Introduction aux méthodes quantitatives appliquées à la gestion

MAT 1002

Mehrdad Najafpour

PUBLISHED BY ....

Première impression, janvier 2021

Contents

Préface

Ces notes sont destinées aux étudiants du cours de Introduction aux méthodes quantitatives appliquées à la gestion (sigle MAT 1002). Elles constituent la matière première d'un cours de premier cycle d'une durée d'environ 40 heures. Elles sont divisées en quatre chapitres. Dans le premier chapitre ....

Les principaux objectifs de ces notes de cours sont établir les bases des principaux objets mathématiques élémentaires apparaissant dans les diverses sciences contemporaines. Comme il s'agit d'un retour aux mathématiques pour plusieurs d'entre vous, un souci particulier sera accordé à l'acquisition d'une bonne méthode de travail mathématique. Notamment nous chercherons à aborder les mathématiques comme un sujet oú l'on réfléchit et non pas comme un sujet oú l'on suit bêtement des régles.
De façon générale les sérances de cours magistral et d'exercices auront un contenu et une mission complètement différents : le cours servira à présenter les notions mathématiques, à en dégager les principales propriétés avec rigueur, alors que les séances d'exercices feront pratiquer les manipulations des notions à travers des exemples et, lorsque cela sera possible, des problèmes de nature plus appliquée.

À lavance, je voudrais remercier **Mathieu Boseé** et **Ali Khardani**.

Mehrdad Najafpour,
janvier 2021.
Montréal, Canada
najafpour_ ghazvini.mehrdad@uqam.ca

1. Les ensemble de nombres

1.1 Ensemble et sous ensemble

Définition 1.1.1 — Définition informelle de ensemble. Un **ensemble** est une collection bien définie d'objets qu'on nomme **éléments**.

■ **Exemple 1.1**
- L'ensemble des étudiants et étudiantes suivant le cours MAT1002.
- L'ensemble constitue par les lettre de l'alphabet $\{a, b, c, \cdots, x, y, z\}$.
- L'ensemble défini par un jeu de 52 cartes.
- L'ensemble vide à savoir $\emptyset$ ou simplement $\{\}$, qui est ne contenant.
- Les nombres **naturels** $\mathbb{N}$:
$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\},$$
est l'ensemble des nombres entiers positifs.
- Les nombres **entiers** $\mathbb{Z}$:
$$\mathbb{Z} = \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\},$$
est l'ensemble de tous les entiers, qu'ils soient positifs, négatifs ou nuls.
- Les nombres **rationnels** $\mathbb{Q}$: tous les nombres pouvant s'écrire sous forme de fraction $\frac{a}{b}$, où a et b sont des entiers et $b \neq 0$.
$$\mathbb{Q} = \{-50, -2, -\frac{1}{2020}, 0, 1, \frac{2}{4}, 3, \cdots\}.$$
- Les nombres **irrationnels** $\mathbb{Q}^c$: est l'ensemble des nombres dont la représentation décimale est non périodique.
$$\mathbb{Q}^c = \{\sqrt{2} = 1,414213\cdots, \pi = 3,141592653\cdots, e = 2,71828\cdots, \cdots\}.$$
- Les nombres **réels** $\mathbb{R}$: sont l'ensemble de tous les nombres qui sont rationnels ou irrationnels.
$$\mathbb{R} = \{-2, -\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}, \frac{5}{9}, \pi, e, e^2, \cdots\}.$$

- L'ensemble $\mathbb{D}$ des nombres **décimaux**.
- L'ensemble $\mathscr{P}$ des points d'un plan.
- L'ensemble $\mathscr{L}$ des droites d'un plan.

■

Définition 1.1.2 — Les intervalles bornés. Soit a et b deux nombres réels. On appelle intervalle fermé borné de a à b , et on note $[a,b]$, le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ contenant tous les nombres réels compris entre a et b; les nombres a et b sont eux-mêmes éléments de $[a,b]$,

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}.$$

De même façon on peut écrire:

$$[a,b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$$
$$]a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$$
$$]a,b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}.$$

Définition 1.1.3 — Les intervalles infinis. Soit a un nombre réel. On appelle intervalle fermé infini de a à $+\infty$, et on note $[a,+\infty[$, le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ contenant tous les nombres réels supérieurs à a ; le nombre a est un élément de $[a,+\infty[$,

$$[a,+\infty] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\},$$

De même façon on peut écrire:

$$]a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$$
$$]-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$$
$$]-\infty,b[= \{x \in \mathbb{R} : x < b\}.$$

■ **Exemple 1.2** Voici des exemples illustrant les différents cas de figure qu'on peut rencontrer : ■

Inégalités	Intervalle	Représentation	Signification
$-2 \leqslant x \leqslant 5$	$x \in [-2;5]$		x est compris entre -2 inclus et 5 inclus
$-2 < x < 5$	$x \in]-2;5[$		x est compris entre -2 exclu et 5 exclu
$-2 \leqslant x < 5$	$x \in [-2;5[$		x est compris entre -2 inclus et 5 exclu
$-2 < x \leqslant 5$	$x \in]-2;5]$		x est compris entre -2 exclu et 5 inclus
$x \leqslant 5$ $5 \geqslant x$	$x \in]-\infty;5]$		x est inférieur ou égal à 5
$x < 5$ $5 > x$	$x \in]-\infty;5[$		x est strictement inférieur à 5
$-2 \leqslant x$ $x \geqslant -2$	$x \in [-2;+\infty[$		x est supérieur ou égal à -2
$-2 < x$ $x > -2$	$x \in]-2;+\infty[$		x est strictement supérieur à -2

Définition 1.1.4 — L'appartenance d'un élément. Élément d'un ensemble Le symbole $\in$ indique qu'un élément **appartient** à un ensemble. À l'inverse, le symbole $\notin$ identifie un élément qui **n'appartient pas** à un ensemble.

■ **Exemple 1.3** Par exemple

- $a \in \{a,e,i,o,u,y\}$.
- $j \notin \{a,e,i,o,u,y\}$.
- $2 \in \mathbb{N}$, $2 \in \mathbb{Z}$, $2 \in \mathbb{Q}$
- $-2 \notin \mathbb{N}$, $-2 \in \mathbb{Z}$, $-2 \in \mathbb{Q}$
- $0,5 = \frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$, $0,5 \notin \mathbb{Z}$, $0,5 \in \mathbb{Q}$.
- $\frac{1}{0} \notin \mathbb{Q}$.
- $0 \in [-2,5]$
- $0 \notin]0,1[$

■

■ **Exemple 1.4** On peut écrire

$$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} : a,b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}.$$

■

Définition 1.1.5 — Les sousensembles. L'ensemble A est dit un **sousensemble** de B si et seulement si tous les éléments de A sont aussi des éléments de B .On dit alors que l'ensemble A est inclus dans l'ensemble B. La notation $A \subseteq B$ est employée pour symboliser l'inclusion de A dans B. Le symbole $\nsubseteq$ indique pour sa part qu'un ensemble n'est pas inclus dans un autre $C \nsubseteq D$ exprime donc qu'au moins un élément de C n'est pas un élément de D.

■ **Exemple 1.5** Par exemple

- $\{a,e\} \subseteq \{a,e,i,o,u,y\}$.
- $\{a,b\} \nsubseteq \{a,e,i,o,u,y\}$.
- $\{1,2,7\} \subseteq \{1,2,3,7,17,19\}$.
- $\{1,2,5\} \nsubseteq \{1,2,3,7,17,19\}$.
- $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$.
- $\mathbb{Z} \nsubseteq \mathbb{N}$.
- $[2,5] \subseteq [1,7]$
- $[2,5] \nsubseteq [1,5[$

■

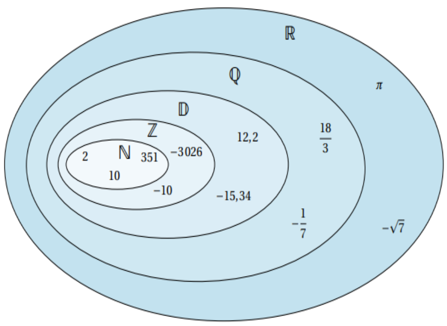

Figure 1.1: Ensembles de nombres

■ **Exemple 1.6** L'ensemble vide est sous-ensemble de tout ensemble, par exemple

$$\emptyset = \{\} \subseteq \{a, e, i, o, u, y\}.$$

■

■ **Exemple 1.7** Notez que $2 \in \mathbb{N}$ et $2 \not\subseteq \mathbb{N}$, mais $\{2\} \subseteq \mathbb{N}$. ■

Définition 1.1.6 — Intersection de deux ensembles. Soient $A, B \subseteq E$ deux sous-ensembles d'un ensemble E. On définit l'intersection de A et B comme étant l'ensemble

$$A \cap B = \{x \in E : x \in A \text{ et } x \in B\}.$$

Définition 1.1.7 — Union de deux ensembles. Soient $A, B \subseteq E$ deux sous-ensembles d'un ensemble E. On définit l'union de A et B comme étant l'ensemble

$$A \cup B = \{x \in E : x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

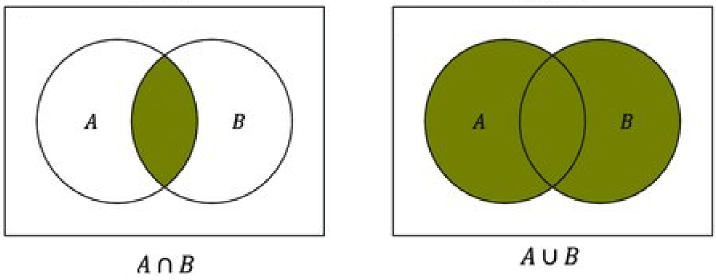

Figure 1.2: Intersection et union de deux ensembles

■ **Exemple 1.8** Soit les trois ensembles finis $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 3, 5, 7\}$ et $C = \{2, 4, 6, 8\}$. Alors il est simple de décrire sous la forme d'une liste chacun des ensembles suivants:

1. $A \cap B$
$$A \cap B = \{0, 1, 2, 3, 4\} \cap \{1, 3, 5, 7\} = \{1, 3\}.$$
2. $A \cup B$
$$A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4\} \cup \{1, 3, 5, 7\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 7\}.$$
3. $B \cap C$
$$B \cap C = \{1, 3, 5, 7\} \cap \{2, 4, 6, 8\} = \{\} = \emptyset.$$
4. $A \cup (B \cap C)$
$$\begin{aligned} A \cup (B \cap C) &= \{0, 1, 2, 3, 4\} \cup (\{1, 3, 5, 7\} \cap \{2, 4, 6, 8\}) \\ &= \{0, 1, 2, 3, 4\} \cup \emptyset = \{0, 1, 2, 3, 4\}. \end{aligned}$$
5. $(A \cup B) \cap (A \cup C)$
$$\begin{aligned} (A \cup B) \cap (A \cup C) &= (\{0, 1, 2, 3, 4\} \cup \{1, 3, 5, 7\}) \cap (\{0, 1, 2, 3, 4\} \cup \{2, 4, 6, 8\}) \\ &= \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 7\} \cap \{0, 1, 2, 3, 4, 6, 8\} \\ &= \{0, 1, 2, 3, 4\}. \end{aligned}$$

■

■ **Exemple 1.9** Soit les trois ensembles finis $A = \{0,1,2,\{2,3\},4\}$, $B = \{0,1,2,\{3,4\},4\}$ et $C = \{0,\{1,2\},\{3,4\}\}$. Alors il est simple de décrire sous la forme d'une liste chacun des ensembles suivants:

1. $A \cap B$
$$A \cap B = \{0,1,2,\{2,3\},4\} \cap \{0,1,2,\{3,4\},4\} = \{0,1,2,4\}.$$
2. $A \cup B$
$$A \cup B = \{0,1,2,\{2,3\},4\} \cup \{0,1,2,\{3,4\},4\} = \{0,1,2,\{2,3\},\{3,4\},4\}.$$
3. $B \cap C$
$$B \cap C = \{0,1,2,\{3,4\},4\} \cap \{0,\{1,2\},\{3,4\}\} = \{0,\{3,4\}\}$$
4. $A \cup (B \cap C)$
$$A \cup (B \cap C) = \{0,1,2,\{2,3\},4\} \cup (\{0,\{3,4\}\}) = \{0,1,2,\{2,3\},\{3,4\},4\}$$

■

■ **Exemple 1.10** Déterminer les intervalles suivants

1. $[-2,5] \cap [-1,7]$

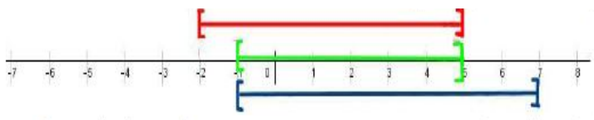

Figure 1.3: $[-2,5] \cap [-1,7] = [-1,5]$

2. $[-2,5] \cup [-1,7]$

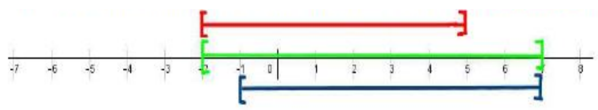

Figure 1.4: $[-2,5] \cup [-1,7] = [-2,7]$

3. $[-4,1] \cap [2,3] = \emptyset$ parce que les deux intervalles n'ont aucun nombre en commun.

■

Exercices

Exercice 1.1 Dire à quels ensembles de nombres $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}^c$ et $\mathbb{R}$ chacun des nombres suivants peut appartenir:

$$-3, \quad \frac{1}{7}, \quad \sqrt{64}, \quad \sqrt{20}, \quad \frac{1}{\pi}.$$

■

Exercice 1.2 Énumérer les éléments de chacun des ensembles suivants:

1. L'ensemble des éléments $x \in \mathbb{N}$ tel que $-5 < x < 2$.
2. L'ensemble des éléments $x \in \mathbb{Z}$ tel que $-5 < x < 2$.
3. L'ensemble des éléments $x \in \mathbb{Z}$ tels que $5 < x$ et $x < 1$.
4. L'ensemble des éléments $x \in \mathbb{Z}$ tel que $x \leq 4$ et $-4 < x$.

■

Exercice 1.3 Déterminez les éléments de chacun des ensembles suivants:

a) $\{x \in \mathbb{N} : x^2 = 1\}$
b) $\{x \in \mathbb{Z} : x^2 = 1\}$
c) $\{x \in \mathbb{N} : x^2 = -1\}$
d) $\{x \in \mathbb{Z} : x^2 = -1\}$
e) $\{x \in \mathbb{N} : 2x = 3\}$
f) $\{x \in \mathbb{Q} : 2x = 3\}$
g) $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 = 2\}$
h) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 = 2\}$

■

Exercice 1.4 Exprimer chacun des ensembles suivant sous forme d'intervalle de $\mathbb{R}$:

1. L'ensemble des réels x tel que $5 \leq x < 2$.
2. L'ensemble des réels x tel que $-5 < x < 2$.
3. L'ensemble des réels x tel que $x > -5$ et $x < 1$.
4. L'ensemble des réels x tels que $x < -6$ et $x > -2$.
5. L'ensemble des réels x tels que $x \leq -6$ ou $x > -2$.
6. L'ensemble des réels x tels que $x > -2$ et $x \leq -4$.
7. L'ensemble des réels x tels que $(x \leq 3$ et $x > -1)$ ou $(-5 < x \leq 2)$.

■

Exercice 1.5 Déterminer les intervalles suivants:

a) $]3,9[\cup[7,11]$
b) $[0,+\infty[\cap]-\infty,1[$
c) $]-1,0[\cup]0,+\infty[$
d) $]-1,0[\cap]0,+\infty[$

■

D'exercices du livre

Exercice 1.6 1.13 page 43 ■

Exercices supplémentaires

Exercice 1.7 Vrai ou faux:

a) $\emptyset \in \emptyset$
b) $\emptyset \subseteq \emptyset$
c) $\emptyset \in \{\emptyset\}$
d) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$
e) $\emptyset \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
f) $\emptyset \subseteq \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
g) $\{\emptyset\} \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
h) $\{\emptyset\} \subseteq \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

■

1.2 Opérations sur les ensemble de nombres

Remarque 1.2.1 L'ordre de priorité des opérations Pour effectuer une série d'opérations, l'ordre suivant doit être respecté:
1. Effectuer les opérations entre parenthèses.
2. Évaluer les exposants.
3. Effectuer les multiplications et les divisions de gauche à droite.
4. Effectuer les ajouts et les soustractions de gauche à droite.

■ **Exemple 1.11** Effectuer les opérations suivantes:

1. $1 \times 2 + 3 \times 4$
$$1 \times 2 + 3 \times 4 = 2 + 12 = \boxed{14}$$
2. $1 \times (2+3) \times 4$
$$1 \times (2+3) \times 4 = 1 \times 5 \times 4 = \boxed{20}$$
3. $(1+2) \times (3+4)$
$$(1+2) \times (3+4) = 3 \times 7 = \boxed{21}$$
4. $36 \div (6 \div 2)$
$$36 \div (6 \div 2) = 36 \div 3 = \boxed{12}$$
5. $(36 \div 6) \div 2$
$$(36 \div 6) \div 2 = 6 \div 2 = \boxed{3}$$

■

Remarque 1.2.2 Loi des signes:
$$(+)(+) = +, (+)(-) = -, (-)(+) = -, (-)(+) = -.$$

■ **Exemple 1.12** Effectuer les opérations suivantes:

1. $2 \times (-3) + 3 \times (-4)$
$$2 \times (-3) + 3 \times (-4) = (-6) + (-12) = \boxed{-18}$$
2. $2 \times (-3) - 3 \times (-4)$
$$2 \times (-3) - 3 \times (-4) = (-6) - (-12) = -6 + 12 = \boxed{6}$$

■

1.2.1 Opérations sur les fractions

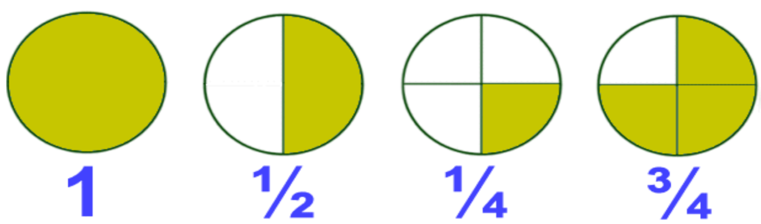

Figure 1.5: Fractions

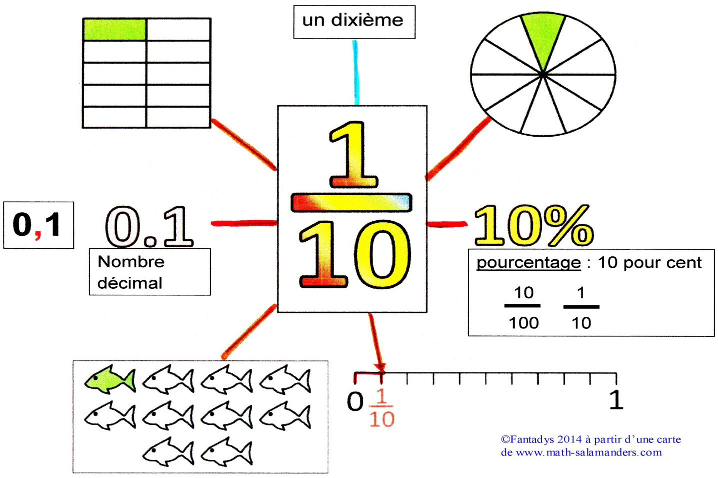

Figure 1.6: Pourcentages, fractions et nombres décimaux

Remarque 1.2.3 Les opérations sur les fractions:

1. Addition et soustraction de fractions:
   - Si les fraction sont exprimées avec le même dénominateur, il suffit d'additionner ou soustraire leurs numérateurs.

$$\frac{3}{5}+\frac{4}{5}=\frac{3+4}{5}=\frac{9}{5}.$$

$$\boxed{\frac{a}{b}\pm\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}}$$

   - Si les dénominateur sont différents, il faut ramener les fractions au même dénominateur.

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=\frac{5}{15}+\frac{3}{15}=\frac{5+3}{15}=\frac{8}{15}.$$

2. Multiplication de fractions: Il suffit multiplier les numérateurs ensemble et les dénominateurs ensemble.

$$\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}=\frac{1\times 3}{2\times 5}=\frac{3}{10}.$$

$$\boxed{\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}}$$

3. Division de fractions: La division est une multiplication par l'inverse du dénominateur. L'inverse de la fraction $\frac{a}{b}$ est $\frac{b}{a}$.

$$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{5}}=\frac{1}{2}\div\frac{3}{5}=\frac{1}{2}\times\frac{5}{3}=\frac{5}{6}.$$

$$\boxed{\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{a\times d}{b\times c}.}$$

■ **Exemple 1.13** Faites les opérations suivantes sur les fractions:

1. $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3\times 1}{3\times 2}+\frac{2\times 1}{2\times 3}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\boxed{\frac{5}{6}}$$

2. $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{3\times 1}{3\times 2}-\frac{2\times 1}{2\times 3}=\frac{3}{6}-\frac{2}{6}=\boxed{\frac{1}{6}}$$

3. $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}$

$$\frac{3}{5}\times\frac{7}{4}=\frac{3\times 7}{5\times 4}=\boxed{\frac{21}{20}}$$

4. $\frac{1}{2}\div\frac{1}{3}$

$$\frac{1}{2}\div\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\times\frac{3}{1}=\frac{1\times 3}{2\times 1}=\boxed{\frac{3}{2}}$$

5. $\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}}{\frac{5}{6}+\frac{7}{8}}$

$$\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}}{\frac{5}{6}+\frac{7}{8}}=\dfrac{\frac{2}{4}+\frac{3}{4}}{\frac{40}{48}+\frac{42}{48}}=\dfrac{\frac{5}{4}}{\frac{82}{48}}=\frac{5}{4}\div\frac{82}{48}=\frac{5}{4}\times\frac{48}{82}=\frac{240}{328}=\boxed{\frac{30}{41}}$$

■

■ **Exemple 1.14** Simplifier:

1. $\dfrac{2021\times 3}{2021\times 3+2021\times 3}$

$$\frac{2021\times 3}{2021\times 3+2021\times 3}=\frac{6063}{6063+6063}=\boxed{\frac{1}{2}}$$

ou

$$\frac{2021\times 3}{2021\times 3+2021\times 3}=\frac{2021\times 3}{2021\times(3+3)}=\frac{3}{6}=\boxed{\frac{1}{2}}.$$

2. $\dfrac{2021\times 2}{2021\times 3+2021\times 5}$

$$\frac{2021\times 2}{2021\times 3+2021\times 5}=\frac{2021\times 2}{2021\times(3+5)}=\frac{2}{8}=\boxed{\frac{1}{4}}.$$

3. $\dfrac{2021\times 2}{2021\times 3-2021\times 5}$

$$\frac{2021\times 2}{2021\times 3-2021\times 5}=\frac{2021\times 2}{2021\times(3-5)}=\frac{2}{-2}=\boxed{-1}.$$

■

■ **Exemple 1.15** Faites les opérations suivantes sur les nombre décimaux:

1. $0,04 \times 30$
$$0,04 \times 30 = \frac{4}{100} \times \frac{30}{1} = \frac{120}{100} = \boxed{1,2}$$
2. $0,04 \times 3$
$$0,04 \times 3 = \frac{4}{100} \times \frac{3}{1} = \frac{12}{100} = \boxed{0,12}$$
3. $0,04 \times 0,3$
$$0,04 \times 0,3 = \frac{4}{100} \times \frac{3}{10} = \frac{12}{1000} = \boxed{0,012}$$
4. $10 \times 0,25$
$$10 \times 0,25 = \frac{10}{1} \times \frac{25}{100} = \frac{250}{100} = \boxed{2,5}$$
5. $100 \div 0,25$
$$100 \div 0,25 = \frac{100}{1} \div \frac{25}{100} = \frac{100}{1} \times \frac{100}{25} = \frac{10000}{25} = \boxed{400}$$
6. $100 \div 0,4$
$$100 \div 0,4 = \frac{100}{1} \div \frac{4}{10} = \frac{100}{1} \times \frac{10}{4} = \frac{1000}{4} = \boxed{250}$$
7. $0,5 \times 0,25$
$$0,5 \times 0,25 = \frac{5}{10} \times \frac{25}{100} = \frac{125}{1000} = \boxed{0,125}$$
ou
$$0,5 \times 0,25 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8} = \boxed{0,125}$$
8. $0,125 \div 0,05$
$$0,125 \div 0,05 = \frac{1}{8} \div \frac{1}{4} = \frac{1}{8} \times \frac{4}{1} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} = \boxed{0,5}$$

■

Remarque 1.2.4 — Période d'un nombre rationnel. Dans l'écriture d'un nombre rationnel en notation décimale, groupe de chiffres qui se répète dans la partie décimale de ce nombre.

1. $\frac{5}{3} = 1,666666666\cdots = 1,\overline{6}$
2. $\frac{22}{7} = 3,142857142\cdots = 3,\overline{142857}$
3. $\frac{7}{5} = 1,4$ (la période est 0.)

■ **Exemple 1.16** Écrire les nombres $x = 0,\overline{27}$ et $y = 1,45\overline{123}$ en format rationnel $\frac{a}{b}$.

Solution: On a $100x = 27,\overline{27}$ et

$$100x = 27,\overline{27}$$
$$x = 0,\overline{27}$$
$$------------$$
$$100x - x = 27,\overline{27} - 0,\overline{27}$$
$$99x = 27$$
$$x = \boxed{\frac{27}{99}}$$

Amenons la virgule juste avant la période $\overline{123}$ en multipliant par 100:

$$\begin{aligned}
100000y &= 145123,\overline{123} \\
100y &= 145,\overline{123} \\
100000y - 100y &= 145123,\overline{123} - 145,\overline{123} \\
99900y &= 144978 \\
y &= \boxed{\frac{144978}{99900}} = \boxed{\frac{24163}{16650}}
\end{aligned}$$

■

Exercices

Exercice 1.8 Évaluez les expressions suivantes:

1. $(2+3)\times 13 - 5\times 12$
2. $((2+1)\times(5+7))\times(2-3)$
3. $((1-4)\times(8-5))\times((9-3)\times(5-7))$
4. $(-(2\times 3)\times(4+1)) - ((3\times 2)-(4-6))$
5. $6\times 3\times 0 - 17\times 2$
6. $10 - 39 \div 3 + 4$

■

Exercice 1.9 Calculer la valeur des expressions suivantes.

1. $\frac{1}{5}+\frac{1}{9}$
2. $\frac{5}{12}+\frac{5}{9}$
3. $\dfrac{\frac{3+2}{35}}{3+4}$
4. $\dfrac{1+\frac{1}{2}}{\dfrac{3+\frac{2}{5}+3}{3+4}}$

■

Exercice 1.10 Résoudre:

1. $(\frac{5}{8}\times\frac{6}{5})+\frac{4}{5}-\frac{2}{3}$
2. $(\frac{5}{8}\div\frac{6}{5})-\frac{4}{5}-\frac{2}{3}$
3. $(\frac{1}{2}\times\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}\times\frac{1}{5})$
4. $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}$
5. $(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})\times(\frac{1}{2}+\frac{1}{5})$

6. $(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})\div(\frac{1}{2}+\frac{1}{5})$
7. $(\frac{1}{2}\div\frac{4}{5})\times(\frac{5}{6}+\frac{1}{6})$
8. $\frac{2}{3}(\frac{5}{6}\div\frac{2}{3})+\frac{6}{7}(\frac{1}{6}+\frac{2}{3})$
9. $(-\frac{11}{2}(\frac{2}{3}+\frac{4}{7}))\times(-\frac{4}{3}(\frac{2}{5}-\frac{4}{15}))$
10. $(\frac{8}{9}+\frac{4}{7})(\frac{5}{2}+2)-(\frac{1}{4}-\frac{3}{10}+\frac{5}{8})$

Exercice 1.11 Faites les opérations suivantes sur les nombre décimaux:
1. $0,4\times 0,25$
2. $0,4\div 0,25$
3. $0,125\times 0,25$
4. $0,125\div 0,25$

Exercice 1.12 Mettre sous forme de fractions irréductibles les nombres x et y suivants

$x=-8,\bar{2}$ et $y=0,0\overline{162}$.

D'exercices du livre

Exercice 1.13 2.17 page 100:
6,7,8,11,13,19,20

Exercices supplémentaires

Exercice 1.14 Vrai ou faux:

1. Si $a,b\in\mathbb{Q}^c$, alors $a+b\in\mathbb{Q}^c$.
2. Si $a,b\in\mathbb{Q}^c$, alors $a.b\in\mathbb{Q}^c$.
3. Si $a,b\in\mathbb{Q}^c$ et $a\geq 0$, alors $a^b\in\mathbb{Q}^c$.

1.3 Exposants et racine n-ème

Remarque 1.3.1 L'expression a^n où $n \in \mathbb{N}$, est définie comme suit:

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{\text{n}}.$$

Par exemple:

$$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$$

■ **Exemple 1.17** Effectuer les opérations suivantes:

1. $3 \times 4 + 5^2$

$$3 \times 4 + 5^2 = 12 + 25 = \boxed{37}$$

2. $3 \times (4+5)^2$

$$3 \times (4+5)^2 = 3 \times 9^2 = 3 \times 81 = \boxed{243}$$

3. $3 \times (4+5^2)$

$$3 \times (4+5^2) = 3 \times (4+25) = 3 \times 29 = \boxed{87}$$

■

■ **Exemple 1.18** Déterminer

$$2^{3^2} + (2^3)^2$$

$$2^{3^2} + (2^3)^2 = 2^9 + 8^2 = 512 + 64 = \boxed{576}$$

■

■ **Exemple 1.19** Évaluez l'expression suivante:

$$(1-(28-3^3)+5^2-(5\times 6+7^0)-(4^2 \div (2^3 \div 2)))^3.$$

$$\begin{aligned}
(1-(28-3^3)+5^2-(5\times 6{+}7^0)-(4^2 \div (2^3 \div 2)))^3 \\
&= (1-(28-27)+25-(5\times 6+1)-(4^2 \div 2^2))^3 \\
&= (1-(28-27)+25-(5\times 6+1)-(2^2))^3 \\
&= (1-(1)+25-(31)-(4))^3 = (-10)^3 = \boxed{-1000}
\end{aligned}$$

■

Remarque 1.3.2 — Les exposant zéro. On considère maintenant un nombre a non nul, par définition:

$$a^0 = 1,$$

et 0^0 est indéfine. Par exemples

- $3^0 = 1$
- $(\frac{1}{2})^0 = 1$
- $(-2)^0 = 1$

Remarque 1.3.3 — Les exposants négatifs. On considère maintenant un nombre a non nul et un entier naturel n. Le nombre a^{-n}, lu « a puissance moins n » ou « a exposant moins n » est l'inverse de la puissance n-ième de a, c'est-à-dire :

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Par exemples

- $3^{-5} = \frac{1}{3^5}$
- $\frac{1}{2^8} = 2^{-8}$
- $\left(\frac{8}{6}\right)^{-3} = \left(\frac{6}{8}\right)^3$

■ **Exemple 1.20** Évaluez l'expression suivante:

1. -3^2
$$-3^2 = (-1) \times 3^2 = (-1) \times 3 \times 3 = \boxed{-9}$$
2. $(-3)^2$
$$(-3)^2 = (-3) \times (-3) = \boxed{9}$$
3. $(-3)^{-2}$
$$(-3)^{-2} = \frac{1}{(-3)^2} = \frac{1}{(-3) \times (-3)} = \boxed{\frac{1}{9}}$$
4. -3^{-2}
$$-3^{-2} = (-1)(3^{-2}) = -\frac{1}{3^2} = -\frac{1}{3 \times 3} = \boxed{-\frac{1}{9}}$$

■

Remarque 1.3.4 — Les propriétés des exposants. Pour $a, b \in \mathbb{R}$ et $m, n \in \mathbb{N}$ on a,

- Si deux puissances d'une même base sont égales, alors les exposants sont égaux.
$$a^m = a^n \Longrightarrow m = n$$
- Produit de puissances de même base:
$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$
- Quotient de puissances de même base :
$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \text{ où } a \neq 0$$
- Puissance d'un produit :
$$(ab)^m = a^m b^m$$
- Puissance d'un quotient :
$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m} \text{ où } b \neq 0$$
- Puissance d'une puissance :
$$(a^m)^n = a^{mn}$$

■ **Exemple 1.21** Simplifier l'expression suivante:

1. $2^{-8} \times (2^{-2} \times 2 \times 2^5)^4$

$$2^{-8} \times (2^{-2} \times 2 \times 2^5)^4 = 2^{-8} \times (2^{-2+1+5})^4 = 2^{-8} \times (2^4)^4 = 2^{-8} \times 2^{16} = \boxed{2^8}$$

2. $\dfrac{2^5 \times 2^3}{2^4}$

$$\frac{2^5 \times 2^3}{2^4} = \frac{2^8}{2^4} = 2^{8-4} = \boxed{2^4}$$

■

■ **Exemple 1.22** Simplifier:

1. $8^3 \times 4^5$

$$8^3 \times 4^5 = (2^3)^3 \times (2^2)^5 = 2^9 \times 2^{10} = \boxed{2^{19}}.$$

2. $4^4 \times 81^2$

$$4^4 \times 81^2 = (2^2)^4 \times (3^4)^2 = 2^8 \times 3^8 = \boxed{6^8}.$$

■

■ **Exemple 1.23** Que vaut n dans les expressions suivantes?

1. $(6^2)^3 = 6^n$

$$(6^2)^3 = 6^{2\times 3} = 6^6 = 6^n \Longrightarrow n = 6$$

2. $6^{2^3} = 6^n$

$$6^{2^3} = 6^{(2^3)} = 6^8 = 6^n \Longrightarrow n = 8$$

3. $4^7 \times 2^9 = 2^n$

$$4^7 \times 2^9 = (2^2)^7 \times 2^9 = 2^{14} \times 2^9 = 2^{23} = 2^n \Longrightarrow n = 23$$

4. $13^n = 11^0$

$$13^n = 11^0 = 1 \Longrightarrow n = 0$$

■

■ **Exemple 1.24** Résoudre les équations suivantes:

1. $2^{3n-1} = 2^n$

$$\begin{aligned} 2^{3n-1} &= 2^n \\ 3n - 1 &= n \\ 3n - n &= 1 \\ 2n = 1 &\Longrightarrow \boxed{n = \frac{1}{2}} \end{aligned}$$

2. $2^{3n-1} = 4^n$

$$\begin{aligned} 2^{3n-1} &= 4^n = 2^{2n} \\ 3n - 1 &= 2n \\ 3n - 2n &= 1 \\ n = 1 &\Longrightarrow \boxed{n = 1} \end{aligned}$$

3. $4^{3n-1} = 8^n$

$$\begin{aligned} 4^{3n-1} &= 8^n \\ 2^{2(3n-1)} &= 2^{3n} \\ 2(3n-1) &= 3n \\ 6n-2 &= 3n \\ 6n-3n &= 2 \\ 3n = 2 &\Longrightarrow \boxed{n = \frac{2}{3}} \end{aligned}$$

■

Remarque 1.3.5 — Les racines et les exposants fractionnaires. La **racine nième** d'un nombre a notée par $\sqrt[n]{a}$ est un nombre x tel que:

$$x^n = \underbrace{x \times x \times x \times \cdots \times x}_{n\text{-fois}} = a,$$

Par exemple la racine carré ou radical de 5 ou $\sqrt{5}$ est un nombre x tel que:

$$x^2 = x \times x = 5,$$

On peux écrire $x = \sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}}$ car

$$5^{\frac{1}{2}}.5^{\frac{1}{2}} = (5^{\frac{1}{2}})^2 = 5^{\frac{2}{2}} = 5^1 = 5.$$

■ **Exemple 1.25** Évaluer:

1. $\sqrt{25}$

$$\sqrt{25} = 25^{\frac{1}{2}} = (5^2)^{\frac{1}{2}} = 5^{2\times\frac{1}{2}} = 5^1 = \boxed{5}$$

2. $\sqrt[3]{27}$

$$\sqrt[3]{27} = 27^{\frac{1}{3}} = (3^3)^{\frac{1}{3}} = 3^{3\times\frac{1}{3}} = 3^1 = \boxed{3}$$

3. $\sqrt{81}$

$$\sqrt{81} = 81^{\frac{1}{2}} = (9^2)^{\frac{1}{2}} = 9^{2\times\frac{1}{2}} = 9^1 = \boxed{9}$$

ou

$$\sqrt{81} = 81^{\frac{1}{2}} = (3^4)^{\frac{1}{2}} = 3^{4\times\frac{1}{2}} = 3^2 = \boxed{9}$$

4. $\sqrt[4]{81}$

$$\sqrt[4]{81} = 81^{\frac{1}{4}} = (3^4)^{\frac{1}{4}} = 3^{4\times\frac{1}{4}} = 3^1 = \boxed{3}$$

■

Remarque 1.3.6 — Propriétés des radicaux. Pour $a,b \geq 0$ et $m,n \in \mathbb{Z}$ on a:

- $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$
- $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ si $b \neq 0$.

- $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Exemple 1.26 Simplifier

1. $\sqrt{1000000}$
$$\sqrt{1000000} = 1000000^{\frac{1}{2}} = (10^6)^{\frac{1}{2}} = 10^{6\times\frac{1}{2}} = 10^3 = \boxed{1000}$$

2. $\sqrt[3]{1000000}$
$$\sqrt[3]{1000000} = 1000000^{\frac{1}{3}} = (10^6)^{\frac{1}{3}} = 10^{6\times\frac{1}{3}} = 10^2 = \boxed{100}$$

3. $\sqrt[4]{1000000}$
$$\sqrt[4]{1000000} = 1000000^{\frac{1}{4}} = (10^6)^{\frac{1}{4}} = 10^{6\times\frac{1}{4}} = 10^{\frac{3}{2}} = 10\times 10^{\frac{1}{2}} = \boxed{10\sqrt{10}}$$
ou
$$\sqrt[4]{1000000} = \sqrt[4]{10000\times 100} = \sqrt[4]{10000}\times\sqrt[4]{100} = (10^4)^{\frac{1}{4}}\times(10^2)^{\frac{1}{4}} = 10\times 10^{\frac{1}{2}} = \boxed{10\sqrt{10}}$$

4. $\sqrt[5]{1000000}$
$$\sqrt[5]{1000000} = 1000000^{\frac{1}{5}} = (10^6)^{\frac{1}{5}} = 10^{6\times\frac{1}{5}} = 10^{\frac{6}{5}} = 10\times 10^{\frac{1}{5}} = \boxed{10\sqrt[5]{10}}$$
ou
$$\sqrt[5]{1000000} = \sqrt[5]{100000\times 10} = \sqrt[5]{100000}\times\sqrt[5]{10} = (10^5)^{\frac{1}{5}}\times(10)^{\frac{1}{5}} = 10\times 10^{\frac{1}{5}} = \boxed{10\sqrt[5]{10}}$$

5. $\sqrt[6]{1000000}$
$$\sqrt[6]{1000000} = 1000000^{\frac{1}{6}} = (10^6)^{\frac{1}{6}} = 10^{6\times\frac{1}{6}} = 10^1 = \boxed{10}$$

6. $\sqrt[7]{1000000}$
$$\sqrt[7]{1000000} = 1000000^{\frac{1}{7}} = (10^6)^{\frac{1}{7}} = 10^{6\times\frac{1}{7}} = 10^{\frac{6}{7}} = 10\times 10^{-\frac{1}{7}} = \boxed{\frac{10}{\sqrt[7]{10}}}$$
ou
$$\sqrt[7]{1000000} = \sqrt[7]{\frac{10000000}{10}} = \frac{\sqrt[7]{10000000}}{\sqrt[7]{10}} = \frac{(10^7)^{\frac{1}{7}}}{10^{\frac{1}{7}}} = \boxed{\frac{10}{\sqrt[7]{10}}}$$

7. $\sqrt{0,000001}$
$$\sqrt{0,000001} = 0,000001^{\frac{1}{2}} = (10^{-6})^{\frac{1}{2}} = 10^{-6\times\frac{1}{2}} = 10^{-3} = \boxed{0,001}$$

8. $\sqrt[3]{0,000001}$
$$\sqrt[3]{0,000001} = 0,000001^{\frac{1}{3}} = (10^{-6})^{\frac{1}{3}} = 10^{-6\times\frac{1}{3}} = 10^{-2} = \boxed{0,01}$$

■

Exemple 1.27 Évaluer les expressions suivantes:

1. $\sqrt{12}\times\sqrt{3}$
$$\sqrt{12}\times\sqrt{3} = \sqrt{36} = \boxed{6}$$

2. $(\sqrt{18}-\sqrt{2})\sqrt{2}$
$$(\sqrt{18}-\sqrt{2})\sqrt{2} = \sqrt{18\times 2} - \sqrt{2\times 2} = \sqrt{36}-\sqrt{4} = 6-2 = \boxed{4}$$

3. $\dfrac{\sqrt{500}}{\sqrt[4]{80}}$

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{500}}{\sqrt[4]{80}} &= \frac{\sqrt{5\times 100}}{\sqrt[4]{16\times 5}}\\ &= \frac{\sqrt{5}\times\sqrt{100}}{\sqrt[4]{16}\times\sqrt[4]{5}}\\ &= \frac{5^{\frac{1}{2}}\times 10}{2\times 5^{\frac{1}{4}}} = \frac{5^{\frac{1}{2}}\times 5}{1\times 5^{\frac{1}{4}}} = 5^{\frac{1}{2}+1-\frac{1}{4}} = \boxed{5^{\frac{5}{4}}}\end{aligned}$$

■

■ **Exemple 1.28** Simplifier l'expression suivante:

$$\begin{aligned}(\sqrt[3]{3^4}\times 5^2)\div\left(\left(\frac{1}{5}\right)^3\times 3^{\frac{1}{3}}\right) &= (3^{\frac{4}{3}}\times 5^2)\div\left(\left(\frac{1}{5}\right)^3\times 3^{\frac{1}{3}}\right)\\ &= (3^{\frac{4}{3}}\times 5^2)\div\left(5^{-3}\times 3^{\frac{1}{3}}\right)\\ &= \frac{3^{\frac{4}{3}}\times 5^2}{3^{\frac{1}{3}}\times 5^{-3}}\\ &= \frac{3^{\frac{4}{3}}}{3^{\frac{1}{3}}}\times\frac{5^2}{5^{-3}} = 3^{\frac{4}{3}-\frac{1}{3}}\times 5^{2-(-3)} = \boxed{3\times 5^5}\end{aligned}$$

■

Exercices

Exercice 1.15 Simplifier

1. $2^7 \div 2^9$
2. 10^0
3. $\sqrt{12}$
4. $\sqrt[3]{108}$

■

Exercice 1.16 Évaluez les expressions suivantes:

1. $\sqrt{6+3}-2$
2. $\sqrt[3]{2^6}$
3. $2\sqrt[3]{8}$
4. $1000^{\frac{1}{3}}$

■

Exercice 1.17 Simplifier l'expression suivante:

1. $3^5\sqrt{5}$
2. $\sqrt[3]{4^2} \times 4^{\frac{2}{5}} \times 4^{-2}$
3. $(\frac{6^4}{\sqrt[6]{6^4}})^3$
4. $(\sqrt[3]{3} \times 9^{\frac{3}{5}})^{10}$
5. $\sqrt[5]{(\frac{25^2}{\sqrt[3]{5^4}})^2}$

■

Exercice 1.18 Résoudre

1. $3^{2x+1} = 9^{2x-1}$
2. $4^{2x+1} = 8^{2x-1}$
3. $(x-1)^{\frac{1}{3}} = -2$
4. $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^x = (\sqrt{3}+\sqrt{2})^x$

■

Exercice 1.19 Effectuer l'opération et déterminer valeurs a, b et c

$$\left[\left(\frac{4^{3x-5}}{3 \times 5^{2x}}\right)^x \left(\frac{5^{3x-5}}{3 \times 4^{-2x}}\right)^x\right] = 3^a \times 4^b \times 5^c$$

■

Exercices supplémentaires

Exercice 1.20 Comparer les nombres donnés dans les cas suivants et justifier la réponse :

1. $7, \quad 5\sqrt{2}, \quad 4\sqrt{3}$
2. $\sqrt{5}-2, \quad \sqrt{6}-\sqrt{5}$
3. $\dfrac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}-1}, \quad \dfrac{2\sqrt{2}+1}{2(\sqrt{2}-1)}$

■

1.4 Calcul des logarithmes

Considérer $3^5 = 243$. Comme nous l'avons vu dans la section précédente, si nous regardons la base on peut écrire:

$$3 = \sqrt[5]{243},$$

maintenant, si nous regardons l'exposant on peut écrire:

$$5 = \log_3 243$$

En général, pour $x > 0$ et $b > 0$, $b \neq 1$,

$$b^r = x \iff r = \log_b x$$

■ **Exemple 1.29** Quelle est la valeur de $\log_2 8$?
Quel exposant doit-on donner à la base $b = 2$ pour obtenir 8? On a $2^3 = 8$, donc

$$\log_2 8 = 3.$$

■

■ **Exemple 1.30** Quelle est la valeur de $\log_{10} 100000000$?
Quel exposant doit-on donner à la base $b = 10$ pour obtenir 100000000? On a $10^8 = 100000000$, donc

$$\log_{10} 100000000 = 8.$$

■

Remarque 1.4.1 En général pour $b > 0$ et $b \neq 1$:

$$\log_b b^r = r.$$

Remarque 1.4.2 — Convocation. Pour le base $b = 10$ juste on peut écrire log au lieu de $\log_{10}$. Par exemple:

$$\log 100 = 2.$$

Aussi pour le base $e = 2,71828...$[a] juste on peut écrire ln au lieu de $\log_e$ et appelée **logarithme naturel** ou **logarithme népérien**.

[a] Cette constante mathématique, également appelée nombre d'Euler ou constante de Néper en référence aux mathématiciens Leonhard Euler et John Napier.

■ **Exemple 1.31** Quelle est la valeur de $\log_3 1$?
Quel exposant doit-on donner à la base $b = 3$ pour obtenir 1? On a $3^0 = 1$, donc

$$\log_3 1 = 0.$$

■

Remarque 1.4.3 En général pour $b > 0$ et $b \neq 1$:

$$\log_b 1 = 0.$$

■ **Exemple 1.32** Quelle est la valeur de $\log_{\frac{1}{4}} 64$?

Quel exposant doit-on donner à la base $b = \dfrac{1}{4}$ pour obtenir 64? On a

$$(\frac{1}{4})^{-3} = (4^{-1})^{-3} = 4^{(-1)\times(-3)} = 4^3 = 64,$$

donc

$$\log_{\frac{1}{4}} 64 = -3.$$

■

Remarque 1.4.4 — Les lois des logarithmes. Pour $x, y > 0$, $b > 0$ et $b = 1$ on a

- Le logarithme d'un produit:

$$\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y.$$

- Le logarithme d'un quotient:

$$\log_b(\frac{x}{y}) = \log_b x - \log_b y.$$

- Simplification:

$$\log_{b^n} x^m = \frac{m}{n} \log_b x.$$

- Le changement de base:

$$\log_y x = \frac{\log_b x}{\log_b y}.$$

■ **Exemple 1.33** Calculer sans la calculatrice les valeurs suivantes.

1. $\log_3 1$

$$\log_3 1 = \boxed{0}$$

2. $\log_2 256$

$$\log_2 256 = \log_2(2^8) = \boxed{8}$$

3. $\log_{12} 4 + \log_{12} 36$

$$\log_{12} 4 + \log_{12} 36 = \log_{12}(4 \times 36) = \log_{12}(144) = \log_{12}(12^2) = \boxed{2}$$

4. $\log_2 686 - \log_2 343$

$$\log_2 686 - \log_2 343 = \log_2(\frac{686}{343}) = \log_2(2) = \boxed{1}$$

5. $\log_{2^5}(2^{17})$

$$\log_{2^5}(2^{17}) = \frac{17}{5}\log_2(2) = \boxed{\frac{17}{5}}$$

6. $\log_9 3$

$$\log_9(3) = \log_{3^2}(3) = \frac{1}{2}\log_3(3) = \boxed{\frac{1}{2}}$$

7. $\log_{0,001}(0,0001)$

$$\log_{0,001}(0,0001) = \log_{10^{-3}}(10^{-4}) = \frac{-4}{-3}\log_{10}(10) = \boxed{\frac{4}{3}}$$

8. $2^{\log_2 3}$
   Si $x = \log_2 3$, c-a-d $2^x = 3$, alors $2^{\log_2 3} = 2^x = 3$.

■

■ **Exemple 1.34** Traduire sous la forme logarithmique.

1. $0,0001 = 10^{-4}$
$$\log(0,0001) = -4$$
2. $4 = \sqrt[3]{64}$
$$4 = \sqrt[3]{64} \Longrightarrow 4^3 = 64 \Longrightarrow \log_4(64) = 3$$
3. $9 = 27^{\frac{2}{3}}$
$$\log_{27}(9) = \frac{2}{3}$$
4. $\frac{1}{2} = 32^{-\frac{1}{5}}$
$$\log_{32}(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{5}$$

■

■ **Exemple 1.35** En sachant que $\log_b(2) = A$ et $\log_b(3) = B$, évaluer :

1. $\log_b(\frac{8}{9})$
$$\log_b(\frac{8}{9}) = \log_b 8 - \log_b 9 = \log_b(2^3) - \log_b(3^2) = 3\log_b(2) - 2\log_b(3) = \boxed{3A - 2B}$$
2. $\log_2(3)$
$$\log_2(3) = \frac{\log_b(3)}{\log_b(2)} = \boxed{\frac{B}{A}}$$
3. $\log_b(6b)$
$$\log_b(6b) = \log_b 2 + \log_b(3) + \log_b b = \boxed{A + B + 1}$$

■

■ **Exemple 1.36** Déterminer la valeur de A dans l'égalité suivante:

$$\log_5(3^5) + \log_3(7^2) - \log_7(2^5) = \log_2(A)$$

On peux écrire:

$$\begin{aligned}\log_2(A) &= \log_5(3^5) + \log_3(7^2) - \log_7(2^5)\\ &= 5\log_5 3 + 2\log_3 7 - 5\log_7 2\end{aligned}$$

alors

$$\boxed{A = 2^{5\log_5 3 + 2\log_3 7 - 5\log_7 2}}$$

■

■ **Exemple 1.37** Résoudre les équations suivantes

1. $\log_3(x) = 5$
$$\boxed{x = 3^5 = 243}$$

2. $\log_x(32) = \dfrac{5}{3}$

$$\log_x(32) = \log_x(2^5) = 5\log_x(2) = \frac{5}{3},$$

donc $\log_x(2) = \dfrac{1}{3}$, alors $x^{\frac{1}{3}} = 2$,

$$x = (x^{\frac{1}{3}})^3 = 2^3 = \boxed{8}$$

3. $2^x = 100$

$$\begin{aligned} x = \log_2(100) &= \log_2(4\times 25)\\ &= \log_2(2^2\times 5^2)\\ &= \log_2(2^2)+\log_2(5^2)\\ &= 2\log_2(2)+2\log_2(5)\\ &= \boxed{2+2\log_2(5)} \end{aligned}$$

■

■ **Exemple 1.38** Résoudre

$$11^{3x+5}\times 7^{8x-2} = 5^{2x}$$

$$\begin{aligned} \ln(11^{3x+5}\times 7^{8x-2}) &= \ln(5^{2x})\\ \ln(11^{3x+5})+\ln(7^{8x-2}) &= \ln(5^{2x})\\ (3x+5)\ln 11+(8x-2)\ln 7 &= (2x)\ln 5\\ (3\ln 11)x+5\ln 11+(8\ln 7)x-2\ln 7 &= (2\ln 5)x\\ (3\ln 11)x+(8\ln 7)x-(2\ln 5)x &= 2\ln 7-5\ln 11\\ (3\ln 11+8\ln 7-2\ln 5)x &= 2\ln 7-5\ln 11 \end{aligned}$$

Alors

$$x = \frac{2\ln 7-5\ln 11}{3\ln 11+8\ln 7-2\ln 5}.$$

■

Exercices

Exercice 1.21 Traduire sous la forme logarithmique.

1. $2 = \sqrt[5]{32}$
2. $9^{-6} = \dfrac{1}{531441}$

Exercice 1.22 Calculer sans la calculatrice les valeurs suivantes.

1. $\log_4 1024$
2. $\log_7 343$
3. $\log_{\frac{3}{8}} \dfrac{27}{512}$
4. $\ln \frac{1}{\sqrt[5]{\mathbf{e}}}$
5. $\log_{5^3}(25^{17})$
6. $\log_2 \sqrt[7]{32}$
7. $\log_{0,1} 0,0001$
8. $\log_{0,0001} 0,1$
9. $3^{\log_3 27}$
10. $\dfrac{\log 5 - \log 8 - 1}{\log(2\sqrt{2}) + \log 4}$

Exercice 1.23 Résoudre les équations suivantes

1. $(\dfrac{1}{2})^x = 8$
2. $7 + 15\mathbf{e}^{1-3x} = 10$
3. $6^{3x+1} = 4^{5x+2}$
4. $5^{2x+1} = (0,04)^{-28}$
5. $4\mathbf{e}^{1+3x} - 9\mathbf{e}^{5-2x} = 0$
6. $5^{2x+5} \times 3^{8x-2} = 5^{2x}$
7. $5^{2x+5} \times 3^{8x-2} = 5^{2x} \times 7^{2x+1}$
8. $2\ln(\sqrt{x}) - \ln(1-x) = 2$
9. $\log(2 + \log_2(x+1)) = 0$
10. $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdots \log_n n + 1 = 10$

Exercice 1.24 Déterminer l'ordre croissant des nombres suivants:

$$2^{4643},\quad 3^{2930},\quad 5^{2000},\quad 7^{1654}$$

Exercices supplémentaires

Exercice 1.25 Résoudre

$$\log_{10}(\log_9(\log_8(\log_7(\log_6(\log_5(\log_4(\log_3(\log_2 x)))))))) = 0.$$

2. Polynômes et les expression algébrique

2.1 Polynômes et opérations sur les polynômes

Définition 2.1.1 — monômes. Les monômes sont des expressions algébriques contenant un seul et unique terme. Les termes peuvent être constants ou algébriques.

■ **Exemple 2.1** Par exemple x^2, $5xy^3$, $6s^2t$ et 7 sont tous des monômes ■

Définition 2.1.2 — polynômes. Les polynômes sont des expressions algébriques contenant un ou plusieurs termes. Un polynôme est en fait la somme ou la différence algébrique de plusieurs monômes.

■ **Exemple 2.2** Par exemple

- x^2+2x+1 est un polynôme.
- $x^3+2xy+5xy^3+7x+2y+1$ est un polynôme.
- $x^3+6s^2t-4x+5t+2$ est un polynôme.

■

Remarque 2.1.1 Le polynôme x^2+2x+1 est noté par $P(x)=x^2+2x+1$, parce qu'on a une variable x, le polynôme $x^3+2xy+5xy^3+7x+2y+1$ est noté par $Q(x,y)$ car on a deux variables x et y, de même $x^3+6s^2t-4x+5t+2$ est noté par $R(x,s,t)$.

Définition 2.1.3 — degré. Le **degré d'un terme** est la somme des exposants qui affectent ses variables. Le degré d'un terme constant est 0.
Le **degré d'un polynôme** est le plus grand des degrés de ses termes. Le degré d'un polynôme P notée par $deg(P)$

■ **Exemple 2.3** Par exemple

- $deg(10x^3y^2z)=6$
- $deg(12x^3y-8xy+9)=4$ à cause de $12x^3y$. ■

Définition 2.1.4 — valeur numérique. Résultat obtenu quand on remplace chaque variable par le nombre qu'elle représente.

■ **Exemple 2.4** Par exemple

- Pour $P(x) = x^2 + 2x + 1$, $P(2)$ est égal a

$$P(2) = (2)^2 + 2(2) + 1 = 4 + 4 + 1 = 9$$

- Pour $Q(x,y) = x^3 + 2xy + 5xy^3 + 7x + 2y + 1$, $Q(2,0)$ est égal a

$$Q(2,0) = (2)^3 + 2(2)(0) + 5(2)(0)^3 + 7(2) + 2(0) + 1 = 8 + 0 + 0 + 14 + 0 + 1 = 23.$$

Remarque 2.1.2 — Opérations sur les polynôme. On peut effectuer, sur des polynômes, les mêmes opérations élémentaires que sur les nombres réels, soit l'addition, la soustraction, la multiplication et la division.

1. Pour **additionner** deux polynômes, il suffit d'additionner les coefficients des termes semblables, c'est-à-dire les termes qui ont les mêmes variables affectées des mêmes exposants.

   Par exemple:
   - $x^2 + 3x^2 = 4x^2$
   - $x^2 + x^3 + 5x^2 + x + 1 = x^3 + 6x^2 + x + 1$
   - $x^2y + 3xy^2 + 7x^2y = 8x^2y + 3xy^2$
   - Soit $P(x) = 3x^3 + x^2 + 2x + 1$ et $Q(x,y) = x^2 + xy + 3x + y + 3$:

   $$\begin{aligned} P(x) + Q(x,y) &= (3x^3 + x^2 + 2x + 1) + (x^2 + xy + 3x + y + 3) \\ &= 3x^3 + (x^2 + x^2) + xy + (2x + 3x) + y + (1 + 3) \\ &= 3x^3 + 2x^2 + xy + 5x + y + 4. \end{aligned}$$

2. Pour **soustraire** un polynôme Q d'un polynôme P (c'est-à-dire pour effectuer l'opération $P - Q$), il suffit d'additionner à P l'opposé de Q. L'opposé d'un polynôme P est le polynôme $-P$ qu'on obtient en multipliant tous les coefficients de P par -1.

   Par exemple:
   - $x^2 - 3x^2 = -2x^2$
   - $x^2 - x^3 - 5x^2 + x + 1 = -x^3 - 4x^2 + x + 1$
   - $x^2y - 3xy^2 + 7x^2y = 8x^2y - 3xy^2$
   - Soit $P(x) = 3x^3 + x^2 + 2x + 1$ et $Q(x,y) = x^2 + xy + 3x + y + 3$:

   $$\begin{aligned} P(x) - Q(x,y) &= (3x^3 + x^2 + 2x + 1) - (x^2 + xy + 3x + y + 3) \\ &= 3x^3 + (x^2 - x^2) - xy + (2x - 3x) - y + (1 - 3) \\ &= 3x^3 - xy - x - y - 2. \end{aligned}$$

3. La **multiplication** d'expressions algébriques fait appel aux propriétés des exposants. Avec des variables, ces propriétés sont identiques à celles qui s'appliquent aux nombres réels.

   Par exemple:
   - $x^2 \cdot 3x^2 = 1 \cdot 3 \cdot x^2 \cdot x^2 = 3x^4$
   - $3x \cdot 4y = 3 \cdot 4 \cdot x \cdot y = 12xy$
   - $x^2y^3 \cdot x^3y^7 = x^2 \cdot x^3 \cdot y^3 \cdot y^7 = x^{(2+3)} \cdot y^{(3+7)} = x^5y^{10}$

- Soit $P(x,y) = -3x^3y^4 + y$ et $Q(x,y) = 4xy^2 + 2xy$:

$$\begin{aligned} P(x,y)\cdot Q(x,y) =&(-3x^3y^4+y)\cdot(4xy^2+2xy) \\ &= (-3x^3y^4\cdot 4xy^2) + (-3x^3y^4\cdot 2xy) + (y\cdot 4xy^2) + (y\cdot 2xy) \\ &= (-12x^4y^6) + (-6x^4y^5) + (4xy^3) + (2xy^2) \\ &= -12x^4y^6 - 6x^4y^5 + 4xy^3 + 2xy^2. \end{aligned}$$

Pour multiplier deux termes, il faut d'abord multiplier les coefficients, puis multiplier les variables ensembles. Pour multiplier deux polynômes, il suffit de multiplier chaque terme du premier par chaque terme du deuxième.

4. La **division** de polynômes s'effectue sensiblement de la même façon que la division de deux nombres entiers, en cherchant un quotient et, éventuellement, un reste.

Par exemple:

- $(x^3y^4)\div(xy^2) = \dfrac{x^3y^4}{xy^2} = x^{3-1}y^{4-2} = x^2y^2$
- $25x^3y^9z \div (5x^3y^6) = \dfrac{25x^3y^9z}{5x^3y^6} = 5x^{3-3}y^{9-6}z = 5y^3z$
- Soit $P(x,y) = 12xy^2 + 6x^8y^6$ et $Q(x,y) = -3x^3y^4$:

$$\begin{aligned} \frac{P(x,y)}{Q(x,y)} &= \frac{12xy^2+6x^8y^6}{-3x^3y^4} \\ &= \frac{12xy^2}{-3x^3y^4} + \frac{6x^8y^6}{-3x^3y^4} \\ &= -4\frac{xy^2}{x^3y^4} + -2\frac{x^8y^6}{x^3y^4} \\ &= -4x^{1-3}y^{2-4} - 2x^{8-3}y^{6-4} \\ &= -4x^{-2}y^{-2} - 2x^5y^2 = \frac{-4}{x^2y^2} - 2x^5y^2. \end{aligned}$$

■ **Exemple 2.5** Effectuer les opérations sur les polynômes:

1. $(3x^2-2x+7)+(x^2+6x-4)$

$$(3x^2-2x+7)+(x^2+6x-4) = (3x^2+x^2)+(-2x+6x)+(7-4) = \boxed{4x^2+4x+3}$$

2. $(5x^2+8x+6)-(3x^2-5x+8)$

$$(5x^2+8x+6)-(3x^2-5x+8) = (5x^2-3x^2)+(8x-(-5x))+(6-8) = \boxed{2x^2+13x-2}$$

3. $(x+3y)\cdot(3x+z)$

$$(x+3y)\cdot(3x+z) = x\cdot(3x+z)+3y\cdot(3x+z) = \boxed{3x^2+xz+9xy+3yz}$$

4. $(2xy+3z)^2$

$$\begin{aligned} (2xy+3z)^2 &= (2xy+3z)\cdot(2xy+3z) \\ &= 2xy\cdot(2xy+3z)+3z\cdot(2xy+3z) \\ &= 4x^2y^2+6xyz+6zxy+9z^2 \\ &= \boxed{4x^2y^2+126xyz+9z^2} \end{aligned}$$

5. $(x-4)\cdot(3x+2)\cdot(6x-5)$

$$\begin{aligned}(x-4)\cdot(3x+2)\cdot(6x-5) &= (x-4)\cdot[(3x+2)\cdot(6x-5)]\\ &= (x-4)\cdot[3x\cdot(6x-5)+2\cdot(6x-5)]\\ &= (x-4)\cdot[18x^2-15x+12x-10]\\ &= (x-4)\cdot[18x^2-13x-10]\\ &= x\cdot[18x^2-13x-10]-4\cdot[18x^2-13x-10]\\ &= [18x^3-13x^2-10x]-\cdot[72x^2-52x-40]\\ &= \boxed{18x^3+69x^2+42x+40}\end{aligned}$$

6. $(3x^4-x^3+4x-5)\cdot(x^2+2x-1)$

$$\begin{aligned}&(3x^4-x^3+4x-5)\cdot(x^2+2x-1)\\ &= 3x^4\cdot(x^2+2x-1)-x^3\cdot(x^2+2x-1)+4x\cdot(x^2+2x-1)-5\cdot(x^2+2x-1)\\ &= 3x^6+6x^5-3x^4-x^5-2x^4+x^3+4x^3+8x^2-4x-5x^2-10x+5\\ &= \boxed{3x^6+5x^5-5x^4+5x^3+3x^2-14x+5}\end{aligned}$$

7. $(x^3+2x+1)\cdot(x^2+xy+3x+y+3)$

$$\begin{aligned}(x^3+2x+1)\cdot(x^2+xy+3x+y+3) =& 3x^3\cdot(x^2+xy+3x+y+3)\\ &+2x\cdot(x^2+xy+3x+y+3)\\ &+1\cdot(x^2+xy+3x+y+3)\\ &=[x^3\cdot x^2+x^3\cdot xy+x^3\cdot 3x+x^3\cdot y+x^3\cdot 3)]\\ &+[2x\cdot x^2+2x\cdot xy+2x\cdot 3x+2x\cdot y+2x\cdot 3]\\ &+[1\cdot x^2+1\cdot xy+1\cdot 3x+1\cdot y+1\cdot 3]\\ &=[x^5+x^4y+3x^4+x^3y+3x^3]\\ &+[2x^3+2x^2y+6x^2+2xy+6x]\\ &+[x^2+xy+3x+y+3]\\ &=\boxed{x^5+x^4y+3x^4+x^3y+5x^3+2x^2y+7x^2+3xy+9x+y+3}\end{aligned}$$

8. $(xz+yz)\div z$

$$(xz+yz)\div z=\frac{xz+yz}{z}=\frac{xz}{z}+\frac{yz}{z}=\boxed{x+y}$$

■

Remarque 2.1.3 — Identités algébriques. 1. Le carré d'une somme

$$(\mathbf{x}+\mathbf{a})^{\mathbf{2}}=\mathbf{x}^{\mathbf{2}}+\mathbf{2ax}+\mathbf{a}^{\mathbf{2}}$$

2. Le pruduit de deux sommes

$$(\mathbf{x}+\mathbf{a})(\mathbf{x}+\mathbf{b})=\mathbf{x}^{\mathbf{2}}+(\mathbf{a}+\mathbf{b})\mathbf{x}+\mathbf{ab}$$

3. La différence de deux carrés

$$\mathbf{x^2 - a^2 = (x-a)(x+a)}$$

■ **Exemple 2.6** Effectuer les produits suivants et simplifier :

1. $(x+1)^2$,
   On a le carré d'une somme, alors
   $$(x+1)^2 = x^2 + 2(1)x + (1)^2 = x^2 + 2x + 1.$$
2. $(x-8)(x+8)$
   On a le cube d'une somme, alors
   $$(x-8)(x+8) = x^2 - (8^2) = x^2 - 64.$$
3. $(x+3)(x-4)$
   On a le pruduit de deux sommes., alors
   $$(x+3)(x-4) = x^2 + (3-4)x + (3)(-4) = x^2 - x - 12.$$

■

■ **Exemple 2.7** Factoriser les expressions suivantes :

1. $6ab + 18ac$
   $$6ab + 18ac = 6a(b+3c)$$
2. $2ax - 3bx + 2ay - 3by$
   $$2ax - 3bx + 2ay - 3by = x(2a-3b) + y(2a-3b) = (2a-3b)(x+y)$$
3. $xy^2z + x^3yz + xyz$
   $$xy^2z + x^3yz + xyz = xyz(y + x^2 + 1)$$
4. $x^2 - 64$
   $$x^2 - 64 = x^2 - 8^2 = (x-8)(x+8)$$
5. $x^3 - 64$
   $$x^3 - 64 = x^3 - 4^3 = (x-4)(x^2 + 4x + 16^2)$$
6. $x^4 - 64$
   $$x^4 - 64 = (x^2)^4 - 8^2 = (x^2 - 8)(x^2 + 8) = (x - \sqrt{8})(x + \sqrt{8})(x^2 + 8)$$
7. $x^4 + 64$
   $$x^4 + 64 = (x^2 + 8)^2 - 16x^2 = (x^2 + 8 - 4x)(x^2 + 8 + 4x)$$
8. $x^2 + 4xy + 4y^2$
   $$x^2 + 4xy + 4y^2 = x^2 + 2(x)(2y) + (2y)^2 = (x+2y)^2$$
9. $x^4 + 2x^3 + x^2$
   $$x^4 + 2x^3 + x^2 = x^2(x^2 + 2x + 1) = x^2(x+1)^2$$
10. $x^4 + 5x^2 + 6$
    $$x^4 + 5x^2 + 6 = (x^2 + 3)(x^2 + 5)$$

■

Exercices

Exercice 2.2 Effectuer les opérations sur les polynômes:

1. $2x+3y+5x+y$
2. $2x+3y-5x+y$
3. $-(2x+y)+(x-(x-2y))$
4. $3x+4+5x+6x^2$
5. $(47x+3y)-(2z+7x+3x^2)$
6. $(x^2-xy+y^2+6x-y+1)+(x^2+3xy+y^2-5x+3)$
7. $(x^2-xy+y^2+6x-y+1)-(x^2+3xy+y^2-5x+3)$
8. $(x^2-xy+y^2+6x-y+1)+2(x^2+3xy+y^2-5x+3)$
9. $x^3+2(x+1)-x^2-2$
10. $x^5+3xz-3x-3z+2(y-z)$
11. $(x+7)^2$
12. $(x-7)^2$
13. $(x-7)(x+7)$
14. $(x-7)(x+8)$
15. $(x+7)(4x-3)$
16. $(4x^2-7x+10)(3x+2)$
17. $(x^2+3xy-2y^2)(y-4)$
18. $(a+b+c)(a-b+c)$
19. $\dfrac{x^2y^3+6x^3yz^2}{2xyz^5}$
20. $(x^2-9)\div(x-3)$

■

Exercice 2.3 Factoriser les expressions suivantes :

1. x^3+4x
2. $2x^3+4x$
3. $2x^3+4x^2$
4. $2x^2+3x$
5. x^5+16x^3
6. $3x^2y^3+6x^3y^2+12x^4y^5$
7. $3x+3y+ax+ay$
8. $ax+bcx-a-bc$
9. x^2-16
10. x^4-16
11. x^2-49
12. $(x-5)^2-49$

■

Exercices supplémentaires

Exercice 2.4 *[Identité de Gauss]:

1. Montrer que:

$$\begin{aligned} a^3+b^3+c^3-3abc &= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc) \\ &= \frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2]. \end{aligned}$$

2. Conclure que si $x+y+z=0$, alors $x^3+y^3+z^3=3xyz$.
3. Factoriser $8x^3+y^3-6xy+1$.

2.2 Équations

2.2.1 Équations du premier degré

■ **Exemple 2.8** Résoudre les équations suivantes

1. $3x+1=5x+7$

$$\begin{aligned}3x+1&=5x+7\\3x-5x&=7-1\\-2x&=6,\end{aligned}$$

alors $x=\frac{6}{-2}=-3$.

2. $4x-1=\frac{2x}{3}$

$$\begin{aligned}4x-1&=\frac{2x}{3}\\4x-\frac{2x}{3}&=+1\\\frac{10x}{3}&=1,\end{aligned}$$

alors $x=\frac{1}{\frac{10}{3}}=\frac{3}{10}$.

3. $\frac{2}{3}(x+1)-\frac{3}{2}(4x-1)=\frac{5}{6}(2x+3)-1$

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}(x+1)-\frac{3}{2}(4x-1)&=\frac{5}{6}(2x+3)-1\\\frac{2x}{3}+\frac{2}{3}-6x+\frac{3}{2}&=\frac{5x}{3}+\frac{5}{2}-1\\\frac{2x}{3}-6x-\frac{5x}{3}&=-\frac{2}{3}-\frac{3}{2}+\frac{5}{2}-1\\-7x&=-\frac{2}{3},\end{aligned}$$

alors $x=\frac{-\frac{2}{3}}{-7}=\frac{2}{21}$.

■

Définition 2.2.1 — Valeur absolue. Pour tout nombre réel x, la valeur absolue de x (notée $|x|$) est définie par:

$$|x|=\begin{cases}x & \text{si } x\geq 0\\-x & \text{si } x<0\end{cases}$$

Par exemples

- $|5|=5$
- $|-5|=5$
- $|0|=0$
- $|-\frac{1}{3}|=\frac{1}{3}$

■ **Exemple 2.9** Résoudre les équations suivantes

1. $|x| = 7$
   Il y a deux possibilité $x = 7$ ou $x = -7$.
2. $|x| = -7$
   Impossible, car toujours $|x| \geq 0$.

■

■ **Exemple 2.10** Résoudre les équations suivantes

1. $|2x-4| = 5$
   Il y a deux possibilité $2x-4 = 5$ ou $2x-4 = -5$. Pour $2x-4 = 5$ on a $x = \frac{9}{2}$, pour $2x-4 = -5$, $x = \frac{-1}{2}$.
2. $|\frac{2x-4}{3x+7}| = 5$
   Il y a deux possibilité $\frac{2x-4}{3x+7} = 5$ ou $\frac{2x-4}{3x+7} = -5$.
   Pour $\frac{2x-4}{3x+7} = 5$ on a
   $$\begin{aligned} \frac{2x-4}{3x+7} &= 5 \\ 2x-4 &= 5(3x+7) \\ 2x-15x &= 4+35 \\ -13x &= 39 \Longrightarrow \boxed{x = -\frac{39}{13}}. \end{aligned}$$
   Pour $\frac{2x-4}{3x+7} = -5$ on a
   $$\begin{aligned} \frac{2x-4}{3x+7} &= -5 \\ 2x-4 &= -5(3x+7) \\ 2x+15x &= 4-35 \\ 17x &= -31 \Longrightarrow \boxed{x = -\frac{31}{17}}. \end{aligned}$$

■

2.2.2 Équations du second degré

Définition 2.2.2 — Discriminant. Le discriminant de l'équation $ax^2+bx+c = 0$ est la valeur Δ définie par:
$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Remarque 2.2.1 — Résolution de l'équation. Pour l'équation $ax^2+bx+c = 0$ il y a trois cas possibles:

1. Si le discriminant est strictement positif, l'équation admet deux solutions x_1 et x_2 données par les formules suivantes:
   $$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a},$$

et donc

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)=a\left(x-\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right).$$

2. Si le discriminant est nul, l'équation admet une racine double:

$$x_1=x_2=-\frac{b}{2a},$$

et donc

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2.$$

3. Si le discriminant est strictement négatif, l'équation n'admet pas de solution réelle, mais admet deux solutions complexes.

■ **Exemple 2.11** Trouver les zéros et factoriser chacun des polynômes suivants:

1. $x^2-5x+6=0$
   Ici $\Delta=b^2-4ac=(-5)^2-4(1)(6)=25-24=1$, alors on a deux solutions

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-5)\pm\sqrt{1}}{2(1)}=\frac{5\pm1}{2}=2 \text{ ou } 3.$$

$$\boxed{x^2-5x+6=(x-2)(x-3)}$$

2. $x^2-5x=0$
   Ici $\Delta=b^2-4ac=(-5)^2-4(1)(0)=25-0=25$, alors on a deux solutions

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-5)\pm\sqrt{25}}{2(1)}=\frac{5\pm5}{2}=0 \text{ ou } 5.$$

$$\boxed{x^2-5x=x(x-5)}$$

3. $x^2-2x+1=0$
   Ici $\Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4(1)(1)=4-4=0$, alors on a une racine double

$$x_{1,2}=\frac{-b}{2a}=\frac{-(-2)}{2(1)}=\frac{2}{2}=1.$$

$$\boxed{x^2-2x+1=(x-1)^2}$$

4. $x^2+x+1=0$
   Ici $\Delta=b^2-4ac=(1)^2-4(1)(1)=1-4=-3$, alors l'équation n'admet pas de solution réelle.
5. $16x^2-20x+5=0$
   Ici $\Delta=b^2-4ac=(-20)^2-4(16)(5)=400-320=80$, alors on a deux solutions

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-20)\pm\sqrt{80}}{2(16)}=\frac{20\pm4\sqrt{5}}{32}=\frac{5\pm\sqrt{5}}{8}.$$

$$\boxed{16x^2-20x+5=16(x-\frac{5-\sqrt{5}}{8})(x-\frac{5+\sqrt{5}}{8})}$$

6. $16y^4-20y^2+5=0$ Supposons que $y^2=x$, donc $16x^2-20x+5=0$, ensuite
$$x_{1,2}=\frac{5-\sqrt{5}}{8},\frac{5+\sqrt{5}}{8},$$
alors
$$y_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}},\pm\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}.$$
$$\boxed{16y^4-20y^2+5=16(y-\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}})(y+\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}})(y-\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}})(y+\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}})}$$
7. $x^3-5x^2+6x=0$
On peut factoriser $x^3-5x^2+6x=x(x^2-5x+6)$, alors $x=0,2,3$.
$$\boxed{x^3-5x^2+6x=x(x-2)(x-3)}$$
■

■ **Exemple 2.12** Résoudre
$$\sqrt{7-2x}-x=4.$$
$$\begin{aligned}\sqrt{7-2x}-x&=4\\ \sqrt{7-2x}&=x+4\\ 7-2x&=(x+4)^2=x^2+8x+16,\end{aligned}$$
on a $x^2+10x+9=0$, $\Delta=b^2-4ac=(10)^2-4(1)(9)=100-36=64$,
$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-10\pm\sqrt{64}}{2}=\frac{-10\pm8}{2}=-1,-9,$$
on accepte seulement $x=-1$ car $\sqrt{7-2(-9)}-(-9)=14\neq4$. ■

■ **Exemple 2.13** Résoudre
$$|3x^2-10x+3|=4.$$
Il y a deux possibilités $3x^2-10x+3=4$ ou $3x^2-10x+3=-4$.
Pour $3x^2-10x+3=4$ on a $3x^2-10x-1=0$.
$$\Delta=b^2-4ac=(-10)^2-4(3)(-1)=100+12=112,$$
$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-10)\pm\sqrt{112}}{2(3)}=\frac{10\pm4\sqrt{7}}{6}=\frac{5\pm2\sqrt{7}}{6}.$$
Pour $3x^2-10x+3=-4$ on a $3x^2-10x+7=0$.
$$\Delta=b^2-4ac=(-10)^2-4(3)(7)=100-84=16,$$
$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-10)\pm\sqrt{16}}{2(6)}=\frac{10\pm4}{12}=\frac{7}{6},\frac{1}{2}$$
alors on a quatre solutions $x=\frac{5\pm2\sqrt{7}}{6},\frac{7}{6},\frac{1}{2}$. ■

■ **Exemple 2.14** Résoudre les équations suivantes

1. $2^{x^2+1} = 8^{4x+1}$

$$\begin{aligned} 2^{x^2+1} &= 8^{4x+1} \\ 2^{x^2+1} &= 2^{3(4x+1)}, \end{aligned}$$

donc $x^2+1 = 3(4x+1)$ ou $x^2-12x-2=0$. Ici

$$\Delta = b^2-4ac = (-12)^2-4(1)(-2) = 144+8 = 152,$$

alors on a deux solutions

$$x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-12)\pm\sqrt{152}}{2(1)} = \frac{12\pm2\sqrt{38}}{2} = 6\pm\sqrt{38}.$$

2. $4^{x^2+1} = 8^{4x+1}$

$$\begin{aligned} 4^{x^2+1} &= 8^{4x+1} \\ 2^{2(x^2+1)} &= 2^{3(4x+1)}, \end{aligned}$$

donc $2x^2+2 = 3(4x+1)$ ou $2x^2-12x-1=0$. Ici

$$\Delta = b^2-4ac = (-12)^2-4(2)(-1) = 144+28 = 152,$$

alors on a deux solutions

$$x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-12)\pm\sqrt{152}}{2(2)} = \frac{12\pm2\sqrt{38}}{4} = \frac{6\pm\sqrt{38}}{2}.$$

■

■ **Exemple 2.15** Résoudre les équations suivantes

1. $\log_7(x)+\log_7(x-1) = 1$

$$\begin{aligned} \log_7(x)+\log_7(x-1) &= 1 \\ \log_7(x(x-1)) &= \log_7(7), \end{aligned}$$

donc $x(x-1)=7$, alors on a deux solutions $\frac{1+\sqrt{29}}{2}, \frac{1-\sqrt{29}}{2}$. $x = \frac{1-\sqrt{29}}{2}$ n'est pas acceptable car $\log_7(\frac{1-\sqrt{29}}{2})$ est indéfini.

2. $\log_2(3x+1)-\log_2(x-2) = \log_2(x+4)$

$$\begin{aligned} \log_2(3x+1)-\log_2(x-2) &= \log_2(x+4) \\ \log_2(3x+1) &= \log_2(x-2)+\log_2(x+4) \\ \log_7(3x+1) &= \log_7((x-2)(x+4)), \end{aligned}$$

donc $3x+1 = (x-2)(x+4)$ ou $3x+1 = x^2+2x-8$, donc $-x^2+x+9=0$. Ici

$$\Delta = b^2-4ac = (1)^2-4(-1)(9) = 1+36 = 37,$$

alors on a deux solutions

$$x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1\pm\sqrt{37}}{2(-1)} = \frac{1\mp\sqrt{37}}{2},$$

où seulement $x = \frac{1+\sqrt{37}}{2}$ est acceptable.

■

Exercices

Exercice 2.5 Résoudre les équations suivantes:
1. $7x+1=5x-9$
2. $5x-1=\frac{3x}{2}$
3. $\frac{2}{5}(x+1)-\frac{3}{2}(4x-3)=\frac{5}{3}(2x+3)+1$

■

Exercice 2.6 Trouver les zéros et factoriser chacun des polynômes suivants:
1. x^2-4x+4
2. $3x^2+4x-7$
3. $5x^2-5$
4. $x^2-13x+42$
5. x^3-6x^2+9x
6. $25x^4+99x^2-4$
7. $-5x^2-8x+9$
8. $4x^2-4x-24$
9. x^2-625

■

Exercice 2.7 Résoudre les équations suivantes:
1. $|3x+1|=7$
2. $|x^2-4x-5|=7$
3. $1-\sqrt{x-1}=6$
4. $\left(7^{3x-1}\right)^{2-x}=\left(7^{x-2}\right)^{x}\times 7^3$
5. $4^{x+\frac{1}{x}}=32$
6. $\log_3(x+25)-\log_3(x-1)=3$
7. $\log_2(x^2)=\log_2(x)^2$

■

Exercices supplémentaires[1]

Exercice 2.8 * Résoudre les équations suivantes:
1. $||3x+1|-3|=7$
2. $|2x-1|=|4x+9|$
3. $\sqrt{3x-5}+\sqrt{x-1}=2$

■

Exercice 2.9 ** Supposons que $x+\frac{1}{x}=5$, trouve les valeurs de $x^2+\frac{1}{x^2}$ et $x^3+\frac{1}{x^3}$. ■

Exercice 2.10 ***** Résoudre les équations suivantes:
1. $3+\sqrt{3+\sqrt{x}}=x$
2. $\sqrt{x+8}+\sqrt{x+15}=\sqrt{9x+40}$

■

[1] Ne sont pas importants pour l'examen.

3. Plan cartésien et représentation graphique

3.1 Coordonnées et l’équation d’une droite

Le plan cartésien est une surface plane définie par l’intersection de deux droites numériques perpendiculaires. **l’axe des abscisses (les** x**)** qui est horizontal et **l’axe des ordonnées (les** y**)** qui est vertical. Les deux axes se croisent à **l’origine**, c’est-à-dire au point $(0,0)$.

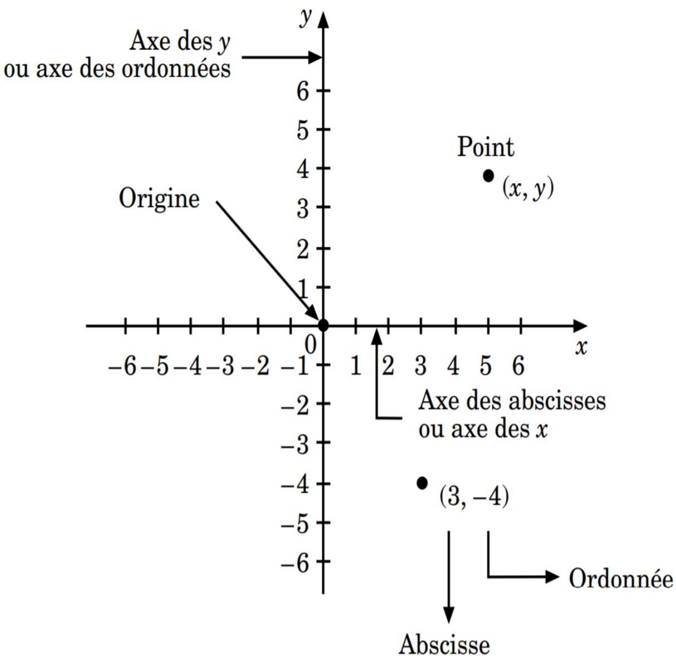

Figure 3.1: Le plan cartésien

Le plan cartésien est alors divisé en 4 sections que l'on nomme **les quadrants**.

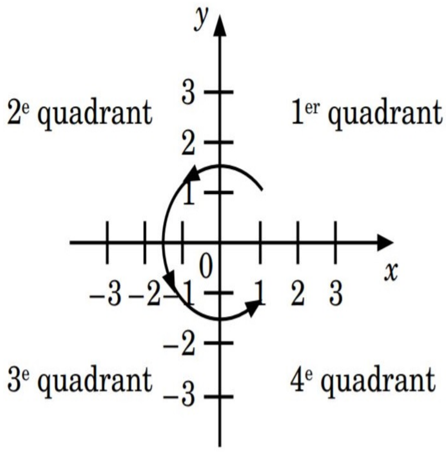

Figure 3.2: Les quadrants

■ **Exemple 3.1** Trouver les points avec les coordonnées $A(4,2)$, $B(-5,3)$, $C(-2,-4)$ et $D(5,-3)$: ■

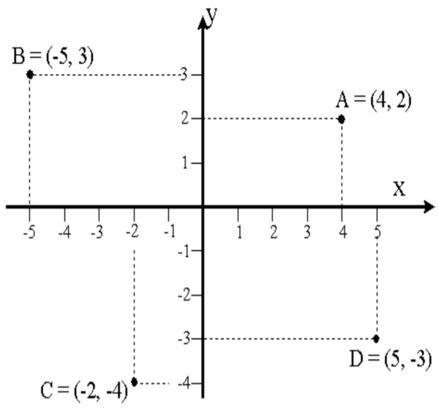

Figure 3.3: Quelques coordonnées dans le cartésien

■ **Exemple 3.2** Tracer les graphes des fonctions suivantes:

1. $y = x$

x	-2	-1	0	1	2
y	-2	-1	0	1	2

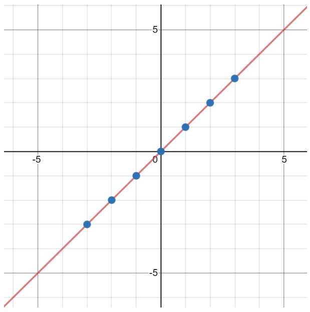

Figure 3.4: graphe de $y = x$

2. $y = x + 2$

x	-2	-1	0	1	2
y	0	1	2	3	4

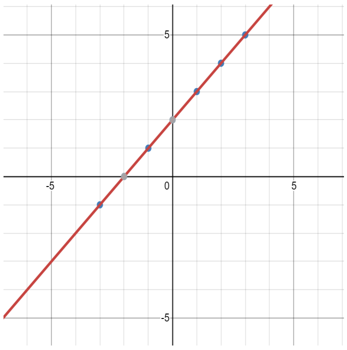

Figure 3.5: graphe de $y = x + 2$

3. $y = -x + 2$

x	-2	-1	0	1	2
y	4	3	2	1	0

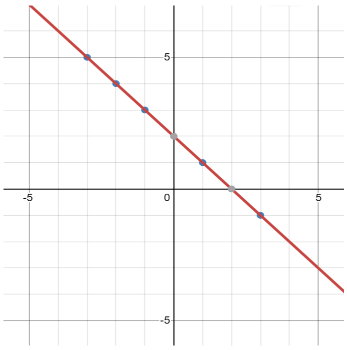

Figure 3.6: graphe de $y = -x + 2$

4. $y = x^2$

x	-2	-1	0	1	2
y	4	1	0	1	4

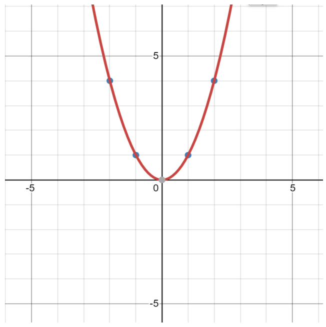

Figure 3.7: graphe de $y = x^2$

5. $y = x^3$

x	-2	-1	0	1	2
y	-8	-1	0	1	8

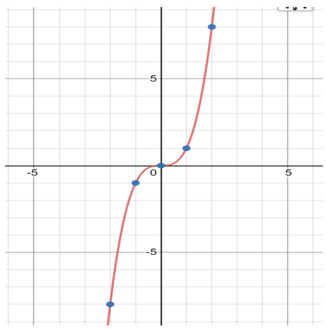

Figure 3.8: graphe de $y = x^3$

6. $y = \frac{1}{x}$

x	-2	-1	0	1	2
y	$-\frac{1}{2}$	-1	-	1	$\frac{1}{2}$

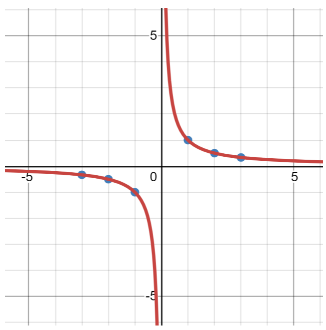

Figure 3.9: graphe de $y = \frac{1}{x}$

Remarque 3.1.1 Soient a et b deux réels. L'ensemble des points $M(x,y)$ tels que $y = ax+b$ forme une droite. a est le coefficient directeur et b est l'ordonnée à l'origine.
Toute droite du plan non parallèle à l'axe des ordonnées a une unique équation réduite de la forme $y = ax+b$,

- a est le coefficient directeur de la droite et s'appelle **la pente**: si $a > 0$, la droite **monte** et si $a < 0$, la droite **descend**.
- b est **l'ordonnée à l'origine de la droite**, c'est donc l'ordonnée du point d'intersection de la droite avec l'axe des ordonnées.

■ **Exemple 3.3** Tracer les droites:

1. D_1 d'équation $y = 2x-3$

x	-2	-1	0	1	2
y	-7	-5	-3	-1	1

2. D_2 d'équation $y = 4$

x	-2	-1	0	1	2
y	4	4	4	4	4

3. D_3 d'équation $x = 2$

x	2	2	2	2	2
y	-2	-1	0	1	2

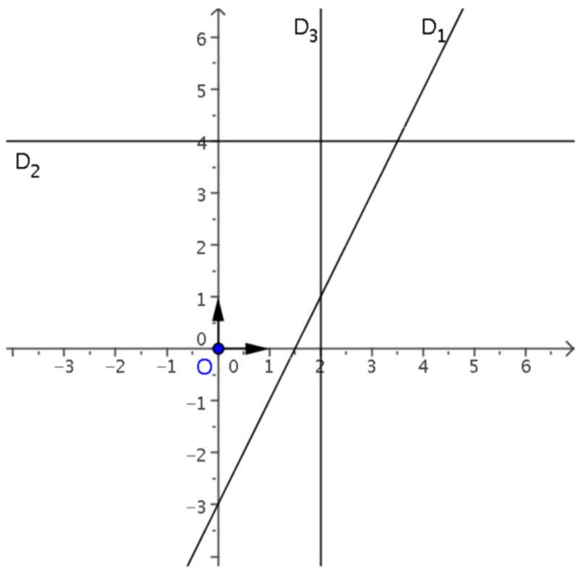

Figure 3.10: Représentation graphique de $y = 2x-3$ et $y = 4$ et $x = 2$

■

■ **Exemple 3.4** Tracer le graphe des fonctions suivantes:

1. $f(x) = -2x+1$

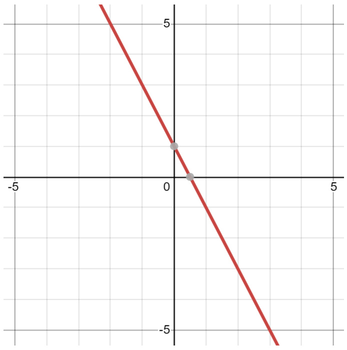

Figure 3.11: graphe de $y = f(x) = -2x+1$

2. $f(x) = 1$

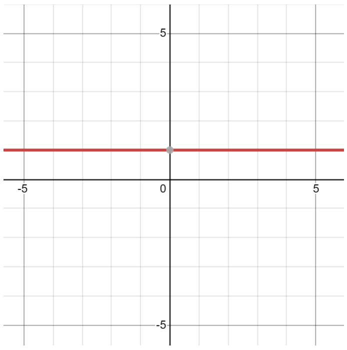

Figure 3.12: graphe de $y = f(x) = 1$

3. $f(x) = 2x+1$

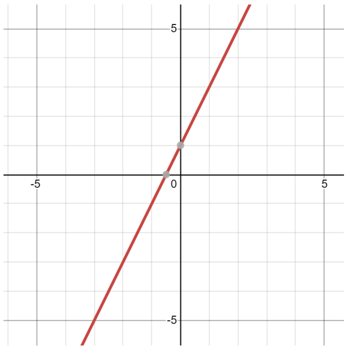

Figure 3.13: graphe de $y = f(x) = 2x+1$

■

Remarque 3.1.2 — Déterminer l'équation d'une droite à partir d'une représentation graphique. Choisissez deux points (x_1,y_1) et (x_2,y_2) sur la droite.

1. Détermination la pente de la droite:

$$a = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

2. Détermination de l'ordonnée à l'origine:

$$b = y_1 - ax_1 \text{ ou } y_2 - ax_2.$$

3. Écrire: $y = ax+b$.

■ **Exemple 3.5** Déterminer l'équation d'une droite passant par les points $A(2,-3)$ et $B(-1,3)$.
La pente

$$a = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{3-(-3)}{-1-2} = \frac{6}{-3} = -2,$$

L'ordonnée à l'origine:

$$b = y_1 - ax_1 = -3-(-2)(2) = -3+4 = 1,$$

alors l'équation de la droit est donné par $y = -2x+1$. ■

■ **Exemple 3.6** Déterminer l'équation d'une droite passant par les points $A(2,7)$ et $B(1,5)$.
La pente

$$a = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{7-5}{2-1} = \frac{2}{1} = 2,$$

L'ordonnée à l'origine:

$$b = y_1 - ax_1 = 7-(2)(2) = 7-4 = 3,$$

alors l'équation de la droit est donné par $y = 2x+3$. ■

■ **Exemple 3.7** Déterminer l'équation d'une droite passant par les points $A(2,-1)$ et $B(5,3)$.
La pente

$$a = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{3-(-1)}{5-2} = \frac{4}{3},$$

L'ordonnée à l'origine:

$$b = y_1 - ax_1 = -1-(\frac{4}{3})(2) = -1-\frac{8}{3} = -\frac{11}{3},$$

alors l'équation de la droit est donné par $y = \frac{4}{3}x - \frac{11}{3}$. ■

Exercices

Exercice 3.1 Trouver les points avec la coordonnée $A(4,2)$, $B(-3,5)$, $C(-2,-4)$ et $D(5,-3)$. ■

Exercice 3.2 Tracer le graphe des fonctions suivantes:

a) $y = 3x+2$
b) $y = 3x-2$
c) $y = -3x-2$
d) $y = -3x+2$
e) $2x+3y = 5$
f) $2x-3y = 5$
g) $y = x^2+1$
h) $y = x^2-1$
i) $y = -x^2+1$
j) $y = x^2+x+1$
k) $y = \dfrac{x-1}{x+1}$
l) $y = \dfrac{2x-1}{2x+1}$ ■

Exercice 3.3 Déterminer l'équation d'une droite passant par les points

1. $A(2,3)$ et $B(1,5)$.
2. $A(2,6)$ et $B(1,5)$.
3. $A(-2,6)$ et $B(1,-5)$. ■

Exercice 3.4 Déterminer l'abscisse du point $M(x,19)$ de la droite d'équation $y = -51x+43$. ■

Exercice 3.5 Complétez les tableaux suivants correspondant aux équations du premier degré à deux variables:

1.

x	0	1	3		-2
y	0	2		-2	

2.

x	1	-3	3		-1
y	0			-2	4

3.

x	0	-2	3		-1
y	3			-2	4

■

Exercice 3.6 Karl gagne 4000\$ comme chauffeur chez TéoTaxi avec le même nombre dheures N que 2750\$ chez Tim Horton, si le taux horaire de Karl est 5\$ de moins chez Tim Horton quavec Téo Taxi qui est x. Combien gagne Karl par heure chez Tim Horton? ■

Exercice 3.7 Le prix de vente d'un bien produit par une entreprise est fixé à 45\$. Si cet entreprise a des frais fixes de 2350\$ et des coûts variables de 24\$ par unité produite. Exprimer le profit réalisé en fonction du nombre des biens produits (et vendus). Évaluer le profit réalisé si la production s'élève à 250 unités. ■

3.2 Système d'équations linéaires à deux variables

L'équation $2x = 5$ a une solution $x = \frac{5}{2} = 2,5$, mais l'équation $2x + y = 5$ a un nombre infini de solutions qui sont en fait tous les points sur la droite $y = 5 - 2x$. En général, toute **équation linéaire** $ax + by = c$ **avec deux inconnus** a un nombre infini de solutions.

Si au lieu d'une équation nous considérons deux équations linéaires à deux inconnues et que nous cherchons les solutions qui satisfont les deux équations, ce qui correspond **géométriquement à l'intersection de deux droites**, alors peut-être que nous avons qu'une seule solution.

■ **Exemple 3.8** Pour $x - y = -1$ et $x + y = 1$ nous avons la solution unique $(x, y) = (0, 1)$. ■

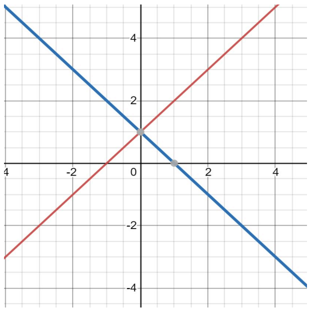

Figure 3.14: Représentation graphique de $x - y = -1$ et $x + y = 1$

■ **Exemple 3.9** 1. Peut-être que, comme ici, nous avons une infinité de solutions:

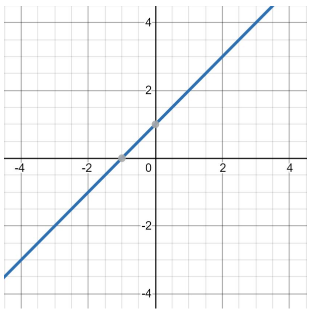

Figure 3.15: Représentation graphique de $x - y = -1$ et $2x - 2y = -2$

2. Ou que, comme ici nous n'avons pas de solution:

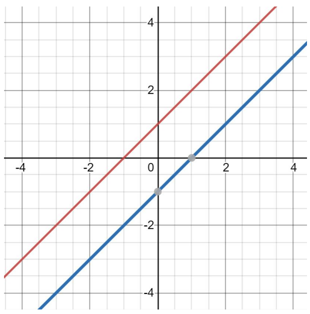

Figure 3.16: Représentation graphique de $x - y = -1$ et $x - y = 1$

■

Théorème 3.2.1 Considérer un système d'équations linéaires

$$\begin{cases} a_1x+b_1y & = c_1 \\ a_2x+b_2y & = c_2 \end{cases},$$

1. Si deux droites ne sont pas parallèles (droites sécantes ou pentes différentes),
$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2},$$
il y a **une solution unique**.
2. Si deux droites sont parallèles mais distinctes (même pente, mais ordonnées à l'origine différentes),
$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2},$$
aucune solution.
3. Si deux droites parallèles confondues (même pente et même ordonnée à l'origine)
$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2},$$
infinité de solutions.

Remarque 3.2.2 — Méthode d'élimination de variables. Pour résoudre un système de deux équations linéaires avec deux inconnues

$$\begin{cases} a_1x+b_1y & = c_1 \\ a_2x+b_2y & = c_2 \end{cases},$$

1. Choisir l'une des variables inconnues, par exemple x et l'isoler de l'une des deux équations.
2. Remplacer dans l'autre équation et la résoudre.
3. Trouver y.

■ **Exemple 3.10** Considérer le système linéaire suivant

$$\begin{cases} 3x-2y & = 6 \\ -5x+4y & = 8 \end{cases},$$

Résolvez le système par la méthode d'élimination de variables.

- **Étape 1:** $3x-2y=6$ implique que $x=\dfrac{2y+6}{3}$, ensuite
- **Étape 2:**
$$\begin{aligned} -5(\frac{2y+6}{3})+4y &= 8 \\ -5(2y+6)+12y &= 24 \\ -10y-30+12y &= 24 \\ 2y &= 54, \end{aligned}$$
- **Étape 3:** alors $y=\dfrac{54}{2}=27$, donc $x=\dfrac{2(27)+6}{3}=\dfrac{60}{3}=20.$

■

■ **Exemple 3.11** Résolvez les systèmes linéaires suivants:

$$\begin{cases} 3x-2y & =6 \\ 2x+y & =11 \end{cases}$$

- **Étape 1:** $3x-2y=6$ implique que $x=\dfrac{2y+6}{3}$, ensuite
- **Étape 2:**

$$\begin{aligned} 2(\frac{2y+6}{3})+y &= 11 \\ 2(2y+6)+3y &= 33 \\ 4y+12+3y &= 33 \\ 7y &= 21, \end{aligned}$$

- **Étape 3:** alors $y=\dfrac{21}{7}=3$, donc $x=\dfrac{2(3)+6}{3}=\dfrac{12}{3}=4$.

■

■ **Exemple 3.12** Résolvez les systèmes linéaires suivants:

$$\begin{cases} \frac{x-1}{2}+\frac{y-1}{3} & =1 \\ \frac{x+1}{3}-\frac{y+1}{2} & =1 \end{cases}$$

- **Étape 0:** En multipliant par 6 on obtient

$$\begin{cases} 6(\frac{x-1}{2})+6(\frac{y-1}{3}) & =6(1) \\ 6(\frac{x+1}{3})-6(\frac{y+1}{2}) & =6(1) \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} 3(x-1)+2(y-1) & =6 \\ 2(x+1)-3(y+1) & =6 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3x+2y & =11 \\ 2x-3y & =7 \end{cases}$$

- **Étape 1:** $3x+2y=11$ implique que $x=\dfrac{-2y+11}{3}$, ensuite
- **Étape 2:**

$$\begin{aligned} 2(\frac{-2y+11}{3})-3y &= 7 \\ 2(-2y+11)-9y &= 21 \\ -4y+22-9y &= 21 \\ -13y &= -1, \end{aligned}$$

- **Étape 3:** alors $y=\dfrac{-1}{-13}=\dfrac{1}{13}$, donc $x=\dfrac{-2(\frac{1}{13})+11}{3}=\dfrac{47}{13}$.

■

■ **Exemple 3.13 — Nombres.** La somme de deux nombres x et y est 85. Si l'on divise le plus grand x par le plus petit y, le quotient est 4. Quels sont ces nombres?

- **Étape 0:** On peut écrire

$$\begin{cases} x+y &= 85 \\ \dfrac{x}{y} &= 4 \end{cases}$$

- **Étape 1:** $\dfrac{x}{y} = 4$ implique que $x = 4y$, ensuite
- **Étape 2:** alors $y = \dfrac{85}{5} = 17$, donc $x = 4(17) = 68$.
- **Étape 3:**

$$\begin{aligned} (4y) + y &= 85 \\ 5y &= 85, \end{aligned}$$

■

■ **Exemple 3.14 — Différence de carrés.** La somme de deux nombres x et y est 29. La différence de leurs carrés est 145. Quels sont ces nombres ?

- **Étape 0:** On peut écrire

$$\begin{cases} x+y &= 29 \\ x^2-y^2 &= 145 \end{cases}$$

$x^2 - y^2 = 145$ implique que $(x-y)(x+y) = 145$, alors,

$$\begin{cases} x+y &= 29 \\ x-y &= \dfrac{145}{29} = 5 \end{cases}$$

- **Étape 1:** maintient $x - y = 5$ implique que $x = y + 5$ et donc
- **Étape 2:**

$$\begin{aligned} x + y &= 29 \\ (y+5) + y &= 29 \\ 2y &= 24, \end{aligned}$$

- **Étape 3:** alors $y = \dfrac{24}{2} = 12$, donc $x = 12 + 5 = 17$.

■

■ **Exemple 3.15** Le responsable d'un groupe d'adultes et d'enfants désire organiser un voyage et demande les tarifs à deux compagnies de transport A et B qui proposent les conditions suivantes:

	Prix enfants	Prix adulte	Prix total
Compagnie A	200$	280$	13360$
Compagnie B	160$	320$	14720$

Déterminer le nombre d'adultes et d'enfants qui participent au voyage.

- **Étape 0:** Supposons que nous avons x enfants et y adultes , on peut écrire

$$\begin{cases} 200x+280y & = 13360 \\ 160x+320y & = 14720 \end{cases}$$

- **Étape 1:** $200x+280y = 13360$ implique que $x = \frac{13360-280y}{200} = \frac{1336-28y}{20}$, alors,
- **Étape 2:**

$$\begin{aligned} 160x+320y &= 14720 \\ 160(\frac{1336-28y}{20})+320y &= 14720 \\ 8(1336-28y)+320y &= 14720 \\ 10688-224y+320y &= 14720 \\ 96y &= 4032, \end{aligned}$$

- **Étape 3:** alors $y = \frac{4032}{96} = 42$, donc $x = \frac{1336-28(42)}{20} = \frac{160}{20} = 8$. Il y a 42 adultes et 8 enfants.

■

Exercices

Exercice 3.8 Résolvez les système linéaire suivants:

a) $\begin{cases} 2x+y &= 5 \\ x-y &= -2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x-y &= -1 \\ x-2y &= -8 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x-y &= 10 \\ x-2y &= -15 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 37x+5y &= 500 \\ 57x+65y &= 1200 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 9,02x+3,67y &= 14,54 \\ 4,27x+8,75y &= 19,43 \end{cases}$

f) $\begin{cases} \dfrac{2x-1}{3}+\dfrac{y+2}{4} &= 4 \\ \dfrac{x+3}{2}-\dfrac{x-y}{3} &= 3 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 100x+195y &= 11515 \\ 23x-19y &= 286 \end{cases}$

h) $\begin{cases} x^2-y^2 &= 105 \\ x-y &= 5 \end{cases}$

i) $\begin{cases} x^2-y^2 &= 16 \\ x+y &= 8 \end{cases}$

j) $\begin{cases} x^2+y^2 &= 10 \\ xy &= 3 \end{cases}$

■

Exercice 3.9 Résoudre graphiquement le système:

$$\begin{cases} y &= -x+5 \\ y &= \dfrac{1}{2}x+2 \end{cases}.$$

Justifier votre réponse. ■

Exercice 3.10 Trouver les dimensions d'un terrain rectangulaire de périmètre 44 m et d'aire 120 m^2. ■

Exercice 3.11 Un Avocat doit partager une somme de 60000 $ entre trois héritiers, de manière que le deuxième ait 5000 $ de plus que le premier, et le troisième 1000 $ de moins que le deuxième. Calculer la part de chacun. ■

Exercice 3.12 Un jardin rectangulaire de 50 mètres de long est plus grand de 257 mètres carrées qu'un autre de même forme, d'une longueur de 42 mètres et dont la largeur surpasse celle du premier de 1,50 mètres. Calculer la largeur du premier terrain. ■

Exercice 3.13 Une marchande apporte au marché un panier de pommes ; elle vend d'abord le $\frac{1}{4}$ de ce que contenait son panier, puis 12 pommes, puis $\frac{1}{7}$ du reste, il lui en reste alors 18. Combien avait-elle de pommes? ■

3.3 Inéquations

Dans $\mathbb{R}$, nous avons une relation d'ordre. Quand on travaille avec des inégalités, il faut connaître les règles suivantes: soit a,b,c,d des nombres réels. On a

1. Si $a > b$ et $b > c$, alors $a > c$.
2. Lorsqu'on ajoute un même nombre aux deux membres d'une inégalité, on obtient une inégalité de même sens:
   si $a > b$, alors $a+c > b+c$.
3. Lorsqu'on retranche un même nombre des deux membres d'une inégalité, on obtient une inégalité de même sens:
   si $a > b$, alors $a-c > b-c$.
4. Lorsqu'on multiplie les deux membres d'une inégalité
   - Par un nombre positif, on obtient une inégalité de même sens:
     si $a > b$ et $c > 0$, alors $ac > bc$.
   - Par un nombre négatif, on obtient une inégalité de sens contraire:
     si $a > b$ et $c < 0$, alors $ac < bc$.
5. Lorsqu'on divise les deux membres d'une inégalité
   - Par un nombre positif, on obtient une inégalité de même sens:
     si $a > b$ et $c > 0$, alors $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.
   - Par un nombre négatif, on obtient une inégalité de sens contraire:
     si $a > b$ et $c < 0$, alors $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.

■ **Exemple 3.16** Soit $5 > 2$,

1. Si $c = 4 > 0$,
   - Addition $5+4 > 2+4$.
   - Soustraction $5-4 > 2-4$.
   - Multiplication $5\times 4 > 2\times 4$.
   - Division $\frac{5}{4} > \frac{2}{4}$.
2. Si $c = -4 < 0$,
   - Addition $5-4 > 2-4$.
   - Soustraction $5+4 > 2+4$.
   - Multiplication $5\times(-4) < 2\times(-4)$.
   - Division $\frac{5}{-4} < \frac{2}{-4}$.

■

3.3.1 Inéquations linéaires

■ **Exemple 3.17** Trouver l'ensemble solution des inéquations suivantes:

1. $3x+1 < 5x+7$

$$\begin{aligned} 3x+1 &< 5x+7 \\ 3x-5x &< 7-1 \\ -2x &< 6, \end{aligned}$$

alors $x > \frac{6}{-2} = -3$ ou la solution est $S =]-3,+\infty[$.

2. $4x-1 \leq \dfrac{2x}{3}$

$$\begin{aligned} 4x-1 &\leq \frac{2x}{3} \\ 4x-\frac{2x}{3} &\leq +1 \\ \frac{10x}{3} &\leq 1, \end{aligned}$$

alors $x \leq \dfrac{1}{\frac{10}{3}} = \dfrac{3}{10}$ ou la solution est $]-\infty, \dfrac{3}{10}]$.

3. $\dfrac{2}{3}(x+1)-\dfrac{3}{2}(4x-1) \geq \dfrac{5}{6}(2x+3)-1$

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}(x+1)-\frac{3}{2}(4x-1) &\geq \frac{5}{6}(2x+3)-1 \\ \frac{2x}{3}+\frac{2}{3}-6x+\frac{3}{2} &\geq \frac{5x}{3}+\frac{5}{2}-1 \\ \frac{2x}{3}-6x-\frac{5x}{3} &\geq -\frac{2}{3}-\frac{3}{2}+\frac{5}{2}-1 \\ -7x &\geq -\frac{2}{3}, \end{aligned}$$

alors $x \leq \dfrac{-\frac{2}{3}}{-7} = \dfrac{2}{21}$ ou la solution est $S =]-\infty, \dfrac{2}{21}]$.

■

Remarque 3.3.1 Supposons que $a > 0$

$$\begin{aligned} |x| \leq a &\Longleftrightarrow -a \leq x \leq a \\ |x| = a &\Longleftrightarrow x = \pm a \\ |x| \geq a &\Longleftrightarrow x \leq a \text{ ou } x \geq a \end{aligned}$$

Figure 3.17: Représentation graphique de $|x| < 2$

Figure 3.18: Représentation graphique de $|x| > 2$

■ **Exemple 3.18** Trouver l'ensemble solution des inéquations suivantes:

1. $|2x-4| \leq 5$

$$\begin{aligned} |2x-4| \leq 5 &\iff -5 \leq 2x-4 \leq 5 \\ &\iff -1 \leq 2x \leq 9 \\ &\iff -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{9}{2}, \end{aligned}$$

2. $|2x-4| \geq 5$

$$\begin{aligned} |2x-4| \geq 5 &\iff 2x-4 \leq -5 \text{ ou } 2x-4 \geq 5 \\ &\iff 2x \leq -1 \text{ ou } 2x \geq 9 \\ &\iff x \leq -\frac{1}{2} \text{ ou } x \geq \frac{9}{2} \end{aligned}$$

■

3.3.2 Inéquations linéaires à deux variables

■ **Exemple 3.19** Identifier graphiquement la région représentée par $y \leq 5x$. ■

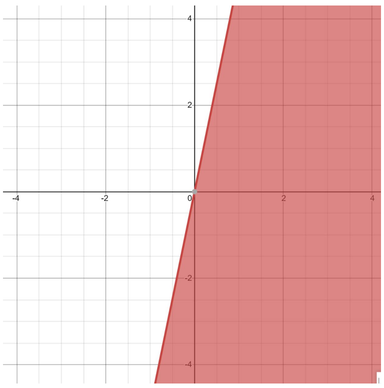

Figure 3.19: Représentation graphique de $y \leq 5x$

■ **Exemple 3.20** Identifier graphiquement la région représentée par $2y \leq -4x+4$. ■

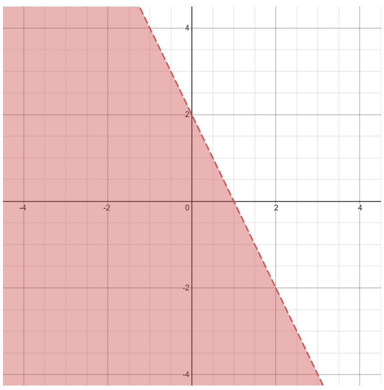

Figure 3.20: Représentation graphique de $2y \leq -4x+4$

■ **Exemple 3.21** Résoudre graphiquement les systèmes suivantes:

1. $\begin{cases} y & \leq 3x \\ y & \geq 2x \end{cases}$
2. $\begin{cases} y & \geq 3x \\ y & < 2x \end{cases}$

Figure 3.21: Représentation graphique de $\begin{cases} y & \leq 3x \\ y & \geq 2x \end{cases}$ et $\begin{cases} y & \geq 3x \\ y & < 2x \end{cases}$

■

■ **Exemple 3.22** Résoudre graphiquement le système suivent:

$$\begin{cases} y+2x-3 & < 0 \\ y-x+2 & > 0 \end{cases}$$

■

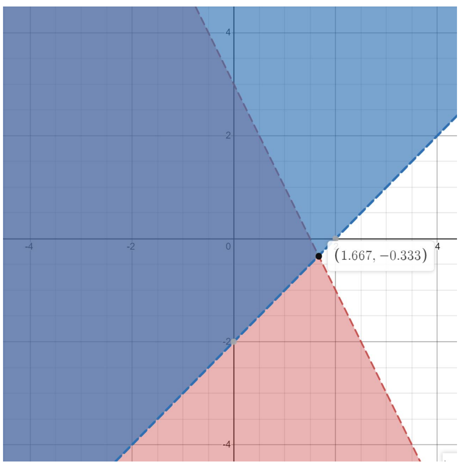

Figure 3.22: Représentation graphique de $\begin{cases} y & \geq 3x \\ y & < 2x \end{cases}$

■ **Exemple 3.23** Résoudre graphiquement le système suivent:

$$\begin{cases} 2x+y+8 & >0 \\ -x+3y+5 & \geq 0 \\ 2x+2y-3 & \leq 0 \end{cases}$$

■

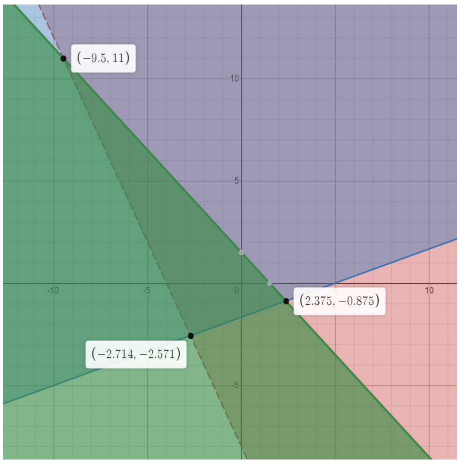

Figure 3.23: Représentation graphique de $\begin{cases} y & \geq 3x \\ y & < 2x \end{cases}$

Exercices

Exercice 3.14 Trouver l'ensemble solution des inéquations suivantes:

a) $-1 < 4x+2 < 10$

b) $2 < \frac{1}{6} - \frac{1}{2}x \leq 4$

c) $\frac{1}{2}(3+4x) \leq 6(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}x) - \frac{1}{4}(2+10x)$

d) $|2x+1| < 5$

e) $|2x+1| > 5$

f) $|x - \frac{1}{2}| < \frac{1}{2}$

Exercice 3.15 Résoudre graphiquement les systèmes suivantes:

a) $2x+3y > 1$

b) $\frac{x}{2} - \frac{y}{10} \geq \frac{1}{2}$

c) $\begin{cases} y & \leq -x+5 \\ y & \geq \frac{1}{2}x+2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y & \leq 2x-3 \\ y & \geq -3 \\ y & \leq -1.25x+2.5 \end{cases}$

e) $\begin{cases} -3x+2y+5 & < 0 \\ x+2y+3 & < 0 \end{cases}$

f) $\begin{cases} -3x+2y+5 & < 0 \\ x+2y+3 & > 0 \end{cases}$

g) $\begin{cases} -3x+2y+5 & > 0 \\ x+2y+3 & > 0 \end{cases}$

h) $\begin{cases} -3x+2y+5 & > 0 \\ x+2y+3 & < 0 \end{cases}$

Exercice 3.16 On a à notre disposition un montant maximal de 20 000 \$ à répartir entre deux investissements possibles, les obligations A ou le fonds mutuel B. L'investissement dans le fonds mutuel rapportant plus d'intérêts que les obligations, on a convenu d'y placer au moins 3 000 \$. D'autre part, le placement dans les obligations constituant un placement sûr, on veut y placer au moins 5 000 \$ de plus que dans le fonds mutuel. Quelles sont nos différentes possibilités de répartition des sommes?

Exercices supplémentaires[1]

Exercice 3.17 Résoudre graphiquement les systèmes suivantes:

1. $y > x^2 - 2x - 3$
2. $y < |x-1| - 3$

Exercice 3.18 Montrer que

1. **Inégalité triangulaire:**
$$|x+y| \leq |x| + |y|.$$
2. **Inégalité arithmético-géométrique (IAG)** établit un lien entre la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique. Pour $x, y \geq 0$
$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}.$$

[1]Ne sont pas importants pour l'examen.

3.4 Fonctions exponentielles et logarithmes

■ **Exemple 3.24** Tracer le graphe des fonctions suivantes:

1. $y = 2^x$

x	-2	-1	0	1	2
y					

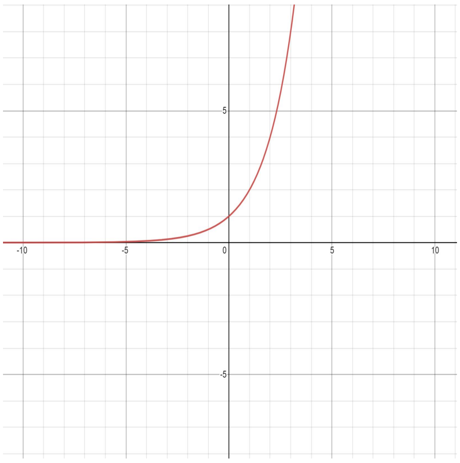

Figure 3.24: Représentation graphique de $y = 2^x$

2. $y = (\frac{1}{2})^x$

x	-2	-1	0	1	2
y					

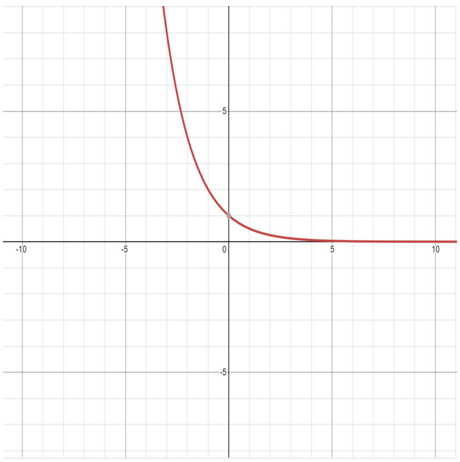

Figure 3.25: Représentation graphique de $y = (\frac{1}{2})^x$

■

Remarque 3.4.1 La courbe qui représente l'équation exponentielle $y = b^x$ peut être **croissante** ou **décroissante** selon la valeur du nombre b:
- Lorsque $b > 1$, est croissante.
- Lorsque $0 < b < 1$ la courbe est décroissante.

■ **Exemple 3.25** Dire si les fonctions suivantes sont croissantes ou décroissantes:

1. $y = (\frac{7}{3})^x$

x	-∞	-1	0	1	+∞
y					

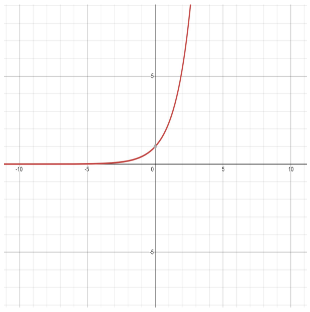

Figure 3.26: Représentation graphique de $y = (\frac{7}{3})^x$

2. $y = (\frac{3}{7})^x$

x	-∞	-1	0	1	+∞
y					

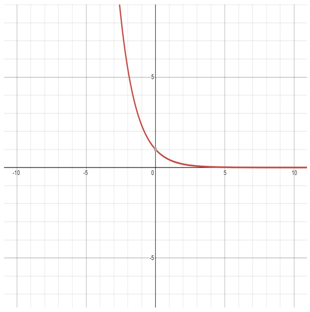

Figure 3.27: Représentation graphique de $y = (\frac{3}{7})^x$

3. $y = (\frac{1}{5})^x + 4$

x	-∞	-1	0	1	+∞
y					

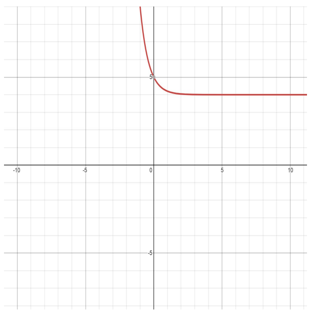

Figure 3.28: Représentation graphique de $y = (\frac{1}{5})^x + 4$

4. $y = 2^x - 2$

x	-∞	-1	0	1	+∞
y					

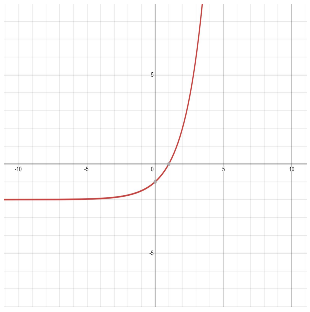

Figure 3.29: Représentation graphique de $y = 2^x - 2$

5. $y = -2^x$

x	-∞	-1	0	1	+∞
y					

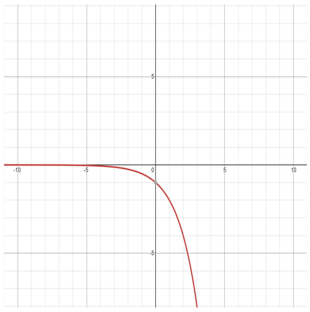

Figure 3.30: Représentation graphique de $y = -2^x$

6. $y = -(\frac{1}{5})^x$

x	-∞	-1	0	1	+∞
y					

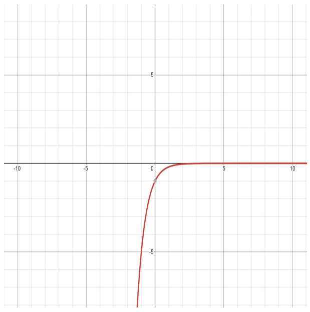

Figure 3.31: Représentation graphique de $y = -(\frac{1}{5})^x$

■

■ **Exemple 3.26** Soit $y = 2^{2x+3}$.
a) Écrire y sur la forme $ab^x + c$.

$$y = 2^{2x+3} = 2^{2x} \times 2^3 = 4^x \times 8 = 8(4)^x.$$

b) Esquisser le graphique de y.

x	-∞	-1	0	1	+∞
y					

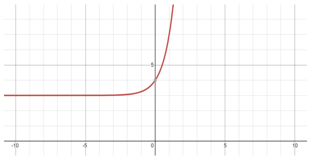

Figure 3.32: Représentation graphique de $y = 2^{2x+3} = 8(4)^x$

■

■ **Exemple 3.27** Tracer le graphe des fonctions suivantes:
1. $y = \log_2 x$

x	0	0^+	1	4	8	+∞
y						

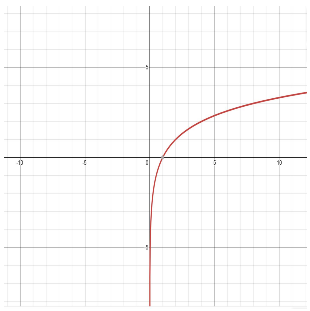

Figure 3.33: Représentation graphique de $y = \log_2 x$

2. $y = \log^x_{\frac{1}{2}}$

x	0	0^+	1	4	8	+∞
y						

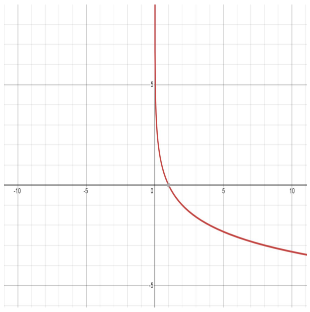

Figure 3.34: Représentation graphique de $y = \log^x_{\frac{1}{2}}$

■

Remarque 3.4.2 La courbe qui représente l'équation exponentielle $y = \log_b x$ peut être **croissante** ou **décroissante** selon la valeur du nombre b:
- Lorsque $b > 1$, est croissante.
- Lorsque $0 < b < 1$ la courbe est décroissante.

Exemple 3.28 Tracer le graphe des fonctions suivantes:

1. $y = \ln x$

x	0	0^+	1	e	e^2	$+\infty$
y						

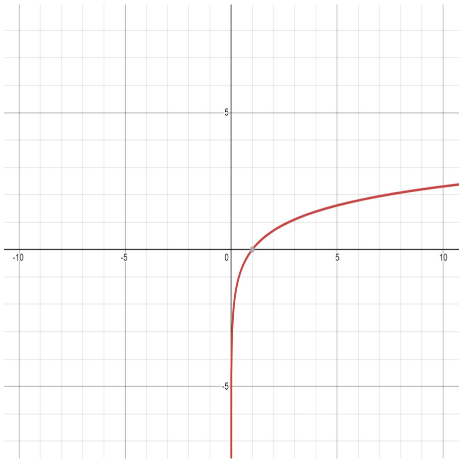

Figure 3.35: Représentation graphique de

2. $y = \ln(x+1)$

x	-1	$(-1)^+$	0	1	e	$+\infty$
y						

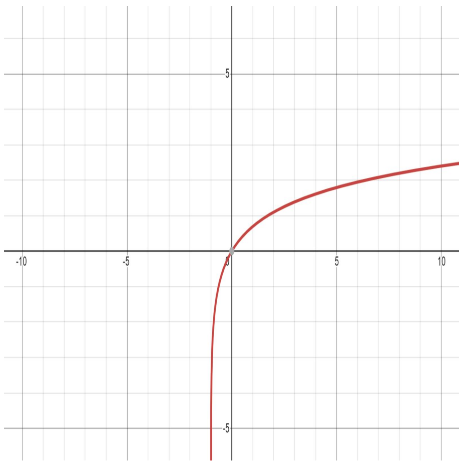

Figure 3.36: Représentation graphique de

3. $y = \log_{\frac{1}{2}}(x+2)$

x	-2	$(-2)^+$				$+\infty$
y						

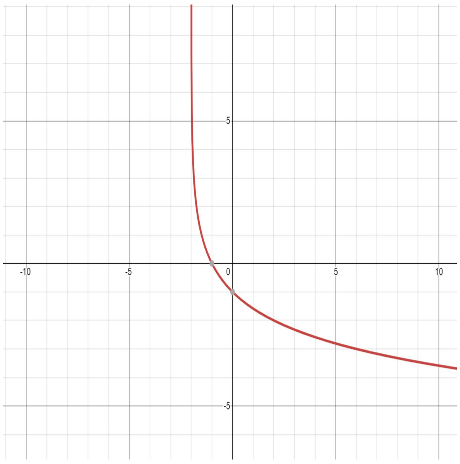

Figure 3.37: Représentation graphique de

4. $y = \log_5(2x) + 2$

x	0	0^+	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{25}{2}$	$+\infty$
y						

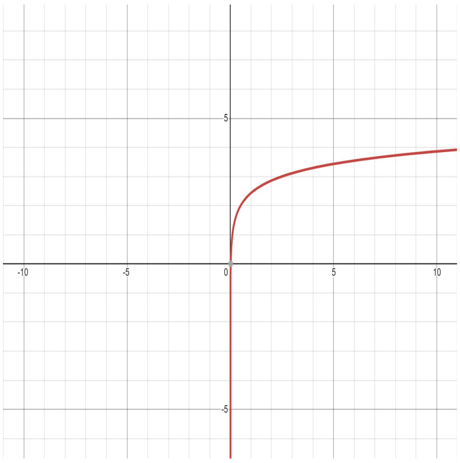

Figure 3.38: Représentation graphique de

■

■ **Exemple 3.29** Déterminer l'ensemble des solutions de l'inéquation $\ln(3-x) \leq 0$.

Solution:
$$\begin{aligned} \ln(3-x) \leq 0 &\iff 0 < 3 - x \leq 1 \\ &\iff x < 3 \leq 1 + x \\ &\iff x < 3 \text{ et } 3 - 1 \leq x \\ &\iff 2 \leq x < 3 \\ &\iff \boxed{x \in [2;3[} \end{aligned}$$

■

Exercices

Exercice 3.19 Pour une multitude de raisons, les lignes d'assemblage en industrie ont tendance à avoir un roulement important d'ouvriers. Les compagnies doivent dépenser beaucoup d'argent à entraîner de nouveaux effectifs. On a trouvé que le niveau de production d'un nouvel employé d'une chaîne de montage est décrit par la fonction

$$p(x) = 25 - 15e^{-0,3x},$$

$p(x)$ représente le nombre d'unités fabriquées par l'employé x jours après son entrée en fonction. En utilisant l'équation, calculer le nombre d'unités que l'ouvrier produira à sa 8e journée de travail. ■

Exercice 3.20 Un liquide bouillant est placé dans une pièce dont la température ambiante est de $20C$. La température du liquide en fonction du temps est donnée par l'équation

$$T(t) = 20 + 80e^{-0,2t},$$

où t est le nombre d'heures écoulées depuis le moment où le liquide a été placé dans la pièce. Combien de temps faudra-t-il pour que la température du liquide soit de $50C$. ■

Exercice 3.21 Trouver la règle de correspondance de la fonction logarithmique $y = \log_b(x)$ dont le graphique passe par le point dans chacun des cas suivants:

1. $$(16, 2)$$
2. $$(\sqrt{7}, \frac{1}{2})$$

■

Exercice 3.22 Tracer le graphe des fonctions suivantes:

a) $y = 3^x$
b) $y = (0,3)^x$
c) $y = 3^{x+1} - 1$
d) $y = e^{x-1}$
e) $y = 1 - e^{-x}$
f) $y = e^{2x}$
g) $y = e^{\frac{x}{1}}$
h) $y = e^{\frac{1}{x}}$ ■

Exercice 3.23 Soit $y = 2(2)^{-3(x+4)}$.
a) Écrire y sur la forme $ab^x + c$.
b) Esquisser le graphique de y. ■

Exercice 3.24 Tracer le graphe des fonctions suivantes:

a) $y = \ln(x+1)$
b) $y = \ln(x-1)$
c) $y = \ln(-x)$
d) $y = -\ln(x)$
e) $y = \ln(2x)$
f) $y = \ln(\frac{x}{2})$
g) $y = \ln x^2$
h) $y = \ln \frac{1}{x}$ ■

■

4. Un peu de mathématiques appliquées

4.1 Mathématiques financières

Considérez que nous avons un capital P à investir n année simplement, si le taux d'intérêt est égal à i, notre intérêt est $I = Pin$ et le montant total est égal à $F = P(1+in)$, en fait

$$\begin{aligned} \text{Valeur acquise} &= \text{Capital} + \text{Intérêts} \\ F &= P + I = P + Pin = P(1+in). \end{aligned}$$

Autrement dit, la capitalisation à **intérêts simple** s'obtient de la façon suivante:

Après une durée d'une période: $F = P + Pi = P(1+i)$

Après une durée de deux périodes: $F = P + Pi + pi = P(1+2i)$

Après une durée de trois périodes: $F = P + Pi + pi + pi = P(1+3i)$

Après une durée de n périodes: $F = P + Pi + pi + pi \cdots + pi = P(1+ni)$.

Remarque 4.1.1 — Intérêt simple. Valeur acquise après n année

$$F = P(1+in),$$

où:

$$\begin{aligned} F &= \text{Valeur acquise après } n \text{ année} \\ P &= \text{Capital ou principal} \\ n &= \text{Nombre d'années} \\ i &= \text{Taux d'intérêt annuel} \end{aligned}$$

■ **Exemple 4.1** on place un capital de 8000$ pendant 72 jours au taux annuel de 6,5%. Calculer l'intérêt et la valeur acquise à l'issue du placement.
L'intérêt:

$$I = Pin = 8000 \times \times 0,065 \times \frac{72}{365} = \boxed{102,57}.$$

La valeur acquise

$$F = P + I = 8000 + 102,57 = \boxed{8102,57}.$$

■

■ **Exemple 4.2** Quel est le taux d'intérêt si un capital de 1200$ rapporte un intérêt simple de 396$ en 3 ans ?
On a $P = 1200$, $I = 396$ et $n = 3$. Alors

$$I = Pin$$

$$396\$ = (1200) \times i \times (3) \Longrightarrow i = \frac{396}{(3)(1200)} = \boxed{0.11},$$

Le taux d'intérêt est donc de 11% ■

■ **Exemple 4.3** En combien de temps un capital de 600$ placé à un intérêt simple à un taux de 10.5% pour une année rapportera-t-il un intérêt de 21$?
On a $P = 600$, $i = 0.105$ et $I = 21$. Alors

$$I = Pin$$

$$21 = (600)(0.105)n \Longrightarrow n = \frac{21}{(600)(0.105)} = \boxed{\frac{1}{3}},$$

Il faudra donc $\frac{1}{3}$ d'une année c'est-à-dire **4 mois** pour rapporter 21$ en intérêt. ■

■ **Exemple 4.4** Serge voudrait de faire un achat d'une valeur de 1400$ dans 18 mois. Quel capital doit-il déposer aujourd'hui dans un compte rapportant un intérêt simple de 9$ par année, de manière à disposer de la somme requise au moment voulu?
On a $F = 1400$, $i = 0.09$ et $n = \frac{3}{2}$. Alors

$$F = P(1 + in)$$

$$1400 = P[1 + (0.09)(\frac{3}{2})] \Longrightarrow P = \frac{1400}{1 + (0.09)(\frac{3}{2})} = \frac{1400}{1.135} = \boxed{1233.48},$$

Serge doit donc déposer 1233.48$ dans ce compte aujourd'hui, afin de disposer de 1400 dans 18 mois. ■

La capitalisation à **intérêts composés** s'obtient de la façon suivante.

Après une durée d'une période: $F = P(1 + i)$

Après une durée de deux périodes: $F = P(1 + i)(1 + i) = P(1 + i)^2$

Après une durée de trois périodes: $F = P(1 + i)(1 + i)(1 + i) = P(1 + i)^3$

Après une durée de n périodes: $F = P(1 + i)(1 + i)(1 + i) \cdots (1 + i) = P(1 + i)^n$

On obtient alors la formule suivante.

Remarque 4.1.2 — Intérêt composé m fois par année[a]. Valeur acquise après n année

$$F = P(1+r)^k = P(1+\frac{i}{m})^{mn},$$

où:

$$\begin{aligned} F &= \text{Valeur acquise après } n \text{ année} \\ P &= \text{Capital ou principal} \\ n &= \text{Nombre d'années} \\ m &= \text{Nombre de périodes par d'années} \\ k = mn &= \text{Nombre total de périodes} \\ i &= \text{Taux d'intérêt annuel} \\ r = \frac{i}{m} &= \text{Le taux d'intérêt par période} \end{aligned}$$

- **Le taux d'intérêt réel** ou **effectif** j est le taux d'intérêt annuel capitalisé **1 fois par année** et correspond au taux annuel i **capitalisé** m **fois par année**.

$$j = (1+\frac{i}{m})^m - 1.$$

[a]

$$\begin{aligned} \text{annuellement} &: m = 1 \\ \text{semestriellement (demi-année)} &: m = 2 \\ \text{trimestriellement} &: m = 4 \\ \text{mensuellement} &: m = 12 \\ \text{hebdomadaire} &: m = 52 \\ \text{quotidiennement (journee)} &: m = 365 \end{aligned}$$

■ **Exemple 4.5** Un capital de 6000\$ est placé dans un compte à intérêt composé où le taux d'intérêt est de 8% par année.

1. Quelle sera la valeur acquise de ce capital dans trois ans si les intérêts sont capitalisés **à tous les 6 mois** ?
   On a P=6000\$. Le taux d'intérêt est de $i = 0,08$ par année. La période est de 6 mois soit une demi-année, $m = 2$. Le taux d'intérêt par période est donc de $r = \frac{i}{m} = \frac{0,08}{2} = 0,04$. Si on cherche la valeur acquise dans 3 ans, il y aura alors $k = mn = 2 \times 3 = 6$ périodes de capitalisation. Ainsi $k = 6$ et
   $$F = P(1+r)^k = 6000(1+0,04)^6 = \boxed{7591,92},$$
   C'est la valeur future, ou valeur acquise, de ce capital dans 3 ans.
2. Quelle sera la valeur acquise de ce capital dans trois ans si les intérêts sont capitalisés **mensuellement** ?
   On a P=6000. Alors $r = \frac{i}{m} = \frac{0,08}{12} = 0,0066667$, soit et $k = mn = 3 \times 12 = 36$, car les intérêts seront capitalisés 36 fois. Ainsi
   $$F = P(1+r)^k = 6000(1+0,0066667)^{36} = \boxed{7621,44},$$
   C'est la valeur acquise de ce capital dans 3 ans lorsque les intérêts sont capitalisés mensuellement.

■

■ **Exemple 4.6** Quel capital placé pendant 35 ans avec un taux de 1,5% a une valeur finale de 20000$? Comptabilisé semestriellement.

On a $F = 20000$, $m = 2$, $n = 35$, $k = mn = 70$, $i = 0,015$ et $r = \dfrac{0,015}{2} = 0,0075$. Alors

$$\begin{aligned} F &= P(1+r)^k \\ 20000 &= P(1+0,0075)^{70} \Longrightarrow P = \frac{20000}{(1+0,0075)^{70}} = \boxed{11854,31}. \end{aligned}$$

■

■ **Exemple 4.7** Combien de temps faut-il placer un capital de 20000$ au taux de 8% pour qu'il rapporte 8000$? Comptabilisé mensuellement.

On a $F = 20000+8000 = 28000$, $m = 12$, $k = mn = 12n$, $i = 0,08$ et $r = \dfrac{0,08}{12} = 0,00667$. Alors

$$\begin{aligned} F &= P(1+r)^k \\ 28000 &= 20000(1+0,00667)^{12n} \\ \frac{28000}{20000} &= ((1+0,00667)^{12})^n \\ 1,4 &= 1,08304^n \Longrightarrow n = \log_{1,08304}^{1,4} = \boxed{4,2179}. \end{aligned}$$

■

■ **Exemple 4.8** À quel taux faut-il placer un capital de 30000$ pendant 6 ans pour qu'il rapporte 3000$? Comptabilisé trimestriellement.

On a $F = 30000+3000 = 33000$, $m = 4$, $n = 6$, $k = mn = 24$ et $r = \dfrac{i}{4}$. Alors

$$\begin{aligned} F &= P(1+r)^k \\ 33000 &= 3000(1+\frac{i}{4})^{24} \\ \frac{33000}{3000} &= (1+\frac{i}{4})^{24} \\ 1,1 &= (1+\frac{i}{4})^{24} \\ 1,1^{\frac{1}{24}} &= 1+\frac{i}{4} \\ 1,003979153 &= 1+\frac{i}{4} \\ \frac{i}{4} &= 0,003979153 \Longrightarrow i = 0,01591661 \Longrightarrow = \boxed{1,59\%}. \end{aligned}$$

■

■ **Exemple 4.9** On peut vérifier aisément que le taux effectif lors du placement d'un montant de 1000$ à un taux annuel de 2% avec capitalisation 12 fois par année est:

$$j = (1+r)^m - 1 = (1+\frac{0,02}{12})^{12} - 1 = \boxed{0,0201}.$$

■

Remarque 4.1.3 — Annuité de placement. Montant de l'annuité de versement P à chaque période

1. Début de période

$$M = P(1+r)^k + P(1+r)^{k-1} + \cdots + P(1+r)^1 = \frac{P(1+r)[(1+r)^k - 1]}{r}$$

2. En fin de période

$$M = P(1+r)^{k-1} + P(1+r)^{k-1} + \cdots + P(1+r)^0 = \frac{P[(1+r)^k - 1]}{r}$$

où:

$$\begin{aligned} P &= \text{Un versement effectue a chaque début ou fin de période} \\ M &= \text{Montant de l'annuité} \end{aligned}$$

■ **Exemple 4.10** Pendant 10 ans, on dépose au début de chaque semestre 1000$ dans un compte portant un intérêt de 2% par année composé semestriellement. Quel sera le montant de l'annuité? $m = 2$, $r = \frac{i}{m} = \frac{0,02}{2} = 0,01$ et $k = mn = 2 \times 10 = 20$

$$M = \frac{P(1+r)[(1+r)^k - 1]}{r} = \frac{1000(1+0,01)[(1+0,01)^{20} - 1]}{0,01} = \boxed{22239,19}.$$

■

■ **Exemple 4.11** À la fin de chaque trimestre, on dépose 1000$ dans un compte à intérêt composé de 2% par année capitalisé trimestriellement. Quel montant y sera accumulé dans 10 ans? $m = 4$, $r = \frac{i}{m} = \frac{0,02}{4} = 0,005$ et $k = mn = 4 \times 10 = 40$

$$M = \frac{P[(1+r)^k - 1]}{r} = \frac{1000[(1+0,005)^{40} - 1]}{0,005} = \boxed{44158,85}.$$

■

Exercices

Exercice 4.1 Pauline prête 200$ à Jean-Louis à un taux d'intérêt de 7.5% par année pendant 6 mois. Quel sera le montant dû par Jean-Louis à l'échéance? ■

Exercice 4.2 Quel est le taux d'intérêt, si un capital de 7800$ placé à intérêt simple rapporte 1778,40$ en 3 ans? ■

Exercice 4.3 En combien de temps un capital de 4200$ placé à intérêt simple à un taux d'intérêt de 11.2% rapportera t'il un intérêt de 3292.80$? ■

Exercice 4.4 Vous placez une somme de 5400$ sur un livret de caisse dépargne durant 36 mois au taux de 3,8%. Calculer l'intérêt acquis. Comptabilisé bimensuelle (2 fois par mois). ■

Exercice 4.5 Dans chaque cas, déterminez le capital accumulé.

1. On place un capital initial de 4000$ pendant 6 ans à un taux d'intérêt composé annuel de 5%.
2. On investit une somme de 2500$ sur une période de 5 ans à un taux d'intérêt composé mensuel de 1,5%.

■

Exercice 4.6 Dans chaque cas, déterminez la durée du placement ou de l'emprunt.

1. Un capital initial de 5000$ génère un capital accumulé de 6842,85$ à un taux d'intérêt composé annuel de 4%.
2. Un placement de 1200$ rapporte 1713,90$ à un taux d'intérêt composé mensuel de 2%.

■

Exercice 4.7 Nicole emprunte 2000$ pour s'acheter un ordinateur. Sachant que le taux d'intérêt composé mensuel est de 1%, dans combien de temps la dette de Nicole s'élèvera-t-elle à 3355,38$? ■

Exercice 4.8 Trouver le taux effectif lorsque le taux nominal est:

1. 7% par année, les intérêts sont capitalisés trimestriellement.
2. 5% par année, les intérêts sont capitalisés semestriellement.
3. 11% par année, les intérêts sont capitalisés quotidiennement.
4. 6.3% par année, les intérêts sont capitalisés mensuellement.

■

Exercice 4.9 On dépose au début de chaque trimestre pendant 5ans une somme de 120$ dans un compte portant intérêt au taux de 6% par année et où les intérêts sont capitalisés trimestriellement. Quel est le montant d'une telle annuité? ■

Exercice 4.10 Combien doit-on déposer au début de chaque semestre dans un compte où les intérêts sont capitalisé semestriellement au taux de 7.2% par année, si on espère disposer d'une somme de 7631.33$ dans 5 ans. ■

4.2 Introduction aux statistiques descriptives

4.2.1 Notion de sommation

Définition 4.2.1 — symbole de sommation. Le symbole de sommation Σ est défini comme suit:

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{n-1} + a_n,$$

où i représente l'**indice de sommation**; i est une **variable indexée**; m est la **limite inférieure de sommation**, et n est la **limite supérieure de sommation**.

■ **Exemple 4.12**

$$\sum_{i=1}^{5} i = 1+2+3+4+5 = 15$$

$$\sum_{i=1}^{5} i^2 = 1^2+2^2+3^2+4^2+5^2 = 55$$

$$\sum_{i=1}^{5} 2^i = 2^1+2^2+2^3+2^4+2^5 = 66$$

$$\sum_{i=1}^{5} i^i = 1^1+2^2+3^3+4^4+5^5 = 3413$$

■

■ **Exemple 4.13** Une somme d'une constante

$$\sum_{i=1}^{100} 5 = 5+5+\ldots+5 = 5\times 100 = 500.$$

■

■ **Exemple 4.14**

$$\sum_{i=0}^{33} (-1)^i = 1+(-1)+1+(-1)+\ldots+1+(-1) = 0.$$

■

Théorème 4.2.1 — Propriétés de Σ. Pour chaque a_i, b_i et une constante c, on a:

$$\sum_{i=m}^{n} (ca_i) = c\sum_{i=m}^{n} a_i$$

$$\sum_{i=m}^{n} (a_i+b_i) = \sum_{i=m}^{n} a_i + \sum_{i=m}^{n} b_i$$

■ **Exemple 4.15** Calculez $\sum_{i=0}^{10}(2+3(-1)^i)$.

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{10}(2+3(-1)^i) &= \sum_{i=0}^{10} 2 + \sum_{i=0}^{10} 3(-1)^i \\ &= \sum_{i=0}^{10} 2 + 3\sum_{i=0}^{10}(-1)^i \\ &= (2+2+\cdot+2)+3(1+(-1)+1+(-1)+\ldots+1) = 11\times 2+3\times 1 = 25.\end{aligned}$$

■

4.2.2 Les mesures de tendance centrale

Définition 4.2.2 — La moyenne. **La moyenne** est la somme des données divisée par leur nombre.

- Soit la séries données $x_1, x_2, \cdots, x_n$:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i,$$

- Soit les données dans le tableau suivant:

Valeur	x_1	x_2	$\cdots$	x_k
Effectif	n_1	n_2	$\cdots$	n_k
Fréquences	f_1	f_2	$\cdots$	f_k

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i, \quad (\text{où} \quad N = \sum_{i=1}^{k} n_i \quad \text{est l'effectif total}),$$

En utilisant les fréquences:

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{N} x_i = \sum_{i=1}^{k} f_i x_i \quad (\text{où} \quad f_i = \frac{n_i}{N} \quad \text{est l'effectif relatif ou la fréquences}).$$

■ **Exemple 4.16** Une poule pond huit œufs. Voici les poids en grammes (g) des œufs:

$$60g, \quad 56g, \quad 61g, \quad 68g, \quad 51g, \quad 53g, \quad 69g, \quad 54g,$$

calculez la moyenne.

$$\bar{x} = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} x_i = \frac{1}{8}(60+56+61+68+51+53+69+54) = \frac{472}{8} = 59.$$

■

■ **Exemple 4.17** Déterminez la moyenne de la distribution suivante:

Valeur	1	2	4	6	7	9
Effectif	4	3	5	7	2	1

L'effectif total:

$$N = \sum_{i=1}^{6} n_i = 4+3+5+7+2+1 = 22,$$

La moyenne:

$$\bar{x} = \frac{1}{22}\sum_{i=1}^{6} n_i x_i = \frac{1}{22}(4\times 1 + 3\times 2 + 5\times 4 + 7\times 6 + 2\times 7 + 1\times 9) = \frac{95}{22} \simeq \boxed{4,31}.$$

■

■ **Exemple 4.18** Déterminez la moyenne de la distribution suivante:

Valeur	-3	-2	0	1	2	3
Fréquences	0,2	0,1	0,3	0,15	0,1	0,15

La moyenne:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{6} f_i x_i = 0,2\times(-3) + 0,1\times(-2) + 0,3\times 0 + 0,15\times 1 + 0,1\times 2 + 0,15\times 3 = \boxed{0}.$$

■

4.2.3 Les mesures de dispersion

Définition 4.2.3 — Variance et écart-type. La variance mesure la distance de chaque observation par rapport à la moyenne.

- Soit la séries données $x_1, x_2, \cdots, x_n$:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2,$$

- Soit les données dans le tableau suivant:

Valeur	x_1	x_2	$\cdots$	x_k
Effectif	n_1	n_2	$\cdots$	n_k
Fréquences	f_1	f_2	$\cdots$	f_k

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i(x_i - \bar{x})^2, \quad (\text{où} \quad N = \sum_{i=1}^{k} n_i),$$

En utilisant les fréquences:

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i(x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{k}\frac{n_i}{N}(x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{k} f_i(x_i - \bar{x})^2 \quad (\text{où} \quad f_i = \frac{n_i}{N}).$$

L'écart-type est la racine carré de la variance!

■ **Exemple 4.19** Une poule pond huit œufs. Voici les poids en grammes (g) des œufs:

$$60g, \quad 56g, \quad 61g, \quad 68g, \quad 51g, \quad 53g, \quad 69g, \quad 54g,$$

calculez la variance et l'écart-type.
Par l'exemple 4.16 de la page 80, $\bar{x} = 59$, alors:
La variance:

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8}(x_i - \bar{x})^2 \\ &= \frac{1}{8}((60-59)^2 + (56-59)^2 + (61-59)^2 + (68-59)^2 + (51-59)^2 + (53-59)^2 \\ &+ (69-59)^2 + (54-59)^2) \\ &= \frac{320}{8} = \boxed{40}.\end{aligned}$$

L'écart-type.

$$\sigma = \sqrt{40} = \boxed{6,324}.$$

■

■ **Exemple 4.20** Déterminez la moyenne, la variance et l'écart-type de la distribution suivante:

Valeur	-2	-1	0	2	3	5
Effectif	1	3	5	2	4	1

L'effectif total:

$$N = \sum_{i=1}^{6} n_i = 1+3+5+2+4+1 = 16,$$

La moyenne:

$$\bar{x} = \frac{1}{16}\sum_{i=1}^{6} n_i x_i = \frac{1}{16}(1\times(-2) + 3\times(-1) + 5\times 0 + 2\times 2 + 4\times 3 + 1\times 5) = \frac{16}{16} = \boxed{1}.$$

La variance:

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \frac{1}{16}\sum_{i=1}^{6}(x_i-\bar{x})^2\\ &= \frac{1}{16}((-2-1)^2+(-1-1)^2+(0-1)^2+(2-1)^2+(3-1)^2+(5-1)^2)\\ &= \frac{35}{16} = \boxed{2,1875}.\end{aligned}$$

L'écart-type:

$$\sigma = \sqrt{2,1875} \simeq \boxed{1,479}$$

■

Remarque 4.2.2 [L'effet d'une transformation affine] Soit les données définie par $y_i = ax_i + b$ (a et b étant des réels):

1. La moyen:
$$\bar{y} = a\bar{x} + b.$$
2. La variance:
$$\sigma_y^2 = a^2\sigma_x^2$$

■ **Exemple 4.21** Considérons les valeurs cinq titres européens en portefeuille

Titre	1	2	3	4	5
Valeur x_i (€)	3 200	15 300	22 300	12 350	7 650

on peut trouver $\bar{x} = 12160$ et $\sigma_x^2 = 42667400$. Vous convertissez ces montants en dollars canadiens au taux de 1,26$/€. Vous obtenez les valeurs suivantes:

Titre	1	2	3	4	5
Valeur y_i ($)	4 032	19 278	28 098	15 561	9 639

La règle de transformation s'exprime par $y = 1,26x$. Alors

$$\begin{aligned}\bar{y} &= 1,26\bar{x} = 1,26(12160) = 15321,6\\ \sigma_y^2 &= (1,26)^2\sigma_x^2 = (1,26)^2(42667400) = 67738764,24\\ \sigma_y &= \sqrt{67738764,24} = 8230,35\end{aligned}$$

■

■ **Exemple 4.22** La moyenne et la variance d'une série de températures quotidiennes, degrés Celsius, sont respectivement 18 et 25. Déterminez la moyenne, la variance et l'écart-type de la même série, exprimée en degrés Fahrenheit. La relation entre le nombre C de degrés Celsius et le nombre F de degrés $32+9C/5$].

Ici on a $a = \frac{9}{5}$ et $b = 32$, alors:

$$\begin{aligned}\overline{F} &= \frac{9}{5}\overline{C} + 32 = \frac{9}{5}(18) + 32 = 64,4\\ \sigma_F^2 &= (\frac{9}{5})^2\sigma_C^2 = (\frac{9}{5})^2(25) = 81\\ \sigma_F &= \sqrt{81} = 9\end{aligned}$$

■

Remarque 4.2.3 Un développement du carré mène à la reformulation suivante:

$$\sigma^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i)^2$$

■ **Exemple 4.23** Pour l'exemple 4.19 de la page 81, $\bar{x} = 59$, aussi:

$$\overline{x^2} = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} x_i^2 = \frac{1}{8}(60^2 + 56^2 + 61^2 + 68^2 + 51^2 + 53^2 + 69^2 + 54^2) = \frac{28168}{8} = 3521$$

alors la variance est donc égale à:

$$\sigma^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2 = 3521 - 59^2 = 3521 - 3481 = \boxed{40}.$$

■

Définition 4.2.4 — Coefficient de variation (CV).

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}.$$

■ **Exemple 4.24** Pour l'exemple 4.19 de la page 81, $\bar{x} = 59$ et $\sigma = 6,324$, alors

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{6,324}{59} = 0,107$$

■

Exercices

Exercice 4.11 Calculez:

a) $\sum_{i=0}^{9} i$

b) $\sum_{i=0}^{9} \frac{2+i}{2}$

c) $\sum_{i=1}^{100} 1$

d) $\sum_{i=1}^{100} i$

Exercice 4.12 Calculer la moyenne, la variance, l'écart-type et coefficient de variation de la distribution suivante:

$$50, 60, 75, 75, 80,$$

Exercice 4.13 Calculer la moyenne, la variance, l'écart-type et coefficient de variation de la distribution suivante qui a été construite avec des données:

$$-5, -4, -4, -3, -3, -2, -1, 0, 0, 1, 2, 3, 3, 4, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 10, 11, 11, 12.$$

Exercice 4.14 Déterminez la moyenne, la variance, l'écart-type et coefficient de variation de la distribution suivante:

Valeur	-4	-1	0	1	2	7
Effectif	2	3	5	6	4	1

Exercice 4.15 Déterminez la moyenne, la variance, l'écart-type et coefficient de variation de la distribution suivante:

Valeur	20	50	60	70	80	90
Fréquences	0,1	0,1	0,2	0,15	0,1	0,15

Exercice 4.16 Considérons x_i la valeur, en euro €, pour chacun des titres allemands d'un portefeuille:

Titre	C	H	R	A	I	T	Y	S	U	D
Valeur x_i	32€	24€	15€	46€	14€	28€	24€	27€	30€	24€

L'investisseur à besoin de faire la conversion en dollars Canadiens au taux 1,485 $ /€, en ajoutant des frais variés fixes par titre de 3.5 €.

Déterminer

1. La valeur y, en dollars, des titres en fonction des valeurs x, en euro , de la forme $y = ax + b$.
2. la valeur moyenne pour ces titres: $\bar{x}$, en euro €, puis $\bar{y}$ en dollars;
3. l'écart-type σ_x et σ_y pour ces titres en euro €, puis en dollars.

Bibliography

Index