Амсилаи класикии SIR

Бемориҳои сироятӣ ва паҳншавии онҳо як зуҳуроти мураккаб бо омилҳои бо ҳам алоқаманд мебошад. Барои муайян намудани дурнамои омилҳои бемориҳои сироятӣ амсилаҳои математикиро истифода намудан имконпазир аст. Амсилаҳои математикӣ барои муайян намудани динамикаи мураккаби паҳншавии беморҳои сироятӣ заминаи мусоидро фароҳам меоранд. Дар ин қисмат мо амсилаи классикии SIR-ро мавриди омӯзиш қарор медиҳем.

- Дар амсилаи классикии SIR (аз забони инглисӣ **Susceptibl**e-ҳассос-солим, **Infected** –сироятшуда, **Removed**-хориҷшуда) ба се гурӯҳ тақсим мешавад: ҳассос-солим S (t), сироятӣ I (t) ва хориҷшуда R (t):

- ***S*(*t*)-**шахсони солим;
- ***I*(*t*)** –шахсони сироятшуда, ки қобилияти паҳн кардани бемориро доранд;
- ***R*(*t*)** -шахсоне, ки дар натиҷаи солимшавӣ ва ё марг аз гурӯҳ хориҷ шудаанд.

- Популятсияро дар чунин намуд ҳисоб мекунем:

- $S(t) + I(t) + R(t) = constant = N.$

SIR- амсиларо бе назардошти таваллуд ва фавт тавассути маҷмӯи муодилаҳои дифференсиалии муқаррарӣ дар бар мегирад, яъне:

$$\begin{cases} \dfrac{dS(t)}{dt} = -\dfrac{\beta S(t)I(t)}{N} \\ \dfrac{dI(t)}{dt} = -\dfrac{\beta S(t)I(t)}{N} - \gamma I(t) \qquad (4.4.1.) \\ \dfrac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t) \end{cases}$$

Системаи муодилаҳои (4.4.1.)-ро системаи Камек-Макендрик меноманд (Kermack, W. O. ва A. G. McKendrick, 1927).

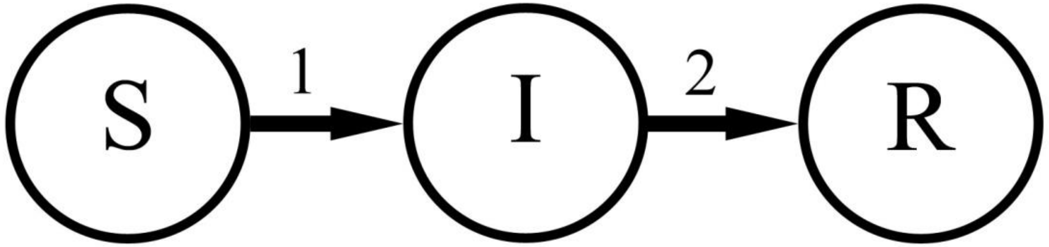
Дар инҷо β - коэффитсиент, ки он метавонад бо суръат, бо назардошти эҳтимолиятӣ гирифтор шудан ба беморӣ, ҳангоми тамос бо шахси бемор ба вуҷуд ояд;

$\gamma = 1/t$, t - вақти беморӣ, коэффитсиентро ҳамчун суръати барқароршавӣ бо қимати аввалаи $t = 0$, дар бар мегирад.

- $S(0) = S_0 > 0, I(0) = I_0 > 0, R(0) = R_0 > 0$

Тарафи рости муодилаи якуми система кам шудани шумораи аҳолии солимро бо сабаби сирояти шуданашон нишон медиҳад. Тарафи рости муодилаи дуюми системаи (4.4.1.) бошад афзоиши шумораи шахсони сироятшударо тасвир мекунад. Тарафи рости муодилаи сеюм бошад, камшавии шумораи сироятёфтагонро бо барқароршавӣ ё марги шахсони алоҳида тавсиф мекунад.

Дар нақша ба таври равшан гузариш аз як сатҳ ба сатҳи дигар нишон дода шудааст.



Расми 4.4.1. Нақшаи умумии гузариш аз як сат ҳ ба сат ҳи дигар. S – солим, I -сироят ёфт а, R -хориҷшуда.

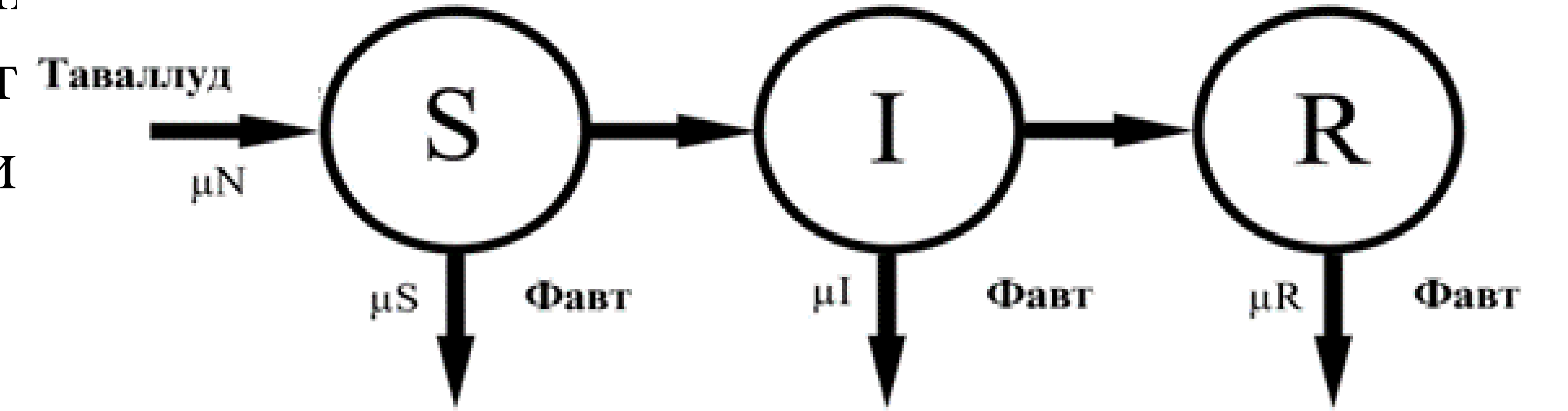
Ҷадвали 1. Ҷадвали гузариши амсилаи SIR.

№	Гузариш	Суръати гузариш
1	$(S,I) \rightarrow (S-1,\ I+1)$	$(\beta SI)/N$
2	$(I,R) \rightarrow (I-1, R+1)$	γI

Бояд қайд намуд, ки суммаи тарафи рости муодилаҳои системаи (4.4.1.) ба сифр баробар аст, аз инҷо бар меояд, ки популятсияи беморон бетағйир боқӣ монад. Ин яке аз хусусияти муҳими ин амсила аст. Барои нигоҳ доштани ин хусусият, шахсони солимшуда ва фавтидагон ба сатҳи дахлнопазирӣ меафтанд. Ин як роҳи мантиқии ҳал аст, зеро дар ҳарду ҳолат шахс ба дигарон сироят карда наметавонад.

• Система (4.4.1.) хаттӣ нест ва қобили таҳлил нест. Бинобар ин мо якчанд методи ададиро барои ҳалли ин системаи муодилаҳои дифференсиалӣ дида мебароем.

• Инчунин, дар амсилаи классикии SIR, ки дар боло оварда шудааст, метавонад мисоли воридшавии тавл … шавии фавт … назар гири



Фарз мекунем, ки $1/\mu$ - миёнаи умумии умр аст. Дар ин ҳолат амсила метавонад бо маҷмӯи муодилаҳои дифференсиалии зерин навишта шавад:

$$\begin{cases} \dfrac{dS(t)}{dt} = -\dfrac{\beta S(t)I(t)}{N} + \mu N - \mu S(t) \\ \dfrac{dI(t)}{dt} = -\dfrac{\beta S(t)I(t)}{N} - \gamma I(t) - \mu I(t) \\ \dfrac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t) - \mu R(t) \end{cases} \quad (4.4.2)$$

Бо қиматҳои аввала дар ҳолати $t = 0$:

$$\bullet S(0) = S_0 > 0,\ I(0) = I_0 > 0,\ R(0) = R_0 > 0$$

Барои фаҳмо шудани амсила, мо ҳалли ададии онро ҷустуҷӯ менамоем. Барои ин, аз забони обектгарои C# истифода менамоем. Барои ҳалли ададии системаҳои муодилаҳои дифференсиалии оддӣ аз формулаҳои тартиби чорум ва панҷуми Ранге-Кутта истифода мебарем.

Ба сифати параметрҳо $\beta = 0.128$, $\gamma = 0.0963$ ва вақтро 365 рӯз интихоб мекунем. Миқдори умумии популятсия $N = 6380000$. Ҳолати паҳншавии беморӣ $I(0) = I0 > 0$. Қиматҳои аввала $S(0) = S0$, $I(0) = I0$, $R(0) = R0$, шумораи сироятшудагон ба андозаи фоизи шумораи умумии аҳолӣ гирифта мешавад.