Najma Lail Arazy 27 November 2025

EIGEN VALUE

Eigen Vector, Power Matrix

ALJABAR LINIER

Eigen Value

Eigen Value

Rumus:
det (λ . I - A) = 0 ⟶ persamaan karakteristik A
Keterangan:
- λ = eigen value
- I = matriks identitas
- A = matriks ⇒ diketahui di soal
- Mencari det disarankan menggunakan kofaktor dengan baris atau kolom yang memiliki banyak angka nol.

matriks identitas

$3\times 3 = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$ $2\times 2 = \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}$

Tips:
Jika diketahui dalam bentuk polinomial. Determinan dicari menggunakan cara horner.

ALJABAR LINIER 2

Contoh soal 1

Carilah nilai eigen dari matrix A

	-1	4	-2
A =	-3	4	0
	-3	1	3

$$(\lambda I - A) = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 1 & -4 & 2 \\ 3 & \lambda - 4 & 0 \\ 3 & -1 & \lambda - 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{Det } (\lambda I - A) = \begin{bmatrix} \lambda + 1 & -4 & 2 \\ 3 & \lambda - 4 & 0 \\ 3 & -1 & \lambda - 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \lambda + 1 & -4 \\ 3 & \lambda - 4 \\ 3 & -1 \end{matrix}$$

$$= ((\lambda + 1)(\lambda - 4)(\lambda - 3)) + (-4.0.3) + (2.3.-1) - (3.(\lambda - 4).2) - (-1.0.(\lambda + 1) - ((\lambda - 3).3.-4)$$

$$= ((\lambda^2 - 3\lambda - 4)(\lambda - 3)) - 6 - 6\lambda + 24 + 12\lambda - 36$$

$$= \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6$$

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & -6 & 11 & -6 \\ & & 2 & -8 & 6 \; + \\ \hline & \boxed{1 \quad -4 \quad 3} & & & 0 \end{array}$$

horner

$x = 2 \Rightarrow x - 2 = 0$

$$(\lambda - 2)(\lambda^2 - 4\lambda + 3) = 0$$

$$(\lambda - 2)(\lambda - 3)(\lambda - 1) = 0$$

Akar-akar persamaannya adalah $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 1$, inilah nilai eigen matrik A

Referensi: https://widyanurfadhilllah.blogspot.com/2018/11/nilai-eigen-dan-vektor-eigen.html

Eigen Vector

Rumus:

(λ . I - A) . X = 0

Keterangan:

- λ = eigen value
- I = matriks identitas
- A = matriks
- X = X1, X2, X3

Tips:

Mengganti lamda dengan semua eigen value yang telah ditemukan.

Permisalan dimulai dari index terbesar X3, X2, X1 untuk mendapatkan hasil akhir eigen vektor.

Eigen Vector

Contoh soal 2

Carilah vector eigen dari matrix A

	-1	4	-2
A =	-3	4	0
	-3	1	3

Vektor eigen x dari A diperoleh dari:

$(\lambda I - A)x = 0$

$$\begin{bmatrix} \lambda+1 & -4 & 2 \\ 3 & \lambda-4 & 0 \\ 3 & -1 & \lambda-3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Untuk $\lambda = 1$, diperoleh SPL

$$\begin{bmatrix} 1+1 & -4 & 2 \\ 3 & 1-4 & 0 \\ 3 & -1 & 1-3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Untuk $\lambda = 2$, diperoleh SPL

$$\begin{bmatrix} 2+1 & -4 & 2 \\ 3 & 2-4 & 0 \\ 3 & -1 & 2-3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Untuk $\lambda = 3$, diperoleh SPL

$$\begin{bmatrix} 3+1 & -4 & 2 \\ 3 & 3-4 & 0 \\ 3 & -1 & 3-3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\lambda = 1$

$3x_1 - 3x_2 = 0$

$3x_1 = 3x_2 \rightarrow$ misal $\boxed{x_2 = t}$

$\boxed{x_1 = t}$

$2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0$

$2x_3 = -2t + 4t$

$2x_3 = 2t$

$\boxed{x_3 = t}$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ t \\ t \end{bmatrix} = \boxed{t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}} \quad \lambda = 1$$

$\lambda = 2 \Rightarrow \frac{2}{3}, 1, 1$

$\lambda = 3 \Rightarrow \frac{1}{3}, 1, \frac{4}{3}$

Referensi: https://widyanurfadhilllah.blogspot.com/2018/11/nilai-eigen-dan-vektor-eigen.html

Power Matrix

Power Matrix

Rumus:
A^k = P . D^k . P^-1
Keterangan:
P = kumpulan dari vector eigen A
D = P^-1 . A . P ⟶ menghasilkan matrix diagonal
D^k = matrix D yang diagonalnya dipangkatkan k

Matrix $A \rightarrow \lambda, X$

Matrix $A^k \rightarrow \lambda^k, X$

Simbol:
k = bilangan integer positif
λ = eigen value matrix A
λ^k = eigen value matrix A^k
X = eigen vector matrix A

Power Matrix

Contoh soal 3

Carilah P^-1 dengan menggunakan OBE

Urutan matrix P adalah :

a.kolom 1 nilai eigen terkecil $\lambda = 1 \Rightarrow (1, 1, 1)$

b.kolom 2 nilai eigen terkecil berikutnya $\lambda = 2 \Rightarrow (\frac{2}{3}, 1, 1)$

c.kolom 3 nilai eigen terbesar $\lambda = 3 \Rightarrow (\frac{1}{3}, 1, \frac{4}{3})$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \left.\begin{matrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \frac{4}{3} \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

menggunakan OBE

$$P^{-1} = \left.\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix}$$

Power Matrix

Contoh soal 4

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 8 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{vmatrix}$$

Ditanya :

1. Nilai eigen. Catt : carilah determinan dengan menggunakan kofaktor kolom ke-2
2. Vektor Eigen
3. Carilah A^3 dengan menggunakan vektor eigen
   Catt :
   a. Urutan matrix P adalah :
      1. Kolom 1 ➔ nilai eigen terkecil
      2. Kolom 2 ➔ nilai eigen terkecil berikutnya
      3. Kolom 3 ➔ nilai eigen terbesar
   b. Cari P^{-1} dengan menggunakan OBE
   c. $A^k = P \cdot (D^k \cdot P^{-1})$ $\quad A^3 = P \cdot (D^3 \cdot P^{-1})$
      Hitung dulu $D^k \cdot P^{-1}$, setelah itu baru dikalikan dengan P
   d. $D = P^{-1} \cdot (A \cdot P)$
      Hitung dulu A . P, setelah itu baru di kalikan P^{-1}

$$P = \begin{vmatrix} -\frac{4}{3} & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

nilai eigen = $\det(\lambda . I - A)$

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 8 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-3 & -8 & 0 \\ -3 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-8 \end{vmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} \lambda-3 & -8 & 0 \\ -3 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-8 \end{pmatrix} = \begin{matrix} \lambda = -3 \\ \lambda = 7 \\ \lambda = 8 \end{matrix}$$

vektor eigen

$\lambda . I - A . X = 0$

$$\begin{pmatrix} \lambda-3 & -8 & 0 \\ -3 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

untuk $\lambda = -3 \Rightarrow (-\frac{4}{3}, 1, 0)$

untuk $\lambda = 7 \Rightarrow (2, 1, 0)$

untuk $\lambda = 8 \Rightarrow (0, 0, 1)$

cari P^{-1}

hitung $A \cdot P = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Power Matrix

Contoh soal 5

Temukan A^13 untuk matrix A

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Cari eigen value
2. Cari eigen vector
3. Cari matrix P
4. Cari $D = P^{-1} \cdot (A \cdot P)$
5. Cari $A^{13} = P \cdot (D^{13} \cdot P^{-1})$

ALJABAR LINIER 9

Najma Lail Arazy 27 November 2025

TERIMA KASIH

Tetap semangat dan sampai jumpa

ALJABAR LINIER