Calcul Intégral

MAT 0344

Mehrdad Najafpour

PUBLISHED BY ....

Première impression, avril 2020

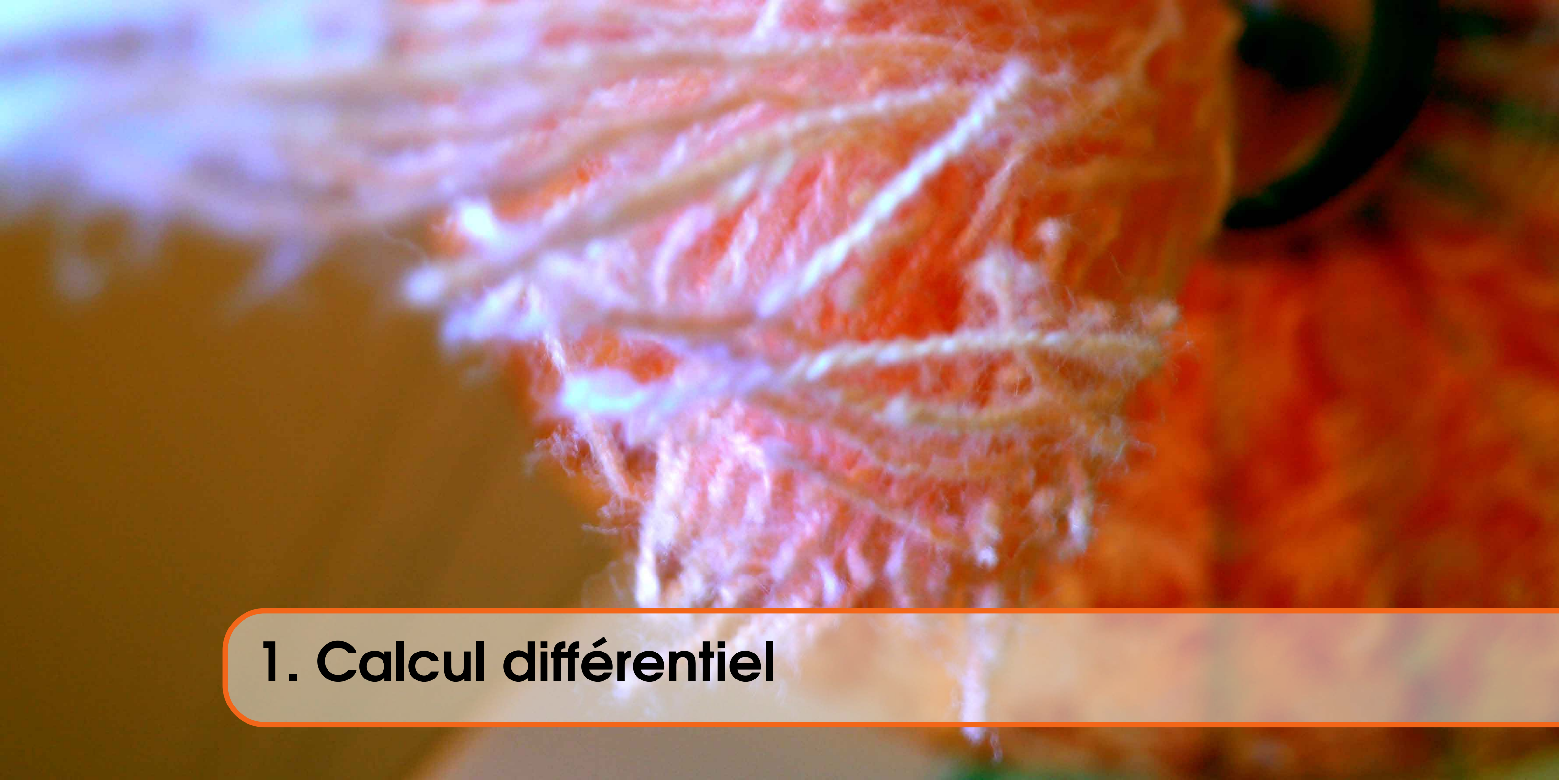
Contents

PRÉFACE

Ces notes sont destinées aux étudiants du cours de calcul intégral (sigle MAT 0344). Elles constituent la matière première d'un cours de premier cycle d'une durée d'environ 40 heures. Elles sont divisées en six chapitres. Dans le premier chapitre, nous avons un bref rappel du calcul différentiel, les autres chapitres abordent les principaux thèmes du calcul intégral. Ces jours-ci, vous pouvez résoudre une intégrale sur votre portable.

Les principaux objectifs de ces notes de cours sont d'aider l'étudiant à comprendre le concept d'intégrale, les idées derrière les techniques d'intégration et à faire le lien entre le calcul et son domaine d'étude.

À lavance, je voudrais remercier **Patricia Sorya** et **Mathieu Bossé**.
Mehrdad Najafpour,
avril 2020.
Montréal, Canada
najafpour_ ghazvini.mehrdad@uqam.ca



1. Calcul différentiel

1.1 Définition de dérivée

Définition 1.1.1 Le taux de variation moyen de la fonction $f(x)$ entre les abscisses x_1 et x_2 est

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

Dans le graphe de $y = f(x)$, il s'agit de la pente de la droite sécante en x_1 et x_2.

■ **Exemple 1.1** Calculez la pente de la droite sécante à la courbe $y = f(x) = 3x^2 + 1$ en $x_1 = 1$ et $x_2 = 3$.

Solution: Par définition

$$\begin{aligned} m &= \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} \\ &= \frac{(3(3)^2 + 1) - (3(1)^2 + 1)}{3 - 1} = \frac{28 - 4}{2} = 12. \end{aligned}$$

■

Définition 1.1.2 Le taux de variation instantané de la fonction $f(x)$ en x_1 est donné par

$$\lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Dans le graphe de $y = f(x)$, il s'agit de la pente de la droite tangente à la courbe en x_1.

Remarque 1.1.1 On peut écrire

$$\lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x},$$

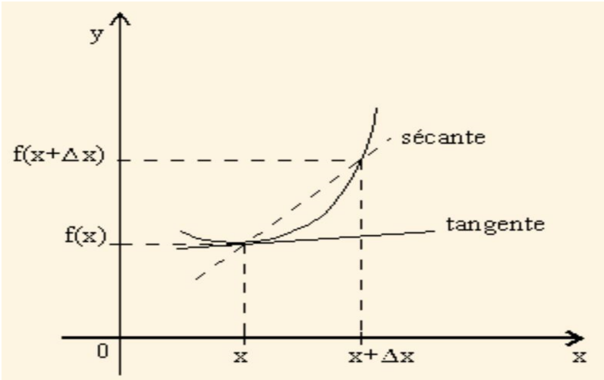


Figure 1.1: La pente de la droite sécante et tangente

■ **Exemple 1.2** Calculez la pente de la droite tangente à la courbe $y = f(x) = 3x^2 + 1$ en $x_1 = 1$.
Solution: Par définition

$$\begin{aligned} m &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(3(1+\Delta x)^2 + 1) - (3(1)^2 + 1)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3 + 6\Delta x + 3\Delta x^2 + 1 - 4}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{6\Delta x + 3\Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (6 + 3\Delta x) = 6. \end{aligned}$$

■

Définition 1.1.3 La dérivée d'une fonction f en x est notée $f'(x)$ et est définie par la limite suivante.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

■ **Exemple 1.3** En utilisant la définition de la dérivée, calculez $f'(x)$ pour $f(x) = x^3 + 5$.
Solution: Par définition

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{((x+\Delta x)^3 + 5) - ((x)^3 + 5)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 + 5) - (x^3 + 5)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2) = 3x^2. \end{aligned}$$

■

1.2 Règles et formules de dérivation

Théorème 1.2.1 — La dérivée de x^n. En général nous avons:

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

Par exemple:
- $(x^2)' = 2x$.
- $(x^3)' = 3x^2$.
- $(5)' = 0$.
- $(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
- $(\sqrt[3]{x^5})' = (x^{\frac{5}{3}})' = \frac{5}{3}x^{\frac{5}{3}-1} = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} = \frac{5\sqrt[3]{x^2}}{3}$.

Théorème 1.2.2 — Régles de dérivation. Soient deux fonctions dérivables $f(x)$ et $g(x)$ et une constante c:
- $(cf(x))' = cf'(x)$.
- $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$.
- $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$.
- $(\frac{f(x)}{g(x)})' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.

■ **Exemple 1.4** En utilisant la régles de la dérivée, calculez $f'(x)$ pour $f(x) = x^3+5$.
Solution:

$$(x^3+5)' = (x^3)' + (5)' = 3x^2 + 0 = 3x^2$$

■

■ **Exemple 1.5** Calculez la dérivée de $y = (x^5+1)(x^2+1)$.
Solution:

$$\begin{aligned} y' = [(x^5+1)(x^2+1)]' &= (x^5+1)'(x^2+1) + (x^5+1)(x^2+1)' \\ &= (5x^4)(x^2+1) + (x^5+1)(2x) \end{aligned}$$

■

■ **Exemple 1.6** Calculez la dérivée de $y = \frac{x^5+1}{x^2+1}$.
Solution:

$$\begin{aligned} y' = (\frac{x^5+1}{x^2+1})' &= \frac{(x^5+1)'(x^2+1)-(x^5+1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{(5x^4)(x^2+1)-(x^5+1)(2x)}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

■

Théorème 1.2.3 — Dérivée des fonctions exponentielle et logarithmique. Nous avons
- $(e^x)' = e^x$.
- $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

Théorème 1.2.4 — Dérivées des fonctions trigonométriques. Nous avons
- $(\sin x)' = \cos x$.
- $(\cos x)' = -\sin x$.
- $(\mathrm{Arc}\sin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- $(\mathrm{Arc}\tan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

■ **Exemple 1.7** Calculez la dérivée de $\tan x$ et $\sec x$.
Solution:

$$\begin{aligned}(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' &= \frac{(\sin x)'(\cos x) - (\sin x)(\cos x)'}{(\cos x)^2} \\ &= \frac{\cos x(\cos x) - (\sin x)(-\sin x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\sec x)' = \left(\frac{1}{\cos x}\right)' &= \frac{(1)'(\cos x) - (1)(\cos x)'}{(\cos x)^2} \\ &= \frac{(0)(\cos x) - (1)(-\sin x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos x}\frac{1}{\cos x} = \tan x \sec x.\end{aligned}$$

■

■ **Exemple 1.8** Calculez la dérivée de $y = x^2 \sin x$.
Solution:

$$\begin{aligned}y' = [x^2 \sin x]' &= (x^2)'(\sin x) + (x^2)(\sin x)' \\ &= (2x)(\sin x) + (x^2)(\cos x) = 2x\sin x + x^2 \cos x\end{aligned}$$

■

Théorème 1.2.5 — Dérivation des fonctions composées (régle de chaîne). Soient deux fonctions dérivables u et v:

$$(u(v(x)))' = u'(v(x))v'(x).$$

■ **Exemple 1.9** Calculez la dérivée de $y = (x^2+1)^2$.
Solution: Ici $v(x) = x^2+1$ et $u(x) = x^2$, alors

$$\begin{aligned}y' = [(x^2+1)^2]' &= u'(v(x))v'(x) \\ &= 2(x^2+1)(2x) = 4x(x^2+1).\end{aligned}$$

■

■ **Exemple 1.10** Calculez la dérivée de $f(x) = \sin(x^2)$ et $g(x) = \sin^2 x$.
Solution: Pour $f(x) = \sin(x^2)$, $v(x) = x^2$ et $u(x) = \sin x$, alors

$$\begin{aligned} y' = [\sin(x^2)]' &= u'(v(x))v'(x) \\ &= \cos(x^2)(2x) = 2x\cos x^2. \end{aligned}$$

Pour $g(x) = \sin^2 x$, $v(x) = \sin x$ et $u(x) = x^2$, alors

$$\begin{aligned} y' = [\sin^2 x]' &= u'(v(x))v'(x) \\ &= 2\sin x\cos x. \end{aligned}$$

■

■ **Exemple 1.11** Calculez la dérivée de $f(x) = e^{x^2+5}$.
Solution: Ici $v(x) = x^2+5$ et $u(x) = e^x$, alors

$$\begin{aligned} y' = [e^{x^2+5}]' &= u'(v(x))v'(x) \\ &= e^{x^2+5}(2x) = 2xe^{x^2+5}. \end{aligned}$$

■

■ **Exemple 1.12** Calculez la dérivée de $f(x) = \ln(1+\sqrt{1+x^2})$ et $g(x) = \ln\cos x$.
Solution: Pour $f(x) = \ln(1+\sqrt{1+x^2})$, $v(x) = 1+\sqrt{1+x^2}$ et $u(x) = \ln x$, alors

$$\begin{aligned} y' = [\ln(1+\sqrt{1+x^2})]' &= u'(v(x))v'(x) \\ &= \frac{1}{1+\sqrt{1+x^2}}\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}. \end{aligned}$$

Pour $g(x) = \ln\cos x$, $v(x) = \cos x$ et $u(x) = \ln x$, alors

$$\begin{aligned} y' = [\ln\cos x]' &= u'(v(x))v'(x) \\ &= \frac{1}{\cos x}\sin x = \tan x. \end{aligned}$$

■

■ **Exemple 1.13** Calculez la dérivée de $y = (2x-1)^7(x^2+1)^{15}$.
Solution:

$$\begin{aligned} y' = [(2x-1)^7(x^2+1)^{15}]' &= [(2x-1)^7]'(x^2+1)^{15} + (2x-1)^7[(x^2+1)^{15}]' \\ &= [7(2x-1)^6\times 2](x^2+1)^{15} + (2x-1)^7[15(x^2+1)^{14}\times 2x]. \end{aligned}$$

■ **Exemple 1.14** Calculez la dérivée de $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.
Solution: Ici $v(x) = 1-x^2$ et $u(x) = \sqrt{x}$, alors

$$\begin{aligned} f'(x) = [\sqrt{1-x^2}]' &= u'(v(x))v'(x) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}(-2x) = \frac{-x}{\sqrt{x^2-1}}. \end{aligned}$$

■

■ **Exemple 1.15** Calculez la dérivée de $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + \sec x}$.
Solution: Ici $v(x) = x^3 + \sec x$ et $u(x) = \sqrt[3]{x}$, alors

$$u'(x) = (\sqrt[3]{x})' = (x^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$
$$v'(x) = (x^3 + \sec x)' = 3x^2 + \sec x \tan x,$$

donc

$$\begin{aligned} f'(x) = [\sqrt[3]{x^3 + \sec x}]' &= u'(v(x))v'(x) \\ &= \frac{1}{3}(x^3 + \sec x)^{-\frac{2}{3}}(3x^2 + \sec x \tan x). \end{aligned}$$

■

■ **Exemple 1.16** Calculez la dérivée de $f(x) = \sqrt[6]{\frac{1+3x}{1-3x}}$.
Solution: Ici $v(x) = \frac{1+3x}{1-3x}$ et $u(x) = \sqrt[6]{x}$, alors

$$u'(x) = (x^{\frac{1}{6}})' = \frac{1}{6}x^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{\sqrt[6]{x^5}}$$
$$v'(x) = (\frac{1+3x}{1-3x})' = \frac{3(1-3x)-(1+3x)(-3)}{(1-3x)^2} = \frac{6}{(1-3x)^2},$$

donc

$$\begin{aligned} f'(x) = [\sqrt[6]{\frac{1+3x}{1-3x}}]' &= u'(v(x))v'(x) \\ &= \frac{1}{6}(\frac{1+3x}{1-3x})^{-\frac{5}{6}}\frac{6}{(1-3x)^2} \\ &= (\frac{1+3x}{1-3x})^{-\frac{5}{6}}\frac{1}{(1-3x)^2}. \end{aligned}$$

■

■

■ **Exemple 1.17** Calculez la dérivée de $f(x) = \sqrt[3]{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$.
Solution:

$$f'(x) = \frac{1}{3}(\frac{1-x^2}{1+x^2})^{-\frac{2}{3}}.(\frac{1-x^2}{1+x^2})' = \frac{1}{3}(\frac{1-x^2}{1+x^2})^{-\frac{2}{3}}.\frac{-4x}{1+x^2}.$$

■

■ **Exemple 1.18** Par définition, on appelle cosinus hyperbolique de x, qu'on note cosh x, la quantité

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

de même, le sinus hyperbolique de x est

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Par analogie avec les fonctions trigonométriques on définit

$$\begin{aligned}
\tanh x &= \frac{\sinh x}{\cosh x}\\
\coth x &= \frac{\sinh x}{\cosh x}\\
\operatorname{sech} x &= \frac{\sinh x}{\cosh x}\\
\operatorname{csch} x &= \frac{\sinh x}{\cosh x}
\end{aligned}$$

a) Montrer que

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$$

b) Montrer que

$$\begin{aligned}
(\sinh x)' &= \cosh x\\
(\cosh x)' &= \sinh x\\
(\tanh x)' &= \operatorname{sech}^2 x
\end{aligned}$$

Solution a:

$$\begin{aligned}
\cosh^2 x - \sinh^2 x &= (\frac{e^x + e^{-x}}{2})^2 - (\frac{e^x - e^{-x}}{2})^2\\
&= \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{4} - \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2}{4} = \frac{4}{4} = 1.
\end{aligned}$$

Solution b:

$$\begin{aligned}
(\sinh x)' &= (\frac{e^x - e^{-x}}{2})' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x\\
(\cosh x)' &= (\frac{e^x + e^{-x}}{2})' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x\\
(\tanh x)' &= (\frac{\sinh x}{\cosh x})' = \frac{(\cosh x)(\cosh x) - (\sinh x)(\sinh x)}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x} = \operatorname{sech}^2 x
\end{aligned}$$

■

■ **Exemple 1.19** Calculez la dérivée de $f(x) = \ln(\ln x)$ et $g(x) = \ln(\ln(\ln x))$.
Solution:

$$\begin{aligned}
f'(x) = [\ln(\ln x)]' &= u'(v(x))v'(x)\\
&= \frac{1}{\ln x}.\frac{1}{x} = \frac{1}{x\ln x}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g'(x) = [\ln(\ln(\ln x))]' &= u'(v(w(x)))v'(w(x)).v(x)\\
&= \frac{1}{\ln(\ln x)}.\frac{1}{\ln x}.\frac{1}{x} = \frac{1}{x\ln x\ln(\ln x)}.
\end{aligned}$$

■

■ **Exemple 1.20** Calculez la dérivée de $y = \tan^5(\frac{1-\sin^2 x}{1+\sin^2 x})$.

Solution: Ici $y = \tan^5(\frac{1-\sin^2 x}{1+\sin^2 x}) = f(g(h(I(x))))$ où $f(x) = x^5$, $g(x) = \tan x$, $h(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$ et $I(x) = \sin x$, alors

$$f'(x) = (x^5)' = 5x^4$$
$$g'(x) = (\tan x)' = \sec^2 x$$
$$h'(x) = (\frac{1-x^2}{1+x^2})' = \frac{-4x}{(1+x^2)^2}$$
$$I'(x) = (\sin x)' = \cos x$$

donc

$$y' = [\tan^5(\frac{1-\sin^2 x}{1+\sin^2 x})]' = f'(g(h(I(x))))g'(h(I(x))).h'(I(x)).I'(x)$$
$$= 5\tan^4(\frac{1-\sin^2 x}{1+\sin^2 x}).\sec^2(\frac{1-\sin^2 x}{1+\sin^2 x}).\frac{-4\sin x}{(1+\sin^2 x)^2}.\cos x.$$

■

Exercices

Exercice 1.1 Calculez la dérivée de chacune des fonctions suivantes:

1) $f(x) = -5x^5 + 2\frac{1}{x^2} - 5\sqrt{x}$
2) $f(x) = 3x^{13} + \frac{7}{4}x^{34} + \frac{2}{5}x^{52}$
3) $f(x) = \frac{3}{x-1}$
4) $f(x) = \frac{2x-3}{1-3x}$
5) $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$
6) $f(x) = \sqrt[6]{\frac{1+3x}{1-3x}}$
7) $f(x) = x\sqrt[3]{(3-2x^4)^7}$
8) $f(x) = \left(\frac{x}{x+7}\right)^5$

■

Exercice 1.2 Calculez la dérivée de chacune des fonctions suivantes:

9) $f(x) = \sin(2x) - 2\cos(x)$
10) $f(x) = \cos(\sqrt{x})$
11) $f(x) = \cos(x^2 - 3x - 6)$
12) $f(x) = \sin\left(\frac{x-1}{x}\right)$
13) $f(x) = \cos(2x)\sin(x^2 + 3x)$
14) $f(x) = \frac{\sin(x) - \cos(x)}{\sin(x) + \cos(x)}$
15) $f(x) = (\sin(x))^5(\cos(x))^4$
16) $f(x) = \tan(2x^2 - 1)$
17) $f(x) = (\tan(3x))^2$
18) $f(x) = \cos(\tan(x^2))$
19) $f(x) = \text{Arcsin}(2x)$
20) $f(x) = \text{Arccos}(1 - x^2)$
21) $f(x) = (\text{Arcsin}(x^2))^3$

■

Exercice 1.3 Calculez la dérivée de chacune des fonctions suivantes:

22) $f(x) = \dfrac{e^x}{\text{Arctan}(x^2)}$

23) $f(x) = \text{Arctan}(e^{2x})$

24) $f(x) = e^{2\sin(x)}$

25) $f(x) = e^{x^2}\cos(e^{3x})$

26) $f(x) = 2^{\tan(x2)}$

27) $f(x) = a^{\ln(x)}$ (où $a > 0$ et $a \neq 1$)

28) $f(x) = \ln(1+\sqrt{1+x^2})$

29) $f(x) = \ln(\sin(3x))$

30) $f(x) = \ln(\ln(x))$

31) $f(x) = e^x \ln(x)$

32) $f(x) = \dfrac{1}{2}\log_3(\cos(x^3-1))$

Exercice 1.4 Calculez la dérivée de chacune des fonctions suivantes:

a) $f(x) = \ln\left(\left((8-4)^{x^3}\right)^3 \tan^4(x)\right)$

b) $F(t) = \dfrac{\text{Arccot}(\ln(\sin(t)))}{(t^9+49)^2}$

2. Introduction à l'intégration

2.1 Primitive d'une fonction

Définition 2.1.1 — Primitive. Une primitive d'une fonction f est une fonction F t.q

$$F'(x) = f(x).$$

■ **Exemple 2.1** Pour $f(x) = 2x$ nous pouvons utiliser $F_1(x) = x^2$ car

$$F'(x) = (x^2)' = 2x = f(x),$$

Bien sur $F_2(x) = x^2 - 3$ est aussi une primitive de f. En fait pour toute constante c, $F(x) = x^2 + c$ est une primitive de f. ■

Définition 2.1.2 — L'intégrale indéfinie. L'intégrale indéfinie de la fonction f, notée $\int f(x)\,dx$ est la famille de toutes les primitives de f, c'est-à-dire $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ si et seulement si $F'(x) = f(x)$, pour toute constante C.

■ **Exemple 2.2** Pour $f(x) = 2x$, on écrit

$$\int 2x\,dx = x^2 + c.$$

■

■ **Exemple 2.3** Pour les fonctions suivantes trouvez une expression de la forme

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c.$$

a) $F(x) = x^3$.
b) $G(x) = \ln(x^2 + 1)$.
c) $H(x) = e^{\sqrt{x}}$.

Solution a: La dérivée de F est égale à

$$f(x) = F'(x) = (x^3)' = 3x^2,$$

alors

$$\int 3x^2\,dx = x^3 + c.$$

Solution b:
La dérivée de G est égale à

$$\begin{aligned} g(x) = G'(x) &= (\ln(x^2+1))' \\ &= \frac{1}{x^2+1}.2x = \frac{2x}{x^2+1}, \end{aligned}$$

alors

$$\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \ln(x^2+1) + c.$$

Solution c: La dérivée de H est égale à

$$\begin{aligned} h(x) = H'(x) &= (e^{\sqrt{x}})' \\ &= e^{\sqrt{x}}.\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}, \end{aligned}$$

alors

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\,dx = e^{\sqrt{x}} + c.$$

■

Observation: La dérivée de x^4 est égale à $4x^3$, alors

$$\int 4x^3\,dx = x^4 + c,$$

Aussi la dérivée de $\frac{1}{4}x^4$ est égal á x^3, alors

$$\int x^3\,dx = \frac{1}{4}x^4 + c;$$

qu'est donc $\int x^n\,dx$?

Théorème 2.1.1 — L'intégrale de x^n. En général pour $n \neq 1$ nous avons:

$$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c,$$

car $(\frac{1}{n+1}x^{n+1})' = \frac{1}{n+1}.(n+1)x^n x^n = x^n$.

Par exemple:
- $\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + c.$
- $\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + c.$
- $\int dx = \frac{1}{1}x^1 + c = x + c.$
- $\int \frac{1}{x^3}\,dx = \int x^{-3}\,dx = \frac{1}{-3+1}x^{-3+1} + c = \frac{1}{-2}x^{-2} + c = -\frac{1}{2x^2} + c.$

- $\int \sqrt{x}\,dx = \frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1}+c = \frac{1}{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}}+c = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}+c.$
- $\int \sqrt[3]{x^7}\,dx = \int x^{\frac{7}{3}}\,dx = \frac{1}{\frac{7}{3}+1}x^{\frac{7}{3}+1}+c = \frac{3}{10}x^{\frac{10}{3}}+c.$

Attention: Pour $n=-1$,

$$\int x^{-1}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + c,$$

car $(\ln x + c)' = \frac{1}{x}$.

2.2 Propriétés de L'intégrale indéfinie

Théorème 2.2.1 — (Propriétés de l'intégrale indéfinie). Soient deux fonctions continues $f(x)$ et $g(x)$ et une constante k:

- $\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx.$
- $\int f(x)+g(x)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx.$

Attention:

$$\int f(x)g(x)\,dx \neq \left(\int f(x)\,dx\right)\left(\int g(x)\,dx\right).$$

■ **Exemple 2.4** Calculez $\int (6x+1)\,dx$.

Solution:

$$\begin{aligned}\int (6x+1)\,dx &= 6\int x\,dx + \int dx\\ &= 6\frac{1}{2}x^2+c = 3x^2+c.\end{aligned}$$

■

■ **Exemple 2.5** Calculez $\int (2x^3-4x+9)\,dx$.

Solution:

$$\begin{aligned}\int (2x^3-4x+9)\,dx &= 2\int x^3\,dx - 4\int x\,dx + 9\int dx\\ &= 2\frac{1}{4}x^4 - 4\frac{1}{2}x^2 + 9x + c = \frac{1}{2}x^4 - 2x^2 + 9x + c.\end{aligned}$$

■

■ **Exemple 2.6** Calculez $\int (2x-3)(3x+1)\,dx$.

Solution:

$$\begin{aligned}\int (2x-3)(3x+1)\,dx &= \int (6x^2-7x-3)\,dx\\ &= 6\frac{1}{3}x^3 - 7\frac{1}{2}x^2 - 3x + c = 2x^3 - \frac{7}{2}x^2 - 3x + c.\end{aligned}$$

■

■ **Exemple 2.7** Calculez $\int \frac{x^4-3x^2+4x+10}{x^2}\,dx$.

Solution:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^4-3x^2+4x+10}{x^2}\,dx &= \int \frac{x^4}{x^2}-\frac{3x^2}{x^2}+\frac{4x}{x^2}+\frac{10}{x^2}\,dx \\
&= \int x^2-3+\frac{4}{x}+10x^{-2}\,dx \\
&= \int x^2\,dx - 3\int dx + 4\int \frac{1}{x}\,dx + 10\int x^{-2}\,dx \\
&= \frac{x^3}{3}-3x+4\ln x-10x^{-1}+c.
\end{aligned}$$

■

■ **Exemple 2.8** Calculez $\int (2\sin x - 3\cos x + 2x)\,dx$.

Solution:

$$\begin{aligned}
\int (2\sin x - 3\cos x + 2x)\,dx &= 2\int \sin x\,dx - 3\int x\,dx + 2\int x\,dx \\
&= -2\cos x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{2}{2}x^2 + c.
\end{aligned}$$

■

■ **Exemple 2.9** Calculez $\int (\sin x + 2\cos x + 3\sinh x + 4\cosh x)\,dx$.

Solution:

$$\begin{aligned}
&\int (\sin x + 2\cos x + 3\sinh x + 4\cosh x)\,dx \\
&\qquad = \int \sin x\,dx + 2\int \cos x\,dx + 3\int \sinh x\,dx + 4\int \cosh x\,dx \\
&\qquad = -\cos x + 2\sin x + 3\cosh x + 4\sinh x + c.
\end{aligned}$$

■

■ **Exemple 2.10** Calculez $\int \tan^2 x\,dx$.

Solution: Nous avons $(\tan x)' = 1+\tan^2 x$, alors

$$\begin{aligned}
\int \tan^2 x\,dx &= \int 1+\tan^2 x\,dx - \int 1\,dx \\
&= \tan x - x + c.
\end{aligned}$$

■

Théorème 2.2.2 — Formules d'intégration.

$$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}+c$$
$$\int e^x\,dx = e^x+c$$
$$\int \sin x\,dx = -\cos x+c$$
$$\int \cos x\,dx = \sin x+c$$
$$\int \sec^2 x\,dx = \tan x+c$$
$$\int \sinh x\,dx = \cosh x+c$$
$$\int \cosh x\,dx = \sinh x+c$$
$$\int \operatorname{sech}^2 x\,dx = \tanh x+c$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{Arcsin} x+c$$
$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{Arctan} x+c$$

■ **Exemple 2.11** Calculez $\int x^{99}(x+1)\,dx$.
Solution:

$$\begin{aligned}\int x^{99}(x+1)\,dx &= \int (x^{100}+x^{99})\,dx\\ &= \frac{1}{101}x^{101}+\frac{1}{100}x^{100}+c.\end{aligned}$$

Pouvez-vous trouver $\int x(x+1)^{99}\,dx$? ■

■ **Exemple 2.12** Calculez $\int (4-x)\sqrt[3]{x}\,dx$.
Solution:

$$\begin{aligned}\int (4-x)\sqrt[3]{x}\,dx &= \int (4\sqrt[3]{x}-x\sqrt[3]{x})\,dx\\ &= \int (4x^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{4}{3}})\,dx\\ &= 4\frac{1}{\frac{1}{3}+1}x^{\frac{1}{3}+1}-\frac{1}{\frac{4}{3}+1}x^{\frac{4}{3}+1}+c\\ &= 4\frac{1}{\frac{4}{3}}x^{\frac{4}{3}}-\frac{1}{\frac{7}{3}}x^{\frac{7}{3}}+c\\ &= 3x^{\frac{4}{3}}-\frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}}+c.\end{aligned}$$

■

Exemple 2.13 Calculez $\int \frac{2x^2+3x}{\sqrt{x}}\,dx$.

Solution:

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^2+3x}{\sqrt{x}}\,dx &= \int 2x^{2-\frac{1}{2}}+3x^{1-\frac{1}{2}}\,dx\\ &= 2\int x^{\frac{3}{2}}\,dx+3\int x^{\frac{1}{2}}\,dx\\ &= 2\frac{1}{\frac{5}{2}}x^{\frac{5}{2}}+3\frac{1}{\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{2}}+c\\ &= \frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}+c.\end{aligned}$$

■

Exemple 2.14 Calculez $\int (2x+1)^2\sqrt{x}\,dx$.

Solution:

$$\begin{aligned}\int (2x+1)^2\sqrt{x}\,dx &= \int (4x^2+4x+1)x^{\frac{1}{2}}\,dx\\ &= \int (4x^{\frac{5}{2}}+4x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{1}{2}})\,dx\\ &= 4\int x^{\frac{5}{2}}\,dx+4\int x^{\frac{3}{2}}\,dx+\int x^{\frac{1}{2}}\,dx\\ &= 4\frac{1}{\frac{5}{2}+1}x^{\frac{5}{2}+1}+4\frac{1}{\frac{3}{2}+1}x^{\frac{3}{2}+1}+\frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1}+c\\ &= 4\frac{1}{\frac{7}{2}}x^{\frac{7}{2}}+4\frac{1}{\frac{5}{2}}x^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}}+c\\ &= \frac{8}{7}\sqrt{x^7}+\frac{8}{5}\sqrt{x^5}+\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+c.\end{aligned}$$

■

Exercices

Exercice 2.1 Calculez l'intégrale de chacune des fonctions suivantes:

a) $f(x)=\sqrt{2}$

b) $h(x)=-x^5+\frac{1}{2x^2}+\sqrt{x}$

c) $f(t)=\frac{1+t+t^2}{\sqrt{t}}$

d) $f(v)=\frac{1}{3}-\frac{2}{v}$

e) $h(x)=\frac{3}{x^2+1}$

f) $g(t)=12\sec^2(t)$

g) $f(x)=\frac{3}{\sqrt{4-4x^2}}$

h) $f(x)=\frac{-1}{\sqrt{2-2x^2}}+3e^x$

i) $g(\theta)=2\sqrt{\theta}-\cos(\theta)+3\sin(\theta)$

j) $f(t)=\ln(a)2^t+5$ (où $a>0$ et $a\neq 1$)

k) $f(x)=\frac{2+x^2}{1+x^2}$

l) $f(u)=\frac{u+1}{u}$

■

Exercice 2.2 Calculez les intégrales suivantes:

a) $\int \frac{1}{\sqrt[5]{u}}\,du$
b) $\int (3+3\tan^2(x))\,dx$
c) $\int \sqrt[5]{v}\,dv$
d) $\int (x-3)(6-2x)\,dx$
e) $\int$
f) $\int \left(y-\frac{1}{y}-1\right)dy$
g) $\int (x^4+2^x+3^2)\,dx$
h) $\int \left(\frac{1}{\sqrt{t^3}}-\sqrt[3]{t^3}\right)dt$
i) $\int \left(4x^4-\frac{4^x}{4}+\frac{4}{x}-\frac{x}{4}\right)dx$
j) $\int \left(\frac{u^e}{e}-2e^u-\frac{3}{\sqrt{1-u^2}}\right)du$
k) $\int \left(4\sec(t)\tan(t)-\frac{5}{1+t^2}-4\csc^2(t)\right)dt$
l) $\int \left(\frac{7}{3\sqrt{\theta}}-3\csc(\theta)\cot(\theta)+\frac{1}{2\theta^2}\right)$

Exercice 2.3 Pour les fonctions F suivantes, trouvez une expression de la forme $\int f(x)\,dx = F(x)+C$.

a) $F(x)=x^3$
b) $F(x)=\text{Arctan}(x)$
c) $F(x)=e^{\sqrt{x}}$
d) $F(x)=\ln(x^2+1)$

2.3 L'intégrale de $f(ax+b)$

Observation: La dérivée de $\sin(2x+3)$ est égale à $2\cos(2x+3)$, alors

$$\int 2\cos(2x+3)\,dx = \sin(2x+3)+c,$$

Aussi la dérivée de $\frac{1}{2}\sin(2x+3)$ est égale à $\cos(2x+3)$, alors

$$\int \cos(2x+3)\,dx = \frac{1}{2}\sin(2x+3),$$

Qu'est-ce qu'est $\int e^{2x+3}\,dx$? Bien sûr,

$$\int e^{2x+3}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x+3}+c,$$

puisque

$$(\frac{1}{2}e^{2x+3}+c)' = \frac{1}{2}.2.e^{2x+3} = e^{2x+3}.$$

Théorème 2.3.1 — L'intégrale de $f(ax+b)$. En général si nous connaissons l'intégrale $\int f(x)\,dx = F(x)+c$, l'intégrale $\int f(ax+b)\,dx$ est obtenue par

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+c,$$

car $(\frac{1}{a}F(ax+b)+c)' = \frac{1}{a}F'(ax+b).(ax+b)' = \frac{1}{a}f(ax+b).(a) = f(ax+b).$

Par exemple:

- $\int \sin(\sqrt{2}x+\sqrt{3})\,dx = \frac{-1}{\sqrt{2}}\cos(\sqrt{2}x+\sqrt{3})+c.$
- $\int \frac{1}{4x+1}\,dx = \frac{1}{4}\ln|4x+1|+c.$
- $\int e^{2x+3}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x+3}+c.$
- $\int \sqrt{6x+1}\,dx = \frac{1}{6}(\frac{2}{3}(6x+1)^{\frac{3}{2}})+c = \frac{1}{9}\sqrt{(6x+1)^3}+c.$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-(5x+7)^2}}\,dx = \frac{1}{5}\,\mathrm{Arcsin}(5x+7)+c.$

Attention: Pour $\int e^{2x^2+3x+5}\,dx$, cette formule ne s'applique pas.

■ **Exemple 2.15** Calculez les intégrales suivantes:

a) $\int \frac{4}{1+x^2}\,dx$

b) $\int \frac{1}{4+4x^2}\,dx$

c) $\int \frac{1}{1+4x^2}\,dx$

d) $\int \frac{1}{4+x^2}\,dx$

Solution a:

$$\int \frac{4}{1+x^2}\,dx = 4\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = 4\,\mathrm{Arctan}(x)+c.$$

Solution b:

$$\int \frac{1}{4+4x^2}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{4}\,\mathrm{Arctan}(x)+c.$$

Solution c:

$$\int \frac{1}{1+4x^2}\,dx = \int \frac{1}{1+(2x)^2}\,dx = \frac{1}{2}\,\mathrm{Arctan}(2x)+c.$$

Solution d:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{4+x^2}\,dx &= \int \frac{1}{4(1+(\frac{x}{2})^2)}\,dx \\ &= \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+(\frac{x}{2})^2}\,dx \\ &= \frac{1}{4}.\frac{1}{\frac{1}{2}}\,\mathrm{Arctan}(\frac{x}{2})+c = \frac{1}{2}\,\mathrm{Arctan}(\frac{x}{2})+c.\end{aligned}$$

■

■ **Exemple 2.16** Calculez $\int \frac{1}{2+3x^2}\,dx$.
Solution:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{2+3x^2}\,dx &= \int \frac{1}{2(1+(\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{2}})^2)}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x)^2}\,dx \\
&= \frac{1}{2}.\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}\operatorname{Arctan}(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x)+c = \frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{Arctan}(\sqrt{\frac{3}{2}}x)+c.
\end{aligned}$$

■

■ **Exemple 2.17** Calculez $\int \frac{1}{1+x+x^2}\,dx$.
Solution:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{1+x+x^2}\,dx &= \int \frac{1}{\frac{3}{4}+(x+\frac{1}{2})^2}\,dx \\
&= \int \frac{1}{\frac{3}{4}(1+\frac{4}{3}(x+\frac{1}{2})^2)}\,dx \\
&= \int \frac{1}{\frac{3}{4}(1+(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{1}{2})^2)}\,dx \\
&= \frac{4}{3}\int \frac{1}{1+(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}})^2}\,dx \\
&= \frac{4}{3}\frac{1}{\frac{2}{\sqrt{3}}}\operatorname{Arctan}(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}})+c = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}})+c.
\end{aligned}$$

■

Remarque 2.3.2 — Conclusion: calcul de $\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,dx$ si $b^2-4ac<0$. Idée: La complétion du carré est également utile pour le calcul,

$$ax^2+bx+c = ax^2+bx+\frac{b^2}{4a}-\frac{b^2}{4a}+c = a(x+\frac{b}{2a})^2+(-\frac{b^2}{4a}+c).$$

Dans cet exemple:

$$x^2+x+1 = (x+\frac{1}{2})^2+(-\frac{1}{4}+1) = (x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}.$$

■ **Exemple 2.18** Calculez $\int \frac{2x^2+3x+1}{4x+1}\,dx$.
Solution: Si vous divisez $2x^2+3x+1$ par $4x+1$, vous avez:

$$\frac{2x^2+3x+1}{4x+1} = (\frac{1}{2}x+\frac{5}{8})+\frac{\frac{3}{8}}{4x+1},$$

alors:

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^2+3x+1}{4x+1}\,dx &= \int (\frac{1}{2}x+\frac{5}{8})+\frac{\frac{3}{8}}{4x+1}\,dx\\ &= \frac{1}{2}\int x\,dx+\frac{5}{8}\int dx+\frac{3}{8}\int \frac{1}{4x+1}\,dx\\ &= \frac{1}{2}.\frac{x^2}{2}+\frac{5}{8}x+\frac{3}{8}.\frac{1}{4}\ln|4x+1|+c\\ &= \frac{1}{4}x^2+\frac{5}{8}x+\frac{3}{24}\ln|4x+1|+c.\end{aligned}$$

■

■ **Exemple 2.19** Calculez $\int \frac{2x^2+3x^2+3x+6}{x^2+x+1}\,dx.$

<u>**Solution:**</u> Si vous divisez $2x^2+3x^2+3x+6$ par x^2+x+1, vous avez:

$$\frac{2x^2+3x^2+3x+6}{x^2+x+1} = 2x+1+\frac{5}{x^2+x+1},$$

alors:

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^2+3x^2+3x+6}{x^2+x+1}\,dx &= \int (2x+1+\frac{5}{x^2+x+1})\,dx\\ &= \int 2x\,dx+\int dx+5\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx\\ &= x^2+x+5(\frac{2}{\sqrt{3}}\text{Arctan}(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}))+c\end{aligned}$$

■

Exercices

Exercice 2.4 Calculez les intégrales suivantes:

a) $\int \frac{x^2+5x+1}{x+1}\,dx$ c) $\int \frac{x^4+2^x+3^2}{2x+3}\,dx$

b) $\int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx$ d) $\int \frac{x^7+3x^6+5x^4+x+4}{x^2+2x+5}\,dx$ ■

2.4 Changement de variable

Définition 2.4.1 — différentielle. Pour une fonction dérivable $y = f(x)$, nous définissons la différentielle de y par

$$dy := f'(x)dx.$$

Ici x est variable indépendante et y est variable dépendante, donc on peut écrire

$$y'(x) = f'(x) = \frac{d}{dx}y,$$

d s'appelle **l'opérateur différentiel** et $\frac{d}{dx}$ s'appelle **l'opérateur de dérivation.**

■ **Exemple 2.20** Pour $y = x^2 + 1$,

$$\begin{aligned} dy &= (x^2+1)'dx = 2xdx \\ y'(x) &= \frac{d}{dx}(x^2+1) = 2x. \end{aligned}$$

■

■ **Exemple 2.21** Pour $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, R est variable indépendante et V est variable dépendante , alors

$$\begin{aligned} dV &= (\frac{4}{3}\pi R^3)'dR = 4\pi R^2 dR \\ V'(x) &= \frac{d}{dR}(\frac{4}{3}\pi R^3) = 4\pi R^2. \end{aligned}$$

Aussi on peut trouver R par V, comme $R = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}V}$, ici V est variable indépendante et R est variable dépendante , alors

$$\begin{aligned} dR &= (\sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}V})'dV = \sqrt[3]{\frac{1}{36\pi V^2}}dV \\ R'(x) &= \frac{d}{dV}(\sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}V}) = \sqrt[3]{\frac{1}{36\pi V^2}}. \end{aligned}$$

■

Théorème 2.4.1 — La règle de substitution (changement de variable). Si $g : I \subset \to J \subset$ est une fonction dérivable et si $f : \mathbb{R} \to I$ est continue sur I, alors

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du, \text{ où } u = g(x).$$

Par exemple:

- $\int \sin(x^2+1)(2x)\,dx = \int \sin(u)du = -\cos(u) + c = -\cos(x^2+1) + c.$
- $\int (x^2+1)^5(2x)\,dx = \int u^5 du = \frac{1}{6}u^6 + c = \frac{1}{6}(x^2+1)^6 + c.$
- $\int \sin^4(x)\cos x\,dx = \int u^4 du = \frac{1}{5}u^5 + c = \frac{1}{5}\sin^5 x + c.$

■ **Exemple 2.22** Calculez $\int x\cos(x^2+1)\,dx$.

__Solution:__ On choisit le changement de variable $u(x) = x^2 + 1$, et donc $du = 2x\,dx$. Par la règle de substitution

$$\begin{aligned} \int x\cos(x^2+1)\,dx &= \int \cos(x^2+1)x\,dx \\ &= \int \cos(u)(\frac{1}{2}du) \\ &= \frac{1}{2}\sin(u) + c = \frac{1}{2}\sin(x^2+1) + c. \end{aligned}$$

■

■ **Exemple 2.23** Calculez les intégrales suivantes:

a) $\int (2x+1)^{100}\,dx$

b) $\int x(2x^2+1)^{100}\,dx$

c) $\int x(2x+1)^{100}\,dx$

<u>**Solution a:**</u> Pour calculer $\int f(ax+b)\,dx$ on peut utiliser la formule

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+c,$$

alors

$$\int (2x+1)^{100}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{101}(2x+1)^{101}+c = \frac{1}{202}(2x+1)^{101}+c$$

<u>**Solution b:**</u> On choisit le changement de variable $u(x)=2x^2+1$, et donc $du=4x\,dx$. Par la règle de substitution

$$\begin{aligned}\int x(2x^2+1)^{100}\,dx &= \int (2x^2+1)^{100}x\,dx\\ &= \int (u)^{100}(\frac{1}{4}\,du) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{101}u^{101}+c = \frac{1}{404}(2x^2+1)^{101}+c.\end{aligned}$$

<u>**Solution c:**</u> On choisit le changement de variable $u(x)=2x+1$, et donc $du=2\,dx$. Par la règle de substitution

$$\begin{aligned}\int x(2x+1)^{100}\,dx &= \int (\frac{u-1}{2})u^{100}(\frac{1}{2}\,du)\\ &= \frac{1}{4}\int (u^{101}-u^{100})\,du = \frac{1}{4}(\frac{1}{102}u^{102}-\frac{1}{101}u^{101})+c.\end{aligned}$$

■

■ **Exemple 2.24** Calculez $\int (1+\frac{1}{x})^3\frac{1}{x^2}\,dx$.

On choisit le changement de variable $u(x)=1+\frac{1}{x}$, et donc $du=-\frac{1}{x^2}\,dx$. Par la règle de substitution

$$\int (1+\frac{1}{x})^3\frac{1}{x^2}\,dx = \int u^3(-du) = -\frac{1}{4}u^4+c = -\frac{1}{4}(1+\frac{1}{x})^4+c.$$

■

■ **Exemple 2.25** Calculez $\int (\ln x)^3\frac{1}{x}\,dx$:

<u>**Solution:**</u> On choisit le changement de variable $u(x)=\ln x$, et donc $du=\frac{1}{x}\,dx$. Par la règle de substitution

$$\int (\ln x)^3\frac{1}{x}\,dx = \int u^3\,du = \frac{1}{4}u^4+c = \frac{1}{4}(\ln x)^4+c.$$

■

■ **Exemple 2.26** Calculez les intégrales suivantes:

a) $\int \sqrt{3x+1}\,dx$

b) $\int x\sqrt{3x+1}\,dx$

<u>**Solution a:**</u> Comme dans l'exemple 2.23 de la page 28

$$\int \sqrt{3x+1}\,dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{(3x+1)^2}+c.$$

Solution b: On choisit le changement de variable $u(x) = 3x + 1$, et donc $du = 3\,dx$. Par la règle de substitution

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{3x+1}\,dx &= \int (\frac{u-1}{3})\sqrt{u}(\frac{1}{3}\,du) \\ &= \frac{1}{9}\int (u^{\frac{3}{2}} - u^{\frac{1}{2}})\,du \\ &= \frac{1}{9}(\frac{1}{\frac{5}{2}}u^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{\frac{3}{2}}u^{\frac{3}{2}}) = \frac{2}{45}(3x+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{27}(3x+1)^{\frac{3}{2}} + c.\end{aligned}$$

■

■ **Exemple 2.27** Calculez les intégrales suivantes:

a) $\int 4x^2\sqrt{x^3+2}\,dx$

b) $\int \frac{x}{\sqrt{3x^2+1}}\,dx$

Solution a: On choisit le changement de variable $u(x) = x^3 + 2$, et donc $du = 3x^2\,dx$. Par la règle de substitution

$$\begin{aligned}\int 4x^2\sqrt{x^3+2}\,dx &= \int \sqrt{x^3+2}4x^2\,dx \\ &= \int \sqrt{u}(\frac{4}{3}\,du) = \frac{4}{3}.\frac{2}{3}u^{\frac{2}{3}} + c = \frac{8}{9}(x^3+2)^{\frac{2}{3}} + c.\end{aligned}$$

Solution b: On choisit le changement de variable $u(x) = 3x^2 + 1$, et donc $du = 6x\,dx$. Par la règle de substitution

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{3x^2+1}}\,dx &= \int \frac{1}{\sqrt{3x^2+1}}x\,dx \\ &= \int \frac{1}{\sqrt{u}}(\frac{1}{6}\,du) = \frac{1}{6}\frac{1}{\frac{1}{2}}u^{\frac{1}{2}} + c = \frac{1}{3}\sqrt{3x^2+1} + c.\end{aligned}$$

■

■ **Exemple 2.28** Calculez les intégrales suivantes [1]:

a) $\int e^{2x+3}\,dx$

b) $\int xe^{2x^2+1}\,dx$

c) $\int x^2e^{x^3}\,dx$

d) $\int e^{\sin x}\cos x\,dx$

Solution a: Comme dans l'exemple 2.23 de la page 28

$$\int e^{2x+3}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x+3} + c.$$

Solution b: On choisit le changement de variable $u(x) = 2x^2 + 1$, et donc $du = 4x\,dx$. Par la règle de substitution

$$\begin{aligned}\int xe^{2x^2+1}\,dx &= \int e^{2x^2+1}x\,dx \\ &= \int e^u(\frac{1}{4}\,du) = \frac{1}{4}e^u + c = \frac{1}{4}e^{2x^2+1} + c.\end{aligned}$$

[1] Nous calculerons $\int xe^x\,dx$ à l'aide de la formule d'intégration par parties et $\int e^{x^2}\,dx$ existe parce que e^{x^2} est une fonction continue, mais ce n'est pas possible de calculer sa primitive: cette intégrale s'appelle l'intégrale de Gauss.

Solution c: On choisit le changement de variable $u(x) = x^3$, et donc $du = 3x^2\,dx$. Par la règle de substitution

$$\begin{aligned}\int x^2 e^{x^3}\,dx &= \int e^{x^3} x^2\,dx \\ &= \int e^u(\frac{1}{3}du) = \frac{1}{3}e^u + c = \frac{1}{3}e^{x^3} + c.\end{aligned}$$

Solution d: On choisit le changement de variable $u(x) = \sin x$, et donc $du = \cos x\,dx$. Par la règle de substitution

$$\int e^{\sin x}\cos x\,dx = \int e^u\,du = e^u + c = e^{\sin x} + c.$$

■

■ **Exemple 2.29** Calculez les intégrales suivantes:

a) $\int \sin^2 x\,dx$

b) $\int \cos^2 x\,dx$

c) $\int \sin^3 x\,dx$

Solution a et b:

> **Remarque 2.4.2 — Formules de l'angle double.** Nous avons
>
> $$\begin{aligned}\sin(2\theta) &= 2\sin\theta\cos\theta \\ \cos(2\theta) &= 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta\end{aligned}$$
>
> Alors
>
> $$\begin{aligned}\sin^2\theta &= \frac{1-\cos(2\theta)}{2} \\ \cos^2\theta &= \frac{1+\cos(2\theta)}{2}\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x\,dx &= \int \frac{1-\cos(2x)}{2}\,dx = \frac{1}{2}(x - \frac{1}{2}\sin(2x)) + c. \\ \int \cos^2 x\,dx &= \int \frac{1+\cos(2x)}{2}\,dx = \frac{1}{2}(x + \frac{1}{2}\sin(2x)) + c.\end{aligned}$$

Solution c: On peut écrire

$$\begin{aligned}\int \sin^3 x\,dx &= \int \sin x \sin^2 x\,dx \\ &= \int \sin x(1-\cos^2 x)\,dx \\ &= \int (\sin x - \sin x\cos^2 x)\,dx \\ &= \int \sin x\,dx + \int \cos^2 x(-\sin x\,dx) = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + c.\end{aligned}$$

■

■ **Exemple 2.30** Calculez $\int \tan x \, dx$.

Solution On peut écrire

$$\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx,$$

maintenant on choisit $u(x) = \cos x$, et donc $du = -\sin x \, dx$. Par la règle de substitution

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx &= \int \frac{1}{\cos x} \sin x \, dx \\ &= \int \frac{1}{u}(-du) = -\ln|u| + c = -\ln|\cos x| + c.\end{aligned}$$

■

■ **Exemple 2.31** Calculez les intégrales suivantes:

a) $\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x} \, dx$

b) $\int \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x}} \, dx$

Solution a: On choisit le changement de variable $u(x) = \sin x$, et donc $du = \cos x \, dx$. Par la règle de substitution

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x} \, dx &= \int \frac{1}{1+\sin^2 x} \cos x \, dx \\ &= \int \frac{1}{1+u^2} \, du = \operatorname{Arctan} u + c = \operatorname{Arctan}(\sin x) + c.\end{aligned}$$

Solution b: On choisit le changement de variable $u(x) = 1 + \sin x$, et donc $du = \cos x \, dx$. Par la règle de substitution

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x}} \, dx &= \int \frac{1}{\sqrt{1+\sin x}} \cos x \, dx \\ &= \int \frac{1}{\sqrt{u}} \, du \\ &= \int u^{-\frac{1}{2}} \, du \\ &= \frac{1}{\frac{1}{2}} u^{\frac{1}{2}} + c = 2\sqrt{u} + c = 2\sqrt{1+\sin x} + c.\end{aligned}$$

■

■ **Exemple 2.32** Calculez les intégrales suivantes:

a) $\int \frac{x^6+1}{x^5} \, dx$

b) $\int \frac{x^5}{x^6+1} \, dx$

c) $\int \frac{x^2}{x^6+1} \, dx$

Solution a: Par division

$$\begin{aligned}\int \frac{x^6+1}{x^5} \, dx &= \int (x + x^{-5}) \, dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{-4}x^{-4} + c = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4x^4} + c.\end{aligned}$$

Solution b: On choisit le changement de variable $u(x) = x^6 + 1$, et donc $du = 6x^5\,dx$. Par la règle de substitution

$$\begin{aligned}\int \frac{x^5}{x^6+1}\,dx &= \int \frac{1}{x^6+1}x^5\,dx \\ &= \int \frac{1}{u}(\frac{1}{6}\,du) = \frac{1}{6}\ln|u| + c = \frac{1}{6}\ln(x^6+1) + c.\end{aligned}$$

Solution c: On choisit le changement de variable $u(x) = x^3$, et donc $du = 3x^2\,dx$. Par la règle de substitution

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{x^6+1}\,dx &= \int \frac{1}{x^6+1}x^2\,dx \\ &= \int \frac{1}{u^2+1}(\frac{1}{3}\,du) = \frac{1}{3}\operatorname{Arctan} u + c = \frac{1}{3}\operatorname{Arctan}(x^3) + c.\end{aligned}$$

■

■ **Exemple 2.33** Calculez les intégrales suivantes:

a) $\int x^2\sqrt{1-x}\,dx$

b) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx$

Solution a: On choisit le changement de variable $u(x) = 1 - x$, et donc $du = -\,dx$. Par la règle de substitution

$$\begin{aligned}\int x^2\sqrt{1-x}\,dx &= \int (1-u)^2\sqrt{u}(-\,du) \\ &= -\int (1-2u+u^2)\sqrt{u}\,du \\ &= -\int u^{\frac{1}{2}}\,du + \int u^{\frac{3}{2}}\,du - \int u^{\frac{5}{2}}\,du \\ &= -\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{7}u^{\frac{7}{2}} = -\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5}(1-x)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{7}(1-x)^{\frac{7}{2}}.\end{aligned}$$

Solution b: On choisit le changement de variable $u(x) = 1 + \sqrt{x}$, et donc $du = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$. Par la règle de substitution

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx &= \int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\sqrt{x}\,dx \\ &= \int \frac{1}{1+\sqrt{x}}x\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \\ &= \int \frac{1}{u}(u-1)^2(2\,du) \\ &= 2\int \frac{u^2-2u+1}{u}\,du \\ &= 2\int (u-2+\frac{1}{u})\,du \\ &= 2(\frac{1}{2}u^2 - 2u + \ln|u| + c) = 2(\frac{1}{2}(1+\sqrt{x})^2 - 2(1+\sqrt{x}) + \ln(1+\sqrt{x}) + c).\end{aligned}$$

■

■ **Exemple 2.34** Calculez les intégrales suivantes:

a) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+2}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{e^x+1}{e^x-1}\,dx$

Solution a: On choisit le changement de variable $u(x)=e^{2x}+2$, et donc $du=2e^{2x}\,dx$. Par la règle de substitution

$$\begin{aligned}\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+2}\,dx &= \int \frac{1}{e^{2x}+2}e^{2x}\,dx\\ &= \int \frac{1}{u}\left(\frac{1}{2}\,du\right) = \frac{1}{2}\ln|u|+c = \frac{1}{2}\ln(e^{2x}+2)+c.\end{aligned}$$

Solution b: On peut écrire

$$\begin{aligned}\int \frac{e^x+1}{e^x-1}\,dx &= \int \frac{e^x+1+e^x-e^x}{e^x-1}\,dx\\ &= \int \frac{1-e^x}{e^x-1}\,dx+\int \frac{2e^x}{e^x-1}\,dx\\ &= \int -dx+\int \frac{2e^x}{e^x-1}\,dx = -x+2\int \frac{e^x}{e^x-1}\,dx+c,\end{aligned}$$

Maintenant pour calculer $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x-1}\,dx$, on choisit le changement de variable $u(x)=e^x-1$, et donc $du=e^x\,dx$. Par la règle de substitution

$$\begin{aligned}\int \frac{e^x}{e^x-1}\,dx &= \int \frac{1}{e^x-1}e^x\,dx\\ &= \int \frac{1}{u}\,du = \ln|u|+c = \ln|e^x-1|+c,\end{aligned}$$

Alors

$$\int \frac{e^x+1}{e^x-1}\,dx = -x+2\ln|e^x-1|+c.$$

■

Exercices

Exercice 2.5 Calculer les intégrales indéfinies suivantes en utilisant la règle de substitution :

a) $\displaystyle\int e^x\sqrt{1+e^x}\,dx$

b) $\displaystyle\int (t^2+1)(t^3+3t)^5\,dt$

c) $\displaystyle\int (5^x\cos(5^x)-\sin(\pi x))\,dx$

d) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{Arctan}(x)}{2+2x^2}\,dx$

e) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2(x)\sqrt{1+\tan(x)}}$

f) $\displaystyle\int h^2\sqrt{2+h}\,dh$

g) $\displaystyle\int (-3x+2)^{10}\,dx$

h) $\displaystyle\int \frac{3}{1-5x}\,dx$

i) $\displaystyle\int \frac{e^x}{1-2e^x}\,dx$

j) $\displaystyle\int \frac{\sin(\theta)}{1+\cos^2(\theta)}$

k) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{Arcsin}(x)}$

l) $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^4}\,dx$

■

Exercice 2.6 Calculer les intégrales suivantes en utilisant la règle de substitution :

a) $\int \cot(\theta)$

b) $\int x^2\sqrt{18x+3}\,dx$

c) $\int \cos^2(3x)\,dx$

d) $\int \sqrt[5]{3+2t}\,dt$

e) $\int \dfrac{3y+5}{y^2+1}\,dy$

f) $\int \left(\dfrac{-5}{3h-1}+\dfrac{7}{(4-5h)^2}\right)dh$

g) $\int \dfrac{(4-\sqrt{t})^7}{\sqrt{t}}\,dt$

h) $\int 7\sec^2\left(\dfrac{\theta}{7}\right)$

i) $\int e^x\sin(e^x)\,dx$

j) $\int \dfrac{\ln(\sqrt{\theta})}{3\theta}$

k) $\int \dfrac{e^{\mathrm{Arcsin}(h)}}{\sqrt{1-h^2}}\,dh$

l) $\int 10^{\tan(10y)}\sec^2(10y)\,dy$

m) $\int \dfrac{e^t}{1+e^{2t}}\,dt$

n) $\int \dfrac{\cos(x)}{\sqrt{5-4\sin(x)}}\,dx$

o) $\int \dfrac{\csc^2(\theta)}{3+5\cot(\theta)}$

p) $\int \dfrac{3^{\cos(8x)}}{\csc(8x)}\,dx$

■

2.5 Équations différentielles

Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue est une fonction. Cette fonction est a priori définie sur une partie de , son domaine de définition, et est à valeurs réelles.

La fonction inconnue est en général notée y (parfois f). L'équation est une relation entre la fonction y, plusieurs de ses dérivées, et potentiellement d'autres fonctions. Un exemple simple est $y' = \sin x$, un exemple plus compliqué est $y'^2 + (\sin x)y = y^3$.

■ **Exemple 2.35** Déterminez la fonction $f(x)$ en utilisant les informations suivantes:
a) $f'(x) = 2x+3$ et $f(2) = 10$

b) $f'(x) = \cos x$ et $f(\frac{\pi}{4}) = 4$

Solution a: On a $f'(x) = 2x+3$, donc $f(x)$ est égale à une primitive de $2x+3$, i.e.

$$f(x) = \int (2x+3)\,dx = x^2+3x+c,$$

Nous avons une autre condition telle que $f(2) = 10$, alors

$$f(2) = (2)^2+3(2)+c = 10+c = 10,$$

ensuite $c = 0$ et $f(x) = x^2+3x$.

Solution b: De même on a $f'(x) = \cos x$, donc $f(x)$ est égale à une primitive de $\cos x$, i.e.

$$f(x) = \int \cos x\,dx = \sin x + c,$$

pour trouver c, en utilisant la condition $f(\frac{\pi}{4}) = 4$, on obtient

$$f(\frac{\pi}{4}) = \sin\frac{\pi}{4} + c = \frac{\sqrt{2}}{2} + c = 4,$$

alors $c = 4 - \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{8-\sqrt{2}}{2}$ et $f(x) = \sin x + \dfrac{8-\sqrt{2}}{2}$. ■

■ **Exemple 2.36** Résoudre les équations différentielles suivantes:
a) $f''(x) = 36x^2$ et $f(0) = 2, f(1) = 10$

b) $f''(x) = -\sin x$ et $f(0) = 3, f'(0) = 6$
Solution a: Ici nous avons la dérivée seconde, $f''(x) = 36x^2$, donc ,

$$f'(x) = \int (36x^2)\, dx = 12x^3 + C,$$

alors

$$f(x) = \int (12x^3 + C)\, dx = 3x^4 + Cx + C',$$

pour trouver C et C', en utilisant les conditions $f(0) = 2$ et $f(1) = 10$, on a

$$f(0) = 3(0)^4 + C(0) + C' = C' = 2$$
$$f(1) = 3(1)^4 + C(1) + C' = 3 + C + C' = 10$$

on obtient $C' = 2$ et $C = 5$, finalement $f(x) = 3x^4 + 5x + 2$.

Solution b: De même $f''(x) = -\sin x$, donc

$$f'(x) = \int (-\sin x)\, dx = \cos x + C,$$

alors

$$f(x) = \int (\cos x + C)\, dx = \sin x + Cx + C',$$

pour trouver C et C', en utilisant les conditions $f(0) = 3$ et $f'(0) = 6$, on a

$$f(0) = \sin(0) + C(0) + C' = C' = 3$$
$$f'(0) = \cos(0) + C = 1 + C = 6$$

on obtient $C' = 3$ et $C = 5$, finalement $f(x) = \sin x + 5x + 3$. ■

■ **Exemple 2.37** Trouvez la fonction y satisfaisant l'équation différentielle et passant par le point spécifié:
a) $y' = y$ passant par $(2,3)$

b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^3}{y^2}$ passant par $(-2,-1)$
Solution a: En utilisant le notation $y' = \dfrac{dy}{dx}$ on peut écrire $\dfrac{dy}{dx} = y$, donc

$$\frac{1}{y}\, dy = dx,$$

alors par intégration

$$\int \frac{1}{y}\, dy = \int dx \Longrightarrow \ln y = x + c,$$

ensuite $y = e^{x+c}$. Pour trouver c, en utilisant la condition $(x,y) = (2,3)$, on obtient $3 = e^{2+c}$, alors $2 + c = \ln 3$ et $c = \ln 3 - 2$, finalement

$$y = e^{x+\ln 3-2} = e^{\ln 3}.e^{x-2} = 3e^{x-2}.$$

Solution b: Par la même idée on peut écrire

$$y^2\,dy = x^3\,dx,$$

alors par intégration

$$\int y^2\,dy = \int x^3\,dx \Longrightarrow \frac{1}{3}y^3 = \frac{1}{4}x^4 + c,$$

ensuite $4y^3 = 3x^4 + C$. Pour trouver c, en utilisant la condition $(x,y) = (-2,-1)$, on obtient $4(-1)^3 = 3(-2)^4 + C$, alors $C = -52$, finalement

$$4y^3 = 3x^4 - 52.$$

■

Exercices

Exercice 2.7 Trouvez la fonction y satisfaisant l'équation différentielle suivante et passant par le point spécifié:

a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^3}{y^2}$ passant par (-2,-1)

b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x}$ passant par (1, 2)

■

3. Intégrale définie

3.1 Notion de sommation

Définition 3.1.1 — symbole de sommation. Le symbole de sommation Σ est défini comme suit:

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{n-1} + a_n,$$

où i représente l'**indice de sommation**; s_i est une **variable indexée**; m est la **limite inférieure de sommation**, et n est la **limite supérieure de sommation**.

■ **Exemple 3.1**

$$\sum_{i=1}^{5} i = 1+2+3+4+5 = 15$$

$$\sum_{i=1}^{5} i^2 = 1^2+2^2+3^2+4^2+5^2 = 55$$

$$\sum_{i=1}^{5} 2^i = 2^1+2^2+2^3+2^4+2^5 = 66$$

$$\sum_{i=1}^{5} i^i = 1^1+2^2+3^3+4^4+5^5 = 3413$$

■

■ **Exemple 3.2** Une somme d'une constante

$$\sum_{i=1}^{100} 5 = 5+5+\ldots+5 = 5\times 100 = 500.$$

■

■ **Exemple 3.3**

$$\sum_{i=0}^{33}(-1)^i = 1+(-1)+1+(-1)+...+1+(-1) = 0.$$

■

■ **Exemple 3.4** Pour tout entier n, la somme des entiers de 1 à n vaut:

$$S = 1+2+3+...+(n-1)+n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

$$\begin{array}{lccccccccccc} & S & = & 1 & + & 2 & + & \cdots & + & n-1 & + & n \\ \text{ou encore} & S & = & n & + & n-1 & + & \cdots & + & 2 & + & 1 \\ \text{de somme :} & S+S & = & n+1 & + & n+1 & + & \cdots & + & n+1 & + & n+1 \end{array}$$

■

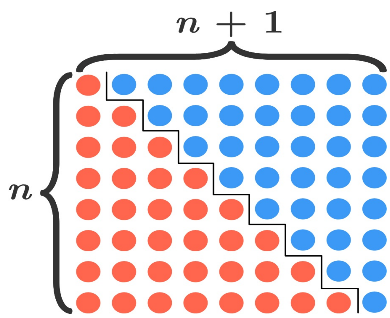


Figure 3.1: Preuve sans mot $2(1+2+3+...+n) = n(n+1)$

Remarque 3.1.1 On peut montrer que:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = (\frac{n(n+1)}{2})^2.$$

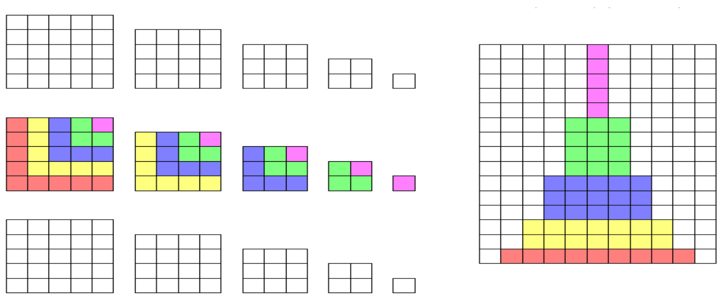


Figure 3.2: Preuve sans mot $3(1^2+2^2+3^3+...+n^2) = n(n+1)(n+\frac{1}{2})$

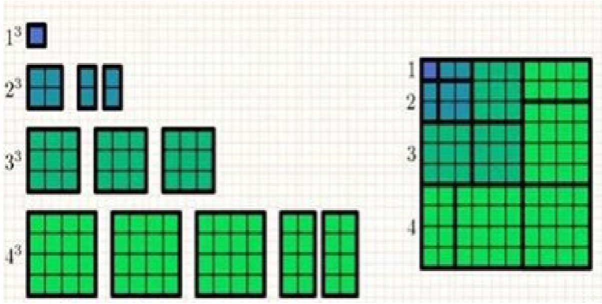


Figure 3.3: Preuve sans mot $(1^3+2^3+3^3+...+n^3) = (1+2+3+...+n)^2$

Théorème 3.1.2 — Propriétés de Σ. Pour chaque a_i, b_i et une constante c, on a:

$$\sum_{i=m}^{n}(ca_i) = c\sum_{i=m}^{n} a_i$$
$$\sum_{i=m}^{n}(a_i+b_i) = \sum_{i=m}^{n} a_i + \sum_{i=m}^{n} b_i$$

■ **Exemple 3.5** Calculez $\sum_{i=0}^{9}\frac{2+i}{2}$.

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{9}\frac{2+i}{2} &= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{9}(2+i)\\ &= \frac{1}{2}(\sum_{i=0}^{9}2+\sum_{i=0}^{9}i)\\ &= \frac{1}{2}(10\times 2+\frac{9(9+1)}{2}) = \frac{65}{2}.\end{aligned}$$

■

■ **Exemple 3.6** Calculez $\sum_{j=1}^{5}(4j^3-1)$.

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{5}(4j^3-1) &= 4\sum_{j=1}^{5}j^3-\sum_{j=1}^{5}1\\ &= 4(\frac{5(5+1)}{2})^2-5(1) = 895.\end{aligned}$$

■

Théorème 3.1.3 — La série géométrique. Pour une constante q nous avons:

$$1+q+q^2+q^3+...+q^n = \sum_{i=0}^{n}q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

■ **Exemple 3.7** Calculez $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...+\frac{1}{1024}$.

$$\begin{aligned}
1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...+\frac{1}{1024} &= \frac{1}{2^0}+\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+...+\frac{1}{2^{10}} \\
&= (\frac{1}{2})^0+(\frac{1}{2})^1+(\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2})^3+...+(\frac{1}{2})^{10} \\
&= \sum_{i=0}^{10}(\frac{1}{2})^i \\
&= \frac{1-(\frac{1}{2})^{11}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{2^{11}-1}{2^{11}}}{\frac{1}{2}} = \frac{2047}{1024}.
\end{aligned}$$

■

■ **Exemple 3.8** Calculez $\sum_{i=0}^{10}\frac{5+3^i}{4^i}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{10}\frac{5+3^i}{4^i} &= 5\sum_{i=0}^{10}(\frac{1}{4})^i+\sum_{i=0}^{10}(\frac{3}{4})^i \\
&= 5(\frac{1-(\frac{1}{4})^{11}}{1-\frac{1}{4}})+\frac{1-(\frac{3}{4})^{11}}{1-\frac{3}{4}}.
\end{aligned}$$

■

Exercices

Exercice 3.1 En utilisant les propriétés et formules de sommation, calculez les sommes suivantes:

a) $\sum_{i=1}^{666} e$

b) $\sum_{i=0}^{9} 2^i$

c) $\sum_{k=0}^{9} 2k$

d) $\sum_{j=1}^{5} (4j^3-1)$

e) $\sum_{i=1}^{13} 7^i$

f) $\sum_{k=2}^{8} k^2$

g) $\sum_{j=1}^{18} k$

h) $\sum_{i=0}^{33} (-1)^i$

i) $\sum_{i=0}^{6} \frac{1}{2^i}$

j) $\sum_{i=0}^{9} \frac{2+i}{2}$

■

3.2 Aire sous la courbe et sommes de Riemann

Considérons par exemple la région délimitée par l'axe des x, la courbe $y=f(x)=\sqrt{x}$ et les droites verticales $x=1$ et $x=9$.
Si la région considérée est découpée en rectangles dont les bases sont égales et dont les sommets de gauche sont en contact avec la courbe, alors l'aire recherchée sera approximée par la somme des aires de ces n rectangles, appelée **somme de gauche** et notée G_n.

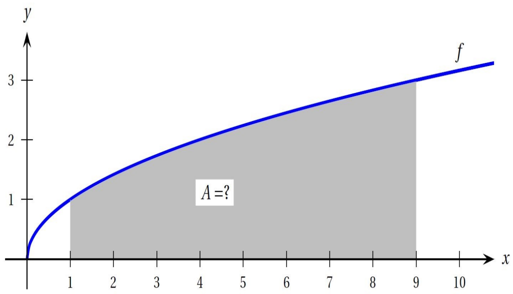


Figure 3.4: Aire sous la courbe $f(x) = \sqrt{x}$

Maintenant nous avons n rectangles de même base $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{9-1}{n} = \frac{8}{n}$, alors

$$G_n = f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + \ldots + f(x_{n-1})\Delta x = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x.$$

Si les n rectangles utilisés ont leur sommet de droite en contact avec la courbe, alors la somme des aires de ces n rectangles sera désignée **somme de droite** et notée D_n.
Pour la somme de droite nous avons

$$D_n = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \ldots + f(x_n)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x.$$

En général, on a $G_n \leq A \leq D_n$. Si la fonction f est continue sur l'intervalle $[a,b]$, lorsque que le nombre n de rectangles tend vers l'infini, les deux sommes convergent vers la même valeur, appelée **somme de Riemann**:

$$\lim_{n\to\infty} G_n = A = \lim_{n\to\infty} D_n.$$

■ **Exemple 3.9** Calculez l'aire de la région délimitée par l'axe des x, la ligne $y = 2x+1$ et les droites verticales $x = 1$ et $x = 4$.
Sur l'intervalle $[1,3]$, $x_0 = a = 1$, $x_n = b = 4$, $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3}{n}$ et $x_i = 1 + i\Delta x = 1 + \frac{3i}{n}$, alors

$$\begin{aligned}
G_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x &= \sum_{i=0}^{n-1} (2(1+\frac{3i}{n})+1)\frac{3}{n} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} (\frac{6i}{n}+3)\frac{3}{n} \\
&= \frac{18}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1} i + \frac{9}{n}\sum_{i=0}^{n-1} 1 \\
&= \frac{18}{n^2}(\frac{(n-1)n}{2}) + \frac{9}{n}(n-1) = \frac{9(n-1)}{n} + \frac{9(n-1)}{n} = \frac{18(n-1)}{n}
\end{aligned}$$

Finalement

$$A = \lim_{n\to\infty} G_n = \lim_{n\to\infty} \frac{18(n-1)}{n} = 18.$$

■

■ **Exemple 3.10** Calculez l'aire de la région délimitée par l'axe des x, la courbe $y = x^2$ et les droites verticales $x = 2$ et $x = 5$.
Sur l'intervalle $[2,5]$, $x_0 = a = 2$, $x_n = b = 5$, $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3}{n}$ et $x_i = 2 + i\Delta x = 1 + \frac{3i}{n}$, alors

$$\begin{aligned} D_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x &= \sum_{i=1}^{n} (2 + \frac{3i}{n})^2 \frac{3}{n} \\ &= \sum_{i=1}^{n} (4 + \frac{12i}{n} + \frac{9i^2}{n^2}) \frac{3}{n} \\ &= \frac{12}{n} \sum_{i=1}^{n} 1 + \frac{36}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i + \frac{27}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 \\ &= \frac{12}{n} n + \frac{36}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} + \frac{27}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= 12 + \frac{18(n+1)}{n} + \frac{9(n+1)(2n+1)}{2n^2}, \end{aligned}$$

Finalement

$$A = \lim_{n\to\infty} D_n = 12 + 18 + 9 = 39.$$

■

Exercices

Exercice 3.2 Calculez l'aire sous le graphe des fonctions f(x) suivantes sur les intervalles spécifiés :

a) $f(x) = x + 2$ sur l'intervalle [0,2] où les C_i sont les points extrêmes gauches.
b) $f(x) = 2x - x^3$ sur l'intervalle [0,1] où les C_i sont les points extrêmes droits.
c) $f(x) = x^2$ sur l'intervalle [1,2] où les C_i sont les points centraux.

■

3.3 Intégrale définie et propriétés

Définition 3.3.1 Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a,b]$. La limite des sommes de droite (ou de gauche) quand n tend vers l'infini est appelée **l'intégrale définie de la fonction f sur l'intervalle** $[a,b]$ et elle est désignée par le symbole $\int_a^b f(x)dx$.

■ **Exemple 3.11** Pour le dernier exemple, nous avons $\int_2^5 x^2 dx = 32$. ■

Remarque 3.3.1 L'aire algébrique d'une région située au-dessus de l'axe des abscisses (axe des x) est simplement son aire, et celle d'une région située sous l'axe des x est son aire affectée du signe moins. L'aire algébrique d'une région située de part et d'autre de l'axe des x est calculée en additionnant l'aire algébrique de chacune de ses parties.

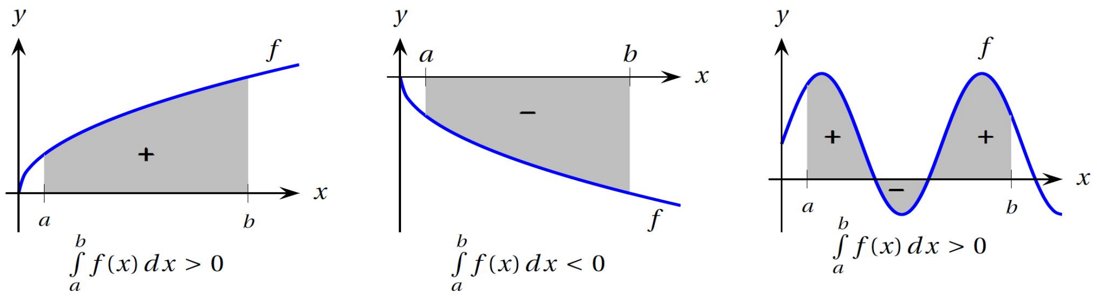
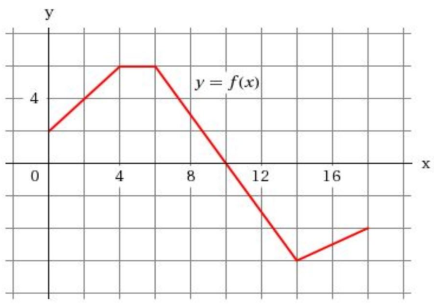


Figure 3.5: Illustration de la notion d'aire algébrique.

■ **Exemple 3.12** À l'aide du graphe, évaluer chacune des intégrales suivantes.

- $\displaystyle\int_0^4 f(x)\,dx = \frac{4\times(2+6)}{2} = 16.$
- $\displaystyle\int_4^{10} f(x)\,dx = \frac{6\times(2+6)}{2} = 24.$
- $\displaystyle\int_{10}^{14} f(x)\,dx = \frac{2\times -6}{2} = -6.$
- $\displaystyle\int_0^{18} f(x)\,dx = \int_0^{14} f(x)\,dx + \int_{14}^{18} f(x)\,dx = 16+24-6+\frac{2\times(-6-4)}{2} = 44.$

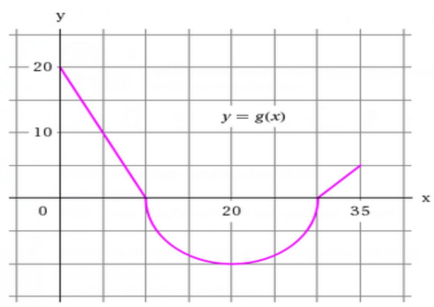
■



■ **Exemple 3.13** À l'aide du graphe, évaluer $\displaystyle\int_0^{35} g(x)\,dx$.

$$\int_0^{35} g(x)\,dx = \int_0^{10} g(x)\,dx + \int_{10}^{30} g(x)\,dx + \int_{30}^{35} g(x)\,dx = \frac{2\times 10}{2} - \frac{\pi 10^2}{2} + \frac{5\times 5}{2} = \frac{25}{2} - 50\pi.$$

■



Théorème 3.3.2 — Propriétés de l'intégrale définie. Si f et g sont des fonctions continues sur l'intervalle I, contenant a, b et c, alors

- $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$ où $k \in \mathbb{R}$
- $\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
- $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$
- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
- $\int_a^a f(x)dx = 0$

■ **Exemple 3.14** Évaluez les intégrales suivantes de façon géométrique. Attention au signe du résultat!

- $\int_0^3 2\,dx = 3\times 2 = 6$
- $\int_1^3 (10-x)\,dx = 16$
- $\int_0^5 (2x-3)\,dx = 10$
- $\int_{-2}^2 (-4-\sqrt{4-x^2})\,dx = -16-2\pi$
- $\int_{-3}^3 ((2+x)\sqrt{9-x^2})\,dx = 9\pi$
- $\int_0^1 \sqrt{4-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\frac{\pi}{6}\times 4 + \frac{1}{2}.1.\sqrt{3}$
- $\int_0^{2\pi} \sin x\,dx = 0$
- $\int_{-1}^3 |x|\,dx = 5$

■

3.4 Théorèmes fondamentaux du calcul intégral

Théorème 3.4.1 — Théorème fondamental du calcul différentiel et intégral (TFC). Soit f une fonction continue sur l'intervalle I. Soit a et b dans l'intervalle I. Alors:

1) Construction d'une primitive de f

La fonction F, définie de la façon suivante,

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, t \in I,$$

est une primitive de f sur l'intervalle I, c'est-à-dire que pour $x \in I$, $F'(x) = f(x)$.

2) Évaluation d'une intégrale définie $\int_a^b f(x)dx$

Si F est une primitive de f, c'est-à-dire si $F' = f$, alors

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Remarque 3.4.2 La notation suivante est souvent employée pour désigner la soustraction $F(b)-F(a)$:

$$F(x)|_a^b = F(b)-F(a).$$

■ **Exemple 3.15** Calculez $\int_1^4 (2x+1)dx$.

$$\begin{aligned}\int_1^4 (2x+1)dx &= \left(x^2+x+C\right]_1^4 \\ &= (4^2+4+C)-(1^2+1+C) = (20+C)-(2+C) = 18.\end{aligned}$$

■

■ **Exemple 3.16** Calculez $\int_2^5 x^2 dx$.

$$\begin{aligned}\int_2^5 x^2 dx &= \left(\frac{1}{3}x^3+C\right]_2^5 \\ &= (\frac{1}{3}(5)^3+C)-(\frac{1}{3}(2)^3+C) = \frac{1}{3}(125-8) = 39.\end{aligned}$$

■

■ **Exemple 3.17** Calculez $\int_1^9 \sqrt{x}dx$.

$$\begin{aligned}\int_1^9 \sqrt{x}dx &= \left(\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C\right]_1^9 \\ &= (\frac{2}{3}9\sqrt{9}+C)-(\frac{2}{3}1\sqrt{1}+C) = \frac{2}{3}(27-1) = \frac{52}{3}.\end{aligned}$$

■

■ **Exemple 3.18** Calculez $\int_0^3 \frac{1+x}{1+x^2}dx$.

$$\begin{aligned}\int_1^3 \frac{1+x}{1+x^2}dx &= \left(\text{Arctan}x+\frac{1}{2}\ln x+C\right]_1^3 \\ &= (\text{Arctan}3+\frac{1}{2}\ln 3+C)-(\text{Arctan}1+\frac{1}{2}\ln 1+C) = \text{Arctan}3+\frac{1}{2}\ln 3-\frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

■

■ **Exemple 3.19** Calculez $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin(\sin x)dx$.

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin(\sin x)dx &= (-\cos(\sin x)+C)_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= (-\cos(\sin\frac{\pi}{2})+C)-(-\cos(\sin 0)+C) \\ &= -\cos 1+\cos 0 = -\cos 1+1.\end{aligned}$$

■

■ **Exemple 3.20** Calculez la dérivée des fonctions suivantes en utilisant le théorème fondamental du calcul intégral (TFC):
a) $F(x) = \int_0^x (t^3 - 5t)dt$
b) $G(x) = \int_3^x e^{t^2-1}dt$
c) $H(x) = \int_x^1 \cos\sqrt{t}dt$

$$F'(x) = (\int_0^x (t^3 - 5t)dt)' = x^3 - 5x.$$

$$G'(x) = (\int_3^x e^{t^2-1}dt)' = e^{x^2-1}.$$

$$\begin{aligned} H'(x) &= (\int_x^1 \cos\sqrt{t}dt)' \\ &= (-\int_1^x \cos\sqrt{t}dt)' \\ &= -\cos\sqrt{x}. \end{aligned}$$

■

Théorème 3.4.3 Soit f une fonction continue et $a(x)$ et $b(x)$ deux fonction dérivable sur l'intervalle I. Alors:

$$\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt = a'(x)f(a(x)) - b'(x)f(b(x)).$$

■ **Exemple 3.21** Calculez la dérivée des fonctions suivantes:
a) $F(x) = \int_{e^{-x}}^{e^x} \frac{\sin t}{t}dt$
b) $G(x) = \int_{\sin x}^{\cos x} e^{t^2}dt$

$$\begin{aligned} F'(x) &= (\int_{e^{-x}}^{e^x} \frac{\sin t}{t}dt)' \\ &= (e^x)'\frac{\sin(e^x)}{e^x} - (e^{-x})'\frac{\sin(e^{-x})}{e^{-x}} \\ &= e^x\frac{\sin(e^x)}{e^x} + e^{-x}\frac{\sin(e^{-x})}{e^{-x}} = \sin(e^x) + \sin(e^{-x}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G'(x) &= (\int_{\sin x}^{\cos x} e^{t^2}dt)' \\ &= (\cos x)'e^{\cos^2 x} - (\sin x)'e^{\sin^2 x} = -(\sin x)e^{\cos^2 x} - (\cos x)e^{\sin^2 x}. \end{aligned}$$

■

Exercices

Exercice 3.3 Calculez la dérivée des fonctions A suivantes en utilisant le théorème fondamental du calcul intégral (TFC):

a) $A(x) = \int_3^x e^{t^2-1}\,dt$

b) $A(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$

c) $A(x) = \int_2^x (t^3-5t)\,dt$

d) $A(x) = \int_x^1 \cos(\sqrt{t})\,dt$

e) $A(t) = \int_{\frac{\pi}{2}}^t \cos(z)$

f) $A(x) = \int_x^4 (3t^2-4t+5)\,dt$

g) $A(u) = \int_u^5 \mathrm{Arctan}(x)\,dx$

h) $A(x) = \int_1^x \frac{d}{dt}(te^t)\,dt$

■

Exercice 3.4 Calculez les intégrales définies suivantes:

a) $\int_{-1}^2 (x^3-2x+1)\,dx$

b) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos(x)+2\sin(x))\,dx$

c) $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{-2}{\sqrt{4-4x^2}}\,dx$

d) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{3}{x^2+1}\,dx$

e) $\int_1^2 \left(\frac{1}{2}+\frac{3}{x}\right)dx$

f) $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{3}{\sqrt{9-9x^2}}\,dx$

g) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} (3+3\tan^2(x))\,dx$

h) $\int_1^2 (-e^x+3^x)\,dx$

■

Exercice 3.5 Calculez les intégrales définies suivantes en utilisant la règle de substitution :

a) $\int_0^1 \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx$

b) $\int_1^2 x\sqrt{x-1}\,dx$

c) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{Arcsin}(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

d) $\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx$

e) $\int_0^1 \frac{x}{1+x^4}\,dx$

f) $\int_0^3 \frac{dx}{5x+1}$

g) $\int_0^{\pi} (1+\tan^2\left(\frac{x}{4}\right))\,dx$

h) $\int_e^{e^4} \frac{dx}{x\sqrt{\ln(x)}}$

i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\sin(\sin(x))\,dx$

j) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1+x}{1+x^2}\,dx$

■

4. Techniques d'intégration

4.1 Intégration par parties

Observation: Nous avons

$$(x^2 \sin x)' = (x^2)' \sin x + x^2 (\sin x)' = 2x \sin x + x^2 \cos x,$$

alors

$$d(x^2 \sin x) = [(x^2)' \sin x + x^2 (\sin x)']dx = (2xdx) \sin x + x^2 (\cos xdx),$$

En général, soit u, v deux fonctions dérivables, nous avons $d(uv) = (du)v + udv$ ou $udv = d(uv) - vdu$, donc

Théorème 4.1.1

$$\int udv = \int (d(uv) - vdu) = uv - \int vdu,$$

La dernière formule s'appelle **la formule d'intégration par parties**.

■ **Exemple 4.1** Calculez l'intégrale indéfinie suivante:

$$\int x \cos xdx.$$

Ici $udv = x \cos xdx$, les meilleurs choix pour u et dv sont $u = x$ et $dv = \cos xdx$, donc

$$\begin{aligned} u = x &\Longrightarrow du = dx \\ dv = \cos xdx &\Longrightarrow v = \sin x, \end{aligned}$$

Alors par la formule d'intégration par parties

$$\begin{aligned} \int \underbrace{x \cos xdx}_{udv} &= \underbrace{(x \sin x)}_{uv} - \int \underbrace{\sin xdx}_{vdu} \\ &= x \sin x - (-\cos x) + c = x \sin x + \cos x + c. \end{aligned}$$

Pour vérification:

$$(x\sin x+\cos x+c)' = \sin x + x\cos x - \sin x = x\cos x$$

■

■ **Exemple 4.2** Calculez l'intégrale définie suivante:

$$\int_0^3 x\sqrt{x+1}dx.$$

Ici $udv = x\sqrt{x+1}dx$, les meilleurs choix pour u et dv sont $u = x$ et $dv = \sqrt{x+1}dx$, donc

$$\begin{aligned} u = x &\Longrightarrow du = dx \\ dv = \sqrt{x+1}dx &\Longrightarrow v = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}, \end{aligned}$$

Alors par la formule d'intégration par parties

$$\begin{aligned} \int \underbrace{x\sqrt{x+1}dx}_{udv} &= \underbrace{x\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}}_{uv} - \underbrace{\int \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}dx}_{vdu} \\ &= \frac{2}{3}x(x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}.\frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}} + c \\ &= \frac{2}{3}x(x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15}(x+1)^{\frac{5}{2}} + c, \end{aligned}$$

Maintenant

$$\int_0^3 x\sqrt{x+1}dx = \left(\frac{2}{3}x(x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15}(x+1)^{\frac{5}{2}}\right]_0^3 = (16 - \frac{4\times 32}{15}) - (0 - \frac{4}{15}) = \frac{116}{15}.$$

■

■ **Exemple 4.3** Calculez les intégrales suivantes:

a) $\int xe^x dx$

b) $\int xe^{x^2} dx$

c) $\int x^2e^x dx$

Solution a: Ici $udv = xe^x dx$, les meilleurs choix pour u et dv sont $u = x$ et $dv = e^x dx$, donc

$$\begin{aligned} u = x &\Longrightarrow du = dx \\ dv = e^x dx &\Longrightarrow v = e^x, \end{aligned}$$

Alors par la formule d'intégration par parties

$$\begin{aligned} \int \underbrace{xe^x dx}_{udv} &= \underbrace{xe^x}_{uv} - \int \underbrace{e^x dx}_{vdu} \\ &= xe^x - e^x + c. \end{aligned}$$

Solution b: Par changement de variable $u = x^2$, $du = 2xdx$

$$\begin{aligned} e^{x^2}dx &= \int e^u(\frac{1}{2}du) \\ &= \frac{1}{2}e^u + c = \frac{1}{2}e^{x^2} + c \end{aligned}$$

Solution c: Ici $udv = x^2e^xdx$, les meilleurs choix pour u et dv sont $u = x^2$ et $dv = e^xdx$, donc

$$\begin{aligned} u = x^2 &\Longrightarrow du = 2xdx \\ dv = e^xdx &\Longrightarrow v = e^x, \end{aligned}$$

Alors par la formule d'intégration par parties

$$\begin{aligned} \int \underbrace{x^2e^xdx}_{udv} &= \underbrace{x^2e^x}_{uv} - \int \underbrace{2xe^xdx}_{vdu} \\ &= x^2e^x - 2(xe^x - e^x) + c = x^2e^x - e^x + 2e^x + c = (x^2 - 2x + 2)e^x + c. \end{aligned}$$

■

■ **Exemple 4.4** Calculez les intégrales suivantes:

a) $\int \ln x\, dx$

b) $\int (\ln x)^2\, dx$

Solution a: Ici $udv = \ln xdx$, les meilleurs choix pour u et dv sont $u = \ln x$ et $dv = dx$, donc

$$\begin{aligned} u = \ln x &\Longrightarrow du = \frac{1}{x}dx \\ dv = dx &\Longrightarrow v = x, \end{aligned}$$

Alors par la formule d'intégration par parties

$$\begin{aligned} \int \underbrace{\ln xdx}_{udv} &= \underbrace{x\ln x}_{uv} - \int \underbrace{x\frac{1}{x}dx}_{vdu} \\ &= x\ln x - x + c. \end{aligned}$$

Solution b: Ici $udv = (\ln x)^2dx$,

Première méthode: Si $u = \ln x$ et $dv = \ln xdx$, donc

$$\begin{aligned} u = \ln x &\Longrightarrow du = \frac{1}{x}dx \\ dv = \ln xdx &\Longrightarrow v = x\ln x - x, \end{aligned}$$

Alors par la formule d'intégration par parties

$$\begin{aligned} \int \underbrace{(\ln x)^2}_{udv} &= \underbrace{\ln x(x\ln x - x)}_{uv} - \int \underbrace{(x\ln x - x)\frac{1}{x}dx}_{vdu} \\ &= \ln x(x\ln x - x) - \int (\ln x - 1)dx \\ &= \ln x(x\ln x - x) - (x\ln x - x - x) + c \\ &= x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x + c. \end{aligned}$$

Deuxième méthode: Si $u = (\ln x)^2$ et $dv = dx$ donc

$$\begin{aligned} u = (\ln x)^2 &\Longrightarrow du = 2\ln x\frac{1}{x}dx \\ dv = dx &\Longrightarrow v = x, \end{aligned}$$

Alors par la formule d'intégration par parties

$$\begin{aligned}
\int \underbrace{(\ln x)^2\, dx}_{udv} &= \underbrace{(\ln x)^2 x}_{uv} - \int \underbrace{x.2\ln x \frac{1}{x} dx}_{vdu} \\
&= x(\ln x)^2 - 2\int \ln x dx \\
&= x(\ln x)^2 - 2(x\ln x - x) + c = x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x + c.
\end{aligned}$$

■

■ **Exemple 4.5** Calculez les intégrales suivantes:

a) $\int x\sin x dx$

b) $\int x\sin(x^2) dx$

c) $\int \sin\sqrt{x} dx$

Solution a: Ici $udv = x\sin x dx$, les meilleurs choix pour u et dv sont $u = x$ et $dv = \sin x dx$, donc

$$\begin{aligned}
u = x &\Longrightarrow du = dx \\
dv = \sin x dx &\Longrightarrow v = -cosx,
\end{aligned}$$

Alors par la formule d'intégration par parties

$$\begin{aligned}
\int \underbrace{x\sin x dx}_{udv} &= \underbrace{x(-\cos x)}_{uv} - \int \underbrace{(-\cos x) dx}_{vdu} \\
&= -x\cos x + \sin x + c.
\end{aligned}$$

Solution b: Par changement de variable $u = x^2$, $du = 2xdx$,

$$\int x\sin(x^2) dx = \int \sin u(\frac{1}{2}du) = -\frac{1}{2}\cos u + c = -\frac{1}{2}\cos x^2 + c.$$

Solution c: Par changement de variable $u = \sqrt{x}$, $du = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx$ et $dx = 2udu$

$$\int \sin\sqrt{x} dx = \int \sin u(2udu) = 2(-x\cos x + \sin x) + c = 2(-\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + \sin\sqrt{x}) + c.$$

■

■ **Exemple 4.6** Calculez $\int e^{2x}\cos 3x dx$.

Première méthode: Supposer que $I_1 = \int e^{2x}\sin 3x dx$ et $I_2 = \int e^{2x}\cos 3x dx$.

Pour $I_1 = \int e^{2x}\sin 3x dx$, $u = e^{2x}$ et $dv = \sin 3x dx$, alors

$$\begin{aligned}
I_1 = \int \underbrace{e^{2x}\sin 3x dx}_{udv} &= \underbrace{-\frac{e^{2x}}{3}\cos 3x}_{uv} - \int \underbrace{(-\frac{1}{2}\cos 3x)2e^{2x} dx}_{vdu} \\
&= -\frac{e^{2x}}{3}\cos 3x + \frac{2}{3}I_2,
\end{aligned}$$

Pour $I_2 = \int e^{2x}\cos 3x dx$, $u = e^{2x}$ et $dv = \cos 3x dx$, alors

$$\begin{aligned} I_2 = \int \underbrace{e^{2x}\cos 3x dx}_{udv} &= \underbrace{\frac{e^{2x}}{3}\sin 3x}_{uv} - \int \underbrace{(\frac{1}{3}\sin 3x)2e^{2x}dx}_{vdu} \\ &= \frac{e^{2x}}{3}\sin 3x - \frac{2}{3}I_1, \end{aligned}$$

on a le système d'équations

$$\begin{cases} I_1 &= -\dfrac{e^{2x}}{3}\cos 3x + \dfrac{2}{3}I_2 \\ I_2 &= \dfrac{e^{2x}}{3}\sin 3x - \dfrac{2}{3}I_1 \end{cases}$$

on obtient

$$I_1 = \frac{e^{2x}}{13}(2\sin 3x - 3\cos 3x)$$
$$I_2 = \frac{e^{2x}}{13}(3\sin 3x + 2\cos 3x)$$

Deuxième méthode: Supposer que

$$\int e^{2x}\sin 3x dx = Ae^{2x}\sin 3x + Be^{2x}\cos 3x,$$

alors

$$\begin{aligned} e^{2x}\sin 3x &= (Ae^{2x}\sin 3x + Be^{2x}\cos 3x)' \\ &= A(2e^{2x}\sin 3x + 3e^{2x}\cos 3x) + B(2e^{2x}\cos 3x - 3e^{2x}\sin 3x) \\ &= (2A-3B)e^{2x}\sin 3x + (3A+2B)e^{2x}\cos 3x, \end{aligned}$$

on a le système d'équations

$$\begin{cases} 2A - 3B &= 1 \\ 3A + 2B &= 0 \end{cases}$$

on obtient $A = \frac{2}{13}$, $B = -\frac{3}{13}$, donc

$$\int e^{2x}\sin 3x dx = \frac{2}{13}e^{2x}\sin 3x - \frac{3}{13}e^{2x}\cos 3x.$$

■

■ **Exemple 4.7** a) Supposer que $I_n = \int \sin^n x dx$, montrer que

$$I_n = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x\cos x + \frac{n-1}{n}I_{n-2}.$$

*b) Trouver $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$.

Solution a: Ici $udv = \sin^n x dx$, les meilleurs choix pour u et dv sont $u = \sin^{n-1} x$ et $dv = \sin x dx$, donc

$$u = \sin^{n-1} x \Longrightarrow du = (n-1)\sin^{n-2} x\cos x dx$$
$$dv = \sin x dx \Longrightarrow v = -\cos x,$$

Alors par la formule d'intégration par parties

$$\begin{aligned}
I_n = \int \underbrace{\sin^n x dx}_{udv} &= \underbrace{-\cos x \sin^{n-1} x}_{uv} - \int \underbrace{(-\cos x)(n-1)\sin^{n-2}\cos x dx}_{vdu} \\
&= -\cos x \sin^{n-1} x + \int (n-1)\sin^{n-2} x \cos^2 x dx \\
&= -\cos x \sin^{n-1} x + \int (n-1)\sin^{n-2} x(1-\sin^2 x) dx \\
&= -\cos x \sin^{n-1} x + \int (n-1)\sin^{n-2} x - \int (n-1)\sin^n x dx \\
&= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n,
\end{aligned}$$

Donc

$$I_n = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

Solution b: Par (a)

$$W_n = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x \cos x \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{n-1}{n} W_{n-2} = \frac{n-1}{n} W_{n-2},$$

alors

$$\begin{aligned}
W_n = \frac{n-1}{n} W_{n-2} &= \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2} W_{n-4} \\
&= \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\frac{n-5}{n-4} W_{n-6},
\end{aligned}$$

Donc, si n est pair, $W_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^0 x dx = \frac{\pi}{2}$,

$$\begin{aligned}
W_n &= \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\frac{n-5}{n-4}\cdots\frac{1}{2} W_0 \\
&= (\frac{n}{n})\frac{n-1}{n}(\frac{n-2}{n-2})\frac{n-3}{n-2}(\frac{n-4}{n-4})\frac{n-5}{n-4}\cdots(\frac{2}{2})\frac{1}{2}\frac{\pi}{2} \\
&= \frac{n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots.\times 2\times 1}{(n\times(n-2)\times\ldots.\times 2)^2} = \frac{n!}{2^n((\frac{n}{2})!)^2}\frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Si n est impair, $W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^1 x dx = 1$,

$$\begin{aligned}
W_n &= \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\frac{n-5}{n-4}\cdots\frac{2}{3} W_1 \\
&= (\frac{n}{n})\frac{n-1}{n}(\frac{n-2}{n-2})\frac{n-3}{n-2}(\frac{n-4}{n-4})\frac{n-5}{n-4}\cdots(\frac{3}{3})\frac{2}{3} \\
&= \frac{n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots.\times 2\times 1}{(n\times(n-2)\times\ldots.\times 3)^2} = \frac{2^{n+1}((\frac{n-1}{2})!)^2}{n!}.
\end{aligned}$$

■

Exercices

Exercice 4.1 Calculez les intégrales suivantes avec la fameuse technique d'intégration par parties:

a) $\int \ln(x)\,dx$
b) $\int x^2 e^{3x}\,dx$
c) $\int x\sec^2(x)\,dx$
d) $\int \theta^3\sin(\theta)$
e) $\int \frac{e^t(t-1)}{t^2}\,dt$
f) $\int \operatorname{Arcsin}(x)\,dx$
g) $\int x^2 2^{2x}\,dx$
h) $\int \frac{x}{e^{3x}}\,dx$

■

Exercice 4.2 Calculez les intégrales définies suivantes:

a) $\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x)}{x^9}\,dx$
b) $\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} t^3\sin(t^2)\,dt$
c) $\int_0^1 xe^{3x}\,dx$
d) $\int_{-2}^{2} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^3}\,dx$

■

Exercice 4.3 Calculez les intégrales suivantes avec la sublime technique d'intégration par parties:

a) $\int \sin(\ln(x))\,dx$
b) $\int e^{2x}\cos(3x)\,dx$

■

Exercice 4.4 Calculez les intégrales trigonométriques suivantes:

a) $\int \sin^6(x)\,dx$
b) $\int \sin^2(x)\cos^4(x)\,dx$
c) $\int \tan^5(x)\sec^3(x)\,dx$
d) $\int_{\pi}^{2\pi} \cos^2(x)\sin^3(x)\,dx$
e) $\int \cot^5(x)\csc^5(x)\,dx$
f) $\int \frac{1-\tan^2(x)}{\sec^2(x)}\,dx$
g) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\tan(x)}\,\sec^6(x)\,dx$
h) $\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\cos^3(x)\,dx$

■

4.2 Substitutions trigonométriques

Théorème 4.2.1 Si nous avons une fonction racine carrée et a^2-x^2, x^2+a^2 et x^2-a^2, un changement de variable trigonométrique peut être utile.

- Pour $a^2-x^2 \implies x = a\sin t$ ou $x = a\cos t$.
- Pour $x^2+a^2 \implies x = a\tan t$ ou $x = a\sinh t$.
- Pour $x^2-a^2 \implies x = a\sec t$ ou $x = a\cosh t$.

■ **Exemple 4.8** Calculez l'aire du cercle de rayon R.

Remarque 4.2.2 — Rappel. L'équation du cercle de centre de coordonnées (a,b) et de rayon R est donnée par

$$(x-a)^2+(y-b)^2 = R^2.$$

Solution: L'équation du cercle centré à l'origine avec le rayon R est $x^2+y^2 = R^2$, donc l'équation du demi-cercle supérieur est $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ et l'aire du cercle est égale à $A = 2\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2} dx$. Maintenant par changement de variable $x = R\sin t$, $dx = R\cos t dt$

$$\begin{aligned}
A &= 2\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2} dx \\
&= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{R^2 - (R\sin t)^2} (R\cos t dt) \\
&= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{R^2(1-\sin^2 t)} R\cos t dt \\
&= 2R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cos t dt \\
&= 2R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2} dt \\
&= R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t) dt \\
&= R^2 \left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = R^2[(\frac{\pi}{2}+0) - (-\frac{\pi}{2}+0)] = \pi R^2.
\end{aligned}$$

■

Théorème 4.2.3 — Conclusion. L'aire du cercle de rayon R est égale à

$$A = \pi R^2$$

Remarque 4.2.4

-
$$\begin{aligned}
\cos^2\theta + \sin^2\theta &= 1 \\
\sin(2\theta) &= 2\sin\theta\cos\theta \\
\cos(2\theta) &= \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta
\end{aligned}$$
- $\sin^2\theta = \dfrac{1-\cos 2\theta}{2}, \cos^2\theta = \dfrac{1+\cos 2\theta}{2}$
- $\sin\dfrac{\pi}{2} = 1, \sin(-\dfrac{\pi}{2}) = -1, \sin(\pi) = \sin(-\pi) = 0.$

Remarque 4.2.5

-
$$\begin{aligned}
\cosh^2\theta - \sinh^2\theta &= 1 \\
\sinh(2\theta) &= 2\sinh\theta\cosh\theta \\
\cosh(2\theta) &= \cosh^2\theta + \sinh^2\theta = 2\cosh^2\theta - 1 = 2\sinh^2\theta + 1
\end{aligned}$$
- $\sinh^2\theta = \dfrac{\cosh 2\theta - 1}{2}, \cosh^2\theta = \dfrac{\cosh 2\theta + 1}{2}$
- $\sinh(0) = 0, \cosh(0) = 1.$

■ **Exemple 4.9** Calculez:

$$\int \sqrt{x^2+1}\, dx.$$

Solution: Par changement de variable $x = \sinh t$, $dx = \cosh t\, dt$

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{x^2+1}\, dx &= \int \sqrt{\sinh^2 t + 1} \cosh t\, dt \\
&= \int \sqrt{\cosh^2 t} \cosh t\, dt \\
&= \int \cosh^2 t\, dt \\
&= \int \frac{\cosh(2t)+1}{2}\, dt \\
&= \frac{1}{2} \int (\cosh(2t)+1)\, dt \\
&= \frac{1}{2}(\frac{1}{2}\sinh(2t)+t) = \frac{1}{2}(\sinh t \cosh t + t) = \frac{1}{2}(x\sqrt{1+x^2} + \operatorname{Arcsinh} x) + c.
\end{aligned}$$

■

■ **Exemple 4.10** Calculez:

$$\int \sqrt{x^2-1}\, dx.$$

Solution: Par changement de variable $x = \cosh t$, $dx = \sinh t\, dt$

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{x^2-1}\, dx &= \int \sqrt{\cosh^2 t - 1} \sinh t\, dt \\
&= \int \sqrt{\sinh^2 t} \sinh t\, dt \\
&= \int \sinh^2 t\, dt \\
&= \int \frac{\cosh(2t)-1}{2}\, dt \\
&= \frac{1}{2} \int (\cosh(2t)-1)\, dt \\
&= \frac{1}{2}(\frac{1}{2}\sinh(2t)-t) = \frac{1}{2}(\cosh t \sinh t - t) = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2-1} - \operatorname{Arccosh} x) + c.
\end{aligned}$$

■

■ **Exemple 4.11** Calculez:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

Solution: Par changement de variable $x = \sin t$, $dx = \cos t dt$

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx &= \int \frac{\sin^2 t}{\sqrt{1-\sin^2 t}}\cos t dt \\
&= \int \frac{\sin^2 t}{\cos t}\cos t dt \\
&= \int \sin^2 t dt \\
&= \int (\frac{1-\cos(2t)}{2})dt \\
&= \frac{1}{2}\int (1-\cos(2t))dt \\
&= \frac{1}{2}(t-\frac{1}{2}\sin(2t))+c = \frac{1}{2}(t-\sin t\cos t)+c = \frac{1}{2}(\text{Arcsin} x - x\sqrt{1-x^2})+c.
\end{aligned}$$

■

Exercices

Exercice 4.5 Calculez les intégrales suivantes en utilisant des substitutions trigonométriques.

a) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(7-x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$ b) $\displaystyle\int \frac{4}{x^2\sqrt{5+x^2}}dx$ ■

Exercice 4.6 Calculez les intégrales suivantes en utilisant des substitutions trigonométriques.

a) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx$ c) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{4-9x^2}}dx$

b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{x^4+1}}dx$ d) $\displaystyle\int \sqrt{x^2-\frac{1}{4}}dx$ ■

4.3 Intégration par fractions partielles

Observation Nous savons que $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+1}dx = \text{Arctan} x + c$, mais qu'est $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-1}dx$?

Pour trouver $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-1}dx$, nous pouvons écrire

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2}(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}),$$

Alors

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2-1}dx &= \int \frac{1}{2}(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1})dx \\
&= \frac{1}{2}(\ln|x-1|-\ln|x+1|)+c = \frac{1}{2}\ln|\frac{x-1}{x+1}|+c.
\end{aligned}$$

Cette méthode s'appelle **la décomposition par fractions partielles**.

Théorème 4.3.1 — La décomposition par fractions partielles. Objectif: Trouver $\int R(x)dx$ où $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ est une fonction rationnelle.
étape 1: Assurez-vous que $\deg(P(x)) < \deg(Q(x))$, si $\deg(P(x)) \geq \deg(Q(x))$ faire la division avant l'intégration!
étape 2: Décomposer $Q(x)$ en multiplication de polynômes du premier et du second degré avec $\Delta < 0$.
étape 3: Écrire $R(x)$ comme somme de fractions partielles.
étape 4: Trouver les coefficients inconnus.
étape 5: Calculer l'intégrale!

■ **Exemple 4.12** Calculez:

$$\int \frac{5x-14}{x^2-3x-40}dx.$$

étape 1: $\deg(5x-14) < \deg(x^2-3x-40)$.
étape 2: $x^2-3x-40 = (x-8)(x+5)$.
étape 3: $\frac{5x-14}{x^2-3x-40} = \frac{A}{x-8} + \frac{B}{x+5}$,
étape 4:

$$\frac{A}{x-8} + \frac{B}{x+5} = \frac{A(x+5)+B(x-8)}{(x-8)(x+5)} = \frac{(A+B)x+(5A-8B)}{(x-8)(x+5)} = \frac{5x-14}{x^2-3x-40},$$

Donc $A+B=5$, $5A-8B=-14$, alors $A=2$ et $B=3$.
étape 5:

$$\int \frac{5x-14}{x^2-3x-40}dx = \int (\frac{2}{x-8} + \frac{3}{x+5})dx = 2\ln|x-8| + 3\ln|x+5| + c.$$

■

■ **Exemple 4.13** Calculez:

$$\int \frac{x^3+x^2+x+5}{x^3+x^2-5x+3}dx.$$

■

étape 1: $\deg(x^3+x^2+x+5) \not< \deg(x^3+x^2-5x+3)$, alors

$$\frac{x^3+x^2+x+5}{x^3+x^2-5x+3} = 1 + \frac{6x+2}{x^3+x^2-5x+3},$$

étape 2: $x^3+x^2-5x+3 = (x-1)^2(x+3)$
étape 3: $\frac{6x+2}{x^3+x^2-5x+3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+3}$,
étape 4:

$$\begin{aligned}\frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+3} &= \frac{A(x-1)(x+3)+B(x+3)+C(x-1)^2}{(x-1)^2(x+3)} \\ &= \frac{(A+C)x^2+(2A+B-2C)x+(-3A+3B+C)}{(x-1)^2(x+3)} \\ &= \frac{6x+2}{x^3+x^2-5x+3},\end{aligned}$$

Donc $\begin{cases} A+C &= 0 \\ 2A+B-2C &= 6 \\ -3A+3B+C &= 2 \end{cases}$, alors $A=1$, $B=2$ et $C=-1$.

étape 5:

$$\int \frac{x^3+x^2+x+5}{x^3+x^2-5x+3}dx = \int (1+\frac{1}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}-\frac{1}{x+3})dx$$
$$= x+\ln|x-1|-\frac{2}{x-1}-\ln|x+3|+c.$$

■

Exercices

Exercice 4.7 Calculez les intégrales suivantes avec la technique de décomposition en fractions partielles.

a) $\int \frac{8x+9}{(x-2)(x+3)}dx$

b) $\int \frac{x}{(x-1)^2}dx$

c) $\int \frac{4x^2-4x+6}{x^3-x^2-6x}dx$

d) $\int \frac{x^4-3x^2-3x-2}{x^3-x^2-2x}dx$

e) $\int \frac{3x^4-x^3+2x^2-x+2}{x(x^2+1)^2}dx$

f) $\int \frac{8x^3-5x^2-11x+14}{(x^2-1)(x^2-4)}dx$

■

4.4 Exemples intéressants

■ **Exemple 4.14** Calculez:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x}{\sin^n x+\cos^n x}dx.$$

Solution: Supposer que $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x}{\sin^n x+\cos^n x}dx$, par changement de variable $u = \frac{\pi}{2}-x$, $du = -dx$ nous avons

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x}{\sin^n x+\cos^n x}dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\cos^n x}{\cos^n x+\sin^n x}dx$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n x}{\cos^n x+\sin^n x}dx,$$

Donc

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x}{\sin^n x+\cos^n x}dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n x}{\cos^n x+\sin^n x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2},$$

Alors $I = \frac{\pi}{4}$. ■

Remarque 4.4.1 — Rappel.

$$\sin(\frac{\pi}{2}-\theta) = \cos\theta \text{ et } \cos(\frac{\pi}{2}-\theta) = \sin\theta$$
$$\sin(\pi-\theta) = \sin\theta \text{ et } \cos(\pi-\theta) = -\cos\theta$$

■ **Exemple 4.15** Si f est une fonction contine sur l'intervalle $[0,1]$,
a) Montrer que:

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx,$$

b) Calculez:

$$\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx.$$

Solution a: Par changement de variable $u=\pi-x$, $du=-dx$ nous avons

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx &= \int_{\pi}^{0}(\pi-u)f(\sin(\pi-u))(-du)\\ &= \int_0^{\pi}(\pi-u)f(\sin u)(du)\\ &= \pi\int_0^{\pi} f(\sin x)dx - \int_0^{\pi} xf(\sin x)dx,\end{aligned}$$

La dernière ligne montre que

$$2\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \pi\int_0^{\pi} f(\sin x)dx.$$

Solution b: Par a)

$$\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx,$$

Pour calculer $\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$, par changement de variable $u=\cos x$

$$\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \frac{-1}{1+u^2}du = -\text{Arctan}(u)+c = -\text{Arctan}(\cos x)+c,$$

Finalement,

$$\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \frac{\pi}{2}(-\text{Arctan}(\cos\pi)-(-\text{Arctan}(\cos 0))) = \frac{\pi}{2}(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi^2}{4}.$$

■

■ **Exemple 4.16** Calculez:

$$\int\frac{1}{1+e^x}dx.$$

Solution: Par multiplication avec $\frac{e^{-x}}{e^{-x}}$ avant intégration, on a

$$\int\frac{1}{1+e^x}dx = \int\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}dx,$$

maintenant par changement de variable $u=e^{-x}+1$, $du=-e^{-x}dx$

$$\begin{aligned}\int\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}dx &= \int -\frac{1}{u}du\\ &= -\ln|u|+c = -\ln(1+e^{-x})+c.\end{aligned}$$

■

■ **Exemple 4.17** Calculez:
$$\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\,dx.$$

Solution: En rationalisant le dénominateur
$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} &= \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} \times \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}} \\ &= \frac{x+1+x-1-2\sqrt{x^2-1}}{x+1-(x-1)} = x-\sqrt{x^2-1},\end{aligned}$$

donc
$$\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\,dx = \int (x-\sqrt{x^2-1})\,dx,$$

par l'example 4.10 de la page 57, $\int \sqrt{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2-1}-\text{Arccosh}x)+c$, alors
$$\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\,dx = \frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}(x\sqrt{x^2-1}-\text{Arccosh}x)+c.$$

■

■ **Exemple 4.18** Calculez:
$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx.$$

Solution: Par changement de variable $u^3 = 1+x^{\frac{1}{4}}$, $x = (u^3-1)^4$ et $dx = 4(u^3-1)^3(3u^2)du$, alors
$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx &= \int \frac{u}{(u^3-1)^2}4(u^3-1)^3(3u^2)du \\ &= \int 12u^3(u^3-1)du \\ &= 12\int (u^6-u^3)du \\ &= 12(\frac{1}{7}u^7-\frac{1}{4}u^4)+c \\ &= \frac{12}{7}(1+x^{\frac{1}{4}})^{\frac{7}{3}}-3(1+x^{\frac{1}{4}})^{\frac{4}{3}}+c.\end{aligned}$$

■

■ **Exemple 4.19** Calculez:
$$\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}dx.$$

Solution: Par changement de variable $x = u^6$, $dx = 6u^5$, alors
$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}dx &= \int \frac{6u^5du}{u^3(1+u^2)} \\ &= 6\int (1-\frac{1}{1+u^2})du \\ &= 6(u-\text{Arctan}u)+c \\ &= 6(\sqrt[6]{x}-\text{Arctan}(\sqrt[6]{x}))+c.\end{aligned}$$

■

■ **Exemple 4.20** Calculez:

$$\int \frac{1}{(x-1)^3(x+1)^2}dx.$$

Solution: Par la décomposition par fractions partielles

$$\frac{1}{(x-1)^3(x+1)^2} = -\frac{3}{16(x+1)} - \frac{1}{8(x+1)^2} + \frac{3}{16(x-1)} - \frac{1}{4(x-1)^2} + \frac{1}{4(x-1)^3},$$

alors

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{(x-1)^3(x+1)^2}dx \\ &= \int \left(-\frac{3}{16(x+1)} - \frac{1}{8(x+1)^2} + \frac{3}{16(x-1)} - \frac{1}{4(x-1)^2} + \frac{1}{4(x-1)^3}\right) \mathrm{d}x \\ &= -\frac{3\ln(|x+1|)}{16} + \frac{1}{8(x+1)} + \frac{1}{4(x-1)} - \frac{1}{8(x-1)^2} + \frac{3\ln(|x-1|)}{16} + C. \end{aligned}$$

■

■ **Exemple 4.21** * Calculez:

$$\int \sec x dx.$$

Solution:

$$\begin{aligned} \sec x &= \sec x . \frac{\tan x + \sec x}{\tan x + \sec x} \\ &= \frac{\sec x \tan x + \sec^2 x}{\tan x + \sec x} \end{aligned}$$

Par changement de variable $u = \tan x + \sec x$, $du = (\sec x \tan x + \sec^2 x)dx$

$$\begin{aligned} \int \frac{\sec x \tan x + \sec^2 x}{\tan x + \sec x}dx &= \int \frac{1}{u}du \\ &= \ln|u| + c \\ &= \ln|\tan x + \sec x| + c. \end{aligned}$$

■

■ **Exemple 4.22** * Calculez:

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}dx.$$

Solution: Par changement de variable $x = \dfrac{1}{u}$, $dx = \dfrac{-1}{u^2}du$,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}dx &= \int \frac{1}{\frac{1}{u^2}\sqrt{1+u^2}} \frac{-1}{u^2}dt \\ &= \int \frac{-1}{\sqrt{1+u^2}}du, \end{aligned}$$

Maintenant par changement de variable $u = \tan t$, $du = (1+\tan^2 t)dt = \sec^2 t dt$,

$$\begin{aligned}
\int \frac{-1}{\sqrt{1+u^2}}du &= \int \frac{-1}{\sqrt{1+\tan^2 t}}(1+\tan^2 t)dt \\
&= -\int \sqrt{1+\tan^2 t}dt \\
&= -\int \sec t dt \\
&= -\ln|\tan t + \sec t| + c \\
&= -\ln|u + \sqrt{1+u^2}| + c \\
&= -\ln|\frac{1}{x} + \sqrt{1+(\frac{1}{x})^2}| + c = -\ln\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x} + c.
\end{aligned}$$

■

■ **Exemple 4.23** Calculez:

$$\int \frac{1}{2+\cos x}dx.$$

Remarque 4.4.2 — Rappel.

$$\begin{aligned}
\sin\theta &= \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}} \\
\cos\theta &= \frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}
\end{aligned}$$

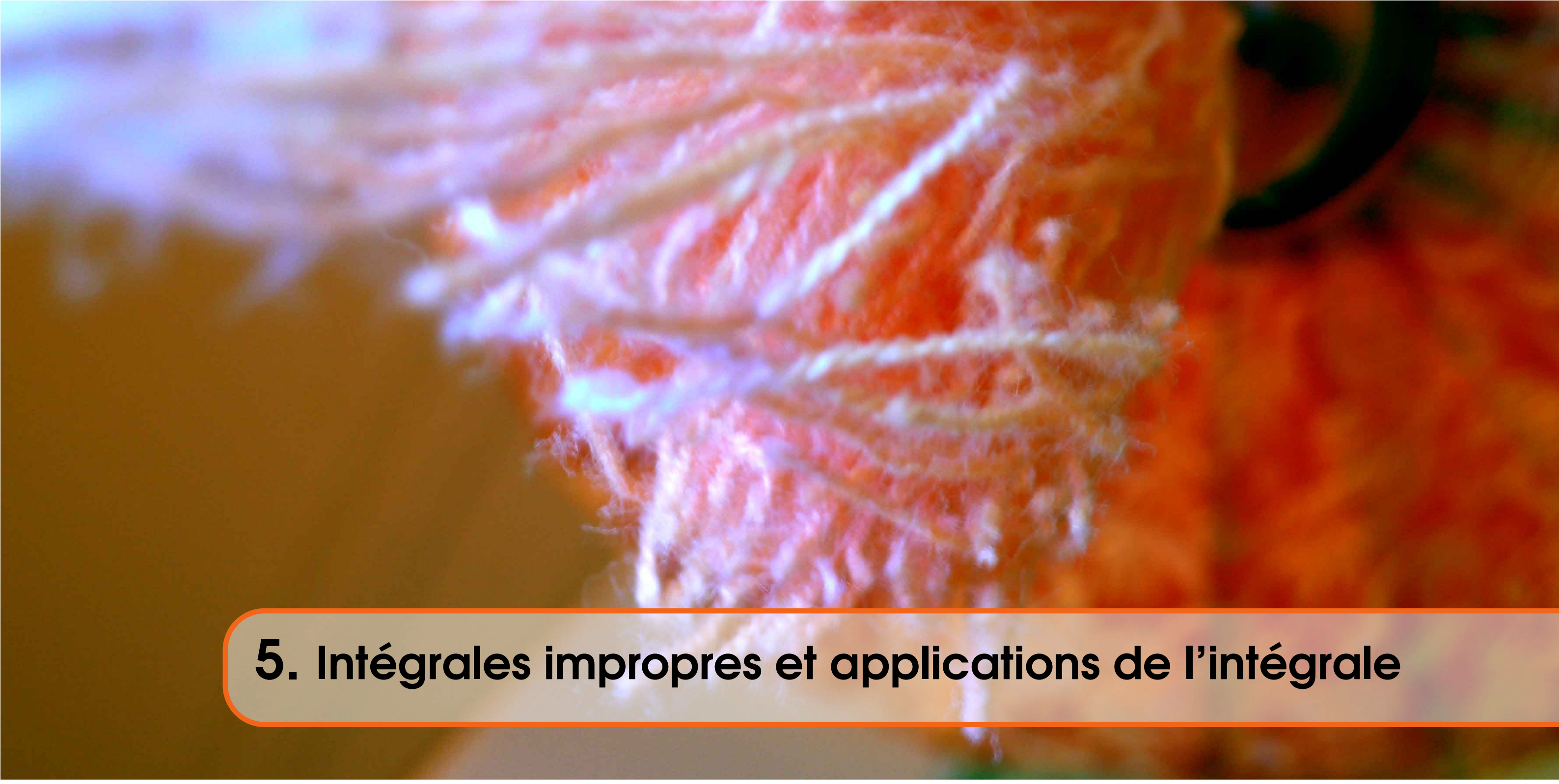
Remarque 4.4.3 Si nous avons une fonction rationnelle de sin et cos, un changement de variable $u = \tan\frac{x}{2}$ marche peut-être, donc

$$\begin{aligned}
\sin x &= \frac{2u}{1+u^2} \\
\cos x &= \frac{1-u^2}{1+u^2} \\
du &= \frac{1}{2}(1+\tan^2\frac{x}{2})dx = \frac{1}{2}(1+u^2)dx.
\end{aligned}$$

Solution: Alors ici nous avons,

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{2+\cos x}dx &= \frac{\dfrac{2}{1+u^2}}{2+\dfrac{1-u^2}{1+u^2}}du \\
&= \int \frac{2}{3+u^2}du \\
&= \frac{2}{3}\int \frac{1}{1+(\dfrac{u}{\sqrt{3}})^2}du \\
&= \frac{2}{3}(\frac{1}{\dfrac{1}{\sqrt{3}}}\text{Arctan}\frac{u}{\sqrt{3}})+c \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\text{Arctan}(\frac{1}{\sqrt{3}}\tan\frac{x}{2})+c.
\end{aligned}$$

■



5. Intégrales impropres et applications de l'intégrale

5.1 Intégrale impropre

Définition 5.1.1 — Intégrale impropre de type I. Une **intégrale impropre de type I** est une intégrale dont au moins une des bornes d'intégration est infinie.

- Si une seule des bornes est infinie, l'intégrale impropre est définie par une limite de la façon suivante:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$$
$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$$

- Si les deux bornes d'intégration sont infinies, l'intégrale impropre est définie par une somme de deux intégrales impropres comportant chacune une seule borne infinie:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx &= \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx\\ &= \lim_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)dx + \lim_{b\to+\infty}\int_c^b f(x)dx.\end{aligned}$$

  où c désigne n'importe quel nombre réel.

L'intégrale impropre est dite convergente si la ou les limites qui la définissent existent et divergente dans le cas contraire.

■ **Exemple 5.1** Calculez:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx.$$

Solution: Par définition et calcul direct

$$\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx &= \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2} dx \\
&= \lim_{b \to +\infty} \left(-\frac{1}{x}\right]_1^b \\
&= \lim_{b \to +\infty} (-\frac{1}{b} + 1) = 0 + 1 = 1,
\end{aligned}$$

■

■ **Exemple 5.2** Calculez:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx.$$

Solution: Par définition et calcul direct

$$\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx &= \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{1}{x} dx \\
&= \lim_{b \to +\infty} (\ln|x|]_1^b \\
&= \lim_{b \to +\infty} (\ln b - \ln 1) = +\infty - 0 = +\infty,
\end{aligned}$$

donc l'intégrale diverge. ■

■ **Exemple 5.3** Calculez:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx.$$

Solution: Par définition et calcul direct

$$\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx &= \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{\ln x}{x^2} dx \\
&= \lim_{b \to +\infty} \left(-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}\right]_1^b \\
&= \lim_{b \to +\infty} ((-\frac{\ln b}{b} - \frac{1}{b}) - (-\frac{\ln 1}{1} - \frac{1}{1})) = 0 + 0 + 1 = 1,
\end{aligned}$$

■

Remarque 5.1.1 Rappel

$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty,$$
$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty.$$

Remarque 5.1.2 Par la règle de L'Hôpital:

$$\lim_{b \to +\infty} \frac{\ln b}{b} = \lim_{b \to +\infty} \frac{\frac{1}{b}}{1} = 0.$$

■ **Exemple 5.4** Calculez:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}dx.$$

Solution: Par définition et calcul direct

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{-x}dx &= \lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-x}dx\\ &= \lim_{b\to+\infty}\left(-e^{-x}\right]_0^b\\ &= \lim_{b\to+\infty}(-e^{-b}-(-e^0))\\ &= \lim_{b\to+\infty}(\frac{-1}{e^b}+1) = \frac{-1}{+\infty}+1 = 0+1 = 1.\end{aligned}$$

■

Remarque 5.1.3 Rappel

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty,$$
$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0.$$

■ **Exemple 5.5** L'intégrale suivante est convergente ou divergente?

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx.$$

Solution: Ici ce n'est pas facile de trouver une primitive pour $f(x) = e^{-x^2}$. L'idée est de comparer $\int_1^{+\infty} e^{-x}dx$ avec $\int_1^{+\infty} e^{-x^2}dx$. Pour $x \geq 1$, $0 < e^{-x^2} \leq e^{-x}$, donc

$$\int_1^{+\infty} e^{-x^2}dx \leq \int_1^{+\infty} e^{-x}dx,$$

par l'example 5.4, $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx = 1$, alors $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx \leq 1$ est convergent[1]. ■

■ **Exemple 5.6** Calculez:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xdx.$$

Solution: Par définition

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} xdx &= \int_{-\infty}^{0} xdx + \int_0^{+\infty} xdx\\ &= \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 xdx + \lim_{b\to+\infty}\int_0^b xdx\\ &= \lim_{a\to-\infty}\left(\frac{1}{2}x^2\right]_a^0 + \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{2}x^2\right]_0^b\\ &= \lim_{a\to-\infty}(-\frac{1}{2}a^2) + \lim_{b\to+\infty}(\frac{1}{2}b^2) = -\infty+\infty\end{aligned}$$

donc l'intégrale diverge.

■

[1]La valeur exacte de $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$ peut être trouvée par une intégrale double, transformation de Laplace ou intégrale complexe et est égale à $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exemple 5.7 Calculez:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+5}dx.$$

Solution: L'intégrale indéfinie est égale à:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2+2x+5}dx &= \int \frac{1}{x^2+2x+1+4}dx \\
&= \int \frac{1}{(x+1)^2+4}dx \\
&= \frac{1}{4}\int \frac{1}{(\frac{x+1}{2})^2+1}dx \\
&= \frac{1}{4}\frac{1}{\frac{1}{2}}\text{Arctan}(\frac{x+1}{2}) = \frac{1}{2}\text{Arctan}\frac{x+1}{2},
\end{aligned}$$

maintenant,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+5}dx &= \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2+2x+5}dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+5}dx \\
&= \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} \frac{1}{x^2+2x+5}dx + \lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b} \frac{1}{x^2+2x+5}dx \\
&= \lim_{a\to-\infty}\left(\frac{1}{2}\text{Arctan}\frac{x+1}{2}\right]_a^0 + \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\text{Arctan}\frac{x+1}{2}\right]_0^b \\
&= \lim_{a\to-\infty}(\frac{1}{2}\text{Arctan}\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\text{Arctan}\frac{a+1}{2}) \\
+ \lim_{b\to+\infty}(\frac{1}{2}\text{Arctan}\frac{b+1}{2} - \frac{1}{2}\text{Arctan}\frac{1}{2}) \\
&= (\frac{1}{2}\text{Arctan}\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(-\frac{\pi}{2})) + (\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2}) - \frac{1}{2}\text{Arctan}\frac{1}{2}) \\
&= \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

■

Définition 5.1.2 — Intégrale impropre de type II. Une **intégrale impropre de type II** est une intégrale $\int_a^b f(x)dx$ dont $f(x)$ possède au moins une discontinuité sur l'intervalle $[a,b]$,

- Si f est continue partout sur $[a,b]$ sauf en a, alors l'intégrale impropre est définie par la limite
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)dx.$$
- Si f est continue partout sur $[a,b]$ sauf en b, alors l'intégrale impropre est définie par la limite
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)dx.$$
- Si f est continue partout sur $[a,b]$ sauf en c, alors l'intégrale impropre est définie par la

somme d'intégrales impropres

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$
$$= \lim_{t\to c^-} \int_a^t f(x)dx + \lim_{t\to c^+} \int_t^b f(x)dx$$

L'intégrale impropre est dite convergente si la ou les limites qui la définissent existent et divergente dans le cas contraire.

■ **Exemple 5.8** Calculez:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2}dx.$$

Solution: Par définition et calcul direct

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2}dx = \lim_{a\to 0^+} \int_a^1 \frac{1}{x^2}dx$$
$$= \lim_{a\to 0^+} \left(-\frac{1}{x}\right]_a^1$$
$$= \lim_{a\to 0^+} (-\frac{1}{1} - (-\frac{1}{a})) = -1 + \infty = +\infty,$$

donc l'intégrale diverge. ■

■ **Exemple 5.9** Calculez:

$$\int_0^3 \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}dx.$$

Solution: La primitive de $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$ est égale à $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}dx = 3(x-1)^{\frac{1}{3}}$, mais

$$\int_0^3 \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}dx \neq 3(x-1)^{\frac{1}{3}}\Big]_0^3,$$

Parce que $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$ n'est pas continue en $x = 1$, on a

$$\int_0^3 \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}dx + \int_1^3 \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}dx$$
$$= \lim_{t\to 1^-} \int_0^t \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}dx + \lim_{t\to 1^+} \int_t^3 \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}dx$$
$$= \lim_{t\to 1^-} 3(x-1)^{\frac{1}{3}}\Big]_0^t + \lim_{t\to 1^+} 3(x-1)^{\frac{1}{3}}\Big]_t^3$$
$$= \lim_{t\to 1^-} [3(t-1)^{\frac{1}{3}} - (3(-1)^{\frac{1}{3}})] + \lim_{t\to 1^+} [3(2)^{\frac{1}{3}} - 3(t-1)^{\frac{1}{3}}]$$
$$= 3 + 3\sqrt[3]{2}.$$

■

■ **Exemple 5.10 — Exemple de Riemann.** Cherchons une condition nécessaire et suffisante pour garantir la convergence des intégrales suivantes:

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^p}dx.$

b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}dx.$

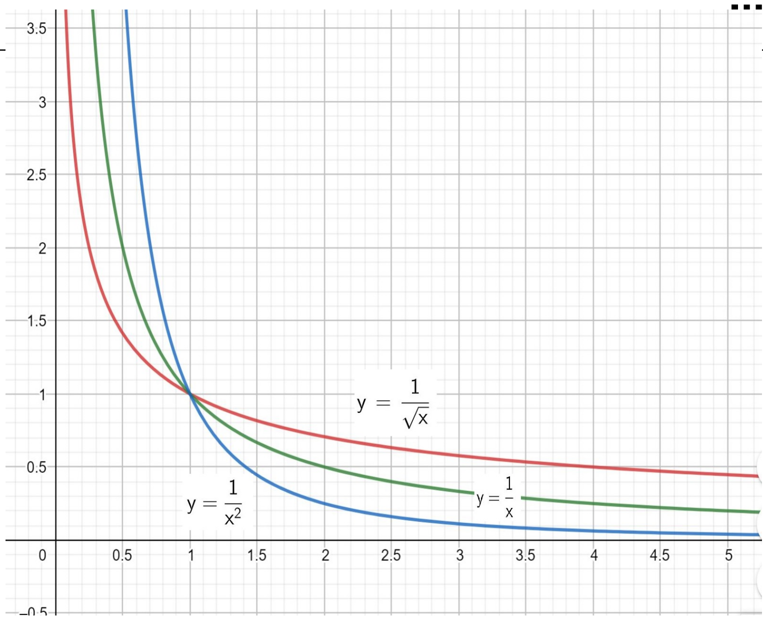


Figure 5.1: Aire sous les courbes $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $y = \dfrac{1}{x}$ et $y = \dfrac{1}{x^2}$

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{x^p}dx &= \lim_{a\to 0^+} \int_a^1 \frac{1}{x^p}dx \\
&= \lim_{a\to 0^+} \left(\left. \frac{1}{1-p}x^{1-p} \right]_a^1 \right) \\
&= \lim_{a\to 0^+} \left(\frac{1}{1-p} - \frac{1}{1-p}a^{1-p} \right) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-p} & \text{si } 0<p<1 \\ +\infty & \text{si } p \geq 1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}dx &= \lim_{b\to +\infty} \int_1^b \frac{1}{x^p}dx \\
&= \lim_{b\to +\infty} \left(\left. \frac{1}{1-p}x^{1-p} \right]_1^b \right) \\
&= \lim_{b\to +\infty} \left(\frac{1}{1-p}b^{1-p} - \frac{1}{1-p} \right) = \begin{cases} \dfrac{1}{p-1} & \text{si } p>1 \\ +\infty & \text{si } 0<p \leq 1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Théorème 5.1.4 Résumé:

- L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^p}dx$ converge vers $\dfrac{1}{1-p}$ si $0<p<1$ et diverge si $p \geq 1$.
- L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}dx$ converge vers $\dfrac{1}{p-1}$ si $p>1$ et diverge si $0<p\leq 1$.

■

■ **Exemple 5.11 — La fonction gamma.** Pour tout nombre $x > 0$, on définit la fonction suivante, appelée fonction gamma, et notée par la lettre grecque Γ (gamma majuscule)

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt,$$

Montrer que:
a) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ et $\Gamma(n+1) = n!$ pour $n \in \mathbb{N}$.
b) Si $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ alors $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, aussi calculez $(\frac{3}{2})!$.
Solution:
a)

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^{x+1-1} e^{-t}\, dt = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t}\, dt,$$

ici u et dv sont $u = t^x$ et $dv = e^{-t}\, dt$, alors par la formule d'intégration par parties

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t}\, dt &= -t^x e^{-t}\Big]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} x t^{x-1}(-e^{-t})\, dt \\ &= 0 + x\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt = x\Gamma(x).\end{aligned}$$

aussi $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} t^{1-1} e^{-t}\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt = 1$, alors

$$\begin{aligned}\Gamma(n+1) &= n\Gamma(n) \\ &= n[(n-1)\Gamma(n-1)] \\ &= n(n-1)[(n-2)\Gamma(n-2)] \\ &= \cdots \\ &= n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 1 = n!.\end{aligned}$$

b)

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{2}-1} e^{-t}\, dt = \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t}\, dt,$$

On choisit le changement de variable $u(t) = \sqrt{t}$, et donc $du = \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}}\, dt$. Par la règle de substitution

$$\begin{aligned}\Gamma(\frac{1}{2}) &= \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t}\, dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-u^2} 2\, du = 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\, du = 2(\frac{\sqrt{\pi}}{2}) = \sqrt{\pi},\end{aligned}$$

aussi

$$\begin{aligned}(\frac{3}{2})! &= \Gamma(\frac{5}{2}) \\ &= \frac{3}{2}\Gamma(\frac{3}{2}) \\ &= \frac{3}{2}[\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})] = \frac{3}{4}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}.\end{aligned}$$

■

Exemple 5.12 — La fonction bêta. La fonction bêta est un type d'intégrale d'Euler définie pour tous nombres réels strictement positifs par

$$\mathbf{B}(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt,$$

nous pouvons prouver que:

$$\mathbf{B}(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)},$$

Calculez $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\theta\cos^5\theta d\theta$. On choisit le changement de variable $u(\theta) = \sin\theta$, et donc $du = \cos\theta d\theta$. Par la règle de substitution

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\theta\cos^5\theta d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\theta\cos^4\theta\cos\theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\theta(\cos^2\theta)^2\cos\theta d\theta = \int_0^1 u^4(1-u^2)^2\,du,\end{aligned}$$

Une autre fois on choisit le changement de variable $z = u^2$, et donc $dz = 2u\,du$. Par la règle de substitution

$$\begin{aligned}\int_0^1 u^4(1-u^2)^2\,du = \int_0^1 u^3(1-u^2)^2 u\,du = \int_0^1 z^{\frac{3}{2}}(1-z)^2\frac{dz}{2} &= \frac{1}{2}\mathbf{B}(\frac{5}{2},3) \\ = \frac{1}{2}\frac{\Gamma(\frac{5}{2})\Gamma(3)}{\Gamma(\frac{5}{2}+3)} = \frac{1}{2}\frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\times 2!}{\frac{9}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}} &= \frac{8}{315}.\end{aligned}$$

■

Exercices

Exercice 5.1 Calculez (si c'est possible) les intégrales suivantes et déterminez si elles sont convergentes ou divergentes :

a) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$

b) $\int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{7}\,dx$

c) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$

d) $\int_0^1 \ln(x)\,dx$

e) $\int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

f) $\int_1^{\infty} e^{-2x}\,dx$

g) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+u^2}\,du$

h) $\int_0^{\infty} 3^x\,dx$

■

Exercice 5.2 Déterminez si les intégrales suivantes sont divergentes ou convergentes en comparant avec les intégrales données :

a) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x+\sin^2(x)}\,dx$ en comparant avec l'intégrale $\int_1^{\infty} \frac{1}{x+1}\,dx$

b) $\int_2^{\infty} \frac{1}{\sqrt[7]{x^7-1}}\,dx$ en comparant avec l'intégrale $\int_2^{\infty} \frac{1}{x}\,dx$

■

5.2 Calcul de longueur d'arc

Théorème 5.2.1 — Longueur d'une courbe. La longueur de la courbe $y = f(x)$ sur l'intervalle $[a,b]$ est donnée par,

$$L = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx.$$

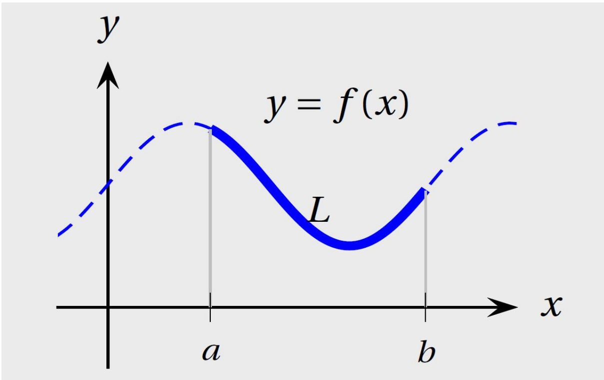


Figure 5.2: La longueur de la courbe $y = f(x)$ sur l'intervalle $[a,b]$

■ **Exemple 5.13** Calculez la circonférence du cercle de rayon R.

Remarque 5.2.2 — Rappel. L'équation du cercle centré à l'origine de rayon R est donné par

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Solution: L'équation du cercle centré à l'origine de rayon R est $x^2 + y^2 = R^2$, donc l'équation du demi-cercle supérieur est $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ et la circonférence du cercle est égale à

$$\begin{aligned}
P = 2\int_{-R}^{R} \sqrt{1+(f'(x))^2}dx = \int_{-R}^{R} \sqrt{1+(\frac{-2x}{2\sqrt{R^2-x^2}})^2}dx \\
= 2\int_{-R}^{R} \sqrt{\frac{R^2-x^2+x^2}{R^2-x^2}}dx \\
= 2R\int_{-R}^{R} \frac{1}{\sqrt{R^2-x^2}}dx,
\end{aligned}$$

Maintenant par changement de variable $x = R\sin t$, $dx = R\cos t dt$

$$\begin{aligned}
2R\int_{-R}^{R} \frac{1}{\sqrt{R^2-x^2}}dx = 2R\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{R^2-(R\sin t)^2}}R\cos t dt \\
= 2R\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{R^2}\sqrt{1-\sin^2 t}}R\cos t dt \\
= 2R\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dt = 2R(\frac{\pi}{2}-(-\frac{\pi}{2})) = 2R\pi.
\end{aligned}$$

■

Théorème 5.2.3 — Conclusion. La circonférence du cercle de rayon R est égale à :

$$P = 2\pi R.$$

■ **Exemple 5.14** Calculez la circonférence de l'ellipse de grand rayon a et petit rayon b.

Remarque 5.2.4 — Rappel. L'équation de l'ellipse de grand rayon a et petit rayon b est donnée par

$$(\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 = 1 \text{ ou } (\frac{x}{b})^2 + (\frac{y}{a})^2 = 1.$$

Solution: Par la même méthode que pour le cercle, nous obtenons pour ellipse

$$P = 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - (\frac{a^2 - b^2}{a^2}) \sin^2 t dt} \approx 2\pi \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$

Ce n'est pas possible de donner une formule exacte pour la dernière intégrale, mais nous pouvons l'approximer. Ces types d'intégrale sont appelés intégrales elliptiques.

■

Exercices

Exercice 5.3 Calculez la longueur des courbes suivantes :
a) $f(x) = 2x - 5$ avec $x \in [-1, 3]$
b) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4x}$ avec $x \in [1, 3]$
c) $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ avec $x \in [1, 2]$

■

5.3 Calcul de l'aire de la région entre deux courbes

Théorème 5.3.1 L'aire **sous la courbe** $y = f(x)$ sur l'intervalle $[a, b]$ est égale à

$$S = \int_a^b f(x)dx,$$

mais l'aire **entre la courbe** $y = f(x)$ **et l'axe des** x sur l'intervalle $[a, b]$ est égale à

$$S = \int_a^b |f(x)|dx.$$

Plus généralement, l'aire entre les courbes $y = f(x)$ et $y = g(x)$ sur l'intervalle $[a, b]$ est égale à

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx.$$

■ **Exemple 5.15** Calculez l'aire de la région située entre les courbes $y = x$ et $y = x^2$ entre $x = 0$ et $x = 1$.

Solution:

$$S = \int_0^1 |x - x^2|dx = \int_0^1 (x - x^2)dx = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

■

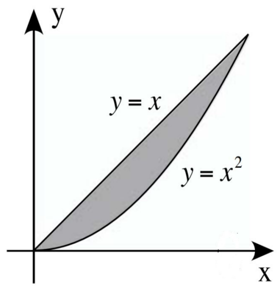


Figure 5.3: l'aire entre les courbes $y = x$ et $y = x^2$ entre $x = 0$ et $x = 1$

■ **Exemple 5.16** Calculez l'aire de région entre les courbes $y = -x^2 - x + 12$ et $y = x^2 - 3x + 8$ entre $x = -3$ et $x = 3$.
Solution:

$$\begin{aligned}
S &= \int_{-3}^{3} |(-x^2 - x + 12) - (x^2 - 3x + 8)| dx \\
&= \int_{-3}^{3} |-2x^2 + 2x + 4| dx \\
&= \int_{-3}^{-1} -(-2x^2 + 2x + 4) dx + \int_{-1}^{2} (-2x^2 + 2x + 4) dx + \int_{2}^{3} -(-2x^2 + 2x + 4) dx \\
&= \frac{2}{3}x^3 - x^2 - 4x \Big]_{-3}^{-1} + -\frac{2}{3}x^3 + x^2 + 4x \Big]_{-1}^{2} + \frac{2}{3}x^3 - x^2 - 4x \Big]_{2}^{3} = 30
\end{aligned}$$

■

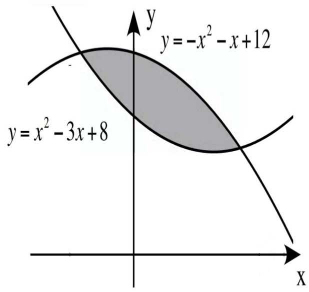


Figure 5.4: l'aire entre les courbes $y = -x^2 - x + 12$ et $y = x^2 - 3x + 8$ entre $x = -3$ et $x = 3$

■ **Exemple 5.17** Calculez l'aire de l'ellipse de grand rayon a et petit rayon b.
Solution: L'équation de l'ellipse de grand rayon a et petit rayon b est $(\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 = 1$, donc l'équation de la demi-ellipse supérieure est $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ et l'aire de l'ellipse est égale à

$A = 2\int_{-a}^{a} \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}dx$. Par changement de variable $x = R\sin t$, $dx = R\cos t dt$,

$$
\begin{aligned}
A = 2\int_{-a}^{a} \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}dx &= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{b}{a}\sqrt{a^2-(a\sin t)^2}(a\cos t dt)\\
&= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{b}{a}\sqrt{a^2}\sqrt{1-\sin^2 t}(a\cos t dt)\\
&= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} ba\cos^2 t dt\\
&= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} ba\frac{1+\cos 2t}{2}dt\\
&= ab\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)dt\\
&= ab\left[t+\frac{1}{2}\sin 2t)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = ab[(\frac{\pi}{2}+0)-(-\frac{\pi}{2}+0)] = \pi ab.
\end{aligned}
$$

■

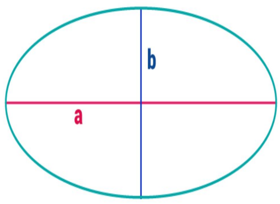


Figure 5.5: L'ellipse de grand rayon a et petit rayon b

Théorème 5.3.2 — Conclusion. L'aire de l'ellipse de grand rayon a et petit rayon b est égale à

$$A = \pi ab,$$

et si $a = b = R$, alors $A = \pi ab = \pi R^2$ est l'aire du cercle de rayon R.

■ **Exemple 5.18** a) Une demi-droite passant par l'origine intersecte le cercle d'équation $x^2+y^2 = 1$ au point $(\cos t, \sin t)$, où a est le double de l'aire algébrique de la surface délimitée par la demi-droite, le cercle et l'axe des x.

$$A = \frac{t}{2\pi}(\pi(1)^2) = \frac{t}{2}.$$

b) Une demi-droite passant par l'origine intersecte l'hyperbole d'équation $x^2-y^2 = 1$ au point $(\cosh t, \sinh t)$, où a est le double de l'aire algébrique de la surface délimitée par la demi-droite, l'hyperbole et l'axe des x.

$$A = \frac{1}{2}\cosh t\sinh t - \int_1^{\cosh t}\sqrt{x^2-1}\,dx,$$

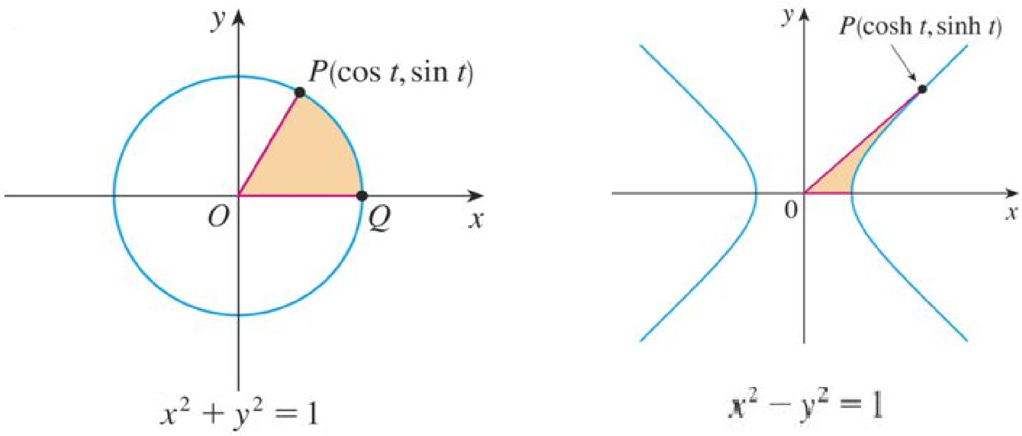


Figure 5.6: Trigonométrie circulaire et hyperbolique

par l'example 4.10 dans page 57, $\int \sqrt{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2-1} - \operatorname{Arccosh} x) + c$, alors

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2}\cosh t \sinh t - \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-1} - \operatorname{Arccosh} x\right]_1^{\cosh t} \\
&= \frac{1}{2}\cosh t \sinh t - \frac{1}{2}[(\cosh t\sqrt{\cosh^2 t - 1} - \operatorname{Arccosh}(\cosh t) - (1\sqrt{1^2-1} - \operatorname{Arccosh}(1))] \\
&= \frac{1}{2}\cosh t \sinh t - \frac{1}{2}[(\cosh t \sinh t - t) - (0-0)] = \frac{t}{2}.
\end{aligned}$$

■

Exercices

Exercice 5.4 Calculez l'aire de chacune des régions situées entre les courbes suivantes :

a) $f(x) = x - 1$ et $g(x) = x^2 - 2x - 5$
b) $f(x) = x^2$ et $g(x) = x + 6$
c) $f(x) = -x^2 + 1$ et $g(x) = 2x - 2$
d) $f(x) = 2 + x$ et $g(x) = \sqrt{2x+7}$

■

5.4 Calcul de l'aire latérale et du volume d'un solide de révolution

Objectif: calculer l'aire et le volume de la révolution autour de l'axe x d'une portion de courbe $y = f(x)$ comprise entre $x = a$ et $x = b$.

Théorème 5.4.1 L'aire latérale de la surface générée par la rotation autour de l'axe des x de la courbe $y = f(x)$ entre $x = a$ et $x = b$ est donnée par

$$S = \int_a^b 2\pi |f(x)| \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$$

Le volume du solide généré par la rotation autour de l'axe des x de la courbe $y = f(x)$ entre

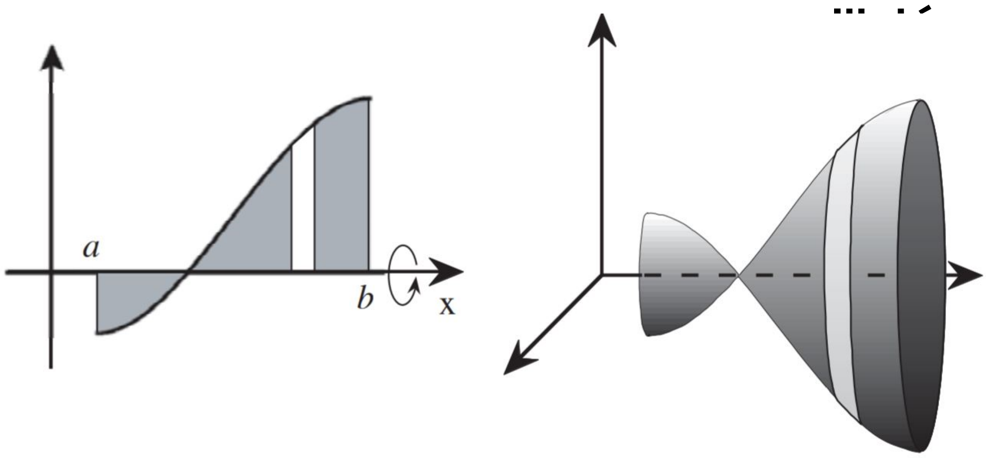


Figure 5.7: Solide généré par la rotation autour de l'axe des x de la courbe $y = f(x)$

$x = a$ et $x = b$ est donnée par

$$V = \int_a^b \pi f^2(x)\,dx$$

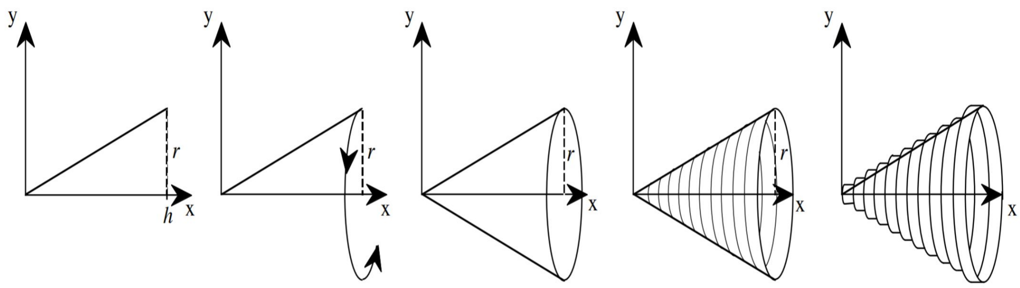


Figure 5.8: cône

■ **Exemple 5.19** Retrouver la formule connue de l'aire du cône et celle de son volume:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

Solution: Le cône avec rayon de base r et hauteur h peut être obtenu par rotation de $f(x) = \frac{r}{h}x$ entre $x = 0$ et $x = h$ alors

$$\begin{aligned} S = \int_0^h 2\pi|\frac{r}{h}x|\sqrt{1+((\frac{r}{h}x)')^2}dx &= \int_0^h 2\pi(\frac{r}{h}x)\sqrt{1+\frac{r^2}{h^2}}dx \\ &= \frac{2\pi r\sqrt{h^2+r^2}}{h^2}\int_0^h xdx \\ &= \frac{2\pi r\sqrt{h^2+r^2}}{h^2}\frac{h^2}{2} = \pi r\sqrt{h^2+r^2}, \end{aligned}$$

aussi

$$V = \int_0^h \pi f^2(x)dx = \int_0^h \pi(\frac{r}{h}x)^2 dx$$
$$= \pi \frac{r^2}{h^2}\frac{1}{3}x^3\Big]_0^h = \pi\frac{r^2}{h^2}\frac{1}{3}h^3 = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

■

■ **Exemple 5.20** a) Calculez l'aire (la surface) de la sphère de rayon R.
b) Calculez le volume d'une boule de rayon R.
Solution: La sphère de rayon R est obtenue par rotation du demi-cercle $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ entre $x = -R$ et $x = R$, donc

$$\sqrt{1+(f'(x))^2} = \sqrt{1+(\frac{-2x}{2\sqrt{R^2-x^2}})^2} = \sqrt{\frac{R^2-x^2+x^2}{R^2-x^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}},$$

alors

$$S = \int_{-R}^{R} 2\pi\sqrt{(R^2-x^2)}\sqrt{1+(((R^2-x^2))')^2}dx$$
$$= \int_{-R}^{R} 2\pi\sqrt{(R^2-x^2)}\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}dx = \int_{-R}^{R} 2\pi R dx = 2\pi Rx]_{-R}^{R} = 2\pi R(R-(-R)) = 4\pi R^2,$$

$$V = \int_{-R}^{R} \pi y^2 = \int_{-R}^{R} \pi(R^2-x^2)dx$$
$$= \pi R^2\int_{-R}^{R} dx - \pi\int_{-R}^{R} x^2 dx$$
$$= \pi R^2 x]_{-R}^{R} - \pi\frac{1}{3}x^3\Big]_{-R}^{R}$$
$$= \pi R^2(R-(-R)) - \pi\frac{1}{3}(R^3-(-R)^3)$$
$$= 2\pi R^3 - \frac{2\pi}{3}R^3 = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

■

Théorème 5.4.2 L'aire (la surface) de la sphère de rayon R est égale à

$$S = 4\pi R^2,$$

Le volume d'une boule de rayon R est égal à

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

■ **Exemple 5.21 — Trompette de Gabriel.** La Trompette de Gabriel ou solide hyperbolique aigu est une figure inventée par Evangelista Torricelli possédant une aire infinie mais un volume fini. La trompette de Gabriel est engendrée par rotation de $y = \frac{1}{x}$ sur $[1, +\infty[$. Son volume est donné par la formule :

$$V = \pi\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx = \pi,$$

L'aire est ∞ parce que:

$$A = 2\pi \int_1^\infty \frac{1}{x}\sqrt{1+\left(-\frac{1}{x^2}\right)^2}\,\mathrm{d}x > 2\pi \int_1^\infty \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \infty.$$

■

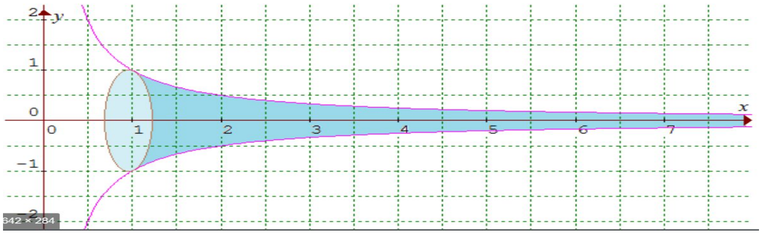


Figure 5.9: Trompette de Gabriel ou d'Evangelista Torricelli

Exercices

Exercice 5.5 Calculez le volume des solides générés par la rotation autour de l'axe des x des courbes suivantes :

a) $f(x) = x^2$ avec $x \in [0,3]$
b) $f(x) = x - 3$ avec $x \in [3,4]$
c) $f(x) = 3\sqrt{x}$ avec $x \in [1,4]$
d) $f(x) = xe^{\frac{x}{2}}$ avec $x \in [0,1]$

■

Exercice 5.6 Calculez l'aire latérale de la surface générée par la rotation autour de l'axe des x des courbes suivantes :

a) $f(x) = x^3$ avec $x \in [0,1]$
b) $f(x) = 2x$ avec $x \in [0,1]$
c) $f(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}$ avec $x \in [1,3]$

■

6. Suites et séries

6.1 Les suites

Définition 6.1.1 — Suite. On appelle suite réelle une application $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto u_n$. On note une telle application $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

■ **Exemple 6.1** Elle peut s'exprimer à l'aide d'une fonction $u_n = f(n)$,

$$\{a_n = 2^n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{1,2,4,8,16,...\}$$
$$\{b_n = n^2\}_{n\in\mathbb{N}} = \{0,1,4,9,16\}$$
$$\{c_n = n^n\}_{n\in\mathbb{N}^+} = \{1,4,27,256,...\}$$
$$\{d_n = 2^{-n}\}_{n\in\mathbb{N}} = \{1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16},...\}$$
$$\{e_n = \frac{n}{n+1}\}_{n\in\mathbb{N}} = \{0,\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},...\}$$
$$\{f_n = (-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{1,-1,1-1,...\}$$

■

■ **Exemple 6.2** Elle peut s'exprimer par récursion
1) $F_1 = F_2 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ pour $n \geq 3$, (Fibonacci)

$$\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}^+} = \{1,1,2,3,5,8,13,21,...\}.$$

2) $R_0 = 1$, $R_{n+1} = \sqrt{1+R_n}$ pour $n \geq 0$

$$\{R_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{1,\sqrt{2},\sqrt{1+\sqrt{2}},\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{2}}},...\}.$$

■

■ **Exemple 6.3** Trouvez le terme général a_n des suites suivantes:
a) $\{a_n\} = \{1,4,7,10,...\}$
b) $\{b_n\} = \{5,3,1,-1,...\}$
c) $\{c_n\} = \{1,1,2,6,24,120,...\}$
d) $\{d_n\} = \{1,3,9,27,81,...\}$
e) $\{e_n\} = \{2,3,5,9,...\}$
f) $\{f_n\} = \{-1,\frac{1}{2},-\frac{1}{3},\frac{1}{4},...\}$
Solution:
a) $\{a_n = 1+3n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ou $\{a_n = -2+3n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$
b) $\{b_n = 5-2n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ou $\{a_n = 7-2n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$
c) $\{c_n = n!\}_{n\in\mathbb{N}}$
d) $\{d_n = 3^n\}_{n\in\mathbb{N}}$
e) $\{e_n = 2^n+1\}_{n\in\mathbb{N}}$
f) $\{f_n = \frac{(-1)^n}{n}\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ ■

Définition 6.1.2 — Suite croissante-décroissante. Une suite $\{u_n\}$ est appelée
Croissante si $u_n \leq u_{n+1}$ pour tout n
Décroissante si $u_n \geq u_{n+1}$ pour tout n.
Une suite est **monotone** si elle est croissante ou décroissante.

■ **Exemple 6.4** Déterminez si les suites suivantes sont monotones croissantes ou décroissantes:
a) $\{a_n = n\}_{n\in\mathbb{N}}$
b) $\{b_n = \frac{1}{n+1}\}_{n\in\mathbb{N}}$
c) $\{c_n = (-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$
d) $\{d_n = \frac{2^n}{n!}\}_{n\in\mathbb{N}}$
Solution: a) $a_n = n < n+1 = a_{n+1}$, donc $\{a_n\}$ est croissante.
b) $b_n = \frac{1}{n+1} > \frac{1}{n+2} = a_{n+1}$, donc $\{a_n\}$ est décroissante.
c) $\{c_n = (-1)^n\}$ n'est pas monotone, car elle oscille entre -1 et 1.
a) $d_n = \frac{2^n}{n!}$ est décroissante, car

$$\frac{d_{n+1}}{d_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \frac{2^{n+1}}{2^n}.\frac{n!}{(n+1)!} = 2.\frac{1}{n+1} = \frac{2}{n+1} < 1,$$

donc $d_{n+1} < d_n$ et d_n est décroissante. ■

Définition 6.1.3 — Suite bornée. Une suite $\{u_n\}$ est dite bornée s'il existe un nombre M tel que $|a_n| \leq M$ pour tout n.

■ **Exemple 6.5** Déterminez si les suites suivantes sont bornées ou non bornées:
a) $\{a_n = n\}_{n\in\mathbb{N}}$
b) $\{b_n = \frac{1}{n+1}\}_{n\in\mathbb{N}}$
c) $\{c_n = (-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$
Solution: a_n n'est pas bornée, mais b_n et c_n sont bornées, car $|b_n| \leq 1$ et $|c_n| = 1 \leq 1$. ■

Définition 6.1.4 — Limite d'une suite. La limite L d'une suite $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ existe lorsque les termes u_n peuvent être rendus aussi proche que l'on veut de L en prenant n suffisamment grand. Dans ce cas, on écrit $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = L$ ou $u_n \to L$ lorsque $n \to \infty$.
Si $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ an existe, la suite converge. Sinon elle diverge.

Théorème 6.1.1 — Propriétés de la limite. Soit $\{a_n\}$ et $\{a_n\}$, deux suites convergentes. Soit $c \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}(ca_n) &= c\lim_{n\to\infty} a_n \\
\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) &= \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n \\
\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n) &= \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n \\
\lim_{n\to\infty}(a_n.b_n) &= (\lim_{n\to\infty} a_n).(\lim_{n\to\infty} b_n) \\
\lim_{n\to\infty}(\frac{a_n}{b_n}) &= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}, \text{ si } \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0.
\end{aligned}$$

■ **Exemple 6.6** Trouvez la limite, si les suites suivantes convergent.
a) $a_n = \sqrt{n+1}+\sqrt{n}$
b) $b_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$
c) $c_n = \dfrac{2+3^n}{5^n}$

Solution: a) $a_n = \sqrt{n+1}+\sqrt{n}$ est divergente car

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}) = +\infty+\infty = +\infty.$$

b) $b_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ est convergente car

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = (\sqrt{n+1}-\sqrt{n}).\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}},$$

alors

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

c) $b_n = \dfrac{2+3^n}{5^n}$ est convergente car

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2+3^n}{5^n} = 2\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{5})^n + \lim_{n\to\infty}(\frac{3}{5})^n = 2(0)+0 = 0.$$

■

Remarque 6.1.2 Notez que

- (Théorème): Toute suite convergente est bornée.
- Il existe des suites bornées qui ne convergent pas. Par exemple $\{(-1)^n\}$.
- Il existe des suites monotones qui ne convergent pas. Par exemple $\{n^2\}$.
- Il existe des suites convergentes qui sont non monotones. Par exemple $\{\dfrac{(-1)^n}{n}\}$.
- (Théorème): Toute suite bornée et monotone est convergente.

Théorème 6.1.3 — Théorème du sandwich. Si $a_n \leq b_n \leq c_n$ pour $n \geq n_0$ et $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n$, alors b_n est convergente et

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n.$$

■ **Exemple 6.7** Déterminez si les suites suivantes convergent ou divergent en utilisant le théorème du sandwich:

a) $\{\dfrac{\sin n}{n}\}$

b) $\{\dfrac{\sin\dfrac{2\pi}{n!}}{\sqrt[5]{n^3+2n+1}}\}$

Solution: Nous savons que $-1 \leq \sin(\theta) \leq 1$ pour chaque θ, donc

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n},$$

alors $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\sin n}{n} = 0$ car $\lim_{n\to\infty} \dfrac{-1}{n} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

De même

$$-\frac{1}{\sqrt[5]{n^3+2n+1}} \leq \frac{\sin\dfrac{2\pi}{n!}}{\sqrt[5]{n^3+2n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt[5]{n^3+2n+1}},$$

alors $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\sin n}{n} = 0$ car $\lim_{n\to\infty} \dfrac{-1}{\sqrt[5]{n^3+2n+1}} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[5]{n^3+2n+1}} = 0$.

■

Exercices

Exercice 6.1 Déterminez si les suites suivantes sont convergentes ou divergentes :

a) $\left\{\dfrac{n^4+n^2}{3n^5+1}\right\}$

b) $\left\{\dfrac{\ln(n)}{n^3}\right\}$

c) $\left\{\dfrac{1+n^4}{e^n}\right\}$

d) $\left\{e^{\sin(\frac{1}{n})}\right\}$

e) $\left\{\mathrm{Arctan}(n^2)\right\}$

f) $\left\{\dfrac{(-1)^n}{n^2}\right\}$

g) $\{1,2,3,1,2,3,\ldots\}$

h) $\{\sqrt{n^2+7}-n\}$ ■

Exercice 6.2 Trouvez le terme général a_n des suites suivantes et déterminez, en évaluant la limite, si les suites convergent ou divergent :

a) $\left\{\dfrac{1}{3},\dfrac{8}{9},1,\dfrac{64}{81},\dfrac{125}{243},\ldots\right\}$

b) $\left\{\dfrac{3}{2},\dfrac{5}{4},\dfrac{9}{8},\dfrac{17}{16},\dfrac{33}{32},\ldots\right\}$

c) $\left\{1,\dfrac{3}{2},\dfrac{7}{3},\dfrac{15}{4},\dfrac{31}{5},\ldots\right\}$

d) $a_1 = 1$ et $a_{n+1} = n\cdot a_n$ pour $n \geqslant 1$

e) $a_1 = 1$ et $a_n = \left(\dfrac{-1}{3}\right)\cdot a_{n-1}$ pour $n \geqslant 2$ ■

Exercice 6.3 Déterminez si les suites suivantes convergent ou divergent en utilisant le théorème du sandwich :

a) $\left\{\dfrac{\sin(n)}{n}\right\}$ b) $\left\{\dfrac{(-1)^n}{n}\right\}$ ■

Exercice 6.4 Déterminez si les suites suivantes sont monotones croissantes ou décroissantes :

a) $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$

b) $\left\{\dfrac{-1}{n+\pi}\right\}$

c) $\left\{\dfrac{n}{e^n}\right\}$

d) $\{(2n-9)^2\}_{n\geqslant 5}$

e) $\left\{\dfrac{2^n}{n!}\right\}$ ■

6.2 Les séries

Définition 6.2.1 Soit u_k une suite, la somme

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k,$$

est appelée **somme partielle de la série de terme général** u_k.

On dit que la série de terme général u_k, i.e. $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ est convergente, si la suite $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ est convergente et

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k,$$

Motivation: Est-ce que les séries suivantes convergent ou divergent?

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots = ?$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \ldots = ?$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots = ?$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3+1}{5k^3+2} = \frac{2}{7} + \frac{9}{42} + \frac{28}{137} + \frac{82}{407} + \frac{244}{1217} + \ldots = ?$$

■ **Exemple 6.8** La série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ est appelée la série harmonique et est divergente, puisque

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \cdots \\
&\geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{\mathbf{4}} + \frac{1}{4} + \frac{1}{\mathbf{8}} + \frac{1}{\mathbf{8}} + \frac{1}{\mathbf{8}} + \frac{1}{8} + \frac{1}{\mathbf{16}} + \cdots \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots = \infty
\end{aligned}$$

■

Théorème 6.2.1 — Condition nécessaire mais pas suffisante pour convergence. Si la série $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ converge, alors le terme général u_k tend vers 0.

■ **Exemple 6.9** La série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3+1}{5k^3+2}$ diverge, puisque la limite du terme général est égale à

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k^3+1}{5k^3+2} = 3 \neq 0.$$

■

Théorème 6.2.2 — La série géométrique (rappel). Pour une constante r nous avons:

$$1+r+r^2+r^3+\ldots+r^n = \sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1-r^{k+1}}{1-r},$$

alors, la série $\sum_{k=0}^{\infty} r^k$ converge vers $\frac{1}{1-r}$ si $|r|<1$ et diverge si $|r| \geq 1$.

■ **Exemple 6.10** Déterminez si les séries suivantes convergent ou divergent

a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$

b) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-3)^{k-1}}{4^k}$

b) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\pi^k}{3^{k+1}}$

Solution:

a) Pour $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k$, $|r| = |\frac{1}{2}| < 1$, alors la série converge vers $\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$, i.e,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots = 2$$

b) Pour $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-3)^{k-1}}{4^k} = \frac{1}{-3}\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-3}{4}\right)^k$, $|r| = |\frac{-3}{4}| < 1$, alors la série converge vers

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-3)^{k-1}}{4^k} = \frac{1}{-3}\frac{1}{1-\frac{-3}{4}} = \frac{1}{-3}\frac{7}{4} = -\frac{7}{12}.$$

c) Pour $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\pi^k}{3^{k+1}} = \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\pi}{3}\right)^k$, $|r| = |\frac{\pi}{3}| \geq 1$, alors la série est divergente. ■

■ **Exemple 6.11** Exprimer le nombre $0.\overline{9}$ en fraction.

Solution:

$$\begin{aligned} 0.\overline{9} &= 0.9+0.09+0.009+\ldots \\ &= \frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\frac{9}{1000}+\ldots \\ &= 9\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^k = 9\left(\frac{1}{1-\frac{1}{10}}-1\right) = 9\left(\frac{10}{9}-1\right) = 1. \end{aligned}$$

■

Théorème 6.2.3 — Le critère intégral de Cauchy.

$$\int_{2}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \sum_{k=2}^{+\infty} f(k) \leq \int_{1}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

■ **Exemple 6.12** La série harmonique $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ est divergente, puisque $f(x) = \frac{1}{x}$ est positive et décroissante sur l'intervalle $[1,+\infty[$ et $\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ est divergente. ■

■ **Exemple 6.13** La série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ est convergente, puisque $f(x) = \frac{1}{x^2}$ est positive et décroissante sur l'intervalle $[1,+\infty[$ et $\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ est convergente.

En général, la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$ est convergente pour $s > 1$ et $\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$ est appelé la fonction zêta de Riemann.

$$\zeta(2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\zeta(4) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

$\zeta(3) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} = 1.20205\ldots$ est appelée constante d'Apéry et est irrationnelle, on en connaîssait 10^{12} décimales en juin 2019. ■

■ **Exemple 6.14** La série $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln n!}$ est divergente. Notez que

$$\frac{1}{n\ln n} < \frac{1}{\ln n!} = \frac{1}{\ln 1 + \ln 2 + \ldots + \ln n},$$

La série $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\ln n}$ est divergente, puisque $f(x) = \frac{1}{x\ln x}$ est positive et décroissante sur l'intervalle $[2,+\infty[$ et $\int_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x} = \ln(\ln x)]_{2}^{+\infty} = +\infty$ est divergente. Alors $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln n!}$ est divergente aussi. ■

Exercices

Exercice 6.5 Déterminez si les séries suivantes convergent ou divergent. Si elles convergent, trouvez leurs valeurs:

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-3)^{k-1}}{4^k}$

b) $\sum_{k=1}^{\infty} e^{2-k}$

c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\pi^k}{3^{k+1}}$

d) $\sum_{k=1}^{\infty} 4^{2k} \cdot 5^{1-k}$

e) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3+1}{5k^3+2}$

f) $\sum_{k=1}^{\infty} 3^{2-2k}$

g) $\sum_{k=1}^{\infty} (2+3k)$

h) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^k}{k}$

■

Exercice 6.6 Utilisez le critère de l'intégrale pour déterminer si les séries convergent ou divergent:

a) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\ln(k)}$

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^5}$

c) $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 e^{-k^3}$

d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$

e) $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{17} + \dots$

f) $\frac{1}{e} + \frac{2}{e^4} + \frac{3}{e^9} + \frac{4}{e^{16}} + \dots$

■

Bibliography

Articles

Books

CHARRON, Gilles et PARENT, Pierre. Calcul Intégral. 5e édition, Montréal, Chenelière Éducation, 2015, 504p.

Index