sin x}{x})^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}((1+(\frac{\sin x}{x}-1))^{\frac{1}{(\frac{\sin x}{x}-1)}})^{(\frac{\sin x}{x}-1)\frac{1}{x^2}}$$
$$= (\lim_{x\to 0}((1+(\frac{\sin x}{x}-1))^{\frac{1}{(\frac{\sin x}{x}-1)}})^{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3}}$$
$$= (\lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}})^{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3}} = e^{[\frac{0}{0}]}$$
$$= e^{\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{3x^2}} = e^{[\frac{0}{0}]}$$
$$= e^{\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{6x}} = e^{\frac{-1}{6}} = \frac{1}{\sqrt[6]{e}}.$$

Exercices

Exercice 3.10 Évaluer les limites suivantes:

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt[5]{x}}{1-\sqrt[7]{x}}$
2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{6x}-1}{e^{3x}-1}$
3) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}}$
4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+3x)}{5x}$
5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln|3x|}{\ln|x|}$
6) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln|1+x|}{\ln(\ln|1+x|)}$
7) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\cos x-1}$
8) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3}{\sin x-x}$
9) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(3x)}{x}$
10) $\lim\limits_{x\to 1} (\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\sin^2 x})$

■

Exercice 3.11 Évaluer les limites suivantes:

1) $\lim\limits_{x\to 0} x^{x^2}$
2) $\lim\limits_{x\to 0} x^{\sqrt{x}}$
3) $\lim\limits_{x\to 0} x^{\sin x}$
4) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\cos(2x))^{\frac{1}{x^2}}$
5) $\lim\limits_{x\to \infty} (e^x+x)^{\frac{1}{x}}$
6) $\lim\limits_{x\to 0^+} (e^x+x)^{\frac{1}{x}}$
7) $\lim\limits_{x\to 0^+} (e^{-2x}+3x)^{\frac{1}{x}}$
8) $\lim\limits_{x\to 0} (1+mx)^{\frac{n}{x}}$
9) $\lim\limits_{x\to 0} (1+\sin(4x))^{\frac{1}{2x}}$
10) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\dfrac{\tan x}{x})^{\frac{1}{x}}$

■

Exercices supplémentaires*

Exercice 3.12 Évaluer

$$\lim_{x\to\infty} x((1+\frac{1}{x})^x-e)$$

■

Exercice 3.13 Évaluer

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)\cos(2x)\cos(3x)\cdots\cos(nx)}{x^2}$$

■

Exercice 3.14 Si f est dérivable et $f(1)\neq 0$ montrez que

$$\lim_{x\to 0}(\frac{f(1+x)}{f(1)})^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{f'(1)}{f(1)}}.$$

■

3.5 Graphiques des fonctions

Théorème 3.5.1 — Théorème de Fermat. Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle réel ouvert (a,b) et dérivable en un point $c \in (a,b)$.

Théorème 3.5.2 — Le test de la dérivée première. Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle (a,b). Si $\forall x$ dans lintervalle (a,b),
1. $f'(x) > 0$ alors f est **croissante** sur I.
2. $f'(x) < 0$ alors f est **décroissante** sur I.

Conclusion: Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle (a,b) et c est le seul point sur $[a,b]$ tel que $f'(c) = 0$,
1. Si $f'(a) > 0$ et $f'(b) < 0$ alors $f(c)$ est un **minimum relatif**.
2. Si $f'(a) < 0$ et $f'(b) > 0$ alors $f(c)$ est un **maximum relatif**.

■ **Exemple 3.39** Trouver les intervalles de croissance et de décroissance de $f(x) = x^3 + x$ et $g(x) = x^3 - x$. ■

	$-\infty$		∞
$f'(x) = 3x^2 + 1$	$+$ •	$+$ •	$+$
$f(x) = x^3 + x$	*croissance*	*croissance*	*croissance*

	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	
$g'(x) = 3x^2 - 1$	$+$ •	$-$ •	$+$
$g(x) = x^3 - x$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

■ **Exemple 3.40** Trouver les intervalles de croissance, de décroissance ainsi que les extremums relatifs de la fonction $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x + 5$ ■

	1	$\frac{7}{3}$	
$f'(x) = 3x^2 - 10x + 7$	$+$ •	$-$ •	$+$
$f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x + 5$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

et donc $x = 1$ est un maximum relatif et $x = \frac{7}{3}$ est un minimum relatif.

■ **Exemple 3.41** Trouver les intervalles de croissance, de décroissance ainsi que les extremums relatifs de la fonction $f(x) = x + \frac{1}{x}$ ■

	-1	0	1	
$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$	$+$ •	$-$ $\Vert$	$-$ •	$+$
$f(x) = x + \frac{1}{x}$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

et donc $x = -1$ est un maximum relatif et $x = 1$ est un minimum relatif.

Définition 3.5.1 — La concavité et un point d'inflexion. Soit f une fonction, f peut etre

1. **Concave vers le haut:** Le graphique se courbe vers le haut comme s'il enveloppait un point au-dessus de la courbe.
2. **Concave vers le bas:** Le graphique se courbe vers le bas comme s'il enveloppait un point au-dessus de la courbe.
3. **Un point d'inflexion:** Le point où la concavité du graphique change de sens.

Théorème 3.5.3 — Le test de la dérivée seconde. Soit f une fonction deux fois dérivable sur lintervalle (a,b). Si $\forall x$ dans lintervalle (a,b),

1. $f''(x) > 0$ alors f est **concave vers le haut** sur I.
2. $f''(x) < 0$ alors f est **concave vers le bas** I.

Conclusion: Si pour une valeur de x, on a $f'(c) = 0$ alors

1. Si $f''(a) > 0$ alors $f(c)$ est un **minimum relatif**.
2. Si $f''(a) < 0$ alors $f(c)$ est un **maximum relatif**.

■ **Exemple 3.42** Détermine les points d'inflexion et les intervalles de concavité du graphique de $f(x) = (1-x)^2(1+x)^3$

		1		$\frac{7}{3}$	
$f'(x) =$	$+$	$\bullet$	$-$	$\bullet$	$+$
$f''(x) =$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$
$f(x) = (1-x)^2(1+x)^3$					

■

■ **Exemple 3.43** Tracer le graphique de la fonction $f(x) = 3x^4 + 4x^3 + 1$.

		1		$\frac{7}{3}$	
$f'(x) = 12x^3 + 12x^2$	$+$	$\bullet$	$-$	$\bullet$	$+$
$f''(x) = 36x^2 + 24x$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$
$f(x) = 3x^4 + 4x^3 + 1$					

■

■ **Exemple 3.44** Tracer le graphique de la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x^2(x-1)}$.

		0		2	
$f'(x) = \dfrac{2x-3x^2}{(x^3-x^2)^2}$	$+$	$\bullet$	$-$	$\bullet$	$+$
$f''(x) = \dfrac{2(6x^2-8x+3)}{x^4(x-1)^3}$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$
$f(x) = \dfrac{1}{x^2(x-1)}$					

■

■ **Exemple 3.45** Tracer le graphique de la fonction $f(x) = \sqrt[3]{3x^2 - x^3}$.

		0		2		3	
$f'(x) = \dfrac{2x - x^2}{(3x^2 - x^3)^{\frac{2}{3}}}$	$-$	$\bullet$	$+$	$\bullet$	$-$	$\Vert$	$-$
$f''(x) = \dfrac{-2x^2}{(3x^2 - x^3)^{\frac{5}{3}}}$	$-$		$-$		$-$	$\Vert$	$+$
$f(x) = \sqrt[3]{3x^2 - x^3}$							

■

Exercices

Exercice 3.15 Tracer le graphique de la fonction :

1) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 7$
2) $f(x) = x^6 - 3x^2$
3) $f(x) = (1-x)^2(1+x)^3$
4) $f(x) = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$
5) $f(x) = (\dfrac{x+1}{x})^2$
6) $f(x) = x\sqrt{x+1}$
7) $f(x)\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$
8) $f(x) = 5\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^5}$
9) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 4x}$
10) $f(x) = \sqrt[3]{(x^2-64)^2}$

■

Exercice 3.16 Trouver les extremums relatifs de la fonction $f(x) = (x-\alpha)^m(x-\beta)^n$. ■

3.6 Problèmes d'optimisation

Bibliography

Articles
Books