Question. 8-03

Softmax가 어떻게 Logit을 받아 해당 Class에 대한 Probability를 만들어 낼 수 있는지 보이시오.

1) $C=\{C_1, C_2, \cdots, C_K\}$, K개의 Class가 있을 때

$logit(C_i) = \ln\left(\frac{P(C_i)}{P(C_k)}\right)$로 표현할 수 있고, 이때 $i\neq k$인 i-Class의 logit은 $\ln\left(\frac{C_i}{C_k}\right)$이고 k-th Class의 logit은 0이다.

이를 다시 $e^{l(C_i)} = \frac{P(C_i)}{P(C_k)}$로 표현할 수 있고, $i\neq k$, $P(C_i) = e^{l(C_i)} \cdot P(C_k)$ 이다.
$i=k$, $e^{l(C_k)}=1$

이때, $\sum_{j=1}^{k-1} e^{l(C_j)} = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{P(C_j)}{P(C_k)} = \frac{1-P(C_k)}{P(C_k)} = \frac{1}{P(C_k)} - 1$ 이 된다.

따라서 $1+\sum_{j=1}^{k-1} e^{l(C_j)} = \frac{1}{P(C_k)} \Rightarrow P(C_k) = \frac{1}{1+\sum_{j=1}^{k-1} e^{l(C_j)}} = \frac{1}{e^{l(C_k)}+\sum_{j=1}^{k-1} e^{l(C_j)}}$

$\Rightarrow P(C_k) = \frac{1}{\sum_{j=1}^{k} e^{l(C_j)}}$ 이 된다.

$i\neq k$일 때 $P(C_i) = e^{l(C_i)} P(C_k)$ 이므로 $P(C_i) = \frac{e^{l(C_i)}}{\sum_{j=1}^{k} e^{l(C_j)}}$ 이고

$\sum_{j=1}^{k} e^{l(C_j)}$는 고정값 $e^{l(C_i)}$는 logit 입력이 된다.

따라서 Softmax를 통해 Class가 k개인 경우에서 logit을 입력받아
그 logit의 대상의 확률을 구할 수 있다.