Álgebra linear algorítmica

S. C. Coutinho

Este arquivo reúne as provas do curso *álgebra linear algorítmica* (MAB 115) oferecido pelo Departamento de Ciência da Computação da UFRJ.

Primeira Prova–2010/1

1. Seja ρ_θ uma rotação anti-horária de um ângulo θ no plano. Para quais valores de θ a matriz de ρ_θ é simétrica?

2. Seja R uma reflexão do plano. Sabendo-se que
$$R(1,3) = -\frac{1}{169}(241,477),$$
determine:
   (a) a reta em torno da qual se dá esta reflexão, isto é o espelho de R;
   (b) um vetor unitário perpendicular a esta reta;
   (c) a matriz de R.

3. Para que valores de k o sistema
$$\begin{cases} x - ky + z & = 0 \\ kx + (1-k^2)y + (1+k)z & = k \\ kx - ky + z & = 1-k \end{cases}$$
é (a) determinado, (b) indeterminado ou (c) impossível.

4. Sejam W_1 e W_2 os seguintes subespaços de $\mathbb{R}^5$:
$$W_1 = \{(x,y,u,w,z) \,|\, x+y-w+z = x+3u+z = x-y+6u+w+z = 0\};$$
$$W_2 = \langle (1,0,1,0,0), (0,1,-1,0,1), (0,0,1,0,-1), (1,1,1,0,0) \rangle$$
   (a) Determine uma base e a dimensão de W_1.
   (b) Determine uma base e a dimensão de W_2.
   (c) O vetor $(4,5,2,0,2)$ pertence a W_2?
   (d) É verdade que $W_1 \cap W_2 = \{0\}$?
   (e) Determine um espaço complementar de W_1 em $\mathbb{R}^5$.

Resolução

1. A matriz de uma rotação é da forma

$$(\rho_\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

e sua transposta é

$$(\rho_\theta)^t = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \operatorname{sen}(\theta) \\ -\operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}.$$

Igualando as duas, não obtemos nenhuma restrição sobre $\cos(\theta)$. Por outro lado,

$$-\operatorname{sen}(\theta) = \operatorname{sen}(\theta),$$

donde $\operatorname{sen}(\theta) = 0$. Portanto, $\theta = \pi k$ para algum $k \in \mathbb{Z}$ é a resposta.

2. (a) Como v e $R(v)$ são simétricos em relação ao espelho, temos que $v + R(v)$ é um vetor sobre o espelho. Neste caso,

$$v + R(v) = \frac{1}{169}(-72, 30).$$

Portanto, o espelho tem como vetor diretor

$$\frac{1}{169}(-72, 30) = \frac{6}{169}(-12, 5);$$

ou, o que é mais simples, o próprio vetor $(-12, 5)$.

(b) O vetor $(5, 12)$ é perpendicular ao espelho porque tem produto interno nulo com $(-12, 5)$. Como $(5, 12)$ têm norma 13, concluímos que

$$u = \frac{1}{13}(5, 12),$$

é um vetor unitário perpendicular ao espelho.

(c) A matriz desta reflexão é dada por

$$I - 2u \cdot u^t = \frac{1}{169}\begin{bmatrix} 119 & -120 \\ -120 & -119 \end{bmatrix}.$$

3. A matriz aumentada do sistema é

$$\begin{bmatrix} 1 & -k & 10 & \\ k & 1-k^2 & 1+k & k \\ k & -k & 1 & 1-k \end{bmatrix}.$$

Aplicando eliminação gaussiana a esta matriz obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & -k & 10 & \\ 0 & 1 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1-k^2 & -k^3+k^2-k+1. \end{bmatrix}.$$

Portanto, se $1-k^2 \neq 0$ o sistema é determinado. isto corresponde a dizer que $k \neq \pm 1$. Por outro lado, se $k=1$, então

$$-k^3+k^2-k+1 = -1+1-1+1 = 0,$$

e o sistema é indeterminado, ao passo que se $k=-1$ temos

$$-k^3+k^2-k+1 = 1+1+1+1 = 4,$$

e o sistema é impossível. Resumindo, o sistema é

- determinado se $k \neq \pm 1$;
- indeterminado se $k = 1$;
- impossível se $k = -1$.

4. (a) A matriz do sistema cuja solução é W_1 é

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 6 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

cuja forma escada é

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

que corresponde ao sistema

$$\begin{aligned} x+y-w+z &= 0 \\ y-3u-w &= 0 \end{aligned}$$

cuja solução pode ser parametrizada na forma

$$(x,y,u,w,z) = (-z-3u, 3u+w, u, w, z)$$

que também podemos escrever como

$$(x,y,u,w,z) = u(-3,3,1,0,0) + w(0,1,0,1,0) + z(1,0,0,0,1).$$

Portanto,

$$W_1 = \langle (-3,3,1,0,0),(0,1,0,1,0),(-1,0,0,0,1)\rangle.$$

Para saber se esta é uma base, precisamos verificar se estes vetores são linearmente independenes. Contudo, para fazer isto basta igualar

$$u(-3,3,1,0,0)+w(0,1,0,1,0)+z(1,0,0,0,1)=(z-3u,3u+w,u,w,z)$$

a zero, o que nos dá diretamente $u=w=z=0$. Portanto, estes vetores são linearmente independentes; donde

$$\{(-3,3,1,0,0),(0,1,0,1,0),(-1,0,0,0,1)\}$$

é uma base de W_1 e sua dimensão é 3.

(b) Passando, agora, a W_2, devemos aplicar eliminação gaussiana à matriz cujas linhas são os vetores que geram W_2, que é

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

o que nos dá a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como os vetores não nulos que sobraram nas linhas da matriz estão em forma escada, têm que ser linearmente independentes, donde

$$\{(1,0,1,0,0),(0,1,0,0,0),(0,0,1,0,-1)\}$$

é uma base de W_2 e sua dimensão é 3.

(c) A maneira mais fácil de determinar se $(4,5,2,0,2)$ pertence a W_2 é aplicar eliminação gaussiana à matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 5 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

. Fazendo isto obtemos uma matriz cuja última linha é, de fato, nula, de modo que o vetor pertence a W_2.

(d) Se a interseção fosse nula, então a união das bases de W_1 e W_2 seria uma base de $W_1 + W_2 \subseteq \mathbb{R}^5$. Entretanto,

$$\dim(W_1) + \dim(W_2) = 6 > \dim(\mathbb{R}^5),$$

o que não pode acontecer. Logo, a interseção é diferente de zero.

(e) Para achar um espaço complementar a W_1, juntamos à base já obtida de W_1 os vetores da base canônica de $\mathbb{R}^5$ e aplicamos eliminação gaussiana para ver quais destes vetores são linearmente independentes com

$$\{(-3, 3, 1, 0, 0), (0, 1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 0, 1)\}.$$

Fazendo isto verificamos que as três últimas linhas se anulam, de modo que os vetores e_3, e_4 e e_5 são dependentes dos demais. Logo, e_1 e e_2 são independentes da base dada para W_1. Assim, um complementar possível para W_1 é o subespaço $\langle e_1, e_2 \rangle$.

1. Seja T um operador auto-adjunto de $\mathbb{R}^2$. Sabe-se que:
   (a) os autovalores de T são 2 e 3;
   (b) o auto-espaço de 2 é gerado por $(1,1)$.

   Determine a matriz de T na base canônica.

2. Considere o operador linear T de $\mathbb{R}^3$ definido por
$$T(x,y,z) = (y+z, x+z, x+y).$$
   Determine:
   (a) os autovalores de T;
   (b) os auto-espaços de T;
   (c) uma base β de autovetores de T;
   (d) a matriz de mudança de base de β para a base canônica do $\mathbb{R}^3$.

3. Seja S o plano do $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vetores $(1,1,0,0)$ e $(1,0,1,1)$. Determine
   (a) o complemento ortogonal $S^\perp$ de S;
   (b) um operador linear T de $\mathbb{R}^4$ cujo núcleo é S e cuja imagem é $S^\perp$ em S.

4. Considere a matriz
$$Q = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ a & 2/3 & 1/3 \\ b & 1/3 & c \end{pmatrix}.$$
   Determine valores para a, b e c de forma que Q descreva uma rotação de $\mathbb{R}^3$. Ache o eixo e o cosseno do ângulo de rotação de Q.

Resolução

1. Como o operador é auto-adjunto, autovetores associados a autovalores distintos têm que ser ortogonais. Logo qualquer vetor não nulo perpendicular a $(1,1)$ será autovetor associado a 3. Portanto,

$$\beta = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1) \right\}$$

é base ortonormal de autovetores de T. Assim,

$$(T)_\beta = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad Q = (\mathrm{id})_{\beta\epsilon} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$(T)_\epsilon = Q(T)_\beta Q^t,$$

já que Q é ortogonal.

2. A matriz desta transformação na base canônica é

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

cujo polinômio característico é

$$\det(A - tI) = -(t+1)(t^2 - t - 2),$$

que tem raízes 2 e -1. Portanto, estes são os autovalores de T. Para calcular o auto-espaço asociado a 2, devemos resolver o sistema cuja matriz é

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Aplicando eliminação gaussiana a esta matriz, obtemos

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

que corresponde ao sistema

$$\begin{aligned} x - 2y + z &= 0 \\ y - z &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, o auto-espaço associado a 2 é gerado por $(1,1,1)$. Já o auto-espaço associado a -1 é a solução do sistema cuja matriz é

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto, os vetores deste auto-espaço satisfazem $x+y+z=0$. Isto significa que o auto-espaço é

$$\langle(-1,0,1),(-1,1,0)\rangle.$$

Finalmente, a matriz mudança de base de β para ϵ é

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Para obter o complemento ortogonal, vou completar a base $\{(1,1,0,0),(1,0,1,1)\}$ de S para uma base de $\mathbb{R}^4$ e aplicar Gram-Schimdt. Podemos escolher,

$$\{(1,1,0,0),(1,0,1,1),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}.$$

Aplicando Gram-Schmidt,

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0,0),$$

donde

$$w_2 = (1,0,1,1) - \frac{1}{2}(1,1,0,0) = \frac{1}{2}(1,-1,2,2)$$

que ao ser normalizado nos dá

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}(1,-1,2,2)$$

Estes dois vetores formam uma base ortonormal de S. Tomando

$$w_3 = (0,0,1,0) - 0\cdot u_1 - \frac{2}{10}(1,-1,2,2)$$

obtemos, ao normalizar,

$$u_3 = \frac{1}{\sqrt{15}}(-1,1,3,-2)$$

Para obter o último vetor, calculamos

$$w_4 = (0,0,0,1) - 0\cdot u_1 - \frac{2}{10}(1,-1,2,2) + \frac{2}{15}(-1,1,3,-2) = \frac{1}{3}(-1,1,0,1);$$

teremos que
$$u_4 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, 0, 1).$$
Portanto, $\{u_1, u_2\}$ é base ortonormal de S e $S^{\perp}$ é gerado por $\langle u_3, u_4 \rangle$.

Para definir a transformação T pedida, basta tomar
$$\begin{aligned} T(u_1) &= 0 \\ T(u_2) &= 0 \\ T(u_3) &= u_3 \\ T(u_4) &= u_4 \end{aligned}$$
o que nos dá uma matriz
$$(T)_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Como a matriz de mudança de base
$$Q = (\mathrm{id})_{\beta\epsilon} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{15}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{15}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{15}} & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{10}} & -\frac{2}{\sqrt{15}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$
é ortogonal, temos que
$$(T)_\epsilon = Q(T)_\beta Q^t.$$

4. Da ortogonalidade da primeira e segunda linhas, obtemos $a = -2/3$ e da ortogonalidade da segunda e terceira colunas, $c = 2/3$. Usando o valor de a já obtido, a ortogonalidade das duas últimas linhas nos dá $b = 2/3$. A matriz resultante é
$$Q = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$
cujo determinante é 1. Portanto, Q é uma matriz ortogonal de determinante 1; isto é, Q descreve uma rotação. Para calcular o eixo basta determinar um autovetor de Q. Para

isto, resolvemos o sistema cuja matriz é

$$Q - I = \begin{pmatrix} -2/3 & 2/3 & -2/3 \\ -2/3 & -1/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

que, com a eliminação gaussiana, transforma-se em

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Portanto, o auto-espaço de Q associado ao autovalor 1 tem equações

$$\begin{aligned} -x + y - z &= 0 \\ -y + z &= 0; \end{aligned}$$

e é gerado por $(0, 1, 1)$. Logo o eixo da rotação é a reta $\langle(0, 1, 1)\rangle$. Como $u = (1, 0, 0)$ é ortogonal ao eixo, temos que

$$Qu = (1/3, -2/3, 2/3).$$

Logo, se θ for o ângulo de rotação, então

$$\cos(\theta) = \frac{u^t Q u}{\|u\| \|Qu\|} = u^t Q u = \frac{1}{3}.$$

1. Seja U o plano de equação $x - y + 2z = 0$ e ℓ a reta gerada por $(1, 1, 2)$.
   (a) Determine um operador linear de $\mathbb{R}^3$ cujo núcleo é U e cuja imagem é ℓ.
   (b) Prove que um operador que satisfaz as propriedades de (a) não pode ser auto-adjunto.

2. Determine *todos* os valores possíveis de a, b e c para os quais a matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & b & 0 \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

   corresponda a um operador diagonalizável.

3. Ache um paralelepípedo que seja levado em um cubo de lado 8 pelo operador linear T de $\mathbb{R}^3$ definido por

$$T(x, y, z) = (2x + y + z, x + 2y + z, x + y + 2z).$$

4. Seja R uma rotação de eixo ℓ em $\mathbb{R}^3$ e $v = (1, 1, 1)$ um vetor ortogonal a ℓ. Sabendo-se que $Rv = (1, -1, 1)$, determine:
   (a) o cosseno do ângulo de rotação de R;
   (b) o eixo da rotação R;
   (c) a matriz de R na base canônica.

Resolução

1. Seja P o operador de $\mathbb{R}^2$ que descreve a projeção ortogonal sobre uma reta ℓ. Determine a matriz de T na base canônica sabendo que $P(1,1) = (10,15)$.

2. Considere os subespaços do $\mathbb{R}^4$

$$U = \{(x,y,z,w) \,|\, y+z+w=0\}$$
$$W = \langle (1,-,1,0,0),(2,-2,2,1),(5,-5,2,1)\rangle$$

   (a) Ache a base e a dimensão de $U+W$.
   (b) Ache a base e a dimensão de $U \cap W$.
   (c) Ache um subespaço complementar de U em $\mathbb{R}^4$.

3. Seja T o operador linear de $\mathbb{R}^3$ definido por $T(x,y,z) = (3x+y, x+3y, 2z)$.

   (a) Determine os autovalores e os autovetores de T.
   (b) Determine uma base ortonormal B formada por autovetores de T.
   (c) Determine a matriz Q de mudança de base de B para a base canônica. Q é uma rotação?

4. Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & \sqrt{2} & 0 \\ b & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Determine todos os valores de a, b e c para os quais A descreve uma reflexão.
   (b) Determine a equação do plano de reflexão (o espelho).

1. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear que consiste de uma rotação anti-horária de $\pi/3$ radianos seguida de uma reflexão que tem a reta $y = 2x$ como espelho.
   (a) Determine a matriz de T.
   (b) Explique porque T é uma isometria.
   (c) T é uma rotação ou uma reflexão?

2. Determine a matriz de uma transformação linear $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que leve o paralelogramo de vértices
$$(0,0), (2,0), (2,1), (4,1)$$
no quadrado de vértices
$$(0,0), (1,0), (0,1), (1,1).$$

3. Calcule o valor de c em função de a e b de modo que o sistema
$$\begin{cases} x + 8y - 2z &= a \\ 5x + 4y - 2z &= b \\ 7x - 16y + 2z &= c \end{cases}$$
admita (a) uma única solução, (b) nenhuma solução ou (c) mais de uma solução.

4. Considere o sistema linear $AX = b$, em que
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & 2 & 10 & -2 \\ 5 & 2 & 12 & -3 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 16 \\ 19 \end{bmatrix}$$
   (a) Determine geradores para o conjunto solução do sistema linear homogêneo $AX = 0$.
   (b) Determine uma expressão geral para todas as soluções de $AX = b$.

1. A matriz da rotação é

$$R = \begin{bmatrix} \cos(\pi/3) & -\operatorname{sen}(\pi/3) \\ \operatorname{sen}(\pi/3) & \cos(\pi/3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

A reflexão se dá relativamente ao espelho $y = 2x$, que tem vetor diretor $(1, 2)$. Logo, o vetor unitário perpendicular a $y = 2x$ é $u^t = (2, -1)/\sqrt{5}$, de modo que a reflexão terá matriz

$$F = I - 2uu^t = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Logo a matriz A de T é igual a

$$A = FR = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 4\sqrt{3} - 3 & 3\sqrt{3} + 4 \\ 3\sqrt{3} + 4 & -4\sqrt{3} + 3 \end{bmatrix}.$$

Esta é uma isometria porque uma rotação e uma reflexão são isometrias e a composta de quaisquer duas isometrias também é uma isometria. Além do mais, como o determinante desta matriz é igual a -1, então T tem que ser uma reflexão.

2. É mais fácil determinar a matriz da transformação S^{-1} que leva o quadrado no paralelogramo, pois

$$S^{-1}(1, 0) = (2, 0) \quad \text{e} \quad S^{-1}(0, 1) = (2, 1);$$

que nos dá a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para achar S basta calcular a inversa desta matriz; mas se

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

então obtemos o sistema

$$\begin{aligned} 2a + 2c &= 1 \\ 2b + 2d &= 0 \\ c &= 0 \\ d &= 1 \end{aligned}$$

que nos dá $a = 1/2$ $b = -1$, $c = 0$ e $d = 1$; donde

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

que é a matriz de S.

3. A matriz aumentada do sistema é

$$\begin{bmatrix} 1 & 8 & -2 & a \\ 5 & 4 & -2 & b \\ 7 & -16 & 2 & c \end{bmatrix}.$$

Aplicando eliminação gaussiana a esta matriz obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 8 & -2 & a \\ 0 & -36 & 8 & b-5a \\ 0 & 0 & 0 & 3a-2b+c \end{bmatrix}.$$

Para começar, o sistema nunca tem uma única solução (determinado). Ele tem mais de uma solução (indeterminado) quando $c = -3a + 2b$ e nenhuma solução (impossível) em qualquer outro caso.

4. A matrix aumentada do sistema $AX = b$ é

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 10 & -2 & 16 \\ 5 & 2 & 12 & -3 & 19 \end{bmatrix},$$

cuja forma escada é

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

que corresponde ao sistema

$$\begin{aligned} x + 2y + 4z + w &= 7 \\ y + z + w &= 2 \end{aligned}$$

que tem como uma de suas soluções $[1, 1, 1, 0]^t$. Por outro lado, o sistema linear homgêneo associado corresponde

$$\begin{aligned} x + 2y + 4z + w &= 0 \\ y + z + w &= 0 \end{aligned}$$

de modo que

$$y = -z - w \quad \text{e} \quad x = -2z + w;$$

donde

$$[x, y, z, w] = [-2z + w, -z - w, z, w] = z[-2, -1, 1, 0] + w[1, -1, 0, 1].$$

Portanto o conjunto solução do sistema homogêneo associado é gerado pelos vetores $[-2, -1, 1, 0]^t$ e $[1, -1, 0, 1]^t$. Como qualquer solução de um sistema indeterminado é igual a uma solução particular somada a uma solução qualquer do sistema homogêneo associado, podemos escrever a solução geral de $AX = b$ na forma

$$[1, 1, 1, 0]^t + z[-2, -1, 1, 0]^t + w[1, -1, 0, 1]^t$$

quaisquer que sejam os valores escolhidos para z e w.

1. Seja $b > 10^{900}$ um número real. Determine todos os valores de a para os quais os vetores
$$(1,1,1),\ (1,a,a^2),\ (1,b,b^3)$$
são linearmente *dependentes*.

2. Seja R a reflexão de $\mathbb{R}^3$ que transforma o vetor $(1,3,2)$ em $(3,2,1)$. Determine:
   (a) o plano de reflexão (o espelho);
   (b) a matriz de R.

3. Considere os subespaços de $\mathbb{R}^4$
$$W_1 = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid y+z+w=0\};$$
$$W_2 = \langle (1,-1,0,0), (2,-2,2,1), (5,-5,2,1) \rangle$$
   (a) Ache uma base e a dimensão de W_2.
   (b) Ache um subespaço W_1', contido em W_2, que satisfaz $W_1 \oplus W_1' = \mathbb{R}^4$.

4. Seja $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ a transformação linear definida por
$$T(x,y,z,w) = (x+y, y-z, z-w, y-w).$$
Determine:
   (a) uma base e a dimensão do núcleo de T;
   (b) uma base e a dimensão da imagem de T.

Resolução

1. Para que os vetores

$$(1,1,1),\ (1,a,a^2),\ (1,b,b^3)$$

sejam linearmente dependentes é preciso que existam números reais x, y e z, não todos nulos, tais que

$$x(1,1,1)+y(1,a,a^2)+z(1,b,b^3)=0;$$

o que ocorrerá se, e somente se, o sistema

$$\begin{aligned} x+y+z&=0\\ x+ay+bz&=0\\ x+a^2y+b^3z&=0. \end{aligned}$$

A matriz do sistema é

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & a & b\\ 1 & a^2 & b^3 \end{bmatrix}.$$

Eliminando as posições da primeira coluna, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1\\ 0 & a-1 & b-1\\ 0 & a^2-1 & b^3-1 \end{bmatrix}$$

Multiplicando a segunda linha por $a+1$ e somando à terceira, resta

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1\\ 0 & a-1 & b-1\\ 0 & 0 & (b^3-1)-(b-1)(a+1) \end{bmatrix};$$

de modo que o sistema só tem solução não nula (isto é, só é indeterminado) se

$$(b^3-1)-(b-1)(a+1)=0.$$

Mas isto é equivalente a dizer que

$$b^3-ab+a-b=0,$$

donde

$$a(b-1)=b^3-b=b(b-1)(b+1).$$

Como $b>1$, podemos concluir que

$$a=b(b+1).$$

Portanto, os vetores só podem ser linearmente dependentes se $a = b(b+1)$.

2. Como $R(1,3,2) = (3,2,1)$ e R é uma reflexão, podemos concluir que

$$(3,2,1) - (1,3,2) = (2,-1,-1)$$

é perpendicular ao espelho. Portanto, o plano do espelho tem equação

$$2x - y - z = 0.$$

Como o vetor unitário

$$u^t = \frac{1}{\sqrt{6}}[2,-1,-1]$$

é normal ao espelho, a matriz de R será igual a

$$I - 2uu^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Logo

$$\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

é a matriz desejada.

3. Pondo os vetores que geram W_2 nas linhas de uma matriz e aplicando eliminação gaussiana, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 1 \\ 5 & -5 & 2 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

de modo que

$$\{(1,-1,0,0), (0,0,0,2,1)\}$$

é uma base de W_2 que, portanto, tem dimensão 2.

Para resolver (b), devemos achar uma base de W_1 e completá-la para obter uma base de $\mathbb{R}^4$ usando vetores contidos em W_2. Mas se $(x,y,z,w) \in W_1$, então

$$(x,y,z,w) = (x, -z-w, z, w) = x(1,0,0,0) + z(0,-1,1,0) + w(0,-1,0,1).$$

Como

$$(1,0,0,0), (0,-1,1,0), (0,-1,0,1)$$

são linearmente independentes, então geram W_1. Mas $(1,-1,0,0) \in W_2$ é linearmente independente com estes vetores, pois a eliminação gaussiana aplicada a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

nos dá

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto, podemos tomar $W_1' = \langle (1,-1,0,0) \rangle$.

4. O núcleo de T é igual ao conjunto solução do sistema

$$\begin{aligned} x + y &= 0 \\ y - z &= 0 \\ z - w &= 0 \\ y - w &= 0 \end{aligned}$$

de modo que $(x,y,z,w) \in N(T)$ se, e somente se,

$$(x,y,z,w) = (-w,w,w,w) = w(-1,1,1,1).$$

Logo o núcleo tem base

$$B = \{(-1,1,1,1)\}$$

e dimensão um. A maneira mais fácil de calcular uma base da imagem de T é completar B para uma base de $\mathbb{R}^4$, o que pode ser feito facilmente; por exemplo,

$$\{(-1,1,1,1),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}.$$

Mas, como vimos na demonstração do teorema do núcleo e da imagem, a imagem destes três últimos vetores têm que ser linearmente independentes e gerar a imagem. Como,

$$\begin{aligned} T(0,1,0,0) &= (1,1,0,0) \\ T(0,0,1,0) &= (0,-1,1,0) \\ T(0,0,0,1) &= (0,0,-1,-1) \end{aligned}$$

podemos concluir que a imagem de T tem base

$$\{(1,1,0,0),(0,-1,1,0),(0,0,-1,-1)\}$$

e dimensão três.

1. Seja
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$
   (a) Determine os autovalores e autovetores de A.
   (b) Determine uma matriz inversível M tal que MAM^{-1} seja diagonal.
   (c) É possível escolher para M uma matriz ortogonal?

2. Seja P a matrix 3×3 que descreve a projeção ortogonal sobre o plano de equação $x + 2y + z = 0$. **Sem calcular** P, determine seus autovalores e os auto-espaços correspondentes. Justifique sua resposta a partir da descrição geométrica de P.

3. Dê exemplo de uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ que satisfaça
$$T(1,1,1) = (1,1,0,0) \text{ e } T(1,-1,0) = (1,0,1,0),$$
e que leve o complemento ortogonal de $\langle(1,1,1),(1,-1,0)\rangle$ em um vetor do complemento ortogonal de $\langle(1,1,0,0),(1,0,1,0)\rangle$.

Resolução

1. Expandindo $\det(A - \lambda I)$ pela primeira linha, obtemos o polinômio característico
$$(2-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 3)$$
cujas raízes são 1, 2 e 3. Vamos calcular os autovetores correspondentes a cada um destes autovalores. Quando $\lambda = 1$, o sistema a resolver é
$$A - I = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

de modo que $x = y = z$. Portanto, o auto-espaço associado ao autovalor 1 é gerado por $\langle(1,1,1)\rangle$. Quando $\lambda = 2$, o sistema a resolver é

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

de modo que $x = y = 0$. Portanto, o auto-espaço associado ao autovalor 1 é gerado por $\langle(0,0,1)\rangle$. Finalmente, o auto-espaço associado ao autovalor 3 é o conjunto solução do sistema

$$A - 3I = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

de modo que $x = -y$ e $y = -z$. Portanto este último auto-espaço é gerado por $(-1,1,-1)$. Como a soma das dimensões dos auto-espaços é 3, a matriz é diagonalizável e a matriz M existe e é igual a

$$M = (\mathrm{id})_{B\epsilon} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Não podemos escolher M como sendo ortogonal porque se isto fosse possível então A poderia ser escrita na forma

$$A = MDM^{-1} = MDM^t;$$

donde teríamos que

$$A^t = (MDM^t)^t = (M^t)^t D^t M^t = MDM^t = A,$$

e A seria simétrica, o que não é verdade.

2. Como se trata de uma projeção ortogonal sobre o plano $x + 2y + z = 0$, devemos ter que os vetores perpendiculares a este plano são levados no zero e os vetores sobre o plano não sofrem nenhuma alteração. Mas $u = (1,2,1)$ é ortogonal ao plano. Por outro lado, os vetores sobre o plano são da forma

$$(x,y,z) = (-2y - z, y, z) = y(-2,1,0) + z(-1,0,1).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} P(1,2,1) &= 0 \\ P(-2,1,0) &= (-2,1,0) \\ P(-1,0,1) &= (-1,0,1). \end{aligned}$$

Logo, P tem como autovalores 0 e 1 e os auto-espaços correspondentes são

$$V_0 = \langle (1,2,1) \rangle \ \text{ e } \ V_1 = \langle (-2,1,0), (-1,0,1) \rangle.$$

3. Como $(1,1,1)$ e $(1,-1,0)$ são ortogonais, vou completá-los acrescentando um vetor perpendicular a ambos. Se (x,y,z) for este vetor, devemos ter

$$\langle (x,y,z), (1,1,1) \rangle = \langle (x,y,z), (1,-1,0) \rangle = 0;$$

donde

$$x + y + z = x - y = 0,$$

que tem como solução os vetores da forma

$$(x,y,z) = (y, y, -2y) = y(1,1,-2).$$

Normalizando os vetores, obtemos

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1), \ u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0) \ \text{ e } \ u_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2).$$

Escolheremos como base de $\mathbb{R}^3$,

$$B = \{u_1, u_2, u_3\}.$$

Nesta base a transformação é dada por

$$\begin{aligned} T(u_1) &= \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,0,0) \\ T(u_2) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1,0) \\ T(u_3) &= \frac{1}{\sqrt{6}}(0,0,0,1) \end{aligned}$$

em que o último vetor foi escolhido por estar no complemento ortogonal do subespaço $\langle (1,1,0,0), (1,0,1,0) \rangle$. Com isto,

$$(T)_{B\epsilon} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \quad Q = (\mathrm{id})_{B\epsilon} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad (T)_\epsilon = (T)_{B\epsilon} Q^t$$

4. Para que

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a+3b \\ 1 & 0 & 5b \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

seja ortogonal, suas colunas devem formar uma base ortonormal. Efetuando o produto direto entre colunas distintas, verificamos que $5b = 0$, donde $b = 0$. Por outro lado, as duas primeiras colunas são vetores unitários mas, para que a terceira coluna satisfaça esta condição, devemos ter que $(a + 3b)^2 + 25b^2 = 1$. Como $b = 0$, isto implica que $a = \pm 1$. Portanto, para que Q seja ortogonal, devemos ter que $a = \pm 1$ e $b = 0$. Para determinar para quais destes valores Q é uma rotação, calculamos o determinante. Note que

$$\det Q = \det \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = a,$$

pois para chegar a esta segunda matriz trocamos as colunas duas vezes. Portanto, Q é uma rotação quando $a = 1$. Neste caso,

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e o eixo corresponde ao auto-espaço de 1 que é o conjunto solução do sistema

$$Q - I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

que nos dá $x = y = z$. Portanto, o eixo é a reta de vetor diretor $(1, 1, 1)$. Por outro lado o vetor $u = (-1, 1, 0)/\sqrt{2}$ é unitário, perpendicular ao eixo e tem como imagem

$$Qu = (0, -1, 1)/\sqrt{2}.$$

Portanto, o cosseno do ângulo de rotação θ será

$$\cos(\theta) = \langle Qu, u \rangle = -\frac{1}{2}$$

1.1 Considere o sistema

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= b \\ 3x + 5y + 2z &= 2b \\ 4x + ay + 3z &= 2 + b \end{aligned}$$

Determine os valores de a e b para os quais:

(a) o sistema é determinado, indeterminado ou impossível;

(b) o conjunto solução do sistema é um subespaço de $\mathbb{R}^3$.

1.2 Determine a matriz da transformação linear de $\mathbb{R}^2$ que corresponde à rotação anti-horária de um ângulo de $\pi/6$ graus seguida da projeção sobre a reta $y = 5x$.

2.1 Considere a transformação $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ cuja matriz relativa à base canônica é

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 9 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Determine:

(a) uma base e a dimensão do núcleo de T;

(b) uma base e a dimensão da imagem de T;

(c) o complemento ortogonal do núcleo de T.

2.2 Seja R a reflexão de $\mathbb{R}^3$ que transforma o vetor $(1, 3, 2)$ em $(3, 2, 1)$.

(a) Determine o plano de reflexão (o espelho).

(b) Determine a matriz de R na base canônica.

3.1 Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

(a) Calcule os autovalores e autovetores de $B = AA^t$.

(b) A matriz B é diagonalizável?

(c) Determine, se existir, uma matriz ortogonal Q tal que QBQ^t seja uma matriz diagonal.

3.2 Seja R a rotação de eixo $\ell = (1, 1, 1)$ que leva o vetor $u_1 = (1, 0, 0)$ em $u_2 = (0, 1, 0)$.

(a) Qual a relação entre $u_1 - u_2$ e ℓ?

(b) Calcule $R(u_1 - u_2)$ e use isto para achar a matriz de R na base canônica.

(c) Calcule R^{18}.

1. Calcule a decomposição LU da matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 8 & 17 & 65 \\ 14 & 34 & 165 \end{bmatrix}$$

2. Considere o sistema linear de equações

$$\begin{aligned} x + ky + 7z + 9w &= k \\ 3x + (4k+1)y + 22z + 28w &= 3k+3 \\ 2x + (3k+1)y + (2k+15)z + 20w &= 2k-5 \\ x + (3k+2)y + (2k+9)z + (k+10)w &= k+30. \end{aligned}$$

Determine os valores de k para os quais este sistema é (a) determinado, (b) indeterminado, (c) impossível.

3. Considere a transformação linear S do plano que corresponde à reflexão R que leva o vetor $(5, 12)$ no vetor $(0, 13)$ *seguida* da rotação *horária* de $\pi/6$ que chamaremos de ρ. Sabendo-se que as coordendas dos vetores acima foram dadas relativamente à base $\epsilon = \{e_1, e_2\}$ do plano formada por vetores unitários e perpendiculares entre si, determine:

   (a) as matrizes de R e ρ relativamente à base ϵ;

   (b) a matriz de S relativamente à base ϵ;

   (c) a imagem do vetor $(1, 1)$ pela transformação S.

4. Existe alguma matriz inversível A, de tamanho 2×2, que satisfaça à condição $A^{-1} = -A$? Dê exemplo de uma tal matriz, se a resposta for sim; caso contrário, prove que tal matriz não pode existir.

   Oferta do dia: ganhe 1/2 ponto a mais respondendo o que acontece quando A é uma matriz de tamanho $n \times n$. Mais uma vez você deve dar exemplos para todos os valores de n relativos aos quais existe uma matriz com a propriedade desejada e provar que uma tal matriz não pode existir nos outros casos.

1. Aplicando eliminação gaussiana a

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 & | & 1 & 0 & 0 \\ 8 & 17 & 65 & | & 0 & 0 & 0 \\ 14 & 34 & 165 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

obtemos a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & | & -8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 13 & | & 34 & -6 & 1 \end{bmatrix}$$

de modo que

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 13 \end{bmatrix}.$$

Usando eliminação para inverter o bloco da direita, aplicamos eliminação à matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ -8 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 34 & -6 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 14 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

de modo que

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 0 \\ 14 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

e a decomposição LU da matriz dada é

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 8 & 17 & 65 \\ 14 & 34 & 165 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 0 \\ 14 & 6 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 13 \end{bmatrix}.$$

2. A matriz aumentada do sistema dado é

$$\begin{bmatrix} 1 & k & 7 & 9 & | & k \\ 3 & (4k+1) & 22 & 28 & | & 3k+3 \\ 2 & (3k+1) & (2k+15) & 20 & | & 2k-5 \\ 1 & (3k+2) & (2k+9) & (k+10) & | & k+30 \end{bmatrix}$$

à qual aplicaremos eliminação gaussiana obtendo

$$\begin{bmatrix} 1 & k & 7 & 9 & | & k \\ 0 & k+1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 0 & 0 & 2k & 1 & | & -8 \\ 0 & 0 & 0 & k-2 & | & 32 \end{bmatrix}$$

que corresponde ao sistema triangular superior

$$\begin{aligned} x + ky + 7z + 9w &= k \\ (k+1)y + z + w &= 3 \\ 2kz + w &= -8 \\ (k-2)w &= 32 \end{aligned}$$

Para que a última equação tenha solução é preciso que $k \neq 2$. Portanto, se $k = 2$ já temos que o sistema é impossível. Como há k em outras posições da diagonal, a análise precisa continuar. Se $k = 0$, o sistema se torna

$$\begin{aligned} x + +7z + 9w &= 0 \\ y + z + w &= 3 \\ w &= -8 \\ -2w &= 32; \end{aligned}$$

que também é impossível, pois as duas últimas equações são incompatíveis. Finalmente, se $k = -1$, o sistema é

$$\begin{aligned} x + ky + 7z + 9w &= k \\ z + w &= 3 \\ -2z + w &= -8 \\ -3w &= 32 \end{aligned}$$

que também é impossível. Portanto, o sistema dado originalmente é

determinado se $k \neq -1, 0, 2$;

impossível se $k = -1$ ou $k = 2$ ou $k = 0$;

indeterminado nunca.

3. A matriz da rotação é

$$\rho = \begin{bmatrix} \cos(\pi/6) & \operatorname{sen}(\pi/6) \\ -\operatorname{sen}(\pi/6) & \cos(\pi/6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}.$$

Note o posicionamento do sinal, porque se trata de uma rotação *horária*. O vetor normal ao espelho em torno do qual se dá a reflexão é

$$(5, 12) - (0, 13) = (5, -1)$$

que normalizado nos dá

$$u = \frac{1}{26}(5, -1).$$

Portanto, a matriz da reflexão é

$$R = I - 2uu^t = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} -12 & 5 \\ 5 & 12 \end{bmatrix}.$$

Logo a matriz S é igual a

$$A = \rho \cdot R = \frac{1}{26}\begin{bmatrix} -12\sqrt{3} + 5 & 5\sqrt{3} + 12 \\ 5\sqrt{3} + 12 & 12\sqrt{3} - 5 \end{bmatrix},$$

donde a imagem de $(1, 1)$ por S é igual a

$$S \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{26}\begin{bmatrix} -7\sqrt{3} + 17 \\ 17\sqrt{3} + 7 \end{bmatrix},$$

4. $A^{-1} = -A$ equivale a $A^2 = -I$. Como o determinante de um produto é igual ao produto de determinante, temos que

$$\det(A^2) = \det(A)^2.$$

Se A tiver tamanho $n \times n$ isto implica que

$$\det(A)^2 = (-1)^n;$$

de modo que se n for ímpar $\det(A)^2 = -1$ implica que uma tal matriz não existe. No caso em que $n = 2$, podemos escrever

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

cujo quadrado é

$$A^2 = \begin{bmatrix} a^2 + bc & bd + ab \\ cd + ac & d^2 + bc \end{bmatrix}.$$

Igualando esta matriz a $-I$, obtemos o sistema

$$\begin{aligned} a^2 + bc &= -1 \\ bd + ab &= 0 \\ cd + ac &= 0 \\ d^2 + bc &= -1. \end{aligned}$$

Subtraindo a primeira da última, concluímos que $a^2 = d^2$, donde $a = d$ ou $a = -d$. No caso em $a = d$, o sistema nos dá $ac = 0$ e $ab = 0$. Tomando $a = 0$, temos $bc = -1$, o que nos permite escolher $b = 1$ e $c = -1$. Destas escolhas resulta

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

cujo quadrado é mesmo igual a $-I$. Quando $n = 2k$ podemos tomar a matriz em blocos

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & E \\ 0 & \cdots & 0 & E & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ E & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

cujo quadrado é $-I$.

1. Considere o plano E de equação $x - y + 2z = 0$. Seja R a matriz na base canônica da reflexão cujo espelho é E e S a matriz obtida trocando-se as duas primeiras linhas de R entre si.

   (a) Determine R.

   (b) Explique porque S é uma rotação e determine a matriz de mudança de base M e o ângulo de rotação θ tal que MSM^{-1} é da

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) & 0 \\ \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Considere o operador linear do $\mathbb{R}^4$ cuja matriz na base canônica é

$$(T)_\epsilon = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & k+1 & 1 & 0 \\ 3 & k+3 & k & 4 \\ 1 & k+1 & k & k+2 \end{bmatrix}$$

   (a) Para que valores de k a transformação T é injetiva.

   (b) Para que valores de k a transformação T é inversível.

3. Considere o operador S do $\mathbb{R}^4$ definido por

$$S(x, y, z, w) = (x + w, 3x + 4y + 3w, 5x + 7y + 2z + 4w, 2w).$$

   (a) Calcule os autovalores de S.

   (b) Calcule os autoespaços de S.

   (c) S é diagonalizável? Justifique cuidadosamente sua resposta.

4. Analise cada cada uma das afirmações abaixo e determine se são verdadeiras ou falsas, justificando cuidadosamente suas respostas.

   (a) Existe uma transformação linear do $\mathbb{R}^3$ que leva o plano $x+y+z = 0$ no plano $x - y - z = 0$ e a reta gerada por $(1, -1, 0)$ nela mesma.

   (b) Se A é uma matriz diagonalizável $n \times n$, então A^3 também é diagonalizável.

Resolução

1. O plano E tem como vetor diretor unitário

$$u = \frac{1}{\sqrt{6}}[1, -1, 2]^t$$

de modo que a reflexão será

$$R = I - 2uu^t = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Trocando-se as duas primeiras linhas obtemos a matriz

$$S = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

que tem que ser uma rotação porque S é ortogonal e tem determine um. Para saber isto não preciso fazer nenhuma conta. Basta lembrar que toda reflexão é ortogonal e tem determinante -1. Ao trocar as linhas, a matriz continua sendo ortogonal, porque a mudança de posições dos vetores não altera o fato das linhas formarem uma base ortonormal quando consideradas como vetores. Por outro lado, a troca de linhas muda o sinal do determinante que, de -1, passou a valer 1.

Para calcular o eixo, achamos o autovetor de um em S resolvendo o sistema $Sv = v$, cuja matriz é

$$S - I = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -4 \end{bmatrix}.$$

Aplicando eliminação gaussiana a esta matriz, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

que corresponde ao sistema

$$\begin{aligned} x - y &= 0 \\ w &= 0 \end{aligned}$$

cuja solução é a reta de vetor diretor $u = (1, 1, 0)$. O vetor $v = (0, 0, 1)$ é perpendicular a u e

$$Sv = \frac{1}{3}[2, -2, 1]^t$$

de modo que se θ for o ângulo de rotação, teremos

$$\cos\theta = \langle Sv, v\rangle = \frac{1}{3}$$

e $\theta = \arccos(1/3)$. Para determinar a base B na qual a matriz desta rotação tem a forma desejada, basta calcular uma base ortonormal do plano ortogonal ao eixo; por exemplo,

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0), (0, 0, 1)\right\}.$$

Assim,

$$B = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0), (0, 0, 1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)\right\}.$$

e a matriz M é

$$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Aplicando eliminação gaussiana,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & k+1 & 1 & 0 \\ 3 & k+3 & k & 4 \\ 1 & k+1 & k & k+2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & k & 1 & -1 \\ 0 & 0 & k-1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

que corresponderá a um sistema indeterminado quando $k = -1, 1, 0$. Como o núcleo corresponde às soluções do sistema homogêneo $Tv = 0$, temos que o núcleo é não nulo quando $k = -1, 1, 0$. Mas a transformação é injetiva se, e somente se, o núcleo é nulo. Logo T é injetiva se $k \neq -1, 1, 0$. Como domínio e contradomínio têm a mesma dimensão, T é sobrejetiva se, e somente se, for injetiva. Como inversível é o mesmo que sobrejetiva e injetiva, podemos concluir que T é bijetiva, e portanto, inversível quando $k \neq -1, 1, 0$.

3. Se

$$A = (S)_\epsilon \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 3 \\ 5 & 7 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

então calculamos $\det(A - tI)$ expandindo o determinante pela última linha, depois pela última coluna de uma matriz 3×3 e finalmente calculando o determinante da matriz 2×2 que resulta disto, obtendo o polinômio característico $(2-t)^2(1-t)(4-t)$. Portanto, os autovalores de S são 2, 1 e 4. Para calcular o autoespaço de 2, aplicamos eliminação à matriz

$$A - 2I = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 3 \\ 5 & 7 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 23 \\ 0 & 1 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

que corresponde ao sistema

$$\begin{aligned} x - 23w &= 0 \\ y + 15w &= 0 \\ w &= 0 \end{aligned}$$

cujo conjunto solução é gerado pelos vetores

$$(0, 0, 1, 0).$$

Portanto, o autoespaço de 2 é

$$\langle (0, 0, 1, 0) \rangle$$

Procedendo de maneira semelhante para os outros dois autovalores, verificamos que o autoespaço de 1 é gerado por $(-1, 1, -2, 0)$ e o autoespaço de 4 por $(0, 2, 7, 0)$. Como só temos três autovetores independentes no $\mathbb{R}^4$, não há como formar uma base de autovetores de S. Logo S não pode ser diagonalizável.

4. (a) é falso porque a reta esta no plano de partida, mas não no da chegada. Mas se um plano for levado no outro, tudo o que está sobre o primeiro tem que ser levado no segundo. Já (b) é verdadeira porque se A for diagonalizável, então existe uma matriz de mudança de base M e uma matriz diagonal D tal que

$$D = MAM^{-1}.$$

Mas, elevando esta fórmula ao cubo, obtemos

$$D^3 = (MAM^{-1})^3 = MAM^{-1} \cdot MAM^{-1} \cdot MAM^{-1} = MA^3M^{-1},$$

provando, assim, que A^3 também é diagonalizável.

1 Em computação quântica a matriz

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

descreve a chamada *porta de Hadamard*.

(a) Mostre que H descreve uma reflexão do plano.

(b) Calcule o espelho desta reflexão.

2 Considere a cônica cuja equação é

$$x^2 - 10xy + y^2 = 2.$$

(a) Determine a forma canônica e identifique esta cônica.

(b) Determine a matriz da rotação que converte esta cônica à sua forma canônica e o respectivo ângulo de rotação.

3 Considere o sistema linear de equações

$$\begin{aligned} x + y + kz &= 1 \\ x + ky + z &= 1 \\ kx + y + z &= 1. \end{aligned}$$

(a) Determine os valores de k para os quais este sistema é determinado, aqueles para os quais é indeterminado e aqueles para os quais é impossível.

(b) Determine as soluções do sistema (em função de k) para aqueles valores de k para os quais o sistema é determinado.

Oferta especial do dia É claro que se ρ_1 e ρ_2 são matrizes de rotações do plano, então $\rho_1\rho_2$ também é a matriz de uma rotação. Suponha, agora, que R_1 e R_2 são matrizes que correspondem a reflexões do plano: a que tipo de transformação linear corresponde a matriz R_1R_2?

1. Para determinar que H representa uma reflexão basta mostrar que existe uma reta r cujos vetores ficam inalterados por H (que faz o papel do espelho) e que todo vetor ortogonal a esta reta é levado no seu oposto. Para descobrir a reta r basta resolver a equação matricial $HX = X$, em que X é uma matriz de variáveis de tamanho 2×1. Tomando $X = [x, y]^t$ a equação matricial será

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

que corresponde ao sistema linear

$$\begin{aligned} (\sqrt{2}-1)x - y &= 0 \\ x - (\sqrt{2}+1)y &= 0. \end{aligned}$$

Observe que a segunda equação pode ser obtida multiplicando-se a primeira por $(\sqrt{2}+1)$, de modo que as duas equações são independentes. Mas, da primeira equação, temos que

$$y = (\sqrt{2}-1)x,$$

de modo que a reta desejada tem $[1, \sqrt{2}-1]^t$ como vetor diretor. Portanto, um vetor normal à esta reta é $v = [1-\sqrt{2}, 1]^t$. Mas,

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1-\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 2-\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}-1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

de modo que $Hv = -v$. Verificamos, assim, que H é realmente uma reflexão. Outra maneira de proceder para identificar uma reflexão é usar que uma matriz descreve uma reflexão se, e somente se, é ortogonal e tem determinante igual a 1.

Uma terceira maneira é supor que $u = [a, b]^t$ é um vetor unitário e calcular a matriz da reflexão cujo espelho é u. Como $n = [-b, a]^t$ é unitário e ortogonal a u, a reflexão terá por matriz

$$R = I - 2nn^t = \begin{bmatrix} -2b^2+1 & 2ab \\ 2ab & -2a^2+1. \end{bmatrix} \tag{1}$$

Para que esta matriz seja igual a H, devemos ter que

$$\begin{aligned} -2b^2+1 &= 1/\sqrt{2} \\ ab &= 1/2\sqrt{2} \\ -2a^2+1 &= -1/\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Da primeira e da terceira equações obtemos

$$b = \pm\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \quad \text{e} \quad a = \pm\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$

Como

$$\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2^2-\sqrt{2}^2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{2\sqrt{2}},$$

devemos tomar a e b como tendo o mesmo sinal. Logo, o espelho terá como vetor diretor

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \\ \\ \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ \\ \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ \\ \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ \\ \sqrt{2}-1 \end{bmatrix}.$$

Note que não basta saber que $\det(R) = 1$, nem que R é da forma dada pela equação (1) para podermos concluir que R é uma reflexão. Em ambos os casos precisamos saber também que R é ortogonal.

2. A equação matricial correspondente à cônica dada é $X^tAX = 2$, em que

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ \\ y \end{bmatrix}.$$

O polinômio característico de A é

$$p(t) = \det(A - tI) = \det\begin{bmatrix} 1-t & -5 \\ \\ -5 & 1-t \end{bmatrix} = (1-t)^2 - 25,$$

donde concluímos que $1 - t = \pm 5$. Portanto, os autovalores de A são -4 e 6. Com isto já podemos responder a letra (a), porque os autovalores acima correspondem à cônica

$$6x_1^2 - 4y_1^2 = 2,$$

cuja forma canônica é

$$\frac{x_1^2}{1/3} - \frac{y_1^2}{1/2} = 1.$$

Temos, portanto, que a cônica é uma hipérbole.

Para poder determinar a rotação e responder a letra (b), calculamos o autovetor associado ao autovalor 6. Para isto, precisamos resolver a equação matricial

$$\begin{bmatrix} -5 & -5 \\ \\ -5 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \\ 0 \end{bmatrix},$$

que corresponde ao sistema $5x + 5y = 0$, já que as duas equações são iguais. Temos, assim, um sistema indeterminado cujas soluções são da forma $[x, -x]^t$. Portanto, o vetor unitário

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

é autovetor associado a 6. Logo o autovetor associado a -4 terá que ser ortogonal a u, de modo que podemos tomá-lo como sendo

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Logo, a rotação desejada terá por matriz

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

e o ângulo de rotação θ terá tangente igual a -1, de modo que $\theta = -\pi/4$.

Como

$$6x_1^2 - 4y_1^2 = [x_1, y_1] \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

temos que, ao expressar a equação canônica da hipérbole na forma $6x_1^2 - 4y_1^2 = 2$ estamos supondo, implicitamente, que a primeira coluna de Q é um autovetor de 6 e a segunda é um autovetor de -4. Como $[1, -1]^t$ é autovetor de 6, então a matriz correta para Q é

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e não} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

3. O sistema dado tem como matriz aumentada

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & k & | & 1 \\ 1 & k & 1 & | & 1 \\ k & 1 & 1 & | & 1 \end{bmatrix}.$$

Aplicando eliminação gaussiana

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & k & | & 1 \\ 1 & k & 1 & | & 1 \\ k & 1 & 1 & | & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & k & | & 1 \\ 0 & k-1 & 1-k & | & 0 \\ 0 & 1-k & 1-k^2 & | & 1-k \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & k & | & 1 \\ 0 & k-1 & 1-k & | & 0 \\ 0 & 0 & 2-k-k^2 & | & 1-k \end{bmatrix}$$

que corresponde ao sistema triangular

$$\begin{aligned} x + y + kz &= 1 \\ (k-1)y + (1-k)z &= 0 \\ (2 - k - k^2)z &= 1 - k. \end{aligned}$$

Para saber quando o sistema é indeterminado e quando é impossível precisamos descobrir para quais valores de k o coeficiente de z na última equação se anula. Resolvendo $2 - k - k^2 = 0$ descobrimos que isto ocorre quando $k = 1$ ou $k = -2$. Portanto, quando $k = 1$ a última equação se torna $0z = 0$ e temos um sistema indeterminado, ao passo que, quando $k = 2$, a última equação se torna $0z = 3$ e o sistema é impossível. Note que, quando $k = 1$ a segunda equação também se anula! O sistema será determinado quando $k \neq -2, 1$. Resumindo, o sistema é

Indeterminado quando $k = 1$;

Impossível quando $k = -2$;

Determinado quando $k \neq -2, 1$.

Supondo que $k \neq -2, 1$, podemos resolver o sistema triangular superior acima, obtendo

$$x = y = z = \frac{1}{k+2}.$$

Oferta do dia: De acordo com o exercício 33 das notas de aula, se M é uma matriz que satisfaz $MM^t = I$ então, das duas uma, ou o determinante de M é 1 e M é uma rotação, ou o determinante de M é -1 e M é uma reflexão. Portanto, se R_1 e R_2 correspondem a reflexões, então:

$$R_1 R_1^t = R_2 R_2^t = I \quad \text{e} \quad \det(R_1) = \det(R_2) = -1.$$

Contudo,

$$(R_1R_2)(R_1R_2)^t = (R_1R_2)(R_2^t R_1^t) = R_1(R_2R_2^t)R_1^t = R_1R_1^t = I,$$

ao passo que

$$\det(R_1R_2) = \det(R_1)\det(R_2) = (-1)^2 = 1,$$

de modo que R_1R_2 será uma rotação.

Como no caso da reflexão, não basta saber que Q tem determinante 1 para podermos concluir que corresponde a uma rotação, precisamos saber também que Q é ortogonal. Por exemplo, a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

tem determinante igual a 1, mas não é uma rotação porque, por exemplo,

$$Ae_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

mas $\|e_1\| = 1$, ao passo que $\|Ae_1\| = \sqrt{13}$; no entanto, uma rotação não altera o comprimento de um vetor.

4 Seja R a transformação linear do $\mathbb{R}^4$ cuja matriz é

$$R = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 5 & -2 & -4 & -2 \\ -2 & 5 & -4 & -2 \\ -4 & -4 & -1 & -4 \\ -2 & -2 & -4 & 5 \end{bmatrix}.$$

(a) Mostre que R descreve uma reflexão do $\mathbb{R}^4$.

(b) Determine o espelho desta reflexão.

5 Quais dos conjuntos abaixo são subespaços do $\mathbb{R}^4$? Justifique cuidadosamente suas respostas.

(a) $\{[x, y, z, w]^t \in \mathbb{R}^4 \,|\, x^2 + y^2 = 0\}$;

(b) $\{[x, y, z, w]^t \in \mathbb{R}^4 \,|\, x^2 - y^2 = 0\}$;

(c) $\{v \in \mathbb{R}^4 \,|\, v + ku_0 = 0 \text{ para algum } \; k \in \mathbb{R}^4\}$;

(d) $\{v \in \mathbb{R}^4 \,|\, \langle v|u_0\rangle = 3\}$;

em que $u_0 = [1, 1, -2, -3]^t$.

6 Considere os seguintes subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^4$:

$$W_1 = \{[x, y, z, w]^t \,|\, x - y + z = x + y - z - w = 5x + y - z - 3w = 0\};$$
$$W_2 = \langle [1, 2, 1, 1]^t, [1, 0, 1, 2]^t, [1, 3, 3, 2]^t, [4, 2, 4, 7]^t, [8, 17, 18, 15]^t \rangle.$$

(a) Calcule uma base e a dimensão de W_2.

(b) Calcule uma base e a dimensão de $W_1 \cap W_2$.

Oferta especial do dia Mostre que o conjunto das matrizes A de tamanho 4×4 que satisfazem $A^t = -A$ é um subespaço do espaço de todas as matrizes de tamanho 4×4 e ache uma base para este subespaço.

4. Uma reflexão tem que deixar fixos todos os vetores de um hiperplano (o espelho) e tem que inverter a normal ao hiperplano. Para determinar quais são os vetores fixados por R resolvemos o sistema $Rv = v$, em que $v \in \mathbb{R}^4$ é um vetor a ser determinado. Mas $Rv = v$ equivale ao sistema homogêneo $(R - I)v = 0$ em que I é a matriz identidade 4×4. Assim,

$$R - I = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} -2 & -2 & -4 & -2 \\ -2 & -2 & -4 & -2 \\ -4 & -4 & -8 & -4 \\ -2 & -2 & -4 & -2 \end{bmatrix}.$$

Como todas as linhas desta matriz são múltiplas umas das outras, o conjunto dos vetores fixos por R corresponde ao hiperplano de equação $x + y + 2z + w = 0$. Resta-nos verificar se os vetores normais a este hiperplano, que são múltiplos de $n = [1, 1, 2, 1]^t$, são levados em seus simétricos. Mas

$$Rn = \frac{1}{7}[-7, -7, -14, -7]^t = -n,$$

confirmando que R é uma reflexão cujo espelho é o hiperplano de equação $x+y+2z+w = 0$.

Não é verdade que uma matriz ortogonal e de determinante igual a -1 define uma reflexão em espaços de dimensão maior que dois. Por exemplo, a matriz

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

é ortogonal, simétrica e tem determinante -1, mas não descreve uma reflexão porque, para isto, teria que haver um espelho, que é um hiperplano cujos vetores não são alterados pela reflexão. Acontece que a matriz acima leva cada vetor do $\mathbb{R}^3$ em seu simétrico.

Uma solução diferente da que eu dei acima, e que apareceu nas provas, consiste em escolher um vetor qualquer, digamos $e_1 = [1, 0, 0, 0]^t$ e calcular sua reflexão. O vetor normal ao hiperplano será igual a

$$Re_1 - e_1 = \frac{1}{7}[5, -2, -4, -2]^t - [1, 0, 0, 0]^t = [-2, -2, -4, -2]^t,$$

do qual obtemos n por normalização.

5. Vamos considerar cada conjunto separadamente.

(a) $x^2 + y^2 = 0$ tem uma única solução real, que é $x = y = 0$. Portanto,

$$\{[x, y, z, w]^t \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 = 0\} = \{[x, y, z, w]^t \in \mathbb{R}^4 \mid x = y = 0\}$$

que é subespaço, pois todo conjunto solução de sistema homogêneo é um subespaço.
(b) Fatorando, temos que

$$0 = x^2 - y^2 = (x - y)(x + y).$$

Como esta igualdade só pode ser verdadeira se $x - y = 0$ ou $x + y = 0$, temos que

$$\{[x, y, z, w]^t \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 - y^2 = 0\}$$

é a união de

$$\{[x, y, z, w]^t \in \mathbb{R}^4 \mid x - y = 0\}$$

com

$$\{[x, y, z, w]^t \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = 0\}.$$

Em outras palavras, o conjunto dado em (b) é a união de duas retas que se cruzam na origem. Contudo, embora os vetores $[1, 1]^t$ e $[1, -1]^t$ pertençam a esta união,

$$[1, 1]^t + [1, -1]^t = [2, 0]^t$$

não partence, pois $2^2 - 0^2 = 4 \neq 0$.

6. (a) Para determinar uma base e a dimensão de

$$W_2 = \langle [1, 2, 1, 1]^t, [1, 0, 1, 2]^t, [1, 3, 3, 2]^t, [4, 2, 4, 7]^t, [8, 17, 18, 15]^t \rangle,$$

aplicamos eliminação gaussiana à matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 7 \\ 8 & 17 & 18 & 15 \end{bmatrix}$$

cujas linhas são os geradores de W_2, obtendo a forma escada

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

de modo que

$$\{[1,2,1,1]^t, [0,1,2,1]^t, [0,0,8,6]^t\}$$

é uma base de W_2 e, portanto, $\dim(W_2) = 3$.

(b) Precisamos, primeiramente, determinar um sistema linear cujo conjunto solução é W_1. Supondo que $ax + by + cz + dw = 0$ é uma equação deste sistema, devemos ter que

$$\begin{aligned} a + 2b + c + d &= 0 \\ b + 2c + d &= 0 \\ 8c + 6d &= 0 \end{aligned}$$

pois os elementos da base de W_2 tem que anular todas as equações do sistema desejado. Mas este sistema já está em forma triangular, de modo que podemos resolvê-lo por substituição reversa, obtendo

$$c = -\frac{3}{4}d, \quad b = \frac{1}{2}d \quad \text{e} \quad a = -\frac{5}{4}d$$

em que d funciona como parâmetro. Assim,

$$0 = ax + by + cz + dw = \frac{d}{4}(-5x + 2y - 3z + 4w);$$

de modo que W_2 é o conjunto solução de $-5x + 2y - 3z + 4w = 0$. Mas, $W_1 \cap W_2$ é o conjunto solução do sistema obtido reunindo as equações que definem W_1 àquelas que definem W_2, que é

$$\begin{aligned} x - y + z &= 0 \\ x + y - z - w &= 0 \\ 5x + y - z - 3w &= 0 \\ -5x + 2y - 3z + 4w &= 0. \end{aligned}$$

Aplicando eliminação gaussiana a este sistema, obtemos a forma escada

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -5, \end{bmatrix}$$

que corresponde ao sistema triangular

$$\begin{aligned} x - y + z &= 0 \\ 0 + y - 3w &= 0 \\ 2z - 5w &= 0. \end{aligned}$$

Resolvendo este sistema por substituição reversa, obtemos

$$z = \frac{5}{2}w, \quad y = 3w \quad \text{e} \quad x = \frac{1}{2}w,$$

de modo que todo vetor de $W_1 \cap W_2$ é da forma

$$\frac{z}{2}[1, 6, 5, 2]^t.$$

Portanto,

$$\{[1, 6, 5, 2]^t\}$$

é uma base de $W_1 \cap W_2$, que é um subespaço de dimensão um.

Oferta. Para começar, devemos mostrar que

$$U = \{A \in \mathbb{R}^{4\times 4} \,|\, A^t = -A\}$$

é um subespaço de $\mathbb{R}^{4\times 4}$, em que $\mathbb{R}^{n\times n}$ denota o conjunto de todas as matrizes de tamanho $n \times n$. Mas, a matriz nula 0 pertence a U, já que $0^t = 0 = -0$. Por outro lado,

$$(A_1 + A_2)^t = A_1^t + A_2^t.$$

Mas se $A_1, A_2 \in U$, então

$$A_1^t - A_1 \quad \text{e} \quad A_2^t - A_2,$$

donde

$$(A_1 + A_2)^t = A_1^t + A_2^t = -A_1 - A_2 = -(A_1 + A_2),$$

que nos permite concluir que $A_1 + A_2 \in U$. Além disso, se $A_1 \in U$,

$$(\lambda A_1)^t = \lambda A_1^t = \lambda(-A_1) = -(\lambda A_1)$$

de forma que $\lambda A_1 \in U$. Mostramos, assim, que U é subespaço vetorial do espaço das matrizes 4×4. Para calcular uma base, começamos por observar que $A^t = -A$ implica que a diagonal de A é nula e que todas as posições acima da diagonal são iguais a -1 vezes as posições simétricas relativamente à diagonal. Isto é,

$$a_{ii} = 0 \quad \text{e} \quad a_{ij} = -a_{ji}$$

para $1 \leq i < j \leq 4$. Denotando por E_{ij} as matrizes que têm zeros em todas as posições, exceto na posição ij, que é igual a um, podemos escrever

$$\begin{aligned} A = a_{12}(E_{12} - E_{21}) + a_{13}(E_{13} - E_{31}) + a_{14}(E_{14} - E_{41}) + \\ a_{23}(E_{23} - E_{32}) + a_{24}(E_{24} - E_{42}) + a_{34}(E_{34} - E_{43}). \end{aligned}$$

Por sorte o conjunto

$$B = \{E_{12} - E_{21}, E_{13} - E_{31}, E_{14} - E_{41}, E_{23} - E_{32}, E_{24} - E_{42}, E_{34} - E_{43}\}$$

é uma base de U. Como já sabemos que todo vetor de U é combinação linear destes vetores, basta mostrar que são linearmente independentes. Mas,

$$\begin{aligned}\alpha(E_{12} - E_{21}) + \beta(E_{13} - E_{31}) + \gamma(E_{14} - E_{41}) + \\ \delta(E_{23} - E_{32}) + \eta(E_{24} - E_{42}) + \theta(E_{34} - E_{43}) = \\ \begin{bmatrix} 0 & \alpha & \beta & \gamma \\ -\alpha & 0 & \delta & \eta \\ -\beta & -\delta & 0 & \theta \\ -\gamma & -\eta & -\theta & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

que só pode ser igual à matriz nula se

$$\alpha = \beta = \gamma = \delta = \eta = \theta = 0,$$

confirmando que o conjunto B é linearmente independente e, portanto, é mesmo uma base de U. Como B tem 6 elementos, concluímos que U tem dimensão seis.

7 Considere a trasformação linear $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x, y, z, w) = [x + y + 4z + 4w,\ x - y + 2z - 2w,\ x + 3y + 6z + 10w]^t.$$

Determine:

(a) uma base para a imagem de T e as dimensões do núcleo e da imagem de T;

(b) a matriz $(T)_{\varepsilon,\beta}$, em que ε é a base canônica do $\mathbb{R}^4$ e β é a base do $\mathbb{R}^3$ formada pelos vetores $v_1 = [1, 1, 1]^t$, $v_2 = [0, 1, 2]^t$ e $v_3 = [0, 0, 1]^t$ nesta ordem.

8 Considere os três operadores lineares do $\mathbb{R}^3$ cujas matrizes na base canônica são dadas abaixo:

$$\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 7 & 5 & -4 \\ 2 & 13 & -5 \\ 8 & -2 & 7 \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 17 & -2 & -2 \\ -2 & 14 & -4 \\ -2 & -4 & 14 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 11 & 1 & -2 \\ 4 & 11 & -4 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix},$$

Sabendo que *somente um destes três operadores é diagonalizável*, determine:

(a) qual das matrizes acima corresponde ao operador diagonalizável;

(b) uma matriz inversível M e uma matriz diagonal D tais que $MDM^{-1} = A$, em que A é a matriz escolhida no item anterior.

Você deve justificar cuidadosamente o porquê da escolha que fez no item (a).

9 Considere a rotação do $\mathbb{R}^3$ cuja matriz na base canônica é

$$Q = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 7 & -4 & 4 \\ -4 & 1 & 8 \\ -4 & -8 & -1 \end{bmatrix}.$$

Determine o eixo desta rotação e o cosseno e o seno do ângulo de rotação.

Oferta especial do dia Seja R a matrix 4×4 que descreve a reflexão do $\mathbb{R}^4$ que tem por espelho o hiperplano de equação $x - y + 2z - 7w = 0$. **Sem calcular** R, determine seus autovalores e os autoespaços correspondentes. Justifique sua resposta a partir da descrição geométrica de R.

Solução

7. (a) Como

$$\operatorname{Im}(T) = \langle T(e_1), T(e_2), T(e_3), T(e_4) \rangle$$

e

$$\begin{aligned} T(e_1) &= [1, 1, 1]^t \\ T(e_2) &= [1, -1, 3]^t \\ T(e_3) &= [4, 2, 6]^t \\ T(e_4) &= [4, -2, 10]^t \end{aligned}$$

obtemos a base da imagem de T calculando a forma escada da matriz

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ 4 & -2 & 10 \end{bmatrix} \quad \text{que é igual a} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto, a imagem de T tem base

$$\{[1, 1, 1]^t, [0, -2, 2]^t\}$$

e dimensão igual a 2. Logo, pelo Teorema do Núcleo e da Imagem o núcleo de T tem dimensão igual a $4 - 2 = 2$.

Os erros mais comuns no item (a) foram:

- confundir núcleo com imagem;
- aplicar eliminação à transposta da matriz B acima, o que daria dois vetores do $\mathbb{R}^4$ como geradores da imagem de T; note que isto não faz sentido, já que a imagem de T é um subespaço do $\mathbb{R}^3$ e não do $\mathbb{R}^4$.

Para obter a matriz $(T)_{\varepsilon,\beta}$ precisamos determinar as coordenadas dos vetores $T(e_1)$, $T(e_2)$, $T(e_3)$ e $T(e_4)$ na base β. Mas,

$$\begin{aligned} T(e_1) &= [1, 1, 1]^t = v_1 \\ T(e_2) &= [1, -1, 3]^t = v_1 - 2v_2 + 6v_3 \\ T(e_3) &= [4, 2, 6]^t = 4v_1 - 2v_2 + 6v_3 \\ T(e_4) &= [4, -2, 10]^t = 4v_1 - 6v_2 + 18v_3 \end{aligned}$$

de modo que

$$(T)_{\varepsilon,\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 \\ -2 & -2 & -6 \\ 4 & -6 & 18 \end{bmatrix}.$$

Outra maneira de fazer é calcular a matriz de mudança de base

$$(id)_{\beta\varepsilon} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

e a partir dela calcular

$$(id)_{\varepsilon\beta} = (id)_{\beta\varepsilon}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

de modo que a matriz desejada é

$$(T)_{\epsilon\beta} = (id)_{\epsilon\beta}(T)_{\varepsilon}.$$

Note que nesta questão você *não pode ortonormalizar a base* porque foi pedida a matriz de T relativamente a duas bases já dadas, a canônica ε e a base β. Outro erro que várias pessoas cometeram foi o de calcular a base da imagem a partir de $T(e_1)$, $T(e_2)$ e $T(e_3)$ e esquecer que o espaço de partida é $\mathbb{R}^4$, de modo que também é necessário levar em conta $T(e_4)$.

8. O operador diagonalizável é aquele cuja matriz é

$$A = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 17 & -2 & -2 \\ -2 & 14 & -4 \\ -2 & -4 & 14 \end{bmatrix}$$

porque esta matriz é simétrica e todo operador cuja matriz é simétrica (operador auto-adjunto) é necessariamente diagonalizável pelo Teorema Espectral.

Muita gente afirmou que para uma matriz ser diagonalizável é preciso que seja simétrica, mas isto é falso. O teorema espectral diz, apenas, que **se** a matriz do operador é simétrica

então o operador é diagonalizável. Por exemplo, o operador cuja matriz é

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

é diagonalizável, mas a matriz **não** é simétrica.

Para calcular o polinômio característico desta matriz usamos a expansão por cofatores de $\det(A - tI)$; ou seja da matriz

$$\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 17 & -2 & -2 \\ -2 & 14 & -4 \\ -2 & -4 & 14 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \det\left(\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 17-9t & -2 & -2 \\ -2 & 14-9t & -4 \\ -2 & -4 & 14-9t \end{bmatrix}\right)$$

que é igual a

$$\frac{1}{9^3}\left((17-9t)\begin{bmatrix} 14-9t & -4 \\ -4 & 14-9t \end{bmatrix} - (-2)\begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -2 & 14-9t \end{bmatrix} + (-2)\begin{bmatrix} -2 & 14-9t \\ -2 & -4 \end{bmatrix}\right).$$

Expandindo os determinantes 2×2, obtemos

$$\det(Q - tI) = \frac{1}{9^3}\left[(17-9t)((14-9t)^2 - 4^2) + 2(-2(14-9t) - 8) - 2(8 + 2(14-9t)\right].$$

Efetuando as contas, obtemos o polinômio característico

$$p(t) = \det(Q - tI) = -t^3 + 5t^2 - 8t + 4.$$

cujas raízes são 1 e 2, esta última com multiplicidade 2. Para calcular os autovetores de 1 precisamos resolver o sistema cuja matriz é

$$A - I = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 8 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{que tem como forma escada} \quad \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -2 & 5 & -4 \\ 0 & 9 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto, os autovetores de A associados a 1 são as soluções do sistema

$$\begin{aligned} -2x + 5y - 4z &= 0 \\ y - z &= 0 \end{aligned}$$

e são todos múltiplos de $[1, 2, 2]^t$. Por sua vez, os autovetores de A associados a 2 são as soluções do sistema cuja matriz é

$$A - 2I = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & -4 & -4 \\ -2 & -4 & -4 \end{bmatrix}$$

e cuja forma escada é, claramente, igual a

$$\frac{1}{9}\begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

de modo que o sistema se reduz a uma única equação, que é $x + 2y + 2z = 0$. Assim, o autoespaço de A associado a 2 tem base $\{[-2, 1, 0]^t, [-2, 0, 1]^t\}$. Como o operador é autoadjunto, podemos diagonalizá-lo usando uma base ortonormal, o que facilita as contas. Para isto precisamos aplicar Gram-Schimdt à base do autoespaço associado a 2. Fazendo isto obtemos

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}[-2, 1, 0]^t,$$

ao passo que u_2 será a normalização do vetor

$$[-2, 0, 1]^t - \langle [-2, 1, 0]^t \mid u_1 \rangle u_1 = \frac{1}{5}[-2, -4, 5]^t,$$

donde

$$u_2 = \frac{1}{3\sqrt{5}}[-2, -4, 5]^t.$$

Tomando

$$u_3 = \frac{1}{3}[1, 2, 2]^t$$

temos que a matriz do operador na base ortonormal

$$B = \{u_1, u_2, u_3\}$$

é igual a

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ao passo que M é a inversa da matriz

$$(id)_{\beta,\epsilon} = \begin{bmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \end{bmatrix},$$

que, este caso, coincide com a sua transposta, pois esta é uma matriz de mudança de base entre bases ortonormais, o que faz dela uma matriz ortogonal.

9. O eixo é o autoespaço associado a 1, que é obtido resolvendo o sistema cuja matriz é

$$\begin{bmatrix} -2 & -4 & 4 \\ -4 & 8 & 8 \\ -4 & -8 & -10 \end{bmatrix}, \quad \text{que tem forma escada} \quad \begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto, o eixo é o conjunto solução do sistema

$$-x - 2y + 2z = z = 0 \quad \text{que equivale a} \quad x + 2y = z = 0,$$

e que é gerado por $[-2, 1, 0]^t$. Para calcular o seno e o cosseno do ângulo de rotação θ precisamos escolher uma base ortonormal $B = \{u_1, u_2\}$ do **plano ortogonal ao eixo**. Podemos tomar, por exemplo,

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}[1, -2, 0]^t \quad \text{e} \quad u_2 = [0, 0, 1]^t.$$

Neste caso,

$$Qu_1 = \cos(\theta)u_1 + \operatorname{sen}(\theta)u_2.$$

Como a base é ortonormal, as coordenadas de u_1 e u_2 podem ser calculadas usando o produto interno. Como

$$Qu_1 = \left[-\frac{\sqrt{5}}{45}, -\frac{2\sqrt{5}}{45}, -\frac{4\sqrt{5}}{9}\right]^t,$$

teremos

$$\cos(\theta) = \langle u_1 \,|\, Qu_1 \rangle = -\frac{1}{9}$$
$$\operatorname{sen}(\theta) = \langle u_2 \,|\, Qu_1 \rangle = -\frac{4\sqrt{5}}{9}.$$

Os erros mais comuns nesta questão foram:

- calcular as soluções do sistema cuja matriz é

$$\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 7-1 & -4 & 4 \\ -4 & 1-1 & 8 \\ -4 & -8 & -1-1 \end{bmatrix} \quad \text{em vez de} \quad \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 7-9 & -4 & 4 \\ -4 & 1-9 & 8 \\ -4 & -8 & -1-9 \end{bmatrix}$$

- calcular o cosseno a partir do vetor ao longo do eixo, em vez de um vetor perpendicular ao eixo;

- esquecer que a fórmula
$$\cos(\theta) = \langle Qu, u \rangle$$
se aplica apenas a um vetor ortogonal ao eixo que é *unitário*, no caso de um vetor v que não é unitário teremos
$$\cos(\theta) = \frac{\langle Qv, v \rangle}{\|v\|^2};$$

- ignorar o sinal do seno e concluir de
$$\operatorname{sen}(\theta)^2 = 1 - \cos(\theta)^2 = 1 - \frac{1}{81} = \frac{80}{81}$$
que
$$\operatorname{sen}(\theta) = \pm\frac{\sqrt{80}}{9} = \pm\frac{4\sqrt{5}}{9}.$$

Oferta Especial do Dia: Os vetores do espelho de uma reflexão R não são alterados pela reflexão, ao passo que os vetores da reta ortogonal ao espelho são invertidos. Portanto, toda reflexão tem por autovalores 1 e -1 e, no caso da refexão dada o autoespaço de 1 é o hiperplano $x - y + 2z - 7w = 0$, ao passo que o autoespaço de -1 é a reta perpendicular ao espelho, que neste caso é $\langle [1, -1, 2, -7]^t \rangle$.

1.1 Determine os valores de k para os quais o sistema

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ 3x + 4y + (k+3)z &= 4 \\ x + 4y + (k^2 + 2k + 1)z &= 2k + 2 \end{aligned}$$

é determinado, indeterminado ou impossível.

1.2 Considere a cônica de equação $8x^2 - 12xy + 3y^2 = 12$.

(a) Determine a forma canônica e identifique esta cônica.

(b) Determine a matriz da rotação que converte esta cônica à sua forma canônica.

2.1 Considere os seguintes subespaços do $\mathbb{R}^5$:

$$\begin{aligned} U &= \{[x, y, z, u, w] \in \mathbb{R}^5 \,|x + y + z - w = x - y + z - u = 0\} \\ W &= \langle [1, 1, 1, 1, 1]^t, [1, -1, 1, -1, 1]^t, [1, 1, 1, 1, -1]^t, [3, 1, 3, 1, 1] \rangle. \end{aligned}$$

(a) Determine uma base e a dimensão de W.

(b) Determine uma base e a dimensão de $U \cap W$.

2.2 Seja R a transformação linear do $\mathbb{R}^4$ cuja matriz é

$$R = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 5 & -2 & -4 & -2 \\ -2 & 5 & -4 & -2 \\ -4 & -4 & -1 & -4 \\ -2 & -2 & -4 & 5 \end{bmatrix}.$$

(a) Mostre que R descreve uma reflexão do $\mathbb{R}^4$.

(b) Determine o espelho desta reflexão.

3.1 Considere o operador do $\mathbb{R}^4$ cuja matriz na base canônica é

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

(a) Calcule os autovalores e autovetores de A.

(b) Determine, se existir, uma matriz diagonal D e uma matriz inversível M tais que $D = M^{-1}AM$.

3.2 Considere a rotação R cuja matriz na base canônica é

$$\frac{1}{11}\begin{bmatrix} -9 & 2 & -6 \\ -2 & 9 & 6 \\ 6 & 6 & -7 \end{bmatrix}$$

(a) Determine o eixo desta rotação.

(b) Determine o seno e o cosseno desta rotação.

Respostas

1.1 A matriz escalonada é

$$\left[\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & k & | & 1 \\ 0 & 0 & k^2 - k & | & 2k - 2 \end{array}\right]$$

de modo que o sistema é impossível se $k = 0$, indeterminado se $k = 1$ e determinado se $k \neq 0, 1$.

1.2 A forma canônica é $u^2 - 12w^2 = 12$ e a matriz de rotação é

$$\frac{1}{\sqrt{13}}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

2.1 W tem base $\{[1,1,1,1,1]^t, [0,1,0,1,0]^t, [0,0,0,0,1]^t\}$, dimensão três e é conjunto solução do sistema $x - z = y - u = 0$, ao passo que $U \cap W$ tem base $\{[1,1,1,1,3]^t\}$.

2.2 O espelho é $x + y + 2z + w = 0$.

3.1 Os autovalores são $0, 2, 5$. O autoespaço de 2 tem base $\{[1,0,1,0]^t, [0,1,0,0]^t$, o autoespaço de 0 tem base $\{[1,0,-1,0]^t\}$ e o autoespaço de 5 tem base $\{[3,5,2,5]^t\}$. As matrizes são

$$D = \mathrm{diag}([2,2,5,0]) \quad \text{e} \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

3.2 O eixo é $\langle [0,3,1]^t \rangle$ o cosseno é $-9/11$ e o seno é $2\sqrt{10}/11$.

Primeira Prova–2014/1

1. Determine todos os valores de a e b para os quais a matriz

$$Q = \begin{bmatrix} 1/3 & a \\ a & b \end{bmatrix}$$

é uma reflexão e ache os espelhos de cada uma destas reflexões.

2. Dada a equação

$$2y^2 - 12xy - 7x^2 = 5,$$

identifique a cônica correspondente e determine:

(a) sua forma canônica;

(b) a rotação que converte a equação dada em sua forma canônica.

3. Considere o sistema linear de equações

$$\begin{aligned} kx + 3y + 7z + 5w &= 1 \\ 2kx + (k^2+2)y + 16z + 10w &= k-6 \\ 2kx + (k^2+2)y + 17z + 11w &= k-2 \\ (2k^2-8)y + 4z + w &= 2k-14 \end{aligned}$$

Determine os valores de k para os quais este sistema é (a) determinado, (b) indeterminado, (c) impossível. Você deve indicar quais foram as matrizes elementares e flips que usou ao executar o processo de eliminação gaussiana.

Solução

1. Como as reflexões são transformações ortogonais, devemos ter que as colunas de

$$Q = \begin{bmatrix} 1/3 & a \\ a & b \end{bmatrix}$$

são vetores unitários e ortogonais entre si. Isto nos dá três equações:

$$\begin{aligned} 1/9 + a^2 &= 1 \\ a^2 + b^2 &= 1 \\ a/3 + ab &= 0. \end{aligned}$$

Note que da primeira equação temos que

$$a^2 = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}, \quad \text{donde,} \quad a = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Em particular, como $a \neq 0$, a última das equações acima nos dá

$$b = -\frac{1}{3}.$$

Juntando tudo isto vemos que Q tem que ter a forma

$$Q = \begin{bmatrix} 1/3 & \pm 2\sqrt{2}/3 \\ \pm 2\sqrt{2}/3 & -1/3 \end{bmatrix},$$

de modo que

$$\det(Q) = -\frac{1}{9} - \left(\pm\frac{2\sqrt{2}}{2}\right)^2 = -1.$$

Portanto, há duas possibilidades para Q:

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 1/3 & 2\sqrt{2}/3 \\ 2\sqrt{2}/3 & -1/3 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad Q_2 = \begin{bmatrix} 1/3 & -2\sqrt{2}/3 \\ -2\sqrt{2}/3 & -1/3 \end{bmatrix}$$

Há duas maneiras de achar o espelho. Vou usar uma delas para determinar o espelho de Q_1 e a outra para o espelho de Q_2. O primeiro método consiste em lembrar os vetores do espelho ficam fixos pela reflexão; isto é $Q_1 v = v$ para todos os vetores v que pertencem ao espelho. Reescrevendo o sistema na forma $(Q_1 - I)v = 0$ e tomando $v = [x, y]^t$, temos, no primeiro caso:

$$(Q_1 - I)v = \begin{bmatrix} -2/3 & 2\sqrt{2}/3 \\ 2\sqrt{2}/3 & -4/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2x + 2\sqrt{2}y \\ 2\sqrt{2}x - 4y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Note que a segunda equação deste sistema pode ser obtida multiplicando a primeira por $\sqrt{2}$, de modo que o sistema é indeterminado. Mas, da primeira equação,

$$x = \sqrt{2}y; \quad \text{donde} \quad v = y \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Os vetores unitários na direção desta reta são

$$\frac{\pm 1}{\sqrt{3}}[-\sqrt{2}, 1]^t.$$

Para aplicar o outro método de achar o espelho a Q_2 basta lembrar que se w é um vetor qualquer do plano, então o vetor obtido da soma de w com o seu reflexo sempre pertence ao espelho. Escolhendo $w = e_1$, teremos que

$$e_1 + Q_2 e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/3 & -2\sqrt{2}/3 \\ -2\sqrt{2}/3 & -1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 4 \\ -2\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Portanto, os vetores diretores unitários na direção do espelho de Q_2 são

$$\frac{\pm 1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. A matriz associada à forma quadrática $-7x^2 - 12xy + 2y^2$ é

$$A = \begin{bmatrix} -7 & -6 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}$$

e tem como polinômio característico

$$p = \det(A - tI) = t^2 + 5t - 50,$$

cujas raízes são 5 e -10. Portanto, a forma canônica da cônica dada é

$$5u^2 - 10v^2 = 5, \quad \text{isto é,} \quad u^2 - 2v^2 = 1.$$

Concluímos que a cônica é uma *hipérbole*. Para determinar a rotação, precisamos resolver o sistema:

$$(A - 5I)v = \begin{bmatrix} -12 & -6 \\ -6 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12x - 6y \\ -6x - 3y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Observe que o sistema é indeterminado, pois a segunda equação multiplicada por 2 dá a primeira equação; logo, tem como solução todos os múltiplos de

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Um vetor unitário na direção deste vetor é

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}$$

que é ortogonal a

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix};$$

de modo que a rotação desejada é dada pela matriz

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}1 & 2\\-2 & 1\end{bmatrix}.$$

3. A matriz aumentada do sistema dado é

$$\begin{bmatrix}k & 3 & 7 & 5 & | & 1\\ 2k & (k^2+2) & 16 & 10 & | & k-6\\ 2k & (k^2+2) & 17 & 11 & | & k-2\\ 0 & (2k^2-8) & 4 & 1 & | & 2k-14\end{bmatrix}$$

Multiplicando esta matriz à esquerda por $C_{31}(-2)C_{21}(-2)$, obtemos

$$\begin{bmatrix}k & 3 & 7 & 5 & | & 1\\ 0 & (k^2-4) & 2 & 0 & | & k-8\\ 0 & (k^2-4) & 3 & 1 & | & k-4\\ 0 & (2k^2-8) & 4 & 1 & | & 2k-14\end{bmatrix};$$

multiplicando esta matriz por $C_{42}(-2)C_{32}(-1)$, chegamos a

$$\begin{bmatrix}k & 3 & 7 & 5 & | & 1\\ 0 & (k^2-4) & 2 & 0 & | & k-8\\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 4\\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 2\end{bmatrix}$$

que é uma matriz em forma escada, encerrando, assim, o processo de eliminação. O sistema associado a esta última matriz é

$$\begin{aligned} kx + 3y + 7z + 5w &= 1 \\ (k^2-4)y + 2z &= k-8 \\ z + w &= 4 \\ w &= 2. \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema por substituição reversa, obtemos das duas últimas equações que $w = 2$ e $z = 2$. Substituindo nas duas equações anteriores, resta o sistema:

$$\begin{aligned} kx + 3y + 7z + 5w &= -23 \\ (k^2-4)y &= k-12 \end{aligned} \tag{2}$$

Para poder continuar o processo de substituição reversa, precisamos supor que $k \neq \pm 2$. Fazendo isto, obtemos

$$y = \frac{k-12}{k^2-4}.$$

Finalmente, para podermos obter o valor de x da primeira é preciso supor que $k \neq 0$. Fazendo, isto,

$$x = -\frac{47k^2+3k-224}{k^3-4k}.$$

Resta-nos analisar o que acontece quando $k = \pm 2$ e quando $k = 0$. Quando $k = \pm 2$, o sistema (2) se torna

$$\begin{aligned} \pm 2x + 3y + 7z + 5w &= -23 \\ 0 &= \pm 2 - 12, \end{aligned}$$

que é claramente *impossível*. Por outro lado, quando $k = 0$, o sistema (2) se torna

$$\begin{aligned} 3y + 7z + 5w &= -23 \\ -4y &= -12. \end{aligned}$$

Da segunda equação, obtemos $y = 3$. Substituindo este valor para y, assim como $z = w = 2$ na primeira equação, obtemos

$$3 \cdot 3 + 7 \cdot 2 + 5 \cdot 2 = -23,$$

que é obviamente falso, de modo que o sistema também é impossível quando $k = 0$. Resumindo tudo, temos que

- o sistema nunca é indeterminado;
- o sistema é impossível quando $k = 0$ ou $k = \pm 2$;
- o sistema é determinado quando $k \neq 0, \pm 2$.

Neste último caso, as soluções do sistema são dadas por

$$x = -\frac{47k^2+3k-224}{k^3-4k}, \quad y = \frac{k-12}{k^2-4}, \quad z = w = 2.$$

4. Sabe-se que

$$P = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

é a projeção ortogonal do $\mathbb{R}^5$ sobre um hiperplano H.

(a) Determine um vetor normal unitário e a equação de H.

(b) Determine a matriz da reflexão cujo espelho é H.

5. Seja A uma matriz $n \times m$ e considere o conjunto

$$W_A = \{v \in \mathbb{R}^n \mid v^t A = 0\}.$$

(a) Mostre que W_A é um subespaço vetorial do $\mathbb{R}^n$.

(b) Determine W_A quando A é uma matriz inversível.

Você deve justificar cuidadosamente suas respostas.

6. Considere os subespaços

$$U = \{[x, y, u, v, z]^t \mid x + y + u - z = x - y - 2u + z = 5x + y - u - z = 0\}$$
$$W = \langle [2, 1, 1, 0, 0]^t, [-4, -2, 1, 1, 1]^t, [0, 1, 3, 1, 0]^t, [-6, -3, 0, 1, 1]^t \rangle$$

Determine:

(a) uma base e a dimensão $U \cap W$;

(b) uma base e a dimensão $U^\perp + W$.

Cuidado com a ordem das variáveis!

4. Se P é uma projeção ortogonal, então o vetor normal u ao hiperplano H sobre o qual é feita a projeção tem que satisfazer $Pu = 0$. Supondo que $u = [x, y, u, v, z]^t$, vamos resolver o sistema linear

$$P = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ u \\ v \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

que equivale a

$$\begin{aligned} 3x - y - v - z &= 0 \\ -x + 3y - v - z &= 0 \\ 4u &= 0 \\ -x - y + 3v - z &= 0 \\ -x - y - v + 3z &= 0. \end{aligned}$$

Aplicando eliminação gaussiana à matriz deste sistema, obtemos a matriz escada

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

que corresponde ao sistema linear

$$\begin{aligned} -x + 3y - v - z &= 0 \\ -y + v &= 0 \\ 4u &= 0 \\ -v + z &= 0 \end{aligned}$$

cuja solução, por substituição reversa, é

$$[x, y, u, v, z]^t = z[1, 1, 0, 1, 1]^t.$$

Portanto,

$$u = \frac{1}{2}[1, 1, 0, 1, 1]^t$$

é um vetor unitário normal ao hiperplano H, cuja equação é

$$x + y + v + z = 0.$$

A matriz da reflexão cuja espelho é H é

$$I - 2uu^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} [1, 1, 0, 1, 1]$$

5. Como $(v^tA)^t = A^tv$, podemos reescrever

$$W_A = \{v \in \mathbb{R}^n \,|\, v^tA = 0\}.$$

na forma

$$W_A = \{v \in \mathbb{R}^n \,|\, A^tv = 0\};$$

o que torna W_A no conjunto solução do sistema homogêneo $A^tv = 0$. Como todo conjunto solução de sistema homogêneo é um subespaço do $\mathbb{R}^n$, segue-se que W_A é subespaço do $\mathbb{R}^n$. Por outro lado, se A é inversível, então $v^tA = 0$ implica que

$$(v^tA)A^{-1} = 0 \cdot A^{-1} = 0;$$

de modo que $W_A = \{0\}$ quando A é inversível.

6. Para poder calcular a interseção precisamos de um sistema cujo conjunto solução seja W. Vamos começar achando uma base para W porque isto facilitará as contas. Aplicando eliminação gaussiana, verificamos que a forma escada da matriz cujas linhas são os geradores de W é

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

de modo que os vetores nas três primeiras linhas da matriz acima constituem uma base de W. Suponha, agora, que

$$\alpha x + \beta y + \gamma u + \delta v + \eta z = 0$$

é uma equação do sistema cujo conjunto solução é W. Isto implica que cada um dos vetores da base de W satisfaz esta equação, de modo que

$$\begin{aligned} 2\alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \beta + 3\gamma + \delta = 0 \\ 3\gamma + \delta + \eta = 0 \end{aligned}$$

Como este sistema está em forma triangular, podemos resolvê-lo por substituição reversa, obtendo

$$\alpha = \gamma + \frac{1}{2}\delta, \quad \beta = -3\gamma - \delta, \quad \eta = -3\gamma - \delta;$$

donde

$$\left(\gamma + \frac{1}{2}\delta\right) + (-3\gamma - \delta)y + \gamma u + \delta v + (-3\gamma - \delta)z = 0$$

que equivale a

$$\gamma(x - 3y + u - 3z) + \delta\left(\frac{1}{2}\, x - y + v - z\right) = 0.$$

Portanto, W é solução do sistema

$$x - 3y + u - 3z = x - 2y + 2v - 2z = 0.$$

Logo, $U \cap W$ é o conjunto solução do sistema:

$$x - 3y + u - 3z = x - 2y + 2v - 2z = x + y + u - z = x - y - 2u + z = 5x + y - u - z = 0;$$

cuja matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

tem forma escada

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

que corresponde ao sistema triangular superior

$$x - 3y + u - 3z = 2y + z = u - z = 4v - z = 0.$$

Resolvendo este sistema por substituição reversa, obtemos

$$[x, y, u, v, z]^t = v[2, -2, 4, 1, 4]^t.$$

Portanto, $\{[2, -2, 4, 1, 4]^t\}$ é uma base de $U \cap W$ e $\dim(U \cap W) = 1$.

Passando ao item (b), temos que os

$$\begin{aligned} \langle [1, 1, 1, 0, -1]^t \mid [x, y, u, v, z]^t \rangle &= x + y + u - z = 0 \\ \langle [1, -1, -2, 0, 1]^t \mid [x, y, u, v, z]^t \rangle &= x - y - 2u + z = 0 \\ \langle [5, 1, -1, 0, -1]^t \mid [x, y, u, v, z]^t \rangle &= 5x + y - u - z = 0 \end{aligned}$$

de forma que

$$U^\perp = \langle [1, 1, 1, 0, -1]^t, [1, -1, -2, 0, 1]^t, [5, 1, -1, 0, -1]^t \rangle.$$

Para obter geradores para $U^\perp + W$ basta juntar os geradores de $U^\perp$ aos de W. A matriz cujas linhas são estes seis vetores tem forma escada

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

de modo que $U^\perp + W = \mathbb{R}^5$ e $\dim(U^\perp) = 5$.

Questão 1 (2.0 pontos)
Considere o paralelogramo $\mathcal{P}$ de vértices

$$\left\{[0,0]^t, \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}^t, \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}+2}{2} & \frac{-2\sqrt{3}+1}{2} \end{bmatrix}^t, \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}+3}{2} & \frac{-3\sqrt{3}+1}{2} \end{bmatrix}^t\right\}$$

e o quadrado $\mathcal{Q}$ de vértices $\{[0,0]^t, [1,0]^t, [0,1]^t, [1,1]^t\}$.

(a) Ache a matriz M da transformação linear que leva $\mathcal{P}$ em $\mathcal{Q}$.

(b) Escreva M como produto de uma rotação e um cisalhamento (não necessariamente nesta ordem!).

Solução:

Seja A a matriz desejada. Chamando de v_1 e v_2 o segundo e terceiro vértices de $\mathcal{P}$, precisamos que $Av_1 = e_1$ e que $Av_2 = e_2$, que equivalem a equação matricial

$$A \cdot P = Q,$$

em que P é a matriz cujas colunas são v_1 e v_2, ao passo que Q é a matriz cujas colunas são os vértices e_1 e e_2 de $\mathcal{Q}$. Mas isto significa que $Q = I$ e que

$$A = P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-2\sqrt{3}+1}{2} & \frac{-\sqrt{3}-2}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

O item (b) nos propõe mostrar que $A = R \cdot C$ ou $A = C \cdot R$. Sunponhamos que o cisalhamento seja da forma

$$C = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Quando $A = R \cdot C$, temos que

$$R = (R \cdot C) \cdot C^{-1} = A \cdot C^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-2\sqrt{3}+1}{2} & \frac{(2a-1)\sqrt{3}-a-2}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-a\sqrt{3}+1}{2} \end{bmatrix}.$$

Para que esta matriz seja uma rotação é necessário que as seguintes equações sejam satisfeitas

$$\frac{-2\sqrt{3}+1}{2} = \frac{-a\sqrt{3}+1}{2} \quad \text{e} \quad \frac{(2a-1)\sqrt{3}-a-2}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Entretanto, da primeira equação obtemos $a = 2$, ao passo que a segunda nos dá

$$a = \frac{2}{2\sqrt{3} - 1}.$$

Portanto, não há nenhum valor de a que faça desta matriz uma rotação. Supondo, agora, que $A = C \cdot R$, temos que

$$R = C^{-1} \cdot (C \cdot R) = C^{-1} \cdot A = \begin{bmatrix} \frac{(-a-2)\sqrt{3}+1}{2} & \frac{-\sqrt{3}-a-2}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Para que esta matriz seja uma rotação é necessário que as seguintes equações sejam satisfeitas

$$\frac{(-a-2)\sqrt{3}+1}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \frac{-\sqrt{3}-a-2}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Desta vez ambas as equações têm como solução $a = -2$. Logo, $A = C \cdot R$, em que

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

é o cisalhamento e

$$R = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

é a rotação.

Questão 2 (2.0 pontos)

Considere a cônica de equação $2xy\sqrt{3} + 11y^2 + 13x^2 = 3$. Determine:

(a) a forma canônica desta cônica;

(b) a rotação que converte a equação à forma canônica e o ângulo de rotação.

Solução:

Podemos escrever a canônica dada na forma $X^tAX = 3$, em que $X = [x, y]^t$ e

$$A = \begin{bmatrix} 11 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 13 \end{bmatrix}.$$

Para calcular os autovalores desta matriz precisamos resolver a equação

$$\det(A - tI) = \det \begin{bmatrix} 11-t & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 13-t \end{bmatrix} = t^2 - 12\,t + 35$$

cujas raízes são $t = 5$ e $t = 7$. Logo, a equação canônica é

$$\frac{5}{3}(x')^2 + \frac{7}{3}(y')^2 = 1,$$

e a cônica é uma elipse. Para achar a matriz de rotação Q devemos calcular os autovetores de $t = 5$ resolvendo o sistema linear dado por

$$(A - I) \cdot X = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{y\ \sqrt{3}+3\ x}{2} \\ \frac{x\ \sqrt{3}+y}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

cujas soluções são os múltiplos do vetor $[1, -\sqrt{3}]$. Normalizando este vetor, e escolhendo o vetor perpendicular a ele para a segunda coluna de Q, obtemos

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}.$$

Questão 3 (2.0 pontos)
Calcule uma aproximação para o maior dos autovalores da matriz simétrica A para a qual

$$A^{15} = \begin{bmatrix} 14623104 & 35303296 \\ 35303296 & 85229696 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A^{16} = \begin{bmatrix} 49926400 & 120532992 \\ 120532992 & 290992384 \end{bmatrix}$$

Solução:

Pelo método da potência sabemos que, se $v_k = A^k e_1$ e $v_{k+1} = A^{k+1} e_1$, então o aior dos autovalores de A pode ser aproximado por

$$\frac{v_{k+1}(1)}{v_k(1)}.$$

Tomando $k = 15$, temos que v_{16} é a primeira coluna de A^{16} e v_{15} é a primeira coluna de A^{15}, de modo que

$$\frac{v_{16}(1)}{v_{15}(1)} = \frac{49926400}{14623104} = 3.41421356$$

é a aproximação do maior autovalor de A.

Questão 4 (2.0 pontos)
Determine *todos* valores de a e b para os quais o vetor $(1, 1, 1, 1)$ pertence ao plano gerado por $(a, 2a, a, 3a)$ e $(1, b, b^2, b)$.

Solução:
Escrevendo

$$(1, 1, 1, 1) = x(a, 2a, a, 3a) + y(1, b, b^2, b),$$

obtemos o sistema

$$\begin{aligned} y + a\ x &= 1 \\ b\ y + 2\ a\ x &= 1, \end{aligned}$$

cujas soluções são

$$x = \frac{b-1}{a\ b - 2\ a}, \quad \text{e} \quad y = -\frac{1}{b-2}.$$

Logo, há solução sempre que $a \neq 0$ e $b \neq 2$. Portanto, o vetor $(1, 1, 1, 1)$ pertencerá ao plano gerado por $(a, 2a, a, 3a)$ e $(1, b, b^2, b)$ quando $a \neq 0$ e $b \neq 2$.

Questão 5 (2.0 pontos)
Considere a reflexão do $\mathbb{R}^4$ cuja matriz na base canônica é

$$R = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & -1 & -3 & -1 \\ -\frac{3}{2} & -3 & -\frac{7}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Determine:

(a) o espelho desta reflexão;

(b) a projeção do $\mathbb{R}^4$ sobre o espelho.

Solução:

Seja $v = [x, y, z, w]$ é um vetor do espelho, então $Rv = v$, de modo que v é solução do sistema homogêneo

$$0 = (R - I)v = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2}\,z - y - \frac{1}{2}\,x - \frac{1}{2}\,u \\ -3\,z - 2\,y - x - u \\ -\frac{9}{2}\,z - 3\,y - \frac{3}{2}\,x - \frac{3}{2}\,u \\ -\frac{3}{2}\,z - y - \frac{1}{2}\,x - \frac{1}{2}\,u \end{bmatrix}.$$

Como todas estas equações são múltiplas umas das outras, concluímos que os vetores do espelho são aqueles que satisfazem a equação

$$-3\,z - 2\,y - x - u = 0.$$

Portanto, o vetor normal ao espelho é $(-1, -2, -3, -1)$. Normalizando obtemos

$$u = \frac{1}{\sqrt{15}}(-1, -2, -3, -1);$$

de modo que a matriz da projeção será dada por $I - uu^t$.

Questão 1 (3.0 pontos)
Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 17 & 10 \\ 9 & 11 & 48 & 43 \end{bmatrix}$$

(a) Calcule a decomposição PLU de A.

(b) Calcule o determinante de A.

(c) Determine a solução do sistema linear $AX = [4, 8, 5, 46]^t$.

Solução:

Como vou precisar resolver o sistema $AX = [4, 8, 5, 46]^t$ no item (c), vou fazer a eliminação a partir da a matriz aumentada do sistema. Para isso, inicializamos

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 8 & 9 & 8 \\ 1 & 2 & 17 & 10 & 5 \\ 9 & 11 & 48 & 43 & 46 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Fazendo todas as eliminações possíveis a partir da primeira linha obtemos

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 15 & 7 & 1 \\ 0 & 2 & 30 & 16 & 10 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Antes de prosseguir teremos que trocar duas linhas, digamos que troquemos a segunda com a terceira:

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 15 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 30 & 16 & 10 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Continuando com a eliminação, agora a partir da segunda linha:

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 15 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 8 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 9 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para obter a decomposição PLU da matriz A basta apagar a última coluna da matriz aumentada:

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 15 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 9 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como $PA = LU$, temos que

$$\det(P)\det(A) = \det(L)\det(U).$$

Mas $\det(L)$ é sempre igual a 1 e, como P consiste apenas em uma troca de linhas, $\det(P) = -1$. Portanto, $\det(A) = -\det(U)$. Mas o determinante da matriz triangular superior U é igual ao produto das entradas em sua diagonal. Logo, $\det(A) = -8$. O sistema triangular superior equivalente ao sistema dado no item (c) é

$$\begin{aligned} x + y + 2z + 3w &= 4 \\ y + 15z + 7w &= 1 \\ 4z + 3w &= 0 \\ 2w &= 8, \end{aligned}$$

cuja solução é dada por

$$\begin{aligned} w &= 4 \\ z &= -3 \\ y &= 18 \\ x &= -20 \end{aligned}$$

Questão 2 (4.0 pontos)

Considere os seguintes subespaços do $\mathbb{R}^5$:

$U = \{[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]^t \quad | \quad x_1 + x_2 + x_3 = x_3 + x_4 + x_5 = 4x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_4 + x_5 = 0\}$
$W = \langle [2, 4, 3, 3, 1]^t, [2, 3, 4, 2, 1]^t \rangle$.

Determine:

(a) uma base e a dimensão de U;

(b) uma base e a dimensão de W;

(c) um sistema homogêneo cujo conjunto solução seja W;

(d) um sistema homogêneo cujo conjunto solução seja $U \cap W$.

Solução:

Para calcular uma base de U aplicamos eliminação à matriz do sistema homogêneo que define U:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 5 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

que corresponde ao sistema escalonado

$$x_1 + x_2 + x_3 = x_3 + x_4 + x_5 = 0$$

cujas soluções podem ser expressas na forma

$$\begin{aligned} x_3 &= -x_4 - x_5 \\ x_1 &= -x_2 + x_4 + x_5 \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 + x_4 + x_5 \\ x_2 \\ -x_4 - x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Portanto, o conjunto

$$\left\{\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\-1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\-1\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$$

é uma base de U e $\dim(U) = 3$. Passando a W, devemos escalonar a matriz cujas linhas são os geradores de W, o que nos dá

$$\begin{bmatrix}2 & 4 & 3 & 3 & 1\\2 & 3 & 4 & 2 & 1\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}2 & 4 & 3 & 3 & 1\\0 & -1 & 1 & -1 & 0\end{bmatrix}$$

Portanto,

$$\{[2,4,3,3,1]^t, \quad [0,-1,1,-1,0]^t\}$$

é uma base de W e $\dim(W) = 2$. Para achar o sistema do qual W é solução, criamos uma equação homogênea com coeficientes indeterminados

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 + ex_5 = 0 \tag{3}$$

e impomos a condição de que os vetores da base de W devem satisfazer esta equação, o que nos dá o sistema

$$\begin{aligned}2a + 4b + 3c + 3d + e &= 0\\ -b + c - d &= 0\end{aligned}$$

Como sistema já está em forma escalonada, basta resolvê-lo por substituição reversa, o que nos dá

$$\begin{aligned}b &= c - d\\ a &= (-7c + d - e)/2.\end{aligned}$$

Substituindo em (3),

$$\left(\frac{-7c + d - e}{2}\right) x_1 + (c - d)x_2 + cx_3 + dx_4 + ex_5 = 0$$

que nos dá três equações independentes

$$\begin{aligned}-7x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 0\\ x_1 - 2x_2 + 2x_4 &= 0\\ -x_1 + 2x_5 &= 0.\end{aligned}$$

Para achar $U \cap W$ basta juntar as equações que definem W às que definem U, o que nos dá,

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_3 + x_4 + x_5 &= 0 = 0 \\ -7x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 0 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_4 &= 0 \\ -x_1 + 2x_5 &= 0. \end{aligned}$$

Questão 3 (2.0 pontos)
Considere os planos

$$U_1 = \langle [1,1,1,0,0], [0,1,1,1,1] \rangle \quad \text{e} \quad U_2 = \langle [-1,1,0,-1,0], [-1,1,0,0,-1] \rangle.$$

(a) Dê exemplo de um subespaço W de dimensão 3 do $\mathbb{R}^5$ que contenha U_1 e cujos vetores sejam ortogonais a todos os vetores de U_2.

(b) O que aconteceria se, no item anterior, também exigíssemos que $W \cap U_2 \neq 0$?

Solução:

Para o espaço ter dimensão 3, sua base deve ter três vetores. Como $v_1 = [1,1,1,0,0]$ e $v_2 = [0,1,1,1,1]$ são linearmente independente e ortogonais a U_2, precisamos acrescentar um vetor independente de v_1 e v_2 e perpendicular à base dada de U_2. Mas se $v_3 = [a_1, a_2, a_3, a_4, a_5]$ for ortogonal aos vetores de U_2, então

$$-a_1 + a_2 - a_4 = -a_1 + a_2 - a_5 = 0.$$

Subtraindo estas duas equações, verificamos que $a_4 = a_5$; como $a_1 = a_2 - a_4$, obtemos

$$v_3 = [a_2 - a_4, a_2, a_3, a_4, a_4] = a_2[1,1,0,0,0] + a_3[0,0,1,0,0] + a_4[-1,0,0,1,1].$$

Como $[0,0,1,0,0]$ é claramente independente dos outros três vetores, podemos tomar

$$W = \langle [1,1,1,1,0], [0,1,1,1,1], [0,0,1,0,0] \rangle.$$

Se $W \cap U_2 \neq 0$, então existiria um vetor $v \in W$, que também estaria em U_2. Contudo, os vetores de W são, todos eles, ortogonais aos vetores de U_2 por construção, o que implicaria que v é perpendicular a ele mesmo. Em outras palavras,

$$\|v\|^2 = \langle v \mid v \rangle = 0;$$

de modo que $v = 0$ e a condição é impossível.

Questão 4 (1.0 pontos)
Sejam $v_1, \ldots, v_k$ vetores linearmente independentes do $\mathbb{R}^{2000}$.

(a) Os vetores $v_1, v_2-v_1, v_3-v_1, \ldots, v_k-v_1$ geram o mesmo subespaço que $v_1, \ldots, v_k$?

(b) Os vetores $v_1, v_2 - v_1, v_3 - v_1, \ldots, v_k - v_1$ são necessariamente linearmente independentes?

Solução:

A resposta é sim para as duas perguntas. Para ver porque isto é verdade note que

$$a_1v_1 + a_2(v_2 - v_1) + a_3(v_3 - v_1) + \cdots + a_k(v_k - v_1) = \\ (a_1 - a_2 - a_3 - \cdots - a_k)v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + \cdots + a_kv_k. \quad (4)$$

Portanto, qualquer combinação linear dos vetores $v_1, v_2 - v_1, v_3 - v_1, \ldots, v_k - v_1$ pode ser reescrita como uma combinação linear dos vetores $v_1, \ldots, v_k$, mostrando que

$$\langle v_1, v_2 - v_1, v_3 - v_1, \ldots, v_k - v_1\rangle \subseteq \langle v_1, \ldots, v_k\rangle.$$

Reciprocamente, se

$$w = \alpha_1v_1 + \cdots + \alpha_kv_k,$$

então, obtemos de (4) que

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= a_1 - a_2 - a_3 - \cdots - a_k \\ \alpha_2 &= a_2 \\ &\vdots \\ \alpha_k &= a_k; \end{aligned}$$

donde,

$$a_1 = \alpha_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_k,$$

de modo que

$$w = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_k)v_1 + \alpha_2(v_2 - v_1) + \cdots + \alpha_k(v_k - v_1);$$

mostrando que

$$\langle v_1, \ldots, v_k\rangle \subseteq \langle v_1, v_2 - v_1, v_3 - v_1, \ldots, v_k - v_1\rangle.$$

Uma solução alternativa, que algumas pessoas deram, é observar que pondo os vetores $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_k$ nas linhas de uma matriz e aplicando operações elementares por linha obtemos $v_1, v_2 - v_1, v_3 - v_1, \ldots, v_k - v_1$. Mas, como vimos em um estudo dirigido, isto preserva o fato de ser um conjunto de geradores.

Para fazer (b), podemos igualar (4) a zero e usando que $v_1, \ldots, v_k$ são, por hipótese, linearmente independentes, concluímos que

$$a_1 - a_2 - a_3 - \cdots - a_k = a_2 = a_3 = \cdots = a_k = 0;$$

donde

$$a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = a_k = 0,$$

mostrando que $v_1, v_2 - v_1, v_3 - v_1, \ldots, v_k - v_1$ também são linearmente independentes.

Várias pessoas deram uma solução para o item (b) que é melhor que a minha. Como $v_1, \ldots, v_k$ são linearmente independentes, eles geram um subespaço V, de dimensão k, no $\mathbb{R}^n$. Mas mostramos no item (a) que este mesmo subespaço também é gerado pelos vetores $v_1, v_2 - v_1, v_3 - v_1, \ldots, v_k - v_1$. Como há exatamente k vetores em $v_1, v_2 - v_1, v_3 - v_1, \ldots, v_k - v_1$, estes últimos vetores também são uma base de V, de modo que têm que ser linearmente independentes.

Questão 1 (3.0 pontos)
Considere a rotação ρ cuja matriz na base canônica é

$$(\rho)_{\varepsilon\varepsilon} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} -2 & 9 & -6 \\ 9 & -2 & -6 \\ -6 & -6 & -7 \end{bmatrix}.$$

(a) Explique o que deveria ser verificado para garantir que esta matriz realmente define uma rotação.

(b) Calcule o eixo e o ângulo da rotação.

Solução:
Para ser uma rotação a matriz deve ser ortogonal e ter determinante igual a 1. O eixo é o autoespaço do autovalor 1, que é obtido resolvendo o sistema

$$\begin{bmatrix} -\frac{13}{11} & \frac{9}{11} & -\frac{6}{11} \\ \frac{9}{11} & -\frac{13}{11} & -\frac{6}{11} \\ -\frac{6}{11} & -\frac{6}{11} & -\frac{18}{11} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

o que nos dá

$$x = y \quad \text{e} \quad z = -2y/3,$$

donde

$$[x, y, z] = [3, 3, -2]$$

Para achar o ângulo de rotação basta calcular o ângulo entre um vetor v *normal ao eixo* e $\rho(v)$. Por exemplo, escolhendo

$$v = [-1, 1, 0] \quad \text{obtemos} \quad \rho(v) = [1, -1, 0];$$

donde o ângulo θ entre v e $\rho(v)$ satisfaz

$$\cos(\theta) = \frac{\langle v, \rho(v)\rangle}{\|v\|^2} = \frac{-2}{2} = -1;$$

portanto, trata-se de uma rotação de π radianos.

Questão 2 (4.0 pontos)
Considere a matriz

$$\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 14 & -4 & 0 & 2 \\ -4 & 14 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 17 \end{bmatrix}$$

(a) Calcule os autovalores de A.

(b) Determine uma base e a dimensão de cada autoespaço de A;

(c) Esta matriz admite uma base ortonormal de autovetores? Se a resposta for sim, ache esta base.

(d) Ache uma matriz diagonal D e uma matriz inversível Q tais que $QDQ^{-1} = A$.

Solução:

O polinômio característico da matriz A é

$$p(t) = t^4 - 6\,t^3 + 13\,t^2 - 12\,t + 4,$$

cujas raízes são 1 e 2, ambas com multiplicidade dois. Portanto, tenho dois autoespaços, que são obtidos resolvendo os sistemas $(A-I)X = 0$ e $(A-2I)X = 0$. Fazendo isto, obtemos os autovetores

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

que estão associados ao autovalor um e

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

que estão associados ao autovalor dois. Como a matriz é simétrica, o teorema espectral nos garante que esta matriz pode ser diagonalizada usando uma base ortonormal. Os vetores associados ao autovetor um já são ortogonais, de modo que basta normalizá-los para obter a base

$$\beta_1 = \left\{ \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

ortonormal do autoespaço de 1. Como os autovetores que calculamos para 2 não são ortogonais, usaremos Gram-Schmidt, que nos dá

$$u_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & 0 & 0 & \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix},$$

donde

$$w_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & 0 & 0 & \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{5} & 1 & 0 & \frac{2}{5} \end{bmatrix}.$$

Normalizando w_2, obtemos

$$u_2 = \begin{bmatrix} -\frac{4\sqrt{5}}{15} & \frac{\sqrt{5}}{3} & 0 & \frac{2\sqrt{5}}{15} \end{bmatrix}$$

de modo que

$$\beta_2 = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & 0 & 0 & \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{4\sqrt{5}}{15} & \frac{\sqrt{5}}{3} & 0 & \frac{2\sqrt{5}}{15} \end{bmatrix} \right\}$$

Como a matriz é simétrica, autovetores de autovalores distintos são ortonormais, de modo que basta juntar os vetores de β_1 com os de β_2 para obter uma base ortonormal de autovetores de A. A matriz de mudança de base é

$$Q = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4\sqrt{5}}{15} \\ -\frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2\sqrt{5}}{15} \end{bmatrix}$$

e a matriz diagonal é

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Questão 3 (2.0 pontos)

Considere o subespaço W do $\mathbb{R}^4$ definido por

$$W = \{(x, y, z, w) \,|\, x - y + z = x + z - w = x - z + w = 0\}.$$

Calcule $W^\perp$ e determine sua dimensão.

Solução:
Como

$$\begin{aligned}
\langle(1,-1,1,0)\,|\,(x,y,z,w)\rangle &= x-y+z=0\\
\langle(1,0,1,-1)\,|\,(x,y,z,w)\rangle &= x+z-w=0\\
\langle(1,0,-1,1)\,|\,(x,y,z,w)\rangle &= x-z+w=0
\end{aligned}$$

temos que o complemento ortogonal é

$$\langle(1,-1,1,0),\ (1,0,1,-1),\ (1,0,-1,1)\rangle.$$

Mas estes vetores são independentes, logo $\dim(W^{\perp})=3$.

Questão 4 (1.0 pontos)
Dê exemplo de uma transformação linear T do $\mathbb{R}^4$ no $\mathbb{R}^5$, cujo núcleo é $\{0\}$ e que satisfaz $T(1,2,1,1)=(1,2,0,1,1)$, $T(1,0,1,1)=(2,1,1,0,1)$ e $T(1,1,0,1)=(4,5,1,2,3)$.

Solução:
Como

$$\begin{aligned}
&T(2\cdot(1,2,1,1)+(1,0,1,1)-(1,1,0,1))\\
&\qquad\qquad=2\cdot(1,2,0,1,1)+(2,1,1,0,1)-(4,5,1,2,3)=(0,0,0,0,0),
\end{aligned}$$

o vetor

$$2\cdot(1,2,1,1)+(1,0,1,1)-(1,1,0,1))=(4,5,3,4)$$

pertence ao núcleo de T, de modo que as condições dadas são incompatíveis; isto é, uma tal transformação não pode existir.

Questão 1 (1 ponto)
Determine a matriz correspondente à reflexão do $\mathbb{R}^2$ cujo espelho é a reta $y = 3x$.

Solução:
A matriz é
$$\frac{1}{5}\begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Questão 2 (2 pontos)
Calcule a decomposição PLU da matriz
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Solução:
$$\left[P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \right]$$

Questão 3 (2 pontos)
Considere os seguintes subespaços de $\mathbb{R}^4$:
$$U = \{[x, y, z, w]^t \mid x - y + z + w = x - 2y = 0\}$$
$$W = \langle [4, 5, 2, 3]^t, [1, 1, 2, -1]^t, [9, 11, 6, 5]^t, [2, 2, 1, 9]^t \rangle$$

Determine uma base e a dimensão de $U \cap W$ e de $U^\perp$.

Solução:

$$U^\perp = \langle (1,-1,1,1), (1,-2,0,0) \rangle$$

e, como estes vetores são linearmente independentes, formam uma base de U. Logo $\dim(U) = 2$. Por outro lado,

$$W = \{(x,y,z,w) \,|\, -64x + 45y + 11z + 3w = 0\}$$

de modo que

$$U \cap W = \{(x,y,z,w) \,|\, x - y + z + w = x - 2y = -64x + 45y + 11z + 3w = 0\}.$$

Resolvendo o sistema obtemos

$$U \cap W = \langle (-8,-4,-43,47 \rangle,$$

donde $\dim(U \cap W) = 1$.

Questão 4 (3 pontos)

Considere o operador do operador T do $\mathbb{R}^3$ cuja matriz na base canônica é

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 6 & -1 & -12 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(a) Calcule os autovalores de A.

(b) Determine uma base e a dimensão de cada autoespaço de A;

(c) Ache uma matriz diagonal D e uma matriz inversível M tais que $MDM^{-1} = A$.

(d) É possível escolher M como sendo uma matriz ortogonal? Por quê?

Solução:

O polinômio característico de T é $-t^3 - t^2 + t + 1$, cujas raízes são 1, 25 e 50. Os autovalores são 1 e -1 e as bases dos autoespaços são $\{[1,-3,1]\}$ para o autovalor 1 e

$$\{[2,0,1],[0,1,0]\}$$

para o autovalor -1. Logo, o operador é diagonalizável. A matriz de mudança de base é

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e a matriz diagonal é} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Não existe matriz ortogonal que diagonalize a matriz dada porque, pelo teorema espectral, isso só seria possível se a matriz dada fosse simétrica, o que não ocorre neste caso.

Questão 5 (2 pontos)
Determine os valores de a e b para os quais a matriz

$$R = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 4 & 8 \\ a & b & 4 \\ 8 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

é uma rotação e ache o eixo e o ângulo de rotação.

Solução:
A matriz é

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 8 \\ -4 & -7 & 4 \\ 8 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

o eixo é $[1, 0, 1]$ e o cosseno do ângulo é $-7/9$.