دانش‌کده ریاضی و علوم کامپیوتر
گروه ریاضی محض

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی محض، گرایش هندسه

عنوان

سالیتون‌های ریچی گرادیان

استاد راهنما

دکتر بهروز بیدآباد

استاد مشاور

دکتر ایمان افتخاری

پژوهشگر

مهرداد نجف‌پور

بهمن ۱۳۹۳

نام خانوادگی دانشجو: نجف‌پور   نام: مهرداد

عنوان: سالیتون‌های ریچی گرادیان

استاد راهنما: دکتر بهروز بیدآباد

استاد مشاور: دکتر ایمان افتخاری

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد   رشته: ریاضی محض   گرایش: هندسه

دانشگاه: صنعتی امیرکبیر (پلی‌تکنیک تهران)   دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

تاریخ فارغ‌التحصیلی: بهمن ۱۳۹۳   تعداد صفحات: ۷۲

واژگان کلیدی: شار، سالتیون، ریچی، هم‌ساز، ریمانی، کهلر

چکیده

در این پایان‌نامه در ابتدا با نگاهی هندسی و تعبیری فیزیکی به مفهوم شارریچی می‌پردازیم و انگیزه مطالعه سالیتون‌های ریچی گرادیان به عنوان جواب‌های خودمتشابه شار ریچی را بیان می‌کنیم. در ادامه با بیان مثال‌ها و معادلات ساختاری سالیتون‌ها بستر لازم در مطالعه سالیتون‌ها را ایجاد نموده و در نهایت با استفاده از دو ابزار مهم در بحث سالیتون‌ها یعنی "تخمین انتگرال انحنا" به منظور رده‌بندی و "بررسی توابع هم‌ساز با انرژی متناهی" برای شناسایی ساختار توپولوژیک در بی‌نهایت سالیتون‌های ریچی گرادیان در دو حالت ریمانی و کهلری می‌پردازیم.

بسم الله الرحمن الرحیم

دلی که در آن حکمتی نیست، مانند خانه ویران است، پس بیاموزید و آموزش دهید، بفهمید و نادان نمیرید. به‌راستی که خداوند بهانه‌ای برای نادانی نمی‌پذیرد.

(پیامبر اعظم (ص)، نهج‌الفصاحه ص۶۰۰)

تقدیم به

مادرم به زلالی چشمه،

پدرم به استواری کوه.

تساوی، یک اگر با یک برابر بود ...[1]

معلم پای تخته داد میزد
صورتش از خشم گل‌گون بود
و دستانش به زیر پوششی از گرد پنهان بود
ولی آخر کلاسی‌ها
لواشک بین خود تقسیم می‌کردند
وآن یکی در گوشه‌ای دیگر «جوانان» را ورق می‌زد.
برای آنکه بیخود های‌وهو می‌کرد و با آن شور بی‌پایان
تساوی‌های جبری را نشان می‌داد
با خطی خوانا به‌روی تخته‌ای کز ظلمتی تاریک
غمگین بود
تساوی را چنین بنوشت:

یک با یک برابر است

از میان جمع شاگردان یکی‌برخاست
همیشه یک نفر باید بپاخیزد
به آرامی سخن سر داد:
تساوی اشتباهی فاحش و محض است...
نگاه بچه‌ها ناگه به یک سو خیره گشت و
معلم
مات بر جا ماند.
و او پرسید:
اگر یک فرد انسان، واحد یک بود آیا باز

یک با یک برابر بود؟

سکوت مدهوشی بود و سوالی سخت
معلم خشمگین فریاد زد:

آری برابر بود

---

[1] خسرو گلسرخی (۱۳۵۲-۱۳۲۲)

و او با پوزخندی گفت:
اگر یک فرد انسان واحد یک بود
آنکه زور و زر به دامن داشت بالا بود
وانکه
قلبی پاک و دستی فاقد زر داشت
پایین بود...
اگر یک فرد انسان واحد یک بود
آنکه صورت نقره‌گون،
چون قرص مه می‌داشت
بالا بود
وآن سیه چرده که می‌نالید
پایین بود؟
اگر یک فرد انسان واحد یک بود
این تساوی زیر و رو می‌شد
حال می‌پرسم یک اگر با یک برابر بود
نان و مال مفت‌خواران
از کجا آماده می‌گردید؟
یا چه‌کس دیوار چین‌ها را بنا می‌کرد؟
یک اگر با یک برابر بود
پس که پشتش زیر بار فقر خم می‌گشت؟
یا که زیر ضربه شلاق له می‌گشت؟
یک اگر با یک برابر بود
پس چه‌کس آزادگان را در قفس می‌کرد؟
معلم ناله‌آسا گفت:

بچه‌ها در جزوه‌های خویش بنویسید:
یک با یک برابر نیست

سپاس‌گزاری...

سپاس بی‌کران، یزدان بی هم‌تا، روشنایی بخش دل‌ها، خداوند قلم‌ها و سخن‌ها
تشکر و قدردانی می‌نمایم از استاد گران‌مایه، جناب آقای دکتر بهروز بیدآباد که راه‌نمایی‌های‌شان هم‌واره چراغ راه و آموزه‌هایشان چون گنجی گران‌بها در نهان‌خانه دلم به یادگار است.
از جناب آقای دکتر ایمان افتخاری که زحمت مطالعه و مشاوره این پایان‌نامه را تقبل نمودند و با ره‌نمودهای ارزنده خود این‌جانب را مورد راه‌نمایی قرار دادند، کمال امتنان و تشکر را دارم.
در پایان بوسه می‌زنم بر دست‌های پرمهر پدر و مادرم که محبت بی‌دریغ ابراز نمودند و هم‌واره مشوقم بودند.
هم‌چنین تشکر می‌نمایم از برادر عزیزم که گرمای وجودش همیشه مایه دل‌گرمی‌ام بوده است.

مهرداد نجف‌پور
بهمن ۱۳۹۳

فهرست مطالب

مقدمه

رسته[۲] منیفلدهای[۳] توپولوژیک و رسته منیفلدهای هموار

رده‌بندی منیفلدها یکی از اساسی‌ترین مسائل در توپولوژی دیفرانسیل می‌باشد که در بسیاری از موارد هنوز هم حل نشده باقی مانده است. اگر رسته منیفلدهای توپولوژیک را با $\mathcal{T}op$ و رسته منیفلدهای دیفرانسیل پذیر را با $\mathcal{D}iff$ نشان دهیم، چون هر منیفلد دیفرانسیل پذیر یک منیفلد توپولوژیک است و هر نگاشت هموار[۴] یک نگاشت پیوسته نیز هست، بنابراین تابعگون $i : \mathcal{D}iff \longrightarrow \mathcal{T}op$ یک تابع‌گون فراموشی[۵] است. این تابع‌گون در بعد سه یک یک‌ریختی است اما در حالت کلی نه یک‌به‌یک است و نه پوشا. اگر یک منیفلد توپولوژیک تصویر منیفلد دیفرانسیل‌پذیری تحت تابع‌گون فوق باشد می‌گوییم ساختار دیفرانسیل می‌پذیرد.
حال چند سوال اساسی مطرح می‌شود.

۱ــ آیا هر منیفلد توپولوژیک، ساختار دیفرانسیل‌پذیر می‌پذیرد؟ در سال ۱۹۶۰ کرول و اسمیل با ارائه مثال نقضی ثابت نمود این مطلب برقرار نیست [۵۱]. بنابراین تابع‌گون مذکور پوشا نیست.

۲ــ در صورتی که یک منیفلد توپولوژیک ساختار دیفرانسیل بپذیرد، آیا هر دو ساختار دیفرانسیل پذیر وابرریخت[۶] با هم هستند؟ در سال ۱۹۵۶ ج.میلنر[۷] نشان داد روی کره هفت بعدی S^7 دقیقا ۲۸ ساختار دیفرانسیل پذیر غیر وابرریخت وجود دارد [۳۷]. بنابراین تابع‌گون مذکور یک‌به‌یک نیست.

۳ــ در هر بعدی چند ساختار منیفلد توپولوژیک با تقریب همسان‌ریختی وجود دارد؟

در بعد صفر و یک مساله بدیهی است.[۸] در بعد دو در سال‌های نخست قرن بیستم پوانکاره[۹] همراه با چند

---

[۲] category

[۳] در برخی از متون واژه "خمینه" به عنوان معادل فارسی "منیفلد" برگزیده شده است، اما در این پایان‌نامه بنابر قرارداد گروه هندسه دانش‌کده ریاضی و علوم کامپیوتر دانش‌گاه صنعتی امیرکبیر از واژه انگلیسی استفاده شده.

[۴] برای پرهیز از بروز مشکلات آنالیزی، رسته منیفلدهای هموار را در نظر می‌گیریم، چرا که هر اطلس از یک منیفلد دیفرانسیل‌پذیر دارای زیر اطلسی هموار و حتی تحلیلی است.

[۵] forgetful functor

[۶] diffeomorphic

[۷] John Willard Milnor، ریاضی‌دان آمریکایی، ــ ۱۹۳۱

[۸] چرا که در بعد صفر حتی اگر ناهم‌بند باشد مجموعه ای گسسته از نقاط را داریم و در ترکیبیات بررسی می‌گردد و در بعد یک منحنی داریم، اگر فشرده باشد همسان‌ریخت با دایره S^1 و اگر فشرده نباشد با خط حقیقی همسانریخت است.

[۹] Henri Poincaré، ریاضی‌دان فرانسوی، ۱۹۱۲-۱۸۵۴

ریاضی‌دان دیگر، با اثبات قضیه یک‌نواخت‌سازی به رده‌بندی رویه‌ها پرداختند. پس از آن اولین تلاش‌ها برای رده‌بندی منیفلدهای سه بعدی آغاز گردید. به دلیل پیچیدگی گروه بنیادی منیفلدهای سه بعدی، برای بسیاری رده‌بندی منیفلدهای سه بعدی یک رویا بود.

مفهوم هندسه‌پذیری

اواخر دهه هفتاد و اوایل دهه هشتاد ترستن [۱۰] حدس زد هر منیفلد سه بعدی هندسه‌پذیر است. [۵۳] منیفلد سه بعدی M را هندسه‌پذیر گوییم هرگاه بتوان آن را به مجموع تعدادی مولفه هم‌بند تجزیه کرد که در هر مولفه مانند N، بتوان تعدادی چنبره تراکم ناپذیر مجزا مثل T_i ها یافت به گونه‌ای که هر مولفه هم‌بندی $N \setminus \cup T_i$ متریکی کامل و موضعا همگن با حجم متناهی بپذیرد. یک منیفلد را موضعا همگن گوییم هرگاه هر نقطه آن دارای یک هم‌سایه‌گی همگن باشد، یعنی با مجموعه بازی از یک منیفلد همگن کامل به طور طول‌پا یک‌ریخت باشد. منظور از منیفلد همگن کامل، منیفلدی است که گروه یک‌متری‌های[۱۱] آن به طور تراگذر[۱۲] روی آن عمل کند. سرانجام ترستن با چند فرض اضافی که کلیت مساله را خدشه دار نمی‌کند موفق شد ثابت کند در بعد سه تنها هشت هندسه وجود دارد که به آن‌ها هندسه‌های مدل می‌گوییم.

حدس پوانکاره

همان‌طور که یادآور شدیم در سال‌های نخست قرن بیستم، هانری پوانکاره، پس از آن که (هم زمان با چند ریاضی دان دیگر) موفق شد قضیه ی یک‌نواخت‌سازی را ثابت کند و رده‌بندی رویه‌ها را نتیجه بگیرد، اولین تلاش‌ها برای رده‌بندی منیفلدهای سه بعدی را آغاز کرد و ابتدا حدس زیر را در سال ۱۹۰۰مطرح نمود:
هر منیفلد سه بعدی بسته (فشرده و بدون لبه) که مانستەگی[۱۳] کره سه بعدی $\mathbb{S}^3$ را داشته باشد با کره سه بعدی $\mathbb{S}^3$ هم‌سان‌ریخت است.
پوآنکاره در سال ۱۹۰۴ با ارائه مثال نقضی متوجه نادرست بودن حدس خود شد و حدس‌اش را به صورت زیر مطرح کرد:
حدس پوآنکاره: هر منیفلد سه بعدی بسته (فشرده و بدون لبه) که هم‌بند ساده باشد (گروه بنیادی آن بدیهی باشد) با کره سه بعدی $\mathbb{S}^3$ هم‌سان‌ریخت است.
این حدس نزدیک به صد سال پایه و انگیزه بسیاری از مطالعات در توپولوژی با ابعاد پایین شد و البته تمام

[۱۰] William Thurston، ریاضی‌دان آمریکایی، ۲۰۱۲-۱۹۴۶
[۱۱] Isometry
[۱۲] transitive
[۱۳] Homology

تلاش‌ها برای اثبات ناکام ماند. در سال ۲۰۰۰ موسسه کلی[۱۴] برای این مساله همراه با شش مساله دیگر یک میلیون دلار جایزه مطرح کرد. تنها سه سال بعد گ.پرلمان[۱۵] با انتشار دو مقاله [۴۶] و [۴۵] در arXiv حدس پوانکاره را به کمک شار ریچی ثابت نمود. در واقع پرلمان حدس ترستن را ثابت نمود که حدس پوانکاره نتیجه ای از آن است.

از هندسه ذاتی تا مفهوم شار ریچی و جراحی منیفلدها

منظور از یک خاصیت ذاتی، خاصیتی است که تحت ایزومتری‌ها ناوردا باشد و مقصود از هندسه ذاتی یک ساختار، مجموعه خواص ذاتی آن ساختار است. ایده یافتن مترهای ذاتی روی منیفلدها (که در این جا مترهای با انحنای ثابت منظور است) یکی از اساسی‌ترین مسائل در هندسه دیفرانسیل می‌باشد، چرا که در اغلب موارد نتایجی توپولوژیک دارد و منجر به شناسایی توپولوژی منیفلد می‌شود. به مفهوم عام، شار هندسی تحولی از یک ساختار هندسی تحت یک معادله دیفرانسیل نسبت به یک تابعک روی منیفلد پایه است. شار هندسی همراه با یک سیستم دینامیکی در فضای نامتناهی البعد مترهای روی یک منیفلد مطالعه می‌گردد. شار گرمایی [۲۲] و [۳۰]، شار ریچی [۱۸] ، [۲۰] و[۲۹] ، شار یامابه [۱۰] و شار با انحنای میانگین [۱۷] معروف‌ترین شارهای هندسی می‌باشند. همان‌طور که بنابر معادله حرارت انتظار داریم شار گرمایی در یک جسم صلب منجر به توزیع یک‌نواخت گرما در سراسر جسم شود، از معادله شار ریچی امیدواریم که شار ریچی، انحنای ریچی را به سمت هموار شدن هدایت کند. نکته کلیدی این‌جاست که چون در بعد سه انحنای ریمان به طور کامل از انحنای ریچی مشخص می‌شود، پس شار ریچی انحنای ریمان را تحت کنترل خواهد داشت و نتایج توپولوژیک دارد. تا قبل از سال ۱۹۸۲ و انتشار مقاله "منیفلدهای سه بعدی با انحنای ریچی تخت" توسط ریچارد هامیلتون [۱۶] [۲۶]، رابطه انحنای منیفلدهای سه بعدی و توپولوژی آن‌ها وابسته به گروه بنیادی منیفلد بود. اما هامیلتون با اثبات قضیه زیر که اولین استفاده از شار ریچی در رده‌بندی منیفلدهای سه بعدی است، انگیزه‌ای برای مطالعه شار ریچی ایجاد کرد.

قضیه هامیلتون: هر منیفلد سه بعدی که متریکی با انحنای ریچی مثبت بپذیرد، خارج قسمتی از کره سه بعدی است.

ایده اصلی در رده‌بندی منیفلدها به کمک شار ریچی این است که ببینیم آیا معادله شار ریچی روی یک منیفلد دارای جواب است و اگر جواب دارد، در بی‌نهایت به چه متریکی هم‌گرا است و از انحنای آن متریک درباره توپولوژی و هندسه آن منیفلد اظهار نظر کرد، اما در حالت کلی شار ریچی روی منیفلدها ممکن است ایجاد تکینگی کند. هامیلتون برای غلبه بر این مشکل جراحی در منیفلدها را پیش‌نهاد کرد. جراحی توپولوژیک به

[۱۴] clay
[۱۵] Grigori Perelman، ریاضی‌دان روسی، ـ۱۹۶۶
[۱۶] Richard Hamilton، ریاضی‌دان آمریکایی، ـ۱۹۴۳

این مفهوم که قبل از ایجاد تکینگی با تجزیه به مجموع مولفه‌های هم‌بندی، مولفه ناحیه‌ای که تکینه می‌شود را خارج کنیم و گوی nـ بعدی به جای آن قرار دهیم و پس از جراحی فرایند را ادامه دهیم و هم‌گرایی شار را بررسی کنیم. هامیلتون با این تکنیک موفق شد دسته‌ای خاص از منیفلدهای چهار بعدی را رده‌بندی کند، اما عدم شناخت کافی از توپولوژی و هندسه تکینگی‌ها باعث شد که مساله در حالت سه بعدی حل نشده باقی بماند. شاه‌کار پرلمان حل این مساله در حالت سه بعدی بود.
به بیان نادقیق جواب یک معادله تحول را زمانی که با تقارن‌ها تحول یابد، سالیتون می‌نامند. سالیتون ریچی را جواب‌هایی از شارریچی که از یک وابرریختی خاص به دست می‌آیند (جواب‌های خودمتشابه) تعریف می‌کنند و حالت خاصی از سالیتون‌های ریچی که منشا آن‌ها گرادیان یک تابع حقیقی مقدار هموار است را سالیتون ریچی گرادیان می‌نامند.
این پایان‌نامه در سه فصل تنظیم گردیده است، در فصل اول مقدماتی از هندسه ریمانی و هندسه مختلط به عنوان پیش‌نیاز فصول آینده یادآوری می‌گردند، در فصل دوم و سوم به ترتیب سالیتون‌های ریچی گرادیان کامل ریمانی و کهلری را بررسی می‌کنیم. مطالب فصول دوم و سوم عمدتا برگرفته شده از مقالات زیر به ویژه اولین مقاله می‌باشد.

[1] Munteanu, O., Sesum, N., On Gradient Ricci Solitons, J Geom Anal (2013) 23:539–561

[2] Cao, H. D., Recent progress on Ricci solitons. Adv. Lect. Math. 11(2), 1–38 (2010)

[3] Fernandez-Lopez, M., Garcia-Rio, E., Rigidity of shrinking Ricci solitons.Math. Z. (2011) 269:461–466

[4] Li, P., Tam, L.F., Harmonic functions and the structure of complete manifolds . J. Differ. Geom. 35,359–383 (1992)

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

کاربردهای عملی ریاضیات از لحاظی، برای ریاضی‌دان‌ها بسیار دل‌گرم کننده است، ولی ریاضی‌دان واقعی قاعدتا احساس می‌کند که [حقانیت] ریاضیات واقعی مبتنی بر این دستاوردهای خام نیست و اشتهار ریاضیات در میان عامه عمدتا بر ناآگاهی و اشتباه استوار است.

(گادفری هاردی، کتاب دفاعیه یک ریاضی‌دان)

در این فصل مفاهیم مقدماتی منیفلدهای ریمانی، کهلری و آنالیز روی آن‌ها به عنوان پیش‌نیاز فصول آینده یادآوری می‌گردند. در سراسر این پایان‌نامه مقصود از یک منیفلد، یک منیفلد هم‌بند، جهت‌پذیر و بدون لبه است. مطابق معمول منظور از هم‌بندی و فشردگی یک منیفلد به ترتیب هم‌بندی و فشردگی آن به عنوان یک فضای توپولوژیک است و کامل بودن یک منیفلد ریمانی به معنای کامل بودن به عنوان یک فضای متریک با متریک ریمانی می‌باشد. مقصود از یک منیفلد بسته، یک منیفلد فشرده و بدون لبه است و یک منیفلد باز، منیفلد بدون لبه‌ای است که مولفه هم‌بندی فشرده ندارد. برای منیفلدهای هم‌بند مفهوم باز بودن معادل با غیرفشرده و بدون لبه بودن است. ساختار توپولوژیکی منیفلدها در بی‌نهایت در بخش ۱۱.۲ از فصل دوم مورد بررسی قرار گرفته است.

۱.۱ منیفلدهای ریمانی

۱.۱.۱ آنالیز برداری روی منیفلدهای ریمانی و میدان‌های تانسوری

تعریف ۱.۱.۱. التصاق خطی روی منیفلد M: فرض کنید M یک منیفلد دیفرانسیل‌پذیر باشد و میدان‌های برداری روی M را با $\mathfrak{X}(M)$ نشان دهیم. منظور از یک التصاق خطی روی M، عمل‌گر ∇ است که به هر میدان برداری X روی M، نگاشت $\nabla_X : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ را نسبت می‌دهد که در شرایط زیر صدق می‌کند:

۱) $\nabla_{fX+Y}Z = f\nabla_X Z + \nabla_Y Z$

۲) $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X(Y) + \nabla_X(Z)$

۳) $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + (X.f)Y$

∇_X را برای توابع هموار به صورت $\nabla_X f = X.f$ تعریف می‌کنیم و عملگر ∇_X را مشتق‌گیری هم‌ورد نسبت به میدان برداری X می‌نامیم. جهت پرهیز از تکرار نمادها $\frac{\partial}{\partial x^i}$ را با ∂_i، ∇_{∂_i} را با ∇_i و $\nabla_i f$ را با f_i نشان می‌دهیم.

تعریف ۲.۱.۱. علائم کریستوفل: ضرایب مشتق هم‌ورد ∂_j نسبت به ∂_i بر حسب ∂_k ها را ضرایب التصاق یا علائم کریستوفل می‌نامند و با Γ_{ij}^k نشان می‌دهند. یعنی:

$$\nabla_{\partial_i}(\partial_j) = \Gamma_{ij}^k \partial_k.$$

تعریف ۳.۱.۱. التصاق ریمانی: فرض کنید (M, g) یک منیفلد ریمانی باشد و ∇ یک التصاق خطی روی آن، التصاق ∇ را ریمانی یا لوی‌چی‌ویتا گوییم، هرگاه برای هر سه میدان برداری Z, Y, X در شرایط زیر صدق کند:

۱) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ (خاصیت تاب آزادی).

۲) $X.\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$ (خاصیت سازگاری با متریک).

قضیه ۴.۱.۱. *قضیه اساسی هندسه ریمانی: روی هر منیفلد ریمانی (M, g) دقیقا یک التصاق ریمانی وجود دارد.*

برهان. رجوع شود به کتاب [۴]. □

تعریف ۵.۱.۱. یک‌ریختی‌های موسیقایی

منظور از یک‌ریختی‌های موسیقایی عملگرهای زیر می‌باشد:

$$\begin{gathered}\flat : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \Omega^1(M) \\ X = X_j \frac{\partial}{\partial x^j} \longmapsto X^\flat = \omega = g_{ij} X^j dx^i.\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\sharp : \Omega^1(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M) \\ \omega = \omega_j dx^j \longmapsto \omega^\sharp = X = g^{ij}\omega_j \frac{\partial}{\partial x^i}.\end{gathered}$$

گزاره ۶.۱.۱. *عملگرهای $\flat$ و $\sharp$ با التصاق ریمانی ∇ جابه‌جا می‌شوند.*

برهان. رجوع شود به کتاب [۴]. □

تعریف ۷.۱.۱. عمل‌گر گرادیان روی منیفلدهای ریمانی: فرض کنید $(\mathcal{M},g)$ یک منیفلد ریمانی باشد، نگاشت $grad : C^{\infty}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ که در هر نقطه p به صورت $\langle (gradf)(p), X_p\rangle = (df)_p(X_p)$ می‌باشد را عمل‌گر گرادیان می‌نامیم. در مختصات موضعی داریم:

$$gradf = g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j}.$$

تعریف ۸.۱.۱. عمل‌گر دیورژانس روی منیفلدهای ریمانی: فرض کنید $(\mathcal{M},g)$ یک منیفلد ریمانی باشد، نگاشت $div : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow C^{\infty}(M)$ را که در هر نقطه p به صورت $(divX)(p) = tr(Y \longrightarrow \nabla_Y X(p))$ تعریف می‌شود عمل‌گر دیورژانس می‌نامیم. در مختصات موضعی برای $X = X^i\partial_i$ داریم:

$$divX = \nabla_i X^i.$$

گزاره ۹.۱.۱. *اگر Ω یک فرم حجمی روی منیفلد ریمانی (M,g) باشد و X یک میدان برداری روی آن در این صورت:*

$$d(i_X\Omega) = (divX)\Omega,$$

در نتیجه $\mathcal{L}_X\Omega = i_X d\Omega + di_X\Omega = \circ + (divX)\Omega$. در برخی مراجع دیورژانس میدان برداری را نسبت $\mathcal{L}_X\Omega$ به فرم حجمی Ω تعریف می‌کنند.

برهان. رجوع شود به جزوه [۵]. □

تعریف ۱۰.۱.۱. عمل‌گر هم‌دیفرانسیل روی منیفلدهای ریمانی: فرض کنید $(\mathcal{M},g)$ یک منیفلد ریمانی باشد، نگاشت $\delta : \Omega^{1}(M) \longrightarrow C^{\infty}(M)$ را که در هر نقطه p به صورت $(\delta\omega)(p) = tr(X \longrightarrow \nabla_X\omega(p))$ تعریف می‌شود عمل‌گر هم‌دیفرانسیل می‌نامیم. در مختصات موضعی برای $\omega = \omega_i dx^i$ داریم:

$$\delta\omega = \nabla_i\omega_i.$$

برهان. رجوع شود به کتاب [۴]. □

گزاره ۱۱.۱.۱. *عمل‌گرهای دیورژانس و هم‌دیفرانسیل در روابط زیر صدق می‌کنند.*

۱) $div(gradf) = \delta(df)$.

۲) $div(fX) = fdiv(X) + \langle gradf, X\rangle$.

۳) $\delta(f\omega) = f\delta(X) - \langle df, \omega\rangle$.

برهان. رجوع شود به کتاب [۴]. □

تعریف ۱.۱.۱۲. عمل‌گر لاپلاسین روی منیفلدهای ریمانی: فرض کنید $(\mathcal{M}, g)$ یک منیفلد ریمانی باشد، نگاشت $\Delta : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$ را که به صورت $\Delta f = div(gradf)$ تعریف می‌شود عمل‌گر لاپلاسین می‌نامیم. در مختصات موضعی داریم:

$$\Delta f = g^{ij}\nabla_i\nabla_j f = \nabla^j\nabla_j f.$$

تعریف ۱.۱.۱۳. عمل‌گر هسیان روی منیفلدهای ریمانی: هسیان تابع هموار f به دو صورت $hess(f)$ و $Hess(f)$ تعریف می‌شود:

۱)تعریف $hess(f)$ به عنوان یک نگاشت خطی از $\mathfrak{X}(M)$ به $\mathfrak{X}(M)$:

$$hess : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathfrak{X}(M), \mathfrak{X}(M))$$
$$hess(f)(X) := \nabla_X \nabla f.$$

۲) تعریف $Hess(f)$ به عنوان یک ۲ــفرم روی M :

$$Hess : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \Omega^{2}(M)$$
$$Hess(f)(X, Y) := (\nabla_Y(df))(X) = Y.(df(X)) - df(\nabla_Y X),$$

در مختصات موضعی داریم:

$$Hess(f) = (\frac{\partial^{2}}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma^k_{ij}\frac{\partial f}{\partial x^k})dx^i \otimes dx^j.$$

گزاره ۱.۱.۱۴. *لاپلاسین همان اثر نگاشت $hess(f)$ است، یعنی:*

$$\Delta d = tr(hess(f)).$$

برهان. رجوع شود به کتاب [۴]. □

گزاره ۱.۱.۱۵. *$hess(f)$ به عنوان یک نگاشت خطی از $\mathfrak{X}(M)$ به $\mathfrak{X}(M)$ خودالحاق است، یعنی:*

$$\langle hess(f)Y, X\rangle = \langle Y, hess(f)X\rangle .$$

برهان. رجوع شود به کتاب [۴]. □

قضیه ۱.۱.۱۶. *قضیه استوکس[۱] :روی منیفلدها فرض کنید M یک منیفلد جهت‌پذیر و ω یک $(n-1)$ــفرم با محمل فشرده باشد، در این صورت:*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

[۱] Sir George Stokes, Bt. ۱۸۱۹–۱۹۰۳، ریاضی‌دان و فیزیک‌دان ایرلندی

برهان. رجوع شود به جزوه [۵]. □

قضیه ۱.۱.۱۷. *فرمول گرین[۲] برای منیفلدهای ریمانی: فرض کنید (M,g) یک منیفلد ریمانی جهت‌پذیر هم‌بند و فشرده باشد، $d\mu$ فرم حجمی ریمانی M، n بردار یکه برون‌گرای ∂M و $d\sigma$ فرم حجمی القایی روی ∂M باشد، در این صورت:*

$$\int_M \langle \nabla f, \nabla h\rangle \, d\mu = \int_{\partial M} f n d\sigma - \int_M f \Delta h d\mu.$$

برهان. رجوع شود به کتاب [۴]. □

قضیه ۱.۱.۱۸. *قضیه دیورژانس برای منیفلدهای ریمانی فرض کنید (M,g) یک منیفلد ریمانی جهت‌پذیر هم‌بند و فشرده باشد، $d\mu$ فرم حجمی ریمانی M، n بردار یکه برون‌گرای ∂M و $d\sigma$ فرم حجمی القایی روی ∂M باشد، در این صورت:*

$$\int_M div(X) d\mu = \int_{\partial M} \langle X, n\rangle \, d\sigma.$$

برهان. رجوع شود به کتاب [۴]. □

قضیه ۱.۱.۱۹. *فرمول انتگرال‌گیری جزء به جزء برای منیفلدهای ریمانی: فرض کنید (M,g) یک منیفلد ریمانی جهت‌پذیر هم‌بند و فشرده باشد، $d\mu$ فرم حجمی ریمانی M، N بردار یکه برون‌گرای ∂M و $d\sigma$ فرم حجمی القایی روی ∂M باشد، در این صورت:*

$$\int_M \langle \nabla f, X\rangle \, d\mu = \int_{\partial M} f \langle X, n\rangle \, d\sigma - \int_M f \nabla X d\mu.$$

برهان. رجوع شود به کتاب [۴]. □

تعریف ۱.۱.۲۰. میدان تانسوری از نوع $\binom{p}{q}$:

منظور از یک میدان تانسوری نوع $\binom{p}{q}$ روی منیفلد M، نگاشتی چون T از M به فضای تانسورهای نوع $\binom{p}{q}$ روی M است، T در مختصات موضعی نمایشی به صورت زیر دارد:

$$T = T^{j_1 \dots j_p}_{i_1 \dots i_q}(x) dx^{i_1} \otimes dx^{i_2} \dots \otimes dx^{i_q} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_p}}.$$

که $T^{j_1 \dots j_p}_{i_1 \dots i_q}$ ها توابعی هموار روی M هستند.

[۲] George Green ۱۷۹۳-۱۸۴۱،ریاضی‌دان انگلیسی

تعریف ۲۱.۱.۱. ضرب داخلی تانسورهای از نوع $\binom{p}{q}$:

فرض کنید $F^{j_1...j_p}_{i_1...i_q}$ و $G^{j_1...j_p}_{i_1...i_q}$ دو تانسور نوع $\binom{p}{q}$ باشند، ضرب داخلی آن‌ها را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\langle F, G\rangle := F^{i_1...i_q}_{j_1...j_p}.G^{j_1...j_p}_{i_1...i_q},$$

که در آن $F^{i_1...i_q}_{j_1...j_p}$ برابر است با:

$$g^{i_1k_1}...g^{i_qk_q}.g_{j_1l_1}...g_{j_pl_p}F^{l_1...l_p}_{k_1...k_q}.$$

مثال ۲۲.۱.۱. فرض کنید T^{lm}_{ijk} یک تانسور نوع $\binom{2}{3}$ باشند، نرم آن به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$|T|^2 := \langle T, T\rangle = g^{ip}g^{jq}g^{kr}g_{ls}g_{mt}.T^{lm}_{ijk}T^{st}_{pqr}.$$

تعریف ۲۳.۱.۱. مشتق‌گیری هم‌ورد از میدان‌های تانسوری نوع$\binom{p}{q}$: فرض کنید M یک منیفلد دیفرانسیل‌پذیر و ∇_X یک مشتق‌گیری هم‌ورد نسبت به میدان برداری X روی M باشد، دامنه تعریف ∇_X را به صورت زیر برای میدان تانسوری S از نوع $\binom{p}{q}$ گسترش می‌دهیم:

$$\begin{aligned}(\nabla_X S)(\omega^1, ..., \omega^p, Y_1, ..., Y_q) =& X(S(\omega^1, ..., \omega^p, Y_1, ..., Y_q))\\ &+ \sum_{j=1}^{p} S(\omega^1, ..., \nabla_X\omega^j, ...\omega^p, Y_1, ..., Y_q)\\ &- \sum_{i=1}^{q} S(\omega^1, ..., \omega^p, Y_1, ..., \nabla_X Y_i, ..., Y_q),\end{aligned}$$

$\nabla_X S$ یک میدان تانسوری $\binom{p}{q+1}$ است.

در مختصات موضعی داریم:

$$\begin{aligned}(\nabla_k S)^{j_1...j_p}_{i_1...i_q} &= \partial_k S^{j_1...j_p}_{i_1...i_q}\\ &+ (\Gamma^{j_1}_{kt}S^{t...j_p}_{i_1...i_q} + ... + \Gamma^{j_p}_{kt}S^{j_1...t}_{i_1...i_q})\\ &- (\Gamma^{t}_{ki_1}S^{j_1...j_p}_{t...i_q} + ... + \Gamma^{t}_{ki_q}S^{j_1...j_p}_{i_1...t}).\end{aligned}$$

تعریف ۲۴.۱.۱. مشتق‌گیری هم‌ورد کل روی منیفلد M :

فرض کنید M یک منیفلد دیفرانسیل‌پذیر با التصاق خطی ∇ و S یک میدان تانسوری از نوع $\binom{p}{q}$ روی M

باشد، مشتق هم‌ورد کل S را که یک میدان تانسوری $\binom{p}{q+1}$ است با ∇S نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\nabla S : \underbrace{\Omega^1(M) \times ... \times \Omega^1(M)}_{p} \times \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times ... \times \mathfrak{X}(M)}_{q+1} \longrightarrow C^\infty(M)$$
$$(\nabla S)(\omega^1, ..., \omega^p, Y_1, ..., Y_q, X) = \nabla_X S(\omega^1, ..., \omega^p, Y_1, ..., Y_q)$$

مثال ۲۵.۱.۱. مشتق هم‌ورد کل مرتبه اول یک تابع هموار، دیفرانسیل کل آن است. فرض کنید f یک تابع هموار روی منیفلد M باشد.

$$\nabla f = X_i dx^i \Longrightarrow X_i = \nabla f(\partial_i) = \partial_i.f \Longrightarrow \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$$

مثال ۲۶.۱.۱. مشتق‌گیری هم‌ورد کل مرتبه دوم یک تابع هموار، $Hess$ آن است. در برخی از کتب $Hess(f)$ را مستقلا $\nabla^2 f$ تعریف می‌کنند.

تعریف ۲۷.۱.۱. مشتق‌گیری لی روی منیفلد M :
فرض کنید M یک منیفلد دیفرانسیل‌پذیر، X یک میدان برداری و S یک میدان تانسوری نوع $\binom{p}{q}$ روی M باشد، مشتق لی S در راستای میدان برداری X که یک میدان تانسوری $\binom{p}{q}$ است را با $\mathcal{L}_X S$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_X S)(\omega^1, ..., \omega^p, Y_1, ..., Y_q) =& X(S(\omega^1, ..., \omega^p, Y_1, ..., Y_q)) \\ &+ \sum_{j=1}^{p} S(\omega^1, ..., \flat[X, \sharp\omega^j], ...\omega^p, Y_1, ..., Y_q) \\ &- \sum_{i=1}^{q} S(\omega^1, ..., \omega^p, Y_1, ..., [X, Y_i], ..., Y_q),\end{aligned}$$

در مختصات موضعی داریم:

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_X S)^{j_1 ... j_p}_{i_1 ... i_q} =& X^k \partial_k S^{j_1 ... j_p}_{i_1 ... i_q} \\ &+ \sum_{t=1}^{q} S^{j_1 ... j_p}_{i_1 ... i ... i_q} \partial_{i_t} X^i \\ &- \sum_{t=1}^{p} S^{j_1 ... j ... j_p}_{i_1 .... i_q} \partial_j X^{j_t}.\end{aligned}$$

گزاره ۲۸.۱.۱. *فرمول مزر*[۳]*: اگر $\{\alpha_t\}$ خانواده‌ای از pـ فرم‌های روی منیفلد M باشد و $\{\phi_t\}$ خانواده گروه‌های تک پارامتری وابسته به خانواده میدان‌های برداری $\{X_t\}$ روی M در این صورت:*

$$\frac{d}{dt}(\phi_t^*\alpha_t) = \phi_t^*(\frac{\partial}{\partial t}\alpha_t + \mathcal{L}_{X_t}\alpha_t)$$

به علاوه در حالت خاص برای pـ فرم α داریم:

$$\frac{d}{dt}(\phi_t^*\alpha) = \phi_t^*(\mathcal{L}_{X_t}\alpha)$$

برهان. رجوع شود به جزوه [۵]. □

تعریف ۲۹.۱.۱. میدان برداری کیلینگ میدان برداری X را روی منیفلد ریمانی (M,g) یک میدان برداری کیلینگ گوییم، هرگاه $\mathcal{L}_X g = ۰$. معادلا با هر نقطه آغازی، نگاشت‌های مربوط به گروه موضعی ۱ـ پارامتری وابسته به آن ایزومتری باشند.

تعریف ۳۰.۱.۱. گرادیان میدان‌های تانسوری نوع$\binom{p}{q}$: فرض کنید (M,g) یک منیفلد ریمانی با التصاق ریمانی ∇ و S یک میدان تانسوری از نوع $\binom{p}{q}$ روی M باشد، گرادیان S را که یک میدان تانسوری $\binom{p}{q+۱}$ است با ∇S نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(\nabla S)(\omega^۱,...,\omega^p,Y_۱,...,Y_q,X) = (\nabla_X S)(\omega^۱,...,\omega^p,Y_۱,...,Y_q),$$

در مختصات موضعی داریم:

$$\begin{aligned}\nabla S^{j_۱...j_p}_{i_۱...i_q k} =& \partial_k S^{j_۱...j_p}_{i_۱...i_q}\\ &+ (\Gamma^{j_۱}_{kt} S^{t...j_p}_{i_۱...i_q} + ... + \Gamma^{j_p}_{kt} S^{j_۱...t}_{i_۱...i_q})\\ &- (\Gamma^{t}_{ki_۱} S^{j_۱...j_p}_{t...i_q} + ... + \Gamma^{t}_{ki_q} S^{j_۱...j_p}_{i_۱...t}).\end{aligned}$$

تعریف ۳۱.۱.۱. دیورژانس میدان‌های تانسوری نوع$\binom{p}{q}$: فرض کنید (M,g) یک منیفلد ریمانی با التصاق ریمانی ∇ و T یک میدان تانسوری از نوع $\binom{p}{q}$ روی M باشد، دیورژانس T را که یک میدان تانسوری $\binom{p}{q-۱}$ است با $divT$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(divT)(Y_۱,...,Y_{q-۱}) := tr(X \longmapsto \sharp(\nabla T)(X,.,Y_۱,...,Y_{q-۱})),$$

[۳] Moser

در مختصات موضعی داریم:

$$(divT)^{j_1\dots j_p}_{i_1\dots i_{q-1}} = g^{rs}\nabla_r T^{j_1\dots j_p}_{si_1\dots i_{q-1}}.$$

تعریف ۳۲.۱.۱. **لاپلاسین میدان‌های تانسوری نوع $\binom{p}{q}$:** فرض کنید (M,g) یک منیفلد ریمانی با التصاق ریمانی ∇ و T یک میدان تانسوری از نوع $\binom{p}{q}$ روی M باشد، لاپلاسین T را که یک میدان تانسوری $\binom{p}{q}$ است با ΔT نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(\Delta T) := tr(X \longmapsto \sharp(\nabla^2 T)(X,.)),$$

در مختصات موضعی داریم:

$$(\Delta T)^{j_1\dots j_p}_{i_1\dots i_q} = g^{rs}\nabla_r\nabla_s T^{j_1\dots j_p}_{i_1\dots i_q}.$$

۲.۱.۱ انحنای منیفلدهای ریمانی

تعریف ۳۳.۱.۱. تانسور انحنای اول ریمان:
تانسور انحنای اول ریمان در هر نقطه یک تانسور نوع $\binom{1}{3}$ است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$R : \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$$
$$(X,Y,Z)\mapsto R(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z.$$

تعریف ۳۴.۱.۱. تانسور انحنای دوم ریمان:
تانسور انحنای دوم ریمان در هر نقطه یک تانسور نوع $\binom{0}{4}$ است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$R_m : \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$$
$$(X,Y,Z,W)\mapsto g(R(X,Y)Z,W).$$

قضیه ۳۵.۱.۱. *خواص مولفه‌های تانسور انحنای ریمان:*
الف) رابطه بین مولفه‌های تانسور انحنای اول و دوم ریمان:

$$R_{ijkl} = g_{tl}R^t_{ijk},$$
$$R^t_{ijk} = g^{tl}R^t_{ijkl},$$

ب) تقارن‌ها و پادتقارن‌ها:

$$R_{jikl} = -R_{ijkl},$$
$$R_{ijlk} = -R_{ijkl},$$
$$R_{klij} = R_{ijkl}.$$

برهان. رجوع شود به کتاب [۴]. □

قضیه ۳۶.۱.۱. *محاسبه انحنای ریمان در مختصات موضعی:*

$$R^t_{ijk} = \partial_i \Gamma^t_{jk} - \partial_j \Gamma^t_{ik} + \Gamma^s_{jk}\Gamma^t_{is} - \Gamma^s_{ik}\Gamma^t_{js}.$$

قضیه ۳۷.۱.۱. *اتحادهای بیانچی*

اتحاد اول بیانچی:

$$R_{ijkl} + R_{jkil} + R_{kijl} = 0.$$

اتحاد دوم بیانچی:

$$\nabla_i R_{jklm} + \nabla_j R_{kilm} + \nabla_k R_{ijlm} = 0.$$

برهان. رجوع شود به کتاب [۴]. □

نتیجه ۳۸.۱.۱. *از اتحاد دوم بیانچی داریم:*

$$\nabla_t R^t_{ijk} = \nabla_i R_{jk} - \nabla_j R_{ik},$$
$$\nabla_t R^t_i = \nabla_i R (\Rightarrow div(Ric) = \frac{1}{2} dR).$$

برهان. رجوع شود به کتاب [۴]. □

قضیه ۳۹.۱.۱. *فرمول جابه‌جایی مشتق هم‌ورد مرتبه دوم:*

فرض کنید $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ و $\omega \in \Omega^1(M)$ باشند.

الف) برای میدان‌های برداری:

$$\nabla^2_Z(X,Y) - \nabla^2_Z(Y,X) = R(X,Y)Z,$$

درمختصات موضعی:

$$\nabla_i \nabla_j Z^k = \nabla_j \nabla_i Z^k + R^k_{ijm} Z^m.$$

ب) برای میدان‌های ۱ ـ فرمی:

$$\nabla^{2}_{\omega}(X,Y,Z)-\nabla^{2}_{\omega}(Y,X,Z)=\omega(R(X,Y)Z),$$

درمختصات موضعی:

$$\nabla_i\nabla_j\omega_k=\nabla_j\nabla_i\omega_k+R^{p}_{ijm}\omega_p.$$

ج) برای میدان‌های تانسوری نوع $\binom{p}{q}$:

$$\begin{aligned}\nabla_r\nabla_s T^{j_1\dots j_p}_{i_1\dots i_q}=&\nabla_s\nabla_r T^{j_1\dots j_p}_{i_1\dots i_q}\\&+\sum_{k=1}^{p}R^{j_k}_{rsm}T^{j_1\dots j_{k-1}mj_{k+1}\dots j_p}_{i_1\dots i_q}\\&-\sum_{k=1}^{q}R^{m}_{rsi_k}T^{j_1\dots j_p}_{i_1..i_{k-1}mi_{k+1}\dots i_q}.\end{aligned}$$

برهان. رجوع شود به کتاب [۴]. □

تعریف ۴۰.۱.۱. تانسور انحنای ریچی:
تانسور انحنای ریچی در هر نقطه یک تانسور نوع $\binom{0}{2}$ است، که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Ric:\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\longrightarrow\mathbb{R}$$
$$(X,Y)\mapsto tr(\partial_i\longrightarrow R(\partial_i,X)Y).$$

تعریف ۴۱.۱.۱. منیفلد اینشتین
منیفلد ریمانی (M,g) را منیفلد اینشتین گوییم هرگاه تانسور انحنای ریچی آن مضربی از متریک ریمانی آن باشد، یعنی برای تابع $\rho:M\longrightarrow\mathbb{R}$:

$$Ric=\rho g.$$

تعریف ۴۲.۱.۱. درون‌ریختی ریچی:
منظور از درون‌ریختی ریچی نگاشت زیر می‌باشد.

$$Rc:\mathfrak{X}(M)\longrightarrow\mathfrak{X}(M)$$
$$X\mapsto\sharp(Ric(X,.))$$

یعنی:

$$g(Rc(X),Y)=Ric(X,Y).$$

تعریف ۴۳.۱.۱. انحنای عددی:
انحنای عددی یا اسکالر یک منیفلد ریمانی به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$R := tr(X \mapsto Ric(X)).$$

گزاره ۴۴.۱.۱. *روابط مولفه‌های تانسور انحنای ریمان با مولفه‌های تانسور انحنای ریچی و انحنای اسکالر:*

$$R_{ij} = g^{st} R_{sijt},$$
$$R = g^{ij} R_{ij} = g^{ij} g^{kl} R_{kijl}.$$

برهان. رجوع شود به کتاب [۴]. □

تعریف ۴۵.۱.۱. عمل‌گر انحنا:
فرض کنید یک منیفلد ریمانی باشد. منظور از عمل‌گر انحنا نگاشت دوخطی و متقارن زیر می‌باشد:

$$R : \Lambda^{۲} M \times \Lambda^{۲} M \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(X \wedge Y, V \wedge W) \longmapsto R_m(X, Y, W, V).$$

تعریف ۴۶.۱.۱. انحنای گاوس(انحنای برشی):
انحنای گاوس یا برشی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$K : T_pM \times T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(X, Y) \mapsto \frac{R_m(X, Y, Y, X)}{g(X, X).g(Y, Y) - g(X, Y)^{۲}}.$$

گزاره ۴۷.۱.۱. *انحنای گاوس به انتخاب پایه‌های صفحه بستگی ندارد.*

برهان. رجوع شود به کتاب [۴]. □

گزاره ۴۸.۱.۱. *یک منیفلد اینشتین دارای انحنای برشی ثابت است، اگر و تنها اگر موضعا به طور همدیس تخت (یعنی یک دست‌گاه مختصات موجود باشد که تانسور متریک با یک تانسور ثابت متناسب باشد.) باشد.*

برهان. به مقالات [۲۱] و [۲۲] مراجعه کنید. □

تعریف ۴۹.۱.۱. تانسورانحنای وایل[۴]:
تانسور انحنای وایل در هر نقطه یک تانسور نوع $\binom{۰}{۴}$ است که به صورت زیر تعریف می‌شود.

[۴] Hermann Weyl ریاضی دان آلمانی۱۹۵۵ ـ ۱۸۸۵

$$W = R_m - \frac{۱}{n-۲}(Ric - \frac{R}{n}g) \diamond g - \frac{R}{۲n(n-۱)} g \diamond g,$$

که در آن ضرب $\diamond$ به صورت زیر روی تانسورهای متقارن S و T از نوع $\binom{۰}{۲}$ عمل می‌کند:

$$(S \diamond T)(v_۱, v_۲, v_۳, v_۴) = S(v_۱, v_۳)T(v_۲, v_۴) - S(v_۱, v_۴)T(v_۲, v_۳)$$
$$+ S(v_۲, v_۴)T(v_۱, v_۳) - S(v_۲, v_۳)T(v_۱, v_۴).$$

تعریف ۵۰.۱.۱. تانسور شاوتن[۵] :
تانسور شاوتن در هر نقطه یک تانسور نوع $\binom{۰}{۲}$ است که به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$S = \frac{۱}{n-۲}(Ric - \frac{R}{۲n-۱}g)$$

گزاره ۵۱.۱.۱. *تانسور انحنای وایل را می‌توان به شکل زیر بر حسب تانسور شاوتن نوشت:*

$$W = R - S \diamond g.$$

برهان. به کتاب [۴۹] مراجعه شود. □

گزاره ۵۲.۱.۱. *روابط مولفه‌های تانسور انحنای وایل در مختصات موضعی:*

الف) مولفه‌های تانسور انحنای وایل بر حسب مولفه‌های تانسور انحنای ریچی:

$$W_{ijkl} = R_{ijkl} + \frac{۱}{n-۲}(-R_{ik}g_{jl} + R_{il}g_{jk} + R_{jk}g_{il} - R_{jl}g_{ik}) - \frac{R}{(n-۱)(n-۲)}(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}),$$

ب) مولفه‌های تانسور انحنای وایل بر حسب مولفه‌های تانسور شاوتن:

$$W_{ijkl} = R_{ijkl} - g_{ik}S_{jl} + g_{jk}S_{il} + g_{il}S_{jk} - g_{jl}S_{ik},$$

ج) تقارن‌ها و پادتقارن‌های تانسور انحنای وایل:

$$W_{jikl} = -R_{ijkl},$$
$$W_{ijlk} = -R_{ijkl},$$
$$W_{klij} = R_{ijkl}.$$

برهان. به کتاب [۴۹] مراجعه شود. □

[۵] Jan Arnoldus Schouten ریاضی دان آلمانی ۱۹۷۱ـ۱۸۸۳

قضیه ۵۳.۱.۱. *خاصیت هم‌دیس بودن تانسور انحنای وایل:*
تانسور انحنای وایل تحت تبدیلات هم‌دیس پایا است. یعنی اگر $g' = fg$، برای تابع مثبت f، در این صورت $W' = W$. به همین خاطر در برخی از مراجع از تانسور انحنای وایل تحت عنوان تانسور هم‌دیس یاد می‌کنند.

برهان. به کتاب [۴۹] مراجعه شود. □

گزاره ۵۴.۱.۱. *صفر بودن تانسور انحنای وایل، شرط لازم است برای این‌که، یک منیفلد ریمانی به طور هم‌دیس تخت باشد. برای بعد بیش‌تر از سه، صفر بودن تانسور انحنای وایل شرط کافی است. در بعد دو، هر رویه ریمانی هموار به طور هم‌دیس تخت است. در بعد سه شرط کافی صفر بودن تانسور کاتن[۶] است.*

برهان. به کتاب [۴۹] مراجعه شود. □

گزاره ۵۵.۱.۱. *هم‌ساز بودن تانسور انحنای وایل، یعنی $div(W) = ۰$، معادلا تانسور کاتن صفر است. این نتیجه می‌دهد تانسور شاوتن کودازی است، به عبارت دیگر برای هر سه میدان برداری X، Y و Z داریم:*

$$(\nabla_X S)(Y, Z) = (\nabla_Y S)(X, Z).$$

برهان. به کتاب [۴۹] مراجعه شود. □

۳.۱.۱ توابع هم‌ساز و خواص آن‌ها

تعریف ۵۶.۱.۱. تابع هموار $u : M \longrightarrow \mathbb{R}$ را هم‌ساز زبرین[۷]، هم‌ساز[۸] یا هم‌ساز زیرین[۹] گوییم، هرگاه به ترتیب $\triangle u \leq ۰$، $\triangle u = ۰$ یا $\triangle u \geq ۰$ باشد.

گزاره ۵۷.۱.۱. *اتحاد بوچنر[۱۰] :*

$$\Delta |\nabla u|^۲ = ۲|Hess(u)|^۲ + ۲\langle \nabla u, \nabla u\rangle + ۲Ric(\nabla u, \nabla u).$$

برهان. رجوع شود به کتاب [۲۰]. □

قضیه ۵۸.۱.۱. *هاف[۱۱]: هر تابع هم‌ساز زیرین روی یک منیفلد ریمانی هم‌بند، فشرده، جهت‌پذیر و بدون لبه، تابعی ثابت است.*

---

[۶] Cotton tensor
[۷] *Superharmonic*
[۸] *harmonic*
[۹] *Subharmonic*
[۱۰] Salomon Bochner ریاضی‌دان آمریکایی اتریشی تبار۱۸۹۹ـ۱۹۸۲
[۱۱] Heinz Hopf ریاضی دان آلمانی۱۸۹۴ـ۱۹۷۱

برهان. رجوع شود به کتاب [۴]. □

تعریف ۵۹.۱.۱. انرژی کل دیریکله تابع هموار $u : M \longrightarrow \mathbb{R}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$E = \int_M |\nabla u|^2$$

۴.۱.۱ توابع fـ همساز و منیفلدهای وزن‌دار

تعریف ۶۰.۱.۱. منیفلد وزن‌دار: فرض کنید (M, g) یک منیفلد ریمانی باشد و f یک تابع هموار روی M، فضای اندازه $(M, g, e^{-f}.dv)$ را یک منیفلد وزن‌دار می‌گوییم.

تعریف ۶۱.۱.۱. fـ حجم: برای منیفلد ریمانی (M, g)، حجم وزن‌دار آن را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$Vol_f(M) := \int_M e^{-f} dv$$

تعریف ۶۲.۱.۱. fـ لاپلاسین:

$$\Delta_f : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$$
$$u \longmapsto \Delta_f u = \Delta u - \langle \nabla f, \nabla u \rangle$$

تعریف ۶۳.۱.۱. fـ هم‌دیفرانسیل:

$$\delta_f : \Omega^1(M) \longrightarrow C^\infty(M)$$
$$\omega \longmapsto \delta_f \omega = \delta\omega + \langle df, \omega \rangle$$

تعریف ۶۴.۱.۱. تابع هموار u روی M را $f-$همساز گوییم هرگاه $\Delta_f u = 0$ و ۱ـ فرم ω را $f-$همساز گوییم هرگاه بسته باشد($d\omega = 0$) و $\delta_f \omega = 0$.

گزاره ۶۵.۱.۱. $\Delta_f u$ *یک عملگر خودالحاق روی* $L^2(M, e^{-f}.dv)$ *است* .

تعریف ۶۶.۱.۱. انرژی وزن‌دار: انرژی کل وزن‌دار دیریکله تابع هموار $u : M \longrightarrow \mathbb{R}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$E_f = \int_M |\nabla u|^2 .e^{-f}.$$

تعریف ۶۷.۱.۱. انحنای بکری[۱۲] ـ ایمری[۱۳]

$$Ric_f := Ric + Hess(f).$$

[۱۲] Bakry
[۱۳] Emery

گزاره ۶۸.۱.۱. *اتحاد بوچنر وزن دار:*

$$\Delta_f|\nabla u|^{2} = 2|Hess(u)|^{2} + 2\left\langle \nabla u, \nabla\Delta_f u\right\rangle + 2Ric_f(\nabla u, \nabla u).$$

تعریف ۶۹.۱.۱. (انحنای میانگین وزن دار)

$$m_f := m - \left\langle \nabla f, \nabla r\right\rangle.$$

۲.۱ منیفلدهای کهلری

۱.۲.۱ مختلط سازی

تعریف ۱.۲.۱. فضای برداری تقریبا مختلط[14]: فرض کنید V یک فضای برداری حقیقی n بعدی و $J : V \longrightarrow V$ یک نگاشت $\mathbb{R}$ـ‌خطی باشد که $J^{2} = -id_V$. در این صورت زوج (V, J) را که با جمع اعضای V و ضرب اسکالر زیر یک فضای برداری مختلط n بعدی می‌شود را یک فضای برداری تقریبا مختلط می‌نامیم.

$$(a + \sqrt{-1}b).v := av + bJ(v)$$

تذکر ۲.۲.۱. *فرض‌کنید $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ یک پایه برای V باشد، در این‌صورت*

$$\mathcal{B}_J = \{e_1, e_2, ..., e_n, J(e_1), J(e_2), ..., J(e_n)\}$$

یک پایه برای (V, J) روی $\mathbb{R}$ است. در نتیجه بعد (V, J) به عنوان یک فضای برداری حقیقی دو برابر بعد V است.

تذکر ۳.۲.۱. *برای هر فضای برداری مختلط به طور طبیعی یک ساختار فضای برداری تقریبا مختلط وجود دارد.*

تعریف ۴.۲.۱. دوگان یک فضای برداری تقریبا مختلط: فرض کنید (V, J) یک فضای برداری تقریبا مختلط باشد . دوگان (V, J) را با (V^*, J^*) نشان می‌دهیم که در آن V^* دوگان V است و J^* ترانهاده نگاشت J است.

تعریف ۵.۲.۱. مختلط‌سازی یک فضای برداری تقریبا مختلط: فرض کنید (V, J) یک فضای برداری تقریبا مختلط باشد که به عنوان یک فضای حقیقی $2n$ بعدی است. منظور از مختلط سازی (V, J)، زوج

[14] almost complex vector space

$(V_{\mathbb{C}}, J_{\mathbb{C}})$ می‌باشد، که در آن $V_{\mathbb{C}} = V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ مجهز به جمع معمولی و ضرب اسکالر زیر است.

$$\begin{aligned}(a+\sqrt{-۱}b).(v\otimes\lambda) &= v\otimes(a+\sqrt{-۱}b)\lambda = (v\otimes a\lambda)+(v\otimes\sqrt{-۱}b\lambda)\\ &= av\otimes\lambda + bv\otimes\sqrt{-۱}\lambda\end{aligned}$$

و نگاشت $\mathbb{C}$ـ خطی $J_{\mathbb{C}}$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$J_{\mathbb{C}}(v\otimes\lambda) := J(v)\otimes\lambda$$

$(V_{\mathbb{C}}, J_{\mathbb{C}})$ به عنوان یک فضای برداری مختلط دارای بعد $۲n$ است.

چون $J_{\mathbb{C}}^{۲} = -id_{V_{\mathbb{C}}}$ بنابراین $J_{\mathbb{C}}$ دارای دو مقدار ویژه $\pm\sqrt{-۱}$ است. زیرفضای ویژه وابسته به $\sqrt{-۱}$ را با $V^{۱,۰}$ و زیر فضای ویژه وابسته به $-\sqrt{-۱}$ را با $V^{۰,۱}$ نشان می‌دهیم.

$$V^{۱,۰} = \{z\in V_{\mathbb{C}} : J_{\mathbb{C}}(z) = \sqrt{-۱}z\} = \{\frac{۱}{۲}(X-\sqrt{-۱}J(X)) : X\in V\}$$

$$V^{۰,۱} = \{z\in V_{\mathbb{C}} : J_{\mathbb{C}}(z) = -\sqrt{-۱}z\} = \{\frac{۱}{۲}(X+\sqrt{-۱}J(X)) : X\in V\}$$

همین‌طور $J_{\mathbb{C}}^{*}$ دارای دو مقدار ویژه $\pm\sqrt{-۱}$ است. زیرفضای ویژه وابسته به $\sqrt{-۱}$ را با $V_{۱,۰}$ و زیر فضای ویژه وابسته به $-\sqrt{-۱}$ را با $V_{۰,۱}$ نشان می‌دهیم.

$$V_{۱,۰} = \{S\in V_{\mathbb{C}}^{*} : J_{\mathbb{C}}^{*}(S) = \sqrt{-۱}S\} = \{T+\sqrt{-۱}J^{*}(T) : T\in V^{*}\}$$

$$V_{۰,۱} = \{S\in V_{\mathbb{C}}^{*} : J_{\mathbb{C}}^{*}(z) = -\sqrt{-۱}S\} = \{T-\sqrt{-۱}J^{*}(T) : T\in V^{*}\}$$

تذکر ۶.۲.۱. *در حالت $V = T_p\mathbb{R}^n$، پایه V را با $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}_{i=۱}^{n}$، پایه (V,J) را با $\{\frac{\partial}{\partial x^i}, J(\frac{\partial}{\partial x^i}) = \frac{\partial}{\partial y^i}\}_{i=۱}^{n}$ نشان می‌دهیم و برای $V^{۱,۰}$، $V^{۰,۱}$، $V_{۱,۰}$ و $V_{۰,۱}$ داریم:*

$$V^{۱,۰} = \langle\frac{۱}{۲}(\frac{\partial}{\partial x^i}-\sqrt{-۱}J(\frac{\partial}{\partial x^i}))\rangle_{i=۱}^{n} = \langle\frac{۱}{۲}(\frac{\partial}{\partial x^i}-\sqrt{-۱}\frac{\partial}{\partial y^i})\rangle_{i=۱}^{n} = \langle\frac{\partial}{\partial z^{\alpha}}\rangle_{\alpha=۱}^{n}$$

$$V^{۰,۱} = \langle\frac{۱}{۲}(\frac{\partial}{\partial x^i}+\sqrt{-۱}J(\frac{\partial}{\partial x^i}))\rangle_{i=۱}^{n} = \langle\frac{۱}{۲}(\frac{\partial}{\partial x^i}+\sqrt{-۱}\frac{\partial}{\partial y^i})\rangle_{i=۱}^{n} = \langle\frac{\partial}{\partial z^{\bar\alpha}}\rangle_{\bar\alpha=۱}^{n}$$

$$V_{۱,۰} = \langle dx_i+\sqrt{-۱}J^{*}(dx^i)\rangle_{i=۱}^{n} = \langle dx_i+\sqrt{-۱}dy^i\rangle_{i=۱}^{n} = \langle dz^{\alpha}\rangle_{\alpha=۱}^{n}$$

$$V_{۰,۱} = \langle dx_i-\sqrt{-۱}J^{*}(dx^i)\rangle_{i=۱}^{n} = \langle dx_i-\sqrt{-۱}dy^i\rangle_{i=۱}^{n} = \langle dz^{\bar\alpha}\rangle_{\bar\alpha=۱}^{n}$$

بنابراین:

$$dz^{\alpha}(\frac{\partial}{\partial z^{\beta}}) = dz^{\bar\alpha}(\frac{\partial}{\partial z^{\bar\beta}}) = \delta_{\beta}^{\alpha}$$

$$dz^{\bar\alpha}(\frac{\partial}{\partial z^{\beta}}) = dz^{\alpha}(\frac{\partial}{\partial z^{\bar\beta}}) = ۰$$

۲.۲.۱ ساختار تقریبا مختلط و ساختار مختلط

تعریف ۷.۲.۱. دستگاه مختصات تمام‌ریخت[۱۵]: فرض کنید $\mathcal{M}$ یک منیفلد دیفرانسیل‌پذیر حقیقی $2n$ـ بعدی باشد، منظور از یک دستگاه مختصات تمام‌ریخت روی $\mathcal{M}$ خانواده $\{z_i : U_i \longrightarrow \mathbb{C}^n\}$ است، که U_i ها پوشش باز $\mathcal{M}$ هستند و z_i ها، هم‌سان‌ریختی‌هایی هستند که نگاشت‌های

$$z_i o z_j^{-1} : z_j(U_i \cap U_j) \longrightarrow z_i(U_i \cap U_j)$$

تمام‌ریختی هستند، برای $U_i \cap U_j \neq \varnothing$.

تعریف ۸.۲.۱. دو دستگاه مختصات تمام‌ریخت $\{U_i, z_i\}$ و $\{V_j, w_j\}$ را هم‌ارز گوییم هرگاه نگاشت

$$w_j o z_i^{-1} : z_i(U_i \cap V_j) \longrightarrow w_j(U_i \cap V_j)$$

برای $U_i \cap V_j \neq \varnothing$ تمام‌ریختی دوگانه[۱۶] باشد.

تعریف ۹.۲.۱. ساختار مختلط: فرض کنید $\mathcal{M}$ یک منیفلد دیفرانسیل‌پذیر باشد، کلاس‌های هم‌ارزی دستگاه‌های مختصات تمام‌ریخت $\mathcal{M}$ را یک ساختار مختلط روی $\mathcal{M}$ گوییم.

تعریف ۱۰.۲.۱. منیفلد مختلط: منظور از یک منیفلد مختلط یک منیفلد دیفرانسیل‌پذیر حقیقی است هم‌راه با یک ساختار مختلط.

تعریف ۱۱.۲.۱. ساختار تقریبا مختلط: فرض کنید $\mathcal{M}$ یک منیفلد دیفرانسیل‌پذیر زوج بعدی باشد، خودریختی $J : T\mathcal{M} \longrightarrow T\mathcal{M}$ یک ساختار تقریبا مختلط نامیده می‌شود، هرگاه $J^2 = -id_{T\mathcal{M}}$.

تعریف ۱۲.۲.۱. یک ساختار تقریبا مختلط را انتگرال‌پذیر گوییم هرگاه یک ساختار مختلط موجود باشد که آن ساختار تقریبا مختلط را القا کند.

قضیه ۱۳.۲.۱. *نیولندرـ نایرنبرگ[۱۷]: شرط لازم و کافی برای انتگرال‌پذیر بودن یک ساختار تقریبا مختلط، صفر بودن تانسور ناینهویس[۱۸] است، برای هر $X, Y \in T\mathcal{M}$ تانسور ناینهویس به صورت زیر تعریف می‌شود:*

$$N_J(X,Y) = [JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY] - [X, Y]$$

برهان. رجوع شود به کتاب [۳۱]. $\square$

[۱۵] holomorphic
[۱۶] biholomorph
[۱۷] Newlander-Nirenberg
[۱۸] Nijenhuis

تعریف ۱.۲.۱۴. متریک هرمیتی: فرض کنید $(\mathcal{M}, g, J)$ یک منیفلد ریمانی همراه با ساختار تقریبا مختلط J باشد، متریک ریمانی g هرمیتی نامیده می‌شود، هرگاه Jـ ناوردا باشد، یعنی: $g(JX, JY) = g(X, Y)$.

تعریف ۱.۲.۱۵. متریک کهلری: فرض کنید $(\mathcal{M}, g, J)$ یک منیفلد ریمانی همراه با ساختار تقریبا مختلط J باشد که g نسبت به این ساختار هرمیتی است، این متریک کهلری نامیده می‌شود، هرگاه J موازی باشد، یعنی: $\nabla J = 0$ یا معادلا، $\nabla_X(JY) = J\nabla_X(Y)$. یک منیفلد ریمانی همراه با یک ساختار تقریبا مختلط و متریک کهلری، یک منیفلد کهلری نامیده می‌شود.

۱.۲.۳ آنالیز برداری روی منیفلدهای کهلری

کلاف مماس را در هر نقطه به صورت $T_{\mathbb{C}}\mathcal{M} := \sqcup_{p\in\mathcal{M}}(T_p\mathcal{M})_{\mathbb{C}} = \sqcup_{p\in\mathcal{M}}(T_p\mathcal{M} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$ مختلط‌سازی می‌کنیم، پایه $T^{1,0}\mathcal{M}$ را با $\{\frac{\partial}{\partial z^\alpha}\}_{\alpha=1}^n$ و پایه $T^{0,1}\mathcal{M}$ را با $\{\frac{\partial}{\partial z^{\overline{\alpha}}}\}_{\alpha=1}^n$ نشان می‌دهیم. به همین شکل دوگان کلاف مماس را در هر نقطه به صورت $T^*_{\mathbb{C}}\mathcal{M} := \sqcup_{p\in\mathcal{M}}(T^*_p\mathcal{M})_{\mathbb{C}} = \sqcup_{p\in\mathcal{M}}(T^*_p\mathcal{M} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$ مختلط‌سازی می‌کنیم، پایه $\Lambda^{1,0}\mathcal{M} = T_{1,0}\mathcal{M}$ را با $\{dz^\alpha\}_{\alpha=1}^n$ و پایه $\Lambda^{0,1}\mathcal{M} = T_{0,1}\mathcal{M}$ را با $\{dz^{\overline{\alpha}}\}_{\alpha=1}^n$ نشان می‌دهیم. حال می‌توانیم تانسورها و فرم‌ها را تعریف کنیم، اما قبل از آن قرارداد جمع‌بندی اینشتین جهت سهولت نمادگذاری را تعمیم می‌دهیم:

تذکر ۱.۲.۱۶. *نمادگذاری اینشتین تعمیم یافته*
در این نوع نمادگذاری برطبق قرارداد یک جفت اندیس که یکی معمولی و یکی دارای بار است جمع می‌شوند، یعنی $\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} g^{\alpha\overline{\beta}}a_{\alpha\overline{\beta}}$ *را با* $a_{\alpha\overline{\alpha}}$ *نشان می‌دهیم.*

تعریف ۱.۲.۱۷. (p,q)ـ تانسور هم‌ورد:
منظور از یک تانسور هم‌ورد نوع (p,q) یک مقطع $\otimes^{p,q}\mathcal{M} = (\otimes^p\Lambda^{1,0}\mathcal{M}) \otimes (\otimes^q\Lambda^{0,1}\mathcal{M})$ می‌باشد.

تعریف ۱.۲.۱۸. (p,q)ـ فرم دیفرانسیل:
منظور از یک (p,q)ـ فرم دیفرانسیل یک مقطع $\Lambda^{p,q}\mathcal{M} = (\Lambda^pT^{1,0}\mathcal{M}) \wedge (\Lambda^qT^{0,1}\mathcal{M})$ می‌باشد.

تعریف ۱.۲.۱۹. مشتق خارجی: مانند حالت حقیقی، مشتق خارجی به صورت نگاشت $d : \Lambda^{p,q}\mathcal{M} \longrightarrow \Lambda^{p+1,q}\mathcal{M} \oplus \Lambda^{p,q+1}\mathcal{M}$ تعریف می‌شود، بر اساس جمع مستقیم $\Lambda^{p+1,q}\mathcal{M} \oplus \Lambda^{p,q+1}\mathcal{M}$، نگاشت d نیز به صورت مجموع دو نگاشت $\partial : \Lambda^{p,q}\mathcal{M} \longrightarrow \Lambda^{p+1,q}\mathcal{M}$ و $\overline{\partial} : \Lambda^{p,q}\mathcal{M} \longrightarrow \Lambda^{p,q+1}\mathcal{M}$ تجزیه می‌شود. به کمک این تجزیه در حالت مختلط دو هم‌بافت و دو نوع رده همانستگی به عنوان گسترش همانستگی دورام حقیقی خواهیم داشت که بررسی آن از حوصله این پایان‌نامه خارج است.

تعریف ۲۰.۲.۱. مختلط‌سازی متریک ریمانی: فرض کنید $(\mathcal{M}, g, J)$ یک منیفلد کهلری باشد، مولفه‌های (۱و۱)ـ فرم $g_{\mathbb{C}}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$g_{\alpha\beta} = \langle \frac{\partial}{\partial z^{\alpha}}, \frac{\partial}{\partial z^{\beta}} \rangle = \langle \frac{\partial}{\partial z^{\bar{\alpha}}}, \frac{\partial}{\partial z^{\bar{\beta}}} \rangle = g_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = ۰$$
$$g_{\alpha\bar{\beta}} = \langle \frac{\partial}{\partial z^{\alpha}}, \frac{\partial}{\partial z^{\bar{\beta}}} \rangle = \langle \frac{\partial}{\partial z^{\bar{\beta}}}, \frac{\partial}{\partial z^{\alpha}} \rangle = g_{\bar{\beta}\alpha}$$

تعریف می‌کنیم:

$$dz^{\alpha} \odot dz^{\bar{\beta}} := dz^{\alpha} \otimes dz^{\bar{\beta}} + dz^{\bar{\beta}} \otimes dz^{\alpha}$$

بنابراین (۱و۱)ـ فرم g مختلط به صورت $g = g_{\alpha\bar{\beta}} dz^{\alpha} \odot dz^{\bar{\beta}}$ در می‌آید، که $(g_{\alpha\bar{\beta}})$ ماتریس اساسی نامیده می‌شود.

تعریف ۲۱.۲.۱. ۲ـ فرم کهلر: فرض کنید $(\mathcal{M}, g, J)$ یک منیفلد ریمانی همراه با ساختار تقریبا مختلط J باشد که g نسبت به این ساختار هرمیتی است، ۲ـ فرم کهلر نسبت به g به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\omega(X, Y) := g(JX, Y)$$

لم ۲۲.۲.۱. *اگر متریک g کهلری باشد در این صورت ۲ـ فرم ω بسته است، به عبارت دیگر موازی است.*

برهان. رجوع شود به کتاب [۱۹]. □

نتیجه ۲۳.۲.۱. *فرض کنید $(\mathcal{M}, g, J)$ یک منیفلد کهلری باشد، مولفه‌های ۲ـ فرم ω در مختصات موضعی به صورت زیر است:*

$$\omega = \sqrt{-۱} \sum_{\alpha,\beta=۱}^{n} g_{\alpha\bar{\beta}} dz^{\alpha} \wedge dz^{\bar{\beta}}$$

برهان. رجوع شود به کتاب [۱۹]. □

تعریف ۲۴.۲.۱. اتحاد کهلر

$$\frac{\partial}{\partial z^{\gamma}} g_{\alpha\bar{\beta}} = \frac{\partial}{\partial z^{\alpha}} g_{\gamma\bar{\beta}}$$

تعریف ۲۵.۲.۱. مختلط‌سازی التصاق

$$(\nabla_{\mathbb{C}})_{\frac{\partial}{\partial z^{\alpha}}} (\frac{\partial}{\partial z^{\beta}}) = \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial z^{\gamma}} + \Gamma^{\bar{\gamma}}_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial z^{\bar{\gamma}}}$$

$$(\nabla_{\mathbb{C}})_{\frac{\partial}{\partial z^{\alpha}}} (\frac{\partial}{\partial z^{\bar{\beta}}}) = \Gamma^{\gamma}_{\alpha\bar{\beta}} \frac{\partial}{\partial z^{\gamma}} + \Gamma^{\bar{\gamma}}_{\alpha\bar{\beta}} \frac{\partial}{\partial z^{\bar{\gamma}}}$$

تعریف ۲۶.۲.۱. لاپلاسین: فرض کنید $(\mathcal{M}, g, J)$ یک منیفلد کهلری باشد، عمل‌گر لاپلاسین $\Delta : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$ را در مختصات تمام‌ریخت به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\Delta = \frac{1}{2}(\nabla_\alpha \nabla_{\overline{\alpha}} + \nabla_{\overline{\alpha}} \nabla_\alpha)$$

تعریف ۲۷.۲.۱. تابع هم‌ساز و هم‌ساز چندگانه: فرض کنید $(\mathcal{M}, g, J)$ یک منیفلد کهلری باشد، تابع هموار $u : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ را هم‌ساز گوییم هرگاه $u_{\alpha\overline{\alpha}} = 0$، این تابع را هم‌ساز چندگانه گوییم هرگاه $u_{\alpha\overline{\beta}} = 0$.

گزاره ۲۸.۲.۱. *برای هر دو تابع هموار u و v روی منیفلد کهلری $(\mathcal{M}, g, J)$ در مختصات موضعی داریم:*

$$\langle \nabla u, \nabla v \rangle = \frac{1}{2}(u_\alpha v_{\bar{\alpha}} + u_{\bar{\alpha}} v_\alpha)$$

برهان. رجوع شود به کتاب [۱۹]. $\square$

فصل ۲

سالیتون‌های ریچی گرادیان ریمانی

مسایلی که ارزش حل کردن دارند با مقاومت در برابر ما ارزش خود را نشان می‌دهند. (اردوش)

تعمیم‌های بدیهی را به عهده خواننده واگذار می‌کنیم. (هرشتاین)

۱.۲ تعریف شار ریچی و مفهوم تحول متریک

همان‌طور که در مقدمه اشاره شد، شار ریچی اولین با توسط هامیلتون در ۱۹۸۲ معرفی شد و دارای کاربردهای اساسی در آنالیز هندسی می‌باشد. منظور از شار ریچی خانواده متریک‌های ریمانی وابسته به زمان $g(x,t)$ است، که در هر نقطه در معادله دیفرانسیل شار ریچی به شرح زیر صدق می‌کنند:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} g(x,t) = -۲\, Ric(x,t) \\ g(x,\circ) = g_\circ \end{cases} \tag{۱.۲}$$

به تعبیری معادله شار ریچی بیان سهموی معادله اینشتین در نسبیت عام است و این خود دلیلی بر اهمیت شار ریچی است. هامیلتون در [۲۶] برای اولین بار ثابت کرد:

روی هر رویه ریمانی بسته با شروع از هر متریک ریمانی، معادله شار ریچی برای $t \geq \circ$ دارای جواب است و این جواب وقتی $t \longrightarrow \infty$ به طور یک‌نواخت به متریکی هموار با انحنای ثابت میل می‌کند.

این مطلب قضیه‌ی یک‌نواخت سازی رویه‌ها را نتیجه می‌دهد، چرا که هر رویه ریمانی هموار دارای متریکی با انحنای ثابت است، بسته به علامت انحنای این متریک می‌توان رویه‌ها را به سه دسته کروی (انحنای مثبت)، تخت(انحنای صفر) و هذلولوی(انحنای منفی) تقسیم کرد.

مثال ۱.۱.۲. فرض‌کنید متریک اولیه اینشتنی باشد، یعنی $R_{ij} = \lambda g_{ij}$. برای λ ی ثابت، بسته به علامت λ ببینیم تحت شار ریچی چه تغییری [۱] روی متریک و انحنا ایجاد می‌شود. گیریم $g_{ij}(x,t) = \rho^{۲}(t) g_{ij}(x,\circ)$

[۱] در ادبیات شار ریچی از این تغییر تحت عنوان " تحول" یاد می‌شود.

با قرار دادن در معادله شار ریچی داریم:

$$\frac{\partial}{\partial t} g(x,t) = -۲Ric(x,\circ) \Longrightarrow$$
$$۲\rho(t)\rho'(t) = -۲\lambda g_{ij}(x,\circ) \Longrightarrow \frac{d\rho}{dt} = -\frac{\lambda}{\rho} \Longrightarrow \rho^۲(t) = ۱ - ۲\lambda t \qquad (۲.۲)$$

حالت اول: انحنا اولیه مثبت باشد:

وقتی $t \longrightarrow T = \frac{۱}{۲\lambda}$ متریک به صفر و در نتیجه فضا به یک نقطه با انحنای بی‌نهایت میل می‌کند.

حالت دوم: انحنا اولیه منفی باشد:

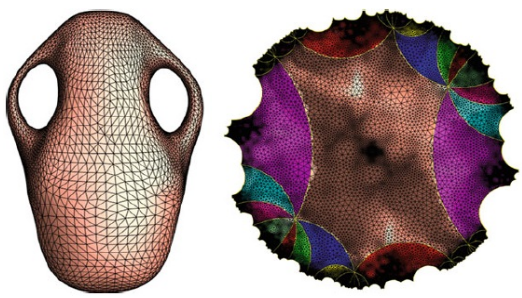
با میل دادن $t \longrightarrow \infty$ متریک بزرگ شده و در نتیجه انحنا به صفر میل می‌کند.

گزاره ۲.۱.۲. *تحول القا شده توسط شار ریچی روی انحنای اسکالر، انحنای ریچی و عنصر حجم به صورت زیر می‌باشد:*

$$\frac{\partial}{\partial t} R = \nabla R + ۲|Ric|^۲ \qquad (۳.۲)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} R_{ij} = \nabla R_{ij} + ۲g^{kp} g_{lq} R_{kijl} R_{pq} - ۲g^{pq} R_{ip} R_{qj} \qquad (۴.۲)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} d\mu = -R d\mu \qquad (۵.۲)$$



شکل ۱.۲: بررسی تحول یک رویه با شاخص اویلر بالا تحت شارریچی

اولین معادله تحول نشان می‌دهد انحنای اسکالر در معادله غیرخطی گرما صدق می‌کند، هم‌چنین بنابر آخرین معادله تحول، حجم منیفلد تحت شار ریچی ثابت نمی‌ماند، چراکه:

$$\frac{\partial}{\partial t} V = \frac{\partial}{\partial t} \int_M d\mu = \int_M \frac{\partial}{\partial t} d\mu = -\int_M R d\mu \qquad (۶.۲)$$

برای این که حجم ثابت بماند، شار ریچی نرمال شده را به صورت زیر تعریف می‌کنند:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} g(x,t) = -۲Ric(x,t) + \frac{۲r}{n} g(x,t) \\ g(x,\circ) = g_\circ \end{cases} \qquad (۷.۲)$$

که در آن r ، میانگین انحنای اسکالر یعنی $\frac{\int_M Rd\mu}{\int_M d\mu}$ است.
می‌توان ثابت کرد جواب‌های معادلات ۱.۲ و ۷.۲ در تناظر یک‌دیگر هستند.
هم‌چنین اگر g یک شار ریچی باشد و $\varphi : M \longrightarrow M$ یک وابرریختی در این صورت $\varphi^*(g)$ نیز یک شار ریچی است.
در فیزیک نظری شار ریچی کاربردهای مهمی در سیاه چاله‌ها [۴۴]، نظریه ریسمان [۲۸]، مکانیک کلاسیک و نظریه کوانتوم [۳۹]، [۳۸] دارند. در ریاضی شناسایی توپولوژی و هندسه سالیتون‌های ریچی و رده‌بندی آن‌ها مساله‌ی مورد علاقه بسیاری از هندسه‌دانان است. در ادامه به تعریف سالیتون‌های ریچی می‌پردازیم.

۲.۲ سالیتون‌های ریچی و سالیتون‌های ریچی گرادیان

تعریف ۱.۲.۲. سالیتون ریچی: فرض کنید $(\mathcal{M}, g)$ یک منیفلد ریمانی و X یک میدان برداری روی آن باشد. منظور از ساختار یک سالیتون ریچی سه‌تایی (M, g, X) است، به طوری که برای مقدار ثابت $\rho = \frac{\mu}{n}$ در معادله سالیتون صدق می‌کند.

$$Ric + \frac{1}{2}\mathcal{L}_X g = \rho g \qquad (۸.۲)$$

با یک تغییر مقیاس می‌توان فرض‌کرد $\rho \in \{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\}$ ، اگر $\rho = \frac{1}{2}$ سالیتون را منقبض شونده[۲]، اگر $\rho = 0$ سالیتون را ایستا[۳] و اگر $\rho = -\frac{1}{2}$ سالیتون را منبسط شونده[۴] می‌گوییم.

تعریف ۲.۲.۲. سالیتون ریچی گرادیان: اگر در سالیتون ریچی (M, g, X) میدان برداری X ، گرادیان تابع هموار $f : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ باشد، سالیتون را سالیتون ریچی گرادیان و تابع f را تابع پتانسیل می‌گویند.

گزاره ۳.۲.۲. *معادله سالیتون ریچی در حالت گرادیان به صورت زیر در می‌آید:*

$$Ric + Hess(f) = \rho g \qquad (۹.۲)$$

برهان. می‌دانیم $\mathcal{L}_X g(Y, Z) = g(\nabla_Y X, Z) + g(Y, \nabla_Z X)$ ، قرار دهید $X = \nabla f$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\nabla f} g(Y, Z) &= g(\nabla_Y \nabla f, Z) + g(Y, \nabla_Z \nabla f) \\
&= (\nabla_Y df)(Z) + (\nabla_Z df)(Y) \\
&= (\nabla^2 f)(Y, Z) + (\nabla^2 f)(Z, Y) \\
&= 2 Hess(f)(Y, Z)
\end{aligned}$$

[۲] Shrinking
[۳] Steady
[۴] Expanding

□

تعریف ۴.۲.۲. سالیتون ریچی گرادیان $(M, g, \nabla f)$ را فشرده گوییم هرگاه فضای توپولوژیک M فشرده باشد، این سالیتون را کامل گوییم، هرگاه منیفلد ریمانی (M, g) کامل باشد.

قضیه ۵.۲.۲. پرلمان (۲۰۰۳): *اگر سالیتون ریچی (M, g, X) فشرده باشد، آنگاه میدان برداری X به صورت مجموع گرادیان تابع هموار f و میدان برداری کیلینگی چون V است و در نتیجه سالیتون گرادیان است، چراکه:*

$$X = \nabla f + V \Rightarrow \mathcal{L}_X g = \mathcal{L}_{\nabla f} g + \mathcal{L}_V g = \mathcal{L}_{\nabla f} g$$

برهان. رجوع شود به قضیه ۱۰۳ در مقاله [۲۳] □

قضیه ۶.۲.۲. ژنگ[۵] (۲۰۰۹): *اگر سالیتون ریچی گرادیان $(M, g, \nabla f)$ کامل باشد، آنگاه میدان برداری ∇f نیز کامل است.*

برهان. رجوع شود به مقاله [۵۸]. □

۳.۲ مثال‌هایی از سالیتون‌های ریچی

مثال ۱.۳.۲. سالیتون اقلیدسی[۶]: فضای $\mathbb{R}^n$ با متریک اقلیدسی g و تابع پتانسیل $f = \frac{1}{2}\lambda|x|^2$ یک سالیتون ریچی گرادیان است. اگر $\lambda > 0$ منقبض شوند، اگر $\lambda = 0$ ایستا و اگر $\lambda < 0$ منبسط شونده است.

تذکر ۲.۳.۲. *مثال ۱.۳.۲ نشان می‌دهد تابع پتاسیل یک‌تا نیست. مثلا فضای $\mathbb{R}^n$ مجهز به متریک استاندارد اقلیدسی با $f = 0$ یک سالیتون ایستا و با $f = -\frac{1}{2}\lambda|x|^2$ یک سالیتون منبسط شونده است.*

مثال ۳.۳.۲. سالیتون برایان: اولین مثال سالیتون ریچی گرادیان غیر فشرده در ابعاد بالاتر توسط برایان مطرح شد. روی $\mathbb{R}^n$ وقتی $n \geq 3$، متریک ریمانی $dr^2 + a(r)^2 g_{\mathbb{S}^{n-1}}$ را قرار دهید. برای تابعی چون $a(r)$ که در بی‌نهایت از مرتبه $\sqrt{r}$ است.

مثال ۴.۳.۲. سالیتون ترکیبی: فرض کنید N یک منیفلد اینشتین k بعدی با انحنای اسکالر $R \neq 0$ باشد. منیفلد حاصل‌ضرب $\mathbb{R}^n \times N$ مجهز به متریک ریمانی مجموع $g_{\mathbb{R}^n} + g_N$ ، به ازای هر $\lambda \in \mathbb{R}$ و $v \in \mathbb{R}^n$ ، همراه با تابع پتانسیل زیر یک سالیتون ریچی گرادیان است. این سالیتون را سالیتون ترکیبی می‌نامند.

[۵] Zhang Zhu-Hong
[۶] حالت $\lambda = 2$ به سالیتون گاوسی معروف است.

$$
\begin{aligned}
f : \mathbb{R}^n \times N &\longrightarrow \mathbb{R} \\
(x,p) &\longmapsto \frac{R}{۲}\lambda |x|^{۲}_{\mathbb{R}^n} + \langle x, v\rangle_{\mathbb{R}^n} + \lambda
\end{aligned}
$$

۴.۲ اهمیت مطالعه سالیتون‌های ریچی

مطالعه سالیتون‌های ریچی گرادیان از چندین جهت حائز اهمیت است، اولا تعمیم طبیعی منیفلدهای اینشتین هستند، ثانیا جواب‌های خودمتشابه شار ریچی هستند و از طرفی نقاط بحرانی آنتروپی پرلمان می‌باشند.

۱.۴.۲ سالیتون‌های ریچی گرادیان به عنوان تعمیم منیفلدهای اینشتین

سالیتون‌های ریچی تعمیمی طبیعی از منیفلدهای اینشتین هستند، چرا که اگر X صفر باشد داریم:

$$Ric + ۰ = \rho g,$$

به عبارت دیگر هر منیفلد اینشتین یک سالیتون ریچی است. اما عکس این مطلب همواره برقرار نیست و هر سالیتون ریچی لزوما یک منیفلد اینشتین نیست. یک شاخص برای بررسی شباهت ساختار سالیتون‌های ریچی گرادیان به منیفلدهای اینشتین بررسی صلبیت سالیتون است که در ادامه تعریف می‌شود. از سوی دیگر سالیتون‌های ریچی گرادیان با تابع پتانسیل f نقشی شبیه منیفلدهای اینشتین با وزن f را بازی می‌کنند.

تعریف ۱.۴.۲. سالیتون ریچی گرادیان صلب:
سالیتون ریچی گرادیان $(M, g, \nabla f)$ را صلب گوییم هرگاه با خارج قسمتی از $N \times \mathbb{R}^k$ ایزومتریک باشد، به طوری که N یک منیفلد اینشتین و تابع پتانسیل قسمت اقلیدسی $f = \frac{\rho}{۲}|x|^۲$ است.

یک سالیتون ریچی گرادیان فشرده صلب است اگر و تنها اگر اینشتینی باشد. در مقاله [۲۴] برای سالیتون‌های ریچی گرادیان فشرده ثابت شده است که شرط معادل صلبیت هم‌ساز بودن تانسور انحنای وایل است. برای سالیتون‌های ریچی گرادیان کامل منقبض شونده نیز تحت دو فرض رشد حداکثر نمایی تانسور انحنای ریمان و کرانداری از پایین تانسور انحنای ریچی ثابت شده است صلبیت معادل هم‌ساز بودن تانسور انحنای وایل است، اما پس از اثبات قضیه ۴.۷.۲ برای سالیتون‌های ریچی گرادیان کامل منقبض شونده، دو مذکور نیز قابل حذف است.

۲.۴.۲ سالیتون ریچی به عنوان جواب‌های خود متشابه معادله شارریچی

تعریف ۲.۴.۲. جواب خود متشابه جواب $g(t)$ برای معادله شار ریچی را خود متشابه گوییم، هرگاه تابع مثبت $\sigma(t)$ و خانواده وابرریختی‌های $\{\varphi_t : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}\}$ موجود باشند به طوری که:

$$g(t) = \sigma(t).\phi_t^*(g_\circ)$$

گزاره ۳.۴.۲. *جواب‌های خود متشابه شار ریچی در تناظر سالیتون‌های ریچی هستند.*

برهان. ابتدا فرض‌کنید $g_\circ$ در معادله سالیتون صدق می‌کند، قرار دهید $\sigma(t) = (۱ - ۲\rho t)$، $Y_t = \frac{X}{\sigma(t)}$ و ϕ_t^* گروه موضعی تک پارامتری وابسته به باشد. نشان می‌دهیم $g(t) = \sigma(t).\phi_t^*(g_\circ)$ شار ریچی می‌باشد. با محاسبه سرراست و استفاده از فرمول ۲۸.۱.۱ و جابه‌جایی تانسور ریچی با نگاشت ϕ_t^* داریم:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}g(t) = \frac{\partial}{\partial t}(\sigma(t).\varphi_t^*(g_\circ)) &= \sigma'(t).\varphi_t^*(g_\circ) + \sigma(t).\varphi_t^*(\mathcal{L}_{Yt}(g_\circ)) \\ &= -۲\rho\phi_t^*(g_\circ) + \sigma(t)\phi_t^*(\frac{۱}{\sigma(t)}\mathcal{L}_X(g_\circ)) \\ &= \phi_t^*(-۲\rho g_\circ + \mathcal{L}_X(g_\circ)) \\ &= \phi_t^*(-۲Ric(g_\circ)) \\ &= -۲Ric(\varphi_t^*(g_\circ)) \\ &= -۲Ric(g(t))\end{aligned}$$

حال فرض‌کنید $g(t)$ شار ریچی باشد، نشان می‌دهیم $g_\circ$ در معادله سالیتون صدق می‌کند. بدون کاستن از کلیت مساله فرض می‌کنیم $\sigma(\circ) = ۱$ و $\varphi_\circ = id$. گیریم Y_t خانواده میدان‌های برداری مولد وابریختی‌های ϕ_t باشد. قراردهید $X = Y_\circ$ و $\rho = \frac{۱}{۲}\sigma'(\circ)$. واضح است که $(M, g_\circ, X)$ یک سالیتون ریچی است. چراکه:

$$\begin{aligned}-۲Ric(g_\circ) = \frac{\partial}{\partial t}g(t)|_{t=\circ} &= \sigma'(\circ)g_\circ + \mathcal{L}_{Y\circ}(g_\circ) \\ &= ۲\rho g_\circ + \mathcal{L}_X(g_\circ).\end{aligned}$$

مثال ۴.۴.۲. سالیتون سیگار هامیلتون[۷]: هامیلتون در سال ۱۹۸۲ اولین مثال از یک سالیتون ریچی گرادیان ایستا را پیدا کرد که غیرفشرده و کامل بود. خانواده متریک‌های ریمانی وابسته به زمان با ضابطه $g(t) = \frac{۱}{e^{۴t} + x^۲ + y^۲}(dx^۲ + dy^۲)$ یک شار ریچی روی فضای $\mathbb{R}^۲$ می‌باشد. به علاوه، $(\mathbb{R}^۲, g(\circ) = \frac{۱}{۱ + x^۲ + y^۲}(dx^۲ + dy^۲), f = -log(۱ + x^۲ + y^۲))$ یک سالیتون ریچی گرادیان ایستا است. تحول این سالیتون تحت شار ریچی در شکل ۲.۲ ترسیم شده است.

[۷] Hamilton's Cigar Soliton

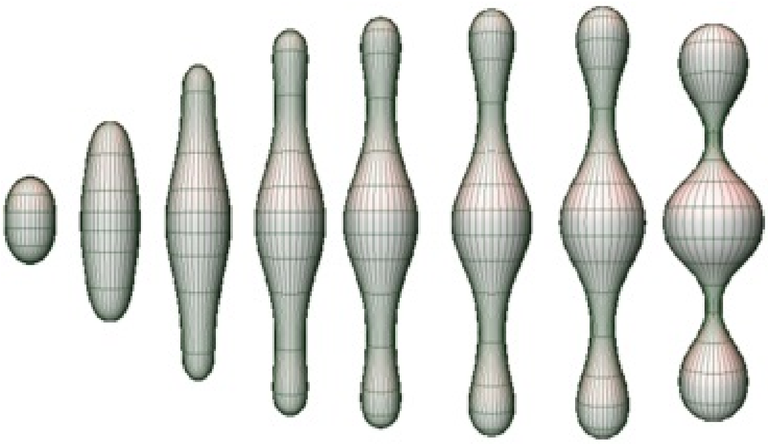
نشان می‌دهیم $g(t)$ یک شار ریچی روی است. علائم کریستوفل این سالیتون به صورت می‌باشند:

$$\Gamma^x_{xx} = \Gamma^y_{xy} = \Gamma^y_{yx} = -\frac{x}{e^{۴t} + x^۲ + y^۲}$$
$$\Gamma^y_{yy} = \Gamma^x_{xy} = \Gamma^x_{yx} = -\frac{y}{e^{۴t} + x^۲ + y^۲}$$
$$\Gamma^x_{yy} = \frac{x}{e^{۴t} + x^۲ + y^۲}$$
$$\Gamma^y_{xx} = \frac{y}{e^{۴t} + x^۲ + y^۲}$$

با محاسبات مقدماتی تانسور انحنای ریچی به صورت $Ric(t) = \frac{۲e^{۴t}}{e^{۴t} + x^۲ + y^۲}(dx^۲ + dy^۲)$ به دست می‌آید. حال داریم:

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t) = -\frac{۴e^{۴t}}{e^{۴t} + x^۲ + y^۲}(dx^۲ + dy^۲) = -۲\,Ric$$

پس $g(t)$ یک شار ریچی است. به علاوه خانواده وابرریختی‌های $\varphi_t : \mathbb{R}^۲ \longrightarrow \mathbb{R}^۲$ را با ضابطه $\varphi_t(x, y) = (e^{-۲t}x, e^{-۲t}y)$ در نظر بگیرید. $g(t) = \varphi^*_t(g(\circ))$ است. پس یک جواب خودمتشابه داریم. تابع پتانسیل آن $f = -log(۱ + x^۲ + y^۲)$ به دست می‌آید.



شکل ۲.۲: تحول سالیتون سیگار هامیلتون تحت شارریچی

سالیتون هامیلتون دارای انحنای گاوسی مثبت است. حجم این سالیتون به صورت خطی رشد می‌کند و این سالیتون در بی‌نهایت با استوانه دارای محیط متناهی مجانب است.

□

۳.۴.۲ سالیتون ریچی به عنوان نقاط بحرانی آنتروپی‌های پرلمان

تعریف ۵.۴.۲. $\mathcal{F}$ ـ انرژی و λ ـ تابعک پرلمان:

$$\mathcal{F} : \mathfrak{Met} \times C^\infty(M) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\mathcal{F}(g,f) := \int_M (R + |\nabla f|^۲).e^{-f}.dv$$
$$\lambda(g) := \inf\{\mathcal{F}(g,f) | f^\infty(M), \int_M e^{-f}.dv = ۱\}$$

گزاره ۶.۴.۲. *خواص $\mathcal{F}$ ـ انرژی پرلمان:*

الف) ناوردایی تحت وابرریختی‌ها: برای هر وابرریختی $\varphi : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$ داریم:

$$\mathcal{F}(\varphi^* g, f o \varphi) = \mathcal{F}(g,f)$$

ب) تغییر مقیاس: برای هر $c > ۰$ و $b \in \mathbb{R}$ داریم:

$$\mathcal{F}(c^۲ g, f + b) = c^{n-۲}.e^{-b}\mathcal{F}(g,f)$$

برهان. به کتاب [۱۹] مراجعه کنید. □

گزاره ۷.۴.۲. *یک‌نوایی $\mathcal{F}$ ـ انرژی پرلمان: اگر f و g در معادلات تحولی زیر صدق کنند، آنگاه مشتق $\mathcal{F}$ ـ انرژی پرلمان نسبت به زمان به صورتی است که در ادامه می‌آید و لذا $\mathcal{F}$ ـ انرژی غیر نزولی است.*

$$\frac{\partial}{\partial t} g_{ij} = -۲ R_{ij}$$
$$\frac{\partial}{\partial t} f = -\Delta f + |\nabla f|^۲ - R$$
$$\frac{d}{dt}\mathcal{F}(g,f) = ۲ \int_M \tau |Ric + \nabla^۲ f|^۲.e^{-f}.dv > ۰$$

برهان. به کتاب [۱۹] مراجعه کنید. □

آنتروپی، از مفهوم کلاسیک تا آنتروپی پرلمان

واژه آنتروپی اولین بار توسط ر.کلاوزیوس[۸]در سال ۱۸۶۵ هنگامی که روی چرخه کارنو در ترمودینامیک مطالعه می‌کرد، معرفی گردید. او نشان داد در یک فرایند برگشت‌پذیر $\frac{\delta Q}{T}$ یک فرم دقیق است،که δQ تغییر

[۸] Rudolf Clausius ۱۸۲۲–۱۸۸۸، فیزیک دان و ریاضی دان آلمانی که به علت کشف قانون دوم ترمودینامیک مشهور است. او را یکی از سه دانشمند واضع ترمودینامیک می‌دانند.

کل حرارت در طول فرایند و T دما است. بنابراین تابعی چون S وجود دارد که $dS = \frac{\delta Q}{T}$، این تابع را آنتروپی می‌نامیم. در فرایندهای برگشت‌ناپذیر، قانون دوم ترمودینامیک بیان می‌کند که آنتروپی سامانه هم‌واره رو به افزایش است، یعنی $\Delta S \geq ۰$ و در این‌جاست که کمیت S نقش خود را تحت عنوان شاخص بی‌نظمی سامانه بازی می‌کند.

از اواسط قرن نوزدهم اولین تلاش‌ها در یکی‌کردن قوانین حاکم بر ترمودینامیک و مکانیک آغاز شد. مساله اصلی نتیجه‌گیری قانون دوم ترمودینامیک از شکلی از ماده بود که ذرات تحت تاثیر نیروها و قوانین مکانیک هستند. این نگرش جنبشی به یاری ماکسول و ل.بولتزمان[۹] (و بعدا ج.و.گیبس) یکی از زیباترین و کاربردی‌ترین دست‌آوردهای علم را به بارآورد. در سال ۱۸۷۰ بولتزمان قضیه مشهور خود را برای معادله نظریه ی جنبشی گازها ثابت نمود و در سال ۱۸۷۷ تعبیری آماری از آنتروپی ترمودینامیکی $S = k\log W$ ارائه نمود. در سال ۱۹۴۸ ک.شانون[۱۰] مفهوم آنتروپی را به صورت $H := -\sum_{i=۱}^{k} P_i \log p_i$ برای نظریه اطلاعات به کار برد و بالاخره در سال ۲۰۰۲ گ.پرلمان $\mathcal{W}$ ـ‌آنتروپی را برای شار ریچی معرفی نمود. اخیرا ثابت شده مفهوم همه این آنتروپی‌ها یکسان است. برای مطالعه بیش‌تر به مقاله [۳۲] مراجعه نمایید.

تعریف ۸.۴.۲. $\mathcal{W}$ ـ‌آنتروپی، μـ‌تابعک و νـ‌تابعک پرلمان:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{W} : \mathfrak{M}et \times C^{\infty}(M) \times \mathbb{R}^{+} \longrightarrow \mathbb{R}\\
&\mathcal{W}(g,f,\tau) := \int_M [\tau(R + |\nabla f|^{۲}) + f - n]\frac{e^{-f}}{(۴\pi\tau)^{\frac{n}{۲}}}.dv\\
&\mu(g,\tau) := \inf\{\mathcal{W}(g,f,\tau) | f^{\infty}(M), \int_M \frac{e^{-f}}{(۴\pi\tau)^{\frac{n}{۲}}}.dv = ۱\}\\
&\nu(g) := \inf\{\mu(g,\tau) | \tau \in \mathbb{R}^{+}\}
\end{aligned}$$

گزاره ۹.۴.۲. *تغییرات $\mathcal{W}$ـ‌آنتروپی پرلمان نسبت به زمان: اگر f ، τ و g در معادلات تحول زیر صدق کنند آنگاه مشتق $\mathcal{W}$ـ‌آنتروپی پرلمان نسبت به زمان صورتی است که در ادامه می‌آید و لذا سالیتون‌های ریچی*

---

[۹] Ludwig Boltzmann ، ۱۹۰۶-۱۸۴۴ فیزیک دان اتریشی

[۱۰] Claude Shannon ۲۰۰۱-۱۹۱۶، ریاضی‌دان، مهندس الکترونیک و رمزنگار آمریکایی که به عنوان پدر نظریه اطلاعات شناخته می‌شود.

منقبض شوند نقاط بحرانی $\mathcal{W}$ـ آنتروپی پرلمان هستند.

$$\frac{\partial}{\partial t}g_{ij} = -۲R_{ij}$$
$$\frac{\partial}{\partial t}f = -\Delta f + |\nabla f|^۲ - R + \frac{n}{۲\tau}$$
$$\frac{d}{dt}\tau = -۱$$
$$\frac{d}{dt}\mathcal{W}(g,f,\tau) = ۲\int_M \tau|Ric + \nabla^۲ f - \frac{g}{۲\tau}|^۲ \frac{e^{-f}}{(۴\pi\tau)^{\frac{n}{۲}}}.dv \geq ۰$$

برهان. به کتاب [۱۹] مراجعه کنید. □

۵.۲ معادلات ساختاری سالیتون‌های ریچی گرادیان

گزاره ۱.۵.۲. *برای هر سالیتون ریچی (M,g,X) داریم:*

$$\Delta X + Ric(X) = ۰$$

برهان. با ضرب g^{ij} در معادله ۸.۲ داریم:

$$g^{ij}R_{ij} + \frac{۱}{۲}g^{ij}(\nabla_i X_j + \nabla_j X_i) = g^{ij}(\rho g_{ij}) \Longrightarrow R + div(X) = n\rho$$

حال با محاسبه گرادیان طرفین رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\nabla R + \nabla(divX) = ۰ \qquad (۱۰.۲)$$

از طرفی با مجاسبه دیورژانس دو طرف رابطه ۸.۲ داریم:

$$div(Ric) + \frac{۱}{۲}div(\mathcal{L}_X g) = div(\rho g) \qquad (۱۱.۲)$$
$$\frac{۱}{۲}\nabla R + \frac{۱}{۲}\nabla_i(\nabla_i X_j + \nabla_j X_i) = ۰ \qquad (۱۲.۲)$$
$$\frac{۱}{۲}\nabla R + \frac{۱}{۲}(\Delta X_j + \nabla_j\nabla_i X_i + R_{ij}X_j) = ۰ \qquad (۱۳.۲)$$
$$\nabla R + \nabla X + \nabla(divX) + Ric(X) = ۰ \qquad (۱۴.۲)$$

حال با جایگذاری رابطه ۱۰.۲ در ۱۱.۲ داریم:

$$\Delta X + Ric(X) = ۰$$

□

گزاره ۲.۵.۲. *برای هر سالیتون ریچی گرادیان* $(M, g, \nabla f)$ *داریم:*

منقبض شونده: $R \geq 0$

ایستا: $R \geq 0$

منبسط شونده: $R \geq -\frac{n}{2}$

برهان. به مقالات [۱۳]، [۵۷] و [۵۰] مراجعه کنید. □

گزاره ۳.۵.۲. *برای هر سالیتون ریچی گرادیان* $(M, g, \nabla f)$ *داریم:*

الف) $R + \Delta f = \rho n$

ب) $\nabla R = 2Ric(\nabla f)$

ج) $R + |\nabla f|^2 - 2\rho f = C$

د) $-\Delta f + |\nabla f|^2 - 2\rho f + n\rho = C$

ه) $\frac{1}{2}R + \Delta f - \frac{1}{2}|\nabla f|^2 + \rho f - n\rho = -\frac{C}{2}$

(C*، مقدار ثابتی است.)*

برهان. الف) با ضرب g^{ij} در طرفین معادله ۹.۲ داریم:

$$g^{ij}.R_{ij} + g^{ij}.\nabla_j \nabla_i f = \rho g^{ij}.g_{ij} \Longrightarrow R + \Delta f = \rho n$$

ب)با ضرب g^{ij} در معادله ۹.۲ داریم:

$$g^{ij}R_{ij} + \frac{1}{2}g^{ij}(\nabla_i X_j + \nabla_j X_i) = g^{ij}(\rho g_{ij}) \Longrightarrow R + div(X) = n\rho$$

حال با محاسبه گرادیان طرفین رابطه (الف) داریم:

$$\nabla R + \nabla \Delta f = 0 \tag{۱۵.۲}$$

از طرفی با مجاسبه دیورژانس دو طرف رابطه ۹.۲ و محاسبات شبیه گزاره ۱.۵.۲ داریم:

$$\frac{1}{2}\nabla R + \nabla \Delta f + Ric(\nabla f) = 0 \tag{۱۶.۲}$$

حال با جایگذاری رابطه ۱۵.۲ در ۱۶.۲ داریم:

$$\nabla R = 2Ric(\nabla f)$$

ج) با محاسبه دیورژانس طرفین رابطه $R_{ij} + f_{ij} - \rho g_{ij} = ۰$، استفاده از $\nabla_j R_{ij} = \frac{۱}{۲}\nabla_i R$ و سازگاری التصاق با متریک داریم:

$$\frac{۱}{۲}\nabla_i R + \nabla_j \nabla_i \nabla_j f - \rho \nabla_j g_{ij} = ۰$$

حال بنابر فرمول جابه‌جایی مشتق هم‌ورد مرتبه دوم داریم:

$$\frac{۱}{۲}\nabla_i R + \nabla_i \nabla_j \nabla_j f + R_{jijk}\nabla_k f = ۰$$

با جای‌گذاری تعریف سالیتون ریچی گرادیان داریم:

$$\frac{۱}{۲}(\nabla_i R + ۲(\nabla_i \nabla_k f - \rho g_{ij})\nabla_k f) = ۰$$

بنابراین:

$$\frac{۱}{۲}(\nabla_i R + \nabla_i |\Delta f|^۲ - \rho \nabla_i f) = ۰$$

در نتیجه:

$$R + |\nabla f|^۲ - ۲\rho f = C$$

د و ه) از ترکیب روابط (الف)، (ب) و (ج) به ساده‌گی به‌دست می‌آید. □

گزاره ۴.۵.۲. *برای هر سالیتون ریچی گرادیان $(M, g, \nabla f)$ داریم:*

$$(div(R_m))_{jkl} = \nabla_k R_{lj} - \nabla_l R_{kj} = R_{lkjp} f_p. \quad (۱۷.۲)$$

برهان.

$$\begin{aligned}(div(R_m))_{jkl} &= g^{rs}\nabla_r R_{sjkl}\\ &= \nabla_r(g^{rs}R_{sjkl})\\ &= \nabla_r(R_{rjkl})\\ &= \nabla_r(R_{klrj})\\ &= -\nabla_k R_{rkrj} - \nabla_l R_{rkrj}\\ &= \nabla_k R_{rlrj} - \nabla_l R_{rkrj}\\ &= \nabla_k R_{lj} - \nabla_l R_{kj}\\ &= \nabla_k(\rho g_{lj} - \nabla_j\nabla_l f) - \nabla_l(\rho g_{kj} - \nabla_j\nabla_k f)\\ &= \nabla_l\nabla_j\nabla_k f - \nabla_k\nabla_j\nabla_l\\ &= \nabla_l\nabla_k\nabla_j f - \nabla_k\nabla_l\nabla_j f\\ &= -R_{lkpj}\nabla_p f\\ &= R_{lkjp}\nabla_p f.\end{aligned}$$

□

گزاره ۵.۵.۲. *برای هر سالیتون ریچی گرادیان $(M, g, \nabla f)$ داریم:*

$$\nabla_i(R_{ijkl}e^{-f}) = 0 \tag{۱۸.۲}$$

$$\nabla_i(R_{ij}e^{-f}) = 0 \tag{۱۹.۲}$$

برهان. برای رابطه اول با محاسبه مستقیم و استفاده از ۱۷.۲ داریم:

$$\begin{aligned}\nabla_i(R_{ijkl}e^{-f}) &= \nabla_i(R_{ijkl})e^{-f} + R_{ijkl}\nabla_i(e^{-f})\\ &= (R_{lkjp}\nabla_p f - R_{ijkl}\nabla_i f)e^{-f} = 0\end{aligned}$$

بنابر تعریف انحنای ریچی و سازگاری با متریک التصاق به وضوح عبارت دوم صفر است.

$$\nabla_i(R_{ij}e^{-f}) = \nabla_i(g^{st}R_{sijt}e^{-f}) = 0$$

□

۶.۲ قضایای سالیتون‌های ریچی فشرده

قضیه ۱.۶.۲. *برای هر سالیتون ریچی فشرده منقبض شونده $(M, g, \nabla f)$ داریم:*

$$\int_M |\nabla Ric|^{۲} e^{-\lambda f} = \int_M |div(R_m)|^{۲} e^{-\lambda f}.$$

برهان. رجوع شود به مقاله [۱۵] . □

۷.۲ قضایای سالیتون‌های ریچی گرادیان کامل

لم ۱.۷.۲. *فرض کنید $(M, g, \nabla f)$ یک سالیتون ریچی گرادیان کاملِ منقبض شونده باشد، برای هر $p \in M$ ثابت‌های $C, c > ۰$ به طور یک‌نواخت وجود دارند که:*

$$\frac{۱}{۴}(r(x) - c)^{۲} \leq f(x) \leq \frac{۱}{۴}(r(x) + c)^{۲},$$

در این جا: $r(x) := dist(x, p)$

برهان. رجوع شود به مقاله [۱۴]. □

گزاره ۲.۷.۲. *فرض کنید $(M, g, \nabla f)$ یک سالیتون ریچی گرادیان کاملِ منقبض شونده باشد، در این صورت انحنای اسکالر دارای کران‌هایی به صورت زیر است: (منظور از c همان c بالاست)*

$$۰ \leq R \leq \frac{۱}{۴}(r(x) + c)^{۲}$$

برهان. بنابر گزاره ۲.۵.۲ انحنای اسکالر بزرگ‌تر مساوی صفر است. از رابطه $|\nabla f|^{۲} + R = f$ نتیجه می‌شود $R \leq f(x)$، بنابراین با استفاده از لم ۱.۷.۲ کران بالایی حکم نتیجه می‌شود. □

قضیه ۳.۷.۲. *برای هر سالیتون ریچی گرادیانِ کاملِ منقبض‌شونده $(M, g, \nabla f)$ داریم:*

$$\int_M |Ric|^{۲} e^{-\lambda f} < \infty, \lambda > ۰ \text{ برای هر}$$

برهان. تابع آزمون ϕ را روی M در نظر می‌گیریم. با محاسبه مستقیم داریم:

$$\begin{aligned}
\int_M |Ric|^۲ e^{-\lambda f}\phi^۲ &= \int_M \langle Ric, Ric\rangle e^{-\lambda f}\phi^۲ \\
&= \int_M \langle Ric, \frac{۱}{۲}g - \nabla^۲ f\rangle e^{-\lambda f}\phi^۲ \\
&= \frac{۱}{۲}\int_M \langle Ric, g\rangle e^{-\lambda f}\phi^۲ - \int_M \langle \nabla^۲ f, e^{-\lambda f}\phi^۲ Ric\rangle \\
&= \frac{۱}{۲}\int_M Re^{-\lambda f}\phi^۲ + \int_M \langle \nabla f, div(e^{-\lambda f}\phi^۲ Ric)\rangle \\
&= \underbrace{\frac{۱}{۲}\int_M Re^{-\lambda f}\phi^۲}_{*} + \underbrace{(۱-\lambda)\int_M \langle \nabla f, (\nabla f)e^{-\lambda f}\phi^۲ Ric\rangle}_{**} \\
&\quad + \underbrace{\int_M \langle \nabla f, (e^{-\lambda f} Ric)(\nabla\phi^۲)\rangle}_{***}
\end{aligned}$$

برای انتگرال ** و *** از نامساوی‌های کوشی‌ـ‌شوارتس و نابرابری حسابی‌ـ‌هندسی داریم:

$$\begin{aligned}
** = (۱-\lambda)\int_M \langle (\nabla f)_i, e^{-\lambda f}\phi^۲ g^{rs}(\nabla f)_r R_{si}\rangle \leq & \frac{۱}{۴}\int_M |Ric|^۲ e^{-\lambda f}\phi^۲ \\
& + (۱-\lambda)^۲ \underbrace{\int_M |\nabla f|^۴ e^{-\lambda f}\phi^۲}_{I}
\end{aligned}$$

$$*** = \int_M \langle (\nabla f)_i, e^{-\lambda f} g^{rs}(\nabla\phi^۲)_r R_{si}\rangle \leq \frac{۱}{۴}\int_M |Ric|^۲ e^{-\lambda f}\phi^۲ + ۴\underbrace{\int_M |\nabla f|^۲ e^{-\lambda f}|\nabla\phi|^۲}_{II}$$

بنابر لم ۱.۷.۲ انتگرال‌های *، I و II متناهی هستند. لذا $\int_M |Ric|^۲ e^{-\lambda f} < \infty$ به علاوه در حالت $\lambda = ۱$، ثابت شد:

$$\int_M |Ric|^۲ e^{-f} = \frac{۱}{۲}\int_M Re^{-f} < \infty$$

□

قضیه ۴.۷.۲. *فرض‌کنید $(M, g, \nabla f)$ یک سالیتون ریچی گرادیانِ کاملِ منقبض‌شونده باشد که برای هر $\lambda < ۱$ داشته باشیم $\int_M |R_m|^۲ e^{-\lambda f} < \infty$، در این صورت تساوی زیر برقرار است:*

$$\int_M |\nabla Ric|^۲ e^{-\lambda f} = \int_M |div(R_m)|^۲ e^{-\lambda f} < \infty$$

برهان. تابع آزمون ϕ را روی M در نظر می‌گیریم. با محاسبه مستقیم داریم:

$$\begin{aligned}
\int_M |\nabla Ric|^۲ e^{-f}\phi^۲ &= \int_M \langle \nabla R_{ij}, \nabla R_{ij}\rangle e^{-f}\phi^۲ \\
&= \int_M \langle \nabla R_{ij}, (\nabla R_{ij}) e^{-f}\phi^۲\rangle \\
&= -\int_M \langle R_{ij}, div((\nabla R_{ij})e^{-f}\phi^۲)\rangle \\
&= -\int_M R_{ij}(\Delta R_{ij})e^{-f}\phi^۲ + \int_M R_{ij}\langle \nabla R_{ij}, (\nabla f)e^{-f}\phi^۲\rangle \\
&- \int_M R_{ij}\langle \nabla R_{ij}, e^{-f}\nabla\phi^۲\rangle \\
&= -\int_M (\Delta_f R_{ij})R_{ij}e^{-f}\phi^۲ - \int_M R_{ij}\langle \nabla R_{ij}, e^{-f}\nabla\phi^۲\rangle \\
&= -\int_M (R_{ij} - ۲R_{ikjl}R_{kl})R_{ij}e^{-f}\phi^۲ \\
&- \int_M R_{ij}\langle \nabla R_{ij}, e^{-f}\nabla\phi^۲\rangle \\
&= -\int_M |R_{ij}|^۲ e^{-f}\phi^۲ + ۲\int_M R_{ikjl}R_{ij}R_{kl}e^{-f}\phi^۲ \\
&- \int_M R_{ij}\langle \nabla R_{ij}, e^{-f}\nabla\phi^۲\rangle
\end{aligned}$$

با نوشتن جملات انحنای ریمان سالیتون‌ها برحسب تابع پتانسیل داریم:

$$۲\int_M R_{ikjl}R_{ij}R_{kl}e^{-f}\phi^۲ = \int_M |R_{ij}|^۲ e^{-f}\phi^۲ - ۲\int_M R_{ikjl}R_{ij}f_{kl}e^{-f}\phi^۲$$

بنابراین:

$$\int_M |\nabla Ric|^۲ e^{-f}\phi^۲ = -۲\int_M R_{ikjl}R_{ij}f_{kl}e^{-f}\phi^۲ - \int_M R_{ij}\langle \nabla R_{ij}, e^{-f}\nabla\phi^۲\rangle$$

با انتگرال‌گیری جزء به جزء داریم:

$$\begin{aligned}
-۲\int_M R_{ikjl}R_{ij}f_{kl}e^{-f}\phi^۲ &= ۲\int_M f_k\nabla_l(R_{ikjl}R_{ij}e^{-f}\phi^۲) \\
&= ۲\int_M f_k R_{ikjl}e^{-f}\nabla_l(R_{ij}\phi^۲) \\
&= ۲\int_M R_{ikjl}(\nabla_l R_{ij})f_k e^{-f}\phi^۲ + ۲\int_M R_{ikjl}R_{ij}f_k e^{-f}\nabla_l(\phi^۲)
\end{aligned}$$

هم‌چنین معادلات ساختاری سالیتون‌های ریچی گرادیان نتیجه می‌دهد:

$$|div(R_m)|^۲ = ۲R_{ikjl}(\nabla_l R_{ij})f_k$$

با جای‌گذاری روابط اخیر در معادله اول داریم:

$$\begin{aligned}\int_M |\nabla Ric|^۲ e^{-f}\phi^۲ &= \int_M |div(R_m)|^۲ e^{-f}\phi^۲ \\ &+ ۲\int_M R_{ikjl}R_{ij}f_k e^{-f}\nabla_l(\phi^۲) \\ &- \int_M R_{ij}\left\langle \nabla R_{ij}, e^{-f}\nabla\phi^۲\right\rangle\end{aligned}$$

از طرفی بنابر فرض و معادلات ساختاری سالیتون‌های ریچی گرادیان داریم:

$$\begin{aligned}\int_M |div(R_m)|^۲ e^{-f} \leq C\int_M |R_m|^۲|\nabla f|^۲ e^{-f} \leq C\int_M |R_m|^۲ e^{-\lambda f} < \infty \\ \int_M |R_{ikjl}R_{ij}f_k\phi_l| e^{-f} \leq C\int_M |R_m|^۲|\nabla f|^۲ e^{-f} \leq C\int_M |R_m|^۲ e^{-\lambda f} < \infty\end{aligned}$$

با استفاده از نابرابری میانگین حسابی‌ــ هندسی داریم:

$$\begin{aligned}\int_M |\nabla Ric|^۲ e^{-f}\phi^۲ &\leq C + ۲\int_M |\nabla_k R_{ij}||R_{ij}|e^{-f}\phi|\nabla\phi| \\ &\leq C + \frac{۱}{۲}\int_M |\nabla Ric|^۲ e^{-f}\phi^۲ + ۲\int_M |Ric|^۲ e^{-f}|\nabla\phi|^۲\end{aligned}$$

لذا:

$$\int_M |\nabla Ric|^۲ e^{-f} < \infty$$

برای اتمام برهان تابع آزمون را طوری بگیرید روی $B_r(P)$ برابر ۱، بیرون $B_{۲r}(p)$ برابر صفر و $|\nabla\phi| < \frac{c}{r}$ است. با انتگرال‌گیری و میل دادن r به بی‌نهایت داریم:

$$|\int_M R_{ikjl}R_{ij}f_k e^{-f}(\phi^۲)_l| \leq C\int_{B_{۲r}(p)\setminus B_r(P)} |R_m|^۲ e^{-\lambda f} \longrightarrow ۰$$

و

$$|\int_M (\nabla_k R_{ij})R_{ij}f_k e^{-f}(\phi^۲)_k| \leq C(\int_M |\nabla Ric|^۲.e^{-f})^{\frac{۱}{۲}}(\int_{B_{۲r}(p)\setminus B_r(P)} |Ric|^۲ e^{-f})^{\frac{۱}{۲}} \longrightarrow ۰.$$

□

لم ۵.۷.۲. *برای هر سالیتون ریچی گرادیان کاملِ منقبض‌شونده $(M, g, \nabla f)$ با تانسور وایل هم‌ساز داریم:*

$$\int_M |\nabla Ric|^۲ e^{-\lambda f} = \int_M |div(R_m)|^۲ e^{-\lambda f} < \infty$$

برهان. هم‌ساز بودن تانسور انحنای وایل، یعنی $div(W) = ۰$ و این نتیجه می‌دهد تانسور شاوتن، کودازی است، یعنی:

$$(\nabla_X S)(Y, Z) = (\nabla_Y S)(X, Z)$$

بنابر تعریف تانسور شاوتن، $S = \frac{۱}{n-۲}(Ric - \frac{R}{۲n-۱}g)$ داریم:

$$(\nabla_X Ric)(Y, Z) - (\nabla_Y Ric)(Z, Z) = \frac{۱}{۲(n-۱)}(X.R\langle Y, Z\rangle - Y.R\langle X, Z\rangle)$$

در سالیتون‌های ریچی گرادیان منقبض‌شونده نتیجه می‌دهد:

$$R_m(\partial_i, \partial_j, \partial_k, \nabla_l f) = \frac{۱}{n-۱}(Ric(\partial_i, \nabla_l f)\langle\partial_j, \partial_k\rangle - Ric(\partial_j, \nabla_l f)\langle\partial_i, \partial_k\rangle)$$

هم‌چنین:

$$\int_M |div(R_m)|^۲ e^{-f} \leq C\int_M |Ric|^۲|\nabla f|^۲ e^{-f} \leq \int_M |Ric|^۲ e^{-\mu f} < \infty$$

برای $۱ < \mu$. به‌علاوه با استفاده از تابع آزمون قضیه ۴.۷.۲ داریم:

$$\begin{aligned}\int_M |R_{ikjl} f_k R_{ij}(\phi^۲)_l| e^{-f} &\leq \frac{c}{r}(\int_M |div(R_m)|^۲ e^{-f} + \int_M |Ric|^۲ e^{-f})\\ &\leq \frac{C}{r} \longrightarrow ۰.\end{aligned}$$

□

۸.۲ رده‌بندی سالیتون‌های ریچی فشرده

قضیه ۱.۸.۲. *هر سالیتون ریچی فشردهِ ایستا یا منبسط شونده، اینشتینی و دارای انحنای عددی ثابت است و در حالت ایستا دارای انحنای ریچی صفر است.*

برهان. بنابر روابط (الف) و (ج) گزاره ۳.۵.۲ داریم:

$$\Delta f - |\nabla f|^۲ = -C + \rho(n - ۲f)$$

با محاسبه سرراست به‌دست می‌آید:

$$\Delta(e^{-f}) = (-\Delta f + |\nabla f|^۲)e^{-f}$$

در حالت ایستا با انتگرال‌گیری داریم:

$$\int_M Ce^{-f} = \int_M (-\Delta f + |\nabla f|^2)e^{-f} = \int_M \Delta(e^{-f}) = 0$$

با قرار دادن مقادیر بیشینه و کمینه f به‌دست می‌آید، $C = 0$ ، لذا $\Delta f = |\nabla f|^2$، با انتگرال‌گیری مجدد داریم:

$$\int_M |\nabla f|^2 = \int_M \Delta f = 0$$

پس $\nabla f = 0$ و چون M همبند است، f تابع ثابت است، در نتیجه اولا $Hess(f) = 0$، لذا سالیتون یک منیفلد اینشتین است، ثانیا انحنای ریچی آن صفر است. □

قضیه ۲.۸.۲. *سالیتون‌های ریچی فشرده منقبض‌شونده، به صورت زیر رده‌بندی شده‌اند:*

بعد ۲ : $\mathbb{S}^2$ یا $\mathbb{RP}^2$

بعد ۳ : خارج قسمت $\mathbb{S}^3$ با متریک استاندارد.

بعد $n > 3$ با فرض صفر بودن تانسور انحنای وایل : خارج قسمت $\mathbb{S}^n$ با متریک استاندارد.

برهان. رجوع شود به قضیه‌های ۳ . ۶ ، ۳ . ۷ و ۳ . ۸ در مقاله[۲۳] . □

قضیه ۳.۸.۲. *اولین گروه بنیادی هر سالیتون ریچی فشرده منقبض شوند، متناهی است.*

برهان. رجوع شود به گزاره ۳ . ۱۵ در مقاله[۲۳] .

□

۹.۲ رده‌بندی سالیتون‌های ریچی گرادیانِ کامل

رده‌بندی سالیتون‌های ریچی گرادیان منقبض‌شونده مساله مورد علاقه بسیاری از هندسه‌دانان است. هامیلتون ثابت کرد، هر سالیتون ریچی گرادیان بسته دو بعدی، اینشتینی است. در بعد سه ایوی [۱۱] نشان داد هر سایتون ریچی گرادیان فشرده دارای انحنای عددی ثابت و مثبت است. تخمین‌های هامیلتون و ایوی نشان می‌دهد سالیتون‌های کامل سه بعدی دارای انحنای برشی نامنفی هستند. ترکیب این مطلب با نتایج پرلمان نشان می‌دهد هر سالیتون ریچی گرادیان کامل منقبض‌شونده با انحنای برشی کران‌دار، $\mathbb{S}^3$ یا $\mathbb{R}\times\mathbb{S}^2$ یا $\mathbb{R}^3$ و یا خارج‌قسمتی متناهی از این‌هاست. در این قسمت به تعمیم این مساله برای ابعاد بیش‌تر می‌پردازیم.

قضیه ۱.۹.۲. *هر سالیتون ریچی گرادیان کامل منقبض شوند n بعدی با تانسور وایل صفر، خارج قسمت متناهی $\mathbb{S}^n$ یا $\mathbb{R}\times\mathbb{S}^{n-1}$ ویا $\mathbb{R}^n$ است.*

---
[۱۱] Ivey

برهان. بنابر قضیه ۳.۷.۲ داریم $\int_M |Ric|^۲ e^{-f} < \infty$ و بنابر فرض تانسور وایل صفر است، لذا بنا بر قضیه ۱۰۲ در مقاله [۲۴] حکم ثابت می‌شود.

□

قضیه ۲.۹.۲. *هر سالیتون ریچی گرادیان کامل منقبض شونده n بعدی با تانسور وایل هم‌ساز، خارج قسمت متناهی $\mathbb{S}^n$ یا $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-۱}$ ویا $\mathbb{R}^n$ است.*

برهان. در مقاله [۲۴] برای سالیتون‌های ریچی گرادیان کامل منقبض شونده با تانسور وایل هم‌ساز تحت دو فرض $|R_{ijkl}(x)| \leq e^{a(r(x)+۱)}$ و کران‌دار بودن انحنای ریچی از پایین، ابتدا نشان می‌دهد $\int_M |\nabla Ric|^۲ e^{-\lambda f} = \int_M |div(R_m)|^۲ e^{-\lambda f} < \infty$ و از روی آن حکم را نتیجه می‌گیرد. اما بنا بر قضیه ۴.۷.۲ برای برقراری تساوی $\int_M |\nabla Ric|^۲ e^{-\lambda f} = \int_M |div(R_m)|^۲ e^{-\lambda f} < \infty$ دو فرض مذکور نیز اضافی است.
□

قضیه ۳.۹.۲. *اولین گروه بنیادی هر سالیتون ریچی کامل منقبض شوند، متناهی است.*

برهان. رجوع شود به مقاله [۴۸] . □

۱۰.۲ مطالبی درباره تابع پتانسیل و حجم سالیتون‌های ریچی گرادیان کامل

قضیه ۱.۱۰.۲. *فرض کنید $(M, g, \nabla f)$ یک سالیتون ریچی گرادیان کاملِ منقبض شونده باشد، برای هر $p \in M$ ثابت $C > ۰$ به طور یک‌نواخت وجود دارد که:*

$$Cr \leq Vol(B_r(p)) \leq Cr^n$$

برهان. برای کران بالا رجوع شود به مقاله [۱۴] و کران پایین توسط مونتنو[۱۲] و جوآنگ[۱۳] در سال ۲۰۱۱ ثابت شده.
□

نتیجه ۲.۱۰.۲. *حجم هر سالیتون ریچی گرادیان کامل منقبض‌شونده نامتناهی است.*

گزاره ۳.۱۰.۲. *فرض کنید $(M, g, \nabla f)$ یک سالیتون ریچی گرادیان کاملِ ایستا باشد و $p \in M$ یک نقطه دل‌خواه، در این صورت مقدار ثابت λ وجود دارد به طوری که برای هر $x \in M$:*

$$f(x) \leq f(p) + \lambda r(x)$$

---

[۱۲] muntenu
[۱۳] Jwang

برهان. بنابر قسمت (ج) گزاره ۳.۵.۲ ثابت C وجود دارد، به طوری که $R + |\nabla f|^{2} = C$، چون برای سالیتون‌های ریچی گرادیان کامل ایستا $R \geq 0$، داریم $|\nabla f| \leq \sqrt{C}$. بنابراین برای هر $p \in M$، $|f(x) - f(p)| \leq d(x,p) = r(x)$. قرار دهید: $\lambda = \sqrt{C}$. □

لم ۴.۱۰.۲. *فرض کنید $(M, g, \nabla f)$ یک سالیتون ریچی گرادیان کاملِ ایستا باشد، در این صورت:*

$$\Delta_f R = R - 2|Ric|^{2}$$

برهان. رجوع شود به مقاله [۱۱] . □

قضیه ۵.۱۰.۲. *فرض کنید $(M, g, \nabla f)$ یک سالیتون ریچی گرادیان کامل ایستا باشد، در این صورت برای هر $p \in M$ ثابت‌های $a, c, r_0 > 0$ به طور یکنواخت وجود دارند به طوری که برای هر $r > r_0$:*

$$c^{-1} r \leq Vol(B_r(p)) \leq c e^{a\sqrt{r}}$$

برهان. فرض می‌کنیم $Ric = Hess(f)$ باشد.

اثبات کران پایین نامساوی:

اگر برای هر $r_0 \geq 0$ داشته باشیم $\int_{B_{r_0}(p)} R = 0$، در این‌صورت $R = 0$، لذا بنابر رابطه $\Delta_f R = R - 2|Ric|^{2}$ داریم $Ric = 0$، واضح است که برای هر $r > r_0$ داریم $Vol(B_r(p)) \geq c^{-1} r$. حال فرض‌کنید $r_0 > 0$ طوری باشد که $c_0 = \int_{B_{r_0}(p)} R > 0$. چون $R \geq 0$، برای هر $r \geq r_0$ داریم:

$$c_0 \leq \int_{B_r(p)} R = \int_{B_r(p)} \Delta(f) = \int_{\partial B_r(p)} R\frac{\partial f}{\partial n} \leq \int_{\partial B_r(p)} |\nabla f| \leq \sqrt{\lambda} Area(\partial B_r(p))$$

بنابراین برای $r \geq r_0$، مساحت $\partial B_r(p)$ بزرگ‌تر مساوی ثابتی مثبت چون c است. برای $r > 2r_0$ داریم:

$$\int_{r_0}^{r} Area(\partial B_t(p))dt \geq \int_{r_0}^{r} c dt \Longrightarrow Vol(B_r(p)) \geq c(r - r_0) \geq c_0 . r$$

اثبات کران بالای نامساوی:

گیریم $dV|_{exp_p(r\xi)} = J(r, \xi) dr d\xi$ فرم حجمی M باشد که $\xi \in S_p M$. با حذف وابستگی به ξ کار را ادامه می‌دهیم. در طول ژئودزیک یکا متعامد شروع شده از p رابطه شناخته شده زیر را داریم:

$$(\frac{J'}{J})'(r) + \frac{1}{n-1}(\frac{J'}{J})^{2}(r) + Ric(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r}) \leq 0$$

چون $f''(r) = Ric(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r})$ برای $r \geq 1$. با انتگرال‌گیری از ۱ تا r داریم:

$$\frac{J'}{J}(r) + \frac{1}{n-1}\int_{1}^{r} (\frac{J'}{J})^{2}(t)dt + f'(r) \leq c_0$$

تعریف می‌کنیم: $u(t) = \frac{J'}{J}(t)$. چون گرادیان f کران‌دار است:

$$u(t) + \frac{1}{n-1}(\int_1^r u^2(t)dt \leq C$$

از نامساوی کوشی‌ـ‌شوارتس داریم:

$$(\int_1^r u(t)dt)^2 \leq (\int_1^r u^2(t)dt)(\int_1^r dt) \Longrightarrow$$
$$\frac{1}{r-1} \leq \frac{\int_1^r u^2(t)dt}{(\int_1^r u(t)dt)^2} \Longrightarrow$$
$$\frac{1}{r}(\int_1^r u(t)dt)^2 \leq \int_1^r u^2(t)dt \Longrightarrow$$
$$u(r) + \frac{1}{(n-1)r}\int_1^r u(t)dt \leq C$$

حال ادعا می‌کنیم، برای هر $r \geq 1$:

$$\int_1^r u(t)dt \leq \sqrt{(n-1)Cr}$$

در نتیجه:

$$\log J(r) - \log J(1) \leq \sqrt{(n-1)Cr} \Longrightarrow J(r) \leq J(1)e^{\sqrt{(n-1)C}\sqrt{r}} = Ce^{a\sqrt{r}}$$

بنابراین:

$$Vol(B_r(p)) \leq Ce^{a\sqrt{r}}$$

حال به اثبات ادعا می‌پردازیم. تعریف می‌کنیم $v(r) = \sqrt{(n-1)Cr} - \int_1^r u(t)dt$، کافی است نشان دهیم برای هر $r \geq 1$، $v(r) \geq 0$. به وضوح $v(1) > 0$. به برهان خلف فرض‌کنید برای همه r های بیش‌تر از ۱، $v(r)$ مثبت نباشد، گیریم $r_0 > 1$ اولین عددی باشد که $v(r_0) = 0$. پس $\sqrt{(n-1)Cr_0} = \int_1^{r_0} u(t)dt$، در نتیجه:

$$u(r_0) \leq c - \frac{1}{(n-1)r_0}(\int_1^{r_0} u(t)dt)^2 = c - \frac{1}{(n-1)r_0}((n-1)cr_0)$$

با مشتق‌گیری از $v(r)$ داریم:

$$v'(r) = \sqrt{\frac{(n-1)c}{2r}} - u(r) \Longrightarrow v'(r_0) > 0$$

پس وجود دارد $\delta > 0$ به قدرکافی کوچک، که $v(r_0 - \delta) < v(r_0) = 0$ و این با انتخاب r_0 در تناقض است. $\square$

نتیجه ۶.۱۰.۲. *حجم سالیتون‌های ریچی گرادیان کامل ایستا، نامتناهی است.*

نتیجه ۷.۱۰.۲. *فرض کنید $(M, g, \nabla f)$ یک سالیتون ریچی گرادیان کاملِ ایستا و غیر مسطح باشد، در این صورت برای هر p ثابت‌های $c, \lambda > 0$ وجود دارند به طوری که برای هر $r \geq 1$:*

$$\sqrt{\lambda} - \frac{c}{\sqrt{r}} \leq \frac{1}{r} \sup_{\partial B_r(p)} f(x) \leq \sqrt{\lambda} + \frac{c}{r}$$

برهان. اثبات کران بالای نامساوی:

از گزاره ۳.۱۰.۲ داریم $f(x) \leq f(p) + \lambda r(x)$ بنابراین:

$$\sup_{B_r(p)} f(x) \leq \sup_{B_r(p)} (f(p) + \lambda r(x)) = f(p) + r \Longrightarrow \frac{1}{r} \sup_{B_r(p)} f(x) \leq \sqrt{\lambda} + \frac{c}{r}$$

اثبات کران پایین نامساوی:

فرض می‌کنیم $Ric = Hess(f)$ باشد. با محاسبه مستقیم داریم.

$$\Delta e^f = (\Delta f + |\nabla f|^2) e^f = (R + |\nabla f|^2) e^f = \lambda e^f$$

فرض کنید $\omega(r) := \int_{B_r(p)} e^f$، ادعا می‌کنیم $\sqrt{\lambda}\omega(r) \leq \omega'(r)$ چراکه:

$$\begin{aligned} \lambda\omega(r) = \lambda \int_{B_r(p)} e^f &= \int_{B_r(p)} \Delta e^f = \int_{\partial B_r(p)} \frac{\partial}{\partial r}(e^f) \\ &= \int_{\partial B_r(p)} \frac{\partial f}{\partial r} e^f \leq \sqrt{\lambda} \int_{\partial B_r(p)} e^f = \sqrt{\lambda}\omega'(r) \end{aligned}$$

در خط آخر از این که $|\frac{\partial f}{\partial r}| \leq |\nabla f| \leq \sqrt{\lambda}$ استفاده کردیم. بنابراین:

$$\sqrt{\lambda} \leq \frac{\omega'(r)}{\omega(r)} \Longrightarrow \int_1^r \sqrt{\lambda} dt \leq \int_1^r \frac{\omega'(r)}{\omega(r)} \Longrightarrow \omega(1) e^{(r-1)\sqrt{\lambda}} \leq \omega(r) \Longrightarrow \frac{\omega(1)}{e^{\sqrt{\lambda}}} e^{\sqrt{\lambda} r} \leq \omega(r)$$

در نتیجه برای $r \geq 1$:

$$\begin{aligned} Ce^{\sqrt{\lambda} r} \leq \omega'(r) = \int_{\partial B_r(p)} e^f &\leq (\sup_{B_r(p)} e^f) \int_{\partial B_r(p)} 1 \\ &= (\sup_{B_r(p)} e^f) Area(\partial B_r(p)) \\ &\leq (\sup_{B_r(p)} e^f)(Ce^{a\sqrt{r}}) \Longrightarrow \sqrt{\lambda} - \frac{a}{\sqrt{\lambda}} \leq \frac{1}{r} \sup_{B_r(p)} f \end{aligned}$$

□

۱۱.۲ بررسی توابع هم‌ساز روی سالیتون‌های ریچی گرادیانِ کامل و ساختار آن‌ها در بی‌نهایت

بسیاری از خواص توپولوژیکی و هندسی سالیتون‌های ریچی منقبض شونده و ایستا مانند منیفلدهای با انحنای ریچی نامنفی است، این مطلب انگیزه‌ای برای بررسی توابع هم‌ساز و خواص آن‌ها روی این سالیتون‌ها است. در مقاله [۵۵] ثابت شده وجود رده خاصی از توابع هم‌ساز روی منیفلدهای با انحنای ریچی نامنفی در ارتباط با ساختار توپولوژیک منیفلد در بی‌نهایت یعنی تعداد نقاط انتهایی است.

قضیه ۱.۱۱.۲. *هر تابع حقیقی هم‌ساز با انرژی کل متناهی، روی یک سالیتون ریچی گرادیان ایستا کامل، تابعی ثابت است.*

برهان. فرض کنید $Ric = Hess(f)$ و u یک تابع هم‌ساز دل‌خواه روی Mباشد، برای تابع آزمون ϕ روی M داریم:

$$\begin{aligned}\int_M Ric(\nabla u,\nabla u)\phi^2 &= \int_M Hess(f)(\nabla u,\nabla u)\phi^2 \\ &= \int_M u_{ij}f_iu_j\phi^2 + \int_M \langle\nabla f,\nabla u\rangle\langle\nabla u,\nabla\phi^2\rangle \\ &= (-\frac{1}{2}\int_M(\Delta f)|\nabla u|^2\phi^2 - \frac{1}{2}\int_M|\nabla u|^2\left\langle\nabla f,\nabla\phi^2\right\rangle) \\ &+ \int_M\langle\nabla f,\nabla u\rangle\langle\nabla u,\nabla\phi^2\rangle \\ &= (\frac{1}{2}\int_M R|\nabla u|^2\phi^2 - \frac{1}{2}\int_M|\nabla u|^2\langle\nabla f,\nabla\phi^2\rangle) \\ &+ \int_M\langle\nabla f,\nabla u\rangle\langle\nabla u,\nabla\phi^2\rangle\end{aligned} \tag{۲۰.۲}$$

از طرفی:

$$2Ric(\nabla u,\nabla u) + 2|\nabla|\nabla u||^2 \le 2Ric(\nabla u,\nabla u) + 2|Hess(u)|^2 = \Delta|\nabla u|^2$$

با ضرب طرفین در ϕ^2 و انتگرال‌گیری داریم:

$$2\int_M Ric(\nabla u,\nabla u)|\nabla u|^2\phi^2 + 2\int_M|\nabla|\nabla u||^2\phi^2 \le \int_M\Delta|\nabla u|^2\phi^2 = -\int_M\langle\nabla|\nabla u|^2,\nabla\phi^2\rangle$$

با جای‌گذاری در معادله ۲۰.۲ داریم:

$$\begin{aligned}\int_M R|\nabla u|^2\phi^2 + 2\int_M |\nabla|\nabla u||^2\phi^2 &\leq \int_M |\nabla u|^2 \langle \nabla f, \nabla\phi^2\rangle - 2\int_M \langle \nabla f, \nabla u\rangle \langle \nabla u, \nabla \phi^2\rangle \\ &\quad - \int_M \langle \nabla|\nabla u|^2, \nabla\phi^2\rangle \\ &= \int_M |\nabla u|^2 \langle \nabla f, \nabla\phi^2\rangle - 2\int_M \langle \nabla f, \nabla u\rangle \langle \nabla u, \nabla \phi^2\rangle \\ &\quad + (\int_M |\nabla|\nabla u||^2\phi^2 + 4\int_M |\nabla u|^2|\nabla\phi|^2)\end{aligned}$$

با حذف $\int_M |\nabla|\nabla u||^2\phi^2$ از طرفین داریم:

$$\begin{aligned}\int_M R|\nabla u|^2\phi^2 + \int_M |\nabla|\nabla u||^2\phi^2 &\leq \int_M |\nabla u|^2 \langle \nabla f, \nabla\phi^2\rangle - 2\int_M \langle \nabla f, \nabla u\rangle \langle \nabla u, \nabla \phi^2\rangle \\ &\quad + 4\int_M |\nabla u|^2|\nabla\phi|^2 \end{aligned} \tag{۲۱.۲}$$

برای سالیتون‌های ریچی گرادیان $|\nabla f| \leq C$، بنابراین مجموع اخیر از مضرب ثابت و مثبت $\int_M |\nabla u|^2|\nabla\phi|$ بیش‌تر نیست. با میل دادن r به بی‌نهایت داریم $|\nabla|\nabla u||| = R|\nabla u|^2 = 0$ در نتیجه $|\nabla u| = c$. چون انرژی کل u متناهی است و سالیتون‌های ریچی گرادیان ایستا دارای حجم نامتناهی هستند، $|\nabla u| = 0$، لذا u تابعی ثابت است. □

تعریف ۲.۱۱.۲. نقطه انتهایی: فرض کنید M یک منیفلد کامل و غیر فشرده باشد و Ω زیر مجموعه‌ای فشرده از آن، به هر یک از مولفه‌های هم‌بندی و بی‌کران $M \setminus \Omega$ یک انتهای M نسبت به Ω می‌گوییم. تعداد نقاط انتهایی منیفلد M را با $\sharp ends(M)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۳.۱۱.۲. هم‌سایه‌گی در بی‌نهایت: می‌گوییم $V \subset M$ یک هم‌سایه‌گی در بی‌نهایت است، هرگاه $\overline{M \setminus V}$فشرده باشد.

تعریف ۴.۱۱.۲. هم‌بندی در بی‌نهایت: می‌گوییم یک منیفلد در بی‌نهایت ناهم‌بند است هرگاه حداقل دو انتها داشته باشد. در غیر این صورت آن منیفلد را هم‌بند در بی‌نهایت گوییم.

مثال ۵.۱۱.۲. هرگاه هر هم‌سایه‌گی یک منیفلد در بی‌نهایت شامل یک هم‌سایه‌گی هم‌بند در بی‌نهایت باشد در این صورت آن منیفلد دارای یک انتها است و لذا در بی‌نهایت هم‌بند است.

تعریف ۶.۱۱.۲. یک منیفلد کامل را غیرسهموی گوییم هرگاه برای عمل‌گر لاپلاس که روی توابع L^2 عمل می‌کند یک تابع گرین مثبت متقارن $G(x,y)$ موجود باشد، در غیر این صورت آن منیفلد را سهموی گوییم.

تعریف ۷.۱۱.۲. نقطه انتهایی E از منیفلد M را غیر سهموی گوییم هرگاه برای عملگر لاپلاس روی توابع L^2 یک تابع گرین مثبت متقارن $G(x, y)$ موجود باشد که روی ∂E در شرط مرزی نیومن صدق کند، در غیر این صورت آن نقطه انتهایی را سهموی گوییم.

مثال ۸.۱۱.۲. مجموعه اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ دارای دو انتهای سهموی و فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ برای $n > 1$ دارای یک انتهای سهموی است.

تذکر ۹.۱۱.۲. *یک منیفلدِ کامل، غیرسهموی است، اگر و تنها اگر دارای حداقل یک انتهای غیر سهموی باشد، به عبارت دیگر یک منیفلد سهموی است اگر و تنها اگر همه نقاط انتهایی آن سهموی باشد. ممکن است یک منیفلد غیرسهموی دارای نقاط سهموی باشد.*

برهان. به مرجع [۳۵] مراجعه کنید. □

تذکر ۱۰.۱۱.۲. *هر انتهای غیرسهموی دارای حجم نامتناهی است.*

برهان. به مرجع [۳۴] مراجعه کنید. □

تذکر ۱۱.۱۱.۲. *فرض کنید E و F دو انتهای سهموی منیفلد M باشند، در این صورت تابع همساز u روی M موجود است که:*

۱) $\lim_{x\to\infty, x\in E} u(x) = -\infty$

۲) $\lim_{x\to\infty, x\in F} u(x) = +\infty$

برهان. به مراجع [۴۲] و [۴۳] مراجعه کنید. □

تذکر ۱۲.۱۱.۲. *فرض کنید E و F دو انتهای به ترتیب سهموی و غیر سهموی منیفلد M باشند، در این صورت تابع همساز u روی M موجود است که:*

۱) $\lim_{x\to\infty, x\in E} u(x) = \infty$

۲) $\inf_{x\in F} u(x) = 0$ و $\int_F |\nabla u|^2 < \infty$

برهان. به مراجع [۴۲] و [۴۳] مراجعه کنید. □

تذکر ۱۳.۱۱.۲. *(لی- تم ۱۹۹۲) اگر منیفلد ریمانی (M, g) دارای حداقل دو انتهای غیرسهموی باشد در این صورت تابعی همساز و کران‌دار با انرژی کل متناهی روی M موجود است.*

برهان. به مرجع [۳۵] مراجعه کنید. □

گزاره ۱۴.۱۱.۲. *هر سالیتون ریچی گرادیان کاملِ ایستا حداکثر یک انتهای غیرسهموی دارد.*

برهان. بنابر تذکر ۱۳.۱۱.۲ اگر یک منیفلد دارای حداقل دو انتهای غیر سهموی باشد در این صورت تابعی کران‌دار و هم‌ساز با انرژی کل نامتناهی روی آن موجود است. از طرفی در قضیه ۱.۱۱.۲ ثابت شد در سالیتون‌های ریچی گردایان کامل ایستا، چنین توابعی وجود ندارند، بنابراین هر سالیتون ریچی گرادیان کاملِ ایستا حداکثر یک انتهای غیرسهموی دارد. □

گزاره ۱۵.۱۱.۲. *فرض کنید $(M, g, \nabla f)$ یک سالیتون ریچی گرادیان ایستا کامل باشد که برای مقدار ثابت α داریم $R \leq \alpha < \frac{n}{2} - 1$ ، در این صورت تمام نقاط انتهایی M غیر سهموی هستند.*

برهان. نشان می‌دهیم تابعی هم‌ساز زبرین و مثبت روی M موجود است که در بی‌نهایت به صفر هم‌گرا است، بنابر قضیه‌ای از مقاله [۲۵] و قضیه‌ای از مقاله [۳۴] همه نقاط انتهایی M غیرسهموی هستند و در نتیجه خود M غیرسهموی است.

قرار دهید $a = \frac{n}{2} - \alpha - 1$ ، با محاسبه مستقیم Δf^{-a}، هم‌ساز زبرین و مثبت است.

$$\begin{aligned}
\Delta f^{-a} &= g^{ij}\nabla_i\nabla_j f^{-a} \\
&= g^{ij}\nabla_i(-af^{-a-1}f_j) \\
&= -ag^{ij}((-a-1)f^{-a-2}f_if_j + f^{-a-1}f_{ij}) \\
&= a(a+1)f^{-a-2}|\nabla f|^2 - af^{-a-1}\Delta f \\
&= (-a(\frac{n}{2} - R) + a(a+1))f^{-a-1} - a(a+1)Rf^{-a-2} \\
&\leq a(\alpha - \frac{n}{2} + a + 1)f^{-a-1} = 0
\end{aligned}$$

□

تذکر ۱۶.۱۱.۲. *گزاره قبل برای حالت $R = \frac{n}{2} - 1$ برقرار نیست، مثلا $M = \mathbb{S}^{n-2} \times \mathbb{R}^2$ که $\mathbb{R}^2$ سالیتون گاوسی است، دارای انحنای اسکالر $R = \frac{n}{2} - 1$ و سهموی می‌باشد.*

پیوست ۱: شار یامابه و سالیتون‌های یامابه

حدس یامابه

فرض کنید $(\mathcal{M}, g_\circ)$ یک منیفلد ریمانی فشرده با بعد $n \geq ۳$ باشد. در این صورت متریک ریمانی g روی M موجود است که با $g_\circ$ هم‌دیس بوده و دارای انحنای اسکالر ثابت باشد.

شار یامابه

تعریف ۱۷.۱۱.۲. شار یامابه: فرض کنید $(\mathcal{M}, g)$ یک منیفلد ریمانی باشد، به عنوان تعمیمی از شار ریچی، شار یامابه را به صورت خانواده متریک‌های ریمانی که در معادله زیر صدق می‌کنند، تعریف می‌کنیم.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} g(t) = -R(t)g(t) \\ g(x, \circ) = g_\circ \end{cases} \tag{۲۲.۲}$$

تعریف ۱۸.۱۱.۲. شاریامابه نرمال شده: مشابه شار ریچی برای این‌که حجم تحت تحول شار ثابت بماند، شار یامابه نرمال شده را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} g(t) = -R(t)g(t) + r(t)g(t) \\ g(x, \circ) = g_\circ \end{cases} \tag{۲۳.۲}$$

که در آن r ، میانگین انحنای اسکالر یعنی $\dfrac{\int_M R d\mu}{\int_M d\mu}$ است.

گزاره ۱۹.۱۱.۲. *بر خلاف شار ریچی، شار یامابه حافظ ساختار هم‌دیس می‌باشد.*

برهان. به مرجع [۱۰] مراجعه کنید. □

حدس هامیلتون: فرض‌کنید $(M, g_\circ)$ یک منیفلد ریمانی فشرده با بعد $n \geq ۳$ باشد و $g(t)$ جواب یکتای شار یامابه با شروع از متریک ریمانی $g_\circ$ باشد. در این صورت $g(t)$ به متریکی با انحنای ثابت میل می‌کند.

قضیه ۲۰.۱۱.۲. *برندل: فرض کنید (M, g_0) یک منیفلد ریمانی فشرده n بعدی باشد. فرض‌کنید $3 \leq n \leq 5$ یا (M, g_0) موضعا به طور هم‌دیس تخت باشد و $g(t)$ جواب یکتای شار یامابه با شروع از متریک ریمانی g_0 باشد. در این صورت $g(t)$ به متریکی با انحنای ثابت هم‌گرا است.*

برهان. به مرجع [۱۰] مراجعه کنید. □

سالیتون‌های یامابه و نتایج آخرین مطالعات روی آن

تعریف ۲۱.۱۱.۲. سالیتون یامابه: فرض کنید $(\mathcal{M}, g)$ یک منیفلد ریمانی و X یک میدان برداری روی آن باشد. منظور از ساختار یک سالیتون یامابه، سه تایی (M, g, X) است، به طوری که برای مقدار ثابت $\rho = \frac{\mu}{n}$ در معادله سالیتون یامابه صدق می‌کند.

$$(R - \rho)g = \frac{1}{2}\mathcal{L}_X g \tag{۲۴.۲}$$

مانند سالیتون‌های ریچی، بسته به علامت ρ سالیتون را منقبض شونده، ایستا و یا منبسط شونده می‌گوییم.

تعریف ۲۲.۱۱.۲. سالیتون یامابه گرادیان: اگر در سالیتون یامابه (M, g, X) میدان برداری X ، گرادیان تابع هموازی چون $f : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ باشد، سالیتون یامابه را سالیتون یامابه گرادیان و تابع f را تابع پتانسیل می‌گویند. مشابه سالیتون‌های ریچی معادله سالیتون یامابه در حالت گرادیان به صورت زیر درمی آید:

$$(R - \rho)g = Hess(f) \tag{۲۵.۲}$$

قضیه ۲۳.۱۱.۲. *هر سالیتون یامابه گرادیان فشرده دارای انحنای ثابت است.*

برهان. به مرجع [۱۰] مراجعه کنید. □

قضیه ۲۴.۱۱.۲. *هر سالیتون یامابه گرادیانِ کاملِ موضعا به طور هم‌دیس تخت با انحنای برشی $k > 0$، متقارن دورانی است.*

برهان. به مرجع [۱۰] مراجعه کنید. □

حدس: آیا هر سالیتون یامابه فشرده، گرادیان است؟

فصل ۳

سالیتون‌های ریچی گرادیان کهلری

ریاضیات کاربردی، بد ریاضیاتی است. (هالموس)

شاخه‌ای از ریاضیات نیست که هر چند هم مجرد باشد، روزی در جهان کاربرد پیدا نکند. (لوباچفسکی)

۱.۳ تعریف شار ریچی‌ـ کهلر

تعریف ۱.۱.۳. شار ریچی‌ـ کهلر: فرض کنید $(\mathcal{M}, g, J)$ یک منیفلد کهلری باشد، خانواده متریک‌های کهلری $\{g_{\alpha\bar{\beta}}\}$ نسبت به ساختار را شار ریچی‌ـ کهلر روی گوییم، هرگاه در معادله شار ریچی‌ـ کهلر صدق کنند:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} g_{\alpha\bar{\beta}} = -R_{\alpha\bar{\beta}} \\ g(x, \circ) = g_\circ \end{cases} \tag{۱.۳}$$

تعریف ۲.۱.۳. شار ریچی‌ـ کهلر نرمال شده: مشابه حالت ریمانی برای این‌که حجم تحت تحول شار ثابت بماند، معادله شار ریچی‌ـ کهلر نرمال شده را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} g_{\alpha\bar{\beta}} = -R_{\alpha\bar{\beta}} + \dfrac{r}{n} g_{\alpha\bar{\beta}} \\ g(x, \circ) = g_\circ \end{cases} \tag{۲.۳}$$

که در آن r ، میانگین انحنای اسکالر یعنی $\dfrac{\int_M R d\mu}{\int_M d\mu}$ است.

۲.۳ سالیتون‌های ریچی‌ـ کهلر و سالیتون‌های ریچی‌ـ کهلر گرادیان

تعریف ۱.۲.۳. سالیتون ریچی‌ـ کهلر: فرض کنید $(\mathcal{M}, g, J)$ یک منیفلد کهلری و X یک میدان برداری حقیقی روی آن باشد که خودریختی بی‌نهایت کوچک ساختار J است، معادلا $\dfrac{\partial}{\partial z^{\bar{\alpha}}} X^\beta = \circ$. منظور از

ساختار یک سالیتون ریچی چهارتایی (M, g, J, X) است، به طوری که برای مقدار ثابت $\rho = \dfrac{\mu}{n}$ در معادله سالیتون صدق می‌کند.

$$Ric + \frac{1}{2}\mathcal{L}_X g = \rho g \tag{۳.۳}$$

مانند حالت ریمانی، بسته به علامت ρ سالیتون را منقبض شونده، ایستا و یا منبسط شونده می‌گوییم.

تعریف ۲.۲.۳. سالیتون ریچی_ کهلر گرادیان: اگر در سالیتون ریچی (M, g, J, X) میدان برداری X ، گرادیان تابع هموار چون $f : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ با این خاصیت که $f_{\alpha\beta} = f_{\bar\alpha\bar\beta} = 0$ باشد، سالیتون را سالیتون ریچی_ کهلر گرادیان و تابع f را تابع پتانسیل می‌گویند. مشابه حالت ریمانی معادله سالیتون ریچی_ کهلر در حالت گرادیان به صورت زیر درمی‌آید:

$$R_{\alpha\bar\beta} + f_{\alpha\bar\beta} = \rho g_{\alpha\bar\beta} \tag{۴.۳}$$

۳.۳ مثال‌هایی از سالیتون‌های ریچی_ کهلر

.... در این قسمت مثال‌های جالب اضافه خواهد شد.

۴.۳ بررسی توابع هم‌ساز روی سالیتون‌های ریچی_ کهلر گرادیانِ کامل

قضیه ۱.۴.۳. *هر تابع حقیقی هم‌ساز با انرژی کل متناهی، روی یک سالیتون ریچی_ کهلر گرادیان منقبض شونده کامل، تابعی ثابت است.*

برهان. ابتدا نشان می‌دهیم ∇f و ∇u برهم عمودند، لذا تابع u یک تابع f_هم‌ساز است، در نتیجه بنابر قضیه ۴ . ۲ در [۴۸] و قضیه‌ای در مقاله [۴۱]، u تابعی ثابت است.
تابع هموار $F : M \longrightarrow \mathbb{R}$ را با ضابطه $F = \langle \nabla f, \nabla u\rangle = \frac{1}{2}(u_\alpha f_{\overline{\alpha}} + u_{\overline{\alpha}} f_\alpha)$ تعریف می‌کنیم و نشان می‌دهیم $F \equiv 0$. بنابر قضیه‌ای مقاله [۳۳] هر تابع هم‌ساز با انرژی کل متناهی روی یک منیفلد کهلری، هم‌ساز چندگانه است، یعنی $u_{\alpha\overline{\beta}} = 0$. حال با محاسبه مستقیم نشان می‌دهیم، $\Delta F = 0$

$$(u_\alpha f_{\overline{\alpha}})_{\overline{\delta}} = u_{\alpha\overline{\delta}} f_{\overline{\alpha}} + u_\alpha f_{\overline{\alpha}\overline{\delta}}$$

$$(u_{\overline{\alpha}} f_\alpha)_\delta = u_{\overline{\alpha}\delta} f_\alpha + u_{\overline{\alpha}} f_{\alpha\delta}$$

حال فرض کنید $\phi : M \longrightarrow [۰,۱]$ یک تابع آزمون باشد که روی $B_r(P)$ (گوی ژئودزیکی به مرکز p و شعاع r) برابر ۱، بیرون $B_{۲r}(p)$ برابر صفر و $|\nabla\phi| < \frac{c}{r}$ است. حال با انتگرال‌گیری داریم:

$$\begin{aligned}\int_M |\nabla F|^۲\phi^۲ &= -\int_M (\Delta F)F\phi^۲ - ۲\int_M F\phi\langle\nabla F,\nabla\phi\rangle\\ &\leq ۲\int_M |\nabla F||F||\nabla\phi|\phi\\ &\leq \frac{۱}{۲}\int_M |\nabla F|^۲\phi^۲ + ۲\int_M |F|^۲|\nabla\phi|^۲\end{aligned}$$

پس

$$\begin{aligned}\int_M |\nabla F|^۲\phi^۲ &\leq ۴\int_M |F|^۲|\nabla\phi|^۲\\ &\leq ۴\int_M |\nabla u|^۲|\nabla f|^۲|\nabla\phi|^۲\\ &\leq C\int_{B_{۲r}(p)\setminus B_r(P)} |\nabla u|^۲\end{aligned}$$

و انتگرال آخر به صفر میل می‌کند، وقتی r به بی‌نهایت میل کند. بنابراین $\nabla F = ۰$ لذا F تابعی ثابت است، توجه کنید که F صفر است، چراکه رفتار مجانبی f در ۱.۷.۲ نشان می‌دهد f مقدار کمینه خود را در نقطه‌ای روی یک زیرمجموعه فشرده M اتخاذ می‌کند و چون گرادیان تابع f در آن نقطه صفر است پس $F = ۰$، لذا $F \equiv ۰$. درنتیجه:

$$\Delta_f u = \Delta u - \langle\nabla f,\nabla u\rangle = ۰$$

حال از فرمول بوچنر داریم:

$$\begin{aligned}\Delta_f|\nabla u|^۲ &= ۲Ric_f(\nabla u,\nabla u) + ۲\langle\nabla u,\nabla\Delta_f u\rangle + ۲|Hess(u)|^۲\\ &= |\nabla u|^۲ + ۲|Hess(u)|^۲\\ &\geq |\nabla u|^۲ + ۲|\nabla|\nabla u||^۲\end{aligned}$$

از طرفی:

$$\Delta_f u = ۲|\nabla u|\Delta_f|\nabla u| + ۲|\nabla|\nabla u||^۲$$

بنابراین:

$$\Delta_f|\nabla u| \geq \frac{۱}{۲}|\nabla u| : |\nabla u| \neq ۰ \qquad (۵.۳)$$

که در حالت خاص داریم $\Delta_f|\nabla u| \geq 0$ و $\int_M |\nabla u|^2 e^{-f} < \infty$. حال بنابرقضیه یائو_نبر_لیوویل در [۴۱] و [۴۸]، $|\nabla u|$ روی M مقدار ثابتی چون C است، بنابر رابطه ۵.۳ $\nabla u = 0$، لذا u روی M ثابت است. □

گزاره ۲.۴.۳. *هر سالیتون ریچی_ کهلر گرادیان کاملِ منقبض‌شونده حداکثر یک انتهای غیرسهموی دارد.*

برهان. مانند برهان گزاره ۱۴.۱۱.۲، بنابر قضیه‌ای در مقاله [۳۵]، اگر یک منیفلد دارای حداقل دو انتهای غیر سهموی باشد در این صورت تابعی کران‌دار و هم‌ساز با انرژی کل نامتناهی روی آن موجود است. از طرفی در قضیه ۱.۴.۳ ثابت شد در سالیتون‌های ریچی_ کهلر گرادیان کاملِ منقبض‌شونده، چنین توابعی وجود ندارند، بنابراین هر سالیتون ریچی_ کهلر گرادیان کاملِ منقبض‌شونده حداکثر یک انتهای غیرسهموی دارد.

□

گزاره ۳.۴.۳. *فرض کنید $(M, g, \nabla f)$ یک سالیتون ریچی_ کهلر گرادیان کاملِ منقبض شونده باشد که برای مقدار ثابت α داریم $R \leq \alpha < \frac{n}{2} - 1$ ، در این صورت M در بی‌نهایت هم‌بند است.*

برهان. نشان می‌دهیم $(M, g, \nabla f)$ در نامساوی وزن‌دار پوانکاره صدق می‌کند و بنابر قضیه‌ای در مقاله [۱۶] و قضیه‌ای در مقاله [۳۶]، سالیتون غیرسهموی است. برای هر تابع ϕ با محمل فشرده:

$$\begin{aligned}
(\frac{n}{2} - \alpha) \int_M f^{-1}\phi^2 &\leq \int_M (\Delta f) f^{-1}\phi^2 \\
&= -\int_M \langle \nabla f, \nabla(f^{-1}\phi^2)\rangle \\
&= -\int_M \langle \nabla f, -f^{-2}(\nabla f)\phi^2 + 2f^{-1}\phi\nabla\phi\rangle \\
&= \int_M f^{-2}|\nabla f|^2\phi^2 - 2\int_M \phi f^{-1}\langle \nabla f, \nabla\phi\rangle \\
&\leq (1+\varepsilon)\int_M f^{-2}|\nabla f|^2\phi^2 + \varepsilon^{-1}\int_M |\nabla\phi|^2 \\
&\leq (1+\varepsilon)\int_M f^{-1}\phi^2 + \varepsilon^{-1}\int_M |\nabla\phi|^2
\end{aligned}$$

بنابراین:

$$\varepsilon(\frac{n}{2} - \alpha - 1 - \varepsilon)\int_M f^{-1}\phi^2 \leq \int_M |\nabla\phi|^2$$

قرار دهید $\varepsilon = \frac{1}{2}(\frac{n}{2} - \alpha - 1)$، نامساوی پوانکاره با وزن $\rho = \frac{1}{4}(\frac{n}{2} - \alpha - 1)$ برقرار است. □

قضیه ۳.۴.۴. *فرض کنید $(M, g, \nabla f)$ یک سالیتون ریچی‌ـ کهلر گرادیان کاملِ ایستا باشد که انحنای ریچی آن از پایین کران‌دار است و برای هر $x \in M$ ثابت $C > ۰$ به طور یک‌نواخت (مستقل از x) وجود دارد به طوری که $Vol(B_۱(x)) \geq C$:*

الف‌ـ اگر M غیرسهموی باشد دراین صورت در بی‌نهایت هم‌بند است.

ب‌ـ اگر M سهموی باشد دراین صورت یا در بی‌نهایت هم‌بند است یا به طور یک‌ریخت به صورت $\mathbb{R} \times N$ شکافته می‌شوند که N یک منیفلد فشردهِ تخت ریچی است.

برهان. الف) منیفلد M غیرسهموی است، پس حداقل دارای یک انتهای غیرسهموی است. فرض کنید در بی‌نهایت ناهم‌بند باشد، بنابراین دارای بیش از یک انتها است و بنابر قضیه‌ی ۲.۱۱.۱ انتهای دیگر سهموی است، آن را H نام‌گذاری می‌کنیم. واضح است که $E = M \setminus H$ غیرسهموی است، چرا که در غیر این صورت M سهموی می‌شود. حال بنابر گزاره ۲.۱۱.۱۲ تابع هم‌ساز u روی M موجود است که:

۱) $\lim\limits_{x \to \infty, x \in H} u(x) = \infty$

۲) $\int_E |\nabla u|^۲ < \infty$ و $\inf\limits_{x \in E} u(x) = ۰$ ، حال ادعا می‌کنیم $\langle \nabla u, \nabla f \rangle = ۰$. از نامساوی قضیه ۲.۱۱.۱ داریم:

$$\int_M R|\nabla u|^۲\phi^۲ + \int_M |\nabla|\nabla u||^۲\phi^۲ \leq \underbrace{۴\int_M |\nabla u|^۲|\nabla\phi|^۲}_{*}$$
$$+\underbrace{\int_M |\nabla u|^۲ \langle \nabla f, \nabla\phi^۲ \rangle}_{**} \underbrace{-۲\int_M \langle \nabla f, \nabla u \rangle \langle \nabla u, \nabla\phi^۲ \rangle}_{***}$$

انتگرال *** صفر است، زیرا $\langle \nabla u, \nabla f \rangle = ۰$.

تابع آزمون ϕ را به صورت زیر برای A های به قدرکافی بزرگ روی انتهای غیرسهموی E،

$$\phi = \begin{cases} ۱ & : B_A(p) \cap E \\ A + ۱ - r & : (B_{A+۱}(p) \setminus B_A(p)) \cap E \\ ۰ & : E \setminus (B_{A+۱}(p) \end{cases}$$

و به صورت زیر برای T های به قدرکافی بزرگ روی انتهای سهموی H، تعریف می‌کنیم:

$$\phi = \begin{cases} ۱ & : u \leq T \\ \dfrac{۲T - u}{T} & : T < u < ۲T \\ ۰ & : ۲T \leq u \end{cases}$$

انتگرال * متناهی است، زیرا

انتگرال ** متناهی است، زیرا :

$$\int_H |\nabla u|^{۲} \langle \nabla f, \nabla \phi^{۲} \rangle = ۰$$
$$|\int_E |\nabla u|^{۲} \langle \nabla f, \nabla \phi^{۲} \rangle | \leq C \int_{(B_{A+۱}(p)\setminus B_A(p))} |\nabla u|^{۲}$$

انتگرال آخر به صفر میل می‌کند وقتی $A \to \infty$.

پس $R|\nabla u|^{۲} = |\nabla |\nabla u||^{۲} = ۰$، چون در انتهای غیرسهموی E، انرژی u متناهی است، لذا u تابعی است و این با بند ۲ شرایط u متناقض است. بنابراین فرض وجود انتهای سهموی باطل است و M فقط دارای یک انتهای غیرسهموی است، در نتیجه سالیتون در بی‌نهایت هم‌بند است. فقط کافی است ادعایی را که راجع به صفر بودن $\langle \nabla u, \nabla f\rangle$ کردیم ثابت کنیم.

ابتدا نشان می‌دهیم u هم‌ساز چندگانه است. برای این منظور کافی است نشان دهیم انرژی u متناهی است. توجه کنید ثابت C به طور یک‌نواخت وجود دارد که $\sup_H |\nabla u| \leq C$، این مطلب در قضیه‌ای در مقاله [۳۳] ثابت شده است. اکنون نشان می‌دهیم $\int_{B_r(p)} |\nabla u|^{۲} \leq Cr$. چون $|\nabla u|$ روی M کران‌دار است. برای $x \in \overline{B_r(p)} \cap H$ داریم $u(x) \leq C.r$. بنابر رابطه هم_سطح [۱] در نظریه اندازه داریم:

$$\begin{aligned}\int_{B_r(p)} |\nabla u|^{۲} &= \int_{B_r(p)\cap E} |\nabla u|^{۲} + \int_{B_r(p)\cap H} |\nabla u|^{۲}\\ &\leq C + \int_{\{x:u(x)\leq Cr\}\cap H} |\nabla u|^{۲}\\ &+ C + \int_{۰}^{Cr} (\int_{\{x:u(x)=t\}\cap H} |\nabla u|)dt \leq Cr\end{aligned}$$

توجه کنید، چون u هم‌ساز است، $\int_{u(x)=t} |\nabla u|$ مقدار ثابتی است.

از طرفی برای سالیتون‌های ایستا $|\nabla f| \leq C$، برای $F = \langle \nabla u, \nabla f\rangle$ با بحثی مشابه قضیه ۱.۴.۳ داریم:

$$\int_M |\nabla F|^{۲} \phi^{۲} \leq \frac{C}{r^{۲}} \int_{B_{۲r}(p)\setminus B_r(p)} |\nabla u|^{۲} |\nabla f|^{۲} \leq \frac{C}{r}$$

و $\frac{C}{r} \longrightarrow ۰$ وقتی $r \longrightarrow \infty$. بنابراین $\nabla F = ۰$ ، لذا $F = \langle \nabla u, \nabla f\rangle$ مقدار ثابتی است. گیریم $\langle \nabla u, \nabla f\rangle = a$ باشد. بنابر نامساوی کوشی_شوارتس $|a| = |\langle \nabla u, \nabla f\rangle| \leq |\nabla u||\nabla f| \leq C|\nabla u|$ ، این نتیجه می‌دهد $|\nabla u| \geq \delta > ۰$ روی M . چون نقاط انتهایی غیرسهموی دارای حجم نامتناهی هستند این مطلب با متناهی بودن انرژی u روی E در تناقض است. لذا $\langle \nabla u, \nabla f\rangle = ۰$.

ب) فرض‌کنیم منیفلد M سهموی باشد، پس همه نقاط انتهایی آن سهموی هستند. فرض کنید در بی‌نهایت

[۱] co-area

ناهم‌بند باشد، بنابراین دارای حداقل دو انتها است، گیریم E یکی از آن‌ها باشد، $F = M\backslash E$ یک انتهای دیگر است. پس تابع همساز u روی M موجود است که:

۱) $\lim_{x\to\infty, x\in E} u(x) = -\infty$

۲) $\lim_{x\to\infty, x\in F} u(x) = +\infty$

با به کارگیری قضیه ۲ . ۱ از [۴۳] برای هر یک از نقاط انتهایی به طور جداگانه نتیجه می‌دهد، گرادیان u روی هریک از آن‌ها و درنتیجه روی M کران‌دار است. با استدلالی شبیه قسمت (الف) برای $r > 0$ به اندازه کافی داریم:

$$\int_{B_r(p)} |\nabla u|^{2} \leq Cr$$

با به کارگیری لم ۳ . ۱ از [۳۳] ثابت می‌شود، u همساز چندگانه است. قراردهید $F = \langle \nabla u, \nabla f\rangle$ ، با بحث شبیه قضیه ۱.۴.۳ داریم:

$$\int_M |\nabla F|^{2}\phi^{2} \leq \frac{C}{r^{2}}\int_{B_{2r}(p)\backslash B_r(p)} |\nabla u|^{2}|\nabla f|^{2} \leq \frac{C}{r}$$

عبارت اخیر وقتی $r \longrightarrow \infty$ به صفر میل می‌کند و این نتیجه می‌دهد F روی M ثابت است، یعنی $\langle \nabla u, \nabla f\rangle = a$. مجددا از نامساوی ۲۱.۲ در ۱.۱۱.۲که به علت همساز بودن u برقرار است استفاده می‌کنیم. تابع آزمون ϕ را به صورت زیر برای T های به قدر کافی بزرگ روی مجموعه‌های تراز u که فشرده هستند، تعریف می‌کنیم:

$$\phi(x) = \begin{cases} 0 & : u \geq 2T \\ \dfrac{2T - u}{T} & : T < u < 2T \\ 1 & : -T \leq u \leq T \\ \dfrac{u + 2T}{T} & : -2T \leq u \leq -T \\ 0 & : u \leq -2T \end{cases}$$

حال با محاسبه سرراست برای هر T، داریم:

$$\begin{aligned}
&2\int_M \langle \nabla f, \nabla u\rangle \langle \nabla u, \nabla\phi^{2}\rangle \\
&= 4a\int_M \phi\langle \nabla u, \nabla\phi\rangle \\
&= -\frac{4a}{T^{2}}\int_{T<u<2T}(2T-u)|\nabla u|^{2} + \frac{4a}{T^{2}}\int_{-2T<u<-T}(u+2T)|\nabla u|^{2} \\
&= -\frac{4a}{T^{2}}(\int_T^{2T}(2T-t)dt)\int_{u=t}|\nabla u| + \frac{4a}{T^{2}}(\int_{-2T}^{-T}(t+2T)dt)\int_{u=t}|\nabla u| \\
&= -2a\int_{u=t}|\nabla u| + 2a\int_{u=t}|\nabla u| = 0
\end{aligned}$$

به طور مشابه:

$$
\begin{aligned}
&\int_M |\nabla u|^۲ \langle \nabla f, \nabla \phi^۲ \rangle \\
&= ۲a \int_M |\nabla u|^۲ \langle \nabla f, \nabla u \rangle \phi\phi' \\
&= -\frac{۲a}{T^۲} \int_{T<u<۲T} |\nabla u|^۲ (۲T-u) + \frac{۲a}{T^۲} \int_{-۲T<u<-T} |\nabla u|^۲ (u+۲T) \\
&= -a \int_{u=t} |\nabla u| + a \int_{u=t} |\nabla u| = ۰
\end{aligned}
$$

هم‌چنین چون $|\nabla u|$ کران‌دار است، وقتی $T \longrightarrow \infty$:

$$\int_M |\nabla u|^۲ |\nabla \phi|^۲ \longrightarrow ۰$$

بنابراین با میل دادن $T \longrightarrow \infty$ در ۲۱.۲ نتیجه می‌گیریم $|\nabla|\nabla u||| = R|\nabla u|^۲ = ۰$. این نتیجه می‌دهد $|\nabla u| = C$. اگر $C = ۰$ لذا u ثابت است و کار تمام است. در غیر این‌صورت $R = ۰$ لذا $Ric = ۰$، بنابراین $\nabla^۲ f = ۰$ پس، M به طور یک‌ریخت به صورت $\mathbb{R} \times N$ شکافته می‌شوند که N یک منیفلد فشردهِ تخت ریچی است.

بنابراین ثابت کردیم: اگر $(M, g, \nabla f)$ یک سالیتون ریچی‌ـ کهلر گرادیان کاملِ ایستا باشد که انحنای ریچی آن از پایین کران‌دار است و برای هر $x \in M$ ثابت $C > ۰$ وجود دارد به طوری که $Vol(B_۱(x)) \geq C$، در این صورت M یا در بی‌نهایت هم‌بند است یا به طور یک‌ریخت به صورت $\mathbb{R} \times N$ شکافته می‌شوند که N یک منیفلد فشردهِ تخت ریچی است.

□

مراجع

[۱] اندرسون، مایکل ت، مترجم سید محمدباقر کاشانی، هندسی‌سازی ۳ خمینه‌ها از طریق شارریچی، فرهنگ و اندیشه ریاضی ،شماره ۴۷ ،۱۳۹۰، صص ۵۷ تا ۷۸

[۲] بیدآباد، بهروز، هندسه منیفلد ۱، انتشارات دانش‌گاه صنعتی امیرکبیر، چاپ چهارم ، ۱۳۸۹

[۳] بیدآباد، بهروز، هندسه منیفلد ۲، انتشارات دانش‌گاه صنعتی امیرکبیر، چاپ اول ، ۱۳۹۰

[۴] شهشهانی، سیاوش، جزوه هندسه منیفلد، دانش‌گاه صنعتی شریف، ۱۳۷۰

[۵] صفدری، محمد، شارریچی ریمانی و کیلر، حدس‌های پوانکاره، هندسی‌سازی و کالابی، فرهنگ و اندیشه ریاضی، شماره ۴۲، بهار ۱۳۸۸، صص ۵۳ تا ۷۴

[۶] کاک، م. ترجمه ابوالقاسم لاله، استقلال آماری در احتمالات، آنالیز و نظریه اعداد، شرکت انتشارات علمی و فرهنگی، چاپ اول ۱۳۷۴

[۷] کرانس، استیون ج. ترجمه محمد جلودار ممقانی، آنالیز مختلط، نگرش هندسی، شرکت انتشارات علمی و فرهنگی، چاپ اول ۱۳۷۹

[۸] میلنر، ج، ترجمه پدرام صفری، به سوی حدس پوانکاره و رده بندی ۳ـ خمینه‌ها، نشرریاضی، سال ۱۴، شماره۲، ۱۳۸۳

[۹] نسر، س، گروبر، د، سرنوشت خمینه‌ها، نشرریاضی، سال ۱۵، شماره۲، ۱۳۸۵

[10] Brendle, S., Evolution equations in Riemannian geometry, Japan J. Math.,6,45-61(2011)

[11] Brendle, S., Uniqueness of gradient Ricci solitons, arXiv:1010.3684v2 [math.DG] 29 Mar 2011

[12] Cao, H.-D.: Existence of gradient Kähler–Ricci solitons. In: Elliptic and Parabolic Methods in Geometry, Minneapolis, MN, 1994, pp. 1–16. A.K. Peters, Wellesley (1996)

[13] Cao, H.-D.: Recent progress on Ricci solitons. Adv. Lect. Math. 11(2), 1–38 (2010)

[14] Cao, H.-D., Zhou, D.: On complete gradient shrinking Ricci solitons. J. Differ. Geom. 85(2), 175–186 (2010)

[15] Cao, X., *Compact gradient shrinking Ricci solitons with positive curvature operator, Geometric Analysis*, 17(3), 425-432, (2007).

[16] Carillo, J., Ni, L.: Sharp logarithmic Sobolev inequalities on gradient solitons and applications. Commun. Anal. Geom. 17, 721–753 (2009)

[17] Chen, Y. G., Giga, Y., and Goto, S., Uniqueness and Existence of Viscosity Solutions of Generalized Mean Curvature Flow Equations, J. Diff. Geom. 33 (1991), 749-786.

[18] Chow, B., Knof, D., The Ricci flow:an introdutction, Mathematical Surveys and Monographs, Vol.110, American Mathematical Socitey, Providence, RI, 2004.

[19] Chow, B., Knof, D., The Ricci Flow-Techniques and Applications Part I Geometric Aspects 2007

[20] Chow, B., Lu, P., and Ni, L., Hamilton 's Ricci flow, Graduate Studies in Mathematics, vol. 77, AMS, 2006.

[21] Derdzinski, A.: Compact Ricci solitons, preprint

[22] Eells, J., Jr. and Ampon, J. H. S, Harmonic mappings of Riemannian manifolds, American Journalof Mathematics, Vol. 86, No. 1 (Jan.,1964), 109-160.

[23] Eminenti, M, La Nave, G, Mantegazza, C, *Ricci solitons: the equation point of view.* manuscripta math. 127, 345–367 (2008)

[24] Fernandez-Lopez, M., Garcia-Rio, E.: Rigidity of shrinking Ricci solitons.Math. Z. (2011) 269:461–466

[25] Grigor'yan, A., Analytic and geometric background of recurrence and non-explosion of the Brownian motion on Riemannian manifolds. Bull. AMS 36(2), 135–249 (1999)

[26] Hamilton, R., Three-manifold with positive Ricci curvature, J. Diff. Geom. 17 (1982), 155-306.

[27] Hamilton, R. S., Four-manifolds with positive curvature operator, J. Diff. Geom. 24 (1986), No. 2, 153-179.

[28] Headrick, M.,Wiseman, T., Ricci Flow and Black Holes, Class. Quantum. Grav. 23 (2006) 6683-6707.

[29] Hopper, C., Andrews, B., The Ricci Flow in Riemannian Geometry: A Complete Proof of the Differentiable 1/4-Pinching Sphere Theorem, Springer, 2010.

[30] Jost, J., Riemannian Geometry and Geometric Analysis, 6th ed. Springer, 2011.

[31] Kodaira, K. , Complex Manifolds and Deformation of Complex Structures

[32] Li, X. D., From the Boltzmann H-theorem to Perelman's W-entropy formula for the Ricci flow, arXiv:1303.5193v1 [math.DG] 21 Mar 2013

[33] Li, P., On the structure of complete Kähler manifolds with nonnegative curvature near infinity. Invent. Math. 99, 579–600 (1990)

[34] Li, P., Harmonic functions and applications to complete manifolds, lecture notes on personal webpage

[35] Li, P., Tam, L.F., Harmonic functions and the structure of complete manifolds. J. Differ. Geom. 35, 359–383 (1992)

[36] Li, P., Wang, J., Weighted Poincaré inequality and rigidity of complete manifolds. Ann. Sci. Éc. Norm. Super. 39(6), 921–982 (2006)

[37] Milnor, J., On Manifolds Homeomorphic to the 7-Sphere, Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 64, No. 2 (Sep., 1956), pp. 399-405

[38] Miron, R., Anastasiei, M., The Geometry of Lagrange paces: Theory and Applications, FTPH No. 59 (Kluwer Academic Publishers,Dordrecht, Boston, London, 1994).

[39] Miron,R., Anastasiei, M., Vector Bundles and Lagrange Spaces with Applications to Relativity (Geometry Balkan Press, Bukharest, 1997); translation from Romanian of (Editura Academiei Romane, 1987)[108].

[40] Munteanu, O., Sesum, N.; On Gradient Ricci Solitons, J Geom Anal (2013) 23:539–561

[41] Naber, A.: Noncompact shrinking 4-solitons with nonnegative curvature. J. Reine Angew. Math. 645, 125–153 (2010)

[42] Nakai, M.: On Evans potential. Proc. Jpn. Acad. 38, 624–629 (1962)

[43] Napier, T., Ramachandran, M.: Structure theorems for complete Kähler manifolds and applications to Lefschetz type theorems. Geom. Funct. Anal. 5, 809–851 (1995)

[44] Nitta,M., Conformal Sigma Models with Anomalous Dimensions and Ricci Solitons, Mod. Phys. Lett. A 20 (2005), 577-584.

[45] Perelman, G., The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications, arXiv:math.DG/0303109v1, November 11, 2002.

[46] Perelman, G., Ricci flow with surgery on three-manifold, Arxiv: Math. DG/0303109v, Mar 2003.

[47] Perelman, G.: Ricci flow with surgery on three manifolds. arXiv:math.DG/0303109

[48] Petersen, P., Wylie, W.: On the classification of gradient Ricci solitons. Geom. Topol. 14(4), 2277– 2300 (2010)

[49] Petersen, P, Riemannian Geometry, volume 171 of Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1998.

[50] Pigoli, S., Rimoldi, M. and Setti, A.,Remarks on non-compact gradient Ricci solitons, arXiv 0905.2868

[51] Smale, S., Generalized Poincare's Conjecture in Dimensions Greater Than Four, The Annals of Mathematics, 2nd Ser., Vol. 74, No. 2. (Sep., 1961), pp. 391-406.

[52] Tam, L. F. , *Harmonic functions on connected sums of manifolds*, Math. Z. 211, 315-322 (1992).

[53] Thurston, William P., Three dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry, Bull. Amer. Math. Soc. 6 (1982), 357-381

[54] Woolgar, E., Some Applications of Ricci Flow in Physics , Canadian Journal of Physic, Vol.86, No. 4, 645-651.

[55] Yau, S.T.: Harmonic functions on complete Riemannian manifolds. Commun. Pure Appl. Math. 28, 201–228 (1975)

[56] Zeng, W., Gu, X. D., Ricci Flow for Shape Analysis and Surface Registration: Theories, Algorithms and Applications , Springer, 2013.

[57] Zhang, S., On a Sharp Volume Estimate for Gradient Ricci Solitons with Scalar Curvature Bounded Below, Acta Mathematica Sinica, May, 2011, Vol. 27, No. 5, pp. 871–882

[58] Zhu, Zhang, H., On The Completness of Gradient Ricci Solitons, Proceedings of the American Mathematical Society Volume 137, Number 8, August 2009, Pages 2755–2759 S 0002-9939(09)09866-9

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

التصاق	connection
ایستا	steady
پادورد	contravariant
تابع آزمون	cut-off function
تابعک	functional
تابع‌گون	functor
تابع‌گون فراموشی	forgetful functor
تراگذر	transitive
تکیه‌گاه	sopport
تمام‌ریخت	holomorphic
رسته	category
صلبیت	rigidity
کامل	complete
مانسته‌گی	homology
مقطع	section
منقبض شونده	shirinking
منبسط شونده	expanding
موضعا به طور هم‌دیس تخت	locally conformaly flat
وابرریختی	diffeomorphism
هم‌مانسته‌گی	cohomology
هم‌دیفرانسیل	codifferential
هم‌ساز	harmonic

هم‌ساز چندگانه .... pluriharmonic

هم‌ساز زبرین .... superharmonic

هم‌ساز زیرین .... subharmonic

هم‌سان‌ریختی .... homeomorphism

هموار .... smooth

هم‌ورد .... covariant

یک‌متری .... isometry

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

category	رسته
codifferential	هم‌دیفرانسیل
cohomology	هم‌مانسته‌گی
complete	کامل
connection	التصاق
contravariant	پادورد
covariant	هم‌ورد
cut-off function	تابع آزمون
diffeomorphism	وابرریختی
expanding	منبسط شونده
forgetful functor	تابع‌گون فراموشی
functional	تابعک
functor	تابع‌گون
harmonic	هم‌ساز
holomorphic	تمام‌ریخت
homeomorphism	هم‌سان‌ریختی
homology	مانسته‌گی
isometry	یک‌متری
locally conformaly flat	موضعا به طور هم‌دیس تخت
pluriharmonic	هم‌ساز چندگانه
rigidity	صلبیت
section	مقطع

منقبض شونده .... shirinking

هموار .... smooth

هم‌ساز زیرین .... subharmonic

هم‌ساز زبرین .... superharmonic

تکیه‌گاه .... sopport

ایستا .... steady

تراگذر .... transitive

Surname: Najafpour | Name: Mehrdad

Title: Gradient Ricci Solitons

Supervisor: Dr. B. Bidabad

Advisor: Dr. E. Eftekhary

Degree: Master of Science | Subject: Pure Mathematics

Field: Geometry

Amirkabir University Of Technology (Tehran Polytechnic) Mathematic & Computer Science Faculty

Date: Spring 2015 | Number of pages: 72

Keywords: Ricci Flow, Ricci Solitons, Harmonic Function, Reimannian Manifolds, Kählerian Manifolds

Abstract

Munteanu, O. and Sesum, N., in 2013 published an interesting paper on gradient Ricci soliton, which contains two parts. In the first part they derive integral curvature estimates for complete gradient shrinking Ricci solitons. In the second part they address the issue of existence of harmonic functions on gradient shrinking Kähler and gradient steady Ricci solitons. As master thesis the present author try to collect all requirments of Reimanniam and Kahlerian manifolds to study all proofs in the above mentioned paper. Moreover, we prepare a survey of litlerature in these subjects, even often publication of the main paper of this M.S. disertation.

Amirkabir University Of Technology (Tehran Polytechnic)
Mathematic & Computer Science Faculty

Dissertation Submitted in Partial
Fulfillment of The Requirements For The
Degree of Master of Science in
Pure Mathematics

Gradient Ricci Solitons

Supervisor

Dr. B. Bidabad

Advisor

Dr. E. Eftekhary

by

Mehrdad Najafpour

Spring 2015